Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Нижегородский государственный технический университет

Кафедра «Прикладная математика»

Использование табличного процессора Excel для реализации численных методов в инженерных и экономических расчетах

Методическая разработка
по курсу «Информатика»
для студентов всех форм обучения

Нижний Новгород 2005

3-75

Содержание

Составители: В. Ф. Билюба, В. Н. Ершов, С. Н. Митяков, О. И. Митякова,
С. П. Никитенкова, Н. Я. Николаев

УДК 651. 3. 06

Использование табличного процессора Excel для реализации численных методов в инженерных и экономических расчетах: Метод. разработка по курсу «Информатика» для студентов всех форм обучения / НГТУ;
Сост.: В. Ф. Билюба, В. Н. Ершов, С. Н. Митяков, О. И. Митякова,
С.П. Никитенкова, Н.Я. Николаев. Нижний Новгород, 2005. 36 с.

Изложены элементы
расчетах. Приведены пр
процессора Microsoft Exce

Научный редактор Н.С. П

Редактор Е. В. Комарова

Подписано в печат
Печать офсетная. Усл.

Нижегородски
Типография НГТУ. 60

Введение

При решении многочисленных инженерных и экономических задач обычно реальное явление заменяется математической моделью. Модель является упрощенным представлением реальности и обычно содержит некоторое количество уравнений. Главной задачей моделирования является максимальное приближение к реальности при достаточной простоте модели. В ряде случаев удается найти аналитическое решение задачи. Однако в большинстве своем приходится использовать численные методы. Эти методы предполагают применение ЭВМ и сводятся к некоторым действиям над числами. При этом в большинстве случаев решение является приближенным.

Существуют различные подходы к реализации численных методов. Традиционный подход предполагает построение алгоритма метода с последующим программированием на языке высокого уровня. В последнее время широко используются специализированные программные продукты - математические пакеты типа MathCad, которые существенно упрощают процесс составления алгоритма и обладают встроенными библиотеками и графическими возможностями. В данной работе описан еще один подход, позволяющий в ряде случаев существенно ускорить процесс решения задачи. Он основан на использовании табличного процессора Excel, широко распространенного среди пользователей. Вместе с тем, применение данного программного продукта для реализации численных методов до сих пор не нашло соответствующего отражения в литературе.

Методическая разработка содержит краткое описание некоторых численных методов, примеры инженерных и экономических задач и технологию их решения с использованием пакета Excel. Предполагается наличие у студентов основных навыков работы с электронными таблицами типа Excel.

1. Ознакомительные практические занятия. Освоение основных приемов работы с пакетом Excel

1.1. Контрольные вопросы

При реализации ознакомительных практических занятий предполагается наличие предварительной подготовки студентов по основным приемам работы в пакете Excel (лекции, самостоятельное изучение литературы). Ниже приводится примерный перечень контрольных вопросов. Проверка знаний осуществляется путем тестирования.

<u>1. Запуск пакета Excel. Виды меню. Панели инструментов. Технология работы с папками , файлами, книгами, листами.. Справочник</u>

- Запуск программы Excel и открытие её окна.
- Создание файла новой рабочей книги в папке пользователя.
- Создание папки пользователя на данном диске и в данной папке.

- Переименование папки.
- Перемещение окна программы Excel.
- Закрытие окна активной программы Excel.
- Сворачивание и разворачивание окна программы Excel.
- Сворачивание и разворачивание окна рабочей книги.
- Просмотр списка открытых окон книг Excel.
- Одновременная работа с несколькими книгами.
- Вставка и удаление листов рабочей книги.
- Копирование и перемещение листов.
- Переименование листов.
- Главное меню программы Excel.
- Основные кнопки панели инструментов Форматирование.
- Основные кнопки панели инструментов Стандартная.
- Изменение состава панели инструментов окна программы Excel.
- Первоначальное сохранение файла.
- Переименование файла.
- Копирование и перемещение файла.
- Удаление файла или папки из данной папки.
- Состав справочной системы.

2. Работа с данными в пакете Excel. Редактирование таблицы

- Ввод, чтение и сохранение данных.
- Основные типы данных.
- Абсолютная и относительная адресация.
- Копирование данных.
- Работа с рядами.
- Форматы данных. Числовое форматирование.
- Создание пользовательских форматов.
- Изменение параметров выделенных объектов (высота строк, ширина столбцов, добавление и удаление строк и столбцов).
- Форматирование таблицы.
- Изменение шрифта.
- Выравнивание, рамки, фон.
- Копирование и перемещение данных.
- Работа с блоками ячеек. Копирование и перемещение блоков.
- Работа с буфером обмена.
- Использование команды «Специальная вставка».

3. Функции и формулы в пакете Excel

- Понятие формул и функций.
- Основные элементы строки формул.
- Классы табличных функций: математические, статистические, логические, финансовые, даты и времени и др.

- Ввод функций и формул.
- Мастер функций.
- Редактирование формул.
- Копирование и перемещение формул.

4. Графические возможности пакета Excel

- Мастер диаграмм. Типы диаграмм.
- Ряды данных для построения диаграмм.
- График, точечная, гистограммы.
- Построение диаграмм с помощью мастера диаграмм.
- Редактирование диаграмм.
- Легенда, номер ряда, заголовки осей.
- Форматирование диаграмм.
- Форматирование легенды, масштабирование осей, изменение шкалы, метки.
- Форматирование текста заголовков осей и названия диаграммы.
- Применение тренда.

5. Параметры страницы в пакете Excel

- Размер страницы и ее ориентация.
- Установка полей.
- Колонтитулы.
- Предварительный просмотр и печать таблицы.
- Масштабирование перед выводом на печать.
- Количество страниц, копий, качество печати.

1.2. Ввод и обработка текстовых и числовых данных. Использование формул и метода автозаполнения. Относительные и абсолютные ссылки. Работа с мастером функций

Последовательность действий:

1. Регистрация пользователя (имя группы, пароль).
2. Запуск программы Excel (Пуск → Программы → Excel).
3. Создание рабочей книги (Файл → Сохранить как → диск С → папка USERS → имя группы → собственное имя книги → <ENTER>).
4. Переименование рабочего листа (Двойной щелчок на ярлычке Лист 1 и ввод текста “Данные”).
5. Создание заголовков столбцов в их первых ячейках (рис. 1) (А1: «Результаты измерений; В1: «Удвоенное значение»; С1: «Квадрат значения»; D1: «Квадрат следующего числа; Е1: «Масштабный множитель»; F1: «Масштабирование»).
6. Ввод в ячейки А2 ÷ А11 десяти произвольных значений.
7. Ввод в ячейку В2 формулы « =2*А2»; ячейку С2 формулы «=А2*А2»; ячейку D2 формулы «=В2+С2+1»; ячейку Е2 произвольного числа; ячейку F2 формулы «=А2*Е2».

8. Используя метод автозаполнения протягиванием мыши получить прямоугольный диапазон A2:D11 вычислений.
9. Изменить одно из значений столбца A и убедиться, что соответствующие значения в столбцах B, C, D этой же строки автоматически пересчитываются.
10. Протягиванием скопировать столбец F (F2:F11) и убедиться в неверном результате из-за относительной ссылки адреса E2 в формуле ячейки F2.
11. Сделать текущей ячейку F2, войти в строку формул и клавишей F4 установить абсолютную ссылку «=A2*$E$2».
12. Повторить заполнение столбца F новой формулой и убедиться в правильности вычислений.
13. Сохранить рабочую книгу (Файл → Сохранить → <ENTER>).
14. Выйти из EXCEL (Файл → Выход → <ENTER>).
15. Запустить программу Excel (Пуск → Программы → Excel).
16. Открыть свою рабочую книгу (Файл → Открыть → диск C: → папка USERS → имя группы → имя рабочей книги → <ENTER>.
17. Выбрать рабочий лист «Данные».
18. Сделать текущей первую свободную ячейку в столбце A и щелкнуть на кнопке «Автосумма» стандартной панели инструментов.
19. Убедиться, что программа автоматически подставила в формулу функцию «СУММ» и правильно выбрала диапазон ячеек для суммирования. Нажать клавишу <ENTER>.
20. Аналогично найти суммы столбцов B, C, D, F.
21. Сделать текущей следующую свободную ячейку в столбце A.
22. Через путь (Вставка → Функция → Статистическая (в списке Категория) → СРЗНАЧ (в списке «Функция») → OK вычислить среднее значение в интервале данных A2:A11. Аналогично вычислить минимальное значение (функция «МИН»), максимальное значение (функция «МАКС»).
23. Провести вычисления п.п. 21, 22 для столбцов B, C, D, F.

	A	B	C	D	E	F
1	Результаты измерений	Удвоенное значение	Квадрат значения	Квадрат следующего числа	Масштабный множитель	Масштабирование
2	3	6	9	16	2	6
3	6	12	36	49		12
4	8	16	64	81		16
5	1	2	1	4		2
6	9	18	81	100		18
7	2	4	4	9		4
8	7	14	49	64		14
9	4	8	16	25		8
10	3	6	9	16		6
11	8	16	64	81		16
12	51	102	333	445		102
13	5,1	10,2	33,3	44,5		10,2
14	1	2	1	4		2
15	9	18	81	100		18

Рис. 1

24. Сохранить рабочую книгу (Файл → Сохранить → <ENTER>).
25. Выйти из Excel (Файл → Выход → <ENTER>).

26. Подготовить компьютер к новому сеансу (Пуск → Завершение работы → Войти в систему под другим именем → <ENTER>).

