Министерство образования Российской Федерации
Нижегородский государственный технический университет

Кафедра «Прикладная математика»

Основы информационной технологии работы в Windows-приложении MathCAD и элементы численных методов

Методическая разработка по курсу «Информатика»
для студентов всех форм обучения

Нижний Новгород 2000

Составители: **В. Ф. Билюба, Т. В. Моругина, Н. Н. Осипенко, О. И. Чайкина**

УДК 651.3.06

Основы информационной технологии работы в Windows-приложении Math-CAD и элементы численных методов: Метод. разработка по курсу “Информатика” для студентов всех форм обучения./ НГТУ;
Сост.: В. Ф. Билюба и др. Н. Новгород, 2000. 42 с.

Изло... ...ии работы пользователя ПК в Windows-... ...одами. Рассмотрены примеры ручного р... ...елирования процесса решения типовых з... ...аданий и контрольные вопросы для по...

Нау...
Ред...

Ком...

По... ...ать офсетная.
Печ...

Ни... ...т.
Тир... ...4.

...арственный
...итет, 2000

1. ВВЕДЕНИЕ

Информатика, как вид человеческой деятельности и как учебная дисциплина, чрезвычайно динамично развивается. Удвоение в основных параметрах аппаратных средств ПК происходит в среднем за полтора года. Поколения программного обеспечения меняются через 2-3 года, а база стандартов, интерфейсов и протоколов-через 5-7 лет. В частности фирма MathSoft модернизировала свой программный продукт MathCAD для работы под управлением операционной системы Windows (95, 98, NT) в виде версий MathCAD 5.0 Plus, 6.0 Plus, 7.0, 8.0. В связи с этим наряду с основами MathCAD в настоящем издании уделено внимание информационной технологии работы пользователя ПК в последних версиях программы MathCAD. Часто интерфейс MathCAD используется не русифицированным, что потребовало представления команд в двух вариантах-английском и русском.

Программа MathCAD по своему назначению позволяет моделировать в электронном документе научно-технические и экономические расчеты в форме, близкой к общепринятым ручным расчётам. Это упрощает составление программы расчёта, автоматизирует перерасчёт подобно электронным таблицам EXCEL, построение графических иллюстраций и документирование результатов как в текстовом редакторе WORD. Применение MathCAD в вузовском учебном процессе способствует повышению эффективности работы студентов при изучении математики, физики, механики, сопромата, экономики и других дисциплин, а также при выполнении курсовых и дипломных работ.

В программе MathCAD широко используются численные методы решения различных математических задач, к которым сводятся многие инженерно-экономические приложения. Поэтому ниже приведены элементы численных методов и примеры их реализации в MathCAD. В последних версиях MathCAD достигнуты успехи в автоматизации символьных (аналитических) преобразований и решений.

Достоинством MathCAD является также наличие в его составе электронных книг. Одна из них является учебником по MathCAD, другая – электронным справочником по различным разделам физики, радиоэлектроники и др. Электронные книги позволяют пользователю не только получать информацию, но и копировать в свои документы примеры расчётов и автоматически повторять их для своих данных с получением графических иллюстраций и документирования. Электронные книги используют гипертекст, который позволяет получить удобства и доступ к книгам в Интернет.

Целью методички является освоение современной информационной технологии автоматизированного решения типовых расчетных и функциональных задач, возникающих в учебной, научной, конструкторской, технологической и экономической деятельности.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕРФЕЙСА В WINDOWS-ПРИЛОЖЕНИИ MathCAD

2. 1. Структура окна программы MathCAD и основные команды для работы с документами

Окно программы MathCAD, работающей под управлением операционной системы WINDOWS (95, 98, NT), имеет для каждой версии программы свои особенности. Рассмотрим его структуру на примере версии MathCAD 6.0 Plus. В соответствии со стандартом окна любого WINDOWS-приложения в окне программы MathCAD содержатся следующие элементы.

1. *Строка заголовка* с указанием названия программы MathCAD и имени файла, в котором записан документ. После открытия окна программы MathCAD в строке заголовка стоит стандартное имя **Untitled:1**, что означает – в рабочем поле окна программы MathCAD находится пустой непоименованный документ с номером 1. После заполнения документа и его сохранения на диске в строке заголовка заменяется стандартное имя документа на имя файла пользователя.
2. *Строка меню* содержит имена меню команд. Каждое меню при его раскрытии содержит список команд, относящихся по назначению к этому меню.

File	Edit	Text	Math	Graphics	Simbolic	Window	Books	Help
Файл	Правка	Текст	Математика	Графика	Символика	Окна	Книги	Помощь

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся команды для каждого меню. Если после имени команды стоит знак **...** , то при её вызове будут устанавливаться параметры команды в окне диалога.

1) В меню **File** используются команды для работы с файлами:

- **New**(Новый)- открытие окна нового документа;
- **Open ...**(Открыть) –открытие окна со старым документом, хранящимся на диске в папке пользователя в виде файла;
- **Save** (Сохранить) --сохранение документа на диске под именем, указанным в строке заголовка;
- **Save as ...**(Сохранить как) –сохранение документа на диске в папке пользователя под новым именем файла;
- **Close** (Закрыть) – закрытие активного окна документа с файлом;
- **Page SetUp...** - установка параметров страницы файла перед печатью;
- **Print Preview...** - предварительный просмотр файла перед печатью;
- **Print...** - печать файла-документа;
- **Exit** - выход из программы MathCAD.

2) Меню **Edit** содержит команды для редактирования активного документа, находящегося в рабочем поле окна программы MathCAD.

- **Cut** -вырезать фрагмент,т.е. выделенную часть документа поместить в буфер;
- **Copy** - копировать фрагмент в буфер;
- **Clear** - очистить фрагмент в документе;
- **Paste** - вставить фрагмент из буфера в место документа , указанное курсором(+ красный);

- **Regions** - выделить все области документа ;
- **Right Margin...** - правую границу документа установить по курсору или удалить.

3) В меню **Text** содержатся команды для вставки в документ текстовых областей:

- **Create Text Region** - создать текстовую область, например, как пояснение к формуле ;
- **Create Text Paragraph** - создать текстовый параграф для ввода имени раздела;
- **Embed Math** - вставить математическую формулу в текст;
- **Change Defalts** - изменить установки по умолчанию, например, шрифта.

4) В меню **Math** содержатся команды для работы с математическими областями документа MathCAD:

- **Matrices...** - создать макет матрицы заданных размеров для ввода данных;
- **Bult in Variabls...** - встроенные переменные задать, напрмер , начальное значение индексов для всех матриц – параметром **ORIGIN**;
- **Units...** - установка единиц измерения;
- **Choose Function...** - выбрать стандартную функцию из библиотеки и вставить в математическое выражение;
- **Calculate** - вычислить все математические области ;
- **Numerical Format...** - установить числовой формат в результатах;
- **Automatic Mode** - установить режим автоматического вычисления всех модулей-областей после щелчка мышью на документе.

5) В меню **Graphics** приведены команды для создания графиков различных типов. Для создания графиков в декартовых координатах используются команды:

- **Create X-Y Plot...** - создать стандартную графическую область справа от курсора;
- **X-Y Plot Format...** - вызвать окно диалога для форматирования графика .

6) В меню **Simbolic** содержатся команды для выполнения символьных операций:

- **Differentiate on Variable** - иифференцирование по переменной;
- **Integrate on Variable** - интегрирование по переменной;
- **Matrix Operation** - матричные операции;
- **Transform** - преобразования, в частности , Фурье.

7) В меню **Window** содержатся команды управления окнами документов:

- **Cascade** - расположить каскадом;
- **Tile Horizontal** - расположить горизонтальными рядами;
- **Tile Vertical** - расположить вертикальными рядами;
- **Zoom...** - изменить масштаб документа в окне.

Внизу открытого меню **Window** есть список открытых документов для переключения между ними с целью редактирования в рабочем поле.

8) В меню **Books** можно выбрать для изучения любую из электронных книг:

- **Tutorial.HBK** - элекронный учебник по MathCAD с гипертекстом ;
- **DeskRef.HBK** - элекронный справочник по физике и технике;
- **Sampler.HBK** - образцы типовых документов MathCAD.

9) В меню **Help** можно получить справку по терминам MathCAD из алфавитного указателя (**Index**) или по содержанию (**Contents).**

3. *Строка палитр* располагается в третьей сверху строке окна программы MathCAD и содержит ряд кнопок для вставки в документ операций.
4. *Панель инструментов* располагается в четвёртой строке окна программы MathCAD и содержит ряд кнопок, дублирующих команды меню для сокращения времени подачи команд и удобства.
5. *Рабочее поле (окно документа)* окна программы MathCAD занимает большую часть окна программы MathCAD ниже первых четырёх строк и используется для набора документов-программ расчёта, редактирования и отображения результатов расчёта. Если документ многостраничный, то справа и внизу рабочего поля(окна) появляются полосы прокрутки.
6. *Информационная строка (или строка состояния)* распологается внизу окна программы MathCAD и содержит вспомогательную информацию: о номере страницы (**page**) документа, отображаемой в рабочем поле; об установке режима автоматического пересчёта всех математических областей документа (**Auto**) и др.

2. 2. Работа с элементами документа MathCAD

Документ MathCAD - информационный файл, комбинированный из простейших, к числу которых относятся текстовые, программные, графические файлы и файлы данных. Документ может создаваться и существовать сначала в форме бумажного черновика или его экранного аналога, а затем редактироваться, храниться, выполняться как программа, далее записываться на диск, распечатываться на принтере как текст научно-технического отчета, включая таблицы и графики. Документ может существовать в одно- или многостраничном варианте в зависимости от размера. На рабочем поле, наблюдаемом на экране монитора при его прокрутке, можно видеть разделительные линии страниц в виде строк дефисов.

Область(блок) документа - часть документа, имеющая прямоугольные границы. Блоки документа подразделяются на математические, текстовые и графические в зависимости от вида обрабатываемой информации.

Математическая область(блок) документа на экране имеет невидимую прямоугольную границу, в пределах которой можно присваивать переменной числовое значение или задавать функцию или формулу для вычислений или операторы процедурно-ориентированной программы обработки векторов, матриц, а также результаты вычислений в виде таблиц, матриц. Границы вычислительного блока автоматически расширяются по мере набора информации. Различать на экране область формулы можно по обрамляющему курсору, кото-

рый расширяется при нажатии клавиши-пробел или стрелки. Начало вычислительного блока (левый верхний угол прямоугольника) образуется автоматически при начале набора, например, формулы. **Нельзя делать пробелы при вводе формул или размещать формулу раньше, чем заданы используемые в ней данные,** иначе появляются сообщения об ошибках. Исправлять ошибки в формулах можно удалением в порядке, обратном к набору или удаленим всей выделеной формулы и перенабором.

Текстовые области содержат алфавитно-цифровую информацию, набираемую в прямоугольной рамке для пояснений к математическим блокам. В режиме русской раскладки клавиатуры можно использовать **не шрифт** Times New Roman, а один из шрифтов **Courier, Courier New Cyr, MS Serif, System.**

Графический блок документа помечается на экране прямоугольной рамкой, внутри которой автоматически строится один или несколько графиков.

Математическая область позволяет пользователю набирать на экране оператор присваивания простой переменной или матрице соответствующих начальных значений с помощью знака присваивания **:=** . Можно задавать формулы для вычислений, используя стандартные библиотечные имена функций, использовать диапазоны переменных, разветвления, задавать функции пользователя, операции суммирования рядов в обычной математической символике и др.. Команда "**вычислить**" записывается в форме знака равно = и относится не только к соответствующей формуле, но и ко всем предыдущим операторам, формулам и функциям, связанным через данные с этой формулой. Например, ряд из 7 математических областей может иметь вид :

$k := 3$	$x := 2$	$y := k \cdot x + 4$	$y = 10$
$(12+48) \cdot 2 = 120$		$\sin(1) = 0.841$	$\sqrt{2} = 1.414$

Кроме того, в математической области можно записывать операторы для решения систем линейных и нелинейных уравнений, включая матричные операции, и много других программных операций и процедур, часть которых будет рассматриваться в главе 3 на примерах, а часть иных см. в [1] и др. .

Документ в целом содержит полное математическое описание алгоритмов решения одной или ряда задач. Количество, типы и очередность областей документа пользователь определяет сам в зависимости от решаемой последовательности задач. Порядок расположения блоков должен быть правильным: данные для последующего блока могут быть результатом только предшествующих блоков, иначе система выведет на экран сигнал ошибки (диагностическое сообщение) в соответствующем месте документа. Сообщение об ошибке должно исчезнуть после редактирования блока. Если пользователь задал системе автоматический режим **Auto,** то документ выполняется автоматически **с его начала** по мере набора очередной области или завершения редактирования путём щелчка мышью по рабочему полю. Документ можно сохранить в виде файла на диске в папке пользователя с расширением **.mcd**.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ, КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ, ПРИМЕРЫ РУЧНОГО РАСЧЁТА И РЕШЕНИЯ В СИСТЕМЕ MathCAD

3.1. Решение нелинейного уравнения с одной неизвестной. Методы отделения и уточнения корней

Задача 1 . Для данного нелинейного уравнения $f(x)=0$ с одной неизвестной величиной на промежутке [a; b] отделить корни с шагом hx и уточнить корень на первом интервале изоляции с точностью ε методом линеаризации (итераций) Ньютона, а на втором интервале изоляции – методом половинного деления.

