Д.Т.Письменный — автор бестселлера «Готовимся к экзамену по математике», выпускаемого в серии «Домашний репетитор» пособия, по которому за последние годы готовились к экзаменам более 500000 школьников и абитуриентов из России и других стран бывшего СССР.

Вчерашний школьник, став студентом, зачастую «почивает на лаврах» и благополучно **«заваливает» первый экзамен** по математике, **особенно если этот предмет не** является профилирующим.

Данная книга поможет студентам в условиях дефицита времени подготовиться к экзамену по высшей математике, чувствовать себя на нем уверенно и гарантировать себе положительную оценку.

АЙРИС ПРЕСС

Дмитрий Письменный

Конспект лекций по высшей математике

Дмитрий Письменный

Конспект лекций по высшей математике

Полный курс

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73-2
П34

Серийное оформление *А. М. Драговой*

Письменный, Д. Т.

П34 Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. — 4-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2006. — 608 с.: ил. — (Высшее образование).

ISBN 5-8112-1778-1

Настоящий курс лекций предназначен для всех категорий студентов высших учебных заведений, изучающих в том или ином объеме высшую математику.

Книга содержит необходимый материал по всем разделам курса высшей математики (линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия, основы математического анализа), которые обычно изучаются студентами на первом и втором курсах вуза, а также дополнительные главы, необходимые при изучении специальных курсов (двойные, тройные, криволинейные и поверхностные интегралы, дифференциальные уравнения, элементы теории поля и теории функций комплексного переменного, основы операционного исчисления).

Изложение теоретического материала по всем темам сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач, ведется на доступном, по возможности строгом языке.

Пособие поможет студентам освоить курс высшей математики, подготовиться к сдаче зачетов и экзаменов по математическим дисциплинам.

ББК 22.1я73-2
УДК 51(075.8)

ISBN 5-8112-1778-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Глава IV. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Глава V. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Глава VIII. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Глава IX. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава X. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие предназначено, в первую очередь, для студентов инженерно-технических специальностей; может быть полезным для всех категорий студентов, изучающих в том или ином объеме высшую математику. Оно представляет собой конспект лекций и адресовано, в основном, студентам первого и второго курсов. Набор освещаемых вопросов хорошо виден из оглавления.

Данный конспект содержит необходимый материал по всем разделам курса высшей математики и дополнительным главам, необходимым при изучении специальных курсов. Изложение теоретического материала по всем темам сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач, ведется на доступном, по возможности строгом языке.

Пособие может быть использовано студентами также для самостоятельного изучения соответствующего материала, является базой для подготовки к семестровым зачетам и экзаменам по высшей математике.

Кроме того, книга должна помочь студенту и в тех случаях, когда он что-то не успел записать на лекции, какие-то лекции были пропущены, в чем-то трудно (или нет времени) разобраться по другим учебникам, когда некоторые вопросы «слишком длинны» в его конспектах или много фактического материала, который следует изучить за ограниченное количество недель, дней.

Автор надеется, что данный курс лекций будет полезен и преподавателям, а использование данного пособия будет способствовать более глубокому изучению студентами курса высшей математики и смежных дисциплин.

Список обозначений:

○ ● — начало и конец решения примера или задачи;

□ ■ — начало и конец доказательства;

— важные определения;

— «обратите особое внимание!»

В рамку заключены формулы, которые важно помнить.

Глава I. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Лекции 1–3

§ 1. МАТРИЦЫ

1.1. Основные понятия

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, сокращенно, $A = (a_{ij})$, где $i = \overline{1,m}$ (т. е. $i = 1, 2, 3, \dots, m$) — номер строки, $j = \overline{1,n}$ (т. е. $j = 1, 2, 3, \dots, n$) — номер столбца.

Матрицу A называют матрицей *размера* $m \times n$ и пишут $A_{m\times n}$. Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее *элементами*. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего угла, образуют *главную диагональ*.

Матрицы ***равны между собой***, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т. е.

$$A = B, \quad \text{если } a_{ij} = b_{ij}, \quad \text{где } i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется ***квадратной***. Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют матрицей ***n-го порядка***.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется ***единичной***. Обозначается буквой E.

Пример 1.1.

$$E_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— единичная матрица 3-го порядка.

$$E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

— единичная матрица n-го порядка.

Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой***. Обозначается буквой O. Имеет вид

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В матричном исчислении матрицы O и E играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется ***вектором*** (или вектор-столбец, или вектор-строка соответственно). Их вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \qquad B = (b_1\ b_2\ \dots\ b_n).$$

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т. е. $(5)_{1\times1}$ есть 5.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей ***транспонированной*** к данной. Обозначается A^T.

Так, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $A^T = (1\ 0)$.

Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $(A^T)^T = A$.

1.2. Действия над матрицами

Сложение

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$.

Пример 1.2.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется *разность матриц*.

Умножение на число

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на число* k называется матрица $B_{m\times n}=(b_{ij})$ такая, что $b_{ij}=k\cdot a_{ij}$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$.

Пример 1.3.

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\3&4&5\end{pmatrix},\ k=2,\ A\cdot k=\begin{pmatrix}0&-2&4\\6&8&10\end{pmatrix}.$$

Матрица $-A=(-1)\cdot A$ называется *противоположной матрице* A.

Разность матриц $A-B$ можно определить так: $A-B=A+(-B)$.

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими *свойствами:*

1. $A+B=B+A$;
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3. $A+O=A$;
4. $A-A=O$;
5. $1\cdot A=A$;
6. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
7. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha A+\beta A$;
8. $\alpha\cdot(\beta A)=(\alpha\beta)\cdot A$,

где A, B, C — матрицы, α и β — числа.

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
- прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Две матрицы A и B называются ***эквивалентными***, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается $A\sim B$.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют *канонической*, например

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Пример 1.4. Привести к каноническому виду матрицу

$$A=\begin{pmatrix}2&3&1&2\\0&2&-1&1\\4&0&5&1\end{pmatrix}.$$

Решение: Выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\begin{pmatrix}2&3&1&2\\0&2&-1&1\\4&0&5&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2&2\\-1&2&0&1\\5&0&4&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2&2\\0&5&2&3\\0&-15&-6&-9\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&5&2&3\\0&-15&-6&-9\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}\quad&\ \ :5&\ :2&\ :3\end{matrix}\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&-3&-3&-3\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Произведение матриц

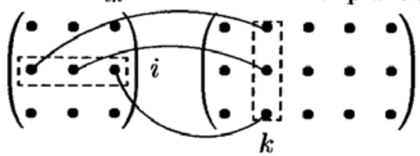
Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда *число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.*

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на матрицу* $B_{n\times p}=(b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p}=(c_{ik})$ такая, что

$$c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\dots+a_{in}b_{nk},\quad \text{где } i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,p},$$

т. е. элемент i-й строки и k-го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.

Получение элемента c_{ik} схематично изображается так:



Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведения AB и BA всегда существуют. Легко показать, что $A\cdot E=E\cdot A=A$, где A — квадратная матрица, E — единичная матрица того же размера.

Пример 1.5.
$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}_{2\times3}\times\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{pmatrix}_{3\times2}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{pmatrix}_{2\times2}.$$

Пример 1.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда произведение $A \cdot B$ не определено, так как число столбцов матрицы A (3) не совпадает с числом строк матрицы B (2). При этом определено произведение $B \times A$, которое считают следующим образом:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B называются *перестановочными*, если $AB = BA$.

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $A \cdot (B + C) = AB + AC$;
3. $(A + B) \cdot C = AC + BC$;
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$,

если, конечно, написанные суммы и произведения матриц имеют смысл.

Для операции транспонирования верны свойства:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
2. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

§ 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

2.1. Основные понятия

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число $\det A$ (или $|A|$, или Δ), называемое ее *определителем*, следующим образом:

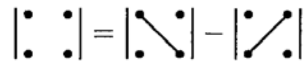
1. $n = 1$. $A = (a_1)$; $\det A = a_1$.
2. $n = 2$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.
3. $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Определитель матрицы A также называют ее *детерминантом*. Правило вычисления детерминанта для матрицы порядка N является довольно сложным для восприятия и применения. Однако известны методы, позволяющие реализовать вычисление определителей высоких порядков на основе определителей низших порядков. Один из методов

основан на свойстве разложения определителя по элементам некоторого ряда (с. 23, свойство 7). При этом заметим, что определители невысоких порядков (1, 2, 3) желательно уметь вычислять согласно определению.

Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой:



Пример 2.1. Найти определители матриц

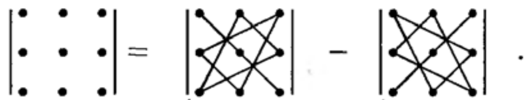
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

❍ Решение:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 12 - (-15) = 27;$$

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \quad ●$$

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться *правилом треугольников* (или Саррюса), которое символически можно записать так:



Пример 2.2. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

❍ Решение:

$$\det A =$$
$$= 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 =$$
$$= -15 + 48 - 6 - 18 = 48 - 39 = 9. \quad ●$$

2.2. Свойства определителей

Сформулируем основные свойства определителей, присущие определителям всех порядков. Некоторые из этих свойств поясним на определителях 3-го порядка.

Свойство 1 («Равноправность строк и столбцов»). Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот.

Иными словами,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем строки и столбцы будем просто называть *рядами определителя.*

Свойство 2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.

Свойство 3. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

Свойство 4. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

Из свойств 3 и 4 следует, что *если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.*

❑ Действительно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & k\cdot a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot 0 = 0. \quad \blacksquare$$

Свойство 5. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

Свойство 6 («Элементарные преобразования определителя»). Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.

Пример 2.3. Доказать, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+k\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+k\cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+k\cdot a_{32} \end{vmatrix}.$$

❍ Решение: Действительно, используя свойства 5, 4 и 3, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+k\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+k\cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+k\cdot a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = \Delta + k\cdot 0 = \Delta. \quad \bullet$$

Дальнейшие свойства определителей связаны с понятиями минора и алгебраического дополнения.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $n-1$-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается m_{ij}.

Так, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \text{то} \quad m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i+j$ — четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная. Обозначается A_{ij}: $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot m_{ij}$.

Так, $A_{11} = +m_{11}$, $A_{32} = -m_{32}$.

Свойство 7 («Разложение определителя по элементам некоторого ряда»). Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Проиллюстрируем и одновременно докажем свойство 7 на примере определителя 3-его порядка. В этом случае свойство 7 означает, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13}.$$

❑ В самом деле, имеем

$$a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} =$$

$$= a_{11}\cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\cdot \left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{13}\cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta. \quad \blacksquare$$

Свойство 7 содержит в себе способ вычисления определителей высоких порядков.

Пример 2.4. Вычислите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

○ Решение: Для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, т. к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (7 \cdot 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 \cdot 2 + 5 \cdot 7 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 7 \cdot 7 \cdot 2 - 5 \cdot 0 \cdot 4) +$$
$$+ (5 \cdot 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 \cdot 2 + 5 \cdot 7 \cdot 8 - (-1) \cdot 3 \cdot 8 - 5 \cdot 7 \cdot 4 - 5 \cdot 7 \cdot 2) -$$
$$- (5 \cdot 0 \cdot 2 + 7 \cdot 1 \cdot 5 + 7 \cdot 3 \cdot 8 - 5 \cdot 0 \cdot 8 - 3 \cdot 1 \cdot 5 - 7 \cdot 7 \cdot 2) = 122.$$ ●

Свойство 8. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Так, например, $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$.

§ 3. НЕВЫРОЖДЕННЫЕ МАТРИЦЫ

3.1. Основные понятия

Пусть A — квадратная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если определитель $\Delta = \det A$ не равен нулю: $\Delta = \det A \neq 0$. В противном случае ($\Delta = 0$) матрица A называется ***вырожденной***.

Матрицей, ***союзной к матрице*** A, называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы A (оно определяется так же, как и алгебраическое дополнение элемента определителя).

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** матрице A, если выполняется условие

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E, \qquad (3.1)$$

где E — единичная матрица того же порядка, что и матрица A. Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A.

3.2. Обратная матрица

Теорема 3.1. Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

❑ Проведем доказательство для случая матрицы 3-го порядка. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{причем } \det A \neq 0.$$

Составим союзную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

и найдем произведение матриц A и A^*:

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & \dots & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & \dots & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & \dots & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det A \cdot E,$$

т. е.

$$A \cdot A^* = \det A \cdot E. \qquad (3.2)$$

Здесь мы использовали свойства 7 и 8 определителей (см. п. 2.2).

Аналогично убеждаемся, что

$$A^* \cdot A = \det A \cdot E. \tag{3.3}$$

Равенства (3.2) и (3.3) перепишем в виде

$$A \cdot \frac{A^*}{\det A} = E \quad \text{и} \quad \frac{A^*}{\det A} \cdot A = E.$$

Сравнивая полученные результаты с определением (3.1), получаем

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}, \quad \text{т. е.} \quad \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}}. \quad \blacksquare$$

Отметим *свойства* обратной матрицы:

1. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$;
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Пример 3.1. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

❍ Решение: 1) Находим $\det A$: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$.

2) Находим A^*: $A_{11} = 1$, $A_{21} = -3$, $A_{12} = -(-1) = 1$, $A_{22} = 2$, поэтому $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Находим A^{-1}: $A^{-1} = \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} & \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \quad \bullet$$

Пример 3.2. Определить, при каких значениях λ существует матрица, обратная данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

❍ Решение: Всякая невырожденная матрица имеет обратную. Найдем определитель матрицы A:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 + 2\lambda - 12 - 0 + 2\lambda = 4\lambda - 9.$$

Если $4\lambda - 9 \neq 0$, т. е. $\lambda \neq \frac{9}{4}$, то $\Delta A \neq 0$, т. е. матрица A невырожденная, имеет обратную. ●

Пример 3.3. Показать, что матрица A является обратной для B, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

❍ Решение: Найдем произведение матриц A и B:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-3+1 & -3+5-2 & 1-2+1 \\ 3-6+3 & -3+10-6 & 1-4+3 \\ 3-9+6 & -3+15-12 & 1-6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично $B \cdot A = E$. Следовательно, матрица A является обратной для B. ●

3.3. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k строк и k столбцов ($k \leqslant \min(m; n)$). Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются *минорами этой матрицы*. В матрице A пунктиром выделен минор 2-го порядка. (Заметим, что таких миноров можно составить $C_m^k \cdot C_n^k$ штук, где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n элементов по k.)

Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется ***рангом матрицы***. Обозначается r, $r(A)$ или $\operatorname{rang} A$.

Очевидно, что $0 \leqslant r \leqslant \min(m;n)$, где $\min(m;n)$ — меньшее из чисел m и n.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется ***базисным***. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Пример 3.4. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение: Все миноры 3-го порядка равны нулю. Есть минор 2-го порядка, отличный от нуля $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$. Значит, $r(A) = 2$. Базисный минор стоит на пересечении 2 и 3 строки с 1 и 3 столбцами. ●

Отметим *свойства ранга матрицы*:

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы (см. с. 18).

Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали. На этом основан один из способов вычисления ранга матрицы.

Пример 3.5. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

используя результаты примера 1.4.

Решение: В примере 1.4 показано, что

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен $r(A) = 2$. ●

§ 4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Основные понятия

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где числа a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ называются *коэффициентами* системы, числа b_i — *свободными членами*. Подлежат нахождению числа x_n.

Такую систему удобно записывать в компактной ***матричной форме***

$$\boxed{A \cdot X = B.}$$

Здесь A — матрица коэффициентов системы, называемая *основной матрицей*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор-столбец из неизвестных x_j,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — вектор-столбец из свободных членов b_i.

Произведение матриц $A \cdot X$ определено, так как в матрице A столбцов столько же, сколько строк в матрице X (n штук).

Расширенной матрицей системы называется матрица $\overline{A}$ системы, дополненная столбцом свободных членов

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Решением системы называется n значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, …, $x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства. Всякое решение системы можно записать в виде матрицы-столбца

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Решить систему — это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Две системы называются *эквивалентными* (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение. Другими словами, системы эквивалентны, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при *элементарных преобразованиях* системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется *нулевым* или *тривиальным*.

4.2. Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли

Пусть дана произвольная система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Исчерпывающий ответ на вопрос о совместности этой системы дает *теорема Кронекера–Капелли*.

Теорема 4.1. Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы.

Примем ее без доказательства.

Правила практического разыскания всех решений совместной системы линейных уравнений вытекают из следующих теорем.

Теорема 4.2. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Теорема 4.3. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

Правило решения произвольной системы линейных уравнений

1. Найти ранги основной и расширенной матриц системы. Если $r(A) \neq r(\overline{A})$, то система несовместна.

2. Если $r(A) = r(\overline{A}) = r$, система совместна. Найти какой-либо базисный минор порядка r (напоминание: минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется базисным). Взять r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор (остальные уравнения отбросить). Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют *главными* и оставляют слева, а остальные $n - r$ неизвестных называют *свободными* и переносят в правые части уравнений.

3. Найти выражения главных неизвестных через свободные. Получено общее решение системы.

4. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения главных неизвестных. Таким образом можно найти частные решения исходной системы уравнений.

Пример 4.1. Исследовать на совместность систему

$$\begin{cases} x + \ \ y = 1, \\ 3x + 3y = -2. \end{cases}$$

○ Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 1,$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad r(\overline{A}) = 2 \quad \left(\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0\right).$$

Таким образом, $r(A) \neq r(\overline{A})$, следовательно, система несовместна. ●

Пример 4.2. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

○ Решение: $r(A) = r(\overline{A}) = 2$. Берем два первых уравнения:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \boxed{x_3 + x_4} = 1, \\ x_1 - 2x_2 + \boxed{x_3 - x_4} = -1. \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1 - x_1 + 2x_2, \\ x_3 - x_4 = -1 - x_1 + 2x_2. \end{cases} \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 - x_1 + 2x_2 & 1 \\ -1 - x_1 + 2x_2 & -1 \end{vmatrix} = 2x_1 - 4x_2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 - x_1 + 2x_2 \\ 1 & -1 - x_1 + 2x_2 \end{vmatrix} = -2.$$

Следовательно, $x_3 = -x_1 + 2x_2$, $x_4 = 1$ — общее решение. Положив, например, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, получаем одно из частных решений: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. ●

4.3. Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

или в матричной форме $A \cdot X = B$.

Основная матрица A такой системы квадратная. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется *невырожденной*.

Найдем решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$.

Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B.} \tag{4.1}$$

Отыскание решения системы по формуле (4.1) называют *матричным способом* решения системы.

Матричное равенство (4.1) запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n}{\Delta},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{\Delta}.$$

Но $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

Итак, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогично: $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где Δ_2 получен из Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}, \dots$ $\dots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$.

Формулы

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}} \tag{4.2}$$

называются ***формулами Крамера***.

Итак, невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено матричным способом (4.1) либо по формулам Крамера (4.2).

Пример 4.3. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases}$

Решение: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14$. Значит, $x_1 = \frac{7}{7} = 1$, $x_2 = \frac{14}{7} = 2$. ●

4.4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических систем является *метод Гаусса*, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.3}$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к *ступенчатому* (в частности, *треугольному*) виду.

Приведенная ниже система имеет ступенчатый вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{kk}x_k + \dots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases}$$

где $k \leqslant n$, $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, k}$. Коэффициенты a_{ii} называются *главными* элементами системы.

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

Опишем метод Гаусса подробнее.

Прямой ход.

Будем считать, что элемент $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то первым в системе запишем уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля).

Преобразуем систему (4.3), исключив неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого (используя элементарные преобразования системы). Для этого умножим обе части первого уравнения на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим почленно со вторым уравнением системы. Затем умножим обе части первого уравнения на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим с третьим уравнением системы. Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}. \end{cases}$$

Здесь $a_{ij}^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ $(i, j = \overline{2, m})$ — новые значения коэффициентов и правых частей, которые получаются после первого шага.

Аналогичным образом, считая главным элементом $a_{22}^{(1)} \neq 0$, исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго, и так далее. Продолжаем этот процесс, пока это возможно.

Если в процессе приведения системы (4.3) к ступенчатому виду появятся нулевые уравнения, т. е. равенства вида $0 = 0$, их отбрасывают. Если же появится уравнение вида $0 = b_i$, а $b_i \neq 0$, то это свидетельствует о несовместности системы.

Второй этап (*обратный ход*) заключается в решении ступенчатой системы. Ступенчатая система уравнений, вообще говоря, имеет бесчисленное множество решений. В последнем уравнении этой системы выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные $(x_{k+1}, \dots, x_n)$. Затем подставляем значение x_k в предпоследнее уравнение системы и выражаем x_{k-1} через $(x_{k+1}, \dots, x_n)$; затем находим $x_{k-2}, \dots, x_1$. Придавая свободным неизвестным $(x_{k+1}, \dots, x_n)$ произвольные значения, получим бесчисленное множество решений системы.

Замечания: 1. Если ступенчатая система оказывается треугольной, т. е. $k = n$, то исходная система имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим x_n, из предпоследнего уравнения x_{n-1}, далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные $(x_{n-2}, \dots, x_1)$.

2. На практике удобнее работать не с системой (4.3), а с расширенной ее матрицей, выполняя все элементарные преобразования над

ее строками. Удобно, чтобы коэффициент a_{11} был равен 1 (уравнения переставить местами, либо разделить обе части уравнения на $a_{11} \neq 1$).

Пример 4.4. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Решение: В результате элементарных преобразований над расширенной матрицей системы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

исходная система свелась к ступенчатой:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Поэтому общее решение системы: $x_2 = 5x_4 - 13x_3 - 3$; $x_1 = 5x_4 - 8x_3 - 1$. Если положить, например, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, то найдем одно из частных решений этой системы $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. ●

Пример 4.5. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение: Произведем элементарные преобразования над строчками расширенной матрицы системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Осуществляя обратный ход, находим $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$. ●

4.5. Системы линейных однородных уравнений

Пусть дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что однородная система всегда совместна ($r(A) = r(\overline{A})$), она имеет *нулевое (тривиальное) решение* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

При каких условиях однородная система имеет и ненулевые решения?

Теорема 4.4. Для того, чтобы система однородных уравнений имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг r ее основной матрицы был меньше числа n неизвестных, т. е. $r < n$.

❑ **Необходимость.**

Так как ранг не может превосходить размера матрицы, то, очевидно, $r \leqslant n$. Пусть $r = n$. Тогда один из миноров размера $n \times n$ отличен от нуля. Поэтому соответствующая система линейных уравнений имеет единственное решение: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta} = 0$, $\Delta_i = 0$, $\Delta \neq 0$. Значит, других, кроме тривиальных, решений нет. Итак, если есть нетривиальное решение, то $r < n$.

Достаточность.

Пусть $r < n$. Тогда однородная система, будучи совместной, является неопределенной. Значит, она имеет бесчисленное множество решений, т. е. имеет и ненулевые решения. ■

Пусть дана однородная система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Теорема 4.5. Для того, чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Δ был равен нулю, т. е. $\Delta = 0$.

❑ Если система имеет ненулевые решения, то $\Delta = 0$. Ибо при $\Delta \neq 0$ система имеет только единственное, нулевое решение. Если же $\Delta = 0$, то ранг r основной матрицы системы меньше числа неизвестных, т. е. $r < n$. И, значит, система имеет бесконечное множество (ненулевых) решений. ■

Пример 4.6. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

○ Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 2 \quad \left(\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \right), \quad n = 3.$$

Так как $r < n$, то система имеет бесчисленное множество решений. Найдем их

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4x_3, \\ 2x_1 - 3x_2 = -5x_3. \end{cases}$$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4x_3 & -2 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = 2x_3$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4x_3 \\ 2 & -5x_3 \end{vmatrix} = 3x_3$. Стало быть, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2x_3$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3x_3$ — общее решение.

Положив $x_3 = 0$, получаем одно частное решение: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Положив $x_3 = 1$, получаем второе частное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$ и т. д. ●

Глава VII. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Лекции 25–28

§ 29. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

29.1. Понятие неопределенного интеграла

В дифференциальном исчислении решается задача: *по данной функции $f(x)$ найти ее производную* (или дифференциал). Интегральное исчисление решает обратную задачу: *найти функцию $F(x)$, зная ее производную $F'(x) = f(x)$* (или дифференциал). Искомую функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$.

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если для любого $x \in (a;b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{или } dF(x) = f(x)\,dx).$$

Например, первообразной функции $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, является функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x).$$

Очевидно, что первообразными будут также любые функции

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C,$$

где C — постоянная, поскольку

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2 = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Теорема 29.1. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(a;b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где C — постоянное число.

❑ Функция $F(x) + C$ является первообразной $f(x)$. Действительно, $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

Пусть $\Phi(x)$ — некоторая другая, отличная от $F(x)$, первообразная функции $f(x)$, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$. Тогда для любого $x \in (a;b)$ имеем

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

А это означает (см. следствие 25.1), что

$$\Phi(x) - F(x) = C,$$

где C — постоянное число. Следовательно, $\Phi(x) = F(x) + C$. ■

Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом от функции*** $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C.}$$

Здесь $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, $f(x)\,dx$ — ***подынтегральным выражением***, x — ***переменной интегрирования***, $\int$ — ***знаком неопределенного интеграла***.

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых $y = F(x) + C$ (каждому числовому значению C соответствует определенная кривая семейства) (см. рис. 165). График каждой первообразной (кривой) называется ***интегральной кривой***.

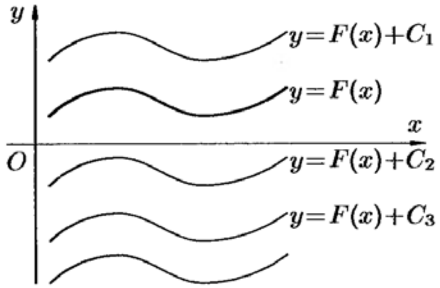


Рис. 165

Для всякой ли функции существует неопределенный интеграл?

Имеет место теорема, утверждающая, что «всякая непрерывная на $(a;b)$ функция имеет на этом промежутке первообразную», а следовательно, и неопределенный интеграл.

29.2. Свойства неопределенного интеграла

Отметим ряд свойств неопределенного интеграла, вытекающих из его определения.

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx, \qquad \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

❑ Действительно,

$$d\Big(\int f(x)\,dx\Big) = d(F(x)+C) = dF(x) + d(C) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$$

и

$$\Big(\int f(x)\,dx\Big)' = (F(x)+C)' = F'(x) + 0 = f(x).$$ ■

Благодаря этому свойству *правильность интегрирования проверяется дифференцированием*. Например, равенство

$$\int (3x^2+4)\,dx = x^3 + 4x + C$$

верно, так как $(x^3+4x+C)' = 3x^2+4$.

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

❑ Действительно, $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x)+C$. ■

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)\,dx = a\cdot\int f(x)\,dx, \quad a \neq 0 \text{ — постоянная.}$$

❑ Действительно,

$$\int af(x)\,dx = \int aF'(x)\,dx = \int (aF(x))'\,dx = \int d(aF(x)) =$$

$$= a\cdot F(x) + C_1 = a\cdot\Big(F(x) + \frac{C_1}{a}\Big) = a(F(x)+C) = a\int f(x)\,dx$$

$\Big($положили $\dfrac{C_1}{a} = C\Big)$. ■

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x)\pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

❑ Пусть $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$. Тогда

$$\int (f(x)\pm g(x))\,dx = \int (F'(x)\pm G'(x))\,dx =$$

$$= \int (F(x)\pm G(x))'\,dx = \int d(F(x)\pm G(x)) = F(x)\pm G(x) + C =$$

$$= (F(x)+C_1) \pm (G(x)+C_2) = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx,$$

где $C_1 \pm C_2 = C$. ■

5. (Инвариантность формулы интегрирования). Если $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, то и $\int f(u)\,du = F(u)+C$, где $u=\varphi(x)$ — произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

❑ Пусть x — независимая переменная, $f(x)$ — непрерывная функция и $F(x)$ — ее первообразная. Тогда $\int f(x)\,dx = F(x)+C$. Положим теперь $u=\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция. Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. В силу инвариантности формы первого дифференциала функции (см. с. 188) имеем

$$dF(u) = F'(u)\,du = f(u)\,du.$$

Отсюда $\int f(u)\,du = \int d(F(u)) = F(u)+C$. ■

Таким образом, формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от нее, имеющей непрерывную производную.

Так, из формулы $\int x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3} + C$ путем замены x на u $(u=\varphi(x))$ получаем $\int u^2\,du = \dfrac{u^3}{3} + C$. В частности,

$$\int \sin^2 x\,d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C,$$

$$\int \ln^2 x\,d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C,$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

Пример 29.1. Найти интеграл $\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5)\,dx$.

❍ Решение:

$$\int (2x^4-3x^2+x-5)\,dx = 2\int x^4\,dx - 3\int x^2\,dx + \int x\,dx - 5\int dx =$$

$$= 2\frac{x^5}{5} + C_1 - 3\frac{x^3}{3} + C_2 + \frac{x^2}{2} + C_3 - 5x + C_4 = \frac{2}{5}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C,$$

где $C = C_1+C_2+C_3+C_4$. ●

Пример 29.2. Найти интеграл $\int \dfrac{x+1}{x}\,dx$.

❍ Решение: $\int \dfrac{x+1}{x}\,dx = \int \big(1+\frac{1}{x}\big)\,dx = x + \ln|x| + C$. ●

29.3. Таблица основных неопределенных интегралов

Пользуясь тем, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, можно получить таблицу основных интегралов путем обращения соответствующих формул дифференциального исчисления (таблица дифференциалов) и использования свойств неопределенного интеграла.

Например, так как

$$d(\sin u) = \cos u \cdot du,$$

то

$$\int \cos u\, du = \int d(\sin u) = \sin u + C.$$

Вывод ряда формул таблицы будет дан при рассмотрении основных методов интегрирования.

Интегралы в приводимой ниже таблице называются *табличными*. Их следует знать наизусть. В интегральном исчислении нет простых и универсальных правил отыскания первообразных от элементарных функций, как в дифференциальном исчислении. Методы нахождения первообразных (т. е. интегрирования функции) сводятся к указанию приемов, приводящих данный (искомый) интеграл к табличному. Следовательно, необходимо знать табличные интегралы и уметь их узнавать.

Отметим, что в таблице основных интегралов переменная интегрирования u может обозначать как независимую переменную, так и функцию от независимой переменной (согласно свойству инвариантности формулы интегрирования).

В справедливости приведенных ниже формул можно убедиться, взяв дифференциал правой части, который будет равен подынтегральному выражению в левой части формулы.

Докажем, например, справедливость формулы 2. Функция $\frac{1}{u}$ определена и непрерывна для всех значений u, отличных от нуля.

Если $u > 0$, то $\ln|u| = \ln u$, тогда $d\ln|u| = d\ln u = \frac{du}{u}$. Поэтому $\int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln|u| + C$ при $u > 0$.

Если $u < 0$, то $\ln|u| = \ln(-u)$. Но $d\ln(-u) = \frac{-du}{-u} = \frac{du}{u}$. Значит, $\int \frac{du}{u} = \ln(-u) + C = \ln|u| + C$ при $u < 0$.

Итак, формула 2 верна.

Аналогично, проверим формулу 15:

$$d\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C\right) = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+(\frac{u}{a})^2}\cdot\frac{1}{a}\,du = \frac{du}{a^2+u^2}.$$

Таблица основных интегралов

1. $\int u^\alpha\, du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \left(\int du = u + C\right);$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$
3. $\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$
4. $\int e^u\, du = e^u + C;$
5. $\int \sin u\, du = -\cos u + C \qquad \left(\int \operatorname{sh} u\, du = \operatorname{ch} u + C\right);$
6. $\int \cos u\, du = \sin u + C \qquad \left(\int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + C\right);$
7. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C;$
8. $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln|\sin u| + C;$
9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \qquad \left(\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C\right);$
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C \qquad \left(\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C\right);$
11. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C;$
12. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$
13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$
14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right| + C;$
15. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C;$
16. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C;$
17. $\int \sqrt{a^2-u^2}\, du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C;$
18. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{u^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2\pm a^2}\right| + C.$

§ 30. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

30.1. Метод непосредственного интегрирования

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется ***непосредственным интегрированием.***

При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция *«подведения под знак дифференциала»*):

$$du = d(u+a), \quad a \text{ — число},$$

$$du = \frac{1}{a}d(au), \quad a \neq 0 \text{ — число},$$

$$u \cdot du = \frac{1}{2}d(u^2),$$

$$\cos u\,du = d(\sin u),$$

$$\sin u\,du = -d(\cos u),$$

$$\frac{1}{u}\,du = d(\ln u),$$

$$\frac{1}{\cos^2 u}\,du = d(\operatorname{tg} u).$$

Вообще, $f'(u)\,du = d(f(u))$, эта формула очень часто используется при вычислении интегралов.

Примеры:

1) $\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$ (формула 2 таблицы интегралов);

2) $\int (3x-1)^{24}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-1)^{24}\,d(3x-1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^{25}}{25} + C$ (формула 1);

3) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C$ (формулы 10 и 1);

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}\cdot x)}{\sqrt{(2)^2-(\sqrt{3}\cdot x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\arcsin\frac{\sqrt{3}\cdot x}{2} + C$ (формула 13);

5) $\int \sin^2 6x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 12x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 12x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos 12x\,d(12x)\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{24}\sin 12x + C$ (формулы 1 и 6);

6) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{3}\int \frac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)(x+2)}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{x-1}{(x-1)(x+2)}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{(x-1)(x+2)}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{d(x+2)}{x+2} + \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} = -\frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}\ln|x-1| + C;$

7) $\int \operatorname{tg} u\,du = \int \frac{\sin u\,du}{\cos u} = -\int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C$ (вывод формулы 7);

8) $\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{\cos^2\frac{u}{2} + \sin^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\,du = \int \frac{\cos^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\,du + \int \frac{\sin^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\,du = \int \operatorname{ctg}\frac{u}{2}\,d\left(\frac{u}{2}\right) + \int \operatorname{tg}\frac{u}{2}\,d\left(\frac{u}{2}\right) = \ln\left|\sin\frac{u}{2}\right| - \ln\left|\cos\frac{u}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C$ (вывод формулы 11);

9) $\int x(x+2)^9\,dx = \int (x+2-2)(x+2)^9\,dx = \int (x+2)^{10}\,dx - 2\int (x+2)^9\,dx = \int (x+2)^{10}\,d(x+2) - 2\int (x+2)^9\,d(x+2) = \frac{(x+2)^{11}}{11} - 2\frac{(x+2)^{10}}{10} + C$ (формула 1);

10) $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^5 x\cdot\sin^2 x} = -\int (\operatorname{ctg} x)^{-5}\,d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{\operatorname{ctg}^{-4} x}{-4} + C = \frac{1}{4\operatorname{ctg}^4 x} + C$ (формула 1);

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2+(x-1)^2}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(x-1)^2}} = \ln\left|x-1+\sqrt{3-2x+x^2}\right| + C$ (формула 14);

12) $\int \left(4x^3 - \frac{5}{\cos^2 2x} + 3^{1-x}\right)dx = 4\int x^3\,dx - \frac{5}{2}\int \frac{d(2x)}{\cos^2 2x} - \int 3^{1-x}\,d(1-x) = x^4 - \frac{5}{2}\operatorname{tg} 2x - \frac{3^{1-x}}{\ln 3} + C$ (формулы 1, 9, 3);

13) $\int x^3 \cdot \sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \int (1+x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot x \cdot (x^2+1-1)\,dx =$
$= \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{4}{3}}\,d(1+x^2) - \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{1}{3}}\,d(1+x^2) =$
$= \frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C.$

Как видно, вычисление интегралов иногда требует некоторой изобретательности, так сказать, «индивидуального подхода к каждой подынтегральной функции».

Соответствующие навыки приобретаются в результате значительного числа упражнений.

30.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (т. е. подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся (в случае «удачной» подстановки). Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную.

Тогда $dx = \varphi'(t)\,dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем *формулу интегрирования подстановкой*

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.} \tag{30.1}$$

Формула (30.1) также называется формулой замены переменных в неопределенном интеграле. После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x.

Иногда целесообразно подбирать подстановку в виде $t = \varphi(x)$, тогда $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$, где $t = \varphi(x)$. Другими словами, формулу (30.1) можно применять справа налево.

Пример 30.1. Найти $\int e^{\frac{x}{4}}\,dx$.

○ Решение: Положим $x = 4t$, тогда $dx = 4\,dt$. Следовательно,

$$\int e^{\frac{x}{4}}\,dx = 4\int e^t\,dt = 4e^t + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C. \quad ●$$

Пример 30.2. Найти $\int x \cdot \sqrt{x-3}\,dx$.

○ Решение: Пусть $\sqrt{x-3} = t$, тогда $x = t^2 + 3$, $dx = 2t\,dt$. Поэтому

$$\int x \cdot \sqrt{x-3}\,dx = \int (t^2+3) \cdot t \cdot 2t\,dt =$$
$$= 2\int (t^4 + 3t^2)\,dt = 2\int t^4\,dt + 6\int t^2\,dt = 2 \cdot \frac{t^5}{5} + 6 \cdot \frac{t^3}{3} + C =$$
$$= \frac{2}{5}(x-3)^{5/2} + 2(x-3)^{3/2} + C. \quad ●$$

Пример 30.3. Получить формулу

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right| + C.$$

□ Обозначим $t = \sqrt{u^2+a^2} + u$ (подстановка Эйлера). Тогда

$$dt = \frac{2u}{2\sqrt{u^2+a^2}}\,du + du, \quad \text{т. е.} \quad dt = \frac{\sqrt{u^2+a^2}+u}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du.$$

Отсюда

$$\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{dt}{\sqrt{u^2+a^2}+u} = \frac{dt}{t}.$$

Стало быть,

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right| + C. \quad ■$$

Пример 30.4. Найти $\int x \cdot (x+2)^{100}\,dx$.