1.3. Подготовка и форматирование документа Excel. Построение диаграммы

Последовательность действий:

1. Регистрация пользователя.
2. Запуск программы Excel.
3. Открыть свою рабочую книгу.
4. Переименовать следующий рабочий лист как «Прейскурант».
5. В ячейку A1 ввести название (текст) прейскуранта (рис. 2).
6. В ячейку A2 ввести текст «Курс пересчета»:, в ячейку B2 текст «1 у.е.=», в ячейку C2 ввести текущий курс пересчета.
7. В ячейку A3 ввести текст «Наименование товара», в ячейку B3 текст «Цена (у.е.)», в ячейку C3 текст «Цена (руб.)».
8. В последующие ячейки столбца A ввести 10 названий товаров, включенных в прейскурант.
9. В соответствующие ячейки столбца B ввести цены товаров в условных единицах.
10. В ячейку C4 ввести формулу с абсолютной ссылкой «=B4*$C$2", используемую для пересчета из у.е. в рубли.
11. Методом автозаполнения протягиванием мыши заполнить весь столбец C.
12. Изменить курс пересчета в ячейке C2.
13. Выделить методом протягивания диапазон A1:C1 и дать команду Формат → Ячейки. На вкладке «Выравнивание» задать выравнивание по горизонтали «По центру» и установить флажок «Объединение ячеек».
14. На вкладке «Шрифт» задать размер шрифта 14 и в списке «Начертание» выбрать вариант «Полужирный» и нажать <OK>.
15. Щелкнуть правой кнопкой мыши на ячейке B2 и выбрать в контекстном меню команду «Формат ячеек». Задать выравнивание по горизонтали «По правому краю» и нажать <OK>.
16. Щелкнуть правой кнопкой мыши на ячейке C2 и выбрать в контекстном меню команду «Формат ячеек». Задать выравнивание по горизонтали «По левому краю» и нажать <OK>.
17. Выделить методом протягивания диапазон B2:C2. Щелкнуть на раскрывающей кнопке рядом с кнопкой «Границы» на панели инструментов «Форматирование» и задать для этих ячеек широкую внешнюю рамку (кнопка в правом нижнем углу открывшейся палитры).
18. Дважды щелкнуть на границе между заголовками столбцов A и B, B и C, C и D (при этом изменяется ширина столбцов A, B, C).
19. Сохранить рабочую книгу, выйти из Excel.
20. Запустить программу Excel.
21. Открыть свою рабочую книгу.

	A	B	C
1	АВТОМОБИЛИ		
2	Курс пересчета	1 у.е=	29
3	Наименование товара	Цена в у.е	Цена в рублях
4	MERSEDES	50000	1450000
5	BMW	40000	1160000
6	OPEL	20000	580000
7	AUDI	25000	725000
8	FORD	35000	1015000
9	RENAULT	20000	580000
10	PEOGEOT	15000	435000
11	SUBARU	13000	377000
12	TOYOTA	30000	870000
13	LIMUZIN	100000	2900000

Рис. 2.

15. Переименовать следующий рабочий лист как «Обработка эксперимента».
16. В столбец А, начиная с ячейки А1, вводится произвольный набор из 15 значений независимой переменной.
17. В столбец В, начиная с ячейки В1, вводится произвольный набор значений функции.
18. Методом протягивания выделить все заполненные ячейки столбцов А и В.
19. Щелкнуть на значке «Мастер диаграмм» на стандартной панели инструментов.
20. В списке «Тип» выбрать пункт «Точечная» (для отображения графика, заданного парами значений). В палитре «Вид» выбрать пункт, где маркеры не соединяются кривыми. Щелкнуть на кнопке «Далее».
21. Убедиться в правильности данных на диаграмме. На вкладке «Ряд» в поле «Имя» указать «Результаты измерений». Щелкнуть на кнопке «Далее».
22. Выбрать вкладку «Заголовки». Убедиться, что заданное название ряда данных автоматически использовано как заголовок диаграммы. Заменить его, введя в поле «Название диаграммы» заголовок «Экспериментальные точки». Щелкнуть на кнопке «Далее».
23. Установить переключатель «Отдельном». По желанию, задать произвольное имя добавленного рабочего листа. Щелкнуть на кнопке «Готово».
24. Убедиться, что диаграмма построена и внедрена в новый рабочий лист. Рассмотреть ее и щелкнув на построенной кривой, выделить ряд данных.
25. Дать команду «Формат → Выделенный ряд». Открыть вкладку «Вид».
26. На панели «Линия» открыть палитру «Цвет» и выбрать красный цвет. В списке «Тип линии» выбрать «Пунктир».
27. На панели «Маркер» выбрать в списке «Тип маркера» треугольный маркер. В палитрах «Цвет» и «Фон» выбрать зеленый цвет.
28. Щелкнуть на кнопке <OK>. Снять выделение с ряда данных и посмотреть, как изменился вид графика.
29. Сохранить рабочую книгу, выйти из Excel.

2. Численные методы решения нелинейного уравнения с одним неизвестным

2.1. Постановка задачи

Дано уравнение $F(x)=0$. Это - общий вид нелинейного уравнения с одним неизвестным. Как правило, алгоритм нахождения корня состоит из двух этапов.

1. Отыскание приближенного значения корня или отрезка на оси абсцисс, его содержащего.

2. Уточнение приближенного значения корня до некоторой точности.

На первом этапе применяется шаговый метод отделения корней, на втором - один из методов уточнения (метод половинного деления, метод Ньютона или метод простой итерации).

2.2. Шаговый метод

Дано уравнение $F(x)=0$. Задан интервал поиска $[x_0,x_1]$. Требуется найти интервал $[a,b]$ длиной h, содержащий первый корень уравнения, начиная с левой границы интервала поиска.

Алгоритм метода:

1. Установить интервал $[a,b]$ на начало интервала поиска ($a = x_0$).

2. Определить координату точки b ($b = a+h$), а также значения функции в точках a и b: $F(a)$ и $F(b)$.

3. Проверить условие $F(a)*F(b)<0$. Если условие не выполнено - передвинуть интервал $[a,b]$ на один шаг ($a = b$) и перейти к пункту 2. Если условие выполнено - закончить алгоритм.

Решением являются координаты точек a и b. Отрезок $[a,b]$ содержит корень уравнения, поскольку функция $F(x)$ на его концах имеет разные знаки (рис. 3).

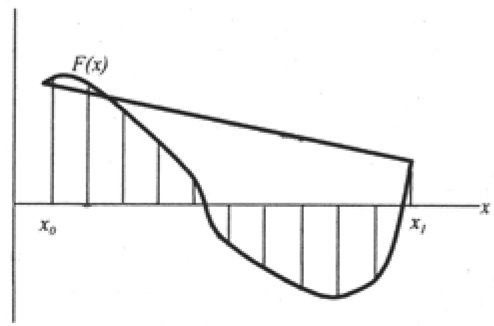


Рис. 3

Найдя первый корень, можно продолжить поиск корней по тому же алгоритму. В этом случае определяются отрезки, содержащие все корни уравнения на интервале поиска $[x_0,x_1]$. Если на всем интервале поиска ни разу не было выполнено условие $F(a)*F(b)<0$, то данный интервал вообще не содержит корней.

2.3. Метод половинного деления

Метод основан на последовательном сужении интервала, содержащего единственный корень уравнения $F(x)=0$ до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность ε. Пусть задан отрезок $[a,b]$, содержащий один корень уравнения. Этот отрезок может быть предварительно найден с помощью шагового метода.

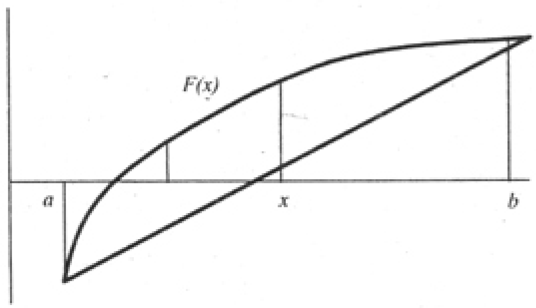
Алгоритм метода:

1. Определить новое приближение корня x в середине отрезка $[a,b]$: $x=(a+b)/2$.

2. Найти значения функции в точках a и x: $F(a)$ и $F(x)$.

3. Проверить условие $F(a)*F(x)<0$. Если условие выполнено, то корень расположен на отрезке $[a,x]$ (рис. 4). В этом случае необходимо точку b переместить в точку x ($b=x$). Если условие не выполнено, то корень расположен на отрезке $[x,b]$. В этом случае необходимо точку а переместить в точку x ($a=x$).

4. Перейти к пункту 1 и вновь поделить отрезок пополам. Алгоритм продолжить до тех пор, пока не будет выполнено условие $|F(x)|<\varepsilon$.



2.4. Метод Ньютона

Задан отрезок $[a,b]$, содержащий корень уравнения $F(x)=0$. Уточнение значения корня производится путем использования уравнения касательной. В качестве начального приближения задается тот из концов отрезка $[a,b]$, где значение функции и ее второй производной имеют одинаковые знаки (т.е. выполняется условие $F(x_0)*F''(x_0)>0$). В точке $F(x_0)$ строится касательная к кривой $y = F(x)$ и ищется ее пересечение с осью x. Точка пересечения принимается за новую итерацию. Итерационная формула имеет вид:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)}{F'(x_i)}$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие $|F(x)<\varepsilon|$, где ε - заданная точность.

2.5. Метод простой итерации

Метод основан на замене исходного уравнения $F(x)=0$ на эквивалентное $x=\varphi(x)$. Функция $\varphi(x)$ выбирается таким образом, чтобы на обоих концах отрезка [a,b] выполнялось условие сходимости $|\varphi'(x)| < 1$. В этом случае в качестве начального приближения можно выбрать любой из концов отрезка. Итерационная формула имеет вид