Варианты расчетных заданий

№	Уравнение $f(x)=0$	Интервал	№	Уравнение $f(x)=0$	Интервал
0	$(x^2-\lg(1+x))(x-3.5)-4x+14=0$	[1 ; 4]	5	$3\arccos x^2-\sqrt{1-0.3x^3}-2=0$	[-1 ; 1]
1	$\sqrt{4-x}-tgx=0$	[0 ;3]	6	$\cos x+0.1\cdot x-0.01\cdot x^2=0$	[-3 ; 3]
2	$2x\sin x-\cos x=0$	[0 ; 4.5]	7	$tgx-2\cdot x=0$	[-1.5;1.5]
3	$4\arccos x^2-5\sqrt{1-0.3x^3}=0$	[-1 ; 1]	8	$x^4+arctgx-2=0$	[-1.5;1.5]
4	$x^2-2+\sin x=0$	[-2 ; 2]	9	$x^2+tg(0.5x)-1=0$	[-2 ; 2]

А.Пример ручного расчета

Для уравнения $x^2-4=0$ на промежутке [-3; 3] _отделить корни_ с шагом $hx=2$ и _уточнить корень_ на первом интервале _методом линеаризации Ньютона_ и на втором _- методом половинного деления_ с точностью ε. Здесь $f(x)=x^2-4$.

1. Для *отделения корней* в случае непрерывной функции $y=f(x)$ воспользуемся *шаговым (табличным) методом* (Рис.1)

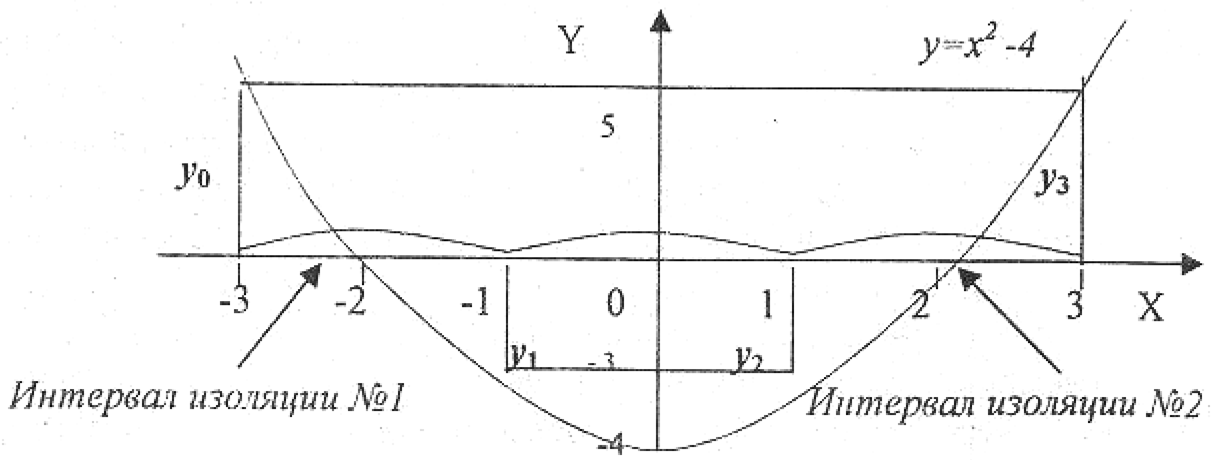

Рис.1. Графическое изображение отделения корней шаговым методом

Идея метода состоит в вычислении таблицы значений функции $y=f(x)$ при изменении величины x на промежутке [a; b] с выбранным шагом hx.

При $x_0=a$ вычислим , т.е. при $x_0=-3$, $y_0=x_0^2-4=+5$.

При $x_1=+hx$ вычислим, $y_1=f(x_1)$, т.е. при $x_1=-1$, $y_1=x_1^2-4=-3$.

При $x_2=x_1+hx$ вычислим, $y_2=f(x_2)$, т.е. при $x_2=+1$, $y_2=x_2^2-4=-3$.

При $x_3=x_2+hx$ вычислим, $y_3=f(x_3)$, т.е. при $x_3=+3$, $y_3=x_3^2-4=+5$.

Из анализа полученной таблицы следует, что на концах промежутка [-3;-1] функция $y=f(x)$ изменяет знак с плюс на минус. Из непрерывности функции следует, что на нем есть точка x_1^*, где $f(x_1^*)=0$, т. е. корень $x_1^*=-2$. Следовательно, этот промежуток является первым интервалом изоляции первого корня. На втором частичном интервале [-1; 1] функция не меняет знак на концах промежутка, поэтому его пропускаем. На третьем частичном интервале [1; 3] функция меняет знак с (-) на (+). Поэтому в качестве второго интервала изоляции корня x_2^* выбираем [1; 3]. Заметим, что при выборе шага $hx=3$ получим другие интервалы изоляции корня [-3; 0] и [0; 3].

2. Предполагая функцию $y=f(x)$ произвольной и гладкой, _*уточним*_ корень на первом интервале изоляции _*методом линеаризации Ньютона*_.

Идея метода состоит в замене функции $y=f(x)$ ее линейной моделью в окрестности начального значения корня x_0 (нулевого приближения) в виде касательной. Такая замена позволяет приближенно вычислять нелинейную функцию $y=f(x)$ по линейной функции $y=f(x_0)+f^1(x_0)(x-x_0)$, что является примером аппроксимации. Соответствующее нелинейному уравнению линейное уравнение $f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)=0$ имеет в качестве решения первое приближение к корню $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Для данного примера при $x_0=-3$; $f(x_0)=x_0^2-4=+5$; $f'(x_0)=2x_0=-6$

вычислим первое приближение $x_1=x_0-\dfrac{x_0^2-4}{2x_0}=-3+\dfrac{5}{6}=-\dfrac{13}{6}=-2{,}166$

Аналогично, второе приближение к корню найдется через первое приближение по формуле

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=x_1-\frac{(x_1^2-4)}{2x_1}=-\frac{13}{6}-\frac{(-\frac{13}{6})^2-4}{2(-\frac{13}{6})}=-2.0064.$$

Так как точное решение в данном примере очевидно: $x_1^*=-2$, то ошибка между точным x_1^* и приближенным x_2 равна $\Delta x_1^*=0.0064$, что меньше допустимой погрешности (точности) $\varepsilon=0.1$. Ошибка в выполнении равенства $f(x_2)=0$ будет $\Delta f(x_2)=|f(x_2)|=|x_2^2-4|=0.0256$, что также меньше $\varepsilon=0.1$. Поэтому для вычисления приближенного значения корня достаточно двух повторяющихся шагов вычислений, называемых *итерациями*. В общем случае итерационная формула метода Ньютона имеет вид:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad , \text{ где } i = 0,1,2....$$

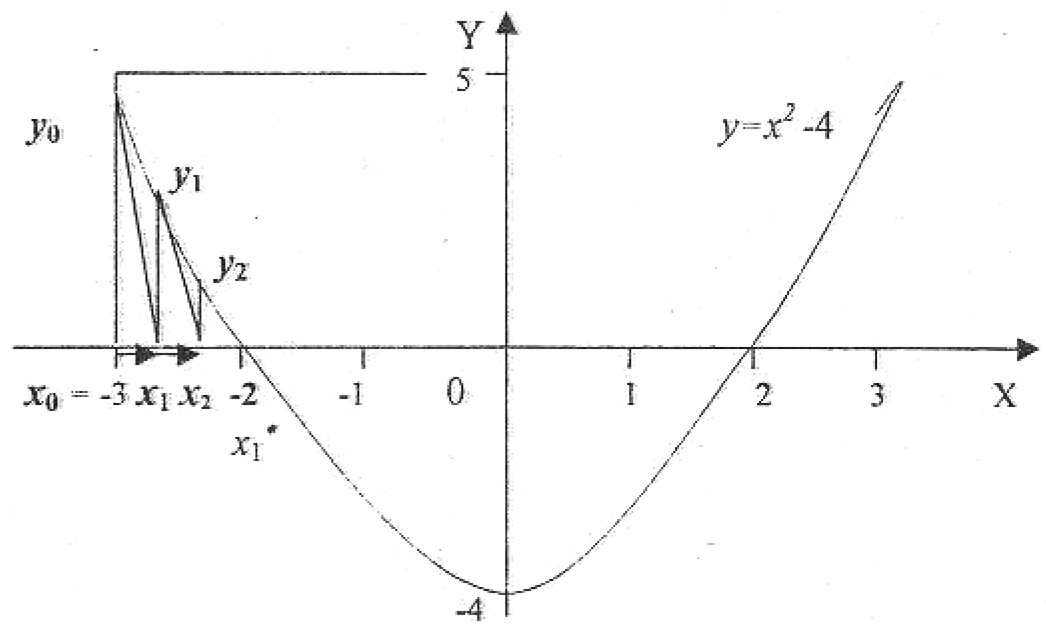

Рис.2. Графическая иллюстрация уточнения начального приближения $x_0 = -3$ к корню $x_1^* = -2$ методом линеаризации Ньютона

3. Найдем приближенное решение данного уравнения $x^2 - 4 = 0$ на втором интервале изоляции другого корня [0 ; 3] <u>*методом половинного деления*</u> с точностью ε.

Идея метода состоит в делении исходного промежутка изоляции корня $[a^{(0)}; b^{(0)}]$ пополам точкой $x^{(0)}_{ср}=(a+b)/2=1.5$ и вычислении значений функции на левом конце $f(a^{(0)})=-4$ и в середине $f(x^{(0)}_{ср}) = -1,75$. Так как их произведение >0, то смена знака функции будет на правой половине, ее и выбираем в качестве первого приближения $[a^{(1)}; b^{(1)}] = [1.5; 3]$, исключив левую половину. Таким образом, на первой итерации получаем интервал (с корнем) в два раза короче, на второй итерации в четыре раза короче и так до тех пор, пока интервал изоляции корня не станет меньше ε. В качестве приближенного решения можно выбрать любое значение искомой величины x из $[a^{(i)} ; b^{(i)}]$, *где i-* номер последней итерации.

Проведем вычисления на второй итерации при $a^{(1)} = 1.5$, $b^{(1)}=3$ для $x^{(1)}_{ср}=(1,5 + 3)/2 =2,25$, а также $f(a^{(1)})=1,5^2 - 4= -1,75$ и $f(x^{(1)}_{ср})=2,25^2-4= 5,0625-4 = +1,0625$. Так как $f(a^{(1)}) \cdot f(x^{(1)}_{ср}) < 0$, то смена знака функции будет на левой половине интервала [1,5;3]. Поэтому исключаем его правую половину, оставив в качестве второго приближения $[a^{(2)}; b^{(2)}] = [1.5; 2.25]$. Этот интервал изоляции является сокращенным в четыре раза по отношению к начальному интервалу изоляции $[a; b] = [0; 3]$. Заметим, что длина интервала [1,5; 2,25] равна 0,75,

что меньше заданной допустимой погрешности ε =0,8. Поэтому в качестве приближенного значения корня на интервале изоляции [0 ;3] с заданной точностью $\varepsilon = 0,8$ можно принять значение $x = a^{(2)} = 1,5$ (при точном значении $x_2^* = 2$).

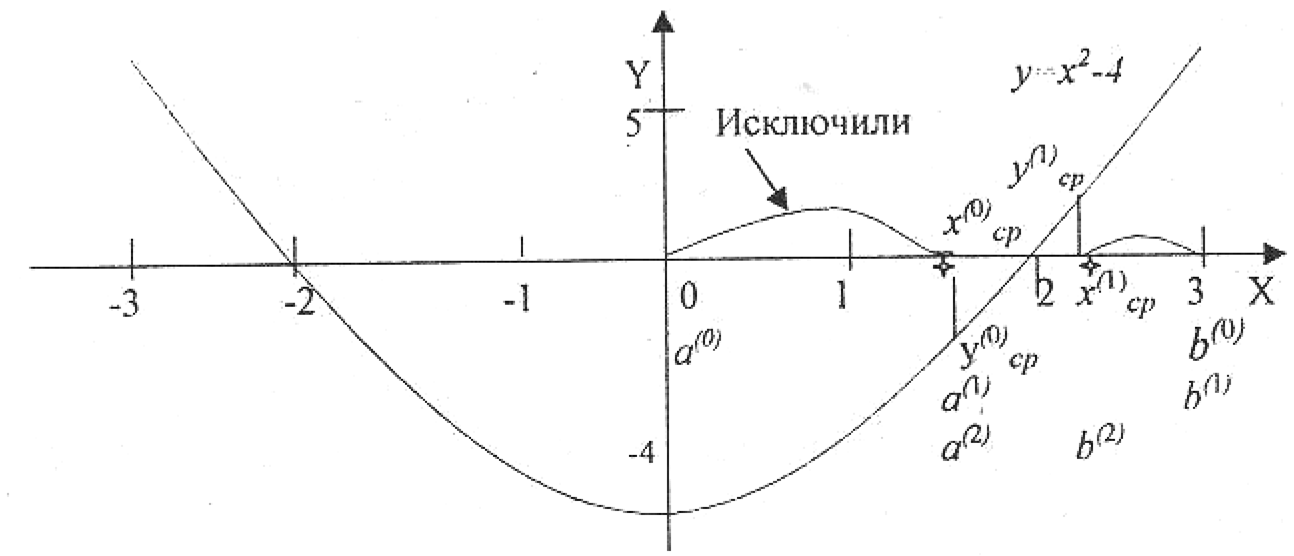

Рис.3. Графическая иллюстрация метода половинного деления на интервале [0; 3] для двух итераций

Б. Пример программы и решения нелинейного уравнения в виде документа MathCAD

1. **Отделение корней нелинейного уравнения** $f(x) = 0$, где $f(x) := x^2 - 4$ на промежутке [-3; 3] с шагом $h_x = 2$ *шаговым (табличным)* методом.

В левой половине страницы ниже приведены програмные математические области документа MathCAD, а в правой – текстовые комментарии.