○ Решение: Пусть $x + 2 = t$. Тогда $x = t - 2$, $dx = dt$. Имеем:

$$\int x \cdot (x+2)^{100}\,dx = \int (t-2) \cdot t^{100}\,dt = \int t^{101}\,dt - 2\int t^{100}\,dt =$$
$$= \frac{t^{102}}{102} - 2 \cdot \frac{t^{101}}{101} + C = \frac{(x+2)^{102}}{102} - \frac{2(x+2)^{101}}{101} + C. \quad ●$$

Пример 30.5. Найти $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

○ Решение: Обозначим $e^x = t$. Тогда $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t+1} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{t^2+t} =$$
$$= \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} = -\int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})^2 - (t+\frac{1}{2})^2} = -\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln\left|\frac{\frac{1}{2}+t+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t-\frac{1}{2}}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{t+1}{-t}\right| = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| = \ln\frac{e^x}{e^x+1} + C.$$

Здесь используется формула 16 таблицы основных интегралов. ●

30.3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$. Интегрируя это равенство, получим

$$\boxed{\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du \quad \text{или} \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du.}$$

Полученная формула называется ***формулой интегрирования по частям.*** Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей u и dv (это, как правило, можно осуществить несколькими способами); затем, после нахождения v и du, используется формула интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}\,dx$, $\int P(x)\cdot\sin kx\,dx$, $\int P(x)\cos kx\,dx$, где $P(x)$ — многочлен, k — число. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители.

2. Интегралы вида $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} x\,dx$. Удобно положить $P(x)\,dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx$, $\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx$, где a и b — числа. За u можно принять функцию $u = e^{ax}$.

Пример 30.6. Найти $\int(2x+1)e^{3x}\,dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lll} u = 2x+1 & \Longrightarrow & du = 2dx \\ dv = e^{3x}\,dx & \Longrightarrow & v = \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right]$ (можно положить $C = 0$). Следовательно, по формуле интегрирования по частям:

$$\int(2x+1)e^{3x}\,dx = (2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int\frac{1}{3}e^{3x}2\,dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C. \quad ●$$

Пример 30.7. Найти $\int \ln x\,dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lll} u = \ln x & \Longrightarrow & du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = dx & \Longrightarrow & v = x \end{array}\right]$. Поэтому

$$\int \ln x\,dx = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\cdot\ln x - x + C. \quad ●$$

Пример 30.8. Найти $\int x^2e^x\,dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lll} u = x^2 & \Longrightarrow & du = 2x\,dx \\ dv = e^x\,dx & \Longrightarrow & v = e^x \end{array}\right]$. Поэтому

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\int e^x\cdot x\,dx. \tag{30.2}$$

Для вычисления интеграла $\int e^x x\,dx$ снова применим метод интегрирования по частям: $u = x$, $dv = e^x\,dx \Longrightarrow du = dx$, $v = e^x$. Значит,

$$\int e^x\cdot x\,dx = x\cdot e^x - \int e^x\,dx = x\cdot e^x - e^x + C. \tag{30.3}$$

Поэтому (см. (30.2)) $\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2(x\cdot e^x - e^x + C)$. ●

Пример 30.9. Найти $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lll} u = \operatorname{arctg} x & \Longrightarrow & du = \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv = dx & \Longrightarrow & v = x \end{array}\right]$. Поэтому

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\cdot\operatorname{arctg} x - \int\frac{x}{1+x^2}\,dx = x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$
$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C. \quad ●$$

§ 31. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

31.1. Понятия о рациональных функциях

Многочлен (некоторые сведения справочного характера)

Функция вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \tag{31.1}$$

где n — натуральное число, a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ — постоянные коэффициенты, называется ***многочленом*** (или ***целой рациональной функцией***). Число n называется ***степенью*** многочлена.

Корнем многочлена (31.1) называется такое значение x_0 (вообще говоря, комплексное) переменной x, при котором многочлен обращается в нуль, т. е. $P_n(x_0) = 0$.

Теорема 31.1. Если x_1 есть корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен делится без остатка на $x - x_1$, т. е.

$$P_n(x) = (x - x_1) \cdot P_{n-1}(x), \tag{31.2}$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени $(n - 1)$.

Возникает вопрос: всякий ли многочлен имеет корень? Положительный ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 31.2 (основная теорема алгебры). Всякий многочлен n-й степени $(n > 0)$ имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.

Доказательство этой теоремы мы не приводим.

Пользуясь основной теоремой алгебры, докажем теорему о разложении многочлена на линейные множители.

Теорема 31.3. Всякий многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n), \tag{31.3}$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — корни многочлена, a_0 — коэффициент многочлена при x^n.

❑ Рассмотрим многочлен (31.1). По теореме 31.2 он имеет корень. Обозначим его через x_1. Тогда имеет место соотношение (31.2). А так как $P_{n-1}(x)$ — также многочлен, то он имеет корень. Обозначим его через x_2. Тогда $P_{n-1}(x) = (x-x_2) \cdot P_{n-2}(x)$, где $P_{n-2}(x)$ — многочлен $(n-2)$-й степени. Следовательно, $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)P_{n-2}(x)$.

Продолжая этот процесс, получим в итоге:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n). \qquad \blacksquare$$

Множители $(x - x_i)$ в равенстве (31.3) называются ***линейными множителями***.

Пример 31.1. Разложить многочлен $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ на множители.

❍ Решение: Многочлен $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ обращается в нуль при $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Следовательно,

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 1)(x - 2). \qquad \bullet$$

Пример 31.2. Представить выражение $x^3 - x^2 + 4x - 4$ в виде произведения линейных множителей.

❍ Решение: Легко проверить, что

$$x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x - 1)(x - 2i)(x + 2i). \qquad \bullet$$

Если в разложении многочлена (31.3) какой-либо корень встретился k раз, то он называется *корнем кратности* k. В случае $k = 1$ (т. е. корень встретился один раз) корень называется *простым*.

Разложение многочлена (31.3) можно записать в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r}, \tag{31.4}$$

если корень x_1 имеет кратность k_1, корень x_2 — кратность k_2 и так далее. При этом $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$, а r — число различных корней.

Например, разложение

$$P_8(x) = (x - 3)(x + 1)(x - 4)(x - 3)(x - 3)x(x - 4)(x - 3)$$

можно записать так:

$$P_8(x) = (x - 3)^4 \cdot (x + 1) \cdot (x - 4)^2 \cdot x.$$

Пользуясь теоремой 31.3, можно доказать следующие утверждения.

Теорема 31.4. Если многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ тождественно равен нулю, то все его коэффициенты равны нулю.

Теорема 31.5. Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.

Например, если $ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv x^3 - 3x^2 + 1$, то $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$, $d = 1$.

Теорема 31.6. Если многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a+ib$, то он имеет и сопряженный корень $a-ib$.

В разложении многочлена (31.3) комплексные корни входят сопряженными парами. Перемножив линейные множители

$$(x-(a+ib))\cdot(x-(a-ib)),$$

получим трехчлен второй степени с действительными коэффициентами x^2+px+q. В самом деле,

$$(x-(a+ib))(x-(a-ib)) = ((x-a)-ib)((x-a)+ib) = \\ = (x-a)^2+b^2 = x^2-2ax+a^2+b^2 = x^2+px+q,$$

где $p=-2a$, $q=a^2+b^2$.

Таким образом, произведение линейных множителей, соответствующих сопряженным корням, можно заменить квадратным трехчленом с действительными коэффициентами.

С учетом вышеизложенного справедлив следующий факт.

Теорема 31.7. Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т. е. многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r}\times \\ \times(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}. \quad (31.5)$$

При этом $k_1+k_2+\dots+k_r+2(s_1+s_2+\dots+s_m)=n$, все квадратные трехчлены не имеют вещественных корней.

Примеры разложений (31.5):

1) $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$;

2) $x^3-16x=x(x^2-16)=x(x-4)(x+4)$;

3) $x^5-6x^4+9x^3-x^2+6x-9=x^3(x^2-6x+9)-(x^2-6x+9)= =(x^2-6x+9)(x^3-1)=(x-3)^2\cdot(x-1)(x^2+x+1)$.

Дробно-рациональная функция

Дробно-рациональной функцией (или ***рациональной дробью***) называется функция, равная отношению двух многочленов, т. е. $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ — многочлен степени m, а $Q_n(x)$ — многочлен степени n.

Рациональная дробь называется ***правильной***, если степень числителя меньше степени знаменателя, т. е. $m<n$; в противном случае (если $m\geqslant n$) рациональная дробь называется ***неправильной***.

Всякую неправильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, т. е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Например, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{x^4-5x+9}{x-2}$ — неправильная рациональная дробь. Разделим числитель на знаменатель в столбик:

$$\begin{array}{r|l}
x^4 \qquad\qquad -5x+9 & x-2 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^4-2x^3} \qquad\qquad\qquad & x^3+2x^2+4x+3 \\
2x^3 \qquad -5x+9 & \\
-\underline{2x^3-4x^2} \qquad\qquad & \\
4x^2-5x+9 & \\
-\underline{4x^2-8x} \quad\;\; & \\
3x+9 & \\
-\underline{3x-6} & \\
15. &
\end{array}$$

Получим частное $L(x)=x^3+2x^2+4x+3$ и остаток $R(x)=15$. Следовательно, $\dfrac{x^4-5x+9}{x-2}=x^3+2x^2+4x+3+\dfrac{15}{x-2}$.

Правильные рациональные дроби вида

(I). $\dfrac{A}{x-a}$;

(II). $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ ($k\geqslant 2$, $k\in\mathbb{N}$);

(III). $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (корни знаменателя комплексные, т. е. $p^2-4q<0$);

(IV). $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ ($k\geqslant 2$, корни знаменателя комплексные),

где A, a, M, N, p, q — действительные числа, называются ***простейшими рациональными дробями I, II, III и IV типов.***

Теорема 31.8. Всякую *правильную* рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q(x) = (x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{s_m},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} +$$
$$+ \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_mx+q_m} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_mx+q_m)^2} + \ldots + \frac{M_{s_m}x+N_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}}, \tag{31.6}$$

где $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C_1, D_1, \ldots, M_1, N_1, \ldots$ — некоторые действительные коэффициенты.

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

1) $\dfrac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3} + \dfrac{C}{(x-3)^2} + \dfrac{D}{(x-3)^3}$;

2) $\dfrac{x^3+1}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$;

3) $\dfrac{7x^2+8x+9}{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)^2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+x+1} + \dfrac{Mx+N}{(x^2+x+1)^2}$.

Для нахождения неопределенных коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ в равенстве (31.6) можно применить *метод сравнивания коэффициентов*. Суть метода такова:

1. В правой части равенства (31.6) приведем к общему знаменателю $Q(x)$; в результате получим тождество $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)}$, где $S(x)$ — многочлен с неопределенными коэффициентами.

2. Так как в полученном тождестве знаменатели равны, то тождественно равны и числители, т. е.

$$P(x) \equiv S(x). \tag{31.7}$$

3. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x (по теореме 31.5 о тождестве многочленов) в обеих частях тождества (31.7), получим систему линейных уравнений, из которой и определим искомые коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, B_1, \ldots$

Пример 31.3. Представить дробь $\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$ в виде суммы простейших дробей.

❍ Решение: Согласно теореме 31.8 имеем:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5},$$

т. е.

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A(x^2-2x+5)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2-2x+5)}.$$

Отсюда следует

$$2x^2-3x-3 \equiv Ax^2-2Ax+5A+Bx^2-Bx+Cx-C,$$

т. е.

$$2x^2-3x-3 \equiv (A+B)x^2+(-2A-B+C)x+(5A-C).$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, x^1, x^0, получаем

$$\begin{cases} 2 = A+B, \\ -3 = -2A-B+C, \\ -3 = 5A-C. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что $A=-1$, $B=3$, $C=-2$. Следовательно,

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{3x-2}{x^2-2x+5}.$$ ●

Для нахождения неопределенных коэффициентов применяют также *метод отдельных значений аргумента:* после получения тождества (31.7) аргументу x придают конкретные значения столько раз, сколько неопределенных коэффициентов (обычно полагают вместо x значения действительных корней многочлена $Q(x)$).

Пример 31.4. Представить дробь $\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}$ в виде суммы простейших дробей.

❍ Решение: Имеем: $\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$. Отсюда следует

$$3x-4 \equiv A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2).$$

Положим $x = 0$, тогда $-4 = -2A$, т. е. $A = 2$; положим $x = 2$, тогда $2 = 6B$, т. е. $B = \frac{1}{3}$; положим $x = -1$, тогда $-7 = 3C$, т. е. $C = -\frac{7}{3}$. Следовательно,

$$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{2}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{-\frac{7}{3}}{x+1}.$$

31.2. Интегрирование простейших рациональных дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей.

1. $\int \frac{A}{x-a}\,dx = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\cdot\ln|x-a| + C$ (формула (2) таблицы интегралов);

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\cdot\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) = A\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$ (формула (1));

3. Рассмотрим интеграл $J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$.

Выделив в знаменателе полный квадрат, получим:

$$J = \int \frac{Mx+N}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}\,dx,$$

причем $q - \frac{p^2}{4} > 0$. Сделаем подстановку $x + \frac{p}{2} = t$. Тогда $x = t - \frac{p}{2}$, $dx = dt$. Положим $q - \frac{p^2}{4} = a^2$. Следовательно, используя формулы (2) и (15) таблицы интегралов, получаем

$$J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2+a^2}\,dt =$$
$$= M\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$
$$= \frac{M}{2}\cdot\ln(t^2+a^2) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C,$$

т. е., возвращаясь к переменной x,

$$J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Пример 31.5. Найти $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10}\,dx$.

○ Решение: $x^2+2x+10 = (x+1)^2+9$. Сделаем подстановку $x+1=t$. Тогда $x = t-1$, $dx = dt$ и

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9}\,dt = 3\int \frac{t\,dt}{t^2+9} - 2\int \frac{dt}{t^2+9} =$$
$$= \frac{3}{2}\ln(t^2+9) - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10) - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C.$$ ●

4. Вычисление интеграла вида $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx$, $k \geqslant 2$, $q - \frac{p^2}{4} > 0$.

Данный интеграл подстановкой $x + \frac{p}{2} = t$ сводится к сумме двух интегралов:

$$M\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}, \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

Первый интеграл легко вычисляется:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-k}\,d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + C.$$

Вычислим второй интеграл:

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}\,dt =$$
$$= \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k}\right) = \frac{1}{a^2}\left(J_{k-1} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k}\right). \tag{31.8}$$

К последнему интегралу применим интегрирование по частям. Положим

$$u = t, \quad dv = \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k}, \quad du = dt,$$
$$v = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-k}\,d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}},$$

тогда

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} =$$
$$= \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\cdot J_{k-1}.$$

Подставляя найденный интеграл в равенство (31.8), получаем

$$J_k = \frac{1}{a^2}\left(J_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(1-k)}J_{k-1}\right),$$

т. е.

$$J_k = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}J_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\right).$$

Полученная формула дает возможность найти интеграл J_k для любого натурального числа $k > 1$.

Пример 31.6. Найти интеграл $J_3 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^3}$.

Решение: Здесь $a = 1$, $k = 3$. Так как

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C,$$

то

$$J_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}J_1 + \frac{t}{2\cdot(2-1)(t^2+1)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)} + C,$$

$$J_3 = \frac{3}{4}J_2 + \frac{t}{4(t^2+1)^2} = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)}\right) + C.$$

31.3. Интегрирование рациональных дробей

Рассмотренный в пунктах 31.1–31.2 материал позволяет сформулировать *общее правило интегрирования рациональных дробей.*

1. Если дробь неправильна, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби;

2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей;

3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Пример 31.7. Найти интеграл $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$.

Решение: Под знаком интеграла неправильная дробь; выделим ее целую часть путем деления числителя на знаменатель:

$$\begin{array}{rl|l}
-\;x^5 \qquad\quad + 2x^3 & \qquad + 4x + 4 & x^4 + 2x^3 + 2x^2 \\ \cline{3-3}
x^5 + 2x^4 + 2x^3 & & x - 2 \\ \cline{1-1}
-\;-2x^4 \qquad\qquad & \qquad + 4x + 4 & \\
-2x^4 - 4x^3 - 4x^2 & & \\ \cline{1-2}
4x^3 + 4x^2 & + 4x + 4 \text{ (остаток)}. &
\end{array}$$

Получаем:

$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = x - 2 + \frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}.$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = \frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2},$$

$$4x^3+4x^2+4x+4 \equiv Ax(x^2+2x+2) + B(x^2+2x+2) + (Cx+D)x^2,$$

т. е.

$$4x^3+4x^2+4x+4 \equiv (A+C)x^3 + (2A+B+D)x^2 + (2A+2B)x + 2B.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} A + C = 4, \\ 2A + B + D = 4, \\ 2A + 2B = 4, \\ 2B = 4. \end{cases}$$

Находим: $B = 2$, $A = 0$, $C = 4$, $D = 2$. Стало быть,

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = \frac{2}{x^2} + \frac{4x+2}{x^2+2x+2}$$

и

$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x+2}{x^2+2x+2}.$$

Интегрируем полученное равенство:

$$\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx = \int\left(x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x+2}{x^2+2x+2}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + \int \frac{4x+2}{(x+1)^2+1}\,dx.$$

Обозначим $x + 1 = t$, тогда $x = t - 1$ и $dx = dt$. Таким образом,

$$\int \frac{4x+2}{(x+1)^2+1}\,dx = \int \frac{4t-4+2}{t^2+1}\,dt = 4\int \frac{t\,dt}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 4\cdot\frac{1}{2}\ln(t^2+1) - 2\operatorname{arctg} t + C = 2\cdot\ln(x^2+2x+2) - 2\operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2\ln(x^2+2x+2) - 2\operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

Отметим, что любая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях.

§ 32. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

32.1. Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим некоторые случаи нахождения интеграла от тригонометрических функций. Функцию с переменными $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложения, вычитание, умножение и деление) принято обозначать $R(\sin x; \cos x)$, где R — знак рациональной функции.

Вычисление неопределенных интегралов типа $\int R(\sin x; \cos x)\,dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, которая называется ***универсальной***.

Действительно, $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$. Поэтому

$$\int R(\sin x; \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t. Обычно этот способ весьма громоздкий, зато он *всегда* приводит к результату.

На практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств (и вида) подынтегральной функции. В частности, удобны следующие правила:

1) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *нечетна относительно* $\sin x$, т. е. $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то подстановка $\cos x = t$ рационализирует интеграл;

2) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *нечетна относительно* $\cos x$, т. е. $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то делается подстановка $\sin x = t$;

3) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *четна относительно* $\sin x$ *и* $\cos x$ $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\operatorname{tg} x = t$. Такая же подстановка применяется, если интеграл имеет вид $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$.

Пример 32.1. Найти интеграл $\int \dfrac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

❍ Решение: Сделаем универсальную подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t^2+t+2} =$$

$$= \int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{7}/2} + C = \frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{7}} + C. \quad \bullet$$

Пример 32.2. Найти интеграл $I = \int \dfrac{dx}{1+\sin^2 x}$.

❍ Решение: Так как

$$R(-\sin x; -\cos x) = \frac{1}{1+(-\sin x)^2} = \frac{1}{1+\sin^2 x} = R(\sin x; \cos x),$$

то полагаем $\operatorname{tg} x = t$. Отсюда

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{и} \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Поэтому

$$I = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+\frac{t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}t)}{(\sqrt{2}t)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}t + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C. \quad \bullet$$

32.2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

1) подстановка $\sin x = t$, если n — целое положительное *нечетное* число;

2) подстановка $\cos x = t$, если m — целое положительное *нечетное* число;

3) формулы понижения порядка: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\sin x\cdot\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, если m и n — целые *неотрицательные четные* числа;

4) подстановка $\operatorname{tg} x = t$, если $m+n$ — есть четное отрицательное целое число.

Пример 32.3. Найти интеграл $I = \int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$.

○ Решение: Применим подстановку $\sin x = t$. Тогда $x = \arcsin t$, $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$, $\cos x = \sqrt{1-t^2}$ и

$$I = \int t^4 \cdot (\sqrt{1-t^2})^5 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^4(1-t^2)^2\,dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8)\,dt =$$
$$= \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C. \bullet$$

Пример 32.4. Найти интеграл $I = \int \sin^4 x \cos^2 x\,dx$.

○ Решение:

$$I = \int (\sin x\cos x)^2 \sin^2 x\,dx = \int \frac{1}{4}\sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2x\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)\,dx -$$
$$- \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\,d(\sin 2x) = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C. \bullet$$

Пример 32.5. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \int \cos^{-1} x \cdot \sin^{-3} x\,dx.$$

○ Решение: Здесь $m + n = -4$. Обозначим $\operatorname{tg} x = t$. Тогда $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ и

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t^3}{(\sqrt{1+t^2})^3}} = \int \frac{1+t^2}{t^3}\,dt = \int t^{-3}\,dt + \int \frac{dt}{t} =$$
$$= -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = -\frac{1}{2}\cdot \operatorname{ctg}^2 x + \ln|\operatorname{tg} x| + C. \bullet$$

32.3. Использование тригонометрических преобразований

Интегралы типа $\int \sin ax \cdot \cos bx\,dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx\,dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx\,dx$ вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)),$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)).$$

Пример 32.6. Найти интеграл $I = \int \sin 8x\cos 2x\,dx$.

○ Решение:

$$I = \int \sin 8x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 10x + \sin 6x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\cos 10x - \frac{1}{6}\cos 6x\right) + C. \bullet$$

§ 33. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

33.1. Квадратичные иррациональности

Рассмотрим некоторые типы интегралов, содержащих иррациональные функции.

Интегралы типа

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx, \quad \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

называют неопределенными интегралами от квадратичных иррациональностей. Их можно найти следующим образом: под радикалом выделить полный квадрат

$$ax^2+bx+c =$$
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$$

и сделать подстановку $x + \frac{b}{2a} = t$. При этом первые два интеграла приводятся к табличным, а третий — к сумме двух табличных интегралов.

Пример 33.1. Найти интегралы $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$.

○ Решение: Так как $4x^2+2x+1 = 4\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right) = 4\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}\right)$, то

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4((x+\frac{1}{4})^2+\frac{3}{16})}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{4})^2+\frac{3}{16}}}.$$

Сделаем подстановку $x+\frac{1}{4}=t$, $x=t-\frac{1}{4}$, $dx=dt$. Тогда

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+3/16}}=\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{16}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{4}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}\right|+C. \quad \bullet$$

Пример 33.2. Найти интеграл $I=\int\frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}}\,dx$.

○ Решение: Так как $6-2x-x^2=-(x^2+2x-6)=-((x+1)^2-7)=7-(x+1)^2$, то подстановка имеет вид $x+1=t$, $x=t-1$, $dx=dt$. Тогда

$$I=\int\frac{t-1+4}{\sqrt{7-t^2}}\,dt=\int\frac{t\,dt}{\sqrt{7-t^2}}+3\int\frac{dt}{\sqrt{7-t^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int(7-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(7-t^2)+3\int\frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{7})^2-t^2}}=$$

$$=-\sqrt{7-t^2}+3\cdot\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}}+C=3\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{7}}-\sqrt{6-2x-x^2}+C. \quad \bullet$$

Интегралы типа $\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n, можно вычислять, пользуясь формулой

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{33.1}$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$ с неопределенными коэффициентами, λ — также неопределенный коэффициент.

Все неопределенные коэффициенты находятся из тождества, получаемого дифференцированием обеих частей равенства (33.1):

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\equiv\left(Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\right)'+\frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

после чего необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной x.

Пример 33.3. Найти интеграл $I=\int\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx$.

○ Решение: По формуле (33.1) имеем:

$$I=\int\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx=(Ax+B)\sqrt{1-2x-x^2}+\lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

Дифференцируя это равенство, получаем:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\equiv A\cdot\sqrt{1-2x-x^2}+(Ax+B)\cdot\frac{-2-2x}{2\sqrt{1-2x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}},$$

т. е.

$$x^2\equiv A(1-2x-x^2)+(Ax+B)(-1-x)+\lambda,$$
$$x^2\equiv A-2Ax-Ax^2-Ax-B-Ax^2-Bx+\lambda.$$

Сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases}1=-A-A & \text{при } x^2,\\ 0=-2A-A-B & \text{при } x^1,\\ 0=A-B+\lambda & \text{при } x^0.\end{cases}$$

Отсюда $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{3}{2}$, $\lambda=2$. Следовательно,

$$I=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2}+2\int\frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}}=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C. \quad \bullet$$

33.2. Дробно-линейная подстановка

Интегралы типа $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\delta/\gamma}\right)dx$, где a, b, c, d — действительные числа, $\alpha,\beta,\ldots,\ \delta,\ \gamma$ — натуральные числа, сводятся к интегралам от рациональной функции путем подстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, где k — наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{\alpha}{\beta},\ldots,\frac{\delta}{\gamma}$.

Действительно, из подстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$ следует, что $x=\frac{b-dt^k}{ct^k-a}$ и $dx=\frac{-dkt^{k-1}(ct^k-a)-(b-dt^k)ckt^{k-1}}{(ct^k-a)^2}\,dt$, т. е. x и dx выражаются через рациональные функции от t. При этом и каждая степень дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ выражается через рациональную функцию от t.

Пример 33.4. Найти интеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}$.

○ Решение: Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$ есть 6. Поэтому полагаем $x+2=t^6$, $x=t^6-2$, $dx=6t^5\,dt$, $t=\sqrt[6]{x+2}$.

Следовательно,

$$I=\int\frac{6t^5\,dt}{t^4-t^3}=6\int\frac{t^2\,dt}{t-1}=6\int\frac{(t^2-1)+1}{t-1}\,dt=$$
$$=6\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=$$
$$=3\cdot\sqrt[3]{x+2}+6\cdot\sqrt[6]{x+2}+6\ln|\sqrt[6]{x+2}-1|+C.\quad\bullet$$

Пример 33.5. Указать подстановку для нахождения интегралов:

$$I_1=\int\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-x}\,dx,\quad I_2=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{(1-x)^2}.$$

❍ Решение: Для I_1 подстановка $x=t^2$, для I_2 подстановка $\frac{x+1}{x-1}=t^3$. ●

33.3. Тригонометрическая подстановка

Интегралы типа

$$\int R(x;\sqrt{a^2-x^2})dx,\quad \int R(x;\sqrt{a^2+x^2})dx,\quad \int R(x;\sqrt{x^2-a^2})dx$$

приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, с помощью следующих *тригонометрических подстановок:* $x=a\cdot\sin t$ для первого интеграла; $x=a\cdot\operatorname{tg}t$ для второго интеграла; $x=\frac{a}{\sin t}$ для третьего интеграла.

Пример 33.6. Найти интеграл $I=\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$.

❍ Решение: Положим $x=2\sin t$, $dx=2\cos t\,dt$, $t=\arcsin\frac{x}{2}$. Тогда

$$I=\int\frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt=\int\frac{4\cos^2 t}{4\sin^2 t}\,dt=$$
$$=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt=\int\frac{dt}{\sin^2 t}-\int dt=-\operatorname{ctg}t-t+C=$$
$$=C-\arcsin\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)=C-\arcsin\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$
$$\left(\operatorname{ctg}t=\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}=\frac{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}{\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right).\quad\bullet$$

33.4. Интегралы типа $\int R(x;\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

Здесь подынтегральная функция есть рациональная функция относительно x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Выделив под радикалом полный квадрат и сделав подстановку $x+\frac{b}{2a}=t$, интегралы указанного типа приводятся к интегралам уже рассмотренного типа, т. е. к интегралам типа $\int R(t;\sqrt{a^2-t^2})\,dt$, $\int R(t;\sqrt{a^2+t^2})\,dt$, $\int R(t;\sqrt{t^2-a^2})\,dt$. Эти интегралы можно вычислить с помощью соответствующих тригонометрических подстановок.

Пример 33.7. Найти интеграл $I=\int\frac{\sqrt{x^2+2x-4}}{(x+1)^3}\,dx$.

❍ Решение: Так как $x^2+2x-4=(x+1)^2-5$, то $x+1=t$, $x=t-1$, $dx=dt$. Поэтому $I=\int\frac{\sqrt{t^2-5}}{t^3}\,dt$. Положим $t=\frac{\sqrt5}{\sin z}$, $dt=\frac{-\sqrt5\cdot\cos z}{\sin^2 z}\,dz$, $z=\arcsin\frac{\sqrt5}{t}$. Тогда

$$I=\int\frac{\sqrt{\frac{5}{\sin^2 z}-5}}{\frac{5\sqrt5}{\sin^3 z}}\cdot\frac{(-\sqrt5)\cos z}{\sin^2 z}\,dz=-\frac{1}{\sqrt5}\int\cos^2 z\,dz=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac12\int(1+\cos 2z)\,dz=-\frac{\sqrt5}{10}\left(z+\frac12\sin 2z\right)+C=$$
$$=-\frac{\sqrt5}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt5}{t}+\frac12\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt5}{t}\right)\right)+C=$$
$$=-\frac{\sqrt5}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt5}{x+1}+\frac12\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt5}{x+1}\right)\right)+C=$$
$$=-\frac{\sqrt5}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt5}{x+1}+\frac{\sqrt5\cdot\sqrt{x^2+2x-4}}{(x+1)^2}\right)+C.\quad\bullet$$

Замечание: Интеграл типа $\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ целесообразно находить с помощью подстановки $x=\frac1t$.

33.5. Интегрирование дифференциального бинома

Интегралы типа $\int x^m\cdot(a+bx^n)^p\,dx$ (называемые интегралами от *дифференциального бинома*), где a, b — действительные числа; m, n, p — рациональные числа, берутся, как показал Чебышев П.А., лишь в

случае, когда хотя бы одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n}+p$ являетс[ся]
целым.

Рационализация интеграла в этих случаях осуществляется следу[ю]щими подстановками:

1) если p — целое число, то подстановка $x = t^k$, где k — наимень[ш]шее общее кратное знаменателей дробей m и n;

2) если $\frac{m+1}{n}$ — целое число, то подстановка $a + bx^n = t^s$, где s — знаменатель дроби p;

3) если $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число, то подстановка $a + bx^n = x^n \cdot t$[…] где s — знаменатель дроби p.

Во всех остальных случаях интегралы типа $\int x^m(a+bx^n)^p\,d$[…] не выражаются через известные элементарные функции, т. е. «не б[е]рутся».

Пример 33.8. Найти интеграл $I = \int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}\,dx$.

○ Решение: Так как

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 + x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\,dx,$$

то $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n} = 2$. Поэтому делаем подстановк[у] $\sqrt[4]{x}+1 = t^3$, $x = (t^3-1)^4$, $dx = 4(t^3-1)^3 \cdot 3t^2\,dt$, $t = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}$. Таки[м] образом,

$$I = \int \frac{t}{(t^3-1)^2} \cdot 12t^2(t^3-1)^3\,dt = 12\int (t^6 - t^3)\,dt =$$

$$= 12 \cdot \frac{t^7}{7} - 12 \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{12}{7}(\sqrt[4]{x}+1)^{\frac{7}{3}} - 3 \cdot (\sqrt[4]{x}+1)^{\frac{4}{3}} + C. \bullet$$

§ 34. «БЕРУЩИЕСЯ» И «НЕБЕРУЩИЕСЯ» ИНТЕГРАЛЫ

Как уже отмечалось выше, операция интегрирования функций зна[]чительно сложнее операции дифференцирования функций. Не всегд[а] выбранный путь интегрирования является наилучшим, более коро[т]ким, простым. Интегрирование часто может быть выполнено не еди[н]ственным способом. Многое зависит от знания рекомендуемых многи[х] искусственных приемов интегрирования, от сообразительности, от тренированности. Например, $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$ можно найти, не используя рекомендуемую подстановку $\operatorname{tg} x = t$, а применив искусственный прием:

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)^2}{\cos^6 x}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}\right)dx = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C.$$

Вряд ли стоит вычислять интеграл

$$\int \frac{3x^2+4x+1}{x(x^2+2x+1)}\,dx,$$

разлагая подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{3x^2+4x+1}{x(x^2+2x+1)} = \frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Заметив, что числитель $3x^2+4x+1$ является производной знаменателя $x(x^2+2x+1) = x^3+2x^2+x$, легко получить:

$$\int \frac{3x^2+4x+1}{x(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{d(x^3+2x^2+x)}{x^3+2x^2+x} = \ln|x^3+2x^2+x| + C.$$

На практике при вычислении неопределенных интегралов используют различные справочники, содержащие таблицы особенно часто встречающихся интегралов. В частности, «Таблицы неопределенных интегралов» М. Л. Смолянского.

Изученные методы интегрирования позволяют во многих случаях вычислить неопределенный интеграл, т. е. найти первообразную функцию для подынтегральной функции.

Как известно, *всякая непрерывная функция имеет первообразную.* В том случае, когда первообразная некоторой элементарной функции $f(x)$ является также элементарной функцией, говорят, что $\int f(x)\,dx$ *«берется»*, т. е. интеграл выражается через элементарные функции (или интеграл вычисляется). Если же интеграл не выражается через элементарные функции, то говорят, что интеграл *«не берется»* (или «его найти нельзя»).

Так, например, нельзя взять интеграл $\int \sqrt{x}\cdot\cos x\,dx$, так как не существует элементарной функции, производная от которой была бы равна $\sqrt{x}\cos x$. Приведем еще примеры «неберущихся» интегралов, которые имеют большое значение в приложениях:

$\int e^{-x^2}\,dx$ — интеграл Пуассона (теория вероятностей),

$\int \frac{dx}{\ln x}$ — интегральный логарифм (теория чисел),

$\int \cos x^2\,dx$, $\int \sin x^2\,dx$ — интегралы Френеля (физика),

$\int \frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ — интегральные синус и косинус,

$\int \frac{e^x}{x}\,dx$ — интегральная показательная функция.

Первообразные от функции e^{-x^2}, $\cos x^2$, $\frac{1}{\ln x}$ и других хорошо изучены, для них составлены подробные таблицы значений для различных значений аргумента x.

Глава VIII. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Лекции 29–33

§ 35. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ КАК ПРЕДЕЛ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММЫ

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, $a < b$. Выполним следующие действия.

1. С помощью точек $x_0 = a$, x_1, $x_2, \ldots, x_n = b$ $(x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$ разобьем отрезок $[a,b]$ на n *частичных отрезков* $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2], \ldots$ $\ldots, [x_{n-1}, x_n]$ (см. рис. 166).

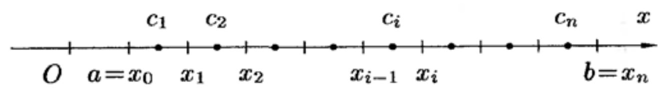


Рис. 166

2. В каждом частичном отрезке $[x_{i-1};x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1};x_i]$ и вычислим значение функции в ней, т. е. величину $f(c_i)$.

3. Умножим найденное значение функции $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка: $f(c_i)\cdot\Delta x_i$.

4. Составим сумму S_n всех таких произведений:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i. \qquad (35.1)$$

Сумма вида (35.1) называется ***интегральной суммой*** функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка: $\lambda = \max \Delta x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

5. Найдем предел интегральной суммы (35.1), когда $n \to \infty$ так, что $\lambda \to 0$.

Если при этом интегральная сумма S_n имеет предел I, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то число I называется ***определенным интегралом*** от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Таким образом,

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.} \qquad (35.2)$$

Числа a и b называются соответственно ***нижним*** и ***верхним пределами интегрирования***, $f(x)$ — ***подынтегральной функцией***, $f(x)\,dx$ — ***подынтегральным выражением***, x — ***переменной интегрирования***, отрезок $[a;b]$ — ***областью (отрезком) интегрирования***.

Функция $y = f(x)$, для которой на отрезке $[a;b]$ существует определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, называется ***интегрируемой*** на этом отрезке.

Сформулируем теперь теорему существования определенного интеграла.

Теорема 35.1 (Коши). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует.

Отметим, что непрерывность функции является достаточным условием ее интегрируемости. Однако определенный интеграл может существовать и для некоторых разрывных функций, в частности для всякой ограниченной на отрезке функции, имеющей на нем конечное число точек разрыва.

Укажем некоторые свойства определенного интеграла, непосредственно вытекающие из его определения (35.2).

1. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b f(z)\,dz.$$

Это следует из того, что интегральная сумма (35.1), а следовательно, и ее предел (35.2) не зависят от того, какой буквой обозначается аргумент данной функции.

2. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$$

3. Для любого действительного числа c: $\int\limits_a^b c\,dx = c\cdot(b-a)$.

§ 36. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Площадь криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geqslant 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу — осью Ox, сбоку — прямыми $x = a$ и $x = b$, называется ***криволинейной трапецией***. Найдем площадь этой трапеции.