$$x_{i+1} = \varphi(x_i)$$

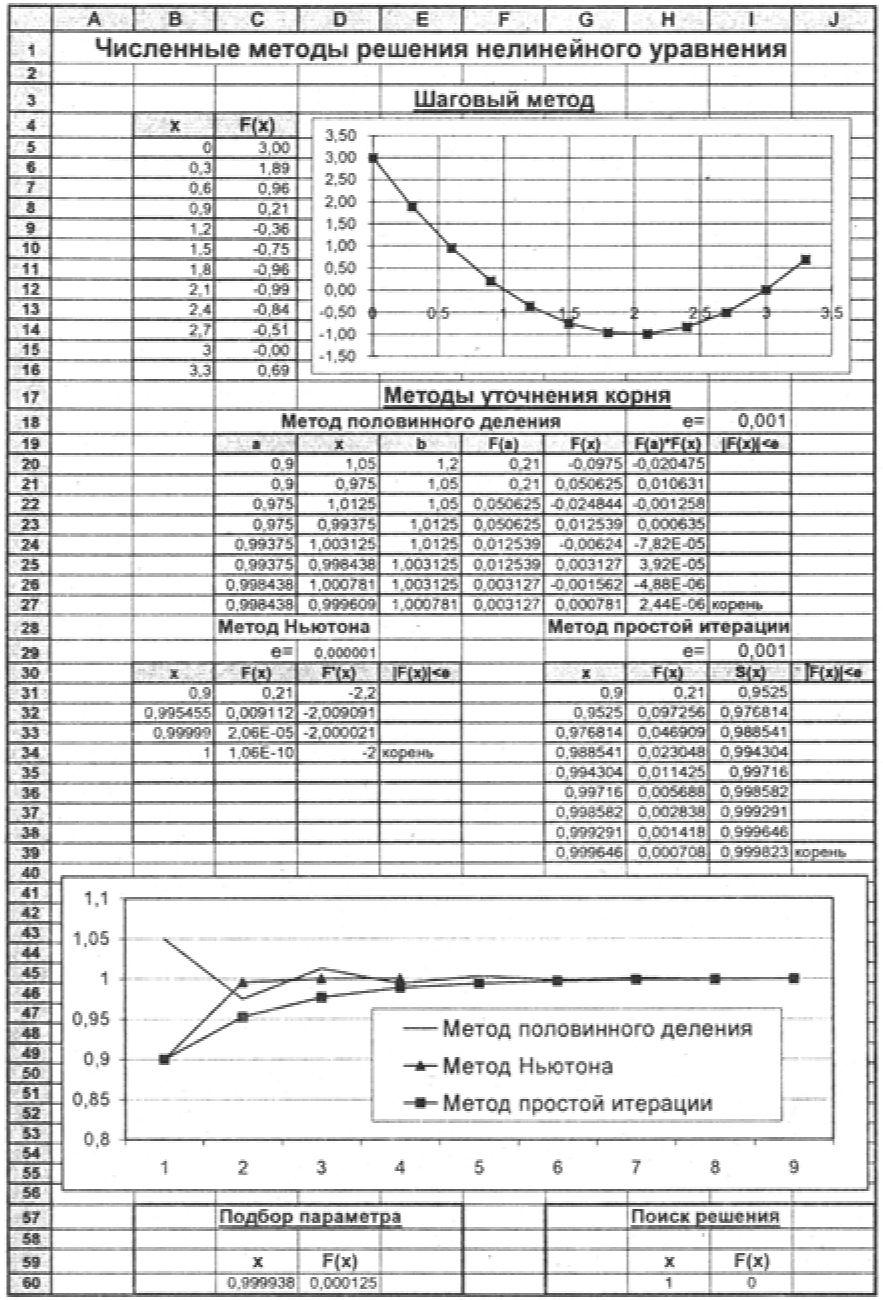
Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие $|F(x)<\varepsilon|$, где ε - заданная точность.

2.6. Реализация в пакете Excel

В качестве примера рассмотрим уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$. Интервал поиска [0;3,3], шаг $h = 0,3$. Решим его, используя различные численные методы, а также специальные возможности пакета Excel - «Подбор параметра» и «Поиск решения».

Последовательность действий (см. рис. 5):

1. Оформить заголовок в строке 1 «Численные методы решения нелинейного уравнения».
2. Оформить заголовок в строке 3 «Шаговый метод».
3. В ячейки B4 и C4 записать заголовки рядов - соответственно x и $F(x)$.
4. В ячейки B5 и B6 ввести первые два значения аргумента - 0 и 0,3.
5. Выделить ячейки B5-B6 и протащить ряд данных до конечного значения (3,3), убедившись в правильном выстраивании арифметической прогрессии.
6. В ячейку C5 ввести формулу «=B5*B5-4*B5+3».
7. Скопировать формулу на остальные элементы ряда, используя прием протаскивания. В интервале C5:C16 получен ряд результатов вычисления функции F(x). Видно, что функция дважды меняет знак. Корни уравнения расположены на интервалах [0,9;1,2] и [3;3,3].
8. Для построения графика зависимости $F(x)$ используем Мастер диаграмм (тип «Точечная», маркеры соединяются гладкими кривыми).
9. Оформить заголовок в строке 17 «Методы уточнения».
10. Ввести в ячейку E18 заголовок «Метод половинного деления» (выравнивание по центру).
11. Ввести в ячейку H18 текст «e=», а в ячейку I18 значение точности «0,001».
12. В области C19:I19 оформить заголовок таблицы (ряд C - левая граница отрезка «a», ряд D - середина отрезка «x», ряд E - правая граница отрезка «b», ряд F - значение функции на левой границе отрезка «F(a)», ряд G - значение функции на середине отрезка «F(x)», ряд H - произведение «F(a)*F(x)», ряд I - проверка достижения точности «|F(x)|<e».
13. Ввести первоначальные значения концов отрезка: в ячейку C20 «0,9», в ячейку E20 «1,2».
14. Ввести в ячейку D20 формулу «=(C20+E20)/2».



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Численные методы решения нелинейного уравнения									
2										
3					Шаговый метод					
4		x	F(x)							
5		0	3,00							
6		0,3	1,89							
7		0,6	0,96							
8		0,9	0,21							
9		1,2	-0,36							
10		1,5	-0,75							
11		1,8	-0,96							
12		2,1	-0,99							
13		2,4	-0,84							
14		2,7	-0,51							
15		3	-0,00							
16		3,3	0,69							
17					Методы уточнения корня					
18			Метод половинного деления					e=	0,001	
19			a	x	b	F(a)	F(x)	F(a)*F(x)	|F(x)|<e	
20			0,9	1,05	1,2	0,21	-0,0975	-0,020475		
21			0,9	0,975	1,05	0,21	0,050625	0,010631		
22			0,975	1,0125	1,05	0,050625	-0,024844	-0,001258		
23			0,975	0,99375	1,0125	0,050625	0,012539	0,000635		
24			0,99375	1,003125	1,0125	0,012539	-0,00624	-7,82E-05		
25			0,99375	0,998438	1,003125	0,012539	0,003127	3,92E-05		
26			0,998438	1,000781	1,003125	0,003127	-0,001562	-4,88E-06		
27			0,998438	0,999609	1,000781	0,003127	0,000781	2,44E-06	корень	
28			Метод Ньютона				Метод простой итерации			
29			e=	0,000001				e=	0,001	
30		x	F(x)	F'(x)	|F(x)|<e		x	F(x)	S(x)	|F(x)|<e
31		0,9	0,21	-2,2			0,9	0,21	0,9525	
32		0,995455	0,009112	-2,009091			0,9525	0,097256	0,976814	
33		0,99999	2,06E-05	-2,000021			0,976814	0,046909	0,988541	
34		1	1,06E-10	-2	корень		0,988541	0,023048	0,994304	
35							0,994304	0,011425	0,99716	
36							0,99716	0,005688	0,998582	
37							0,998582	0,002838	0,999291	
38							0,999291	0,001418	0,999646	
39							0,999646	0,000708	0,999823	корень
57			Подбор параметра					Поиск решения		
58										
59			x	F(x)				x	F(x)	
60			0,999938	0,000125				1	0	

Рис. 5

15. Ввести в ячейку F20 формулу «=C20*C20-4*C20+3».
16. Ввести в ячейку G20 формулу «=D20*D20-4*D20+3».
17. Ввести в ячейку H20 формулу «=F20*G20».
18. Ввести в ячейку I20 формулу «=ЕСЛИ(ABS(G20)<$I$18;"корень";" ")».
19. Ввести в ячейку C21 формулу «=ЕСЛИ(H20<0;C20;D20)».
20. Ввести в ячейку E21 формулу «=ЕСЛИ(H20<0;D20;E20)».
21. Скопировать ячейку D20 в ячейку D21, ячейки F20:I20 в ячейки F21:I21.
22. Выделить область C21:I21 и протащить ее по вертикали вплоть до появления в ряду I сообщения «корень» (ячейка I27).
23. Ввести в ячейку C28 заголовок «Метод Ньютона» (выравнивание по левому краю).
24. Ввести в ячейку C29 текст «e=», а в ячейку D29 значение точности «0,000001».
25. Убедиться, что при x=0,9 значение функции и ее второй производной имеют одинаковые знаки.
26. В области B30:E30 оформить заголовок таблицы (ряд B - значение аргумента «x», ряд C - значение функции «F(x)», ряд D - производная функции «F'(x)», ряд E - проверка достижения точности «|F(x)|<e».
27. В ячейку B31 ввести первоначальное значение аргумента «0,9».
28. Ввести в ячейку C31 формулу «=B31*B31-4*B31+3».
29. Ввести в ячейку D31 формулу «=2*B31-4».
30. Ввести в ячейку E31 формулу «=ЕСЛИ(ABS(C31)<$D$29;"корень";" ")».
31. Ввести в ячейку B32 формулу «=B31-C31/D31».
32. Скопировать ячейки C31:E31 в ячейки C32:E32.
33. Выделить область B32:E32 и протащить ее по вертикали вплоть до появления в ряду E сообщения «корень» (ячейка E34).
34. Ввести в ячейку G28 заголовок «Метод простой итерации» (выравнивание по левому краю).
35. Ввести в ячейку H29 текст «e=», а в ячейку I29 значение точности «0,001».
36. Выбрать функцию φ(x), удовлетворяющую условию сходимости. В нашем случае такой функцией является функция S(x)=(x*x+3)/4.
37. В области G30:J30 оформить заголовок таблицы (ряд G - значение аргумента «x», ряд H - значение функции «F(x)», ряд I - значение вспомогательной функции «S(x)», ряд J - проверка достижения точности «|F(x)|<e».
38. В ячейку G31 ввести первоначальное значение аргумента «0,9».
39. Ввести в ячейку H31 формулу «=G31*G31-4*G31+3».
40. Ввести в ячейку I31 формулу «=(G31*G31 +3)/4».
41. Ввести в ячейку J31 формулу «=ЕСЛИ(ABS(H31)<$I$29;"корень";" ")».
42. Ввести в ячейку G32 формулу «=I31».
43. Скопировать ячейки H31:J31 в ячейки H32:J32.