Документ MathCAD :

$x := -3, -1 .. 3$ <u>Зададим диапазон изменения x от -3 до 3 с шагом h_x=2</u>.

$f(x) := x^2 - 4$ <u>Зададим функцию пользователя $y = f(x)$:</u>

x=	f(x)=
-3	5
-1	-3
1	-3
3	5

<u>Введем команду вычислить таблицу значений x и $f(x)$</u>.

<u>Из анализа полученной таблицы следует, что функция изменяет знак два раза. Поэтому выбираем интервал изоляции для первого корня [-3; -1] и для второго корня [1; 3].</u>

2. Уточнение корня методом линеаризации Ньютона на первом интервале изоляции корня в виде документа MathCAD

2.1. Уточнение корня по **методу Ньютона** на первом интервале изоляции корня [-3; -1] при максимальном числе итераций *5* .

$i := 0 .. 5$ Диапазон изменения номера итераций

$x_0 := -3$ Начальное приближение к корню

$f(x) := x^2 - 4$ Функция по левой части уравнения $f(x) = 0$

$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$ Формула для вычисления производной $f'(x)$

$x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)}{f1(x_i)}$ Итерационная формула для вычисления массива приближений к корню.

$i =$	$x_i =$	$f(x_i) =$
0	-3	5
1	-2.1666	0.6944
2	-2.0064	0.0257
3	-2	$4.096 \cdot 10^{-5}$
4	-2	$4.048 \cdot 10^{-10}$
5	-2	0

Вывод таблицы приближённых решений для 5-ти итераций.

Сходимость к точному решению $x = -2$ наблюдается по результатам во второй и третьей колонке. Для второго приближения при $i = 2$ ошибка по x равна 0,0064, а по значению функции ошибка составляет 0,0257, а на пятой итерации ошибки уже нулевые.

2.2. Определение корня с машинной точностью на первом интервале изоляции [-3; -1] в системе MathCAD по функции **Find** , то есть **Найти**.

$a := -3$ $b := -1$ Начальное и конечное значение интервала

$xc := \frac{a+b}{2}$ Начальное приближение корня

$f(x) := x^2 - 4$ Задание функции

$f(a) \cdot f(b) = -15$ Проверка интервала изоляции корня на смену знака

Given Задание **начала блока решения** уравнения

$f(xc) = 0$ Задание уравнения (Знак логического равенства-жирный!)

$xk := \mathbf{Find}(xc)$ Вызов **функции** *Find(x)*- найти решение уравнения

$xk = -2$ Оператор **вычислить** корень по набранной выше программе

$f(xk) = 0$ Оператор **вычислить** левую часть уравнения для проверки равенства нулю в уравнении для корня.

2.3. Определение корня с заданной точностью по **функции** *root* (f(x),x)- **корень**

$TOL := 0.1$ Задание точности

$x0 := -3$

$xk := root(f(x0), x0)$ Вызов функции **root** для решения уравнения

$xk = -2.002$ Команда вычислить корень с заданной точностью

3. Уточнения корня методом половиного делния на втором интервале изоляции корня в виде документа MathCAD

Для отыскания корня на втором интервале изоляции корня [1; 3] за 5 итераций введем следующие вычислительные блоки:

$a := 1$ $b := 3$ Задаем интервал

$f(x) := x^2 - 4$

$f(a) \cdot f(b) = -15$ Проверка смены знака на концах данного промежутка

$xc(a,b) := \frac{a+b}{2}$ Функция пользователя для вычисления середины интервала

Зададим вектор-функцию **int** для вычисления нужной половины интервала[a;b].

$$\text{int}(a,b) := \text{if}\left[f(a) \cdot f(xc(a,b)) < 0, \begin{bmatrix} a \\ xc(a,b) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} xc(a,b) \\ b \end{bmatrix} \right]$$

$\text{int}(a,b) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Вычисление половины интервала с корнем

Здесь используется функция *MathCAD* **if** (*если*). Если после вычислений условие (неравенство) выполняется, то результатом будет следующая пара чисел, если нет, то последняя.

Зададим процедуру отыскания последовательности половинных интервалов $[a_i; b_i]$, где $i = 0,1,2...5$.

$a_0 := 1$ $b_0 := 3.0001$ Начальный интервал

$i := 0 .. 5$ Диапазон по i

$\begin{bmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{bmatrix} := int(a_i ; b_i)$ Итерационная формула

i=	a_i=	b_i=	$f(a_i)$=	$f(b_i)$=
0	1	3.001	-3	5.006
1	1	2	-3	0.002
2	1.5	2	-1.749	0.002
3	1.75	2	-0.936	0.002
4	1.875	2	-0.483	0.002
5	1.938	2	-0.244	0.002

Команда вычислить таблицу

Из анализа результатов расчёта видно, что на первой итерации выбирается левая половина данного интервала, а на всех последующих – правая половина от предыдущего, приближаясь к корню $x = 2$. Значение функции уменьшается до нуля.

Заметим, что функция int(a,b) не позволяет находить решение для пограничного случая, когда корень находится ровно посредине, поэтому пришлось чуть-чуть увеличить правую границу данного интервала, т. е. 3,001 вместо 3 ровно.

3.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений. Прямые и итерационные методы

Задача 2. Дана система линейных алгебраических уравнений третьего порядка: $A[3;3]$*X[3]=$B[3]$, где матрица $A[3;3]$ и столбец $B[3]$ заданы по вариантам.

Определить:

1. Точное решение – вектор $X[3]$ методом Гаусса-Жордана.
2. Приближенное решение методом простой итерации с точностью ε =0,001 при нулевом начальном приближении к искомым величинам
3. Ошибки в выполнении равенств в данной системе.

Варианты заданий

№	A[3 ; 3]	B[3]	№	A[3 ;3]	B[3]
0	$\begin{bmatrix}10 & 2 & 1\\ 1 & 20 & -10\\ -5 & -4 & 30\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}15\\31\\17\end{bmatrix}$	5	$\begin{bmatrix}10 & 5 & 7\\ 3 & 20 & 2\\ -2 & 13 & 30\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-14\\33\\32\end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix}10 & 3 & 4\\ 7 & 20 & 1\\ -1 & -1 & 10\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\15\\20\end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix}20 & 3 & 2\\ 3 & 30 & 1\\ -7 & 5 & -10\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-34\\-3\\-16\end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix}20 & 5 & 12\\ 2 & 10 & -3\\ -1 & 2 & 20\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-13\\3\\20\end{bmatrix}$	7	$\begin{bmatrix}10 & 5 & -2\\ 7 & 20 & 3\\ -2 & 3 & 30\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-4\\-3\\-16\end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix}30 & 5 & -3\\ 1 & 10 & 7\\ -2 & 1 & 20\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}9\\-15\\35\end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix}30 & -2 & 1\\ 4 & -10 & -3\\ 3 & 4 & 20\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}24\\-10\\-29\end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix}30 & 1 & 5\\ -2 & 20 & -5\\ 3 & -2 & 10\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7\\35\\6\end{bmatrix}$	9	$\begin{bmatrix}20 & -5 & -3\\ -5 & 30 & -4\\ 3 & 5 & -10\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}29\\12\\-9\end{bmatrix}$

3.2.1. Прямые методы отыскания точного решения. Метод Гаусса - Жордана

А. ***Пример ручного расчета***

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-6x_3=-7,\\ 2x_1-3x_2+4x_3=7\ ,\\ 4x_1+2x_2-5x_3=-4,\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix}3 & 2 & -6\\ 2 & -3 & 4\\ 4 & 2 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\7\\4\end{bmatrix}.$$

Идея метода состоит в равносильных преобразованиях системы к виду, когда матрица A[3; 3] примет вид единичной матрицы. Тогда на месте столбца B[3] окажутся корни, т.е. точное решение

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix} \quad \text{или} \quad E[3,3]\ \ X[3]=B[3] \text{ или } X[3]=B[3].$$

Шаг 1. Разделим первое уравнение на 3, чтобы получить $a_{11}=1$

$$x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{6}{3}x_3=-\frac{7}{3}. \qquad (1)$$

Для зануления a_{21} умножим уравнение (1) на a_{21}=2 и вычтем из второго уравнения:

$$-\frac{13}{3}x_2+8x_3=\frac{35}{3}. \qquad (2)$$

Для зануления a_{31} умножим (1) на a_{31}=4 и вычтем из третьего уравнения:

$$-\frac{2}{3}x_2+3x_3=\frac{16}{3}. \qquad (3)$$

Таким образом ,в первом столбце получили диагональный элемент $a_{11}=1$, а под диагональю все коэффициенты нулевыми ($a_{21}=a_{31}=0$).

Шаг 2. Рассмотрим систему без первого уравнения :

$$\begin{cases} -\dfrac{13}{3}x_2 + 8x_3 = \dfrac{35}{3}, \\ -\dfrac{2}{13}x_2 + 3x_3 = \dfrac{16}{3} \end{cases} \quad \text{вида} \quad \begin{cases} a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Поступая аналогично *шагу 1*, сделаем $a_{22}=1$ и $a_{32}=0$, т.е. диагональный элемент матрицы - единичным, а под ним – нулевым:

$$\begin{cases} x_2 - \dfrac{24}{13}x_3 = -\dfrac{35}{3}, \\ \dfrac{69}{39}x_3 = \dfrac{138}{39}. \end{cases}$$

Шаг 3. Разделив последнее уравнение на $\dfrac{69}{39}$ получим

$$\begin{cases} x_2 - \dfrac{24}{13}x_3 = -\dfrac{35}{3}, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Таким образом, система приведена к виду, когда коэффициенты матрицы A[3;3] на диагонали равны единице, а под диагональю равны нулю:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{2}{3}x_2 - \dfrac{6}{3}x_3 = -\dfrac{7}{3}; \\ x_2 - \dfrac{24}{13}x_3 = -\dfrac{35}{3}, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Шаг 4. Умножая последнее уравнение на a_{13} и вычитая его из первого уравнения, занулим коэффициент a_{13}. Умножая последнее уравнение на a_{23} и вычитая его из второго уравнения, занулим коэффициент a_{23}. Умножая затем второе уравнение на a_{12} и вычитая из первого, занулим a_{12} . Таким образом, матрица A[3,3] превратится в единичную, а в столбце B[3] окажутся корни

$$B[3] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Примечание. В матричной форме система имеет вид: $A[3;3] \cdot X[3] = B[3]$.

Умножив это уравнение слева на обратную матрицу $A^{-1}[3,3]$, получим:

$$A^{-1}[3;3] \cdot A[3;3] \cdot X[3] = A^{-1}[3;3] \cdot B[3].$$

Учитывая, что $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, получим формулу для нахождения вектора $X[3]$: $X = A^{-1} \cdot B$.

Б. Пример программы и расчета в системе MathCAD

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Для решения системы линейных уравнений $A*X=B$ зададим матрицу A и столбец B

$$X := A^{-1} \cdot B$$

Зададим матричную формулу для отыскания точного решения по методу Гаусса - Жордана

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Введем команду **вычислить** и получим точное решение.

$$B1 := A \cdot X$$

Проверим полученное решения подстановкой X в систему в матричной форме.

$$B1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Введем команду **вычислить.** Столбец *B1* совпадает с данным столбцом *B*.

Примечание. В расчётах для электрических схем возникает необходимость решать линейные системы с комплексными коэффициентами. Программа решения в MathCAD записывается аналогично. Матрица *A* и столбец *B* заполняются комплексными числами или формулами, предварительно задав **мнимую единицу** j := $\sqrt{-1}$ в поле документа.

3.2.2. Итерационные методы отыскания приближенного решения. Метод простой итерации

А. Пример ручного расчета

Дан другой вариант системы линейных уравнений третьего порядка, которую представим в трех различных формах:

$A[3;3] * X[3] = B[3]$.

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ -3 & 20 & 4 \\ 4 & -5 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 45 \\ 34 \end{bmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} 10x_1 + 2x_2 - x_3 = 12, \\ -3x_1 + 20x_2 + 4x_3 = 45, \\ 4x_1 - 5x_2 + 20x_3 = 34. \end{cases} \qquad (0)$$

Требуется вычислить второе приближение к корням системы по итерационным формулам, начиная с нулевых приближенных значений $x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=x_3^{(0)}=0$, а также ошибки выполнения равенства в каждом уравнении системы.

Идея метода простой итерации состоит в разрешении первого уравнения относительно x_1, т.е. выражаем x_1 через остальные неизвестные x_2 и x_3. Из второго уравнения выражаем x_2 через x_1 и x_3. Из третьего уравнения выражаем x_3 через x_1 и x_2.
Тогда получим итерационные формулы:

$$x_1^{(k+1)} = (b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)}))/a_{11},$$
$$x_2^{(k+1)} = (b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)}))/a_{22}, \qquad (1)$$
$$x_3^{(k+1)} = (b_3 - (a_{31}x_1^{(k)} + a_{32}x_2^{(k)}))/a_{33},$$

где k-номер итерации (повторения вычислений более точных значений $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$, $x_3^{(k+1)}$), $k=0,1,2\ldots k_{max}$ (k_{max}- максимально- допустимое число итераций, например $k_{max}=10$).

Подставляя начальное приближение $x_1^{(0)},x_2^{(0)},x_3^{(0)}$ равным нулю при $k = 0$ в правую часть от знака = в формулах (1), найдем в левой части первое приближение $x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)}$ к корням x_1^*,x_2^*,x_3^*. Далее, подставляя в правую часть первое приближение, найдем в левой части второе приближение и так далее, до тех пор, пока не будет выполнено равенство во всех уравнениях *(0)* с заданной точностью или не будет обнаружено, что число итераций исчерпано

Условие сходимости метода простой итерации при $k\to\infty$ проверяется подстановкой коэффициентов матрицы A[3,3] в следующие неравенства:

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|,$$
$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|, \qquad (2)$$
$$|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|.$$

Если все неравенства выполняются ("диагональные элементы по модулю больше суммы модулей всех остальных элементов матрицы в строке"), то вычислительный процесс сходится, т.е. существуют пределы $x_j^* = \lim\limits_{k\to\infty} x_j^{(k)}$ ($j=1,2,3$), которые и являются корнями исходной системы.