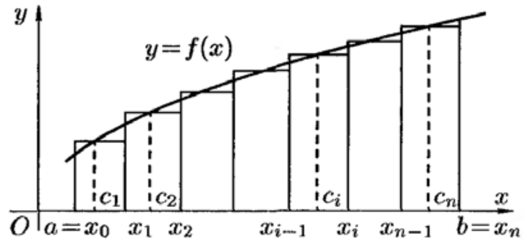


Рис. 167

Для этого отрезок $[a;b]$ точками $a = x_0, x_1, \ldots, b = x_n$ ($x_0 < x_1 < \ldots < x_n$) разобьем на n частичных отрезков $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$, ..., $[x_{n-1};x_n]$. (см. рис. 167). В каждом частичном отрезке $[x_{i-1};x_i]$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) возьмем произвольную точку c_i и вычислим значение функции в ней, т. е. $f(c_i)$.

Умножим значением функции $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка. Произведение $f(c_i)\cdot\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$. Сумма всех таких произведений

$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = S_n$$

равна площади ступенчатой фигуры и приближенно равна площади S криволинейной трапеции:

$$S \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i.$$

С уменьшением всех величин Δx_i точность приближения криволинейной трапеции ступенчатой фигурой и точность полученной формулы увеличиваются. Поэтому за точное значение площади S криволинейной трапеции принимается предел S, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры S_n, когда n неограниченно возрастает так, что $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \quad \text{то есть} \quad S = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Итак, *определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.*

В этом состоит геометрический смысл определенного интеграла.

Работа переменной силы

Пусть материальная точка M перемещается под действием силы $\bar{F}$, направленной вдоль оси Ox и имеющей переменную величину $F = F(x)$, где x — абсцисса движущейся точки M.

Найдем работу A силы $\bar{F}$ по перемещению точки M вдоль оси Ox из точки $x = a$ в точку $x = b$ $(a < b)$. Для этого отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0, x_1, \ldots, b = x_n$ $(x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$ разобьем на n частичных отрезков $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \ldots, [x_{n-1}; x_n]$. Сила, действующая на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, меняется от точки к точке. Но если длина отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ достаточно мала, то сила $\bar{F}$ на этом отрезке изменяется незначительно. Ее можно приближенно считать постоянной и равной значению функции $F = F(x)$ в произвольно выбранной точке $x = c_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Поэтому работа, совершенная этой силой на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, равна произведению $F(c_i) \cdot \Delta x_i$. (Как работа постоянной силы $F(c_i)$ на участке $[x_{i-1}; x_i]$.)

Приближенное значение работы A силы $\bar{F}$ на всем отрезке $[a; b]$ есть

$$A \approx F(c_1)\Delta x_1 + F(c_2)\Delta x_2 + \ldots + F(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i. \qquad (36.1)$$

Это приближенное равенство тем точнее, чем меньше длина Δx_i. Поэтому за точное значение работы A принимается предел суммы (36.1) при условии, что наибольшая длина λ частичных отрезков стремится к нулю:

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Итак, *работа переменной силы $\bar{F}$, величина которой есть непрерывная функция $F = F(x)$, действующей на отрезке $[a; b]$, равна определенному интегралу от величины $F(x)$ силы, взятому по отрезку $[a; b]$.*

В этом состоит физический смысл определенного интеграла.

Аналогично можно показать, что путь S, пройденный точкой за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, равен определенному интегралу от скорости $v(t)$:

$$S = \int_a^b v(t)\,dt;$$

масса m неоднородного стержня на отрезке $[a; b]$ равна определенному интегралу от плотности $\gamma(x)$: $m = \int_a^b \gamma(x)\,dx.$

§ 37. ФОРМУЛА НЬЮТОНА–ЛЕЙБНИЦА

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$.

Теорема 37.1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ — какая-либо ее первообразная на $[a; b]$ $(F'(x) = f(x))$, то имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (37.1)$$

❑ Разобьем отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0, x_1, \ldots, b = x_n$ $(x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$ на n частичных отрезков $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \ldots, [x_{n-1}; x_n]$, как это показано на рис. 168.

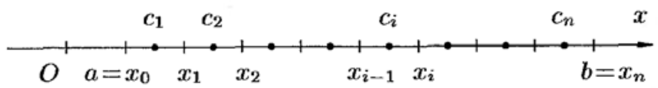


Рис. 168

Рассмотрим тождество

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \big(F(x_n) - F(x_{n-1})\big) + \\ + \big(F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})\big) + \cdots + \big(F(x_2) - F(x_1)\big) + \big(F(x_1) - F(x_0)\big).$$

Преобразуем каждую разность в скобках по формуле Лагранжа

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Получим

$$F(b) - F(a) = F'(c_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) + F'(c_{n-1}) \cdot (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots \\ \cdots + F'(c_2) \cdot (x_2 - x_1) + F'(c_1)(x_1 - x_0) = \sum_{i=1}^{n} F'(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

т. е.

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \qquad (37.2)$$

где c_i есть некоторая точка интервала $(x_{i-1}; x_i)$. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она интегрируема на $[a; b]$. Поэтому существует предел интегральной суммы, равный определенному интегралу от $f(x)$ на $[a; b]$.

Переходя в равенстве (37.2) к пределу при $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$, получаем

$$F(b) - F(a) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

т. е.

$$\boxed{F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx.}$$ ■

Равенство (37.1) называется ***формулой Ньютона–Лейбница.***

Если ввести обозначение $F(b)-F(a)=F(x)\big|_a^b$, то формулу Ньютона–Лейбница (37.1) можно переписать так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b.$$

Формула Ньютона–Лейбница дает удобный способ вычисления определенного интеграла. Чтобы вычислить определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, надо найти ее первообразную функцию $F(x)$ и взять разность $F(b)-F(a)$ значений этой первообразной на концах отрезка $[a;b]$.

Например, $\int\limits_0^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 9-0=9,$

а $\int\limits_{-2}^2 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_{-2}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{\pi}{4}.$

Пример 37.1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx.$

Решение:

$$\int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx = \int_0^\pi \sqrt{\cos^2 x}dx = \int_0^\pi |\cos x|\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1+1=2.$$ ●

Пример 37.2. Вычислить интеграл $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$

Решение: $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_e^{e^2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$ ●

§ 38. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим основные свойства определенного интеграла, считая подынтегральную функцию интегрируемой на отрезке $[a;b]$. При выводе свойств будем использовать определение интеграла и формулу Ньютона–Лейбница.

1. *Если c — постоянное число и функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то*

$$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx, \tag{38.1}$$

т. е. постоянный множитель c можно выносить за знак определенного интеграла.

❑ Составим интегральную сумму для функции $c\cdot f(x)$. Имеем:

$$\sum_{i=1}^n c\cdot f(c_i)\Delta x_i = c\cdot\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n c\cdot f(x)\Delta x_i = c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n f(c_i) = c\cdot\int\limits_a^b f(x)\,dx.$ Отсюда вытекает, что функция $c\cdot f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и справедлива формула (38.1). ■

2. *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, тогда интегрируема на $[a;b]$ их сумма и*

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx, \tag{38.2}$$

т. е. интеграл от суммы равен сумме интегралов.

❑ $$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n (f_1(c_i)+f_2(c_i))\Delta x_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f_1(c_i)\Delta x_i + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f_2(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx.$$ ■

Свойство 2 распространяется на сумму любого конечного числа слагаемых.

3. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$

Это свойство можно принять по определению. Это свойство также подтверждается формулой Ньютона–Лейбница.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

4. *Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и $a < c < b$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \qquad (38.3)$$

т. е. интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по частям этого отрезка. Это свойство называют ***аддитивностью*** определенного интеграла (или свойством аддитивности).

❑ При разбиении отрезка $[a;b]$ на части включим точку c в число точек деления (это можно сделать ввиду независимости предела интегральной суммы от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на части). Если $c = x_m$, то интегральную сумму можно разбить на две суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(c_i)\Delta x_i + \sum_{i=m}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Каждая из написанных сумм является интегральной соответственно для отрезков $[a;b]$, $[a;c]$ и $[c;b]$. Переходя к пределу в последнем равенстве при $n \to \infty$ $(\lambda \to 0)$, получим равенство (38.3). ■

Свойство 4 справедливо при любом расположении точек a, b, c (считаем, что функция $f(x)$ интегрируема на большем из получающихся отрезков).

Так, например, если $a < b < c$, то

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Отсюда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(использованы свойства 4 и 3).

5. «Теорема о среднем». *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует точка $c \in [a;b]$ такая, что*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a).}$$

❑ По формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$. Применяя к разности $F(b) - F(a)$ теорему Лагранжа (теорему о конечном приращении функции), получим

$$F(b) - F(a) = F'(c)\cdot(b-a) = f(c)\cdot(b-a). \quad ■$$

Свойство 5 («теорема о среднем») при $f(x) \geqslant 0$ имеет простой геометрический смысл: значение определенного интеграла равно, при некотором $c \in (a;b)$, площади прямоугольника с высотой $f(c)$ и основанием $b-a$ (см. рис. 169). Число

$$\boxed{f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

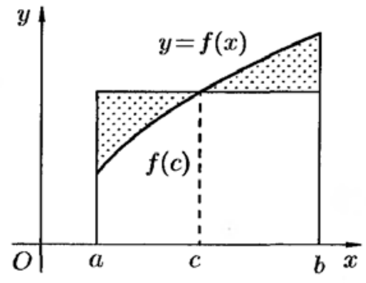


Рис. 169

называется ***средним значением*** функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

6. *Если функция $f(x)$ сохраняет знак на отрезке $[a;b]$, где $a < b$, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ имеет тот же знак, что и функция.* Так, если $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

❑ По «теореме о среднем» (свойство 5)

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a),$$

где $c \in [a;b]$. А так как $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [a;b]$, то и

$$f(c) \geqslant 0, \quad b - a > 0.$$

Поэтому $f(c)\cdot(b-a) \geqslant 0$, т. е. $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$. ■

7. *Неравенство между непрерывными функциями на отрезке $[a;b]$, $(a < b)$ можно интегрировать.* Так, если $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ при $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f_1(x)\,dx \leqslant \int_a^b f_2(x)\,dx$.

❑ Так как $f_2(x) - f_1(x) \geqslant 0$, то при $a < b$, согласно свойству 6, имеем

$$\int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx \geqslant 0.$$

Или, согласно свойству 2,

$$\int\limits_a^b f_2(x)\,dx - \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \geqslant 0, \quad \text{т. е.} \quad \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f_2(x)\,dx. \qquad \blacksquare$$

Отметим, что дифференцировать неравенства нельзя.

8. Оценка интеграла. *Если m и M — соответственно наименьше и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$, $(a < b)$, т*

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \qquad (38.4$$

❑ Так как для любого $x \in [a;b]$ имеем $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то, согласн свойству 7, имеем

$$\int\limits_a^b m\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b M\,dx.$$

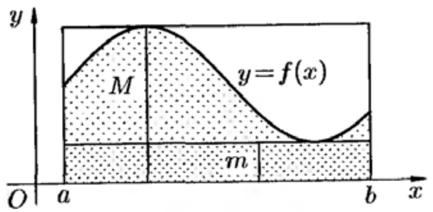


Рис. 170

Применяя к крайним интеграла свойство 5, получаем

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \qquad \blacksquare$$

Если $f(x) \geqslant 0$, то свойство 8 иллюстрируется геометрически площадь криволинейной трапеции заключена между площадями пря-моугольников, основание которых есть $[a;b]$, а высоты равны m и M (см. рис. 170).

9. *Модуль определенного интеграла не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции:*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx; \quad a < b.$$

❑ Применяя свойство 7 к очевидным неравенствам $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, получаем

$$-\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Отсюда следует, что

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \qquad \blacksquare$$

10. *Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена этим пределом*, т. е.

$$\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x).$$

❑ По формуле Ньютона–Лейбница имеем:

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt = F(t)\Big|_a^x = F(x) - F(a).$$

Следовательно,

$$\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)'_x = (F(x) - F(a))'_x = F'(x) - 0 = f(x). \qquad \blacksquare$$

Это означает, что *определенный интеграл с переменным верхним пределом есть одна из первообразных подынтегральной функции.*

§ 39. ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

39.1. Формула Ньютона–Лейбница

Простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ от непрерывной функции является формула Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Применяется этот метод во всех случаях, когда может быть найдена первообразная функции $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$.

Например, $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = 2.$

При вычислении определенных интегралов широко используется метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

39.2. Интегрирование подстановкой (заменой переменной)

Пусть для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi(t)$.

Теорема 39.1. Если:
1) функция $x = \varphi(t)$ и ее производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [\alpha; \beta]$;
2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$ является отрезок $[a; b]$;
3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$,
то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt. \qquad (39.1)$$

❑ Пусть $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Тогда по формуле Ньютона–Лейбница $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Так как $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, то $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$. Поэтому по формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \quad ■$$

Формула (39.1) называется *формулой замены переменной в определенном интеграле.*

Отметим, что:

1) при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется;

2) часто вместо подстановки $x = \varphi(t)$ применяют подстановку $t = g(x)$;

3) не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных!

Пример 39.1. Вычислить $\int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}\,dx$.

❍ Решение: Положим $x = 2\sin t$, тогда $dx = 2\cos t\,dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = 2$, то $t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} 4\sin^2 t\sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t\,dt =$$

$$= 16\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = 16\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 4t)\,dt =$$

$$= 2\left(t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi. \quad ●$$

39.3. Интегрирование по частям

Теорема 39.2. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то имеет место формула

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (39.2)$$

❑ На отрезке $[a; b]$ имеет место равенство $(uv)' = u'v + uv'$. Следовательно, функция uv есть первообразная для непрерывной функции $u'v + uv'$. Тогда по формуле Ньютона–Лейбница имеем:

$$\int_a^b (u'v + uv')\,dx = uv\Big|_a^b.$$

Следовательно,

$$\int_a^b v \cdot u'\,dx + \int_a^b uv'\,dx = uv\Big|_a^b \implies$$

$$\implies \int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b \implies \int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \quad ■$$

Формула (39.2) называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.*

Пример 39.2. Вычислить $\int_1^e x\ln x\,dx$.

❍ Решение: Положим

$$\begin{bmatrix} u = \ln x & \implies & du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = x\,dx & \implies & v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix}.$$

Применяя формулу (39.2), получаем

$$\int\limits_1^e x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2+1). \quad \bullet$$

Пример 39.3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^\pi x\sin x\,dx$.

❍ Решение: Интегрируем по частям. Положим

$$\begin{bmatrix} u = x & \Longrightarrow & du = dx \\ dv = \sin x\,dx & \Longrightarrow & v = -\cos x \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$J = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int\limits_0^\pi \cos x\,dx = -\pi\cdot(-1) + 0 + \sin x\Big|_0^\pi = \pi. \quad \bullet$$

39.4. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a;a]$, симметричном относительно точки $x=0$. Докажем, что

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\cdot\int\limits_0^a f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция.} \end{cases} \tag{39.3}$$

❑ Разобьем отрезок интегрирования $[-a;a]$ на части $[-a;0]$ и $[0;a]$. Тогда по свойству аддитивности

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_0^a f(x)\,dx. \tag{39.4}$$

В первом интеграле сделаем подстановку $x=-t$. Тогда

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int\limits_a^0 f(-t)\,dt = \int\limits_0^a f(-t)\,dt = \int\limits_0^a f(-x)\,dx$$

(согласно свойству: «определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования»). Возвращаясь к равенству (39.4), получим

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_0^a f(-x)\,dx + \int\limits_0^a f(x)\,dx = \int\limits_0^a (f(-x)+f(x))\,dx. \tag{39.5}$$

Если функция $f(x)$ четная ($f(-x)=f(x)$), то $f(-x)+f(x)=2f(x)$; если функция $f(x)$ нечетная ($f(-x)=-f(x)$), то $f(-x)+f(x)=0$.

Следовательно, равенство (39.5) принимает вид (39.3). ■

Благодаря доказанной формуле можно, например, сразу, не производя вычислений, сказать, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\cdot\sin^3 x\,dx = 0, \qquad \int\limits_{-3}^{3} e^{-x^2}\cdot\sin x\,dx = 0.$$

§ 40. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где промежуток интегрирования $[a;b]$ конечный, а подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, называют еще *собственным интегралом*.

Рассмотрим так называемые ***несобственные интегралы***, т. е. определенный интеграл от непрерывной функции, но с бесконечным промежутком интегрирования или определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования, но от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв.

40.1. Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования (несобственный интеграл I рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то его называют *несобственным интегралом первого рода* и обозначают $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению

$$\boxed{\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx.}$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится*. Если же указанный предел не существует или он бесконечен, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится*.

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty; b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

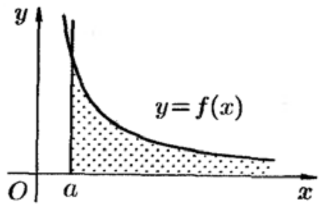


Рис. 171

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где c — произвольное число. В этом случае интеграл слева сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла справа. Отметим, что если непрерывная функция $f(x) \geqslant 0$ на промежутке $[a;+\infty)$ и интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится*, то он выражает площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции (см. рис. 171).

Пример 40.1. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: 1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{0} \cos x\,dx$; 3) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x}$.

○ Решение: 1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} x^{-2}\,dx = -\lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1}{x}\Big|_1^b = -(0-1) = 1,$ интеграл сходится;

2) $\int\limits_{-\infty}^{0} \cos x\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \cos x\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \sin x\Big|_a^0 = 0 - \lim\limits_{a\to-\infty} \sin a,$ интеграл расходится, так как при $a\to-\infty$ предел $\lim\limits_{a\to-\infty} \sin a$ не существует.

3) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty} \ln b = \infty$, интеграл расходится. ●

В некоторых задачах нет необходимости вычислять интеграл; достаточно лишь знать, сходится ли он или нет.

Приведем без доказательства некоторые признаки сходимости.

Теорема 40.1 (признак сравнения). Если на промежутке $[a;+\infty)$ непрерывные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$.

Пример 40.2. Сходится ли интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+3^x)}$?

○ Решение: При $x \geqslant 1$ имеем $\frac{1}{x^2(1+3^x)} < \frac{1}{x^2}$. Но интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$ сходится. Следовательно, интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+3^x)}$ также сходится (и его значение меньше 1). ●

Теорема 40.2. Если существует предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0 < k < \infty$ ($f(x) > 0$ и $\varphi(x) > 0$), то интегралы $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{a}^{\infty} \varphi(x)\,dx$ одновременно оба сходятся или оба расходятся (т. е. ведут себя одинаково в смысле сходимости).

Пример 40.3. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$.

○ Решение: Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$ сходится, так как интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится и

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = 1. \quad ●$$

40.2. Интеграл от разрывной функции (несобственный интеграл II рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x = b$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, то его называют *несобственным интегралом второго рода* и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению,

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.}$$

Если предел в правой части существует, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится*. Если же указанный предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *расходится*.

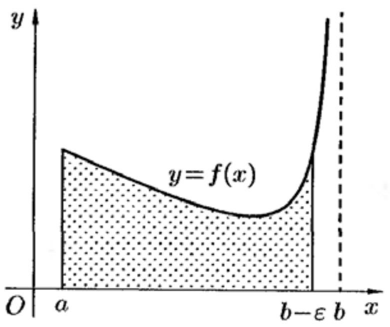


Рис. 172

Аналогично, если функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$, то полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ терпит разрыв во внутренней точке c отрезка $[a;b]$, то несобственный интеграл второго рода определяется формулой

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

В этом случае интеграл слева называют сходящимся, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

В случае, когда $f(x) > 0$, несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (разрыв в точке $x = b$) можно истолковать геометрически как площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции (см. рис. 172).

Пример 40.4. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

○ Решение: При $x = 0$ функция $y = \frac{1}{x^2}$ терпит бесконечный разрыв;

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 x^{-2}\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x}\Big|_{0+\varepsilon}^1 = -\left(1 - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty,$$

интеграл расходится. ●

Сформулируем признаки сходимости для несобственных интегралов второго рода.

Теорема 40.3. Пусть на промежутке $[a;b)$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, при $x = b$ терпят бесконечный разрыв и удовлетворяют условию $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$. Из сходимости интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ вытекает расходимость интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$.

Теорема 40.4. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на промежутке $[a;b)$ и в точке $x = b$ терпят разрыв. Если существует предел $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0 < k < \infty$, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Пример 40.5. Сходится ли интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$?

○ Решение: Функция $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ имеет на $[0;1]$ единственный разрыв в точке $x = 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln x\Big|_\varepsilon^1 = 0 - \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon$$

расходится. И так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1,$$

то интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ также расходится. ●

§ 41. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

41.1. Схемы применения определенного интеграла

Пусть требуется найти значение какой-либо геометрической или физической величины A (площадь фигуры, объем тела, давление жидкости на вертикальную пластину и т. д.), связанной с отрезком $[a;b]$ изменения независимой переменной x. Предполагается, что эта величина A аддитивна, т. е. такая, что при разбиении отрезка $[a;b]$ точкой $c \in (a;b)$ на части $[a;c]$ и $[c;b]$ значение величины A, соответствующее всему отрезку $[a;b]$, равно сумме ее значений, соответствующих $[a;c]$ и $[c;b]$.

Для нахождения этой величины A можно руководствоваться одной из двух схем: I схема (или метод *интегральных сумм*) и II схема (или *метод дифференциала*).

Первая схема базируется на определении определенного интеграла.

1. Точками $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$ разбить отрезок $[a;b]$ на n частей. В соответствии с этим, интересующая нас величина A разобьется на n «элементарных слагаемых» ΔA_i $(i = 1, \ldots, n)$: $A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \ldots \ldots + \Delta A_n$.

2. Представить каждое «элементарное слагаемое» в виде произведения некоторой функции (определяемой из условия задачи), вычисленной в произвольной точке соответствующего отрезка на его длину: $\Delta A_i \approx f(c_i)\Delta x_i$.

При нахождении приближенного значения ΔA_i допустимы некоторые упрощения: дугу на малом участке можно заменить хордой, стягивающей ее концы; переменную скорость на малом участке можно приближенно считать постоянной и т. д.

Получим приближенное значение величины A в виде интегральной суммы:

$$A \approx f(c_1)\Delta x_1 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

3. Искомая величина A равна пределу интегральной суммы, т. е.

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Указанный «метод сумм», как видим, основан на представлении *интеграла как о сумме бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых*.

Схема I была применена для выяснения геометрического и физического смысла определенного интеграла.

Вторая схема представляет собой несколько видоизмененную схему I и называется «метод дифференциала» или «метод отбрасывания бесконечно малых высших порядков»:

1) на отрезке $[a;b]$ выбираем произвольное значение x и рассматриваем переменный отрезок $[a;x]$. На этом отрезке величина A становится функцией x: $A = A(x)$, т. е. считаем, что часть искомой величины A есть неизвестная функция $A(x)$, где $x \in [a;b]$ — один из параметров величины A;

2) находим главную часть приращения ΔA при изменении x на малую величину $\Delta x = dx$, т. е. находим дифференциал dA функции $A = A(x)$: $dA = f(x)\,dx$, где $f(x)$, определяемая из условия задачи, функция переменной x (здесь также возможны различные упрощения);

3) считая, что $dA \approx \Delta A$ при $\Delta x \to 0$, находим искомую величину путем интегрирования dA в пределах от a до b:

$$A(b) = A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

41.2. Вычисление площадей плоских фигур

Прямоугольные координаты

Как уже было установлено (см. «геометрический смысл определенного интеграла»), площадь криволинейной трапеции, расположенной «выше» оси абсцисс ($f(x) \geqslant 0$), равна соответствующему определенному интегралу:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{или} \quad S = \int_a^b y\,dx. \qquad (41.1)$$

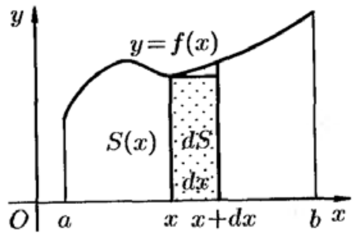


Рис. 173

Формула (41.1) получена путем применения схемы I — метода сумм. Обоснуем формулу (41.1), используя схему II. Пусть криволинейная трапеция ограничена линиями $y = f(x) \geqslant 0$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (см. рис. 173). Для нахождения площади S этой трапеции проделаем следующие операции:

1. Возьмем произвольное $x \in [a;b]$ и будем считать, что $S = S(x)$.

2. Дадим аргументу x приращение $\Delta x = dx$ $(x + \Delta x \in [a;b])$. Функция $S = S(x)$ получит приращение ΔS, представляющее собой площадь «элементарной криволинейной трапеции» (на рисунке она выделена).

Дифференциал площади dS есть главная часть приращения ΔS при $\Delta x \to 0$, и, очевидно, он равен площади прямоугольника с основанием dx и высотой y: $dS = y \cdot dx$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, получаем $S = \int\limits_a^b y\,dx$.

Отметим, что если криволинейная трапеция расположена «ниже» оси Ox ($f(x) < 0$), то ее площадь может быть найдена по формуле

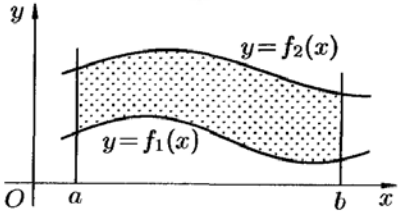


Рис. 174

$$S = -\int\limits_a^b y\,dx. \qquad (41.2)$$

Формулы (41.1) и (41.2) можно объединить в одну:

$$S = \left|\int\limits_a^b y\,dx\right|.$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ (при условии $f_2(x) \geqslant f_1(x)$) (см. рис. 174), можно найти по формуле

$$S = \int\limits_a^b f_2(x)\,dx - \int\limits_a^b f_1(x)\,dx = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$

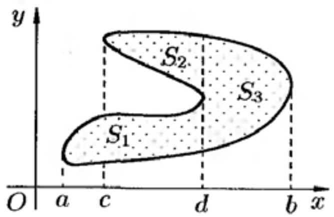


Рис. 175

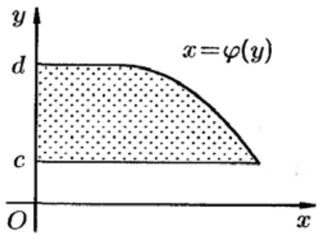


Рис. 176

Если плоская фигура имеет «сложную» форму (см. рис. 175), то прямыми, параллельными оси Oy, ее следует разбить на части так, чтобы можно было бы применить уже известные формулы.

Если криволинейная трапеция ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$, осью Oy и непрерывной кривой $x = \varphi(y) \geqslant 0$ (см. рис. 176), то ее площадь находится по формуле $S = \int\limits_c^d x\,dy$.

И, наконец, если криволинейная трапеция ограничена *кривой, заданной параметрически*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta],$$

прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox, то площадь ее находится по формуле

$$S = \left|\int\limits_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)\,dt\right|,$$

где α и β определяются из равенств $x(\alpha) = a$ и $x(\beta) = b$.

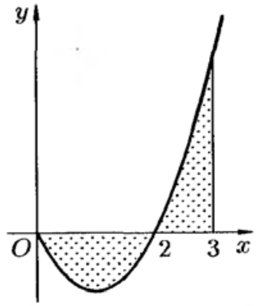


Рис. 177

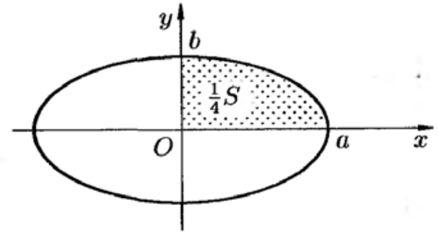


Рис. 178

Пример 41.1. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и графиком функции $y = x^2 - 2x$ при $x \in [0; 3]$.

○ Решение: Фигура имеет вид, изображенный на рисунке 177. Находим ее площадь S:

$$S = -\int\limits_0^2 (x^2 - 2x)\,dx + \int\limits_2^3 (x^2 - 2x)\,dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + x^2\Big|_0^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 - x^2\Big|_2^3 = -\frac{8}{3} + 4 + \frac{27}{3} - \frac{8}{3} - 9 + 4 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}. \quad \bullet$$

Пример 41.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

○ Решение: Найдем сначала $\frac{1}{4}$ площади S. Здесь x изменяется от 0 до a, следовательно, t изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0 (см. рис. 178). Находим:

$$\frac{1}{4}S = \int\limits_{\pi/2}^0 b\sin t \cdot (-a\sin t)\,dt = -ab\int\limits_{\pi/2}^0 \sin^2 t\,dt =$$

$$= \frac{ab}{2} \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t)\, dt = \frac{ab}{2}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi ab}{4}.$$

Таким образом, $\frac{1}{4}S = \frac{\pi ab}{4}$. Значит, $S = \pi ab$. ●

Полярные координаты

Найдем площадь S *криволинейного сектора*, т. е. плоской фигуры, ограниченной непрерывной линией $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, где r и φ — полярные координаты (см. рис. 179). Для решения задачи используем схему II — *метод дифференциала*.

1. Будем считать часть искомой площади S как функцию угла φ, т. е. $S = S(\varphi)$, где $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ (если $\varphi = \alpha$, то $S(\alpha) = 0$, если $\varphi = \beta$, то $S(\beta) = S$).

2. Если текущий полярный угол φ получит приращение $\Delta\varphi = d\varphi$, то приращение площади ΔS равно площади «элементарного криволинейного сектора» OAB.

Дифференциал dS представляет собой главную часть приращения ΔS при $d\varphi \to 0$ и равен площади кругового сектора OAC (на рисунке она заштрихована) радиуса r с центральным углом $d\varphi$. Поэтому $dS = \frac{1}{2}r^2 \cdot d\varphi$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $\varphi = \alpha$ до $\varphi = \beta$, получим искомую площадь

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)\, d\varphi.}$$

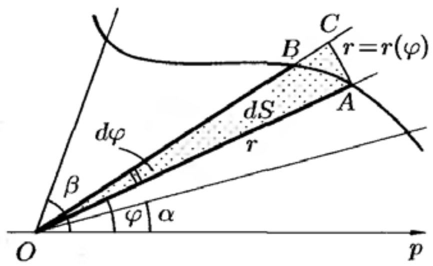


Рис. 179

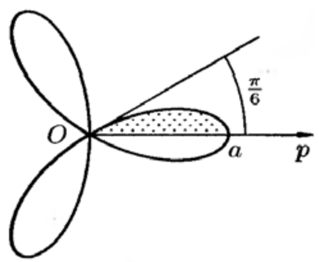


Рис. 180

Пример 41.3. Найти площадь фигуры, ограниченной «трехлепестковой розой» $r = a\cos 3\varphi$ (см. рис. 180).

○ Решение: Найдем сначала площадь половины одного лепестка «розы», т. е. $\frac{1}{6}$ часть всей площади фигуры:

$$\frac{1}{6}S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/6}(a\cos 3\varphi)^2\, d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int\limits_0^{\pi/6}\frac{1}{2}(1 + \cos 6\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\varphi\Big|_0^{\pi/6} + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big|_0^{\pi/6}\right) = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6} + 0\right) = \frac{\pi a^2}{24},$$

т. е. $\frac{1}{6}S = \frac{\pi a^2}{24}$. Следовательно, $S = \frac{\pi a^2}{4}$. ●

Если плоская фигура имеет «сложную» форму, то лучами, выходящими из полюса, ее следует разбить на криволинейные секторы, к которым применить полученную формулу для нахождения площади. Так, для фигуры, изображенной на рисунке 181, имеем:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\gamma r_3^2\, d\varphi - \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r_1^2\, d\varphi - \frac{1}{2}\int\limits_\beta^\gamma r_2^2\, d\varphi.$$

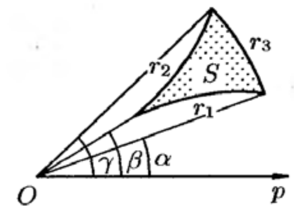


Рис. 181

41.3. Вычисление длины дуги плоской кривой

Прямоугольные координаты

Пусть в прямоугольных координатах дана плоская кривая AB, уравнение которой $y = f(x)$, где $a \leqslant x \leqslant b$.

Под ***длиной дуги*** AB понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает, а длина наибольшего звена ее стремится к нулю.

Покажем, что если функция $y = f(x)$ и ее производная $y' = f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, то кривая AB имеет длину, равную

$$\boxed{l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.} \qquad (41.3)$$

Применим схему I (метод сумм).

1. Точками $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$ $(x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$ разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей (см. рис. 182). Пусть этим точкам соответствуют точки $M_0 = A, M_1, \ldots, M_n = B$ на кривой AB. Проведем хорды $M_0M_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n$, длины которых обозначим соответственно через $\Delta L_1, \Delta L_2, \ldots, \Delta L_n$. Получим ломаную $M_0M_1M_2\ldots M_{n-1}M_n$, длина которой равна $L_n = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \ldots + \Delta L_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\Delta L_i$.

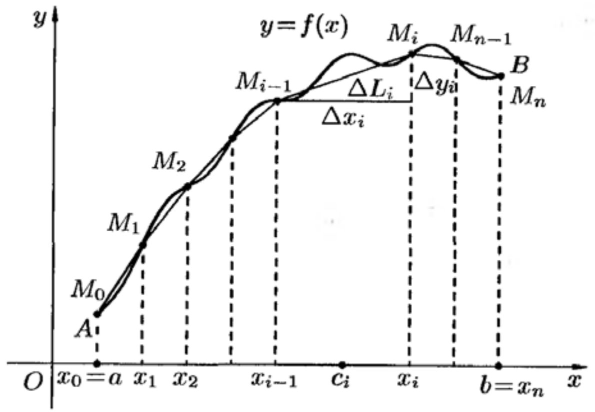


Рис. 182

2. Длину хорды (или звена ломаной) ΔL_i можно найти по теореме Пифагора из треугольника с катетами Δx_i и Δy_i:

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2},$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. По теореме Лагранжа о конечном приращении функции $\Delta y_i = f'(c_i)\cdot\Delta x_i$, где $c_i \in (x_{i-1}; x_i)$. Поэтому

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i)\cdot\Delta x_i)^2} = \sqrt{1+(f'(c_i))^2}\cdot\Delta x_i,$$

а длина всей ломаной $M_0M_1\ldots M_n$ равна

$$L_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta L_i = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\cdot\Delta x_i. \qquad (41.4)$$

3. Длина l кривой AB, по определению, равна

$$l = \lim_{\max\Delta L_i\to 0} L_n = \lim_{\max\Delta L_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta L_i.$$

Заметим, что при $\Delta L_i\to 0$ также и $\Delta x_i\to 0$ ($\Delta L_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}$ и, следовательно, $|\Delta x_i|<\Delta L_i$). Функция $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, так как, по условию, непрерывна функция $f'(x)$. Следовательно, существует предел интегральной суммы (41.4), когда $\max\Delta x_i\to 0$:

$$l = \lim_{\substack{\max\Delta l_i\to 0\\(n\to\infty)}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\Delta x_i = \int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Таким образом, $l = \int\limits_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$, или в сокращенной записи $l = \int\limits_a^b\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$.

Если уравнение кривой AB задано в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t),\\ y = y(t),\end{cases}\qquad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные функции с непрерывными производными и $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$, то длина l кривой AB находится по формуле

$$\boxed{l = \int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.} \qquad (41.5)$$

Формула (41.5) может быть получена из формулы (41.3) подстановкой $x = x(t)$, $dx = x'(t)\,dt$, $f'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Пример 41.4. Найти длину окружности радиуса R.

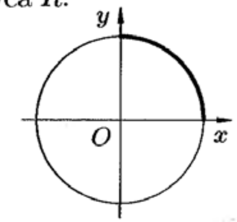


Рис. 183

○ Решение: Найдем $\frac{1}{4}$ часть ее длины от точки $(0;R)$ до точки $(R;0)$ (см. рис. 183). Так как $y = \sqrt{R^2-x^2}$, то

$$\frac{1}{4}l = \int_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx = R\cdot\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R = R\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Значит, $l = 2\pi R$. Если уравнение окружности записать в параметрическом виде $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, то

$$l = \int_0^{2\pi}\sqrt{(-R\sin t)^2+(R\cos t)^2}\,dt = Rt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R. \quad \bullet$$

Вычисление длины дуги может быть основано на применении метода дифференциала. Покажем, как можно получить формулу (41.3), применив схему II (метод дифференциала).

1. Возьмем произвольное значение $x\in[a;b]$ и рассмотрим переменный отрезок $[a;x]$. На нем величина l становится функцией от x, т. е. $l = l(x)$ ($l(a)=0$ и $l(b)=l$).

2. Находим дифференциал dl функции $l = l(x)$ при изменении x на малую величину $\Delta x = dx$: $dl = l'(x)\,dx$. Найдем $l'(x)$, заменяя бесконечно малую дугу $\overset{\frown}{MN}$ хордой Δl, стягивающей эту дугу (см. рис. 184):

$$l'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta l}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1+(y'_x)^2}.$$

Стало быть, $dl = \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$.

3. Интегрируя dl в пределах от a до b, получаем $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + {y'_x}^2}\, dx$.

Равенство $dl = \sqrt{1 + {y'_x}^2}\, dx$ называется формулой ***дифференциала дуги*** в прямоугольных координатах.