44. Выделить область G32:J32 и протащить ее по вертикали вплоть до появления в ряду J сообщения «корень» (ячейка J39).
45. Выделить ряд x, полученный с помощью метода половинного деления (ячейки D20:D27). Используя Мастер диаграмм, построить зависимость x от номера итерации (тип диаграммы «График»). Определить заголовок ряда «Метод половинного деления».
46. Добавить на график еще два ряда: «Метод Ньютона» - ячейки B31:B34 и «Метод простой итерации» - ячейки G31:G39. Для каждого ряда использовать сою маркировку. График показывает, что наибольшую скорость сходимости имеет метод Ньютона.
47. Ввести в ячейку C57 заголовок «Подбор параметра» (выравнивание по левому краю).
48. Ввести в ячейку C59 текст «x», а в ячейку D59 - «F(x)».
49. Занести в ячейку C60 начальное значение переменной (например, ноль).
50. Ввести в ячейку столбца D60 формулу «=C60*C60-4*C60+3».
51. Дать команду «Сервис» → «Подбор параметра».
52. В поле «Установить в ячейке» указать ячейку D60, в которой занесена формула, в поле «Значение» задать 0 (ноль), в поле «Изменяя значение ячейки» указать ячейку C60, где занесено начальное значение переменной.
53. Щелкнуть <OK> и посмотреть на результат подбора, отображенный в диалоговом окне «Результаты подбора параметра».
54. Нажать <OK>, чтобы сохранить полученные значения.
55. Повторить расчет п.п. 49-54, задав другое начальное значение в ячейке C60. Совпали ли результаты вычисления?
56. Ввести в ячейку H57 заголовок «Поиск решения» (выравнивание по левому краю).
57. Ввести в ячейку H59 текст «x», а в ячейку I59 - «F(x)».
58. Занести в ячейку H60 начальное значение переменной (например, ноль).
59. Ввести в ячейку столбца I60 формулу «=H60*H60-4*H60+3».
60. Дать команду «Сервис» → «Поиск решения».
61. В поле «Установить целевую ячейку» указать ячейку $I$60, в которой занесена формула, в поле «Равной» установить «значению 0», в поле «Изменяя ячейки» указать ячейку $H$60, в поле «Ограничения» установить два ограничения «$H$60>=0,9 и $H$60<=1,2».
62. Нажать кнопку «Выполнить». Появится сообщение, что решение найдено.
63. Нажать кнопку <OK>, результат будет помещен в рабочий лист.
64. Повторить расчет п.п. 58-63, задав другое начальное значение в ячейке H60. Совпали ли результаты вычисления?

2.7. Задача максимизации прибыли предприятия

Одной из распространенных экономических задач является задача максимизации прибыли предприятия. Известно, что балансовая прибыль есть разница между выручкой и затратами на производство продукции $P=N-Z$. В общем случае выручка от реализации продукции может быть представлена полиномом 2-й степени от количества продукции $N=a_0Q+a_1Q^2$. Нелинейность может быть связана с тем, что в условиях монополии цена единицы продукции k может уменьшаться с ростом количества выпущенной продукции Q: $k=a_0+a_1Q$ ($a_0>0$, $a_1<0$). В свою очередь, функция затрат может быть представлена полиномом 3-й степени $Z=b_0+b_1Q+b_2Q^2+b_3Q^3$. Кубическая нелинейность может объясняться тем, что при производстве малой партии товаров издержки быстро растут, затем с ростом Q темп роста издержек уменьшается, но по достижении некоторого критического значения Q начинает работать «закон убывающей отдачи», в соответствии с которым издержки вновь начинают расти ускоренными темпами. Прибыль максимальна, когда $dP/dQ = 0$. С помощью пакета Excel решим данную задачу, полагая заданными коэффициенты: $b_0 = 10$, $b_1=1$, $b_2= -0.1$, $b_3 = 0.01$, $a_0= 5$, $a_1= -0.1$.

Последовательность действий при реализации в пакете Excel (рис. 6):
1. Оформить заголовок в строке 1 «Максимизация прибыли».
2. В ячейки A3, B3, C3, D3 и E3 записать заголовки рядов - соответственно Q, N, Z, P, и dP/dQ.
3. В ячейки F3, F4, F5, F6, F9, F10 записать названия коэффициентов - соответственно b_0, b_1, b_2, b_3, a_0, a_1.
4. В ячейки G3, G4, G5, G6, G9, G10 записать значения коэффициентов - соответственно 10; 1; -0,1; 0,01; 5; -0,1.
5. В ячейку H5 ввести текст «Издержки Z=b0+bl*Q+b2*Q^2+b3*Q^3»
6. В ячейку H6 ввести текст «Выручка N=a0*Q+a1*Q^2»
7. В ячейку H7 ввести текст «Прибыль P=N-Z»
8. В ячейки A4 и A5 ввести первые два значения аргумента - 0 и 1.
9. Выделить ячейки A4-A5 и протащить ряд данных до конечного значения (21), убедившись в правильном выстраивании арифметической прогрессии.
10. В ячейку B4 ввести формулу «=A4*$G$9+A4*A4*$G$10».
11. Скопировать формулу на остальные элементы ряда, используя прием протаскивания. В интервале B4:B25 получен ряд результатов вычисления выручки N(Q).
12. В ячейку C4 ввести формулу «=$G$3+A4*$G$4+A4*A4*$G$5+A4*A4*A4*$G$6».
13. Скопировать формулу на остальные элементы ряда, используя прием протаскивания. В интервале C4:C25 получен ряд результатов вычисления издержек Z(Q).
14. В ячейку D4 ввести формулу «=B4-C4».
15. Скопировать формулу на остальные элементы ряда, используя прием протаскивания. В интервале D4:D25 получен ряд результатов вычисления прибыли P(Q).
16. В ячейку E4 ввести формулу «=($G$9-$G$4)+2*($G$10-$G$5)*A4-3*$G$6*

А4*А4».

17. Скопировать формулу на остальные элементы ряда, используя прием протаскивания. В интервале E4:E25 получен ряд результатов вычисления dP/dQ для различных значений Q.
18. Построить на одной диаграмме графики зависимостей N(Q), Z(Q) и P(Q), используя соответствующие ряды данных.
19. Построить на отдельной диаграмме зависимость dP/dQ от Q. Точка пересечения графика с осью абсцисс дает значение Q, соответствующее максимальной прибыли (шаговый метод).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1					Максимизация прибыли						
2											
3	Q	N	Z	P	dP/dQ	b0	10				
4	0	0	10	-10	4	b1	1				
5	1	4,9	10,91	-6,01	3,97	b2	-0,1	Издержки	Z=b0+b1*Q+b2*Q^2+b3*Q^3		
6	2	9,6	11,68	-2,08	3,88	b3	0,01	Выручка	N=a0*Q+a1*Q^2		
7	3	14,1	12,37	1,73	3,73			Прибыль	P=N-Q		
8	4	18,4	13,04	5,36	3,52						
9	5	22,5	13,75	8,75	3,25	a0	5				
10	6	26,4	14,56	11,84	2,92	a1	-0,1				
11	7	30,1	15,53	14,57	2,53						
12	8	33,6	16,72	16,88	2,08						
13	9	36,9	18,19	18,71	1,57						
14	10	40	20	20	1						
15	11	42,9	22,21	20,69	0,37						
16	12	45,6	24,88	20,72	-0,32						
17	13	48,1	28,07	20,03	-1,07						
18	14	50,4	31,84	18,56	-1,88						
19	15	52,5	36,25	16,25	-2,75						
20	16	54,4	41,36	13,04	-3,68						
21	17	56,1	47,23	8,87	-4,67						
22	18	57,6	53,92	3,68	-5,72						
23	19	58,9	61,49	-2,59	-6,83						
24	20	60	70	-10	-8						
25	21	60,9	79,51	-18,61	-9,23						
26											
27											
28											
29											
30											
31											
32											
33											
34											
35											
36											
37											
38											

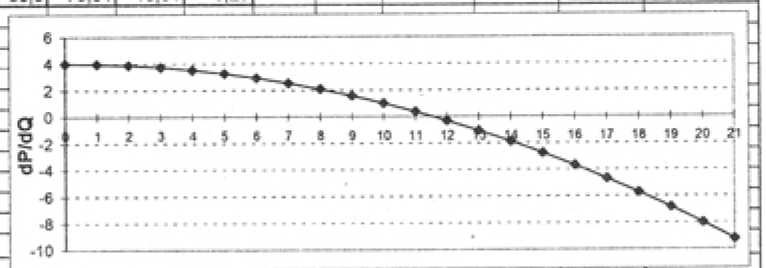


Рис.6

3. Численные методы решения систем линейных уравнений

3.1. Постановка задачи

Дана система n алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Эту систему можно записать в матричном виде: $A \bullet X = B$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{bmatrix}.$$

где A - квадратная матрица коэффициентов, X - вектор-столбец неизвестных, B - вектор-столбец свободных членов.

Численные методы решения систем линейных уравнений делятся на прямые и итерационные. Первые используют конечные соотношения для вычисления неизвестных. Пример - метод Гаусса. Вторые основаны на последовательных приближениях. Примеры - метод простой итерации и метод Зейделя.

3.2. Метод Гаусса

Метод основан на приведении матрицы системы к треугольному виду. Это достигается последовательным исключением неизвестных из уравнений системы. Сначала с помощью первого уравнения исключается x_1 из всех последующих уравнений. Затем с помощью второго уравнения исключается x_2 из последующих и т.д. Этот процесс называется прямым ходом метода Гаусса и продолжается до тех пор, пока в левой части последнего n-го уравнения не останется лишь один член с неизвестным x_n. В результате прямого хода система принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 + & a'_{12}x_2 + & \ldots + & a'_{1n}x_n = & b'_1 \\ & x_2 & + \ldots + & a'_{2n}x_n = & b'_2 \\ & & \ldots & \ldots & \\ & & & x_n = & b'_n \end{cases} \qquad (2)$$

Обратный ход метода Гаусса состоит в последовательном вычислении искомых неизвестных, начиная с x_n и кончая x_1.

3.3. Метод простой итерации и метод Зейделя

Решение систем линейных уравнений с помощью итерационных методов сводится к следующему. Задается начальное приближение вектора неизвестных, в качестве которого обычно выбирается нулевой вектор:

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)} = 0.$$

Затем организуется циклический вычислительный процесс каждый цикл которого представляет собой одну итерацию. В результате каждой итерации получается новое значение вектора неизвестных. Итерационный процесс заканчивается, если для каждой i-й компоненты вектора неизвестных будет выполнено условие

$$\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| < \varepsilon \qquad (3)$$

где k - номер итерации, ε - заданная точность.