Проведем ручной расчет сначала первого приближения $x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)}$, вычисляемых по итерационным формулам *(1)* при $k = 0$ и $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$.

Тогда получим $x_1^{(1)} = 1{,}2$; $x_2^{(1)} = 2{,}25$; $x_3^{(1)} = 1{,}7$.

Подставив первое приближение в исходную систему вычислим ошибки в выполнении равенств в каждом уравнении :

$$O_1^{(1)} = \left|a_{11}x_1^{(1)} + a_{12}x_2^{(1)} + a_{13}x_3^{(1)} - b_1\right| = |10\cdot1{,}2 + 2\cdot2{,}25 - 1{,}7 - 12| = 2{,}8,$$
$$O_2^{(1)} = \left|a_{21}x_1^{(1)} + a_{22}x_2^{(1)} + a_{23}x_3^{(1)} - b_2\right| = |-3\cdot1{,}2 + 20\cdot2{,}25 + 4\cdot1{,}7 - 45| = 3{,}2,$$
$$O_3^{(1)} = \left|a_{31}x_1^{(1)} + a_{32}x_2^{(1)} + a_{33}x_3^{(1)} - b_3\right| = |4\cdot1{,}2 - 5\cdot2{,}25 + 20\cdot1{,}7 - 34| = 6{,}45.$$

Заметим, что вычисленная ошибка существенно меньше соответствующих ошибок для нулевого начального приближения :

$$O_1^{(0)} = \left|a_{11}x_1^{(0)} + a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)} - b_1\right| = |-b_1| = 12,$$
$$O_2^{(0)} = \left|a_{21}x_1^{(0)} + a_{22}x_2^{(0)} + a_{23}x_3^{(0)} - b_2\right| = |-b_2| = 45,$$
$$O_3^{(0)} = \left|a_{31}x_1^{(0)} + a_{32}x_2^{(0)} + a_{33}x_3^{(0)} - b_3\right| = |-b_3| = 34.$$

Вычислим второе приближение по итерационным формулам при $k=1$:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{10}\cdot(12 - (2x_2^{(1)} - x_3^{(1)})) = \frac{1}{10}\cdot(12 - (2\cdot2{,}25 - 1{,}7)) = 0{,}92,$$
$$x_2^{(2)} = \frac{1}{20}\cdot(45 - (-3x_1^{(1)} + 4x_3^{(1)})) = \frac{1}{20}\cdot(45 - (-3\cdot1{,}2 + 1{,}7)) = 2{,}09,$$
$$x_3^{(2)} = \frac{1}{20}\cdot(34 - (4x_1^{(1)} - 5x_2^{(1)})) = \frac{1}{20}\cdot(34 - (4\cdot1{,}2 - 5\cdot2{,}25)) = 2{,}0225$$

и соответствующие ошибки

$$O_1^{(2)} = \left|a_{11}x_1^{(2)} + a_{12}x_2^{(2)} + a_{13}x_3^{(2)} - b_1\right| = |10\cdot0{,}92 + 2\cdot2.09 - 2{,}0225 - 12| = 0{,}7425,$$
$$O_2^{(2)} = \left|a_{21}x_1^{(2)} + a_{22}x_2^{(2)} + a_{23}x_3^{(2)} - b_2\right| = |-3\cdot0{,}92 + 20\cdot2{,}09 + 4\cdot2{,}0225 - 45| = 2{,}13.$$
$$O_3^{(2)} = \left|a_{31}x_1^{(2)} + a_{32}x_2^{(2)} + a_{33}x_3^{(2)} - b_3\right| = |4\cdot0{,}92 - 5\cdot2{,}09 + 20\cdot2{,}0225 - 34| = 0{,}32.$$

Заметим, что точное решение : $x_1^* = 1$; $x_2^* = 2$; $x_3^* = 2$. Поэтому приближенное решение, найденное в результате расчетов по второй итерации, будет отличаться от точного не более, чем на $\varepsilon = 0{,}1$. Однако выполнимость равенств с требуемой точностью, например $\varepsilon = 0{,}1$, еще не достигнута, т.к. $O_1^{(2)} = 0{,}7425 > 0{,}1$; $O_2^{(2)} = 2{,}13 > 0{,}1$; $O_3^{(2)} = 0{,}32 > 0{,}1$. Поэтому требуется продолжить вычисления для 3-й итерации аналогично, что удобнее, менее трудоемко и быстрее выполнить в системе MathCAD, тем более что это применимо для систем большой размерности.

Б. Пример программы и расчета в системе MathCAD

В левой половине страницы ниже приведены математические области документа MathCAD, а в правой – текстовые комментарии

$$a := \begin{bmatrix} 10 & 2 & -1 \\ -3 & 20 & 4 \\ 4 & -5 & 20 \end{bmatrix} \qquad b := \begin{bmatrix} 12 \\ 45 \\ 34 \end{bmatrix}$$

Зададим коэффициенты матрицы A[3,3] и столбца свободных членов B[3] в вещественной (или комплексной) форме

ORIGIN = 1 Установка начального значения индекса единичным с помощью команды **Math| Bult-in-Variable** в окне диалога

$k := 1..10$ Задание диапазона для изменения номера итерации

$x1_1 := 0 \quad x2_1 := 0 \quad x3_1 := 0$ Задание нулевых начальных значений

$$\begin{pmatrix} x1_{k+1} \\ x2_{k+1} \\ x3_{k+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \dfrac{b_1 - (a_{1,2} \cdot x2_k + a_{1,3} \cdot x3_k)}{a_{1,1}} \\ \dfrac{b_2 - (a_{2,1} \cdot x1_k + a_{2,3} \cdot x3_k)}{a_{2,2}} \\ \dfrac{b_3 - (a_{3,1} \cdot x1_k + a_{3,2} \cdot x2_k)}{a_{3,3}} \end{pmatrix}$$

Задание итерационной формулы в векторной форме

Команда **вычислить** таблицу

k=	$x1_k$=	$x2_k$=	$x3_k$=
1	0	0	0
2	1.2	2.25	1.7
3	0.92	2.09	2.023
4	0.984	1.984	2.039
5	1.007	1.99	1.999
6	1.002	2.001	1.996
7	0.999	2.001	2
8	1	2	2
9	1	2	2
10	1	2	2

По каждой колонке таблицы можно наблюдать сходимость приближенных решений к точному *X*=(1;2;2). Заметим, что этот процесс наглядно наблюдать, построив графики *x1(k), x2(k), x3(k)*, что легко делается по команде **Graphica| Create X-Y Plot** или по соответствующей кнопке **палитры графиков.**

Примечание. Сходимость может быть медленной, тогда число итераций удваиваем (сначала до 20). Может потребоваться увеличить точность представления чисел в таблице с 3 до 6 или даже до 15 цифр, что можно сделать установкой параметра **Displayed Precision** для команды **Math|Numerical Format** или двойным щелчком по таблице. Параметры форматирования графика (**Grid Lines** – Разделительные линии на оси, **Numbered** – Представлять числа на масштабной сетке оси и др.) также можно установить дважды щелкнув по области графика.

3.3. Методы аппроксимации и интерполяции при обработке экспериментальных данных

Задача 3. Пусть в результате экспериментального изучения зависимости $y = f(x)$ получена в пяти точках таблица значений.

i	0	1	2	3	4
x	0.1	0.3	0.6	0.8	1
y	0.15	0.3	0.45	0.5	0.55

где *i* - номер опыта. Найти:

1.Интерполяционный полином второго порядка $y = P2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ методом неопределенных коэффициентов, используя данные нулевого, первого и 4-го опытов. Оценить ошибки аппроксимации табличной функции зависимостью $y = P2(x)$ для 2-го и 3-го опытов.

2.Аппроксимирующий полином первого порядка $y = P1(x) = b_0 + b_1 x$ методом наименьших квадратов. Оценить ошибки аппроксимации по всем опытам.

Варианты заданий данных наблюдения значений функции

N п/п	i	0	1	2	3	4	N п/п	i	0	1	2	3	4
0	x	0.1	0.2	0.5	0.7	1	5	x	0.1	0.3	0.6	0.8	1
	y	0.2	0.3	0.5	0.9	1		y	0.85	0.6	0.3	0.15	0.05
1	x	0.1	0.4	0.7	0.9	1	6	x	0.1	0.4	0.6	0.8	1
	y	0.05	0.25	0.5	0.85	1		y	0.75	0.35	0.3	0.15	0.05
2	x	0.1	0.3	0.5	0.6	0.9	7	x	0.1	0.3	0.5	0.8	1
	y	0.4	0.6	0.75	0.75	0.83		y	0.3	0.55	0.65	0.4	0.25
3	x	0.1	0.2	0.4	0.7	1	8	x	0.1	0.2	0.5	0.7	1
	y	0.55	0.5	0.4	0.35	0.33		y	0.6	0.7	0.8	0.77	0.72
4	x	0.1	0.3	0.4	0.6	0.9	9	x	0.1	0.2	0.4	0.8	1
	y	0.2	0.45	0.55	0.7	0.7		y	0.1	0.15	0.35	0.8	1

Примечание. Для **четных вариантов** находить интерполяционный полином второго порядка и аппроксимирующий полином первого порядка методом наименьших квадратов, а для **нечетных вариантов** – интерполяционный полином первого порядка и аппроксимирующий полином второго порядка.

3.3.1. Метод неопределенных коэффициентов

А. Пример ручного расчета

Выберем из данных любого варианта таблицы координаты нулевой, первой и четвертой точек. Требуется определить коэффициенты $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ интерполяционного полинома второго порядка

$$P2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ , \qquad (1)$$

из условий интерполяции (прохождение графика искомой функции $y = P2(x)$ через выбранные точки):

$$P2(x_0) = y_0$$
$$P2(x_1) = y_1 \qquad (2)$$
$$P2(x_4) = y_4$$

Метод неопределенных коэффициентов реализуется подстановкой выражения (1) в систему (2). Тогда получим систему трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными величинами $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0$$
$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \qquad (3)$$
$$a_0 + a_1 x_4 + a_2 x_4^2 = y_4$$

Подставляя числовые значения $x_0 = 0.1$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 1$, имеем

$$a_0 + a_1 \cdot 0.1 + a_2 \cdot 0.01 = 0.15$$
$$a_0 + a_1 \cdot 0.3 + a_2 \cdot 0.09 = 0.3 \qquad (4)$$
$$a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 0.55$$

Систему (4) можно записать в матричной форме

$$\mathbf{C} * \mathbf{a} = \mathbf{B}, \text{ где} \qquad (5)$$

С – матрица коэффициентов, **а** – вектор-столбец неизвестных $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$; **В** – вектор-столбец. Решив систему (4) –(5) , что эффективнее сделать в системе MathCAD, найдём коэффициенты полинома и вычислим ошибки интерполяции для неиспользованных 2-й и 3-й точек x_2 *и* x_3 : $O_2 = P2(x_2) - y_2$ и $O_3 = P2(x_3) - y_3$.

Б. Пример программы и расчета в системе MathCAD

В левой половине страницы ниже приведены математические области документа MathCAD, а в правой – текстовые коментарии

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.01 \\ 1 & 0.3 & 0.09 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.3 \\ 0.55 \end{bmatrix},$$

Ввод матрицы **С** и столбца **В** для решения системы (4)

$$\mathbf{a} := \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

Задание матричной формулы для решения системы (4)

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0.0619 \\ 0.9246 \\ -0.4365 \end{pmatrix}$$

Команда **решить систему** и найти коэффициенты полинома $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$

$$P2(x) := a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

Определение интерполирующей функции $y = P2(x)$

$$O_2 := P2(0.6) - 0.45 \qquad O_2 = 0.0095$$
$$O_3 := P2(0.8) - 0.5 \qquad O_3 = 0.0222$$

Вычисление ошибок интерполяции

$$X := \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1.0 \end{bmatrix} \qquad Y := \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.3 \\ 0.45 \\ 0.5 \\ 0.55 \end{bmatrix}$$

Задание табличных данных в виде векторов X и Y для построения графика узловых точек

$$xg := 0, 0.1 \,..\, 1.0$$

Задание **диапазона изменения** рабочей переменной xg для построения графика нтерполяционного полинома $y = P2(x)$ в промежутке [0; 1] с шагом 0.1

$$i := 0 \,..\, 4$$

Задание **диапазона изменения** индкса табличных (узловых) точек

$$xg = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P2(xg) = \begin{pmatrix} 0.0619 \\ 0.15 \\ 0.2293 \\ 0.3 \\ 0.3619 \\ 0.4151 \\ 0.4595 \\ 0.4952 \\ 0.5222 \\ 0.5405 \\ 0.55 \end{pmatrix}$$

Вычисление таблицы значений найденного интерполяционного полинома $P2(x)$ для построения его графика