Так как $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$, то

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Последняя формула представляет собой теорему Пифагора для бесконечно малого треугольника MCT (см. рис. 185).

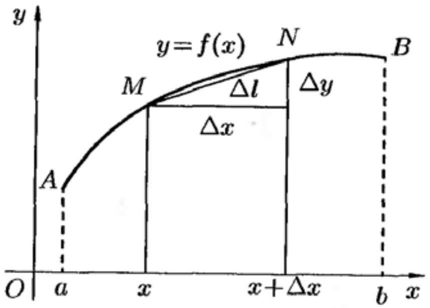


Рис. 184

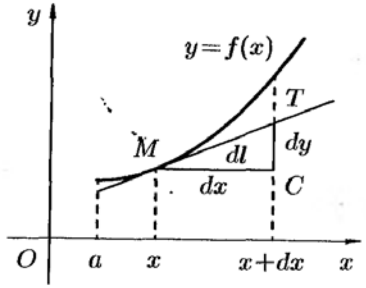


Рис. 185

Полярные координаты

Пусть кривая AB задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$. Предположим, что $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$.

Если в равенствах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, связывающих полярные и декартовы координаты, параметром считать угол φ, то кривую AB можно задать параметрически $\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$ Тогда

$$\begin{cases} x'_\varphi = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi, \\ y'_\varphi = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi. \end{cases}$$

Поэтому

$$\sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2} =$$

$$= \sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2} =$$

$$= \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}.$$

Применяя формулу (41.5), получаем

$$\boxed{l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi.}$$

Пример 41.5. Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$.

Решение: Кардиоида $r = a(1 + \cos\varphi)$ имеет вид, изображенный на рисунке 186. Она симметрична относительно полярной оси. Найдем половину длины кардиоиды:

$$\frac{1}{2}l = \int\limits_0^\pi \sqrt{(a(1+\cos\varphi))^2 + (a(-\sin\varphi))^2}\, d\varphi = a\int\limits_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\int\limits_0^\pi \sqrt{2 \cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 2a\int\limits_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a \cdot \sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 4a.$$

Таким образом, $\frac{1}{2}l = 4a$. Значит, $l = 8a$. ●

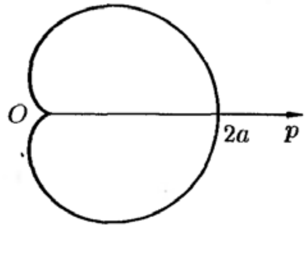


Рис. 186

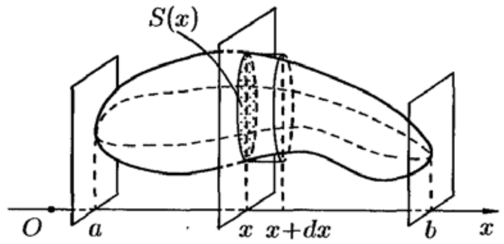


Рис. 187

41.4. Вычисление объема тела

Вычисление объема тела по известным площадям параллельных сечений

Пусть требуется найти объем V тела, причем известны площади S сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными некоторой оси, например оси Ox: $S = S(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

Применим схему II (метод дифференциала).

1. Через произвольную точку $x \in [a; b]$ проведем плоскость П, перпендикулярную оси Ox (см. рис. 187). Обозначим через $S(x)$ площадь

сечения тела этой плоскостью; $S(x)$ считаем известной и непрерывно изменяющейся при изменении x. Через $v(x)$ обозначим объем части тела, лежащее левее плоскости П. Будем считать, что на отрезке $[a; x]$ величина v есть функция от x, т. е. $v = v(x)$ $(v(a) = 0,\ v(b) = V)$.

2. Находим дифференциал dV функции $v = v(x)$. Он представляет собой «элементарный слой» тела, заключенный между параллельными плоскостями, пересекающими ось Ox в точках x и $x+\Delta x$, который приближенно может быть принят за цилиндр с основанием $S(x)$ и высотой dx. Поэтому дифференциал объема $dV = S(x)\,dx$.

3. Находим искомую величину V путем интегрирования dA в пределах от a до b:

$$\boxed{V = \int\limits_a^b S(x)\,dx.} \tag{41.6}$$

Полученная формула называется ***формулой объема тела по площади параллельных сечений.***

Пример 41.6. Найти объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение: Рассекая эллипсоид плоскостью, параллельной плоскости Oyz и на расстоянии x от нее $(-a \leqslant x \leqslant a)$, получим эллипс (см. рис. 188):

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1.$$

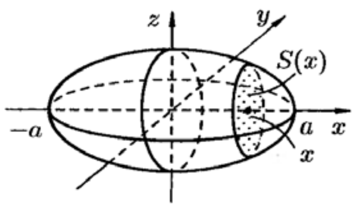


Рис. 188

Площадь этого эллипса равна $S(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Поэтому, по формуле (41.6), имеем

$$V = \pi bc \int\limits_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Объем тела вращения

Пусть вокруг оси Ox вращается криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной линией $y = f(x) \geqslant 0$, отрезком $a \leqslant x \leqslant b$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (см. рис. 189). Полученная от вращения фигура называется *телом вращения*. Сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, проведенной через произвольную точку x оси Ox $(x \in [a; b])$, есть круг с радиусом $y = f(x)$. Следовательно, $S(x) = \pi y^2$.

Применяя формулу (41.6) объема тела по площади параллельных сечений, получаем

$$\boxed{V_x = \pi \int\limits_a^b y^2\,dx.} \tag{41.7}$$

Если криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = \varphi(y) \geqslant 0$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, то объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy, по аналогии с формулой (41.7), равен

$$V_y = \pi \int\limits_c^d x^2\,dy. \tag{41.8}$$

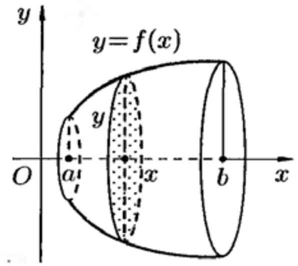


Рис. 189

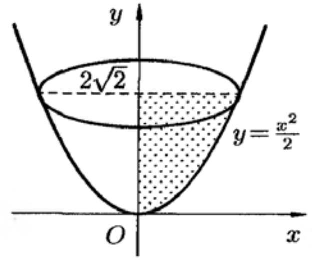


Рис. 190

Пример 41.7. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2}$, $x = 0$, $y = 2\sqrt{2}$ вокруг оси Oy (см. рис. 190).

Решение: По формуле (41.8) находим:

$$V_y = \pi \int\limits_0^{2\sqrt{2}} 2y\,dy = \pi y^2\Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi.$$

41.5. Вычисление площади поверхности вращения

Пусть кривая AB является графиком функции $y = f(x) \geqslant 0$, где $x \in [a; b]$, а функция $y = f(x)$ и ее производная $y' = f'(x)$ непрерывны на этом отрезке.

Найдем площадь S поверхности, образованной вращением кривой AB вокруг оси Ox.

Применим схему II (метод дифференциала).

1. Через произвольную точку $x \in [a; b]$ проведем плоскость П, перпендикулярную оси Ox. Плоскость П пересекает поверхность вращения по окружности с радиусом $y = f(x)$ (см. рис. 191). Величина S поверхности части фигуры вращения, лежащей левее плоскости, является функцией от x, т. е. $s = s(x)$ $(s(a) = 0$ и $s(b) = S)$.

2. Дадим аргументу x приращение $\Delta x = dx$. Через точку $x + dx \in$ $\in [a;b]$ также проведем плоскость, перпендикулярную оси Ox. Функция $s = s(x)$ получит приращение Δs, изображенного на рисунке в виде «пояска».

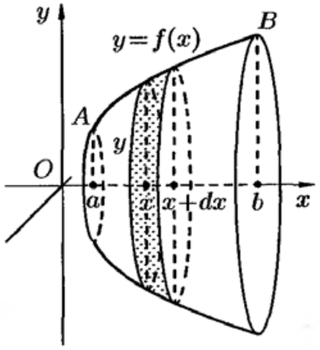


Рис. 191

Найдем дифференциал площади ds, заменяя образованную между сечениями фигуру усеченным конусом, образующая которого равна dl, а радиусы оснований равны y и $y + dy$. Площадь его боковой поверхности равна $ds = \pi(y + y + dy)\cdot dl = 2\pi y\,dl + \pi\,dy\,dl$. Отбрасывая произведение $dy\,dl$ как бесконечно малую высшего порядка, чем ds, получаем $ds = 2\pi y\,dl$, или, так как $dl = \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$, то $ds = 2\pi y\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, получаем

$$S_x = 2\pi \int_a^b y\cdot\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx. \tag{41.9}$$

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то формула (41.9) для площади поверхности вращения принимает вид

$$\boxed{S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.}$$

Пример 41.8. Найти площадь поверхности шара радиуса R.

❍ Решение: Можно считать, что поверхность шара образована вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leqslant x \leqslant R$, вокруг оси Ox. По формуле (41.9) находим

$$S = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2 + x^2}\,dx = 2\pi R\cdot x\Big|_{-R}^{R} = 4\pi R^2. \quad ●$$

Пример 41.9. Дана циклоида

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Найти площадь поверхности, образованной вращением ее вокруг оси Ox.

❍ Решение: При вращении половины дуги циклоиды вокруг оси Ox площадь поверхности вращения равна

$$\frac{1}{2}S_x = 2\pi \int_0^\pi a(1-\cos t)\cdot\sqrt{(a(1-\cos t))^2 + (a\sin t)^2}\,dt =$$

$$= 2\pi \int_0^\pi a^2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt =$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^\pi \sin^2\frac{t}{2}\cdot\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 8\pi a^2 \int_0^\pi \sin^2\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= -8\pi a^2\cdot 2\int_0^\pi \left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right) d\left(\cos\frac{t}{2}\right) = -16\pi a^2\left(\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi - \frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\Big|_0^\pi\right) =$$

$$= -16\pi a^2\left(0 - 1 - 0 + \frac{1}{3}\right) = -16\pi a^2\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{32\pi a^2}{3},$$

т. е. $\frac{1}{2}S_x = \frac{32}{3}\pi a^2$. Следовательно, $S_x = \frac{64}{3}\pi a^2$. ●

41.6. Механические приложения определенного интеграла

Работа переменной силы

Пусть материальная точка M перемещается вдоль оси Ox под действием переменной силы $F = F(x)$, направленной параллельно этой оси. Работа, произведенная силой при перемещении точки M из положения $x = a$ в положение $x = b$ ($a < b$), находится по формуле

$$A = \int_a^b F(x)\,dx \tag{41.10}$$

(см. п. 36).

Пример 41.10. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

❍ Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т. е. $F = kx$, где k — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила $F = 100$ Н растягивает пружину на $x = 0{,}01$ м; следовательно, $100 = k\cdot 0{,}01$, откуда $k = 10000$; следовательно, $F = 10000x$.

Искомая работа на основании формулы (41.10) равна

$$A = \int_0^{0,05} 10000x\,dx = 5000x^2\Big|_0^{0,05} = 12,5 \text{ (Дж).}$$

Пример 41.11. Найти работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать через край жидкость из вертикального цилиндрического резервуара высоты H м и радиусом основания R м.

Решение: Работа, затрачиваемая на поднятие тела весом p на высо ту h, равна $p \cdot h$. Но различные слои жидкости в резервуаре находятс на различных глубинах и высота поднятия (до края резервуара) ра личных слоев не одинакова.

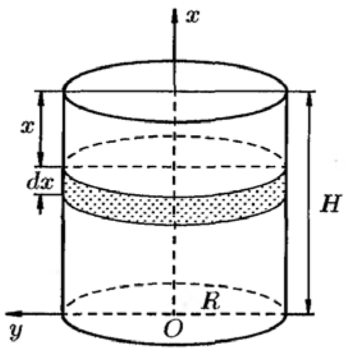


Рис. 192

Для решения поставленной задач применим схему II (метод дифференциа ла). Введем систему координат так, ка указано на рисунке 192.

1. Работа, затрачиваемая на выкачи вание из резервуара слоя жидкости тол щиной x $(0 \leqslant x \leqslant H)$, есть функция от x, т. е. $A = A(x)$, где $0 \leqslant x \leqslant H$ $(A(0) = 0$, $A(H) = A_0)$.

2. Находим главную часть прираще ния ΔA при изменении x на величин $\Delta x = dx$, т. е. находим дифференциал dA функции $A(x)$.

Ввиду *малости dx считаем, что «элементарный» слой жидкости находится на одной глубине x* (от края резервуара) (см. рис. 192). Тогда $dA = dp \cdot x$, где dp — вес этого слоя; он равен $g \cdot \gamma\, dv$, где g — уско рение свободного падения, γ — плотность жидкости, dv — объем «эле ментарного» слоя жидкости (на рисунке он выделен), т. е. $dp = g\gamma\, dv$. Объем указанного слоя жидкости, очевидно, равен $\pi R^2\, dx$, где dx — вы сота цилиндра (слоя), πR^2 — площадь его основания, т. е. $dv = \pi R^2\, dx$.

Таким образом, $dp = g\gamma \cdot \pi R^2\, dx$ и $dA = g\gamma\pi R^2\, dx \cdot x$.

3) Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = 0$ до $x = H$, находим

$$A_0 = \int_0^H g\gamma\pi R^2 x\,dx = \frac{1}{2} g\gamma\pi R^2 H^2 \quad \text{(Дж).}$$

Путь, пройденный телом

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменно скоростью $v = v(t)$. Найдем путь S, пройденный ею за промежуто времени от t_1 до t_2.

Решение: Из физического смысла производной известно, что при движении точки в одном направлении «скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени», т. е. $v(t) = \frac{dS}{dt}$. Отсюда следует, что $dS = v(t)\,dt$. Интегрируя полученное равенство в пределах от t_1 до t_2, получаем $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$.

Отметим, что эту же формулу можно получить, пользуясь схемой I или II применения определенного интеграла.

Пример 41.12. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела $v(t) = 10t + 2$ (м/с).

Решение: Если $v(t) = 10t + 2$ (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения $(t = 0)$ до конца 4-й секунды, равен

$$S = \int_0^4 (10t + 2)\,dt = 5t^2\Big|_0^4 + 2t\Big|_0^4 = 80 + 8 = 88 \quad \text{(м).}$$

Давление жидкости на вертикальную пластинку

По закону Паскаля давление жидкости на горизонтальную пластину равно весу столба этой жидкости, имеющего основанием пластинку, а высотой — глубину ее погружения от свободной поверхности жидкости, т. е. $P = g \cdot \gamma \cdot S \cdot h$, где g — ускорение свободного падения, γ — плотность жидкости, S — площадь пластинки, h — глубина ее погружения.

По этой формуле нельзя искать давление жидкости на вертикально погруженную пластинку, так как ее разные точки лежат на разных глубинах.

Пусть в жидкость погружена вертикально пластина, ограниченная линиями $x = a$, $x = b$, $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$; система координат выбрана так, как указано на рисунке 193. Для нахождения давления P жидкости на эту пластину применим схему II (метод дифференциала).

1. Пусть часть искомой величины P есть функция от x: $p = p(x)$, т. е. $p = p(x)$ — давление на часть пластины, соответствующее отрезку $[a; x]$ значений переменной x, где $x \in [a; b]$ $(p(a) = 0,\ p(b) = P)$.

2. Дадим аргументу x приращение $\Delta x = dx$. Функция $p(x)$ получит приращение Δp (на рисунке — полоска-слой толщины dx). Найдем дифференциал dp этой функции. Ввиду малости dx будем приближенно считать полоску прямоугольником, *все точки которого находятся на одной глубине x, т. е. пластинка эта — горизонтальная.*

Тогда по закону Паскаля $dp = g \cdot \gamma \underbrace{(y_2 - y_1) \cdot dx}_{S} \cdot \underbrace{x}_{h}$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, получим

$$P = g \cdot \gamma \int_a^b (y_2 - y_1)x\,dx \quad \text{или} \quad P = g\gamma \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \cdot x\,dx.$$

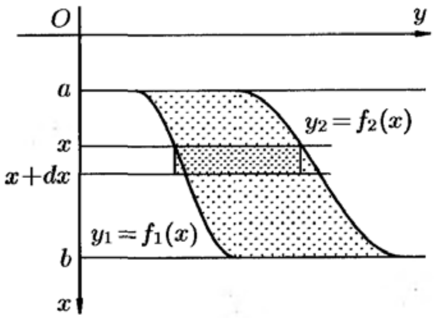


Рис. 193

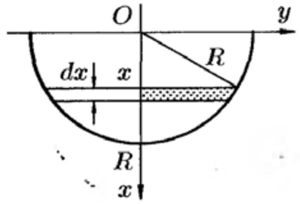


Рис. 194

Пример 41.13. Определить величину давления воды на полукруг, вертикально погруженный в жидкость, если его радиус R, а центр O находится на свободной поверхности воды (см. рис. 194).

Решение: Воспользуемся полученной формулой для нахождения давления жидкости на вертикальную пластинку. В данном случае пластинка ограничена линиями $y_1 = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $y_2 = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x = 0$, $x = R$. Поэтому

$$P = g\gamma \int_0^R \left(\sqrt{R^2 - x^2} - \left(-\sqrt{R^2 - x^2}\right)\right)x\,dx =$$

$$= 2g\gamma \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,x\,dx = 2g\gamma \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^R (R^2 - x^2)^{1/2}\,d(R^2 - x^2) =$$

$$= -g\gamma \cdot \frac{2\sqrt{(R^2 - x^2)^3}}{3}\Big|_0^R = -\frac{2}{3}g\gamma(0 - R^3) = \frac{2}{3}g\gamma R^3.$$

Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской кривой

Пусть на плоскости Oxy задана система материальных точек $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2), \ldots,$ $M_n(x_n; y_n)$ соответственно с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Статическим моментом S_x системы материальных точек относительно оси Ox называется сумма произведений масс этих точек на их ординаты (т. е. на расстояния этих точек от оси Ox): $S_x = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i$.

Аналогично определяется *статический момент* S_y этой системы относительно оси Oy: $S_y = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i$.

Если массы распределены непрерывным образом вдоль некоторой кривой, то для выражения статического момента понадобится интегрирование.

Пусть $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ — это уравнение материальной кривой AB. Будем считать ее однородной с постоянной линейной плотностью γ $(\gamma = \text{const})$.

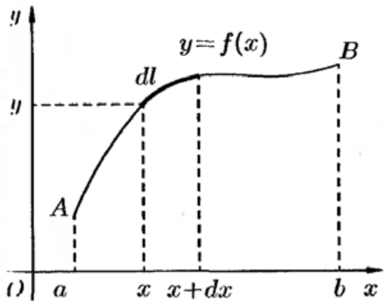


Рис. 195

Для произвольного $x \in [a; b]$ на кривой AB найдется точка с координатами $(x; y)$. Выделим на кривой элементарный участок длины dl, содержащий точку $(x; y)$. Тогда масса этого участка равна $\gamma\,dl$. Примем этот участок dl *приближенно за точку*, отстоящую от оси Ox на расстоянии y. Тогда дифференциал статического момента dS_x («элементарный момент») будет равен $\gamma\,dl \cdot y$, т. е. $dS_x = \gamma\,dl \cdot y$ (см. рис. 195).

Отсюда следует, что статический момент S_x кривой AB относительно оси Ox равен

$$S_x = \gamma \int_a^b y\,dl = \gamma \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2}\,dx.$$

Аналогично находим S_y:

$$S_y = \gamma \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2}\,dx.$$

Статические моменты S_x и S_y кривой позволяют легко установить положение ее центра тяжести (центра масс).

Центром тяжести материальной плоской кривой $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ называется точка плоскости, обладающая следующим свойством: если в этой точке сосредоточить всю массу m заданной кривой, то статический момент этой точки относительно любой координатной оси будет равен статическому моменту всей кривой $y = f(x)$ относительно той же оси. Обозначим через $C(x_c; y_c)$ центр тяжести кривой AB.

Из определения центра тяжести следуют равенства $m \cdot x_c = S_y$ и $m \cdot y_c = S_x$ или $\gamma l \cdot x_c = S_y$ и $\gamma l \cdot y_c = S_x$. Отсюда $x_c = \dfrac{S_y}{\gamma l}$, $y_c = \dfrac{S_x}{\gamma l}$ или

$$x_c = \frac{\int_a^b x\,dl}{l} = \frac{\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx}; \quad y_c = \frac{\int_a^b y\,dl}{l} = \frac{\int_a^b y\cdot\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx}.$$

Пример 41.14. Найти центр тяжести однородной дуги окружно сти $x^2+y^2=R^2$, расположенной в первой координатной четверти (с рис. 196).

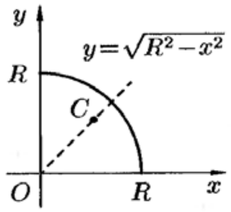


Рис. 196

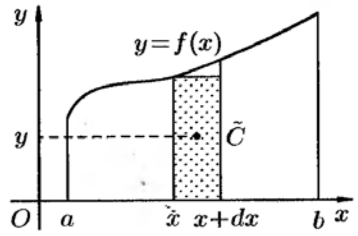


Рис. 197

○ Решение: Очевидно, длина указанной дуги окружности равна $\frac{\pi R}{2}$ т. е. $l=\frac{\pi R}{2}$. Найдем статический момент ее относительно оси Ox. Та как уравнение дуги есть $y=\sqrt{R^2-x^2}$ и $y'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, то ($\gamma = $ cons

$$S_x = \gamma\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \gamma\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = \gamma R\int_0^R dx = \gamma Rx\Big|_0^R = \gamma R^2.$$

Стало быть,
$$y_c = \frac{S_x}{\gamma l} = \frac{\gamma R^2}{\gamma\cdot\frac{\pi R}{2}} = \frac{2R}{\pi}.$$

Так как данная дуга симметрична относительно биссектрисы перво го координатного угла, то $x_c = y_c = \frac{2R}{\pi}$. Итак, центр тяжести име координаты $\left(\frac{2R}{\pi};\frac{2R}{\pi}\right)$.

Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской фигуры

Пусть дана материальная плоская фигура (пластинка), ограниче ная кривой $y=f(x)\geqslant 0$ и прямыми $y=0$, $x=a$, $x=b$ (см. рис. 197).

Будем считать, что поверхностная плотность пластинки постоянна ($\gamma = \mathrm{const}$). Тогда масса всей пластинки равна $\gamma\cdot S$, т. е. $m=\gamma\int_a^b f(x)\,dx$.

Выделим элементарный участок пластинки в виде бесконечно узкой вертикальной полосы и будем приближенно считать его прямоугольником.

Тогда масса его равна $\gamma\cdot y\,dx$. Центр тяжести $\tilde{C}$ прямоугольника лежит на пересечении диагоналей прямоугольника. Эта точка $\tilde{C}$ отстоит от оси Ox на $\frac{1}{2}y$, а от оси Oy на x (приближенно; точнее на расстоянии $x+\frac{1}{2}\Delta x$). Тогда для элементарных статических моментов относительно осей Ox и Oy выполнены соотношения

$$dS_x = \gamma\cdot y\,dx\cdot\frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\gamma\cdot y^2\,dx \quad \text{и} \quad dS_y = \gamma\cdot y\,dx\cdot x = \gamma xy\,dx.$$

Следовательно, $S_x = \frac{1}{2}\gamma\int_a^b y^2\,dx$, $S_y = \gamma\int_a^b xy\,dx$.

По аналогии с плоской кривой получаем, обозначив координаты центра тяжести плоской фигуры (пластинки) через $C(x_c;y_c)$, что $m\cdot x_c = S_y$, $m\cdot y_c = S_x$. Отсюда

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{S_y}{\gamma S} \quad \text{и} \quad y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{S_x}{\gamma S}$$

или

$$x_c = \frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{\int_a^b y\,dx}.$$

Пример 41.15. Найдем координаты центра тяжести полукруга $x^2+y^2\leqslant R^2$, $y\geqslant 0$ ($\gamma = \mathrm{const}$) (см. рис. 198).

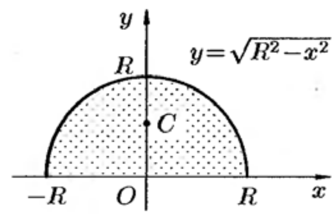


Рис. 198

○ Решение: Очевидно (ввиду симметрии фигуры относительно оси Oy), что $x_c=0$. Площадь полукруга равна $\frac{\pi R^2}{2}$. Находим S_x:

$$S_x = \frac{1}{2}\gamma\int_{-R}^{R}(\sqrt{R^2-x^2})^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} = \frac{1}{2}\gamma\left(R^3+R^3-\frac{R^3}{3}-\frac{R^3}{3}\right) = \gamma\cdot\frac{2}{3}R^3.$$

Стало быть,

$$y_c = \frac{S_x}{\gamma S} = \frac{2\gamma R^3}{3\gamma \frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}.$$

Итак, центр тяжести имеет координаты $C\left(0; \frac{4R}{3\pi}\right)$.

§ 42. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть требуется найти определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ от непр

рывной функции $f(x)$. Если можно найти первообразную $F(x)$ функци $f(x)$, то интеграл вычисляется по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Но отыскание первообразной функции иногда весьма сложно; кро ме того, как известно, не для всякой непрерывной функции ее перво образная выражается через элементарные функции. В этих и други случаях (например, функция $y = f(x)$ задана графически или таблич но) прибегают к приближенным формулам, с помощью которых опре деленный интеграл находится с любой степенью точности.

Рассмотрим три наиболее употребительные формулы приближен ного вычисления определенного интеграла — формулу прямоугольни ков, формулу трапеций, формулу парабол (Симпсона), основанные н геометрическом смысле определенного интеграла.

42.1. Формула прямоугольников

Пусть на отрезке $[a;b]$, $a < b$, задана непрерывная функция $f(x$ Требуется вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, численно равный площад соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание это трапеции, т. е. отрезок $[a;b]$, на n равных частей (отрезков) длин $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ (*шаг разбиения*) с помощью точек $x_0 =$ $x_1, x_2, \ldots, x_n = b$. Можно записать, что $x_i = x_0 + h \cdot i$, где $i = 1, 2, \ldots,$ (см. рис. 199).

В середине $c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ каждого такого отрезка построим орди нату $\tilde{y}_i = f(c_i)$ графика функции $y = f(x)$. Приняв эту ординату з высоту, построим прямоугольник с площадью $h \cdot \tilde{y}_i$.

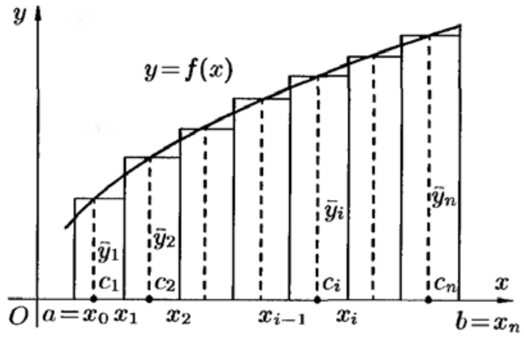


Рис. 199

Тогда сумма площадей всех n прямоугольников дает площадь ступенчатой фигуры, представляющую собой приближенное значение искомого определенного интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx h(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \ldots + \tilde{y}_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right). \qquad (42.1)$$

Формула (42.1) называется ***формулой средних прямоугольников***.

Абсолютная погрешность приближенного равенства (42.1) оценивается с помощью следующей формулы:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2},$$

где M_2 — наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a;b]$,

$$|R_n| = \left| \int\limits_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \right|.$$

Отметим, что для линейной функции ($f(x) = kx + b$) формула (42.1) дает точный ответ, поскольку в этом случае $f''(x) = 0$.

42.2. Формула трапеций

Формулу трапеций получают аналогично формуле прямоугольников: на каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной.

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$. Абсциссы точек деления $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, b = x_n$ (рис. 200). Пусть $y_0, y_1, \ldots, y_n$ — соответствующие им ординаты графика функции. Тогда

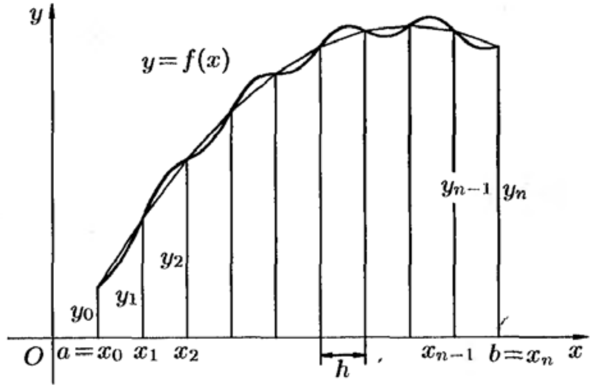


Рис. 200

расчетные формулы для этих значений примут вид $x_i = a + h \cdot i$, $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$; $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Заменим кривую $y = f(x)$ ломаной линией, звенья которой соединяют концы ординат y_i и y_{i+1} ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$). Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей обычных трапеций с основаниями y_i, y_{i+1} и высотой $h = \dfrac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}\cdot h + \frac{y_1+y_2}{2}\cdot h + \cdots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\cdot h$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\Big(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\Big). \qquad (42.2)$$

Формула (42.2) называется ***формулой трапеций.***

Абсолютная погрешность R_n приближения, полученного по формуле трапеций, оценивается с помощью формулы $|R_n| \leqslant \dfrac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M_2$, где $M_2 = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f''(x)|$. Снова для линейной функции $y = kx + b$ формула (42.2) — точная.

42.3. Формула парабол (Симпсона)

Если заменить график функции $y = f(x)$ на каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ разбиения не отрезками прямых, как в методах трапеций и прямоугольников, а дугами парабол, то получим более точную формулу приближенного вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Предварительно найдем площадь S криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком параболы $y = ax^2 + bx + c$, сбоку — прямыми $x = -h$, $x = h$ и снизу — отрезком $[-h; h]$.

Пусть парабола проходит через три точки $M_1(-h; y_0)$, $M_2(0; y_1)$, $M_3(h; y_2)$, где $y_0 = ah^2 - bh + c$ — ордината параболы в точке $x = -h$; $y_1 = c$ — ордината параболы в точке $x = 0$; $y_2 = ah^2 + bh + c$ — ордината параболы в точке $x = h$ (см. рис. 201). Площадь S равна

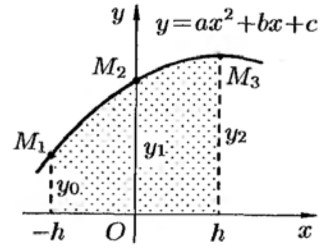


Рис. 201

$$S = \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\,dx =$$
$$= \Big(a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\Big)\Big|_{-h}^{h} = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch. \qquad (42.3)$$

Выразим эту площадь через h, y_0, y_1, y_2. Из равенств для ординат y_i находим, что $c = y_1$, $a = \dfrac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$. Подставляя эти значения c и a в равенство (42.3), получаем

$$S = \frac{2}{3}h^3\cdot\frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + 2h\cdot y_1 =$$
$$= \frac{h}{3}(y_0 - 2y_1 + y_2) + 2hy_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \qquad (42.4)$$

Получим теперь формулу парабол для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Для этого отрезок $[a; b]$ разобьем на $2n$ равных частей (отрезков) длиной $h = \dfrac{b-a}{2n}$ точками $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, 2n$). В точках деления $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n} = b$ вычисляем значения подынтегральной функции $f(x)$: $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$, где $y_i = f(x_i)$ (см. рис. 202).

Заменяем каждую пару соседних элементарных криволинейных трапеций с основаниями, равными h, одной элементарной параболической трапецией с основанием, равным $2h$. На отрезке $[x_0; x_2]$ парабола проходит через три точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$. Используя формулу (42.4), находим

$$S_1 = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

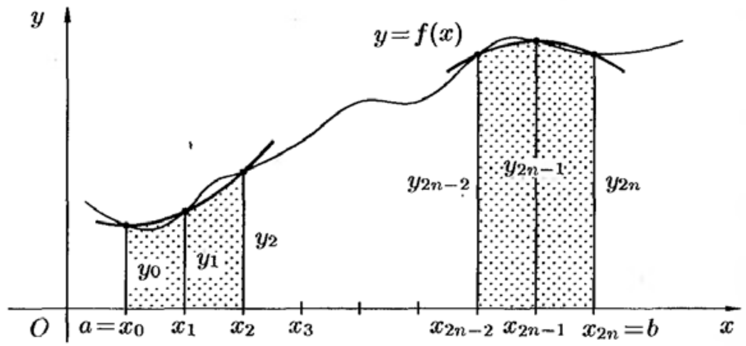


Рис. 202

Аналогично находим

$$S_2 = \int\limits_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),\ \ldots,$$

$$S_n = \int\limits_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Сложив полученные равенства, имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\Big((y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + {}$$
$$+ 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})\Big). \quad (42.5$$

Формула (42.5) называется ***формулой парабол*** (или Симпсона)

Абсолютная погрешность вычисления по формуле (42.5) оценива-ется соотношением

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^5}{180 \cdot (2n)^4} \cdot M_4, \quad \text{где } M_4 = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{IV}(x)|.$$

Отметим, что формула (42.5) дает точное значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,d$ во всех случаях, когда $f(x)$ — многочлен, степень которого меньше ил равна трем (тогда $f^{IV} = 0$).

Пример 42.1. Вычислить $\int\limits_0^2 x^3\,dx$, разбив отрезок интегрирования $[0; 2]$ на 4 части.

Решение: Имеем: $f(x) = x^3$,

$$a = x_0 = 0;\quad b = x_4 = 2,\quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$x_0 = 0,\quad y_0 = 0;\quad x_1 = \frac{1}{2},\quad y_1 = \frac{1}{8};\quad x_2 = 1,\quad y_2 = 1;$$

$$x_3 = \frac{3}{2},\quad y_3 = \frac{27}{8};\quad x_4 = 2,\quad y_4 = 8;$$

(см. рис. 203)

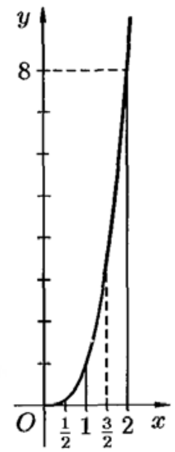


Рис. 203

а) по формуле прямоугольников:

$$c_1 = \frac{1}{4},\quad \tilde{y}_1 = \frac{1}{64};\quad c_2 = \frac{3}{4},\quad \tilde{y}_2 = \frac{27}{64};$$
$$c_3 = \frac{5}{4},\quad \tilde{y}_3 = \frac{125}{64};\quad c_4 = \frac{7}{4},\quad \tilde{y}_4 = \frac{343}{6},$$

$$\int\limits_0^2 x^3\,dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{64} + \frac{27}{64} + \frac{125}{64} + \frac{343}{64}\right) = 3{,}875,\ \text{т. е.}\ \int\limits_0^2 x^3\,dx \approx 3{,}875;$$

б) по формуле трапеции:

$$\int\limits_0^2 x^3\,dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{0+8}{2} + \frac{1}{8} + 1 + \frac{27}{8}\right) = 4{,}25, \quad \text{т. е.} \quad \int\limits_0^2 x^3\,dx \approx 4{,}25;$$

в) по формуле парабол:

$$\int\limits_0^2 x^3\,dx \approx \frac{2}{6 \cdot 2}\left(0 + 8 + 4\left(\frac{1}{8} + \frac{27}{8}\right) + 2 \cdot 1\right) = 4, \quad \text{т. е.} \quad \int\limits_0^2 x^3\,dx \approx 4.$$

Точное значение интеграла $\int\limits_0^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 4.$

Абсолютные погрешности соответствующих формул таковы: а) 0,125; б) 0,25; в) 0.

Глава X. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лекции 37–43

§ 47. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

47.1. Основные понятия

При решении различных задач математики, физики, химии и других наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такие уравнения называются ***дифференциальными*** (термин принадлежит Г. Лейбницу, 1676 г.). ***Решением*** дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Так, решением уравнения $y' = f(x)$ является функция $y = F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$.

Рассмотрим некоторые общие сведения о дифференциальных уравнениях (ДУ).

Если искомая (неизвестная) функция зависит от одной переменной, то ДУ называют *обыкновенным*; в противном случае — ДУ *в частных производных*. Далее будем рассматривать только обыкновенные ДУ.

Наивысший порядок производной, входящей в ДУ, называется *порядком* этого уравнения.

Например, уравнение $y''' - 3y'' + 2y = 0$ — обыкновенное ДУ третьего порядка, а уравнение $x^2y' + 5xy = y^2$ — первого порядка; $y \cdot z'_x = x \cdot z'_y$ — ДУ в частных производных первого порядка.

Процесс отыскания решения ДУ называется его *интегрированием*, а график решения ДУ — *интегральной кривой*.

Рассмотрим некоторые задачи, решение которых приводит к дифференциальным уравнениям.

47.2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Задача 1

Материальная точка массы m замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости V. Найти зависимость скорости от времени. Найти скорость точ через 3 с после начала замедления, если $V(0)=100$ м/с, а $V(1)=50$ м

❍ Решение: Примем за независимую переменную время t, отсчитыв емое от начала замедления движения материальной точки. Тогда ск рость точки V будет функцией t, т. е. $V=V(t)$. Для нахождения V воспользуемся вторым законом Ньютона (основным законом механ ки): $m\cdot a=F$, где $a=V'(t)$ — есть ускорение движущегося тела, F — результирующая сила, действующая на тело в процессе движения.