Недостатком итерационных методов является жесткое условие сходимости. Для сходимости метода необходимо и достаточно, чтобы в матрице A абсолютные значения всех диагональных элементов были больше суммы модулей всех остальных элементов в соответствующей строке:

$$|a_{ii}| > \sum_{i=1,\, i\neq j}^{n} |a_{ij}| \qquad (4)$$

Если условие сходимости выполнено, то можно организовать итерационный процесс, записав систему (1) в приведенном виде. При этом слагаемые, стоящие на главной диагонали нормируются и остаются слева от знака равенства, а остальные переносятся в правую часть. Для метода простой итерации приведенная система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \left[b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k-1)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k-1)}\right)\right]/a_{11} \\ x_2^{(k)} = \left[b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k-1)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k-1)}\right)\right]/a_{22} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k)} = \left[b_n - \left(a_{n1}x_2^{(k-1)} + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k-1)}\right)\right]/a_{nn} \end{cases} \qquad (5)$$

Отличие метода Зейделя от метода простой итерации заключается в том, что при вычислении очередного приближения вектора неизвестных используются уже уточненные значения на этом же шаге итерации. Это обеспечивает более быструю сходимость метода Зейделя. Приведенная система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \left[b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k-1)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k-1)}\right)\right]/a_{11} \\ x_2^{(k)} = \left[b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k-1)}\right)\right]/a_{22} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k)} = \left[b_n - \left(a_{n1}x_2^{(k)} + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right)\right]/a_{nn} \end{cases} \qquad (6)$$

3.4. Реализация в пакете Excel

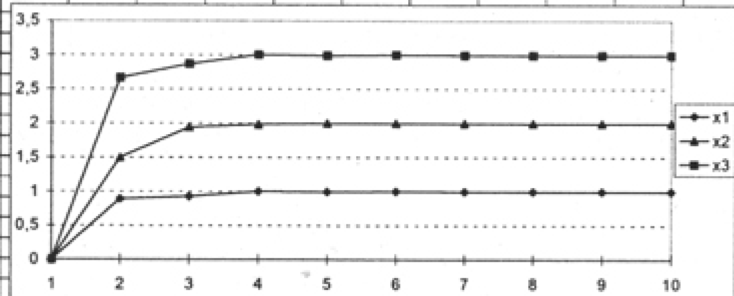
В качестве примера рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} 9x_1 - 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = -8. \end{cases}$$

Данная система удовлетворяет условию сходимости и может быть решена как прямыми, так и итерационными методами. Последовательность действий (рис.7):

1. Оформить заголовок в строке 1 «Численные методы решения систем линейных уравнений».
2. В области D3:H6 ввести исходные данные, как показано на рисунке.
3. Ввести в ячейку F8 текст заголовка «Метод Гаусса» (выравнивание по центру).
4. Скопировать исходные данные E4:H6 в область B10:E12. Это - исходные данные для прямого хода метода Гаусса. Обозначим соответствующие строки A1,A2 и A3.
5. Подготовить место для первого прохода, обозначив в области G10:G12 названия строк B1,B2 и B3.
6. Ввести в ячейку H10 формулу «=B10/$B$10». Скопировать эту формулу на ячейки I10:K10. Это - нормировка на коэффициент a_{11}.
7. Ввести в ячейку H11 формулу «=B11-H10*$B$11». Скопировать эту формулу на ячейки I11:K11.
8. Ввести в ячейку H12 формулу «=B12-H10*$B$12». Скопировать эту формулу на ячейки I12:K12.
9. Подготовить место для второго прохода, обозначив в области A14:A16 названия строк C1, C2 и C3.
10. Ввести в ячейку B14 формулу «=H10». Скопировать эту формулу на ячейки C14:E14.
11. Ввести в ячейку B15 формулу «=H11/$I$11». Скопировать эту формулу на ячейки C15:E15.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Численные методы решения систем линейных уравнений										
2											
3				i	ai1	ai2	ai3	bi			
4				1	9	-2	1	8			
5				2	1	4	-1	6			
6				3	-1	1	-3	-8			
7											
8						Метод Гаусса					
9											
10	A1	9	-2	1	8		B1	1	-0,2222	0,11111	0,88889
11	A2	1	4	-1	6		B2	0	4,22222	-1,1111	5,11111
12	A3	-1	1	-3	-8		B3	0	0,77778	-2,8889	-7,1111
13											
14	C1	1	-0,2222	0,11111	0,88889		D1	1	-0,2222	0,11111	0,88889
15	C2	0	1	-0,2632	1,21053		D2	0	1	-0,2632	1,21053
16	C3	0	0	-2,6842	-8,0526		D3	0	0	1	3
17											
18		x3=	3		x2=	2		x1=	1		
19											
20											
21					Метод простой итерации					e=	0,0001
22											
23	x1	0	0,88889	0,92593	1,00206	0,99623	1,00082	0,99974	1,00009	0,99998	1,00001
24	x2	0	1,5	1,94444	1,98611	2,00103	1,99961	2,0002	1,99997	2,00002	2
25	x3	0	2,66667	2,87037	3,00617	2,99468	3,0016	2,9996	3,00015	2,99996	3,00001
26											корни
27											



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
42											
43					Метод Зейделя					e=	0,0001
44											
45	x1	0	0,88889	0,86214	0,99185	1,00195	1,0003	0,99999	0,99999	1	1
46	x2	0	1,27778	1,98354	2,01216	2,00121	1,99986	1,99997	2	2	2
47	x3	0	2,7963	3,04047	3,00677	2,99975	2,99986	2,99999	3	3	3
48									корни	корни	корни
49											

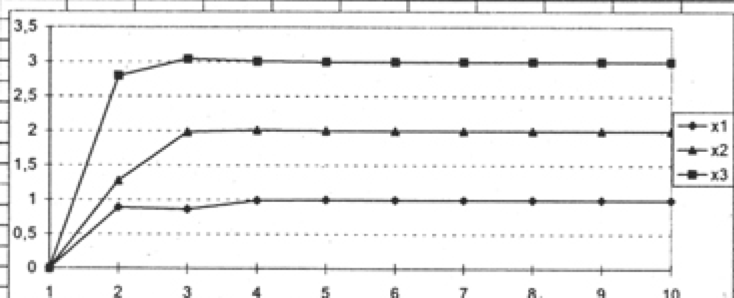


Рис. 7

12. Ввести в ячейку B16 формулу «=H12-B15*$I$12». Скопировать эту формулу на ячейки C16:E16.
13. Подготовить место для третьего прохода, обозначив в области G14:G16 названия строк D1, D2 и D3.
14. Ввести в ячейку H14 формулу «=B14». Скопировать эту формулу на ячейки I14:K14.
15. Ввести в ячейку H15 формулу «=B15». Скопировать эту формулу на ячейки I15:K15.
16. Ввести в ячейку H16 формулу «=B16/$D$16». Скопировать эту формулу на ячейки I16:K16.
17. Подготовить место для обратного хода метода Гаусса, введя в ячейки B18, E18 и H18 соответствующие тексты «x3=», «x2=» и «x1=».
18. Ввести в ячейку C18 формулу «=K16». Получим значение переменной $x3$.
19. Ввести в ячейку F18 формулу «=K15-J15*K16». Получим значение переменной $x2$.
20. Ввести в ячейку I18 формулу «=K10-I10*F18-J10*C18». Получим значение переменной $x1$.
21. Ввести в ячейку F21 текст заголовка «Метод простой итерации» (выравнивание по центру).
22. Ввести в ячейку J21 текст «e=» (выравнивание по правому краю).
23. Ввести в ячейку K21 значение точности e (0,0001).
24. Обозначить в области A23:A25 названия переменных.
25. В области B23:B25 задать начальные значения переменных (нули).
26. Ввести в ячейку C23 формулу «=($H$4-$F$4*B24-$G$4*B25)/$E$4». Получим значение переменной $x1$ на первой итерации.
27. Ввести в ячейку C24 формулу «=($H$5-$E$5*B23-$G$5*B25)/$F$5». Получим значение переменной $x2$ на первой итерации.
28. Ввести в ячейку C25 формулу «=($H$6-$E$6*B23-$F$6*B24)/$G$6». Получим значение переменной $x3$ на первой итерации.
29. Ввести в ячейку C26 формулу «=ЕСЛИ(ABS(C23-B23)>$K$21;"   "; ЕСЛИ(ABS(C24-B24)>$K$21;"   ";ЕСЛИ(ABS(C25-B25)>$K$21;"   "; '"корни")))». Это - проверка на достижение заданной точности (при этом печатается сообщение «корни»).
30. Выделить диапазон C23:C26 и скопировать его до столбца K, используя прием протаскивания. При появлении в строке 26 сообщения «корни» соответствующий столбец будет содержать приближенные значения перемен-

ных $x1$, $x2$, $x3$, которые являются решением системы уравнений с заданной точностью.

31. В области A27:K42 построить диаграмму, показывающую процесс приближения значений переменных $x1$, $x2$, $x3$ к решению системы. Диаграмма строится в режиме «График», где по оси абсцисс откладывается номер итерации.
32. Ввести в ячейку F43 текст заголовка «Метод Зейделя» (выравнивание по центру).
33. Ввести в ячейку J43 текст «е=» (выравнивание по правому краю).
34. Ввести в ячейку K43 значение точности е(0,0001).
35. Обозначить в области A45:A47 названия переменных.
36. В области B45:B47 задать начальные значения переменных (нули).
37. Ввести в ячейку C45 формулу «=($H$4-$F$4*B46-$G$4*B47)/$E$4». Получим значение переменной $x1$ на первой итерации.
38. Ввести в ячейку C46 формулу «=($H$5-$E$5*C45-$G$5*B47)/$F$5». Получим значение переменной $x2$ на первой итерации.
39. Ввести в ячейку C47 формулу «=($H$6-$E$6*C45-$F$6*C46)/$G$6». Получим значение переменной $x3$,на первой итерации.
40. Ввести в ячейку C48 формулу «=ЕСЛИ(ABS(C45-B45)>$K$43;"   "; ЕСЛИ(ABS(C46-B46)>$K$43;"   ";ЕСЛИ{ABS(C47-B47)>$K$43;"   ";"корни")))».
41. Выделить диапазон C45:C48 и скопировать его до столбца K, используя прием протаскивания. При появлении в строке 26 сообщения «корни» соответствующий столбец будет содержать приближенные значения переменных $x1$, $x2$, $x3$, которые являются решением системы уравнений с заданной точностью. Видно, что метод Зейделя сходится быстрее, чем метод простой итерации, то есть заданная точность здесь достигается за меньшее число итераций.
42. В области A49:K62 построить диаграмму, показывающую процесс приближения значений переменных x1, x2, x3 к решению системы. Диаграмма строится в режиме «График», где по оси абсцисс откладывается номер итерации.

3.5. Решение задачи межотраслевого баланса (модель Леонтьева)

Основой многих линейных моделей производства является схема межотраслевого баланса. Идея метода впервые в явном виде была сформулирована в работах советских экономистов в 20-х годах и получила затем развитие в трудах В.В Леонтьева по изучению структуры американской экономики. Предположим, что производственный сектор народного хозяйства разбит на n отраслей. Причем каждая отрасль выпускает продукт только одного типа, а разные отрасли выпускают разные продукты. Кроме того, в процессе производства своего вида продукта каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей. В качестве примера рассмотрим упрощенную модель межотраслевого баланса, предполагая, что экономика страны состоит из 3-х отраслей (промышленности, сельского хозяйства и транспорта).