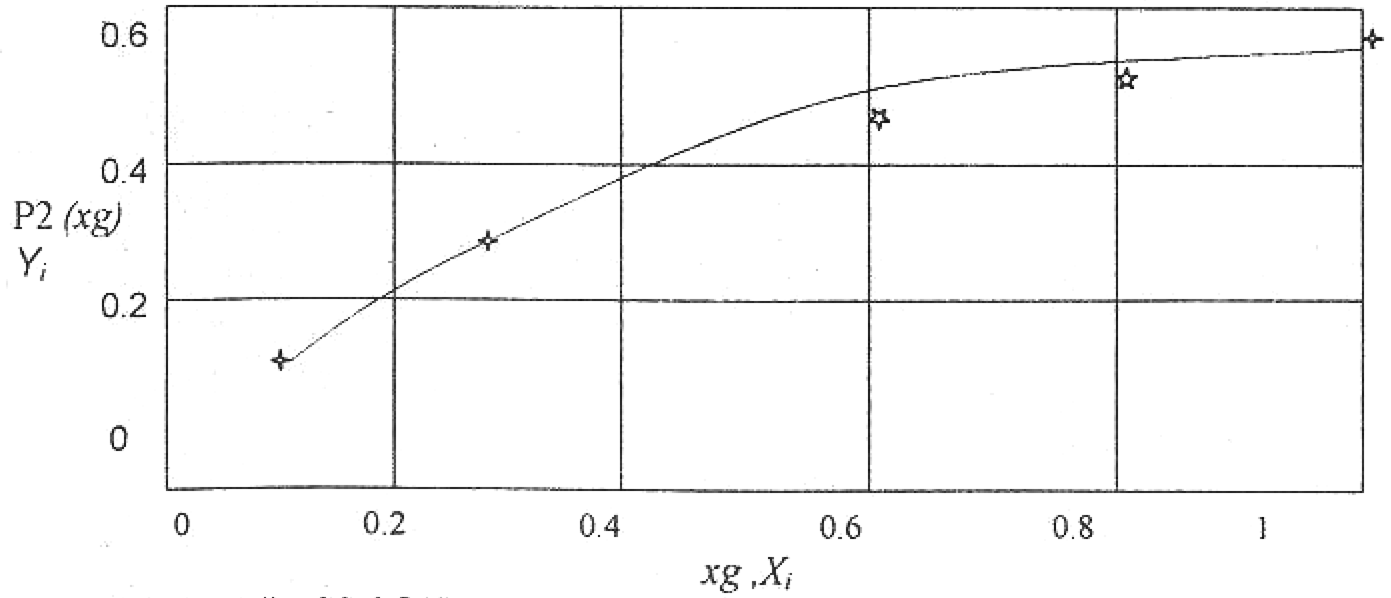

Рис.4. Построенный в MathCAD график интерполирующей параболы по трем точкам(нулевой, первой и четвертой). Звездочками отмечены вторая и третья узловые точки. Конец документа MathCAD

Вывод: интерполирующая функция $y = P2(x)$ проходит через узлы интерполяции номер 0, 1 и 4. Вычисленные ошибки интерполяции O_2 и O_3 совпадают по знаку с отклонением 2-й и 3-й точек от графика.

3.3.2. Метод наименьших квадратов

Дана таблица значений функции одной переменной в пяти точках (см. *Задачу 3*). Требуется определить коэффициенты аппроксимирующего полинома первого порядка (прямой) $y = P1(x) = b_0 + b_1 x$ методом наименьших квадратов (МНК) и оценить ошибки аппроксимации по пяти точкам.

Идея метода наименьших квадратов заключается в нахождении аппроксимирующей функции $P1(x) = b_0 + b_1 x$ из условия минимальности суммы квадратов отклонений этой функции в данных точках от соответствующих табличных значений. Математически идея метода МНК заключается в нахождении коэффициентов b_0, b_1 из условия минимальности суммы квадратов отклонений как функции многих переменных

$$S(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1) = \sum_{i=0}^{4} (P1(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{4} (\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 x - y_i)^2 .$$

Необходимым условием минимума функции S от переменных b_0 и b_1 является равенство нулю её частных производных. Следовательно, для нахождения b_0 и b_1 получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial S(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1)}{\partial \mathbf{b}_0} = \sum_{i=0}^{4} 2(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 x_i - y_i) = 2\left[5\mathbf{b}_0 + \sum_{i=0}^{4} x_i \mathbf{b}_1 - \sum_{i=0}^{4} y_i\right] = 0 ,$$

$$\frac{\partial S(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1)}{\partial \mathbf{b}_1} = \sum_{i=0}^{4} 2(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 x_i - y_i) x_i = 2\left[\sum_{i=0}^{4} x_i \mathbf{b}_0 + \sum_{i=0}^{4} x_i^2 \mathbf{b}_1 - \sum_{i=0}^{4} y_i x_i\right] = 0 .$$

Полученная система называется *системой нормальных уравнений* метода МНК и в матричной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} 5 & \sum_{i=0}^{4} x_i \\ \sum_{i=0}^{4} x_i & \sum_{i=0}^{4} x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{4} y_i \\ \sum_{i=0}^{4} y_i x_i \end{bmatrix}, \quad \text{или } D[2,2] \cdot b[2] = E[2]$$

А. Ручной расчет

Для ручного решения этой системы запишем расчетную таблицу, из которой найдем коэффициенты матрицы $D[2,2]$ и $E[2]$.

N_i	x_i	y_i	x_i^2	$y_i x_i$
0	0,1	0,15	0,01	0,015
1	0,3	0,3	0,09	0,09
2	0,6	0,45	0,36	0,27
3	0,8	0,5	0,64	0,4
4	1,0	0,55	1	0,55
	$\sum_{i=0}^{4} x_i$	$\sum_{i=0}^{4} y_i$	$\sum_{i=0}^{4} x_i^2$	$\sum_{i=0}^{4} y_i x_i$
	2,0	1,68	2,1	1,325

Тогда система нормальных уравнений примет конкретный вид

$$\begin{bmatrix} 5 & 2{,}0 \\ 2{,}0 & 2{,}1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}68 \\ 1{,}325 \end{bmatrix}.$$

Решив систему линейных алгебраических уравнений, получим $\mathbf{b}_0 = 0{,}1447$ и $\mathbf{b}_1 = 0{,}4380$.

Ошибки аппроксимации можно вычислить по всем опытам в виде отклонения расчитанного по аппроксимирующей функции от экспериментального (табличного) значения

$$O_i = P1(x_i) - y_i, i = 0,1,..4 .$$

Следовательно,

$$O_0 = P1(x_0) - y_0 = (0{,}1447 + 0{,}435 * 0{,}1) - 0{,}15 = -0{,}1118 ,$$

$$O_1 = P1(x_1) - y_1 = (0{,}1447 + 0{,}435 * 0{,}3) - 0{,}3 = -0{,}0248,$$

$$O_2 = P1(x_2) - y_2 = (0{,}1447 + 0{,}435 * 0{,}6) - 0{,}45 = -0{,}0443,$$

$$O_3 = P1(x_3) - y_3 = (0{,}1447 + 0{,}435 * 0{,}8) - 0{,}5 = -0{,}0073,$$

$$O_4 = P1(x_4) - y_4 = (0{,}1447 + 0{,}435 * 1) - 0{,}55 = 0{,}0297.$$

Б. Программа и результаты расчета в системе MathCAD

В левой половине страницы ниже приведены математические области документа MathCAD, а в правой – текстовые коментарии.

$$x := \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}3 \\ 0{,}6 \\ 0{,}8 \\ 1{,}0 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 0{,}15 \\ 0{,}3 \\ 0{,}45 \\ 0{,}5 \\ 0{,}55 \end{bmatrix}$$

Задание табличных значений функции

$i := 0..4$

Задание диапазона для индекса при ORIGIN = 0

$$D := \begin{bmatrix} 5 & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \end{bmatrix} \qquad E := \begin{bmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \end{bmatrix}$$

Вычисление коэффициентов матрицы D[2,2] и столбца E[2] системы нормальных уравнений

$$b := D^{-1} \cdot E \qquad b = \begin{bmatrix} 0{,}1447 \\ 0{,}438 \end{bmatrix}$$

Решение системы нормальных уравнений и вычисление коэффициентов линейной регрессии $b_0 = 0{,}1447$ и $b_1 = 0{,}4380$.

$$P1(x) := b_0 + b_1 \cdot x$$

Определение функции – искомого полинома первой степени

$$O(x_i) := P1(x_i) - y_i$$

Задание формулы для вычисления ошибок аппроксимации в виде массива ошибок $O(x_i)$, где $i = 0,1,2,3,4$

$$O = \begin{pmatrix} -0.1118 \\ -0.0248 \\ -0.0447 \\ -0.0073 \\ 0.0297 \end{pmatrix}$$

Вычисление ошибок аппроксимации в виде массива ошибок O[5]

Построение графика функции линейной регрессии и табличных точек

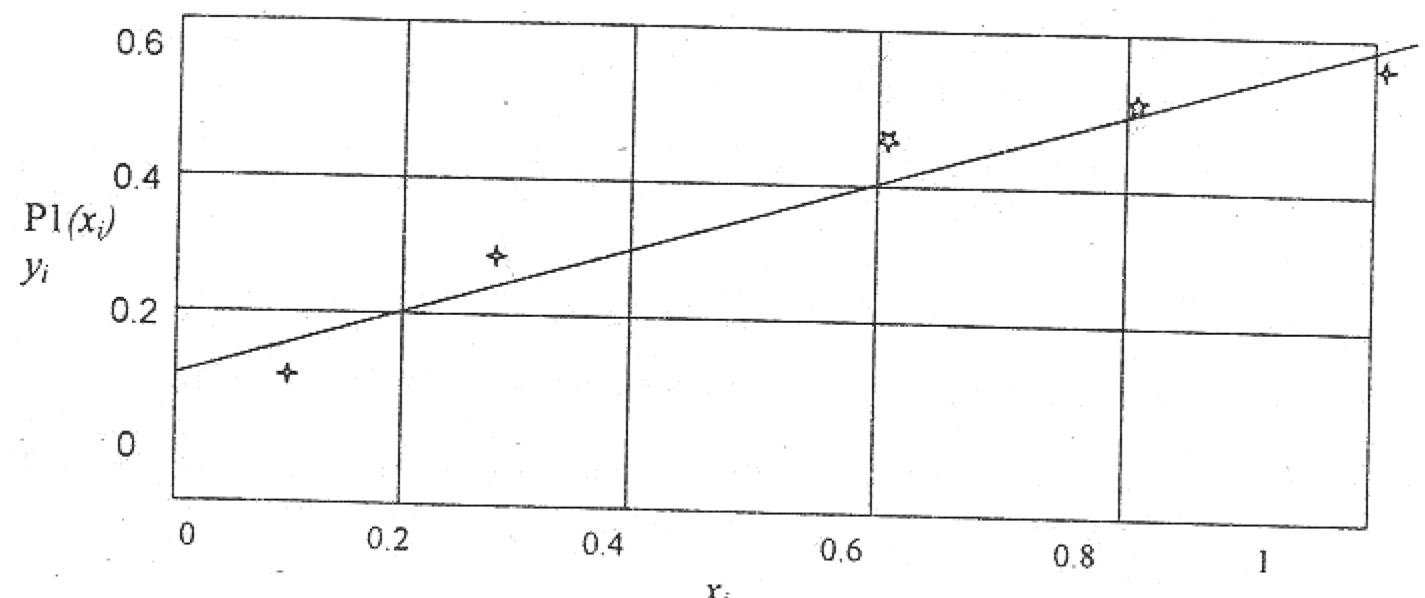

Рис.5. Построенный в MathCAD график линейной функции регрессии $y = P1(x)$, аппроксимирующей таблично-заданную функцию (изображена звездочками). Конец документа MathCAD

Примечание. Коэффициенты линейной регрессии можно вычислить короче с помощью стандартных функций MathCAD **Intercep**(пересечение) и **Slope**(наклон): $a_0 := intercept(x,y)$ $b_0 := slope(x,y)$ $a_0 = 0.1447$ $b_0 = 0.438$.
Для квадратичной или кубической функции регрессии коэффициенты вычисляются только по информационной технологии, аналогичной приведенной выше примечания.

3.4. Численное интегрирование

Задача 4. Дана произвольная интегрируемая функция $y = f(x)$, где x изменяется на [a, b] с шагом интегрирования hx.

Вычислить приближённо значение интеграла $I = \int_a^b f(x)dx$

по каждому из пяти методов:

- левых прямоугольников (ЛП);
- правых прямоугольников (ПП);
- центральных прямоугольников (ЦП);
- трапеций (ТР);
- парабол (Симпсона) (ПР).

Определить ошибки интегрирования по каждому методу.

Варианты задания

№	*f(x)*	[a,b]	*hx*	Метод
0	$x\text{tg}(x-1)$	$[0;\pi/2]$	0.1	ЛП
1	$2^{3x}-3x$	[0;1]	0.1	ПП
2	$1/\sin^2(x/3)$	$[\pi/4;3\pi/4]$	$\pi/16$	ЦП
3	$1/\cos^2(x/3)$	$[-\pi/2;\pi/2]$	$\pi/16$	ТР
4	$1/(3x-7)$	[4;5]	0.1	ПР
5	$1/(1-x)$	[2;3]	0.1	ЛП
6	$1/(5x-2)$	[1;2]	0.1	ПП
7	$\text{tg}(2x)$	$[0;\pi/8]$	$\pi/16$	ЦП
8	$\sin^2(4x)$	$[0;\pi/2]$	$\pi/16$	ТР
9	$\cos^2(2x)$	$[0;\pi/2]$	$\pi/16$	ПР

А. Пример ручного расчета

Вычислить приближённое значение интеграла $I = \int_0^4 f(x)dx$ при разбиении отрезка [0; 4] на n = 4 частичных интервала с шагом $h_x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$.

Здесь $f(x) = x^2$. Использовать методы левых, правых, центральных прямоугольников, трапеций, парабол и графически их проиллюстрировать.

Метод левых прямоугольников (ЛП) основан на аппроксимации функции $y = f(x)$ на каждом частичном интервале $[x_i, x_{i+1}]$ полиномом нулевой степени, т.е. константой, равной значению функции y_i в левой границе частичного интервала (рис. 6).