В данном случае $F=-kV^2$, $k>0$ — коэффициент пропорционал ности (знак минус указывает на то, что скорость тела уменьшается Следовательно, функция $V=V(t)$ является решением дифференци ального уравнения $m\cdot V'=-k\cdot V^2$ или $V'=-\frac{k}{m}V^2$. Здесь m — мас тела.

Как будет показано ниже (пример 48.5), $V=\dfrac{1}{\frac{k}{m}\cdot t+c}$, где c — const. Найдя зависимость скорости от времени, легко найти скорост точки через 3 с после начала замедления.

Найдем сначала параметры $\frac{k}{m}$ и c. Согласно условию задачи, име ем: $V(0)=\frac{1}{c}=100$ и $V(1)=\dfrac{1}{\frac{k}{m}+c}=50$. Отсюда $c=\frac{1}{100}$, $\frac{k}{m}=\frac{1}{100}$. Следовательно, скорость точки изменяется по закону $V=\frac{100}{t+1}$. По этому $V(3)=25$ м/с.

Задача 2

Найти кривую, проходящую через точку $(4;1)$, зная, что отрезок любой касательной к ней, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

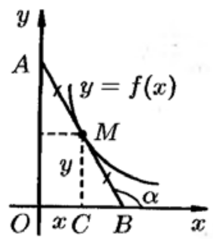


Рис. 212

❍ Решение: Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка кривой, уравнение которой $y=f(x)$. Для определенности предположим, что кривая расположена в первой четверти (см. рис. 212).

Для составления дифференциального уравнения воспользуемся геометрическим смыслом первой производной: $\operatorname{tg}\alpha$ есть угловой коэффициент касательной; в точке $M(x;y)$ он равен y', т. е. $y'=\operatorname{tg}\alpha$.

Из рисунка видно, что $\operatorname{tg}(\angle MBC)=\frac{MC}{BC}$. Но

$$\operatorname{tg}(\angle MBC)=\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,$$

$MC=y$. По условию задачи $AM=MB$, следовательно, $OC=CB=x$.

Таким образом, получаем $-\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$ или $y'=-\frac{y}{x}$. Решением по- ченного дифференциального уравнения является функция $y=\frac{4}{x}$ (гипербола). Решение будет приведено в п. 48.2 (пример 48.4). ●

Другие задачи

Можно показать, что:

- закон изменения массы радия в зависимости от времени («радиоактивный распад») описывается дифференциальным уравнением $\frac{dm}{dt}=-k\cdot m$, где $k>0$ — коэффициент пропорциональности, $m(t)$ — масса радия в момент t;
- «закон охлаждения тел», т. е. закон изменения температуры тела в зависимости от времени, описывается уравнением $\frac{dT}{dt}=k(T-t_0)$, где $T(t)$ — температура тела в момент времени t, k — коэффициент пропорциональности, t_0 — температура воздуха (среды охлаждения);
- зависимость массы x вещества, вступившего в химическую реакцию, от времени t во многих случаях описывается уравнением $\frac{dx}{dt}=k\cdot x$, где k — коэффициент пропорциональности;
- «закон размножения бактерий» (зависимость массы m бактерий от времени t) описывается уравнением $m'_t=k\cdot m$, где $k>0$;
- закон изменения давления воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря описывается уравнением $\frac{dp}{dh}=-k\cdot p$, где $p(h)$ — атмосферное давление воздуха на высоте h, $k>0$.

Уже приведенные примеры указывают на исключительно важную роль дифференциальных уравнений при решении самых разнообразных задач.

§ 48. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

48.1. Основные понятия

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае можно записать в виде

$$F(x;y;y')=0. \tag{48.1}$$

Уравнение связывает независимую переменную x, искомую функцию y и ее производную y'. Если уравнение (48.1) можно разрешить относительно y', то его записывают в виде

$$y' = f(x;y) \tag{48.2}$$

и называют *ДУ первого порядка, разрешенным относительно производной*. Мы в основном будем рассматривать эту форму записи ДУ.

Уравнение (48.2) устанавливает связь (зависимость) между координатами точки $(x;y)$ и угловым коэффициентом y' касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Следовательно, ДУ $y' = f(x;y)$ дает совокупность направлений (*поле направлений*) на плоскости Oxy. Таково геометрическое истолкование ДУ первого порядка.

Кривая, во всех точках которой направление поля одинаково, называется *изоклиной*. Изоклинами можно пользоваться для приближенного построения интегральных кривых. Уравнение изоклины можно получить, если положить $y' = c$, т. е. $f(x;y) = c$.

Пример 48.1. С помощью изоклин начертить вид интегральных кривых уравнения $y' = 2x$.

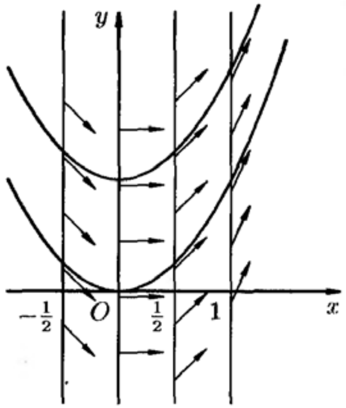


Рис. 213

Решение: Уравнение изоклин этого ДУ будет $2x = c$, т. е. изоклинами здесь будут прямые, параллельные оси Oy $\left(x = \frac{c}{2}\right)$. В точках прямых проведем отрезки, образующие с осью Ox один и тот же угол α, тангенс которого равен c.

Так, при $c = 0$ имеем $x = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$, поэтому $\alpha = 0$;

при $c = 1$ уравнение изоклины $x = \frac{1}{2}$, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = 1$ и $\alpha = 45°$;

при $c = -1$: $x = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\alpha = -45°$;

при $c = 2$: $x = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63°$ и т. д.

Построив четыре изоклины и отметив на каждой из них ряд стрелочек, наклоненных к оси Ox под определенным углом (см. рис. 213), по их направлениям строим линии. Они, как видно, представляют собой семейство парабол. ●

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, можно записать в *дифференциальной форме*:

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = 0, \tag{48.3}$$

где $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ — известные функции. Уравнение (48.3) удобно тем, что переменные x и y в нем равноправны, т. е. любую из них можно рассматривать как функцию другой. Отметим, что от одного вида записи ДУ можно перейти к другому.

Интегрирование ДУ в общем случае приводит к бесконечному множеству решений (отличающихся друг от друга постоянными величинами). Легко догадаться, что решением уравнения $y' = 2x$ является функция $y = x^2$, а также $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - \sqrt{2}$ и вообще $y = x^2 + c$, где c — const.

Чтобы решение ДУ приобрело конкретный смысл, его надо подчинить некоторым дополнительным условиям.

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна быть равна заданному числу y_0, т. е. $y = y_0$ называется *начальным условием*. Начальное условие записывается в виде

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{или} \quad y\Big|_{x=x_0} = y_0. \tag{48.4}$$

Общим решением ДУ первого порядка называется функция $y = \varphi(x;c)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

1. Функция $\varphi(x;c)$ является решением ДУ при каждом фиксированном значении c.

2. Каково бы ни было начальное условие (48.4), можно найти такое значение постоянной $c = c_0$, что функция $y = \varphi(x;c_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Частным решением ДУ первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x;c_0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x;c)$ при конкретном значении постоянной $c = c_0$.

Если общее решение ДУ найдено в неявном виде, т. е. в виде уравнения $\Phi(x;y;c) = 0$, то такое решение называется *общим интегралом* ДУ. Уравнение $\Phi(x;y;c_0) = 0$ в этом случае называется *частным интегралом* уравнения.

С геометрической точки зрения $y = \varphi(x;c)$ есть семейство интегральных кривых на плоскости Oxy; частное решение $y = \varphi(x;c_0)$ — одна кривая из этого семейства, проходящая через точку $(x_0;y_0)$.

Задача отыскания решения ДУ первого порядка (48.3), удовлетворяющего заданному начальному условию (48.4), называется ***задачей Коши***.

Теорема 48.1 (существования и единственности решения задачи Коши). Если в уравнении (48.2) функция $f(x;y)$ и ее частная производная $f'_y(x;y)$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку $(x_0;y_0)$, то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию (48.4).

(Без доказательства).

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что при выполнен[ии] ее условий существует единственная интегральная кривая ДУ, про[хо]дящая через точку $(x_0; y_0)$.

Рассмотрим теперь методы интегрирования ДУ первого поряд[ка] определенного типа.

48.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Наиболее простым ДУ первого порядка является, уравнение ви[да]

$$P(x) \cdot dx + Q(y) \cdot dy = 0. \qquad (48[.5])$$

В нем одно слагаемое зависит только от x, а другое — от y. Ино[гда] такие ДУ называют уравнениями *с разделенными переменными*. П[ро]интегрировав почленно это уравнение, получаем:

$$\int P(x) \cdot dx + \int Q(y) \cdot dy = c$$

— его общий интеграл.

Пример 48.2. Найти общий интеграл уравнения $x \cdot dx + y \cdot dy = 0$.

○ Решение: Данное уравнение есть ДУ с разделенными переменным[и]. Поэтому $\int x \cdot dx - \int y \cdot dy = c_1$ или $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c_1$. Обозначим $\frac{c}{2} = c_1$. Тогда $x^2 - y^2 = c$ — общий интеграл ДУ.

Более общий случай описывают уравнения с *разделяющимися пе[-]ременными*, которые имеют вид

$$\boxed{P_1(x) \cdot Q_1(y) \cdot dx + P_2(x) \cdot Q_2(y) \cdot dy = 0.} \qquad (48.6)$$

Особенность уравнения (48.6) в том, что коэффициенты при dx и dy представляют собой произведения двух функций (чисел), одна из которых зависит только от x, другая — только от y.

Уравнение (48.6) легко сводится к уравнению (48.5) путем почленного деления его на $Q_1(y) \cdot P_2(x) \neq 0$. Получаем:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} \cdot dy = 0, \qquad \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} \cdot dy = c$$

— общий интеграл.

Замечания. 1. При проведении почленного деления ДУ на $Q_1(y) \times$ $\times P_2(x)$ могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует отдельно решить уравнение $Q_1(y) \cdot P_2(x) = 0$ и установить те решения ДУ, которые не могут быть получены из общего решения, — ***особые решения***.

2. Уравнение $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ также сводится к уравнению с разделенными переменными. Для этого достаточно положить $y' = \frac{dy}{dx}$ и разделить переменные.

3. Уравнение $y' = f(ax + by + c)$, где a, b, c — числа, путем замены $ax + by + c = u$ сводится к ДУ с разделяющимися переменными. Дифференцируя по x, получаем:

$$\frac{du}{dx} = a + b \cdot \frac{dy}{dx}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{du}{dx} = a + b \cdot f(u),$$

откуда следует

$$\frac{du}{a + b \cdot f(u)} = dx.$$

Интегрируя это уравнение и заменяя u на $ax + by + c$, получим общий интеграл исходного уравнения.

Пример 48.3. Решить уравнение $(y + xy) \cdot dx + (x - xy) \cdot dy = 0$.

○ Решение: Преобразуем левую часть уравнения:

$$y \cdot (1 + x) \cdot dx + x \cdot (1 - y) \cdot dy = 0.$$

Оно имеет вид (48.6). Делим обе части уравнения на $xy \neq 0$:

$$\frac{1+x}{x} dx + \frac{1-y}{y} dy = 0.$$

Решением его является общий интеграл $x + \ln|x| + \ln|y| - y = c$, т. е. $\ln|xy| + x - y = c$.

Здесь уравнение $Q_1(y) \cdot P_2(x) = 0$ имеет вид $xy = 0$. Его решения $x = 0$, $y = 0$ являются решениями данного ДУ, но не входят в общий интеграл. Значит, решения $x = 0$, $y = 0$ являются особыми. ●

Пример 48.4. Решить уравнение $y' = -\frac{y}{x}$, удовлетворяющее условию $y(4) = 1$.

○ Решение: Этот пример представляет собой решение задачи 2 из п. 47.2.

Имеем: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ или $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$. Проинтегрировав, получим:

$$\ln|y| = \ln|c| - \ln|x|,$$

т. е. $y = \frac{c}{x}$ — общее решение ДУ.

Оно представляет собой, геометрически, семейство равносторонних гипербол. Выделим среди них одну, проходящую через точку (4; 1). Подставим $x = 4$ и $y = 1$ в общее решение уравнения: $1 = \frac{c}{4}$, $c = 4$.

Получаем: $y = \frac{4}{x}$ — частное решение уравнения $y' = -\frac{y}{x}$. ●

Пример 48.5. Найти общее решение ДУ $m \cdot V' = -k \cdot V^2$.

Решение: Этот пример демонстрирует решение задачи 1 из п. 47.2.

Приведем данное уравнение к виду (48.5):

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = -kV^2, \quad m \cdot dV + kV^2\,dt = 0, \quad \frac{dV}{V^2} + \frac{k}{m}\,dt = 0.$$

Интегрируем: $\int \frac{dV}{V^2} + \frac{k}{m}\int dt = -c$, т. е. $-\frac{1}{V} + \frac{k}{m}t + c = 0$. Отсюда $V = \dfrac{1}{\frac{k}{m}t + c}$ — общее решение уравнения.

48.3. Однородные дифференциальные уравнения

К уравнению с разделяющимися переменными приводятся однородные ДУ первого порядка.

Функция $f(x;y)$ называется *однородной функцией n-го порядка (измерения)*, если при умножении каждого ее аргумента на произвольный множитель λ вся функция умножится на λ^n, т. е.

$$f(\lambda \cdot x; \lambda \cdot y) = \lambda^n \cdot f(x;y).$$

Например, функция $f(x;y) = x^2 - 2xy$ есть однородная функция второго порядка, поскольку

$$f(\lambda \cdot x; \lambda \cdot y) = (\lambda x)^2 - 2(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 \cdot (x^2 - 2xy) = \lambda^2 \cdot f(x;y).$$

Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x;y) \tag{48.7}$$

называется ***однородным***, если функция $f(x;y)$ есть однородная функция нулевого порядка.

Покажем, что однородное ДУ (48.7) можно записать в виде

$$\boxed{y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).} \tag{48.8}$$

Если $f(x;y)$ — однородная функция нулевого порядка, то, по определению, $f(x;y) = f(\lambda x; \lambda y)$. Положив $\lambda = \frac{1}{x}$, получаем:

$$f(x;y) = f\left(\frac{x}{x}; \frac{y}{x}\right) = f\left(1; \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однородное уравнение (48.8) преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной (подстановки)

$$\boxed{\frac{y}{x} = u} \quad \text{или, что то же самое,} \quad \boxed{y = u \cdot x.} \tag{48.9}$$

Действительно, подставив $y = ux$ и $y' = u'x + u$ в уравнение (48.8), получаем $u'x + u = \varphi(u)$ или $x \cdot \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$, т. е. уравнение с разделяющимися переменными. Найдя его общее решение (или общий интеграл), следует заменить в нем u на $\frac{y}{x}$. Получим общее решение (интеграл) исходного уравнения.

Однородное уравнение часто задается в дифференциальной форме:

$$\boxed{P(x;y) \cdot dx + Q(x;y) \cdot dy = 0.} \tag{48.10}$$

ДУ (48.10) будет однородным, если $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ — однородные функции одинакового порядка.

Переписав уравнение (48.10) в виде $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x;y)}{Q(x;y)}$ и применив в правой части рассмотренное выше преобразование, получим уравнение $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

При интегрировании уравнений вида (48.10) нет необходимости предварительно приводить их (но можно) к виду (48.8): подстановка (48.9) сразу преобразует уравнение (48.10) в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 48.6. Найти общий интеграл уравнения

$$(x^2 - y^2) \cdot dx + 2xy \cdot dy = 0.$$

Решение: Данное уравнение однородное, т. к. функции $P(x;y) = x^2 - y^2$ и $Q(x;y) = 2xy$ — однородные функции второго порядка.

Положим $y = u \cdot x$. Тогда $dy = x \cdot du + u \cdot dx$. Подставляем в исходное уравнение:

$$(x^2 - u^2x^2) \cdot dx + 2x \cdot ux \cdot x \cdot du + 2x \cdot ux \cdot u \cdot dx,$$
$$x^2(1 - u^2 + 2u^2) \cdot dx + 2ux^3 \cdot du = 0,$$
$$(1 + u^2) \cdot dx + 2ux \cdot du = 0,$$

последнее — уравнение с разделяющимися переменными. Делим переменные

$$\frac{dx}{x} + \frac{2u}{1+u^2} \cdot du = 0$$

и интегрируем

$$\ln|x| + \ln(1 + u^2) = c_1, \quad \ln\big(|x| \cdot (1 + u^2)\big) = c_1, \quad |x|(1 + u^2) = e^{c_1}.$$

Обозначим $c = e^{c_1}$, $c > 0$. Тогда

$$|x| \cdot (1 + u^2) = c.$$

Заменяя u на $\frac{y}{x}$, получаем: $x^2 + y^2 = cx$ — общий интеграл исходного уравнения.

Отметим, что данное уравнение можно было сначала привести к виду (48.8):

$$x^2 - y^2 + 2xy \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}, \quad y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2 \cdot \frac{y}{x}}.$$

Затем положить $y = u \cdot x$, тогда $y' = u'x + u$ и т. д.

Замечание. Уравнение вида $y' = f\left(\dfrac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right)$, где a, b, c, a_1, b_1, c_1 — числа, приводится к однородному или с разделяющимися переменными. Для этого вводят новые переменные u и v, положив $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, где α и β — числа. Их подбирают так, чтобы уравнение стало однородным.

Пример 48.7. Найти общий интеграл уравнения

$$(x + 2y + 1) \cdot dx - (2x + y - 1) \cdot dy = 0,$$

т. е. $y' = \dfrac{x + 2y + 1}{2x + y - 1}$.

❍ Решение: Положив $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, получаем:

$$dx = du, \; dy = dv;$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} = \frac{u + \alpha + 2v + 2\beta + 1}{2u + 2\alpha + v + \beta - 1} = \frac{u + 2v + (\alpha + 2\beta + 1)}{2u + v + (2\alpha + \beta - 1)}.$$

Подберем α и β так, чтобы

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 1 = 0, \\ 2\alpha + \beta - 1 = 0. \end{cases}$$

Находим, что $\alpha = 1$, $\beta = -1$. Заданное уравнение примет вид

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + 2v}{2u + v}$$

и будет являться однородным. Его решение получается, как это было показано выше, при помощи подстановки $v = tu$. Заметим, что, решив его, следует заменить u и v соответственно на $x - 1$ и $y + 1$. В итоге получим $(y - x + 2)^3 = c(x + y)$ — общий интеграл данного уравнения.

48.4. Линейные уравнения. Уравнение Я. Бернулли

Дифференциальное уравнение первого порядка называется ***линейным***, если его можно записать в виде

$$y' + p(x) \cdot y = g(x), \tag{48.11}$$

где $p(x)$ и $g(x)$ — заданные функции, в частности — постоянные.

Особенность ДУ (48.11): искомая функция y и ее производная y' входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

Рассмотрим два метода интегрирования ДУ (48.11) — метод И. Бернулли и метод Лагранжа.

Метод И. Бернулли

Решение уравнения (48.11) ищется в виде произведения двух других функций, т. е. с помощью подстановки $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — неизвестные функции от x, причем одна из них произвольна (но не равна нулю — действительно любую функцию $y(x)$ можно записать как

$$y(x) = \frac{y(x)}{v(x)} \cdot v(x) = u(x) \cdot v(x),$$

где $v(x) \neq 0$). Тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставляя выражения y и y' в уравнение (48.11), получаем: $u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = g(x)$ или

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + p(x) \cdot v) = g(x). \tag{48.12}$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т. е. решим ДУ $v' + p(x) \cdot v = 0$. Итак, $\dfrac{dv}{dx} + p(x) \cdot v = 0$, т. е. $\dfrac{dv}{v} = -p(x) \cdot dx$. Интегрируя, получаем:

$$\ln|v| = -\int p(x) \cdot dx + \ln|c|.$$

Ввиду свободы выбора функции $v(x)$, можно принять $c = 1$. Отсюда

$$v = e^{-\int p(x) \cdot dx}.$$

Подставляя найденную функцию v в уравнение (48.12), получаем

$$u' \cdot e^{-\int p(x)\,dx} = g(x).$$

Получено уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx} = g(x), \quad du = g(x) \cdot e^{+\int p(x) \cdot dx} dx,$$

$$u = \int g(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx} dx + c.$$

Возвращаясь к переменной y, получаем решение

$$y = u \cdot v = \left(\int g(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx} dx + c\right) \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx} \tag{48.13}$$

исходного ДУ (48.11).

Пример 48.8. Проинтегрировать уравнение $y' + 2xy = 2x$.

❍ Решение: Полагаем $y = u \cdot v$. Тогда $u' \cdot v + u \cdot v' + 2x \cdot uv = 2x$, т. е. $u' \cdot v + u \cdot (v' + 2xv) = 2x$. Сначала решаем уравнение $v' + 2x \cdot v = 0$:

$$\frac{dv}{v} = -2x \cdot dx, \quad \ln|v| = -x^2, \quad v = e^{-x^2}.$$

Теперь решаем уравнение $u' \cdot e^{-x^2} + u \cdot 0 = 2x$, т. е.

$$\frac{du}{dx} = 2x \cdot e^{x^2}, \quad du = \int 2x \cdot e^{x^2} \cdot dx, \quad u = e^{x^2} + c.$$

Итак, общее решение данного уравнения есть $y = u \cdot v = (e^{x^2} + c) \cdot e^{-x^2}$, т. е. $y = 1 + c \cdot e^{-x^2}$. ●

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Уравнение (48.11) интегрируется следующим образом.

Рассмотрим соответствующее уравнение без правой части, т. е. уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$. Оно называется *линейным однородным ДУ первого порядка*. В этом уравнении переменные делятся:

$$\frac{dy}{y} = -p(x) \cdot dx \quad \text{и} \quad \ln|y| = -\int p(x) \cdot dx + \ln|c_1|.$$

Таким образом, $\left|\frac{y}{c_1}\right| = e^{-\int p(x) \cdot dx}$, т. е.

$$y = \pm c_1 e^{-\int p(x) \cdot dx} \quad \text{или} \quad y = c \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx}, \quad \text{где} \quad c = \pm c_1.$$

Метод вариации произвольной постоянной состоит в том, что постоянную c в полученном решении заменяем функцией $c(x)$, т. е. полагаем $c = c(x)$. Решение уравнения (48.11) ищем в виде

$$y = c(x) \cdot e^{-\int p(x)\, dx}. \tag{48.14}$$

Находим производную[1]:

$$y' = c'(x) \exp\Big(-\int p(x)\, dx\Big) + c(x) \exp\Big(-\int p(x)\, dx\Big) \cdot (-p(x)).$$

Подставляем значения y и y' в уравнение (48.11):

$$c'(x) \exp\Big(-\int p(x)\, dx\Big) - c(x)p(x) \exp\Big(-\int p(x)\, dx\Big) +$$
$$+ c(x)p(x) \exp\Big(-\int p(x)\, dx\Big) = g(x).$$

Второе и третье слагаемые взаимно уничтожаются, и уравнение примет вид

$$c'(x) \exp\Big(-\int p(x)\, dx\Big) = g(x).$$

Следовательно,

$$dc(x) = g(x) \exp\Big(\int p(x)\, dx\Big) \cdot dx.$$

Интегрируя, находим:

$$c(x) = \int g(x) \cdot \exp\Big(\int p(x)\, dx\Big) \cdot dx + c.$$

Подставляя выражение $c(x)$ в равенство (48.14), получим общее решение ДУ (48.11):

$$y = \Big[\int g(x) \cdot \exp\Big(\int p(x)\, dx\Big) \cdot dx + c\Big] \cdot \exp\Big(-\int p(x)\, dx\Big).$$

Естественно, та же формула была получена методом Бернулли (ср. с (48.13)).

Пример 48.9. Решить пример 48.8 методом Лагранжа.

[1] Для удобства записи пользуемся обозначением $e^{F(x)} = \exp(F(x))$.

◯ Решение: Решаем уравнение $y' + 2xy = 0$. Имеем $\frac{dy}{y} = -2x \cdot dx$, или $y = c \cdot e^{-x^2}$. Заменяем c на $c(x)$, т. е. решение ДУ $y' + 2xy = 2x$ ищем в виде $y = c(x) \cdot e^{-x^2}$. Имеем

$$y' = c'(x) \cdot e^{-x^2} + c(x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x).$$

Тогда

$c'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xc(x) \cdot e^{-x^2} + 2xc(x) \cdot e^{-x^2} = 2x$, т. е. $c'(x) \cdot e^{-x^2} = 2x$, или $c(x) = \int 2x \cdot e^{x^2} \cdot dx$, или $c(x) = e^{x^2} + c$. Поэтому $y = \big(e^{x^2} + c\big) \cdot e^{-x^2}$, или $y = 1 + c \cdot e^{-x^2}$ — общее решение данного уравнения. ●

Замечание. Уравнение вида $\big(x \cdot P(y) + Q(y)\big) \cdot y' = R(y)$, где $P(y)$, $Q(y)$, $R(y) \neq 0$ — заданные функции, можно свести к линейному, если x считать функцией, а y — аргументом: $x = x(y)$. Тогда, пользуясь равенством $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, получаем $\frac{x \cdot P(y) + Q(y)}{x'} = R(y)$, т. е. $x' - \frac{P(y)}{R(y)} \cdot x = \frac{Q(y)}{R(y)}$ — линейное относительно x уравнение. Его решение ищем в виде $x = u \cdot v$, где $u = u(y)$, $v = v(y)$ — две неизвестные функции.

Пример 48.10. Найти общее решение уравнения $(x + y) \cdot y' = 1$.

◯ Решение: Учитывая, что $y' = \frac{1}{x'}$, от исходного уравнения переходим к линейному уравнению $x' = x + y$.

Применим подстановку $x = u \cdot v$. Тогда $x' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Получаем: $u' \cdot v + u \cdot v' = u \cdot v + y$, или $u' \cdot v + u(v' - v) = y$.

Находим функцию v: $v' - v = 0$, $\frac{dv}{v} = dy$, $v = e^y$.

Находим функцию u: $u' \cdot e^y + u \cdot 0 = y$, т. е. $u' = y \cdot e^{-y}$, или $u = \int y \cdot e^{-y} \cdot dy$. Интегрируя по частям, находим: $u = -y \cdot e^{-y} - e^{-y} + c$.

Значит, общее решение данного уравнения:

$$x = u \cdot v = (-y \cdot e^{-y} - e^{-y} + c) \cdot e^y,$$

или $x = -y - 1 + c \cdot e^y$. ●

Уравнение Я. Бернулли

Уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = g(x) \cdot y^n, \; n \in \mathbb{R}, \; n \neq 0, \; n \neq 1 \tag{48.15}$$

называется ***уравнением Бернулли.*** Покажем, что его можно привести к линейному.

Если $n = 0$, то ДУ (48.15) — линейное, а при $n = 1$ — с разделяющимися переменными.

В общем случае, разделив уравнение (48.15) на $y^n \neq 0$, получим:

$$y^{-n} \cdot y' + p(x) \cdot y^{-n+1} = g(x). \qquad (48.16)$$

Обозначим $y^{-n+1} = z$. Тогда $z' = \frac{dz}{dx} = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y'$. Отсюда находим $y^{-n} \cdot y' = \frac{z'}{1-n}$. Уравнение (48.16) принимает вид

$$\frac{1}{1-n} \cdot z' + p(x) \cdot z = g(x).$$

Последнее уравнение является линейным относительно z. Решение его известно. Таким образом, подстановка $z = y^{-n+1}$ сводит уравнение (48.15) к линейному. На практике ДУ (48.15) удобнее искать методом И. Бернулли в виде $y = u \cdot v$ (не сводя его к линейному).

48.5. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Уравнение

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = 0 \qquad (48.17)$$

называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x;y)$, т. е.

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = du(x;y).$$

В этом случае ДУ (48.17) можно записать в виде $du(x;y) = 0$, а его общий интеграл будет:

$$u(x;y) = c. \qquad (48.18)$$

Приведем условие, по которому можно судить, что выражение

$$\Delta = P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy$$

есть полный дифференциал.

Теорема 48.2. Для того чтобы выражение $\Delta = P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy$, где функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy, было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (48.19)$$

Необходимость

Пусть Δ есть полный дифференциал, т. е.

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = du(x;y).$$

Учитывая, что $du(x;y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ (см. п. 44.3), имеем:

$$P(x;y) = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad Q(x;y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Дифференцируя эти равенства по y и по x соответственно, получаем

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial x}.$$

А так как смешанные частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial x}$ равны между собой (см. п. 44.2), получаем (48.19).

Достаточность

Пусть в области D выполняется условие (48.19). Покажем, что существует функция $u(x;y)$ в области D такая, что

$$du(x;y) = P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy.$$

Найдем эту функцию. Искомая функция должна удовлетворять требованиям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x;y) \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x;y). \qquad (48.20)$$

Если в первом уравнении (48.20) зафиксировать y и проинтегрировать его по x, то получим:

$$u(x;y) = \int P(x;y)\,dx + \varphi(y). \qquad (48.21)$$

Здесь произвольная постоянная $c = \varphi(y)$ зависит от y (либо является числом). В решении (48.21) не известна лишь $\varphi(y)$. Для ее нахождения продифференцируем функцию (48.21) по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\int P(x;y)\,dx\right)'_y + \varphi'(y).$$

Используя второе равенство (48.20), можно записать:

$$Q(x;y) = \left(\int P(x;y)\,dx\right)'_y + \varphi'(y).$$

Отсюда

$$\varphi'(y) = Q(x;y) - \left(\int P(x;y)\,dx\right)'_y. \qquad (48.22)$$

В равенстве (48.22) левая часть зависит от y. Покажем, что и правая часть равенства зависит только от y.

Для этого продифференцируем правую часть по x и убедимся, что производная равна нулю. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(Q(x;y)-\frac{\partial}{\partial y}\Big(\int P(x;y)\,dx\Big)\Big)=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big(\int P(x;y)\,dx\Big)\Big)=$$

$$=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big(\int P(x;y)\,dx\Big)\Big)=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}(P)=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$$

в силу условия (48.19).

Из равенства (48.22) находим $\varphi(y)$:

$$\varphi(y)=\int\Big(Q(x;y)-\frac{\partial}{\partial y}\Big(\int P(x;y)\,dx\Big)\Big)\,dy+c,\quad c\text{ — const}.$$

Подставляя найденное значение для $\varphi(y)$ в равенство (48.21), находим функцию $u(x;y)$ такую, что $du(x;y)=P(x;y)\,dx+Q(x;y)\,dy$. ■

Таким образом, при решении ДУ вида (48.17) сначала проверяем выполнение условия (48.19). Затем, используя равенства (48.20), находим функцию $u(x;y)$. Решение записываем в виде (48.18).

Пример 48.11. Решить уравнение $y'=\dfrac{5-2xy}{3y^2+x^2}$.

Решение: Запишем уравнение в дифференциальной форме:

$$(2xy-5)\,dx+(3y^2+x^2)\,dy=0.$$

Здесь $P(x;y)=2xy-5$, $Q(x;y)=3y^2+x^2$. Проверяем выполнение условия (48.19):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x;\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2x;\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Следовательно, данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Условия (48.20) будут здесь выглядеть как

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy-5,\ \frac{\partial u}{\partial y}=3y^2+x^2.$$

Отсюда имеем

$$u(x;y)=\int(2xy-5)\,dx=x^2y-5x+\varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(x^2y-5x+\varphi(y))'_y=x^2+\varphi'(y).$$

Далее

$$3y^2+x^2=x^2+\varphi'(y),\quad \varphi'(y)=3y^2,$$

$$\varphi(y)=y^3+c_1,\quad u(x;y)=x^2y-5x+y^3+c_1.$$

Общим интегралом является $x^2y-5x+y^3+c_1=c_2$, или $x^2y-5x+y^3=c$, где $c=c_2-c_1$.

Если условие (48.19) не выполняется, то ДУ (48.17) не является уравнением в полных дифференциалах.

Однако это уравнение иногда можно привести к уравнению в полных дифференциалах умножением его на некоторую функцию $t(x;y)$, называемую *интегрирующим множителем.*

Чтобы уравнение $t(x;y)\cdot P(x;y)\,dx+t(x;y)\cdot Q(x;y)\,dy=0$ было уравнением в полных дифференциалах, должно выполняться условие

$$\frac{\partial}{\partial y}(t(x;y)\cdot P(x;y))=\frac{\partial}{\partial x}(t(x;y)\cdot Q(x;y)).$$

Выполнив дифференцирование $\frac{\partial t}{\partial y}\cdot P+\frac{\partial P}{\partial y}\cdot t=\frac{\partial t}{\partial x}\cdot Q+\frac{\partial Q}{\partial x}\cdot t$ и приведя подобные слагаемые, получим

$$\frac{\partial t}{\partial y}\cdot P-\frac{\partial t}{\partial x}\cdot Q=t\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big). \tag{48.23}$$

Для нахождения $t(x;y)$ надо проинтегрировать полученное ДУ в частных производных. Решение этой задачи не простое. Нахождение интегрирующего множителя может быть упрощено, если допустить существование t как функции только одного аргумента x либо только y. Пусть, например, $t=t(x)$. Тогда уравнение (48.23) принимает вид

$$-\frac{dt}{dx}\cdot Q=t\cdot\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big),\quad\text{или}\quad \frac{dt}{t}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\cdot dx.$$

Отсюда

$$t(x)=\exp\Big(\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\,dx\Big). \tag{48.24}$$

При этом выражение $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ должно зависеть только от x.

Аналогично получаем, что если $t=t(y)$ (t не зависит от x), то

$$t(y)=\exp\Big(\int\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}\,dy\Big),$$

а подынтегральное выражение должно зависеть только от y.

Пример 48.12. Решить уравнение $(x^2-y)\cdot dx+(x^2y^2+x)\cdot dy=0$.

Решение: Здесь $\frac{\partial P}{\partial y}=-1$; $\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy^2+1$, т. е. $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$. Однако

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{-1-2xy^2-1}{x^2y^2+x}=\frac{-2}{x}$$

зависит только от x.

Следовательно, уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x, выражение которого может быть получено при помощи формулы (48.24). В нашем случае получим, что

$$t(x) = \exp\left(-\int \frac{2}{x}\,dx\right) = \exp(-2\ln|x|) = \frac{1}{x^2}.$$

Умножая исходное уравнение на $t = \frac{1}{x^2}$, получаем:

$$\left(1 - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(y^2 + \frac{1}{x}\right)dy = 0,$$

т. е. уравнение в полных дифференциалах! Решив его, найдем, что общий интеграл заданного уравнения имеет вид

$$x + \frac{y}{x} + \frac{y^3}{3} = c.$$

48.6. Уравнения Лагранжа и Клеро

Рассмотрим дифференциальные уравнения, неразрешенные относительно производной. К ним, в частности, относятся уравнения Лагранжа и Клеро.

Уравнение Лагранжа

Уравнение вида

$$y = x\cdot\varphi(y') + \psi(y'), \tag{48.25}$$

где φ и ψ — известные функции от $y' = \frac{dy}{dx}$, называется ***уравнением Лагранжа.***

Введем вспомогательный параметр, положив $y' = p$. Тогда уравнение (48.25) примет вид

$$y = x\cdot\varphi(p) + \psi(p). \tag{48.26}$$

Дифференцируя по x, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(p) + x\cdot\varphi'(p)\cdot\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\cdot\frac{dp}{dx},$$

т. е. $p - \varphi(p) = (x\cdot\varphi'(p) + \psi'(p))\cdot\frac{dp}{dx}$, или

$$(p - \varphi(p))\cdot\frac{dx}{dp} - x\cdot\varphi'(p) = \psi'(p). \tag{48.27}$$

Уравнение (48.27) есть линейное уравнение относительно неизвестной функции $x = x(p)$. Решив его, найдем:

$$x = \lambda(p; c). \tag{48.28}$$

Исключая параметр p из уравнений (48.26) и (48.28), получаем общий интеграл уравнения (48.25) в виде $y = \gamma(x; c)$.

Отметим, что, переходя к уравнению (48.27), мы делили на $\frac{dp}{dx}$. При этом могли быть потеряны решения, для которых $\frac{dp}{dx} = 0$, т. е. $p = p_0 = \text{const}$. Это значение p_0 является корнем уравнения $p - \varphi(p) = 0$ (см. (48.27)).

Решение $y = x\cdot\varphi(p_0) + \psi(p_0)$ является *особым* для уравнения (48.25) (см. понятие особого решения в п. 48.2).

Уравнение Клеро

Рассмотрим частный случай уравнения Лагранжа при $\varphi(y') \equiv y'$. Уравнение (48.25) принимает вид

$$\boxed{y = x\cdot y' + \psi(y')} \tag{48.29}$$

и называется ***уравнением Клеро.***

Положив $y' = p$, получаем:

$$y = xp + \psi(p). \tag{48.30}$$

Дифференцируя по x, имеем:

$$p = p + x\cdot\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\cdot\frac{dp}{dx}, \quad \text{или} \quad (x + \psi'(p))\cdot\frac{dp}{dx} = 0.$$

Если $\frac{dp}{dx} = 0$, то $p = c$. Поэтому, с учетом (48.30), ДУ (48.29) имеет общее решение

$$y = xc + \psi(c). \tag{48.31}$$

Если $x + \psi'(p) = 0$, то получаем частное решение уравнения в параметрической форме:

$$x = -\psi'(p), \quad y = xp + \psi(p). \tag{48.32}$$

Это решение — *особое* решение уравнения Клеро: оно не содержится в формуле общего решения уравнения.