Введем следующие обозначения y_i - конечный спрос на продукцию i-й отрасли, x_i - выпуск продукции i-й отрасли. c_{ij} - доля продукции отрасли i, потребленной в процессе производства продукции отрасли j. В этом случае в соответствии с моделью Леонтьева имеем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + y_1, \\ x_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + y_2, \\ x_3 = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + y_3 \end{cases}$$

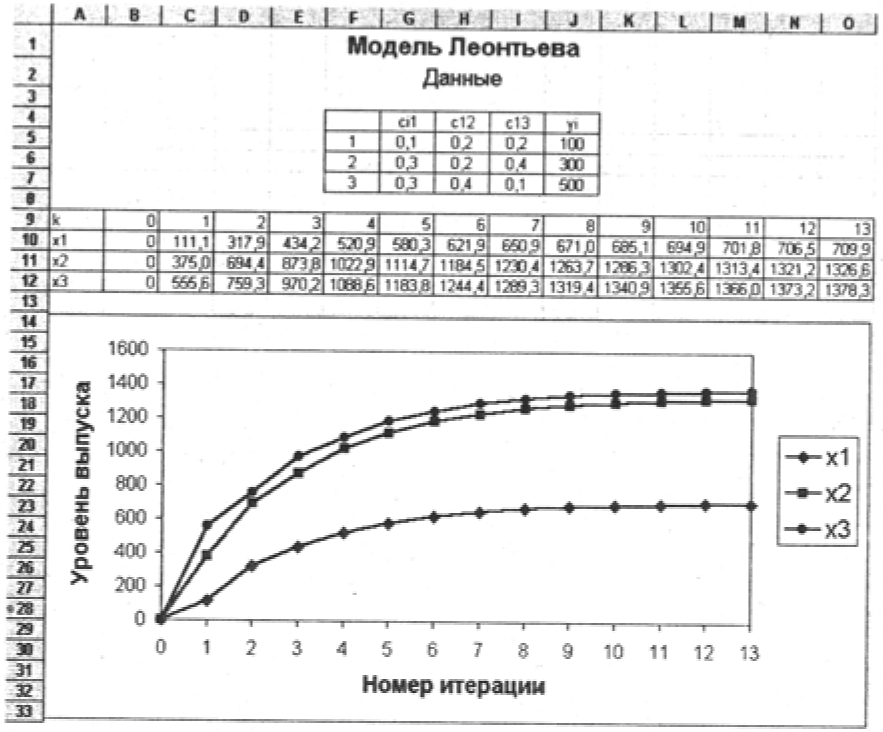
Задача состоит в нахождении неизвестных x_1, x_2, x_3. Остальные величины считаются заданными. Заметим, что все коэффициенты c_{ij} изменяются в пределах от 0 до 0,3. Это обеспечивает сходимость при использовании итерационных методов.

Последовательность действий при реализации модели в пакете Excel с использованием метода простой итерации (рис. 8).

1. Ввести в ячейку H1 текст заголовка «Модель Леонтьева» (выравнивание по центру).
2. Ввести в ячейку H2 текст «Данные» (выравнивание по центру).
3. В области F4:J7 ввести исходные данные как показано на рисунке.
4. Обозначить в области A9:A12 номер итерации k и названия переменных $x1$, $x2$, $x3$.
5. В области B9:B12 задать начальные значения переменных (нули).
6. В ячейку C9 ввести 1, выделить ячейки B9 и C9 и; используя прием протаскивания, заполнить ряд до столбца O.
7. Ввести в ячейку C10 формулу «=($J$5+$H$5*B11+$I$5*B12)/(1-$G$5)». По-

лучим значение переменной $x1$ на первой итерации.

8. Ввести в ячейку C11 формулу «=($J$6+$G$6*B10+$I$6*B12)/(1-$H$6)». Получим значение переменной $x2$ на первой итерации.
9. Ввести в ячейку C12 формулу «=($J$7+$G$7*B10+$H$7*B11)/(1-$I$7)». Получим значение переменной $x3$ на первой итерации.
10. Выделить диапазон C10:C12 и скопировать его до столбца O, используя прием протаскивания
11. В области A14:O33 построить диаграмму, показывающую процесс приближения значений переменных $x1$, $x2$, $x3$ к решению системы. Диаграмма строится в режиме «Точечная», где по оси абсцисс откладывается номер итерации.



Модель Леонтьева

Данные

	ci1	c12	c13	yi
1	0,1	0,2	0,2	100
2	0,3	0,2	0,4	300
3	0,3	0,4	0,1	500

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x1	0	111,1	317,9	434,2	520,9	580,3	621,9	650,9	671,0	685,1	694,9	701,8	706,5	709,9
x2	0	375,0	694,4	873,8	1022,9	1114,7	1184,5	1230,4	1263,7	1286,3	1302,4	1313,4	1321,2	1326,6
x3	0	556,6	759,3	970,2	1088,6	1183,8	1244,4	1289,3	1319,4	1340,9	1355,6	1366,0	1373,2	1378,3

Рис. 8

4. Интерполяция и аппроксимация функций

4.1. Постановка задачи

В дискретные моменты времени $x_1, x_2, \ldots, x_n$ были проведены измерения некоторой физической величины Y. Результаты эксперимента представлены в таблице.

Таблица

X	1	2	3	4	5
Y	5	1	4	2	3

Требуется определить значения физической величины на всем временном интервале $x_1<=x<=x_n$.

Задача определения значений физической величины на всем временном интервале сводится к задаче о приближении функции $Y(x)$. Заданную таблицей функцию $Y(x)$ заменим на функцию $f(x;\ a_1, \ldots, a_n)$ таким образом, чтобы отклонение функции $Y(x)$ от приближающей функции $f(x;\ a_1, \ldots, a_n)$ на указанном множестве $x_1, x_2, \ldots, x_n$ было наименьшим. При этом функция $f(x;\ a_1, \ldots, a_n)$ в общем случае называется аппроксимирующей функцией. Если параметры $a_1, \ldots, a_n$ определяются из условия совпадения функции $Y(x)$ и приближающей функции в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т.е. из условия равенства $f(x_i;\ a_1, \ldots, a_n)=Y(x_i)$, то такую функцию $f(x_i;\ a_1, \ldots, a_n)$ называют интерполирующей.

Рассмотрим случаи линейной, квадратичной интерполяции и общий случай интерполирования полином $Q_m(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$ степени m, а также выполним аппроксимацию заданной экспериментальной зависимости полиномом 1-ой степени.

Для решения задачи будем использовать возможности, предоставляемые электронными таблицами Microsoft Excel. Перенесем исходную таблицу экспериментальных данных в рабочий лист книги Microsoft Excel для определенности располагая в ячейках A3:F4 (см. рис. 11).

4.2. Линейная интерполяция.

В случае линейного интерполирования искомая функция $f(x)$ представляет собой ломаную линию. Уравнения каждого отрезка ломаной определяются из условия прохождения прямой через данную соседнюю пару точек. Например, неизвестные коэффициенты a_0, a_1 уравнения прямой $y=a_0+a_1 \cdot x$, проходящей через первую и вторую точки, могут быть найдены из системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1 x_1 \\ y_2 = a_0 + a_1 x_2 \end{cases}$$

Первое уравнение системы - это условие прохождения прямой через точку с координатами (x_1,y_1), второе уравнение - условие прохождения прямой через точку с координатами (x_2,y_2). Таким образом, задача нахождения искомой функции, описывающей заданную табличную зависимость в случае линейного интерполирования сводиться к нахождению уравнений прямых, соединяющих точки 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 5 соответственно.

Выполним линейную интерполяцию средствами электронных таблиц Excel. Для этого вначале построим график заданной экспериментальной зависимости. Для этого будем использовать Мастер диаграмм (см. кнопка Мастера диаграмм на панели инструментов Стандартная или пункт меню Вставка - Диаграмма). Экспериментальные данные будем отображать точками, для этого на первом шаге Мастера диаграмм необходимо выбрать точечный тип диаграммы и нажать на кнопку <Далее>. На втором шаге Мастера диаграмм необходимо перейти на вкладку Ряд и добавить ряды данных, по которым будет строиться диаграмма. Для этого необходимо нажать на кнопку <Добавить> и затем ввести значения X и Y, соответствующие данному ряду значений. В случае линейной интерполяции мы имеем четыре ряда данных: Ряд1 формируется из координат точек 1 и 2, Ряд2 - из координат точек 2 и 3, Ряд3 - из координат точек 3 и 4, Ряд4 - из координат точек 4 и 5. Рассмотрим более подробно формирование Ряда 1. Диапазон значений X и Y (ячейки, содержащие координаты x и y точек 1 и 2) может быть указан с помощью манипулятора мышь путем простого выделения соответствующего диапазона ячеек (если окно Мастера диаграмм загораживает необходимый диапазон ячеек, его можно отбуксировать, уцепившись "мышью" за заголовок окна). Результат представлен на рис.9. Проверьте, Ряд 1 имеет Значения X - =Лист1!$B$3:$C$3, Значения Y - =Лист1!$B$4:$C$4.

Для того, чтобы начать формирование Ряда 2 необходимо нажать на кнопку Добавить. Значения X и Y Ряда 2 - это диапазон ячеек с координатами x и y точек 2 и 3 (Значения X – =Лист1!$C$3:$D$3, Значения Y - =Лист1!$C$4:$D$4). Аналогично формируются Ряды 3 и 4.

Сформировав ряды данных необходимо нажать на кнопку <Далее>. В третьем окне Мастера диаграмм необходимо указать название диаграммы и осей, во вкладке *Легенда* снять флажок *Добавить легенду* и нажать на кнопку <Готово>. На рабочем листе должна появиться диаграмма, отображающая заданную табличную зависимость.