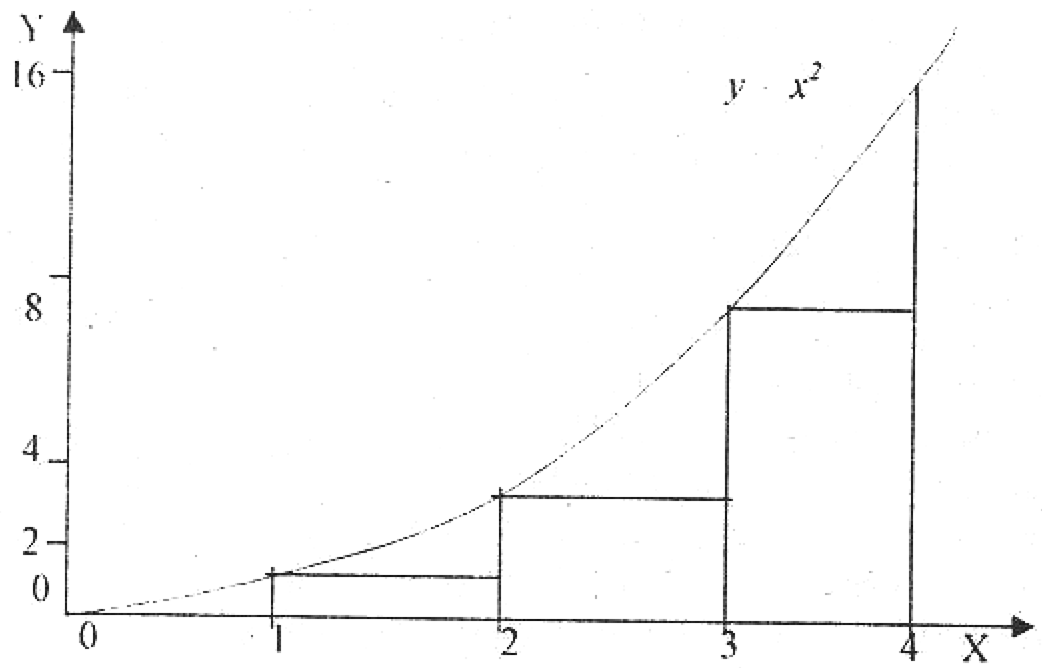

Рис. 6. Метод левых прямоугольников(ЛП). Высота каждого прямоугольника равна значению подинтегральной функции **на левой** границе частичного интервала

Геометрический смысл интеграла $I = \int_0^4 x^2 dx$ есть площадь под кривой $y = x^2$.

Приближенно ее можно вычислить как сумму площадей прямоугольников при замене кривой $y = x^2$ ступенчатой линией. Каждая ступенька начинается слева каждого частичного интервала. При уменьшении шага интегрирования $hx \to 0$ ширина ступеньки уменьшается. Следовательно, ошибка вычисления интеграла уменьшается до нуля, а точность вычисления интеграла повышается. При четырёх частичных интервалах вычислим

$$I_4^{(ЛП)} = h_x\left[y_0 + y_1 + y_2 + y_3\right] = h_x\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right] =$$
$$= h_x\left[x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right] = 1 \cdot \left[0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2\right] = 14.$$

Заметим, что для данного примера легко можно вычислить точное значение аналитически методом по формуле Ньютона-Лейбница: $\boldsymbol{I = 21.333}$. Ошибка приближённого значения интеграла тогда составляет $O_4^{(ЛП)} = I_4^{(ЛП)} - I = -7.333$.
В общем случае, когда выбранное число частичных интервалов n - любое, имеем составную формулу для приближенного вычисления интеграла по **методу левых прямоугольников**:

$$\boxed{I_n^{(ЛП)} = h_x\left[f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right].}$$

Первообразная функция $y = F(x)$ для произвольной функции $y = f(x)$ может не существовать или ее нахождение составляет значительные трудности. Поэтому используют численные методы.

Метод правых прямоугольников отличается от метода левых прямоугольников только тем, что на каком-то частичном интервале данную

функцию $f(x) = x^2$ заменяем аппроксимирующим полиномом нулевого порядка, т.е. константой, равной значению функции $y_i = f(x_i)$ в *правой* границе частичного интервала (Рис. 7). Тогда площадь под ступенчатой функцией найдётся как сумма площадей соответствующих прямоугольников.

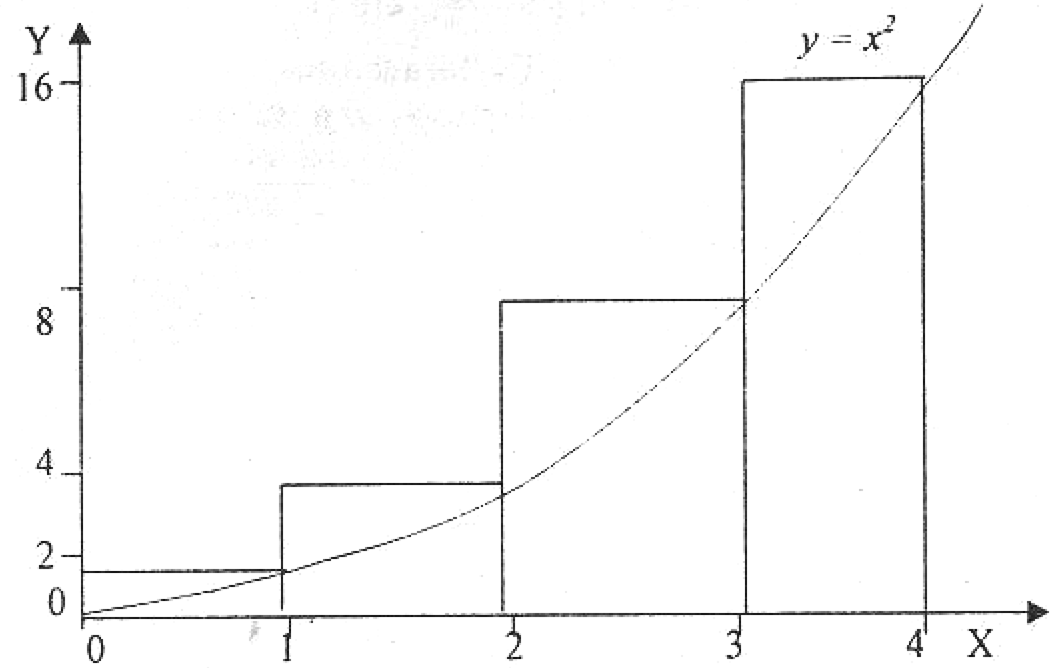

Рис.7. Метод правых прямоугольников (ПП). Высота каждого прямоугольника равна значению подинтегральной функции **на правой** границе каждого частичного интервала.

Приближенно площадь под кривой можно вычислить как сумму площадей прямоугольников при замене кривой $y = x^2$ ступенчатой линией. Высота каждой ступеньки равна значению подинтегральной функции в *правой* границе каждого частичного интервала.

$$I_4^{(ПП)} = h_x\left[y_1 + y_2 + y_3 + y_4\right] = h_x\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\right] =$$
$$= h_x\left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right] = 1 \cdot \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right] = 30.$$

Ошибка в вычислении интеграла по методу ПП составит при разбиении интервала интегрирования на 4 частичных интервала

$$O_4^{(ПП)} = I_4^{(ПП)} - I = 30 - 21\tfrac{1}{3} = 8\tfrac{2}{3}.$$

При любом n имеем аналогично общую составную формулу для приближенного вычисления интеграла **методом ПП**

$$\boxed{I_n^{(ПП)} = h_x\left[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\right].}$$

Метод центральных прямоугольников отличается только тем, что аппроксимация на каждом частичном интервале выполняется значением данной функции в **центре** (середине) каждого частичного интервала.

$$I_4^{(ЦП)} = h_x\left[y_1^c + y_2^c + y_3^c + y_4^c\right] = h_x\left[f(x_1^c) + f(x_2^c) + f(x_3^c) + f(x_4^c)\right] =$$
$$= h_x\left[(x_1^c)^2 + (x_2^c)^2 + (x_3^c) + (x_4^c)\right] = 1\cdot\left[0{,}5^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2 + 3{,}5^2\right] = 21.$$

Ошибка $O_4^{(ЦП)} = I_4^{(ЦП)} - I = 21 - 21\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, что **существенно меньше** ошибок интегрирования для методов ЛП и ПП. **Догадались, почему?**
При любом n имеем аналогично составную формулу **для метода ЦП**

$$\boxed{I_n^{(ЦП)} = h_x\left[f(x_1^c) + f(x_2^c) + \ldots + f(x_n^c)\right].}$$

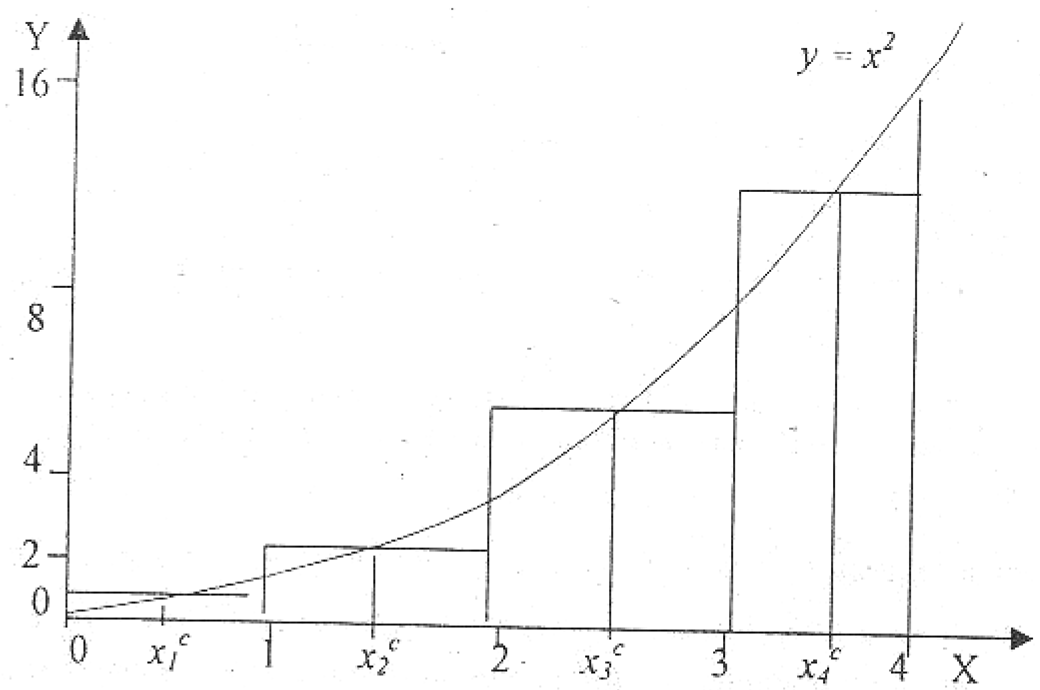

Рис.8. Метод центральных прямоугольников (ЦП). Высота каждого прямоугольника равна значению подынтегральной функции **в центре** каждого частичного интервала

Метод трапеций основан на аппроксимации подинтегральной функции $y = f(x)$ на каждом частичном интервале интерполяционным полиномом первой степени, например, в форме Ньютона

$$y = P_1(x) = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}),$$

т.е. графически аппроксимирующая функция является кусочно-линейной (Рис.9). Тогда площадь под кусочно-линейной функцией можно составить из площадей трапеций $\frac{y_{i-1} + y_i}{2}\cdot hx$

$$I_4^{(ТР)} = h_x\left[\frac{y_0 + y_4}{2} + y_1 + y_2 + y_3\right] = h_x\left[\frac{f(x_0) + f(x_4)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right] =$$
$$= h_x\left[\frac{x_0^2 + x_4^2}{2} + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right] = 1\cdot\left[\frac{0^2 + 4^2}{2} + 1^2 + 2^2 + 3^2\right] = 22.$$

Ошибка $O_4^{(ТР)} = I_4^{(ТР)} - I = 22 - 21\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, что в два раза больше сответствующей ошибки $O_4^{(ЦП)}$, найденной по методу ЦП.
При любом n составная формула вычисления приближённого значения интеграла **методом трапеций**

$$\boxed{I_n^{(ТР)} = hx\left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right].}$$

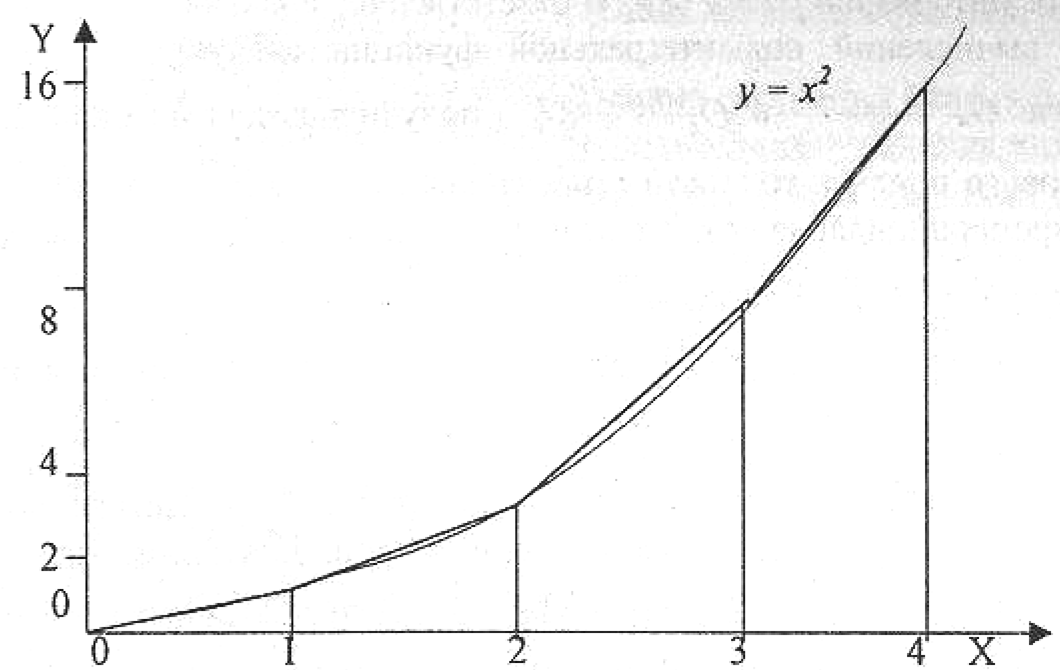

Рис.9. Метод трапеций (ТР). Функция **интерполируется прямой** на каждом частичном интервале

Метод парабол (Симпсона) основан на интерполяции подынтегральной функции $y = f(x)$ параболой *на паре* соседних частичных интервалов $[x_{i-1}; x_i], [x_i; x_{i+1}]$ $(i=1,3)$,т.е. интерполяционным полиномом второй степени $y = P2(x) = a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2$.