Пример 48.13. Решить уравнение Клеро $y = xy' + y'^2$.

○ Решение: Общее решение, согласно формуле (48.31), имеет вид $y = cx + c^2$. Особое решение уравнения получаем согласно формулам (48.32) в виде $x = -2p$, $y = xp + p^2$. Отсюда следует: $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}$, т. е. $y = -\frac{x^2}{4}$. ●

§ 49. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

49.1. Основные понятия

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются ДУ *высших порядков*. ДУ второго порядка в общем случае записывается в виде

$$F(x;y;y';y'')=0 \tag{49.1}$$

или, если это возможно, в виде, *разрешенном относительно старшей производной*:

$$y''=f(x;y;y'). \tag{49.2}$$

Будем в основном рассматривать уравнение вида (49.2): от него всегда можно перейти к (49.1).

Решением ДУ (49.2) называется всякая функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Общим решением ДУ (49.2) называется функция $y=\varphi(x;c_1;c_2)$, где c_1 и c_2 — не зависящие от x произвольные постоянные, удовлетворяющая условиям:

1. $\varphi(x;c_1;c_2)$ является решением ДУ для каждого фиксированного значения c_1 и c_2.

2. Каковы бы ни были начальные условия

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0,\quad y'\Big|_{x=x_0}=y_0', \tag{49.3}$$

существуют единственные значения постоянных $c_1=c_1^0$ и $c_2=c_2^0$ такие, что функция $y=\varphi(x;c_1^0;c_2^0)$ является решением уравнения (49.2) и удовлетворяет начальным условиям (49.3).

Всякое решение $y=\varphi(x;c_1^0;c_2^0)$ уравнения (49.2), получающееся из общего решения $y=\varphi(x;c_1;c_2)$ при конкретных значениях постоянных $c_1=c_1^0$, $c_2=c_2^0$, называется ***частным решением.***

Решения ДУ (49.2), записанные в виде

$$\Phi(x;y;c_1;c_2)=0,\quad \Phi(x;y;c_1^0;c_2^0)=0,$$

называются *общим и частным интегралом* соответственно.

График всякого решения ДУ второго порядка называется *интегральной кривой*. Общее решение ДУ (49.2) представляет собой множество интегральных кривых; частное решение — одна интегральная кривая этого множества, проходящая через точку $(x_0;y_0)$ и имеющая в ней касательную с заданным угловым коэффициентом $y'(x_0)=y'$.

Переписав ДУ (49.1) в виде

$$F\left(x;y;y';\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\cdot(1+y'^2)^{3/2}\right)=0,$$

видим, что ДУ второго порядка устанавливает связь между координатами точки $(x;y)$ интегральной кривой, угловым коэффициентом $k=y'$ касательной к ней и кривизной $K=\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ в точке $(x;y)$. В этом состоит геометрическое истолкование ДУ второго порядка.

Как и в случае уравнения первого порядка, задача нахождения решения ДУ (49.2), удовлетворяющего заданным начальным условиям (49.3), называется *задачей Коши*.

Теорема 49.1 (существования и единственности задачи Коши). Если в уравнении (49.2) функция $f(x;y;y')$ и ее частные производные f'_y и $f'_{y'}$ непрерывны в некоторой области D изменения переменных x, y и y', то для всякой точки $(x_0;y_0;y_0')\in D$ существует единственное решение $y=\varphi(x)$ уравнения (49.2), удовлетворяющее начальным условиям (49.3).

Примем теорему без доказательства.

Аналогичные понятия и определения имеют место для ДУ *n-го порядка*, которое в общем виде записывается ка

$$F(x;y;y';y'';\ldots;y^{(n)})=0,$$

или

$$y^{(n)}=f(x;y;y';y'';\ldots;y^{(n-1)})=0, \tag{49.4}$$

если его можно разрешить относительно старшей производной.

Начальные условия для ДУ (49.4) имеют вид

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\Big|_{x=x_0}=y_0',\ y''\Big|_{x=x_0}=y_0'',\ \ldots,\ y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}. \tag{49.5}$$

Общее решение ДУ n-го порядка является функцией вида

$$y=\varphi(x;c_1;c_2;\ldots;c_n),$$

содержащей n произвольных, не зависящих от x постоянных.

Решение ДУ (49.4), получающееся из общего решения при конкретных значениях постоянных $c_1=c_1^0$, $c_2=c_2^0$, ..., $c_n=c_n^0$, называется *частным решением.*

Задача Коши для ДУ n-го порядка: найти решение ДУ (49.4), удовлетворяющее начальным условиям (49.5).

Проинтегрировать (решить) ДУ n-го порядка означает следующее: найти его общее или частное решение (интеграл) в зависимости от того, заданы начальные условия или нет.

Задача нахождения решения ДУ n-го порядка сложнее, чем первого. Поэтому рассмотрим лишь отдельные виды ДУ высших порядков.

49.2. Уравнения, допускающие понижение порядка

Одним из методов интегрирования ДУ высших порядков является *метод понижения порядка*. Суть метода состоит в том, что с помощью замены переменной (подстановки) данное ДУ сводится к уравнению, порядок которого ниже.

Рассмотрим три типа уравнений, допускающих понижение порядка.

I. Пусть дано уравнение

$$\boxed{y'' = f(x).} \tag{49.6}$$

Порядок можно понизить, введя новую функцию $p(x)$, положив $y' = p(x)$. Тогда $y'' = p'(x)$ и получаем ДУ первого порядка: $p' = f(x)$. Решив его, т. е. найдя функцию $p = p(x)$, решим уравнение $y' = p(x)$. Получим общее решение заданного уравнения (49.6).

На практике поступают иначе: порядок понижается непосредственно путем последовательного интегрирования уравнения.

Так как $y'' = (y')' = \dfrac{dy'}{dx}$, уравнение (49.6) можно записать в виде $dy' = f(x)\,dx$. Тогда, интегрируя уравнение $y'' = f(x)$, получаем: $y' = \int f(x)\,dx$, или $y' = \varphi_1(x) + c_1$. Далее, интегрируя полученное уравнение по x, находим: $y = \int(\varphi_1(x) + c_1)\,dx$, т. е. $y = \varphi_2(x) + c_1x + c_2$ — общее решение данного уравнения.

Если дано уравнение

$$y^{(n)} = f(x),$$

то, проинтегрировав его последовательно n раз, найдем общее решение уравнения: $y = \varphi_n(x) + c_1 \cdot \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \cdot \dfrac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + c_n$.

Пример 49.1. Решить уравнение $y^{IV} = \sin 2x$.

○ Решение: Последовательно интегрируя четыре раза данное уравнение, получим

$$y''' = \int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c_1,$$

$$y'' = \int -\frac{1}{2}\cos 2x\,dx + \int c_1\,dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + c_1x + c_2,$$

$$y' = \frac{1}{8}\cos 2x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3,$$

$$y = \frac{1}{16}\sin 2x + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3x + c_4. \quad \bullet$$

II. Пусть дано уравнение

$$\boxed{y'' = f(x; y'),} \tag{49.7}$$

не содержащее явно искомой функции y.

Обозначим $y' = p$, где $p = p(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = p'$ и уравнение (49.7) принимает вид $p' = f(x; p)$. Пусть $p = \varphi(x; c_1)$ — общее решение полученного ДУ первого порядка. Заменяя функцию p на y', получаем ДУ: $y' = \varphi(x; c_1)$. Оно имеет вид (49.6). Для отыскания y достаточно проинтегрировать последнее уравнение. Общее решение уравнения (49.7) будет иметь вид $y = \int \varphi(x; c_1)\,dx + c_2$.

Частным случаем уравнения (49.7) является уравнение

$$\boxed{y'' = f(y'),} \tag{49.8}$$

не содержащее также и независимую переменную x. Оно интегрируется тем же способом: $y' = p(x)$, $y'' = p' = \dfrac{dp}{dx}$. Получаем уравнение $p' = f(p)$ с разделяющимися переменными.

Если задано уравнение вида

$$\boxed{F(x; y^{(k)}; y^{(k+1)}; \ldots; y^{(n)}) = 0,} \tag{49.9}$$

которое также не содержит явно искомой функции, то его порядок можно понизить на k единиц, положив $y^{(k)} = p(x)$. Тогда $y^{(k+1)} = p'$; $\ldots$; $y^{(n)} = p^{(n-k)}$ и уравнение (49.9) примет вид $F(x; p; p'; \ldots; p^{(n-k)}) = 0$.

Частным случаем уравнения (49.9) является уравнение

$$F(x; y^{(n-1)}; y^{(n)}) = 0,$$

или

$$\boxed{y^{(n)} = f(x; y^{(n-1)}).}$$

С помощью замены $y^{(n-1)} = p(x)$, $y^{(n)} = p'$ это уравнение сводится к ДУ первого порядка.

Пример 49.2. Решить уравнение $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$.

○ Решение: Полагаем $y' = p$, где $p = p(x)$, $y'' = p'$.

Тогда $p' - \dfrac{p}{x} = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными: $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{p}{x}$, $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{dx}{x}$. Интегрируя, получим $\ln|p| = \ln|x| + \ln|c_1|$, $\ln|p| = \ln|c_1x|$, $p = c_1x$. Возвращаясь к исходной переменной, получим $y' = c_1x$, $y = c_1\dfrac{x^2}{2} + c_2$ — общее решение уравнения. ●

III. Рассмотрим уравнение

$$\boxed{y'' = f(y; y'),} \tag{49.10}$$

которое *не содержит* явно *независимой переменной* x.

Для понижения порядка уравнения введем новую функцию $p = p(y)$, зависящую от переменной y, полагая $y' = p$. Дифференцируем это равенство по x, учитывая, что $p = p(y(x))$:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot p,$$

т. е. $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$. Теперь уравнение (49.10) запишется в виде $p \cdot \frac{dp}{dy} = f(y; p)$. Пусть $p = \varphi(y; c_1)$ является общим решением этого ДУ первого порядка. Заменяя функцию $p(y)$ на y', получаем $y' = \varphi(y; c_1)$ — ДУ с разделяющимися переменными. Интегрируя его, находим общий интеграл уравнения (49.10):

$$\int \frac{dy}{\varphi(y; c_1)} = x + c_2.$$

Частным случаем уравнения (49.10) является ДУ

$$\boxed{y'' = f(y).}$$

Такое уравнение решается при помощи аналогичной подстановки: $y' = p(y)$, $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$.

Так же поступаем при решении уравнения $F(y; y'; y''; \ldots; y^{(n)}) = 0$. Его порядок можно понизить на единицу, положив $y' = p$, где $p = p(y)$. По правилу дифференцирования сложной функции находим $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Затем найдем $y''' = \frac{d}{dx}(p \cdot p'_y) = \frac{d}{dy}(p \cdot p'_y) \cdot \frac{dy}{dx} = p((p'_y)^2 + p \cdot p''_{yy})$ и т. д.

Замечание. Уравнение (49.8) также можно решать, применяя подстановку $y' = p$, где $p = p(y)$.

Пример 49.3. Найти частное решение уравнения

$$y'' - (y')^2 + y'(y-1) = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

Решение: Уравнение имеет вид (49.10). Положив $y' = p(y)$, $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$, получаем:

$$p \cdot \frac{dp}{dy} - p^2 + p(y-1) = 0.$$

Так как $p \neq 0$ (иначе $y' = 0$, что противоречит начальному условию $y' = 2$), то $\frac{dp}{dy} - p + y - 1 = 0$ — получили линейное ДУ первого порядка.

Проведем решение полученного линейного ДУ методом Бернулли (п. 48.4). Полагаем $p = u \cdot v$. Имеем: $u'v + uv' - uv + y - 1 = 0$, или $u'v + u(v' - v) = 1 - y$.

Подберем функцию v так, чтобы $v' - v = 0$. Тогда $\frac{dv}{v} = dy$, $v = e^y$. Получаем:

$$u' \cdot e^y + u \cdot 0 = 1 - y, \quad \text{т. е.} \quad du = (1-y) \cdot e^{-y}\,dy.$$

Интегрируя это равенство, находим, что $u = -(1-y) \cdot e^{-y} + e^{-y} + c_1$. Следовательно,

$$p = uv = ((-1+y)e^{-y} + e^{-y} + c_1) \cdot e^{+y}, \quad \text{или} \quad p = c_1 e^y + y.$$

Заменяя p на y', получаем: $y' = c_1 \cdot e^y + y$. Подставляя $y' = 2$ и $y = 2$ в это равенство, находим c_1:

$$2 = c_1 e^2 + 2, \quad c_1 = 0.$$

Имеем $y' = y$. Отсюда $y = c_2 e^x$. Находим c_2 из начальных условий: $2 = c_2 e^0$, $c_2 = 2$. Таким образом, $y = 2e^x$ — частное решение данного ДУ. ●

49.3. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Основные понятия

Многие задачи математики, механики, электротехники и других технических наук приводят к линейным дифференциальным уравнениям.

Уравнение вида

$$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + b_n(x)y = g(x), \tag{49.11}$$

где $b_0(x) \neq 0$, $b_1(x), \ldots, b_n(x), g(x)$ — заданные функции (от x), называется ***линейным ДУ n-го порядка***.

Оно содержит искомую функцию y и все ее производные лишь в первой степени. Функции $b_0(x), b_1(x), \ldots, b_n(x)$ называются *коэффициентами* уравнения (49.11), а функция $g(x)$ — его *свободным членом*.

Если свободный член $g(x) \equiv 0$, то уравнение (49.11) называется ***линейным однородным*** уравнением; если $g(x) \neq 0$, то уравнение (49.11) называется ***неоднородным***.

Разделив уравнение (49.11) на $b_0(x) \neq 0$ и обозначив

$$\frac{b_1(x)}{b_0(x)} = a_1(x), \ldots, \frac{b_n(x)}{b_0(x)} = a_n(x), \frac{g(x)}{b_0(x)} = f(x),$$

запишем уравнение (49.11) в виде *приведенного*:

$$\boxed{y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x).} \qquad (49.12)$$

Далее будем рассматривать линейные ДУ вида (49.12) и считать, что коэффициенты и свободный член уравнения (49.12) являются непрерывными функциями (на некотором интервале $(a;b)$). При этих условиях справедлива теорема существования и единственности решения ДУ (49.12) (см. теорему 49.1).

49.4. Линейные однородные ДУ второго порядка

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) второго порядка:

$$\boxed{y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0} \qquad (49.13)$$

и установим некоторые свойства его решений.

Теорема 49.2. Если функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ являются частными решениями уравнения (49.13), то решением этого уравнения является также функция

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \qquad (49.14)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

❑ Подставим функцию $y = c_1y_1 + c_2y_2$ и ее производные в левую часть ЛОДУ (49.13). Получаем:

$$(c_1y_1 + c_2y_2)'' + a_1(x)\cdot(c_1y_1 + c_2y_2)' + a_2(x)\cdot(c_1y_1 + c_2y_2) =$$
$$= c_1y_1'' + c_2y_2'' + a_1(x)\cdot(c_1y_1' + c_2y_2') + a_2(x)\cdot(c_1y_1 + c_2y_2) =$$
$$= c_1(y_1'' + a_1(x)\cdot y_1' + a_2(x)\cdot y) + c_2(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2) =$$
$$= c_1\cdot 0 + c_2\cdot 0 = 0,$$

так как функции y_1 и y_2 — решения уравнения (49.13) и, значит, выражения в скобках тождественно равны нулю.

Таким образом, функция $y = c_1y_1 + c_2y_2$ также является решением уравнения (49.13). ■

Из теоремы 49.2, как следствие, вытекает, что если y_1 и y_2 — решения уравнения (49.13), то решениями его будут также функции $y = y_1 + y_2$ и $y = c\cdot y_1$.

Функция (49.14) содержит две произвольные постоянные и является решением уравнения (49.13). Может ли она являться общим решением уравнения (49.13)?

Для ответа на вопрос введем понятие линейной зависимости и линейной независимости функций.

Функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ называются ***линейно независимыми*** на интервале $(a;b)$, если равенство

$$\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 = 0, \qquad (49.15)$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Если хотя бы одно из чисел α_1 или α_2 отлично от нуля и выполняется равенство (49.15), то функции y_1 и y_2 называются ***линейно зависимыми*** на $(a;b)$.

Очевидно, что функции y_1 и y_2 линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т. е. для всех $x \in (a;b)$ выполняется равенство $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$, или $y_1 = \lambda y_2$, $\lambda = \text{const}$.

Например, функции $y_1 = 3e^x$ и $y_2 = e^x$ линейно зависимы: $\frac{y_1}{y_2} = 3 = \text{const}$; функции y_1 и $y_3 = e^{2x}$ — линейно независимы: $\frac{y_1}{y_2} = \frac{3e^x}{e^{2x}} = 3e^{-x} \neq \text{const}$; функции $y_4 = \sin x$ и $y_5 = \cos x$ являются линейно независимыми: равенство $\alpha_1\sin x + \alpha_2\cos x = 0$ выполняется для всех $x \in \mathbb{R}$ лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (или $\frac{y_4}{y_5} = \operatorname{tg} x \neq \text{const}$).

Средством изучения линейной зависимости системы функций является так называемый *определитель Вронского* или *вронскиан* (Ю. Вронский — польский математик).

Для двух дифференцируемых функций $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ вронскиан имеет вид

$$\boxed{W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.}$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 49.3. Если дифференцируемые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на $(a;b)$, то определитель Вронского на этом интервале тождественно равен нулю.

❑ Так как функции y_1 и y_2 линейно зависимы, то в равенстве (49.15) значение α_1 или α_2 отлично от нуля. Пусть $\alpha_1 \neq 0$, тогда $y_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2$; поэтому для любого $x \in (a;b)$

$$W(x) = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2 & y_2 \\ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0. \quad ■$$

Теорема 49.4. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые решения уравнения (49.13) на $(a;b)$, то определитель Вронского на этом интервале нигде не обращается в нуль.

Доказательство теоремы опустим.

Из теорем 49.3 и 49.4 следует, что *вронскиан не равен нулю ни в одной точке интервала $(a;b)$ тогда и только тогда, когда частные решения линейно независимы.*

Совокупность любых двух линейно независимых на интервале $(a;b)$ частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ЛОДУ второго порядка определяет ***фундаментальную систему решений*** этого уравнения: любое произвольное решение может быть получено как комбинация $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$.

Пример 49.4. Частные решения $y_1 = \sin x$ и $y_2 = \cos x$, $y_3 = 2\sin x$ и $y_4 = 5\cos x$ (их бесчисленное множество!) уравнения $y'' + y = 0$ образуют фундаментальную систему решений; решения же $y_5 = 0$ и $y_6 = \cos x$ — не образуют.

Теперь можно сказать, при каких условиях функция (49.14) будет общим решением уравнения (49.13).

Теорема 49.5 (структура общего решения ЛОДУ второго порядка). Если два частных решения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ ЛОДУ (49.13) образуют на интервале $(a;b)$ фундаментальную систему, то общим решением этого уравнения является функция

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \tag{49.16}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

❑ Согласно теореме 49.2, функция (49.16) является решением уравнения (49.13). Остается доказать, что это решение о б щ е е, т. е. что из него можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\Big|_{x=x_0} = y_0', \tag{49.17}$$

где $x_0 \in (a;b)$.

Подставив начальные условия (49.17) в решение (49.14), получим систему уравнений

$$\begin{cases} y_0 = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0), \\ y_0' = c_1' y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0), \end{cases}$$

где $y_0 = y(x_0)$, $y_0' = y'(x_0)$, с неизвестными c_1 и c_2.

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0)$$

равен значению вронскиана $W(x)$ при $x = x_0$.

Так как решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений на $(a;b)$ и $x_0 \in (a;b)$, то, согласно теореме 49.4, $W(x_0) \neq 0$. Поэтому система уравнений имеет единственное решение:

$$c_1 = c_1^0 = \frac{1}{W(x_0)} \cdot \begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix}, \quad c_2 = c_2^0 = \frac{1}{W(x_0)} \cdot \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & y_0' \end{vmatrix}.$$

Решение $y = c_1^0 y_1(x) + c_2^0 y_2(x)$ является частным решением (единственным, в силу теоремы единственности) уравнения (49.13), удовлетворяющим начальным условиям (49.17). Теорема доказана. ■

Пример 49.5. На основании теоремы 49.5 общим решением уравнения $y''+y=0$ (см. пример 49.4) является функция $y=c_1\sin x+c_2\cos x$.

49.5. Линейные однородные ДУ n-го порядка

Полученные результаты можно распространить на линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка, имеющие вид

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + a_2(x)\cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)\cdot y = 0. \tag{49.18}$$

1. Если функции $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ являются частными решениями уравнения (49.18), то его решением является и функция $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$.

2. Функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называются *линейно независимыми* на $(a;b)$, если равенство $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0$ выполняется лишь в случае, когда все числа $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; в противном случае (если хотя бы одно из чисел α_i не равно нулю) функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — *линейно зависимы.*

3. Определитель Вронского имеет вид

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

4. Частные решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнения (49.18) образуют *фундаментальную систему решений* на $(a;b)$, если ни в одной точке этого интервала вронскиан не обращается в нуль, т. е. $W(x) \neq 0$ для всех $x \in (a;b)$.

5. Общее решение ЛОДУ (49.18) имеет вид $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$, где c_i $(i = 1, \ldots, n)$ — произвольные постоянные, y_i — частные решения уравнения (49.18), образующие фундаментальную систему.

Пример 49.6. Показать, что функции $y_1=e^x$, $y_2=x\cdot e^x$, $y_3=x^2\cdot e^x$ образуют фундаментальную систему решений некоторого ЛОДУ третьего порядка (дополнительно: составить это уравнение).

○ Решение: Найдем $W(x)$:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & (x+1)e^x & (x^2+2x)e^x \\ e^x & (x+2)e^x & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix}=$$

$$=e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix}=e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 4x+2 \end{vmatrix}=$$

$$=e^{3x}\cdot(4x+2-4x)=2e^{3x}.$$

Ясно, что $W(x)\neq 0$ для всех $x\in\mathbb{R}$. Следовательно, данные функции образуют фундаментальную систему решений ЛОДУ третьего порядка. В общем виде ЛОДУ третьего порядка выглядит так:

$$y'''+a_1(x)y''+a_2(x)y'+a_3(x)y=0.$$

Подставив функции y_1, y_2, y_3 в это уравнение, получим систему из трех уравнений относительно функций $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$. Решая ее, получим ЛОДУ $y'''-3y''+3y'-y=0$; его общее решение:

$$y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x.$$ ●

§ 50. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

50.1. Интегрирование ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

Частным случаем рассмотренных выше линейных однородных дифференциальных уравнений являются *ЛОДУ с постоянными коэффициентами.*

Пусть дано ЛОДУ второго порядка

$$\boxed{y''+p\cdot y'+q\cdot y=0,} \qquad (50.1)$$

где p и q постоянны.

Для нахождения общего решения уравнения (50.1) достаточно найти два его частных решения, образующих фундаментальную систему (см. теорему 49.5).

Будем искать частные решения уравнения (50.1) в виде

$$y=e^{kx},$$

где k — некоторое число (предложено Л. Эйлером). Дифференцируя эту функцию два раза и подставляя выражения для y, y' и y'' в уравнение (50.1), получим: $k^2\cdot e^{kx}+p\cdot k\cdot e^{kx}+q\cdot e^{kx}=0$, т. е.

$$e^{kx}\cdot(k^2+pk+q)=0, \quad \text{или} \quad k^2+pk+q=0\ (e^{kx}\neq 0). \qquad (50.2)$$

Уравнение (50.2) называется ***характеристическим уравнением*** ДУ (50.1) (для его составления достаточно в уравнении (50.1) заменить y'', y' и y соответственно на k^2, k и 1).

При решении характеристического уравнения (50.2) возможны следующие три случая.

Случай 1. Корни k_1 и k_2 уравнения (50.2) действительные и различные: $k_1\neq k_2$ $\left(D=\frac{p^2}{4}-q>0\right)$.

В этом случае частными решениями уравнения (50.1) являются функции $y_1=e^{k_1x}$ и $y_2=e^{k_2x}$. Они образуют фундаментальную систему решений (линейно независимы), т. к. их вронскиан

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \end{vmatrix}=k_2e^{(k_1+k_2)x}-k_1e^{(k_1+k_2)x}=$$

$$=e^{(k_1+k_2)x}\cdot(k_2-k_1)\neq 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения (50.1), согласно формуле (49.16), имеет вид

$$\boxed{y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}.} \qquad (50.3)$$

Пример 50.1. Решить уравнение $y''-5y'+6y=0$.

○ Решение: Составим характеристическое уравнение: $k^2-5k+6=0$. Решаем его: $k_1=2$, $k_2=3$. Записываем общее решение данного уравнения: $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$, где c_1 и c_2 — произвольные постоянные (формула (50.3)). ●

Случай 2. Корни k_1 и k_2 характеристического уравнения (50.2) действительные и равные: $k_1=k_2$ $\left(D=\frac{p^2}{4}-q=0,\ k_1=k_2=-\frac{p}{2}\right)$.

В этом случае имеем лишь одно частное решение $y_1=e^{k_1x}$.

Покажем, что наряду с y_1 решением уравнения (50.1) будет и $y_2=xe^{k_1x}$.

Действительно, подставим функцию y_2 в уравнение (50.1). Имеем:

$$y_2''+py_2'+qy_2=(xe^{k_1x})''+p(xe^{k_1x})'+q(xe^{k_1x})=$$

$$=(2k_1e^{k_1x}+xk_1^2e^{k_1x})+p(e^{k_1x}+xk_1e^{k_1x})+q(xe^{k_1x})=$$

$$=e^{k_1x}(2k_1+k_1^2x+p+pxk_1+qx)=e^{k_1x}(x(k_1^2+pk_1+q)+(p+2k_1)).$$

Но $k_1^2+pk_1+q=0$, т. к. k_1 есть корень уравнения (50.2); $p+2k_1=0$, т. к. по условию $k_1=k_2=-\frac{p}{2}$.

Поэтому $y_2''+py_2'+qy_2=0$, т. е. функция $y_2=xe^{k_1x}$ является решением уравнения (50.1).

Частные решения $y_1=e^{k_1x}$ и $y_2=xe^{k_1x}$ образуют фундаментальную систему решений: $W(x)=e^{2k_1x}\neq 0$. Следовательно, в этом случае общее решение ЛОДУ (50.1) имеет вид

$$\boxed{y=c_1e^{k_1x}+c_2xe^{k_1x}.} \qquad (50.4)$$

Случай 3. Корни k_1 и k_2 уравнения (50.2) комплексные: $k_1=\alpha+\beta i$, $k_2=\alpha-\beta i$ ($D=\frac{p^2}{4}-q<0$, $\alpha=-\frac{p}{2}$, $\beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}>0$).

В этом случае частными решениями уравнения (50.1) являются функции $y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}$ и $y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$. По формулам Эйлера (см. п. 27.3)

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi,\quad e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi$$

имеем

$$y_1=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$y_2=e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x}=e^{\alpha x}\cos\beta x-ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Найдем два действительных частных решения уравнения (50.1). Для этого составим две линейные комбинации решений y_1 и y_2:

$$\frac{y_1+y_2}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x=\widetilde{y}_1 \quad\text{и}\quad \frac{y_1-y_2}{2i}=e^{\alpha x}\sin\beta x=\widetilde{y}_2.$$

Функции $\widetilde{y}_1$ и $\widetilde{y}_2$ являются решениями уравнения (50.1), что следует из свойств решений ЛОДУ второго порядка (см. теорему 49.2). Эти решения $\widetilde{y}_1$ и $\widetilde{y}_2$ образуют фундаментальную систему решений, так как $W(x)\neq 0$ (убедитесь самостоятельно!). Поэтому общее решение уравнения (50.1) запишется в виде $y=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x$, или

$$\boxed{y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x).} \qquad (50.5)$$

Пример 50.2. Решить уравнение $y''-6y'+25y=0$.

Решение: Имеем: $k^2-6k+25=0$, $k_1=3+4i$, $k_2=3-4i$. По формуле (50.5) получаем общее решение уравнения:

$$y=e^{3x}(c_1\cos 4x+c_2\sin 4x).$$

Таким образом, нахождение общего решения ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами (50.1) сводится к нахождению корней характеристического уравнения (50.2) и использованию формул (50.3)–(50.5) общего решения уравнения (не прибегая к вычислению интегралов).

50.2. Интегрирование ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

Задача нахождения общего решения *ЛОДУ n-го порядка* ($n>2$) *с постоянными коэффициентами*

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_ny=0, \qquad (50.6)$$

где p_i, $i=\overline{1,n}$, — числа, решается аналогично случаю уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Сформулируем необходимые утверждения и рассмотрим примеры.

Частные решения уравнения (50.6) также ищем в виде $y=e^{kx}$, где k — постоянное число.

Характеристическим для уравнения (50.6) является алгебраическое уравнение n-го порядка вида

$$k^n+p_1k^{n-1}+p_2k^{n-2}+\ldots+p_{n-1}k+p_n=0. \qquad (50.7)$$

Уравнение (50.7) имеет, как известно, n корней (в их числе могут быть и комплексные). Обозначим их через $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Замечание. Не все из корней уравнения (50.7) обязаны быть различными. Так, в частности, уравнение $(k-3)^2=0$ имеет два равных корня: $k_1=k_2=3$. В этом случае говорят, что корень один ($k=3$) и имеет *кратность* $m_k=2$. Если кратность корня равна единице: $m_k=1$, его называют *простым*.

Случай 1. Все корни уравнения (50.7) действительны и просты (различны). Тогда функции $y_1=e^{k_1x}$, $y_2=e^{k_2x}$, …, $y_n=e^{k_nx}$ являются частными решениями уравнения (50.6) и образуют фундаментальную систему решений (линейно независимы). Поэтому общее решение уравнения (50.6) записывается в виде

$$\boxed{y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}+\ldots+c_ne^{k_nx}.}$$

Пример 50.3. Найти общее решение уравнения

$$y'''-2y''-y'+2y=0.$$

Решение: Характеристическое уравнение $k^3-2k^2-k+2=0$ имеет корни $k_1=-1$, $k_2=1$, $k_3=2$. Следовательно, $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+c_3e^{2x}$ — общее решение данного уравнения.

Случай 2. Все корни характеристического уравнения действительные, но не все простые (есть корни, имеющие кратность $m>1$). Тогда каждому простому корню k соответствует одно частное решение вида e^{kx}, а каждому корню k кратности $m>1$ соответствует m частных решений: e^{kx}, xe^{kx}, x^2e^{kx} …, $x^{m-1}e^{kx}$.

Пример 50.4. Решить уравнение $y^{IV}-y'''-3y''+5y'-2y=0$.

◯ Решение: Характеристическое уравнение

$$k^4 - k^3 - 3k^2 + 5k - 2 = (k+2)(k-1)^3 = 0$$

имеет корни $k_1 = -2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $k_4 = 1$. Следовательно,

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + c_3 x e^x + c_4 x^2 e^x$$

— общее решение уравнения.

Случай 3. Среди корней уравнения (50.7) есть комплексно-сопр
женные корни. Тогда каждой паре $\alpha \pm \beta i$ простых комплексно-со
пряженных корней соответствует два частных решения $e^{\alpha x}\cos\beta x$
$e^{\alpha x}\sin\beta x$, а каждой паре $\alpha \pm \beta i$ корней кратности $m > 1$ соответствую
$2m$ частных решений вида

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, x\cdot e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{m-1}\cdot e^{\alpha x}\cos\beta x;$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, x\cdot e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{m-1}\cdot e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Эти решения, как можно доказать, образуют фундаментальную сист
му решений.

Пример 50.5. Решить уравнение $y^V + y^{IV} + 2y''' + 2y'' + y' + y =$

◯ Решение: Характеристическое уравнение

$$k^5 + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + 1 = (k+1)(k^4 + 2k^2 + 1) = 0$$

имеет корни $k_1 = -1$, $k_2 = i$, $k_3 = -i$, $k_4 = i$, $k_5 = -i$. Следовательно,

$$y = c_1 e^{-x} + c_2\cdot\cos x + c_3\cdot\sin x + c_4 x\cdot\cos x + c_5 x\cdot\sin x$$

— общее решение уравнения. ●

§ 51. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (ЛНДУ)

51.1. Структура общего решения ЛНДУ второго порядка

Рассмотрим ЛНДУ второго порядка

$$\boxed{y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),} \qquad (51.1)$$

где $a_1(x), a_2(x), f(x)$ — заданные, непрерывные на $(a;b)$ функции. Уравнение

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \qquad (51.2)$$

левая часть которого совпадает с левой частью ЛНДУ (51.1), называется ***соответствующим*** ему ***однородным уравнением.***

Теорема 51.1 (структура общего решения ЛНДУ). Общим решением y уравнения (51.1) является сумма его произвольного частного решения y^* и общего решения $\widehat{y} = c_1y_1 + c_2y_2$ соответствующего однородного уравнения (51.2), т. е.

$$y = y^* + \widehat{y}. \qquad (51.3)$$

☐ Убедимся, что функция (51.3) — решение уравнения (51.1). Так как y^* есть решение уравнения (51.1), а $\widehat{y}$ — решение уравнения (51.2), то

$$(y^*)'' + a_1(x)(y^*)' + a_2(x)y^* = f(x) \quad \text{и} \quad (\widehat{y})'' + a_1(x)(\widehat{y})' + a_2(x)\widehat{y} = 0.$$

В таком случае имеем:

$$(y^* + \widehat{y})'' + a_1(x)(y^* + \widehat{y})' + a_2(x)(y^* + \widehat{y}) =$$
$$= \big((y^*)'' + a_1(x)(y^*)' + a_2(x)y^*\big) + \big((\widehat{y})'' + a_1(x)(\widehat{y})' + a_2(x)\widehat{y}\big) =$$
$$= f(x) + 0 = f(x).$$

Это означает, что функция $(y^* + \widehat{y})$ является решением уравнения (51.1).

Покажем теперь, что функция

$$y = y^* + c_1y_1 + c_2y_2 \qquad (51.4)$$

является общим решением уравнения (51.1). Для этого надо доказать, что из решения (51.4) можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'. \qquad (51.5)$$

Продифференцировав функцию (51.4) и подставив начальные условия (51.5) в функцию (51.4) и ее производную, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y_0 - y^*(x_0), \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = y_0' - (y^*)'(x_0), \end{cases}$$

где $y_0 = y(x_0)$, $y_0' = y'(x_0)$, с неизвестными c_1 и c_2. Определителем этой системы является определитель Вронского $W(x_0)$ для функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в точке $x = x_0$. Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы (образуют фундаментальную систему решений), т. е. $W(x_0) \neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение: $c_1 = c_1^0$ и $c_2 = c_2^0$.

Решение $y = y^* + c_1^0y_1(x) + c_2^0y_2(x)$ является частным решением уравнения (51.1), удовлетворяющим заданным начальным условиям (51.5). Теорема доказана. ■

51.2. Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим ЛНДУ (51.1). Его общим решением является функция (51.3), т. е.

$$y = y^* + \widehat{y}.$$

Частное решение y^* уравнения (51.1) можно найти, если известно общее решение $\widehat{y}$ соответствующего однородного уравнения (51.2), *методом вариации произвольных постоянных* (метод Лагранжа), состоящим в следующем. Пусть $\widehat{y} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ — общее решение уравнения (51.2). Заменим в общем решении постоянные c_1 и c_2 неизвестными функциями $c_1(x)$ и $c_2(x)$ и подберем их так, чтобы функция

$$y^* = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x) \tag{51.6}$$

была решением уравнения (51.1). Найдем производную

$$(y^*)' = c_1'(x) y_1(x) + c_1(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2(x) + c_2(x) y_2'(x).$$

Подберем функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ так, чтобы

$$c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0. \tag{51.7}$$

Тогда

$$(y^*)' = c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x),$$
$$(y^*)'' = c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_1(x) \cdot y_1''(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) + c_2(x) \cdot y_2''(x).$$

Подставляя выражение для y^*, $(y^*)'$ и $(y^*)''$ в уравнение (51.1), получим:

$$c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_1(x) \cdot y_1''(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) + c_2(x) \cdot y_2''(x) +$$
$$+ a_1(x)\left[c_1(x) y_1'(x) + c_2(x) y_2'(x)\right] + a_2(x)\left[c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)\right] = f(x),$$

или

$$c_1(x) \cdot \left[y_1''(x) + a_1(x) \cdot y_1'(x) + a_2(x) \cdot y_1(x)\right] +$$
$$+ c_2(x)\left[y_2''(x) + a_1(x) y_2'(x) + a_2(x) y_2(x)\right] + c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = f(x).$$

Поскольку $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения (51.2), то выражения в квадратных скобках равны нулю, а потому

$$c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x). \tag{51.8}$$

Таким образом, функция (51.6) будет частным решением y^* уравнения (51.1), если функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений (51.7) и (51.8):

$$\boxed{\begin{cases} c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0, \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x). \end{cases}} \tag{51.9}$$

Определитель системы $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$, так как это определитель Вронского для фундаментальной системы частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (51.2). Поэтому система (51.9) имеет единственное решение: $c_1'(x) = \varphi_1(x)$ и $c_2'(x) = \varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — некоторые функции от x. Интегрируя эти функции, находим $c_1(x)$ и $c_2(x)$, а затем по формуле (51.6) составляем частное решение уравнения (51.1).