Далее для выполнения линейного интерполирования по заданным точкам необходимо выполнить *Меню Диаграмма - Добавить линию тренда.* Пункт *Диаграмма* присутствует в меню Microsoft Excel, если построенная диаграмма выделена - вокруг области диаграммы должна быть черная рамка, если ее нет - по области диаграммы необходимо щелкнуть левой кнопкой мышки. В появившемся окне *Линия тренда* во вкладке *Тип* необходимо выбрать *Линейная*,

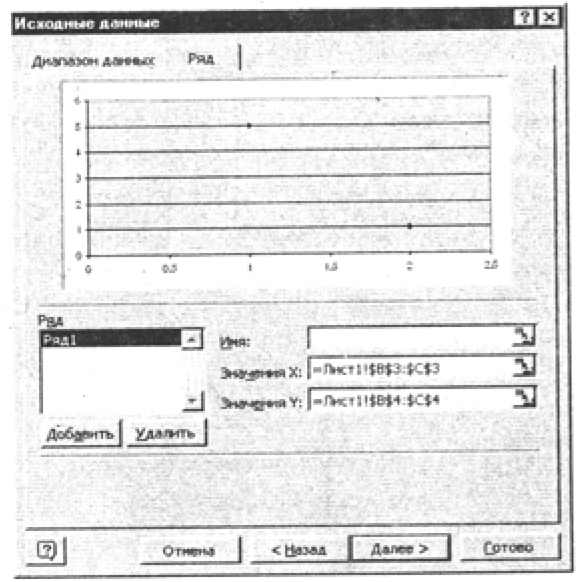


Рис. 9

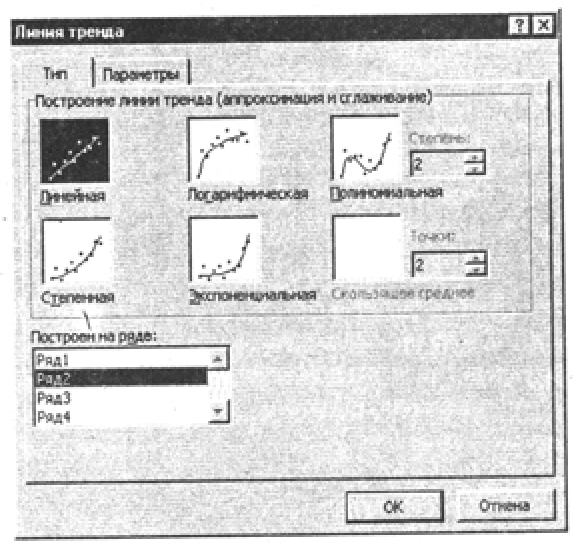


Рис. 10

затем перейти на вкладку *Параметры* и установить флажок *Показывать уравнение на диаграмме* и нажать <ОК>. В результате на диаграмме должна появиться прямая линия, соединяющая точки 1 и 2 и ее уравнение. Далее необходимо снова выполнить *Меню Диаграмма - Добавить линию тренда*, во вкладке *Тип* в окошке *Построен на ряде* необходимо щелкнуть мышкой по Ряд2 (см. рис. 10) и проделать все вышеописанные действия. В результате на диаграмме должна появиться прямая, соединяющая точки 2 и 3 и ее уравнение.

Аналогично нужно построить линейный тренд, используя Ряд3 и Ряд4 данных. Результат представлен на рис. 11.

4.3. Квадратичная интерполяция

В случае квадратичной интерполяции исходная функция заменяется отрезками параболы, проходящих через три соседних точки. Неизвестные коэффициенты a_0, a_1, a_3 в уравнении параболы $y=a_0+a_1 \cdot x+a_2 \cdot x^2$, проходящей через точки с координатами (x_1,y_1), (x_2,y_2) и (x_3,y_3) может быть найдено из системы уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 \\ y_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 \\ y_3 = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 \end{cases}$$

Выполним квадратичное интерполирование заданной табличной зависимости, используя возможности электронных таблиц Excel. Для этого необходимо снова построить график экспериментальной зависимости, выбрав точечный тип диаграммы. Последовательность построения графика аналогична приведенной для случая линейного интерполирования, только в рассматриваемом случае необходимо сформировать только 2 ряда данных. Ряд1 формируется из координат точек 1, 2, 3; Ряд2 формируется из координат точек 3, 4, 5. (Проверьте, Ряд1 - Значения *X* - = Лист1!$B$3:$D$3, Значения *Y* - =Лист1!$B$4:$D$4; Ряд2 - Значения *X* - = Лист1!$D$3:$F$3, Значения *Y* - =Лист1!$D$4:$F$4).

Далее для выполнения квадратичного интерполирования по заданным точкам необходимо выполнить *Меню Диаграмма - Добавить линию тренда*. В появившемся окне *Линия тренда* во вкладке *Тип* необходимо выбрать *Полиномиальная, Степень 2*; затем перейти на вкладку *Параметры* и установить флажок *Показывать уравнение на диаграмме* и нажать <ОК>. В результате на диаграмме должна появиться парабола, соединяющая точки 1, 2 и 3 и ее уравнение. Затем необходимо снова выполнить *Меню Диаграмма - Добавить линию тренда*, во вкладке *Тип* в окошке *Построен на ряде* необходимо щелкнуть мышкой по Ряд2 и проделать все действия, описанные выше. В результате на диаграмме должна появиться еще одна парабола, построенная на точках 3, 4 и 5 и ее уравнение. Результат представлен на рис.11.

4.4. Общий случай полиномиального интерполирования. Метод неопределенных коэффициентов

Полином $Q_m(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$ называется интерполяционным для данной функции $f(x)$ если в заданных точках x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ он принимает те же значения, что и функция $f(x)$, т.е. имеет место равенство $Q_m(x_i)=f(x_i)$. Интерполяционный полином, принимающий в заданных точках $x_0,x_1,\ldots,x_n$ те же значения, что и $f(x)$ всегда единственен. Степень интерполяционного полинома определяется как $m=n-1$, где n - число экспериментальных точек. Таким образом, для данной экспериментальной зависимости, состоящей из 5 точек, степень интерполирующего полинома равна 4, т.е. искомая функция имеет вид $Q_4(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$. Неизвестные коэффициенты полинома a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 можно определить из системы уравнений

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + a_4x_1^4 \\ y_2 = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 + a_4x_2^4 \\ y_3 = a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 + a_4x_3^4 \\ y_4 = a_0 + a_1x_4 + a_2x_4^2 + a_3x_4^3 + a_4x_4^4 \\ y_5 = a_0 + a_1x_5 + a_2x_5^2 + a_3x_5^3 + a_4x_5^4 \end{cases}$$

Выполним интерполяцию заданной табличной зависимости, используя средства электронных таблиц Excel. Вначале снова построим график табличной зависимости в форме точечной диаграммы. При построении графика ряд данных формируется указанием сразу всех координат экспериментальных точек. График может быть построен более быстро, если перед вызовом Мастера Диаграмм предварительно выделить диапазон ячеек $B$3:$F$4.

Интерполяционный полином построим выполнив *Меню Диаграмма - Добавить линию тренда*. В появившемся окне *Линия Тренда* во вкладке *Тип* выберем *Полиномиальная, Степень 4*. Во вкладке *Параметры* снова поставим флажок *Показывать уравнение на диаграмме*. Результат представлен на рис.11.

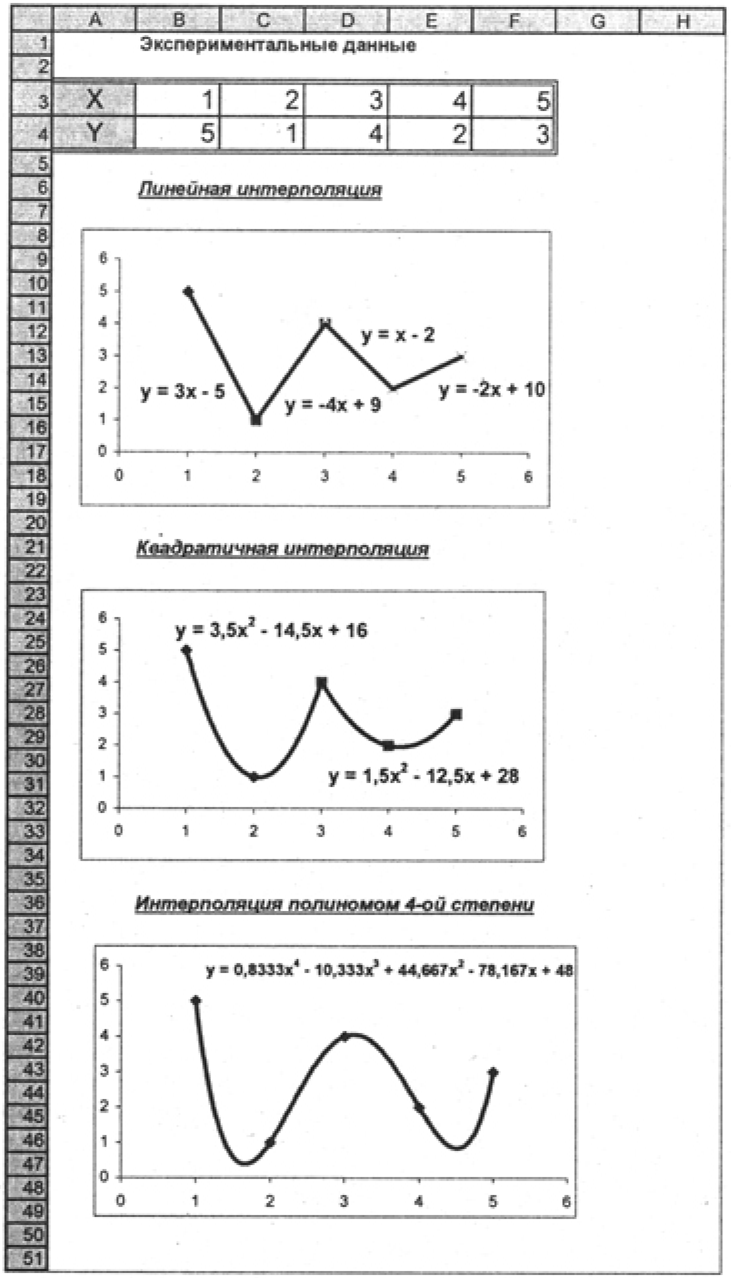


Рис. 11

4.5. Аппроксимация функций

Полином $Q_m(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$ называется аппроксимирующим заданную функцию $y(x)$, если он имеет наименьшее отклонение от заданной функции $y(x)$. Максимальная степень m аппроксимирующего полинома, как правило, всегда значительно меньше числа экспериментальных точек. За меру отклонения полинома $Q_m(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$ от функции $y(x)$ принимают величину

$$S_m=\sum_{i=1}^{n}\left[Q_m(x_i)-y(x_i)\right]^2$$

где S_m есть функция от неизвестных коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_m$, которые нужно подобрать так, чтобы величина S_m была минимальной. Этот метод носит название метода наименьших квадратов.