Тогда оказывается, что частичный интеграл для интерполяционного полинома вычисляется по формуле

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P2(x)dx = \frac{hx}{3}\left[y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}\right].$$

Выбирая число частичных интервалов n **чётным**, получим суммированием **составную формулу** для приближённого вычисления всего интеграла **методом парабол**

$$\boxed{I_n^{(ПР)} = hx\left[f(a)+f(b)+4\left(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{n-1})\right)+2\left(f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{n-2})\right)\right].}$$

При n=4, a=0, b=4 и ,соответствено, $h_x = 1$, получим

$$I_4^{(ПР)} = \frac{hx}{3}\left[f(x_0)+f(x_4)+4\left(f(x_1)+f(x_3)\right)+2f(x_2)\right]=$$

$$\frac{hx}{3}\left[x_0^2+x_4^2+4\left(x_1^2+x_3^2\right)+2x_2^2\right]=\tfrac{1}{3}\left[0^2+4^2+4(1^2+3^2)+2\cdot 2^2\right]=21\tfrac{1}{3}.$$

Примечание. Из анализа ошибок приближённого вычисления интеграла $O_4^{(ЛП)}, O_4^{(ПП)}, O_4^{(ЦП)}, O_4^{(ТР)}, O_4^{(ПР)}$ по разным методам при одном и том же числе частичных интервалов $n=4$ и, соответственно, практически одном и том же числе вычислений подынтегральной функции следует, что самые большие ошибки $O_4^{(ЛП)} = -7\frac{1}{3}$ и $O_4^{(ПП)} = 8\frac{2}{3}$ получились для методов ЛП и ПП (методы первого порядка точности относительно шага интегрирования hx, т.е. ошибка пропорциональна hx в первой степени). Меньшие ошибки получаются методами ЦП и ТР, а именно $O_4^{(ЛП)} = -\frac{1}{3}$ и $O_4^{(ТР)} = \frac{2}{3}$. Эти методы относятся к методам второго порядка точности, так как ошибка метода пропорциональна hx^2 при $n \to \infty$ и $hx = \frac{b-a}{n} \to 0$.

Самым точным является метод парабол (Симпсона), т.к. интерполяция параболами для любой $y = f(x)$ является более точной. Для рассмотренного примера ошибка $O_4^{(ПР)} = I_4^{(ПР)} - I = 21\frac{1}{3} - 21\frac{1}{3} = 0$. Этот метод имеет ошибку для произвольной подинтегральной функции $y=f(x)$ пропорциональную hx^4 при $hx \to 0$, т.е. $O_n^{(ПР)} = I_n^{(ПР)} - I = O(hx^4)$ -бесконечно-малая четвертого порядка относительно шага интегрирования hx. Поэтому метод парабол является методом 4-го порядка точности и наиболее часто используемым в пакетах прикладных программ MathCAD, EXCEL и других WINDOWS-приложениях.

Б. Программа и пример численного интегрирования в системе MathCAD

Вычислим $I = \int_a^b f(x)dx$ при $a=0$, $b=4$, $f(x)=x^2$, $n=4$, по всем методам приближённого вычисления интеграла.

$f(x) := x^2$ — Зададим подинтегральную функцию.

$a := 0 \quad b := 4$ — Интервал.

$n := 4$

$hx := \frac{b-a}{n}$ — Число разбиений интервала интегрирования на частичные интервалы и Шаг интегрирования.

1. Метод левых прямоугольников

$i := 0 .. n-1$ — Введем **диапазон индекса** i -текущего номера точек для вычисления интеграла **методом ЛП.**

$x_i := a + i \cdot hx$ — x_i – Значения абсцис для этих точек в каждой левой границе и

$y_i := f[x_i]$ — Соответствующее значение функции

$$x = \begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix}0\\1\\4\\9\end{bmatrix}$$

Вычислим таблицу значений функции в виде векторов для аргумента и функции.

$ILP := hx \cdot \sum_i f[x_i]$ — Задание **составной формулы** для приближённого значения интеграла для **метода ЛП и его вычисление .**

$ILP = 14$

2.Метод правых прямоугольников

$i := 1 .. n$ — Введем новый диапазон индекса для **метода ПП.**

Внимание! Переустановить ORIGIN=1 чере **Math|Bult-in Variable**.

$x_i := a + i \cdot hx$

$y_i := f[x_i]$

$$x = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix}1\\4\\9\\16\end{bmatrix}$$

$IPP := hx \cdot \sum_i f[x_i]$ — Вычисление приближённого значения интеграла **методом ПП.**

$IPP = 30$

3.Метод центр-х прямоугольников

$i := 1 .. n$

$xc_i := a + \left[i - \frac{1}{2}\right] \cdot hx$ — Формула для вычисления центров частичны интервалов для **метода ЦП**

$yc_i := f[xc_i]$

$$xc = \begin{bmatrix}0.5\\1.5\\2.5\\3.5\end{bmatrix} \quad yc = \begin{bmatrix}0.25\\2.25\\6.25\\12.25\end{bmatrix}$$

Вычисление таблицы для метода ЦП

$ICP := hx \cdot \sum_i f[xc_i]$ — Вычисление интеграла **методом ЦП**

$ICP = 21$

4. Метод трапеций

$i := 1 \ldots n - 1$

$x_i := a + i \cdot hx$

Переустановка диапазона индекса для **метода ТР**

$$ITR := hx\left[\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right] + \sum_i f(x_i)\right]$$

Составная формула для **метода ТР**

$ITR = 22$

5. Метод парабол

$i := 1,3 \ldots n - 1$

$$S1 := \sum_i f[x_i]$$

Диапазон для **нечётных** точек на оси OX

$i := 2,4 \ldots n - 2$

$$S2 := \sum_i f[x_i]$$

Диапазон для **четных** точек на оси OX

$$IPR := \frac{hx}{3}[f(a)+f(b)+4\cdot S1+2\cdot S2]$$

$IPR = 21.333$

Составная формула для метода ПР и вычисление

$$\int_a^b f(x)dx = 21.333$$

Вычислить значение интеграла в **краткой форме** с машинной точностью, устанавливаемой до 15 знаков через меню и команду: **Math|NumericalFormat|Displayed Precision.**

Примечание. Информационную технологию численного интегрирования можно использовать аналогично при вычислении двойных, тройных, поверхностных и др. интегралов, разбивая области интегрирования на частичные.

3.5. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Численное решение задачи с начальными условиями Коши

Задача 5. Дано дифференциальное уравнение (д. у.) второго порядка : $y'' + By' + Ky = A \cdot \sin(\omega \cdot x)$ **(1)** , где B, K, A,ω – данные параметры д. у.; [a; b] – данный интервал интегрирования д. у., $hx = (b - a)/n$ – шаг интегрирования д. у., где n – выбранное число разбиений [a; b] на частичные интервалы с шагом hx; $y(a) = y_0$, $y'(a) = y'_0$ **(2)** – начальные условия для д. у., где y_0; y'_0 – даны при $x_0 = a$. Требуется определить на промежутке [a; b] с шагом hx приближённые значения функций $y(x)$, $y'(x)$, удовлетворяющие д. у. **(1)** и начальным условиям **(2)**, в табличной форме:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_i & \ldots & x_n \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_i & \ldots & y_n \\ y'_0 & y'_1 & y'_2 & y'_3 & \ldots & y'_i & \ldots & y'_n \end{pmatrix}. \quad \textbf{(3)}$$

Требуется также построить график функций $y(x)$, $y'(x)$ по таблице (3) . *Заметим*, что чем большим выбрать число разбиений n и ,соответственно, меньшим выбрать шаг интегрирования, тем точнее получится численное решение **(3)** , но – больше вычисляемая таблица **(3)** . Поэтому для ручного расчёта ограничимся небольшим значением n .

Варианты задания

№	B	K	A	ω	№	B	K	A	ω
0.	4	3	2	2	5.	4	4	3	2
1.	3	4	2	2	6.	2	2	2	2
2.	3	3	2	2	7.	2	3	1	1
3.	3	2	2	2	8.	2	1	2	1
4.	3	3	3	3	9.	1	3	3	2

А. Пример ручного расчета

Пусть параметры д. у. имеют следующие значения: B = 1 , K = 2 , A = 0. Тогда д. у. примет более простой для ручного расчёта вид $y'' + y' + 2y = 0$ **(1')** . Из соображений простоты и наглядности ручного расчёта зададим интервал интегрирования по независимой переменной в виде [a; b] = [0; 3] и число его разбиений $n = 3$. Тогда шаг интегрирования $hx = (b - a)/n = (3 - 0)/3 = 1$. Начальные условия для д. у. выберем $y(0) = 1$ и $y'(0) = 2$ **(2')** . Тогда численное решение этой задачи Коши сводится к определению таблицы значений функций $y(x)$ *и* $y'(x)$, удовлетворяющих д. у. **(1')** и начальным условиям **(2')** на интервале интегрирования [0; 3] с шагом $hx = 1$ в форме:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_0 & y'_1 & y'_2 & y'_3 \end{pmatrix}, \textbf{(3')}$$

где $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 2$. *Остальные – неизвестные:* $y_1, y_2, y_3, y'_1, y'_2, y'_3$.

Для удобства обозначим $z(x) = y'(x)$. Тогда д. у. второго порядка **(1')** преобразуется в систему двух д. у. первого порядка относительно двух неизвестных функций $y(x)$ и $z(x)$ с начальными условиями $y(0) = 1$ и $z(0) = 2$ **(2'')** на интервале интегрирования [0; 3] с шагом $hx = 1$:

$$\frac{dy}{dx} = z, \qquad \frac{dz}{dx} = -z - 2y \qquad \textbf{(1'')}$$

и искомой таблицей

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \textbf{(3'')}$$

Метод Эйлера для решения задачи Коши **(1'') – (3'')**. Обозначим функции в правых частях системы д. у. **(1'')** : $fy(z) = z$, $fz(y,z) = -z - 2y$. Тогда итерационные формулы для нахождения y_i, z_i ,где $i = 0,1,2,3$, запишутся в виде:

$y_{i+1} = y_i + hx \cdot fy(z_i)$
$z_{i+1} = z_i + hx \cdot fz(y_i, z_i) \quad (4)$
$x_{i+1} = x_i + hx$

При $i = 0$ имеем: $y_1 = y_0 + hx \cdot fy(z_0) = 1+1\cdot2 = 3$,
$z_1 = z_0 + hx \cdot fz(y_0, z_0) = 2+1\cdot(-2-2\cdot1) = -2$,
$x_1 = x_0 + hx = 0+1 = 1$.

При $i = 1$ имеем: $y_2 = y_1 + hx \cdot fy(z_1) = y_1 + hx \cdot z_1 = 3 + 1 \cdot (-2) = 1$,
$z_2 = z_1 + hx \cdot fz(y_1, z_1) = z_1 + hx \cdot (-z_1 - 2y_1) = -2+1\cdot(+2-2\cdot3) = -6$;
$x_2 = x_1 + hx = 1 + 1 = 2$.

При $i = 2$ имеем: $y_3 = y_2 + hx \cdot fy(z_2) = y_2 + hx \cdot z_2 = 1 + 1 \cdot (-6) = -5$,
$z_3 = z_2 + hx \cdot fz(y_2, z_2) = z_2 + hx \cdot (-z_2 - 2y_2) = -6+1\cdot(+6-2\cdot1) = -2$,
$x_3 = x_2 + hx = 2 + 1 = 3$.