Пример 51.1. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

○ Решение: Найдем общее решение $\widehat{y}$ соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$. Имеем: $k^2 + 1 = 0$, $k_1 = i$, $k_2 = -i$. Следовательно, $\widehat{y} = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x$. Найдем теперь частное решение y^* исходного уравнения. Оно ищется в виде (51.6): $y^* = c_1(x) \cdot \cos x + c_2(x) \cdot \sin x$. Для нахождения $c_1(x)$ и $c_2(x)$ составляем систему уравнений вида (51.9):

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot \cos x + c_2'(x) \cdot \sin x = 0, \\ c_1'(x) \cdot (-\sin x) + c_2'(x) \cdot \cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решаем ее:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1;$$

$$c_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\operatorname{tg} x, \quad c_1(x) = \int (-\operatorname{tg} x)\, dx = \ln|\cos x|;$$

$$c_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad c_2(x) = \int 1 \cdot dx = x.$$

Запишем частное решение данного уравнения: $y^* = \ln|\cos x| \cdot \cos x + x \cdot \sin x$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = (\widehat{y} + y^*) = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \cdot \sin x. \quad \bullet$$

При нахождении частных решений ЛНДУ может быть полезной следующая теорема.

Теорема 51.2 (о наложении решений). Если правая часть уравнения (51.1) представляет собой сумму двух функций: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а y_1^* и y_2^* — частные решения уравнений $y'' + a_1(x) \cdot y' + a_2(x) \cdot y = f_1(x)$ и $y'' + a_1(x) \cdot y' + a_2(x) y = f_2(x)$ соответственно, то функция $y^* = y_1^* + y_2^*$ является решением данного уравнения.

❑ Действительно,

$$(y_1^* + y_2^*)'' + a_1(x)\cdot(y_1^* + y_2^*)' + a_2(x)\cdot(y_1^* + y_2^*) =$$
$$= \big((y_1^*)'' + a_1(x)\cdot(y_1^*)' + a_2(x)\cdot y_1^*\big) + \big((y_2^*)'' + a_1(x)\cdot(y_2^*)' + a_2(x)\cdot y_2^*\big) =$$
$$= f_1(x) + f_2(x) = f(x).$$ ■

51.3. Интегрирование ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Рассмотрим *ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами,* т. е. уравнение

$$\boxed{y'' + p\cdot y' + q\cdot y = f(x),} \tag{51.10}$$

где p и q — некоторые числа.

Согласно теореме 51.1, общее решение уравнения (51.10) представляет собой сумму общего решения $\widehat{y}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения y^* неоднородного уравнения. Частное решение уравнения (51.10) может быть найдено методом вариации произвольных постоянных (п. 51.2).

Для уравнений с постоянными коэффициентами (51.10) существует более простой способ нахождения y^*, если правая часть $f(x)$ уравнения (51.10) имеет так называемый «специальный вид»:

I. $f(x) = P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$

или

II. $f(x) = e^{\alpha x}\cdot(P_n(x)\cdot\cos\beta x + Q_m(x)\cdot\sin\beta x)$.

Суть метода, называемого *методом неопределенных коэффициентов,* состоит в следующем: по виду правой части $f(x)$ уравнения (51.10) записывают ожидаемую форму частного решения с неопределенными коэффициентами, затем подставляют ее в уравнение (51.10) и из полученного тождества находят значения коэффициентов.

Случай 1. Правая часть (51.10) имеет вид $f(x) = P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $P_n(x)$ — многочлен степени n. Уравнение (51.10) запишется в виде

$$\boxed{y'' + p\cdot y' + q\cdot y = P_n(x)\cdot e^{\alpha x}.} \tag{51.11}$$

В этом случае частное решение y^* ищем в виде:

$$\boxed{y^* = x^r\cdot Q_n(x)\cdot e^{\alpha x},} \tag{51.12}$$

где r — число, равное кратности α как корня характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ (т.е. r — число, показывающее, сколько раз α является корнем уравнения $k^2 + pk + q = 0$), а $Q_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$ — многочлен степени n, записанный с неопределенными коэффициентами A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

❑ а) Пусть α не является корнем характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0,$$

т. е. $\alpha \neq k_{1,2}$. Следовательно,

$$r = 0,\quad y^* = Q_n(x)\cdot e^{\alpha x},\quad (y^*)' = Q_n'(x)\cdot e^{\alpha x} + Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\alpha,$$
$$(y^*)'' = Q_n''(x)\cdot e^{\alpha x} + 2Q_n'(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\alpha + Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\alpha^2.$$

После подстановки функции y^* и ее производных в уравнение (51.11), сокращения на $e^{\alpha x}$, получим:

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)\cdot Q_n(x) = P_n(x). \tag{51.13}$$

Слева — многочлен степени n с неопределенными коэффициентами, справа — многочлен степени n, но с известными коэффициентами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему $(n+1)$ алгебраических уравнений для определения коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

б) Пусть α является однократным (простым) корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, т. е. $\alpha = k_1 \neq k_2$.

В этом случае искать решение в форме $y^* = Q_n(x)e^{\alpha x}$ нельзя, т. к. $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, и уравнение (51.13) принимает вид

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)\cdot Q_n'(x) = P_n(x).$$

В левой части — многочлен степени $(n-1)$, в правой части — многочлен степени n. Чтобы получить тождество многочленов в решении y^*, нужно иметь многочлен степени $(n+1)$. Поэтому частное решение y^* следует искать в виде $y^* = x\cdot Q_n(x)e^{\alpha x}$ (в равенстве (51.12) положить $r = 1$).

в) Пусть α является двукратным корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, т. е. $\alpha = k_1 = k_2$. В этом случае $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ и $2\alpha + p = 0$, а поэтому уравнение (51.13) принимает вид $Q_n''(x) = P_n(x)$.

Слева стоит многочлен степени $n - 2$. Понятно, чтобы иметь слева многочлен степени n, частное решение y^* следует искать в виде

$$y^* = x^2Q_n(x)e^{\alpha x}$$

(в равенстве (51.12) положить $r = 2$). ■

Случай 2. Правая часть (51.10) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}\cdot(P_n(x)\cdot\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x),$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно, α и β — действительные числа. Уравнение (51.10) запишется в виде

$$\boxed{y'' + py' + qy = e^{\alpha x}\cdot\big(P_n(x)\cdot\cos\beta x + Q_m(x)\cdot\sin\beta x\big).} \tag{51.14}$$

Можно показать, что в этом случае частное решение y^* уравнения (51.14) следует искать в виде

$$\boxed{y^* = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot \big(M_l(x) \cdot \cos\beta x + N_l(x) \cdot \sin\beta x\big),} \qquad (51.15)$$

где r — число, равное кратности $\alpha+\beta i$ как корня характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$, $M_l(x)$ и $N_l(x)$ — многочлены степени l с неопределенными коэффициентами, l — наивысшая степень многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, т. е. $l = \max(n, m)$.

Замечания.

1. После подстановки функции (51.15) в (51.14) приравнивают многочлены, стоящие перед одноименными тригонометрическими функциями в левой и правой частях уравнения.

2. Форма (51.15) сохраняется и в случаях, когда $P_n(x) \equiv 0$ или $Q_m(x) \equiv 0$.

3. Если правая часть уравнения (51.10) есть сумма функций вида I или II, то для нахождения y^* следует использовать теорему 51.2 о наложении решений.

Пример 51.2. Найти общее решение уравнения $y''-2y'+y = x-4$.

❍ Решение: Найдем общее решение $\widehat{y}$ ЛОДУ $y''-2y'+y=0$. Характеристическое уравнение $k^2-2k+1=0$ имеет корень $k_1 = 1$ кратности 2. Значит, $\widehat{y} = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x$. Находим частное решение исходного уравнения. В нем правая часть $x-4 = (x-4) \cdot e^{0\cdot x}$ есть формула вида $P_1(x) \cdot e^{0\cdot x}$, причем $\alpha = 0$, не является корнем характеристического уравнения: $\alpha \neq k_1$. Поэтому, согласно формуле (51.12), частное решение y^* ищем в виде $y^* = Q_1(x) \cdot e^{0\cdot x}$, т. е. $y^* = Ax+B$, где A и B — неопределенные коэффициенты. Тогда $(y^*)' = A$, $(y^*)'' = 0$. Подставив y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ в исходное уравнение, получим $-2A+Ax+B = x-4$, или $Ax + (-2A+B) = x-4$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A = 1, \\ -2A + B = -4. \end{cases}$$

Отсюда $A = 1$, $B = -2$. Поэтому частное решение данного уравнения имеет вид $y^* = x-2$. Следовательно, $y = (\widehat{y}+y^*) = c_1e^x + c_2xe^x + x - 2$ — искомое общее решение уравнения. ●

Пример 51.3. Решить уравнение $y'' - 4y' + 13y = 40 \cdot \cos 3x$.

❍ Решение: Общее решение ЛНДУ имеет вид $y = \widehat{y} + y^*$. Находим решение однородного уравнения $\widehat{y}$: $y'' - 4y' + 13y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 13 = 0$ имеет корни $k_1 = 2+3i$, $k_2 = 2-3i$. Следовательно, $\widehat{y} = e^{2x} \cdot (c_1 \cdot \cos 3x + c_2 \cdot \sin 3x)$.

Находим частное решение y^*. Правая часть ЛНДУ в нашем случае имеет вид $f(x) = e^{0\cdot x} \cdot (40\cos 3x + 0 \cdot \sin 3x)$. Так как $\alpha = 0$, $\beta = 3$, $\alpha + \beta i = 3i$ не совпадает с корнем характеристического уравнения, то $r = 0$. Согласно формуле (51.15), частное решение ищем в виде $y^* = A\cos 3x + B\sin 3x$. Подставляем y^* в исходное уравнение. Имеем: $(y^*)' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$, $(y^*)'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$. Получаем:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 4(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) + \\ + 13(A\cos 3x + B\sin 3x) = 40\cos 3x,$$

или

$$(-9A - 12B + 13A)\cos 3x + (-9B + 12A + 13B)\sin 3x = 40\cos 3x + 0\cdot\sin 3x.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{cases} 4A - 12B = 40, \\ 12A + 4B = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $A = 1$, $B = -3$. Поэтому $y^* = \cos 3x - 3\sin 3x$. И наконец, $y = e^{2x}(c_1 \cdot \cos 3x + c_2 \cdot \sin 3x) + \cos 3x - 3\sin 3x$ — общее решение уравнения. ●

Пример 51.4. (*Для самостоятельного решения.*) Для предложенных дифференциальных уравнений получить вид частного решения:

а) $y'' - 3y' + 2y = 5 + e^x$;
б) $y'' - 2y' + y = 2$;
в) $y'' + 4y = \sin 2x + \cos 7x$;
г) $y'' + y = 5\cos 2x - x\sin 2x$;
д) $y'' - 3y' = x^2 - 1 + \cos x$.

Ответы: а) $A + x \cdot B \cdot e^x$; б) A; в) $x(A\cos 2x + B\sin 2x) + C\cos 7x + D\sin 7x$; г) $(Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x$; д) $x(Ax^2+Bx+C) + D\cos x + E\sin x$.

51.4. Интегрирование ЛНДУ n-го порядка ($n > 2$) с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Рассмотрим линейное неоднородное ДУ n-го ($n > 2$) порядка

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + a_2(x) \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x) \cdot y = f(x),$$

где $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$, $f(x)$ — заданные непрерывные функции на $(a; b)$.

Соответствующее ему однородное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) \cdot y = 0.$$

Теорема 51.3 (о структуре общего решения ЛНДУ n-го порядка). Общее решение y ЛНДУ n-го порядка равно сумме частного решения y^* неоднородного уравнения и общего решения $\widehat{y}$ соответствующего ему однородного уравнения, т. е. $y = y^* + \widehat{y}$.

Частное решение y^* ЛНДУ n-го порядка может быть найдено, если известно общее решение $\widehat{y}$ однородного уравнения, методом вариации произвольных постоянных. Оно ищется в виде

$$y^* = c_1(x)\cdot y_1(x) + c_2(x)\cdot y_2(x) + \ldots + c_n(x)\cdot y_n(x),$$

где $y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, — частные решения, образующие фундаментальную систему, однородного уравнения.

Система уравнений для нахождения неизвестных $c_i(x)$ имеет вид

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_3'y_3 + \ldots + c_n'y_n = 0,\\ c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_3'y_3' + \ldots + c_n'y_n' = 0,\\ c_1'y_1'' + c_2'y_2'' + c_3'y_3'' + \ldots + c_n'y_n'' = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + c_3'y_3^{(n-1)} + \ldots + c_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Однако для ЛНДУ n-го порядка с *постоянными коэффициентами*, правая часть которого имеет специальный вид, частное решение y^* может быть найдено методом неопределенных коэффициентов.

Метод подбора частного решения y^* уравнения

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \ldots + p_ny = f(x),$$

где p_i — числа, а правая часть $f(x)$ имеет специальный вид, описанный в п. 51.3 для случая $n = 2$, переносится без всякого изменения и на случай уравнения, имеющего порядок $n > 2$.

Пример 51.5. Решить уравнение $y^{IV} - y' = 2x$.

Решение: Находим $\widehat{y}$:

$$k^4 - k = 0, \quad k(k-1)\cdot(k^2+k+1) = 0,$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 1, \quad k_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\widehat{y} = c_1 + c_2e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Находим y^*: $f(x) = 2x\ \left(= e^{0\cdot x}\cdot P_1(x)\right)$, $r = 1$, $y^* = x(Ax+B) = Ax^2+Bx$, отсюда

$$(y^*)' = 2Ax + B, \quad (y^*)'' = 2A, \quad (y^*)''' = 0, \quad (y^*)^{IV} = 0.$$

Тогда $-(2Ax+B) = 2x$. Отсюда $A = -1$, $B = 0$ и получаем $y^* = -x^2$. Следовательно, функция

$$y = (\widehat{y} + y^*) = c_1 + c_2e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - x^2$$

является общим решением уравнения. ●

§ 52. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

52.1. Основные понятия

Для решения многих задач математики, физики, техники (задач динамики криволинейного движения; задач электротехники для нескольких электрических цепей; определения состава системы, в которой протекают несколько последовательных химических реакций I порядка; отыскания векторных линий поля и других) нередко требуется несколько функций. Нахождение этих функций может привести к нескольким ДУ, образующим систему.

Системой ДУ называется совокупность ДУ, каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные.

Общий вид системы ДУ первого порядка, содержащей n искомых функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, следующий:

$$\begin{cases} F_1(x; y_1; y_2; \ldots; y_n; y_1'; y_2'; \ldots; y_n') = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ F_n(x; y_1; y_2; \ldots; y_n; y_1'; y_2'; \ldots; y_n') = 0. \end{cases}$$

Система ДУ первого порядка, разрешенных относительно производной, т. е. система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1; y_2; \ldots; y_n),\\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x; y_1; y_2; \ldots; y_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x; y_1; y_2; \ldots; y_n), \end{cases} \tag{52.1}$$

называется ***нормальной системой ДУ***. При этом предполагается, что число уравнений равно числу искомых функций.

Замечание. Во многих случаях системы уравнений и уравнения высших порядков можно привести к нормальной системе вида (52.1).

Так, система трех ДУ второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = F_1(x; y; z; t; x'; y'; z'), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = F_2(x; y; z; t; x'; y'; z'), \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = F_3(x; y; z; t; x'; y'; z'), \end{cases}$$

описывающая движение точки в пространстве, путем введения новых переменных: $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$, $\frac{dz}{dt} = w$, приводится к нормальной системе ДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u, \\ \dfrac{dy}{dt} = v, \\ \dfrac{dz}{dt} = w, \\ \dfrac{du}{dt} = F_1(x; y; z; t; u; v; w), \\ \dfrac{dv}{dt} = F_2(x; y; z; t; u; v; w), \\ \dfrac{dw}{dt} = F_3(x; y; z; t; u; v; w). \end{cases}$$

Уравнение третьего порядка $y''' = f(x; y; y'; y'')$ путем замены $y' = p$, $y'' = p' = q$ сводится к нормальной системе ДУ

$$\begin{cases} y' = p, \\ p' = q, \\ q' = f(x; y; p; q). \end{cases}$$

Из сказанного выше следует полезность изучения именно нормальных систем.

Решением системы (52.1) называется совокупность из n функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющих каждому из уравнений этой системы.

Начальные условия для системы (52.1) имеют вид

$$y_1(x_0) = y_1^0, \; y_2(x_0) = y_2^0, \ldots, y_n(x_0) = y_n^0. \tag{52.2}$$

Задача Коши для системы (52.1) ставится следующим образом: найти решение системы (52.1), удовлетворяющее начальным условиям (52.2).

Условия существования и единственности решения задачи Коши описывает следующая теорема, приводимая здесь без доказательства.

Теорема 52.1 (Коши). Если в системе (52.1) все функции

$$f_i(x; y_1; \ldots, y_n)$$

непрерывны вместе со всеми своими частными производными по y_i в некоторой области D ($(n+1)$-мерного пространства), то в каждой точке $M_0(x_0; y_1^0; y_2^0; \ldots; y_n^0)$ этой области существует, и притом единственное, решение $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, ..., $y_n = \varphi_n(x)$ системы, удовлетворяющее начальным условиям (52.2).

Меняя в области D точку M_0 (т. е. начальные условия), получим бесчисленное множество решений, которое можно записать в виде решения, зависящего от n произвольных постоянных:

$$y_1 = \varphi_1(x; c_1; c_2; \ldots; c_n), \ldots, y_n = \varphi_n(x; c_1; c_2; \ldots; c_n).$$

Это решение является *общим*, если по заданным начальным условиям (52.2) можно однозначно определить постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_n$ из системы уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x; c_1; c_2; \ldots; c_n) = y_1^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x; c_1; c_2; \ldots; c_n) = y_n^0. \end{cases}$$

Решение, получающееся из общего при конкретных значениях постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$, называется *частным решением системы* (52.1).

52.2. Интегрирование нормальных систем

Одним из основных методов интегрирования нормальной системы ДУ является *метод сведения системы к одному ДУ высшего порядка*. (Обратная задача — переход от ДУ к системе — рассмотрена выше на примере.) Техника этого метода основана на следующих соображениях.

Пусть задана нормальная система (52.1). Продифференцируем по x любое, например первое, уравнение:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}.$$

Подставив в это равенство значения производных $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ из системы (52.1), получим

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot f_n,$$

или, коротко,

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x; y_1; y_2; \ldots; y_n).$$

Продифференцировав полученное равенство еще раз и заменив значения производных $\frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ из системы (52.1), получим

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x; y_1; y_2; \ldots; y_n).$$

Продолжая этот процесс (дифференцируем — подставляем — получаем), находим:

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x; y_1; y_2; \ldots; y_n).$$

Соберем полученные уравнения в систему:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1; y_2; \ldots; y_n), \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x; y_1; y_2; \ldots; y_n), \\ \frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x; y_1; y_2; \ldots; y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x; y_1; y_2; \ldots; y_n). \end{cases} \tag{52.3}$$

Из первых $(n-1)$ уравнений системы (52.3) выразим функции $y_2, y_3, \ldots, y_n$ через x, функцию y_1 и ее производные $y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$. Получим:

$$\begin{cases} y_2 = \psi_2(x; y_1; y_1'; \ldots; y_1^{(n-1)}), \\ y_3 = \psi_3(x; y_1; y_1'; \ldots; y_1^{(n-1)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \psi_n(x; y_1; y_1'; \ldots; y_1^{(n-1)}). \end{cases} \tag{52.4}$$

Найденные значения $y_2, y_3, \ldots, y_n$ подставим в последнее уравнение системы (52.3). Получим одно ДУ n-го порядка относительно искомой функции y_1: $\frac{d^ny_1}{dx} = \Phi(x; y_1; y_1'; \ldots; y_1^{(n-1)})$. Пусть его общее решение есть

$$y_1 = \varphi_1(x; c_1; c_2; \ldots; c_n).$$

Продифференцировав его $(n-1)$ раз и подставив значения производных $y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$ в уравнения системы (52.4), найдем функции $y_2, y_3, \ldots, y_n$:

$$y_2 = \varphi_2(x; c_1; c_2; \ldots; c_n), \ldots, y_n = \varphi_n(x; c_1; c_2; \ldots; c_n).$$

Пример 52.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4y - 3z, \\ \frac{dz}{dx} = 2y - 3z. \end{cases}$$

○ Решение: Продифференцируем первое уравнение: $y'' = 4y' - 3z'$. Подставляем $z' = 2y - 3z$ в полученное равенство: $y'' = 4y' - 3(2y - 3z)$, $y'' - 4y' + 6y = 9z$. Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} y' = 4y - 3z, \\ y'' - 4y' + 6y = 9z. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выражаем z через y и y':

$$z = \frac{4y - y'}{3}. \tag{52.5}$$

Подставляем значение z во второе уравнение последней системы:

$$y'' - 4y' + 6y = \frac{9(4y - y')}{3},$$

т. е. $y'' - y' - 6y = 0$. Получили одно ЛОДУ второго порядка. Решаем его: $k^2 - k - 6 = 0$, $k_1 = -2$, $k_2 = 3$ и $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$ — общее решение уравнения. Находим функцию z. Значения y и $y' = (c_1e^{-2x} + c_2e^{3x})' = -2c_1e^{-2x} + 3c_2e^{3x}$ подставляем в выражение z через y и y' (формула (52.5)). Получим:

$$z = 2c_1e^{-2x} + \frac{1}{3}c_2e^{3x}.$$

Таким образом, общее решение данной системы уравнений имеет вид $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$, $z = 2c_1e^{-2x} + \frac{1}{3}c_2e^{3x}$. ●

Замечание. Систему уравнений (52.1) можно решать *методом интегрируемых комбинаций*. Суть метода состоит в том, что посредством арифметических операций из уравнений данной системы образуют так называемые интегрируемые комбинации, т. е. легко интегрируемые уравнения относительно новой неизвестной функции.

Проиллюстрируем технику этого метода на следующем примере.

Пример 52.2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 1, \\ \frac{dy}{dt} = x + 1. \end{cases}$$

○ Решение: Сложим почленно данные уравнения: $x' + y' = x + y + 2$, или $(x+y)' = (x+y) + 2$. Обозначим $x + y = z$. Тогда имеем $z' = z + 2$. Решаем полученное уравнение: $\frac{dz}{z+2} = dt$, $\ln(z+2) - \ln c_1 = t$, $\frac{z+2}{c_1} = e^t$, $z + 2 = c_1e^t$, или $x + y = c_1e^t - 2$.

Получили так называемый *первый интеграл системы*. Из него можно выразить одну из искомых функций через другую, тем самым уменьшить на единицу число искомых функций. Например, $y = c_1 e^t - 2 - x$. Тогда первое уравнение системы примет вид

$$x' = c_1 e^t - 2 - x + 1, \quad \text{т.е.} \quad x' + x = c_1 e^t - 1.$$

Найдя из него x (например, с помощью подстановки $x = uv$), найдем и y.

Замечание. Данная система «позволяет» образовать еще одну интегрируемую комбинацию: $x' - y' = y - x$, т. е. $(x-y)' = -(x-y)$. Положив $x - y = p$, имеем: $p' = -p$, или $\frac{dp}{p} = -dt$, $\ln p - \ln c_2 = -t$, $p = c_2 e^{-t}$, или $x - y = c_2 e^{-t}$. Имея два первых интеграла системы, т. е. $x + y = c_1 e^t - 2$ и $x - y = c_2 e^{-t}$, легко найти (складывая и вычитая первые интегралы), что $x = \frac{1}{2}c_1 e^t + \frac{1}{2}c_2 e^{-t} - 1$, $y = \frac{1}{2}c_1 e^t - \frac{1}{2}c_2 e^{-t} - 1$. ●

52.3. Системы линейных ДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим еще один метод интегрирования нормальной системы уравнений (52.1) в случае, когда она представляет собой *систему линейных однородных ДУ с постоянными коэффициентами*, т. е. систему вида

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{cases}$$

Для простоты ограничимся рассмотрением системы трех уравнений с тремя неизвестными функциями y_1, y_2 и y_3:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, \end{cases} \tag{52.6}$$

где все коэффициенты a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ — постоянные.

Будем искать частное решение системы (52.6) в виде

$$y_1 = \alpha \cdot e^{kx}, \; y_2 = \beta \cdot e^{kx}, \; y_3 = \gamma \cdot e^{kx}, \tag{52.7}$$

где α, β, γ, k — постоянные, которые надо подобрать (найти) так, чтобы функции (52.7) удовлетворяли системе (52.6).

Подставив эти функции в систему (52.6) и сократив на множитель $e^{kx} \neq 0$, получим:

$$\begin{cases} \alpha k = a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma, \\ \beta k = a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma, \\ \gamma k = a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0. \end{cases} \tag{52.8}$$

Систему (52.8) можно рассматривать как однородную систему трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными α, β, γ. Чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{52.9}$$

Уравнение (52.9) называется ***характеристическим уравнением*** системы (52.6). Раскрыв определитель, получим уравнение третьей степени относительно k. Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. Корни характеристического уравнения действительны и различны: k_1, k_2, k_3. Для каждого корня k_i $(i = 1, 2, 3)$ напишем систему (52.8) и определим коэффициенты α_i, β_i, γ_i (один из коэффициентов можно считать равным единице). Таким образом, получаем:

для корня k_1 частное решение системы (52.6): $y_1^{(1)} = \alpha_1 e^{k_1 x}$, $y_2^{(1)} = \beta_1 e^{k_1 x}$, $y_3^{(1)} = \gamma_1 e^{k_1 x}$;

для корня k_2 — $y_1^{(2)} = \alpha_2 e^{k_2 x}$, $y_2^{(2)} = \beta_2 e^{k_2 x}$, $y_3^{(2)} = \gamma_2 e^{k_2 x}$;

для корня k_3 — $y_1^{(3)} = \alpha_3 e^{k_3 x}$, $y_2^{(3)} = \beta_3 e^{k_3 x}$, $y_3^{(3)} = \gamma_3 e^{k_3 x}$.

Можно показать, что эти функции образуют фундаментальную систему, общее решение системы (52.6) записывается в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1\alpha_1 e^{k_1 x} + c_2\alpha_2 e^{k_2 x} + c_3\alpha_3 e^{k_3 x}, \\ y_2 &= c_1\beta_1 e^{k_1 x} + c_2\beta_2 e^{k_2 x} + c_3\beta_3 e^{k_3 x}, \\ y_3 &= c_1\gamma_1 e^{k_1 x} + c_2\gamma_2 e^{k_2 x} + c_3\gamma_3 e^{k_3 x}. \end{aligned} \tag{52.10}$$

Пример 52.3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -4y_1 + y_2. \end{cases}$$

○ Решение: Характеристическое уравнение (52.9) данной системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ -4 & 1-k \end{vmatrix} = 0,$$

или $1 - 2k + k^2 - 4 = 0$, $k^2 - 2k - 3 = 0$, $k_1 = -1$, $k_2 = 3$. Частные решения данной системы ищем в виде $y_1^{(1)} = \alpha_1 e^{k_1 x}$, $y_2^{(1)} = \beta_1 e^{k_1 x}$ и $y_1^{(2)} = \alpha_2 e^{k_2 x}$, $y_2^{(2)} = \beta_2 e^{k_2 x}$. Найдем α_i и β_1 $(i = 1, 2)$.

При $k_1 = -1$ система (52.8) имеет вид

$$\begin{cases}(1-(-1))\alpha_1 - \beta_1 = 0,\\ -4\alpha_1 + (1-(-1))\beta_1 = 0,\end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases}2\alpha_1 - \beta_1 = 0,\\ -4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0.\end{cases}$$

Эта система имеет бесчисленное множество решений. Положим $\alpha_1 = 1$, тогда $\beta_1 = 2$. Получаем частные решения

$$y_1^{(1)} = e^{-x} \quad \text{и} \quad y_2^{(1)} = 2e^{-x}.$$

При $k_2 = 3$ система (52.8) имеет вид

$$\begin{cases}-2\alpha_2 - \beta_2 = 0,\\ -4\alpha_2 - 2\beta_2 = 0.\end{cases}$$

Положим $\alpha_2 = 1$, тогда $\beta_2 = -2$. Значит, корню $k_2 = 3$ соответствуют частные решения:

$$y_1^{(2)} = e^{3x} \quad \text{и} \quad y_2^{(2)} = -2e^{3x}.$$

Общее решение исходной системы, согласно формуле (52.10), запишется в виде: $y_1 = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$, $y_2 = 2c_1e^{-x} - 2c_2e^{3x}$. ●

Случай 2. Корни характеристического уравнения различные, но среди них есть комплексные: $k_1 = a + ib$, $k_2 = a - ib$, k_3. Вид частных решений в этой ситуации определяют так же, как и в случае 1.

Замечание. Вместо полученных частных решений можно взять их линейные комбинации (п. 50.1, случай 3), применяя формулы Эйлера; в результате получим два действительных решения, содержащих функции вида $e^{ax} \cdot \cos bx$, $e^{ax} \cdot \sin bx$. Или, выделяя действительные и мнимые части в найденных комплексных частных решениях, получим два действительных частных решения (можно показать, что они тоже являются решениями уравнения). При этом понятно, что комплексно-сопряженный корень $k_2 = a - ib$ не даст новых линейно независимых действительных решений.

Пример 52.4. Найти частное решение системы

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2,\\[2mm] \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 + y_2 - y_3,\\[2mm] \dfrac{dy_3}{dx} = 3y_2 + y_3,\end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y_1(0) = 7$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 1$.

❍ Решение: Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}1-k & 1 & 0\\ -1 & 1-k & -1\\ 0 & 3 & 1-k\end{vmatrix} = 0,$$

$$(1-k)\cdot\begin{vmatrix}1-k & -1\\ 3 & 1-k\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1-k\end{vmatrix} = 0,$$

$$(1-k)(k^2-2k+4) - (k-1) = 0, \quad (1-k)(k^2-2k+5) = 0,$$
$$k_1 = 1, \quad k_2 = 1+2i, \quad k_3 = 1-2i.$$

Для $k_1 = 1$ получаем:

$$\begin{cases}0\cdot\alpha_1 + \beta_1 + 0\cdot\gamma_1 = 0,\\ -\alpha_1 + 0\cdot\beta_1 - \gamma_1 = 0,\\ 0\cdot\alpha_1 + 3\beta_1 + 0\cdot\gamma_1 = 0\end{cases}$$

(см. (52.8)). Отсюда находим: $\beta_1 = 0$, $\alpha_1 = 1$ (положили), $\gamma_1 = -1$. Частное решение системы: $y_1^{(1)} = e^x$, $y_2^{(1)} = 0$, $y_3^{(1)} = -e^x$.

Для $k_2 = 1 + 2i$ получаем (см. (52.8)):

$$\begin{cases}-2i\alpha_2 + \beta_2 = 0,\\ -\alpha_2 - 2i\beta_2 - \gamma_2 = 0,\\ 3\beta_2 - 2i\gamma_2 = 0.\end{cases}$$

Отсюда находим: $\alpha_2 = 1$ (положили), $\beta_2 = 2i$, $\gamma_2 = 3$. Частное комплексное решение системы:

$$y_1^{(2)} = e^{(1+2i)x}, \quad y_2^{(2)} = 2ie^{(1+2i)x}, \quad y_3^{(2)} = 3e^{(1+2i)x}.$$

В найденных решениях выделим действительную (Re) и мнимую (Im) части:

$$y_1^{(2)} = e^{(1+2i)x} = e^x(\cos 2x + i\sin 2x),$$
$$\operatorname{Re} y_1^{(2)} = e^x\cos 2x, \quad \operatorname{Im} y_1^{(2)} = e^x \sin 2x;$$
$$y_2^{(2)} = 2ie^{(1+2i)x} = e^x(2i\cos 2x - 2\sin 2x),$$
$$\operatorname{Re} y_2^{(2)} = -2e^x\sin 2x, \quad \operatorname{Im} y_2^{(2)} = 2e^x\cos 2x;$$
$$y_3^{(2)} = 3e^{(1+2i)x} = e^x(3\cos 2x + i3\sin 2x),$$
$$\operatorname{Re} y_3^{(2)} = 3e^x\cos 2x, \quad \operatorname{Im} y_3^{(2)} = 3e^x\sin 2x.$$

Как уже отмечено, корень $k_3 = 1 - 2i$ приведет к этим же самым решениям.

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$y_1 = c_1e^x + c_2e^x\cos 2x + c_3e^x\sin 2x,$$
$$y_2 = c_1\cdot 0 - 2c_2e^x\sin 2x + 2c_3e^x\cos 2x,$$
$$y_3 = -c_1e^x + 3c_2e^x\cos 2x + 3c_3e^x\sin 2x.$$

Выделим частное решение системы. При заданных начальных условиях получаем систему уравнений для определения постоянных c_1, c_2, c_3:

$$\begin{cases} 7 = c_1 + c_2 + 0, \\ 2 = 0 - 0 + 2c_3, \\ 1 = -c_1 + 3c_2 + 0, \end{cases} \implies c_1 = 5,\ c_2 = 2,\ c_3 = 1.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y_1 = 5e^x + 2e^x\cos 2x + e^x\sin 2x, \quad y_2 = -4e^x\sin 2x + 2e^x\cos 2x,$$
$$y_3 = -5e^x + 6e^x\cos 2x + 3e^x\sin 2x.$$ ●

Случай 3. Характеристическое уравнение имеет корень k кратности m ($m = 2, 3$). Решение системы, соответствующее кратному корню, следует искать в виде:

а) если $m = 2$, то $y_1 = (A + Bx)e^{kx}$, $y_2 = (C + Dx)e^{kx}$, $y_3 = (E + Fx)e^{kx}$;

б) если $m = 3$, то $y_1 = (A + Bx + Cx^2)e^{kx}$, $y_2 = (D + Ex + Fx^2)e^{kx}$, $y_3 = (G + Hx + Nx^2)e^{kx}$.

Это решение зависит от m произвольных постоянных. Постоянные $A, B, C, \ldots, N$ определяются методом неопределенных коэффициентов. Выразив все коэффициенты через m из них, полагаем поочередно один из них равным единице, а остальные равными нулю. Получим m линейно независимых частных решений системы (52.6).

Пример 52.5. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = -y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

❍ Решение: Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 & 1 \\ 1 & 1-k & -1 \\ 0 & -1 & 2-k \end{vmatrix} = 0,$$

$(1-k)(2-2k-k+k^2-1) - 1(-2+k+1) = 0$, $k_1 = 2$, $k_2 = k_3 = 1$. Корню $k_1 = 2$ соответствует система (см. (52.8)):

$$\begin{cases} -\alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 = 0, \\ \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 = 0, \\ -\beta_1 = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} \beta_1 = 0, \\ \alpha_1 - \gamma_1 = 0. \end{cases}$$

Полагая $\gamma_1 = 1$, находим $\alpha_1 = 1$. Получаем одно частное решение исходной системы: $y_1^{(1)} = e^{2x}$, $y_2^{(1)} = 0$, $y_3^{(1)} = e^{2x}$.

Двукратному корню $k = k_2 = k_3 = 1$ ($m = 2$) соответствует решение вида $y_1^{(2,3)} = (A + Bx)e^x$, $y_2^{(2,3)} = (C + Dx)e^x$, $y_3^{(2,3)} = (E + Fx)e^x$. Подставляем эти выражения (решения) в уравнения исходной системы:

$$\begin{cases} B\cdot e^x + (A + Bx)e^x = (A + Bx)e^x - (C + Dx)e^x + (E + Fx)e^x, \\ D\cdot e^x + (C + Dx)e^x = (A + Bx)e^x + (C + Dx)e^x - (E + Fx)e^x, \\ F\cdot e^x + (E + Fx)e^x = -(C + Dx)e^x + 2(E + Fx)e^x, \end{cases}$$

или, после сокращения на $e^x \neq 0$ и группировки,

$$\begin{cases} (D - F)x + B + C - E = 0, \\ (B - F)x + A - D - E = 0, \\ (D - F)x + C + F - E = 0. \end{cases}$$

Эти равенства тождественно выполняются лишь в случае, когда

$$\begin{cases} D - F = 0, \\ B - F = 0, \\ B + C - E = 0, \\ A - D - E = 0, \\ C + F - E = 0. \end{cases}$$

Выразим все коэффициенты через два из них ($m = 2$), например через A и B. Из второго уравнения имеем $F = B$. Тогда, с учетом первого уравнения, получаем $D = B$. Из четвертого уравнения находим $E = A - D$, т. е. $E = A - B$. Из третьего уравнения: $C = E - B$, т. е. $C = A - B - B$, или $C = A - 2B$. Коэффициенты A и B — произвольные.

Полагая $A = 1$, $B = 0$, находим: $C = 1$, $D = 0$, $E = 1$, $F = 0$.

Полагая $A = 0$, $B = 1$, находим: $C = -2$, $D = 1$, $E = -1$, $F = 1$.