Аппроксимируем заданную табличную зависимость полиномом 1-й степени. Аппроксимирующий полином будет иметь вид $Q(x)=a_0+a_1x$. Величина

$$S=\sum_{i=1}^{5}\left[a_0+a_1x-y_i\right]^2$$

должна быть минимальна, а значит, должно быть выполнено условие равенства нулю всех ее частных производных, т.е.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial S}{\partial a_0}=\sum\limits_{i=1}^{5}\left(a_0+a_1x-y_i\right)=0\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial S}{\partial a_1}=\sum\limits_{i=1}^{5}\left(a_0+a_1x-y_i\right)x_i=0\end{cases}$$

Таким образом, получаем систему из 2-х линейных уравнений, позволяющий найти неизвестные коэффициенты a_0, a_1:

$$\begin{cases}5a_0+a_1\sum\limits_{i=1}^{5}x_i=\sum\limits_{i=1}^{5}y_i\\ a_0\sum\limits_{i-1}^{5}x_i+a_1\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{5}y_ix_i\end{cases}$$

Выполним аппроксимацию полиномом 1-ой степени, используя средства электронных таблиц Excel. Построим график табличной зависимости. Для этого выделим всю таблицу значений и далее на этом диапазоне ячеек построим точечную диаграмму. Искомый аппроксимирующий полином построим выполнив *Меню Диаграмма - Добавить линию тренда*. В появившемся окне *Линия Тренда* во вкладке *Тип* выберем *Линейная*, во вкладке *Параметры* снова поставим флажок *Показывать уравнение на диаграмме*. Результат представлен на рис. 12.

Экспериментальные данные

X	1	2	3	4	5
Y	5	1	4	2	3

Аппроксимация полиномом 1-ой степени

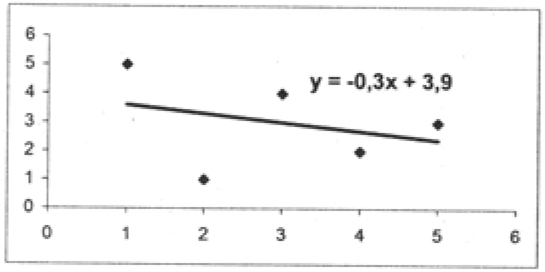


Рис. 12

4.6. Предельный анализ и оптимизация прибыли, издержек и объема производства

Вернемся к задаче максимизации прибыли предприятия. Математическое решение данной задачи сводится к максимизации функции прибыли

$$P = kQ - Z$$

Функция имеет экстремум, когда ее производная равна нулю:

$$\frac{dP}{dQ} = 0;\ \frac{d(kQ)}{dQ} = \frac{dZ}{dQ}.$$

Анализ зависимости между ценой продукта и его количеством в динамике позволяет выбрать для функции спроса линейную форму вида $k = a_0 + a_1Q$. Анализируется n периодов, в каждом из которых считаются заданными параметры k_i и Q_i. По методу наименьших квадратов определяются неизвестные параметры a_0 и a_1 на основе составления и решения системы нормальных уравнений вида

$$n \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{i=1}^{n} k_i;$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} Q_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} Q_i^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i Q_i.$$

Аналогично проводится анализ зависимости между издержками и количеством выпускаемой продукции, который позволяет определить для функции издержек линейную форму связи вида $Z = b_0 + b_1Q$. Неизвестные b_0 и b_1 также находятся на основе решения системы нормальных уравнений вида:

$$n \cdot b_0 + b_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{i=1}^{n} Z_i;$$

$$b_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} Q_i + b_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} Q_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i Q_i.$$

Оптимальные параметры определяются из соотношений:

$$Q_{opt} = (b_1 - a_0)/(2a_1);\ Z_{opt} = b_0 + b_1Q_{opt};\ k_{opt} = a_0 + a_1Q_{opt};$$

$$N_{opt} = k_{opt}Q_{opt};\ P_{opt} = N_{opt} - Z_{opt} = (a_0 + a_1Q_{opt})Q_{opt} - (b_0 + b_1Q_{opt})$$

Обычно предельный анализ проводится с использованием метода наименьших квадратов путем решения систем линейных уравнений для нахождения функций спроса и издержек. Табличный процессор Excel позволяет существенно уменьшить объем вычислений путем использования встроенных функций линейной регрессии.

Найденные функции спроса *k(Q)* и издержек *Z(Q)* позволяют определить функцию прибыли *P(Q)*. Максимальное значение этой функции может быть найдено средствами пакета анализа *«что-если»* Excel. Команда Он позволяет находить значение параметра-переменной, при котором зависящее от него значение функции в целевой ячейке достигает максимума или любого другого заданного значения (рис. 13).

Последовательность действий:

1. Введем исходные данные (табл. 1).
2. Применим функцию ЛИНЕЙН для вычисления коэффициентов a_1, a_0 функции спроса *k(Q)*:
   - выделить интервал A17:B17;
   - напечатать формулу =ЛИНЕЙН(B9:G9;B8:G8);
   - нажать <Ctrl+Shift+Enter>.

   Результат в ячейке A17 - значение коэффициента a_1, в ячейке B17 - значение коэффициента a_0.
3. Аналогично находим коэффициенты b_1, b_0 функции издержек *Z(Q)*:
   - выделить интервал D17:E17;
   - напечатать формулу =ЛИНЕЙН(B10:G10;B8:G8);
   - нажать <Ctrl+Shift+Enter>.

   Результат в ячейке D17 - значение коэффициента b_1, в ячейке E17 - значение коэффициента b_0.
4. Найденные функции спроса *k(Q)* и издержек *Z(Q)* позволяют определить функцию прибыли *P(Q)*. Максимальное значение этой функции (оптимальная прибыль P_{opt} при некотором значении Q (Q_{opt}) может быть найдено средствами оптимального решения анализа «что-если» пакета Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Предельный анализ и оптимизация**						
2		**прибыли, издержек и объема производства**						
3								
4	Таблица 1							
5	**Исходные данные для предельного анализа**							
6	Показатель	Периоды						
7		1	2	3	4	5	6	
8	Объем производства продукции (Q), шт.	360	388	405	418	441	459	
9	Цена единицы продукции (k), ден.ед.	37,4	36,1	35,7	34,9	34,5	33,9	
10	Затраты производства (полная себестоимость) (Z), ден.ед.	8900	9255	9580	9663	10227	10565	
11	Выручка от реализации (k*Q), ден.ед.	13464,0	14006,8	14458,5	14588,2	15214,5	15560,1	
12	Прибыль (P), ден.ед.	4564,0	4751,8	4878,5	4925,2	4987,5	4995,1	
13								
14	*Функция спроса: $k = a_1 * Q + a_0$*			*Функция издержек: $Z = b_1 * Q + b_0$*				
15								
16	a_1	a_0		b_1	b_0			
17	-0,035	49,700		16,966	2711,152			
18								
19	***Максимальная прибыль:*** *P_{OPT} =*			*5012,60*	*ден.ед.*			
20	*При Q_{OPT} =*	*472*	*шт.*					
21								
22	Таблица 2							
23	**Зависимость прибыли от объема производства.**							
24								
25	Объем производства продукции (Q), шт.	Прибыль (P), ден.ед.						
26	100	215						
27	150	1419						
28	200	2448						
29	250	3305						
30	300	3988						
31	350	4497						
32	400	4833						
33	450	4996						
34	500	4985						
35	550	4801						
36	600	4444						
37								
38								

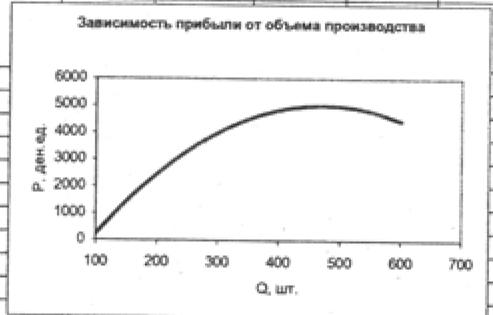


Рис. 13

Команда *Поиск решения* меню *Сервис* позволяет находить значение параметра-переменной, при котором зависящее от него значение функции в целевой ячейке достигает максимума или любого другого заданного значения. Алгоритм поиска решения сводится к тому, что на каждом шаге параметры в изменяемых ячейках принимают пробные значения, функция перерассчитывается и полученный результат сравнивается с результатом предыдущего шага. Процесс прекращается, когда достигается целевое значение, либо исчерпано допустимое количество шагов.

5. Для нахождения значения Q_{opt} и соответствующей величины P_{opt}, необходимо:
   - установить начальное значение Q (=100 в ячейке C20);
   - ввести формулу для вычисления прибыли (ячейка D19): =(B17+A17*C20)*C20-(E17+D17*C20);
   - выбрать пункт меню *Сервис/Поиск решения*;
   - в диалоговом окне указать адрес целевой ячейки, вычисляющей значение P_{opt} (D19);
   - установить переключатель на поиск *максимального значения*;
   - указать адрес изменяемой ячейки, содержащей значение Q_{opt} (C20);
   - закончить диалог, нажав кнопку <Выполнить>.
   - убедиться в правильности полученного решения. Если найденное значение целевой ячейки (величина P_{opt}) приемлемо - нажать <ОК>, если вызывает определенные сомнения - нажать <Отмена> и проверить запись формулы (D19).

Таблица 2 и диаграмма иллюстрируют найденное решение, показывая график зависимости прибыли от объема производства.

Список рекомендуемой литературы

1. Симонович С.В. и др. Информатика. Базовый курс: Учебник для ВУЗов. - СПб: Изд. "Питер", 2000.
2. Турчак Л.И. Основы численных методов. - М.: Наука, 1987.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989.
4. Office 97 шаг за шагом: Учеб. пособие / СПб.: Изд "Питер", 1999.
5. Николь Н-, Альбрехт Р. Электронные таблицы Excel для квалифицированных пользователей: Практ. пособ./ Пер. с нем. - М.: ЭКОМ., 1995.
6. Курицкий Б. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0.- СПб.: BHV-Санкт Петербург, 1997.
7. Оптимизация объема производства, прибыли и издержек предприятия с использованием табличного процессора EXCEL для Windows: Метод. разработка для проведения занятий по курсам «Информатика» и «Управленческий учет» / Сост.: И.В. Зороастрова, С.Н. Митяков, О.И. Митякова, И.Б. Удалова. НФ ГУ ВШЭ, Н. Новгород, 1998.