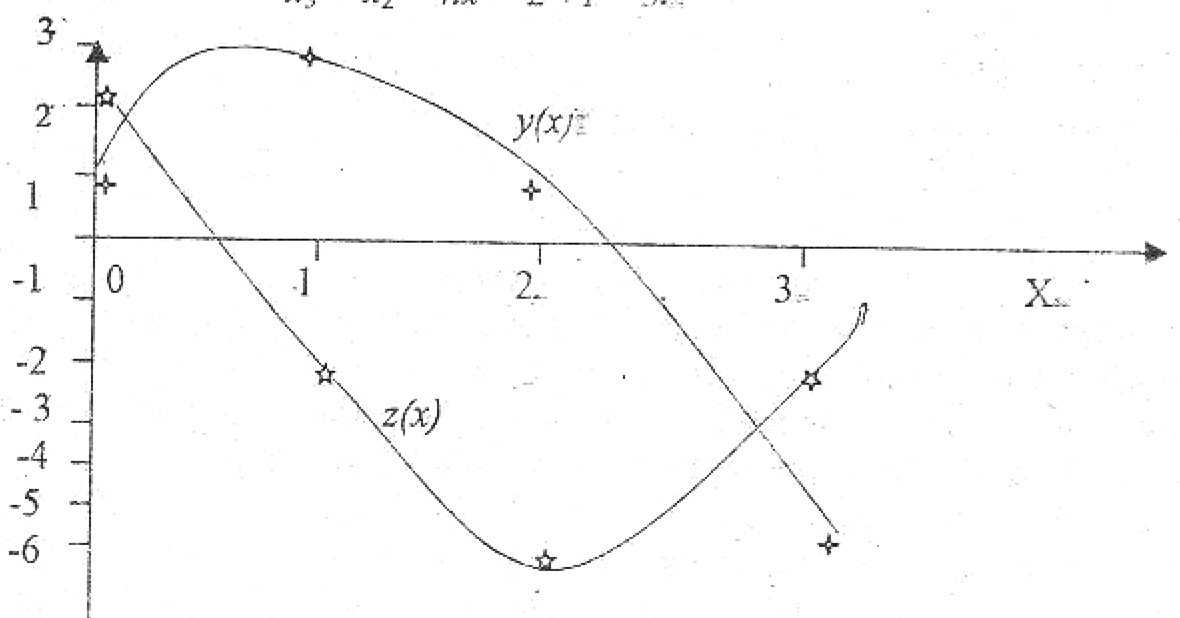

Рис. 10. Графики искомых функций $y(x)$ и $y'(x)$ (в другом обозначении $z(x)$)

Б. Программа и пример численного интегрирования д. у. в системе MathCAD

fy(z) := z
fz(y,z) := -z − 2 · y
— Задание функций – производных - правых частей системы д. у. (1'')

a := 0 b := 3 n := 3 hx := (b − a)/n
y_0 := 1 z_0 := 2 x_0 := 0
— Задание [a; b], *n*, *hx*, а также начальных условий

i := 0 .. 3
— Ввод диапазона изменения индекса

$$\begin{pmatrix} y_{i+1} \\ z_{i+1} \\ x_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_i + hx \cdot fy(z_i) \\ z_i + hx \cdot fz(y_i, z_i) \\ x_i + hx \end{pmatrix}$$

— Итерационные формулы определены в матричной форме

i =	x_i =	y_i =	z_i =
0	0	1	2
1	1	3	-2
2	2	1	-6
3	3	-5	-2

— Команда вычислить массивы, по которым строятся графики искомых функций (см. рис. 10)

Другое решение с использованием функции **rkfixed**

$$y := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

— Задание начальных условий для искомых функций) $y_0(x)$ и $y_1(x)$ – производная от $y(x) = y_0(x)$

a := 0 b := 3 n := 3

B := 1 K := 2 A := 0 ω := 2
— Задание параметров для д. у.

$$D(x, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ -B \cdot y_1 - K \cdot y_0 + A \cdot \sin(\omega \cdot x) \end{bmatrix}$$

— Задание вектора производных как правых частей системы д. у. (1'')

Z := **rkfixed**(y, a, b, n, D)
— Вызов библиотечной функции метода Рунге-Кутта для вычисления матрицы результатов Z

i := 0 .. n
— Задание диапазона для индекса итераций

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1.333 & -1 \\ 2 & 0.097 & -1.181 \\ 3 & -0.501 & -0.04 \end{pmatrix}$$

— Получение таблицы искомых функций. Первый столбец – значения x_i для независимой переменной x, второй столбец – значения искомой функции, третий – ее производная

Примечание1. Для автоматизированного построении графиков в шаблоне заполняется по оси ординат имена второго и третьего столбцов $Z_{i,1}$ и $Z_{i,2}$, соответстевно, а по оси абсцис – имя первого столбца $Z_{i,0}$ при ORIGIN=0. График качественно имеет вид ис.10, но точность выше, чем по методу Эйлера. Увеличивая число разбиений n =10 или 20 или 100 можно наблюдать по таблице и по графикам сходимость приближенных функций к точным, а точность вычисления функции оценивается по её значениям при $x=b$ ***для разных n.***

Примечание2. При расчете переходных процессов в электрических схемах, движения элементов машин воникают задачи Коши для систем д. у. высоких порядков, которые удобно решать с использованием библиотечных функций MathCAD, например **rkfixed.**

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ ПО ТЕМЕ:

ОСНОВЫ ИНФОРМАЦИОННОЙ ТЕХНОЛОГИИ РАБОТЫ В WINDOWS-ПРИЛОЖЕНИИ MathCAD

1. Технология работы с файлами, рабочими листами, окнами, областями, панелями (инструментов, палитр, шрифтов) и электронными книгами

1) Как открыть новый рабочий лист?
2) Как переименовать открытый рабочий лист?
3) Какое расширение имеет файл рабочего листа при сохранении на диске?
4) Как сохранить на диске рабочий лист с прежним именем?
5) Как сохранить на диске рабочий лист с новым именем?
6) Как перейти к другому рабочему листу, если открыто, но не видно, несколько листов?
7) Как свернуть рабочий лист?
8) Как закрыть рабочий лист без сохранения на диске?
9) Как завершить работу с программой MathCAD?
10) Как установить/отключить в окне программы MathCAD панель палитр?
11) Как установить в окне программы MathCAD панель шрифтов?

12) Как установить в окне программы MathCAD панель инструментов?
13) Как выделить все области на рабочем листе?
14) Как выделить одну область (блок) на рабочем листе?
15) Как копировать фрагмент из одного места рабочего листа в другое?
16) Как выбрать вид шрифта и размер шрифта?
17) Как переустановить правую границу рабочего листа?
18) Как удалить блок или фрагмент?
19) Как вставить или удалить пустую строку в страницу рабочего листа?
20) Как расположить окна открытых рабочих листов каскадом?
21) Как расположить окна открытых рабочих листов горизонтальными плитками?
22) Как расположить окна открытых рабочих листов вертикальными плитками?
23) Какой командой изменить масштаб изображения рабочего листа?
24) Какой текст может появиться в строке сообщений?
25) Как вызвать электронный Учебник по работе в MathCAD?
26) Как вызвать электронный Справочник по работе в MathCAD?

2. *Технология работы с математическими объектами и формулами*
1) Как установить на панели инструментов режим автовычислений?
2) Как установить через меню команд режим автовычислений?
3) Как переместить формулу из одного места рабочего листа в место рядом?
4) Как переместить формулу из одного места рабочего листа через много страниц?
5) Как копировать формулу из одного места рабочего листа на другой лист, расположенный через много страниц?
6) В каком порядке должны располагаться формулы для того, чтобы вычисления были возможны?
7) Как ввести стандартную встроенную функцию в математическое выражение?
8) Как ввести пользовательскую функцию в математическое выражение?
9) Какой курсор используется при вводе формул?
10) Как расширяется уголковый курсор формул?
11) Для чего используется клавиша ПРОБЕЛ при наборе формул?
12) Какими шрифтами набирать формулы?
13) Как изменить формат чисел в таблице?
14) Какие данные определяются диапазоном для переменной?
15) Как вывести на экран таблицу значений переменной, заданной диапазоном?
16) Как вывести на экран таблицу значений функции от переменной, заданной диапазоном?
17) Как переустанавливается возможное начальное значение индекса для всех массивов рабочего листа?
18) Как задать значение переменной?

19) С какой формулы начинается работа с числовыми данными в комплексной форме?
20) Как переустановить вид мнимой единицы в результатах вычислений?
21) Чем отличается матричное решение систем линейных уравнений для неизвестных в комплексной форме?
21) Как определить векторно-матричную переменную своими значениями?
22) Как вычислить обратную матрицу?
23) Как вычислить определитель матрицы?
24) Какими словами можно задать численное решение нелинейной системы?
25) Какими словами можно задать символьное решение линейной системы?
26) Сколько пробелов можно вставить перед и после: знака арифметической операции, аргумента функции, индекса?

3. *Технология работы с текстовыми областям*
1) Как создать текстовую область?
2) Как выбрать вид и размер шрифта?
3) Для чего используется текст в рабочем листе?
4) Как переместить и удалить текстовый блок?
5) Какими шрифтами набирать русский текст?

4. *Технология построения графиков*
1) Какие данные нужны для построения графика?
2) Как начинается построение графика?
3) Какие операции должны предшествовать построению графика?
4) Что заполняется по оси OX?
5) Что заполняется по оси OY?
6) Как изменять размер графика?
7) Что изменяется при форматировании графика?
8) Как начать форматирование графика?
9) Как установить число разделительных полос по оси OY?
10) Как установить число разделительных полос по оси OX?
11) Как заменить точечное представление второго графика на сплошное?
12) Каким символом разделяются функции при вводе графика?

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ЭЛЕМЕНТАМ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Тема 1. *Решение нелинейного уравнения с одной неизвестной*

1. Как графически изображаются корни нелинейного уравнения?
2. Что такое интервал изоляции корня? Покажите на примере графически.
3. Сформулируйте постановку задачи грубого отделения корней с данным шагом. Пример ручного расчета.
4. Запишите вычислительные блоки MathCAD для получения таблицы значений функции, стоящей в левой части данного уравнения.
5. Запишите итерационную формулу метода линеаризации Ньютона для уточнения корня. Пример ручного расчета второго приближения к корню с вычислением ошибки.

6. Запишите вычислительные блоки документа MathCAD для уточнения начального приближения к корню с заданной точностью методом Ньютона.

7. Идея метода половинного деления для уточнения корня . Пример ручного расчета для двух шагов с вычислением ошибки.

8. Запишите на примере вычислительный блок MathCAD для уточнения корня по методу половинного деления с заданной точностью.

Тема 2. *Решение систем линейных алгебраических уравнений*

1. Идея метода Гаусса-Жордана для отыскания точного решения. Какие равносильные преобразования и в каком порядке используются? Пример ручного расчета.

2. Запишите документ MathCAD для решения системы в матричной форме.

3. Идея метода простой итерации для отыскания приближенного решения и итерационные формулы. Пример ручного расчета второго приближения к корням с вычислением ошибок.

4. Условие сходимости приближенных решений к корням. Проверка сходимости на примере.

5. Запишите документ MathCAD для нахождения приближенного решения системы с заданной точностью.

Тема 3. *Методы аппроксимации и интерполяции и их применение при обработке экспериментальных данных*

1.Постановка задачи интерполяции функции одной переменной полиномом второго порядка по данным трех опытов (точек). Запишите условия интерполяции и изобразите графически на примере.

2. Метод неопределенных коэффициентов. Пример ручного расчета коэффициентов прямой (полинома первой степени) по двум опытам (точкам).

3. Запишите документ MathCAD для определения коэффициентов интерполирующей параболы и вычисления ее значения в четвертой точке.

4. Постановка задачи аппроксимации функции полиномом первой степени (прямой) методом наименьших квадратов (МНК). Графическая иллюстрация.

5. Запишите систему нормальных уравнений в скалярной и матричной формах для нахождения коэффициентов прямой(коэффициентов регрессии).

6. Пример ручного расчета коэффициентов прямой по МНК и ошибок аппроксимации.

7. Запишите документ MathCAD для вычисления коэффициентов линейной регрессии и ошибок аппроксимации.

Тема 4. *Численное интегрирование*

1. Геометрический смысл интеграла.

2. В каких случаях используют аналитические или численные методы?

3. Запишите составные формулы для приближенного вычисления интеграла по пяти методам: левых прямоугольников, правых,центральных прямоугольников, трапеций и парабол.

4. Графическая илюстрация приближенного и точного значения интеграла по всем методам на примере.

5. Проведите ручной расчет приближенного значения интеграла по всем методам на примере квадратичной функции. Вычислите точное значение интеграла по формуле Ньютона-Лейбница и ошибки для приближенных значений.

Тема 5. *Обыкновенные дифференциальные уравнения. Численное решение задачи с начальными условиями Коши.*

1. Как формулируется задача Коши для д.у. 2-го порядка и для системы 2-х д. у. первого порядка.
2. Итерационные формулы метода Эйлера для системы 2-х д.у.первого порядка.
3. Выполнить ручной расчёт приближённых функций для 3-х итераций и построить их графики.
4. Записать программу для MathCAD с библиотечной функцией **rkfixed.**
5. Как оценить ошибку численного решения системы д. у. ?

6. ЛИТЕРАТУРА

1. Симонович С. В. и др. Информатика. Базовый курс: Учеб. для вузов. СПб: Изд. «Питер», 2000. – 640 с.
2. MATHCAD 6.0 PLUS. Финансовые, инженерные и научные расчёты в среде Windows 95. 2-е изд, стер. – «Филинъ», 1997. – 712 с.
3. Дьяконов В. П. Система MathCAD. М.: Радио и связь, 1993.
4. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. М.: Мир, 1982.
5. Турчак Л. И. Основы численных методов. М.: Наука, 1987.
6. Каранчук В. П. и др. Основы применения ЭВМ. М.: Радио и связь,1988.
7. Калиткин Н.Н. Численные методы.М.: Наука,1982.
8. Самохин А. Б.и Самохина А. С. Фортран и вычислительные методы.М.,1994.
9. Компьютерно-программное моделирование процессов решения вычислительных и функциональных задач: Метод. разработка по курсу «Информатика» для студентов заочного отделения/ НГТУ;Сост.: Билюба В. Ф. , Митяков С. Н.и др. Н. Новгород, 1997.
10. Основы алгоритмизации и программирования на языке Турбо Паскаль: Метод. разработка/НГТУ; Билюба В. Ф. , Маслова Е. А.и др.,Н. Новгород, 1998.

СОДЕРЖАНИЕ