Получаем два линейно независимых частных решения, соответствующих двукратному корню $k = 1$:

$$y_1^{(2)} = e^x, \quad y_2^{(2)} = e^x, \quad y_3^{(2)} = e^x \quad \text{и}$$

$$y_1^{(3)} = xe^x, \quad y_2^{(3)} = (-2 + x)e^x, \quad y_3^{(3)} = (-1 + x)e^x.$$

Записываем общее решение исходной системы:

$$y_1 = c_1e^{2x} + c_2e^x + c_3xe^x, \quad y_2 = c_2e^x + c_3(x - 2)e^x,$$
$$y_3 = c_1e^{2x} + c_2e^x + c_3(x - 1)e^x.$$ ●

Глава XIII. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Лекции 51–52

§ 59. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

59.1. Основные понятия

Бесконечные ряды широко используются в теоретических исследованиях математического анализа, имеют разнообразные практические применения.

Числовым рядом (или просто *рядом*) называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{59.1}$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — действительные или комплексные числа, называемые ***членами ряда***, u_n — ***общим членом*** ряда.

Ряд (59.1) считается заданным, если известен общий член ряда u_n, выраженный как функция его номера n: $u_n = f(n)$.

Сумма первых n членов ряда (59.1) называется n-й ***частичной суммой*** ряда и обозначается через S_n, т. е. $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Рассмотрим частичные суммы

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots$$

Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ последовательности частичных сумм ряда (59.1), то этот предел называют ***суммой ряда*** (59.1) и говорят, что ряд ***сходится***. Записывают: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд (59.1) называют ***расходящимся***. Такой ряд суммы не имеет.

Рассмотрим примеры.

1. Ряд $2 + 17 - 3\frac{1}{4} + 196 + \ldots$ нельзя считать заданным, а ряд $2+5+8+\ldots$ — можно: его общий член задается формулой $u_n = 3n-1$.

2. Ряд $0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$ сходится, его сумма равна 0.

3. Ряд $1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$ расходится, $S_n = n \to \infty$ при $n \to \infty$.

4. Ряд $1-1+1-1+1-1+\ldots$ расходится, так как последовательность частичных сумм $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ $(S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, \ldots)$ не имеет предела.

5. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится. Действительно,

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},$$
$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

т. е. ряд сходится, его сумма равна 1.

Рассмотрим некоторые важные свойства рядов.

Свойство 1. Если ряд (59.1) сходится и его сумма равна S, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n + \ldots, \tag{59.2}$$

где c — произвольное число, также сходится и его сумма равна cS. Если же ряд (59.1) расходится и $c \neq 0$, то и ряд (59.2) расходится.

☐ Обозначим n-ю частичную сумму ряда (59.2)через $S_n^{(u)}$. Тогда

$$S_n^{(u)} = cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = c \cdot S_n.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} S_n = c \cdot S,$$

т. е. ряд (59.2) сходится и имеет сумму cS.

Покажем теперь, что если ряд (59.1) расходится, $c \neq 0$, то и ряд (59.2) расходится. Допустим противное: ряд (59.2) сходится и имеет сумму S_1. Тогда

$$S_1 = \lim_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Отсюда получаем:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{c},$$

т. е. ряд (59.1) сходится, что противоречит условию о расходимости ряда (59.1). ■

Свойство 2. Если сходится ряд (59.1) и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n, \tag{59.3}$$

а их суммы равны S_1 и S_2 соответственно, то сходятся и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n), \tag{59.4}$$

причем сумма каждого равна соответственно $S_1 \pm S_2$.

❑ Обозначим n-е частичные суммы рядов (59.1), (59.3) и (59.4) через $S_n^{(u)}$, $S_n^{(v)}$ и S_n соответственно. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(S_n^{(u)} \pm S_n^{(v)}) = \lim_{n\to\infty} S_n^{(u)} \pm \lim_{n\to\infty} S_n^{(v)} = S_1 \pm S_2,$$

т. е. каждый из рядов (59.4) сходится, и сумма его равна $S_1 \pm S_2$ соответственно. ■

Из свойства 2 вытекает, что сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд.

В справедливости этого утверждения можно убедиться методом от противного.

Заметим, что сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

Свойство 3. Если к ряду (59.1) прибавить (или отбросить) конечное число членов, то полученный ряд и ряд (59.1) сходятся или расходятся одновременно.

❑ Обозначим через S сумму отброшенных членов, через k — наибольший из номеров этих членов. Чтобы не менять нумерацию оставшихся членов ряда (59.1), будем считать, что на месте отброшенных членов поставили нули. Тогда при $n > k$ будет выполняться равенство $S_n - S'_n = S$, где S'_n — это n-я частичная сумма ряда, полученного из ряда (59.1) путем отбрасывания конечного числа членов. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S + \lim\limits_{n\to\infty} S'_n$. Отсюда следует, что пределы в левой и правой частях одновременно существуют или не существуют, т. е. ряд (59.1) сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходятся (расходятся) ряды без конечного числа его членов.

Аналогично рассуждаем в случае приписывания к ряду конечного числа членов. ■

Ряд

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \tag{59.5}$$

называется n-м *остатком ряда* (59.1). Он получается из ряда (59.1) отбрасыванием n первых его членов. Ряд (59.1) получается из остатка добавлением конечного числа членов. Поэтому, согласно свойству 3, ряд (59.1) и его остаток (59.5) одновременно сходятся или расходятся.

Из свойства 3 также следует, что если ряд (59.1) сходится, то его остаток $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$ стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

59.2. Ряд геометрической прогрессии

Исследуем сходимость ряда

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (a \neq 0), \tag{59.6}$$

который называется *рядом геометрической прогрессии*. Ряд (59.6) часто используется при исследовании рядов на сходимость.

Как известно, сумма первых n членов прогрессии находится по формуле $S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$. Найдем предел этой суммы:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}.$$

Рассмотрим следующие случаи в зависимости от величины q:

1. Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$, ряд (59.6) сходится, его сумма равна $\dfrac{a}{1-q}$;

2. Если $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, ряд (59.6) расходится;

3. Если $|q| = 1$, то при $q = 1$ ряд (59.6) принимает вид $a + a + a + \dots + a + \dots$, для него $S_n = n \cdot a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т. е. ряд (59.6) расходится; при $q = -1$ ряд (59.6) принимает вид $a - a + a - a + \dots$ — в этом случае $S_n = 0$ при четном n и $S_n = a$ при нечетном n. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, ряд (59.6) расходится.

Итак, ряд геометрической прогрессии сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$.

Пример 59.1. Показать, что ряд $2^3 + 2^2 + 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-3}} + \dots$ сходится.

◐ Решение: Данный ряд можно переписать так:

$$2^3 \cdot 1 + 2^3 \cdot \frac{1}{2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + 2^3 \cdot \frac{1}{2^n} + \dots$$

Как видно, он представляет собой ряд геометрической прогрессии с $a = 2^3$ и $q = \frac{1}{2} < 1$. Этот ряд сходится согласно свойству 1 числовых рядов. ●

59.3. Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд

Нахождение n-й частичной суммы S_n и ее предела для произвольного ряда во многих случаях является непростой задачей. Поэтому для выяснения сходимости ряда устанавливают специальные *признаки сходимости*. Первым из них, как правило, является необходимый признак сходимости.

Теорема 59.1. Если ряд (59.1) сходится, то его общий член u_n стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

❑ Пусть ряд (59.1) сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ (при $n\to\infty$ и $(n-1)\to\infty$). Учитывая, что $u_n = S_n - S_{n-1}$ при $n > 1$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \quad \blacksquare$$

Следствие 59.1 (достаточное условие расходимости ряда). Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится.

❑ Действительно, если бы ряд сходился, то (по теореме) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Но это противоречит условию. Значит, ряд расходится. ■

Пример 59.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-2}{n+5}$.

❍ Решение: Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-2}{n+5}$ расходится, т. к.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{n+5} = 3 \neq 0,$$

т. е. выполняется достаточное условие расходимости ряда. ●

Пример 59.3. Исследовать сходимость ряда

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 + \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \ldots$$

❍ Решение: Данный ряд расходится, т. к. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$. ●

Теорема 59.1 дает необходимое условие сходимости ряда, но не достаточное: из условия $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ не следует, что ряд сходится. Это означает, что существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

В качестве примера рассмотрим так называемый *гармонический ряд*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots} \qquad (59.7)$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Однако ряд (59.7) расходится. Покажем это.

❑ Как известно (см. (17.14)), $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Отсюда следует, что при любом $n\in\mathbb{N}$ имеет место неравенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$. Логарифмируя это неравенство по основанию e, получим:

$$n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1,$$

т. е.

$$\frac{1}{n} > \ln\frac{n+1}{n}, \quad \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n.$$

Подставляя в полученное неравенство поочередно $n = 1, 2, \ldots, n-1, n$, получим:

$$\begin{aligned} &1 > \ln 2,\\ &\frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2,\\ &\frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n. \end{aligned}$$

Сложив почленно эти неравенства, получим $S_n > \ln(n+1)$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1) = \infty$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т. е. гармонический ряд (59.7) расходится. ■

В качестве второго примера можно взять ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Однако этот ряд расходится.

□ Действительно,

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n = \sqrt{n},$$

т. е. $S_n > \sqrt{n}$. Следовательно, $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$, ряд расходится. ■

§ 60. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЗНАКОПОСТОЯННЫХ РЯДОВ

Необходимый признак сходимости не дает, вообще говоря, возможности судить о том, сходится ли данный ряд или нет. Сходимость и расходимость ряда во многих случаях можно установить с помощью так называемых *достаточных признаков*.

Рассмотрим некоторые из них для ***знакоположительных*** рядов, т. е. рядов с неотрицательными членами (знакоотрицательный ряд переходит в знакоположительный путем умножения его на (-1), что, как известно, не влияет на сходимость ряда).

60.1. Признаки сравнения рядов

Сходимость или расходимость знакоположительного ряда часто устанавливается путем сравнения его с другим («эталонным») рядом, о котором известно, сходится он или нет. В основе такого сравнения лежат следующие теоремы.

Теорема 60.1. Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{60.1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{60.2}$$

Если для всех n выполняется неравенство

$$u_n \leqslant v_n, \tag{60.3}$$

то из сходимости ряда (60.2) следует сходимость ряда (60.1), из расходимости ряда (60.1) следует расходимость ряда (60.2).

□ Обозначим n-е частичные суммы рядов (60.1) и (60.2) соответственно через $S_n^{(u)}$ и $S_n^{(v)}$. Из неравенства (60.3) следует, что

$$S_n^{(u)} \leqslant S_n^{(v)}. \tag{60.4}$$

Пусть ряд (60.2) сходится и его сумма равна S_2. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(v)} = S_2$. Члены ряда (60.2) положительны, поэтому $S_n^{(v)} < S_2$ и, следовательно, с учетом неравенства (60.4), $S_n^{(u)} \leqslant S_2$. Таким образом, последовательность $S_1^{(u)}, S_2^{(u)}, S_n^{(u)}, \ldots$ монотонно возрастает ($u_n > 0$) и ограничена сверху числом S_2. По признаку существования предела (см. теорема 15.3) последовательность $\{S_n^{(u)}\}$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(n)} = S_1$, т. е. ряд (60.1) сходится.

Пусть теперь ряд (60.1) расходится. Так как члены ряда неотрицательны, в этом случае имеем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \infty$. Тогда, с учетом неравенства (60.4), получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(v)} = \infty$, т. е. ряд (60.2) расходится. ■

Замечание. Теорема 60.1 справедлива и в том случае, когда неравенство (60.3) выполняется не для всех членов рядов (60.1) и (60.2), а начиная с некоторого номера N. Это вытекает из свойства 3 числовых рядов (см. п. 59.1).

Теорема 60.2 (предельный признак сравнения). Пусть даны два знакоположительных ряда (60.1) и (60.2). Если существует конечный, отличный от 0, предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$ $(0 < A < \infty)$, то ряды (60.1) и (60.2) сходятся или расходятся одновременно.

□ По определению предела последовательности (см. п. 15.2) для всех n, кроме, возможно, конечного числа их, для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\left|\frac{u_n}{v_n} - A\right| < \varepsilon$, или

$$(A-\varepsilon)\cdot v_n < u_n < (A+\varepsilon)\cdot v_n. \tag{60.5}$$

Если ряд (60.1) сходится, то из левого неравенства (60.5) и теоремы 60.1 вытекает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A-\varepsilon)v_n$ также сходится. Но тогда, согласно свойству 1 числовых рядов (см. п. 59.1), ряд (60.2) сходится.

Если ряд (60.1) расходится, то из правого неравенства (60.5), теоремы 60.1, свойства 1 вытекает, что и ряд (60.2) расходится.

Аналогично, если ряд (60.2) сходится (расходится), то сходящимся (расходящимся) будет и ряд (60.1). ■

Пример 60.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^n}$.

○ Решение: Сравним данный ряд с рядом геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, который сходится ($q = \frac{1}{2} < 1$). Имеем $\frac{1}{3+2^n} < \frac{1}{2^n}$. Следовательно, данный ряд сходится.

Пример 60.2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

○ Решение: Здесь $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Возьмем ряд с общим членом $v_n = \frac{1}{n}$, который расходится (гармонический ряд). Имеем $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \geqslant \frac{1}{n}$. Следовательно, данный ряд расходится.

Пример 60.3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{5n}$.

○ Решение: Применим предельный признак сравнения. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{5} \neq 0$ (см. пример 17.7), то по теореме 60.2 исходный ряд расходится, как сравнимый с гармоническим рядом. ●

60.2. Признак Даламбера

В отличие от признаков сравнения, где все зависит от догадки и запаса известных сходящихся и расходящихся рядов, признак Даламбера (1717–1783, французский математик) позволяет часто решить вопрос о сходимости ряда, проделав лишь некоторые операции над самим рядом.

Теорема 60.3. Пусть дан ряд (59.1) с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

□ Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то по определению предела для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что при $n > N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \varepsilon \quad \text{или} \quad l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon. \tag{60.6}$$

Пусть $l < 1$. Можно подобрать ε так, что число $l+\varepsilon < 1$. Обозначим $l + \varepsilon = q$, $q < 1$. Тогда из правой части неравенства (60.6) получаем $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$, или $u_{n+1} < q \cdot u_n$, $n > N$. В силу свойства 3 числовых рядов

можно считать, что $u_{n+1} < q \cdot u_n$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ Давая номеру n эти значения, получим серию неравенств:

$$\begin{aligned} &u_2 < q \cdot u_1, \\ &u_3 < q \cdot u_2 < q^2 u_1, \\ &u_4 < q \cdot u_3 < q^3 u_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &u_n < q \cdot u_n < q^{n-1} u_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

т. е. члены ряда $u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots$ меньше соответствующих членов ряда $qu_1 + q^2u_1 + q^3u_1 + \ldots + q^{n+1}u_1 + \ldots$, который сходится как ряд геометрической прогрессии со знаменателем $0 < q < 1$. Но тогда, на основании признака сравнения, сходится ряд $u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$, следовательно, сходится и исходный ряд (59.1).

Пусть $l > 1$. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l > 1$. Отсюда следует, что, начиная с некоторого номера N, выполняется неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, или $u_{n+1} > u_n$, т. е. члены ряда возрастают с увеличением номера n. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. На основании следствия из необходимого признака (см. п. 59.3) ряд (59.1) расходится. ■

Замечания.

1. Если $l = 1$, то ряд (59.1) может быть как сходящимся, так и расходящимся.

2. Признак Даламбера целесообразно применять, когда общий член ряда содержит выражение вида $n!$ или a^n.

Пример 60.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

○ Решение: Находим

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Так как $l = 0 < 1$, то данный ряд по признаку Даламбера сходится. ●

Пример 60.5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$.

○ Решение: Вычисляем

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}:\frac{3^n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3\cdot n^2}{3^n\cdot(n+1)^2}=$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2=3.$$

Так как $l=3>1$, то данный ряд по признаку Даламбера расходится. ●

60.3. Радикальный признак Коши

Иногда удобно пользоваться *радикальным признаком Коши* для исследования сходимости знакоположительного ряда. Этот признак во многом схож с признаком Даламбера, о чем говорят его формулировка и доказательство.

Теорема 60.4. Пусть дан ряд (59.1) с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$. Тогда ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$.

Как и для признака Даламбера, в случае, когда $l=1$, вопрос о сходимости ряда остается открытым. Доказательство теоремы аналогично доказательству признака Даламбера. Поэтому опустим его.

Пример 60.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

○ Решение: Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},$$

то применим радикальный признак Коши к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Вычисляем

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{e}<1.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ сходится, а значит, сходится и исходный ряд, согласно свойству 1 числовых рядов. ●

60.4. Интегральный признак Коши. Обобщенный гармонический ряд

Теорема 60.5. Если члены знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1;+\infty)$ функции $f(x)$ так, что $u_1=f(1), u_2=f(2),\ldots,u_n=f(n),\ldots$, то:

1) если $\int\limits_1^{+\infty}f(x)\,dx$ сходится, то сходится и ряд (59.1);

2) если $\int\limits_1^{+\infty}f(x)\,dx$ расходится, то расходится также и ряд (59.1).

О сходимости несобственных интегралов см. § 40.

❑ Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $y=f(x)$, основанием которой служит отрезок оси Ox от $x=1$ до $x=n$ (см. рис. 258).

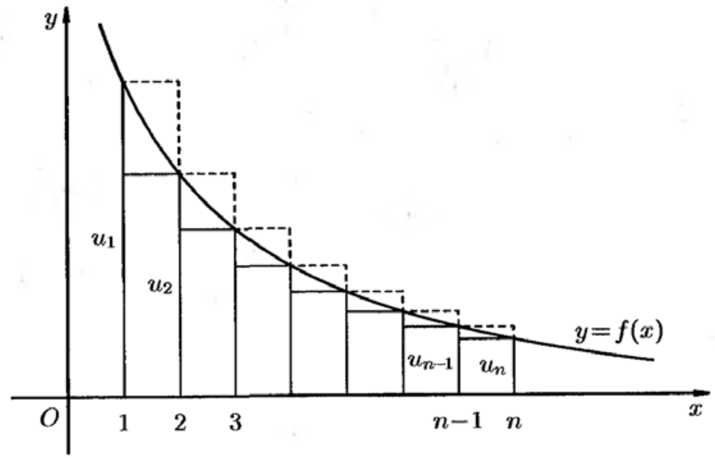


Рис. 258

Построим входящие и выходящие прямоугольники, основаниями которых служат отрезки $[1;2]$, $[2;3]$, … Учитывая геометрический смысл определенного интеграла, запишем:

$$f(2)\cdot1+f(3)\cdot1+\ldots+f(n)\cdot1<\int_1^n f(x)\,dx<f(1)\cdot1+f(2)\cdot1+\ldots+f(n-1)\cdot1,$$

или

$$u_2+u_3+\ldots+u_n<\int\limits_1^n f(x)\,dx<u_1+u_2+\ldots+u_{n-1},$$

или

$$S_n-u_1<\int\limits_1^n f(x)\,dx<S_n-u_n. \qquad (60.7)$$

Случай 1. Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, т. е. $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx=A$. Поскольку $\int\limits_1^n f(x)\,dx<\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx=A$, то с учетом неравенства (60.7) имеем: $S_n-u_1<A$, т. е. $S_n<u_1+A$. Так как последовательность частичных сумм монотонно возрастает и ограничена сверху (числом u_1+A), то, по признаку существования предела, имеет предел. Следовательно, ряд (59.1) сходится.

Случай 2. Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится. Тогда $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx=+\infty$ и интегралы $\int\limits_1^n f(x)\,dx$ неограниченно возрастают при $n\to\infty$. Учитывая, что $S_n>\int\limits_1^n f(x)\,dx+u_n$ (см. (60.7)), получаем, что $S_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Следовательно, данный ряд (59.1) расходится. ■

Замечание. Вместо интеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ можно брать интеграл $\int\limits_k^{+\infty} f(x)\,dx$, где $k\in\mathbb{N}$, $k>1$. Отбрасывание k первых членов ряда в ряде (59.1), как известно, не влияет на сходимость (расходимость) ряда.

Пример 60.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$.

○ Решение: Воспользуемся интегральным признаком Коши. Функция $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ удовлетворяет условиям теоремы 60.5. Находим

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\ln|\ln x|\Big|_2^{\infty}=\infty.$$

Значит, ряд с общим членом $u_n=\frac{1}{x\ln x}$ расходится. ●

Ряд

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots,} \qquad (60.8)$$

где $p>0$ — действительное число, называется *обобщенным гармоническим рядом.* Для исследования ряда (60.8) на сходимость применим интегральный признак Коши (признаки Даламбера и Коши ответа о сходимости не дают).

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x^p}$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает на промежутке $[1;+\infty)$ и $f(n)=\frac{1}{n^p}=u_n$. При $p\neq1$ имеем:

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{a\to\infty}\int\limits_1^a x^{-p}\,dx=\lim_{a\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^a=$$

$$=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{a^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right)=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & \text{если } p>1,\\ \infty, & \text{если } p<1.\end{cases}$$

При $p=1$ имеем гармонический ряд $u_n=\frac{1}{n}$, который расходится (второй способ: $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\infty$). Итак, ряд (60.8) сходится при $p>1$, расходится при $p\leqslant 1$. В частности, ряд $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$ сходится (полезно знать).

Рассмотренные признаки сходимости (есть и другие) знакоположительных рядов позволяют судить о сходимости практически любого положительного ряда. Необходимые навыки приобретаются на практике.

§ 61. ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ И ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

61.1. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Рассмотрим важный класс рядов, называемых знакочередующимися. *Знакочередующимся рядом* называется ряд вида

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n, \qquad (61.1)$$

где $u_n>0$ для всех $n\in\mathbb{N}$ (т. е. ряд, положительные и отрицательные члены которого следуют друг за другом поочередно).

Для знакочередующихся рядов имеет место *достаточный* признак сходимости (установленный в 1714 г. Лейбницем в письме к И. Бернулли).

Теорема 61.1 (признак Лейбница). Знакочередующийся ряд (61.1) сходится, если:
1. Последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т. е. $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$;
2. Общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

При этом сумма S ряда (61.1) удовлетворяет неравенствам
$$0 < S < u_1. \tag{61.2}$$

☐ Рассмотрим сначала частичную сумму четного числа $(2m)$ членов ряда (61.1). Имеем
$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2m-1} - u_{2m} =$$
$$= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$
Выражение в каждой скобке, согласно первому условию теоремы, положительно. Следовательно, сумма $S_{2m} > 0$ и возрастает с возрастанием номера $2m$.

С другой стороны, S_{2m} можно переписать так:
$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$
Легко видеть, что $S_{2m} < u_1$. Таким образом, последовательность $S_2, S_4, S_6, \dots, S_{2m}, \dots$ возрастает и ограничена сверху. Следовательно, она имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2m} = S$, причем $0 < S < u_1$.

Рассмотрим теперь частичные суммы нечетного числа $(2m+1)$ членов ряда (61.1). Очевидно, что $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$. Отсюда следует, что
$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} (S_{2m} + u_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + 0 = S,$$
т. к. $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$ в силу второго условия теоремы. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ как при четном n, так и при нечетном n. Следовательно, ряд (61.1) сходится, причем $0 < S < u_1$. ■

Замечания.

1. Исследование знакочередующегося ряда вида
$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots \tag{61.3}$$
(с отрицательным первым членом) сводится путем умножения всех его членов на (-1) к исследованию ряда (61.1).

Ряды (61.1) и (61.3), для которых выполняются условия теоремы Лейбница, называются *лейбницевскими* (или рядами Лейбница).

2. Соотношение (61.2) позволяет получить простую и удобную оценку ошибки, которую мы допускаем, заменяя сумму S данного ряда его частичной суммой S_n. Отброшенный ряд (остаток) представляет собой также знакочередующийся ряд $(-1)^{n+1}(u_{n+1} - u_{n+2} + \dots)$, сумма которого по модулю меньше первого члена этого ряда, т. е. $S_n < u_{n+1}$. Поэтому ошибка меньше модуля первого из отброшенных членов.

Пример 61.1. Вычислить приблизительно сумму ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^n}.$$

○ Решение: Данный ряд лейбницевского типа. Он сходится. Можно записать: $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \dots = S$. Взяв пять членов, т. е. заменив S на
$$S_5 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} \approx 0{,}7834,$$
сделаем ошибку, меньшую, чем $\frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656} < 0{,}00003$. Итак, $S \approx 0{,}7834$. ●

61.2. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов

Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется ***знакопеременным***.

Для знакопеременных рядов имеет место следующий *общий достаточный признак сходимости*.

Теорема 61.2. Пусть дан знакопеременный ряд
$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{61.4}$$
Если сходится ряд
$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots, \tag{61.5}$$
составленный из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд (61.4).

❑ Рассмотрим вспомогательный ряд, составленный из членов рядов (61.4) и (61.5):

$$(u_1 + |u_1|) + (u_2 + |u_2|) + \ldots + (u_n + |u_n|) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n + |u_n|).$$

Очевидно, что $0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2|u_n|$ сходится в силу условия теоремы и свойства 1 числовых рядов (п. 59.1). Следовательно, на основании признака сравнения (п. 59.3) сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + |u_n|)$. Поскольку данный знакопеременный ряд (61.4) представляет собой разность двух сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n + |u_n|) - \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|,$$

то, на основании свойства 2 числовых рядов, он (ряд (61.4)) сходится. ■

Отметим, что обратное утверждение несправедливо: если сходится ряд (61.4), то это не означает, что будет сходиться ряд (61.5).

Пример 61.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$.

❍ Решение: Это знакочередующийся ряд, для которого выполнены условия признака Лейбница. Следовательно, указанный ряд сходится. Однако ряд, составленный из модулей членов данного ряда, т. е. ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

расходится (гармонический ряд). ●

61.3. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов

Знакопеременный ряд называется ***абсолютно сходящимся***, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится.

Знакопеременный ряд называется ***условно сходящимся***, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Так, ряд, показанный в примере (61.2), условно сходящийся. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}$$

абсолютно сходится, т. к. ряд, составленный из модулей его членов, сходится (см. пример 60.4).

Среди знакопеременных рядов абсолютно сходящиеся ряды занимают особое место: на такие ряды переносятся основные свойства конечных сумм (переместительность, сочетательность, распределительность).

Основные свойства абсолютно сходящихся рядов приводим без доказательства.

1. Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму S, то ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму S, что и исходный ряд (теорема Дирихле).

2. Абсолютно сходящиеся ряды с суммами S_1 и S_2 можно почленно складывать (вычитать). В результате получается абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 + S_2$ (или соответственно $S_1 - S_2$).

3. Под произведением двух рядов $u_1 + u_2 + \ldots$ и $v_1 + v_2 + \ldots$ понимают ряд вида

$$(u_1v_1) + (v_1v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1) + \ldots$$
$$\ldots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \ldots + u_nv_1) + \ldots$$

Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с суммами S_1 и S_2 есть абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 \cdot S_2$.

Таким образом, абсолютно сходящиеся ряды суммируются, вычитаются, перемножаются как обычные ряды. Суммы таких рядов не зависят от порядка записи членов.

В случае условно сходящихся рядов соответствующие утверждения (свойства), вообще говоря, не имеют места.

Так, переставляя члены условно сходящегося ряда, можно добиться того, что сумма ряда изменится. Например, ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ условно сходится по признаку Лейбница. Пусть его сумма равна S. Перепишем его члены так, что после одного положительного члена будут идти два отрицательных. Получим ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\right) = \frac{1}{2}S.$$

Сумма уменьшилась вдвое!

Более того, путем перестановки членов условно сходящегося ряда можно получить сходящийся ряд с заранее заданной суммой или расходящийся ряд (теорема Римана).

Поэтому действия над рядами нельзя производить, не убедившись в их абсолютной сходимости. Для установления абсолютной сходимости используют все признаки сходимости знакоположительных рядов, заменяя всюду общий член ряда его модулем.

Глава XIV. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Лекции 53–55

§ 62. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

62.1. Основные понятия

Ряд, членами которого являются функции от x, называется *функциональным*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x_1) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (62.1)$$

Придавая x определенное значение x_0, мы получим числовой ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots,$$

который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если полученный числовой ряд сходится, то точка x_0 называется ***точкой сходимости*** ряда (62.1); если же ряд расходится — ***точкой расходимости*** функционального ряда.

Совокупность числовых значений аргумента x, при которых функциональный ряд сходится, называется его *областью сходимости*.

В области сходимости функционального ряда его сумма является некоторой функцией от x: $S = S(x)$. Определяется она в области сходимости равенством

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \quad \text{где} \quad S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) \ —$$

частичная сумма ряда.

Пример 62.1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

○ Решение: Данный ряд является рядом геометрической прогрессии со знаменателем $q = x$. Следовательно, этот ряд сходится при $|x| < 1$, т. е. при всех $x \in (-1; 1)$; сумма ряда равна $\frac{1}{1-x}$:

$$S(x) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{при} \quad |x| < 1.}$$ ●

Пример 62.2. Исследовать сходимость функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}.$$

○ Решение: Составим ряд из абсолютных величин членов исходного ряда:

$$\left|\frac{\sin x}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2^2 x}{2^2}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| + \ldots \tag{62.2}$$

Так как при любом $x \in \mathbb{R}$ имеет место соотношение $\left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, а ряд с общим членом $\frac{1}{n^2}$ сходится (обобщенный гармонический ряд, $p = 2 > 1$, см. п. 60.4), то по признаку сравнения ряд (62.2) сходится при $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, исходный ряд абсолютно сходится при всех $x \in \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$. ●

Среди функциональных рядов в математике и ее приложениях особую роль играет ряд, членами которого являются степенные функции аргумента x, т. е. так называемый ***степенной ряд***:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{62.3}$$

Действительные (или комплексные) числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются ***коэффициентами ряда*** (62.3), $x \in \mathbb{R}$ — действительная переменная.

Ряд (62.3) расположен по степеням x. Рассматривают также степенной ряд, расположенный по степеням $(x - x_0)$, т. е. ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \tag{62.4}$$

где x_0 — некоторое постоянное число.

Ряд (62.4) легко приводится к виду (62.3), если положить $x - x_0 = z$. Поэтому при изучении степенных рядов можем ограничиться степенными рядами вида (62.3).

§ 63. СХОДИМОСТЬ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Выясним вопрос о сходимости степенного ряда (62.3).

Область сходимости степенного ряда (62.3) содержит по крайней мере одну точку: $x = 0$ (ряд (62.4) сходится в точке $x = x_0$).

63.1. Теорема Н. Абеля

Об области сходимости степенного ряда можно судить, исходя из следующей теоремы.

Теорема 63.1 (Абель). Если степенной ряд (62.3) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$.

□ По условию ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится. Следовательно, по необходимому признаку сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Отсюда следует, что величина $a_n x_0^n$ ограничена, т. е. найдется такое число $M > 0$, что для всех n выполняется неравенство $|a_n x_0^n| \leqslant M$, $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть $|x| < |x_0|$, тогда величина $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ и, следовательно,

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \leqslant M \cdot q^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

т. е. модуль каждого члена ряда (62.3) не превосходит соответствующего члена сходящегося ($q < 1$) ряда геометрической прогрессии. Поэтому по признаку сравнения при $|x| < |x_0|$ ряд (62.3) абсолютно сходящийся. ■

Следствие 63.1. Если ряд (62.3) расходится при $x = x_1$, то он расходится и при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_1|$.

□ Действительно, если допустить сходимость ряда в точке x_2, для которой $|x_2| > |x_1|$, то по теореме Абеля ряд сходится при всех x, для которых $|x| < |x_2|$, и, в частности, в точке x_1, что противоречит условию. ■

63.2. Интервал и радиус сходимости степенного ряда

Из теоремы Абеля следует, что если $x_0 \neq 0$ есть точка сходимости степенного ряда, то интервал $(-|x_0|; |x_0|)$ весь состоит из точек сходимости данного ряда; при всех значениях x вне этого интервала ряд (62.3) расходится.

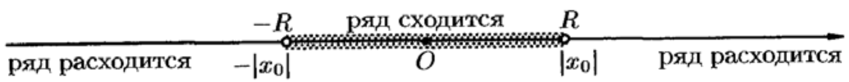


Рис. 259

Интервал $(-|x_0|; |x_0|)$ и называют ***интервалом сходимости*** степенного ряда. Положив $|x_0| = R$, интервал сходимости можно записать в виде $(-R; R)$. Число R называют ***радиусом сходимости*** степенного ряда, т. е. $R > 0$ — это такое число, что при всех x, для которых $|x| < R$, ряд (62.3) абсолютно сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится (см. рис. 259).

В частности, когда ряд (62.3) сходится лишь в одной точке $x_0 = 0$, то считаем, что $R = 0$. Если же ряд (62.3) сходится при всех значениях $x \in \mathbb{R}$ (т. е. во всех точках числовой оси), то считаем, что $R = \infty$.

Отметим, что на концах интервала сходимости (т. е. при $x = R$ и при $x = -R$) сходимость ряда проверяется в каждом случае отдельно.

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (62.3) можно поступить следующим образом. Составим ряд из модулей членов данного степенного ряда

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots$$

и применим к нему признак Даламбера. Допустим, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0, \quad x \neq 0.$$

По признаку Даламбера ряд сходится, если $|x|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, т. е. ряд сходится при тех значениях x, для которых

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|;$$

ряд, составленный из модулей членов ряда (62.3), расходится при тех значениях x, для которых $|x| > \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Таким образом, для ряда (62.3) радиус абсолютной сходимости

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.} \tag{63.1}$$

Аналогично, воспользовавшись радикальным признаком Коши, можно установить, что

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{63.2}$$

Замечания.

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, то можно убедиться, что ряд (62.3) абсолютно сходится на всей числовой оси. В этом случае $R = \infty$. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, то $R = 0$.

2. Интервал сходимости степенного ряда (62.4) находят из неравенства $|x - x_0| < R$; имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$.

3. Если степенной ряд содержит не все степени x, т. е. задан неполный степенной ряд, то интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости (формулы (63.1) и (63.2)), а непосредственно

применяя признак Даламбера (или Коши) для ряда, составленного из модулей членов данного ряда.

Пример 63.1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

○ Решение: Воспользуемся формулой (63.1):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1!)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Следовательно, данный ряд абсолютно сходится на всей числовой оси. ●

Пример 63.2. Найти область сходимости ряда

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

○ Решение: Заданный ряд неполный. Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем:

$$|u_n| = \frac{|x^{2n-1}|}{2n-1}, \quad |u_{n+1}| = \frac{|x^{2n+1}|}{2n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x^{2n+1}|\cdot(2n-1)}{(2n+1)\cdot|x^{2n-1}|} = |x^2|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = x^2.$$

Ряд абсолютно сходится, если $x^2 < 1$ или $-1 < x < 1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -1$ имеем ряд $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \ldots$, который сходится по признаку Лейбница.

При $x = 1$ имеем ряд $+1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ — это тоже сходящийся лейбницевский ряд. Следовательно, областью сходимости исходного ряда является отрезок $[-1; 1]$. ●

Пример 63.3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}.$$

○ Решение: Находим радиус сходимости ряда по формуле (63.1):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}} : \frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}} = 2.$$

Следовательно, ряд сходится при $-2 < x+2 < 2$, т. е. при $-4 < x < 0$.

При $x = -4$ имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n},$$

который сходится по признаку Лейбница.

При $x = 0$ имеем расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является полуотрезок $[-4; 0)$. ●

63.3. Свойства степенных рядов

Сформулируем без доказательства *основные свойства* степенных рядов.

1. Сумма $S(x)$ степенного ряда (62.3) является непрерывной функцией в интервале сходимости $(-R; R)$.

2. Степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, имеющие радиусы сходимости соответственно R_1 и R_2, можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости произведения, суммы и разности рядов не меньше, чем меньшее из чисел R_1 и R_2.

3. Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать; при этом для ряда

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (63.3)$$

при $-R < x < R$ выполняется равенство

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n \cdot a_n x^{n-1} + \ldots \qquad (63.4)$$

4. Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости; при этом для ряда (63.3) при $-R < a < x < R$ выполняется равенство (см. замечание 1, с. 416)

$$\int_a^x S(t)\,dt = \int_a^x a_0\,dt + \int_a^x a_1 t\,dt + \int_a^x a_2 t^2\,dt + \ldots + \int_a^x a_n t^n\,dt + \ldots \quad (63.5)$$

Ряды (63.4) и (63.5) имеют тот же радиус сходимости, что и исходный степенной ряд.

Перечисленные свойства 1–4 остаются справедливыми и для степенных рядов вида (62.4).

Свойства степенных рядов широко используются в теоретических исследованиях и в приближенных вычислениях.

§ 64. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

64.1. Ряды Тейлора и Маклорена

Для приложений важно уметь данную функцию $f(x)$ разлагать в степенной ряд, т. е. функцию $f(x)$ представлять в виде суммы степенного ряда.

Как известно (см. теорема 26.1), для любой функции $f(x)$, определенной в окрестности точки x_0 и имеющей в ней производные до $(n+1)$-го порядка включительно, справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \quad (64.1)$$

где $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $c \in (x_0, x)$, — остаточный член в форме Лагранжа. Число c можно записать в виде $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, где $0 < \theta < 1$. Формулу (64.1) кратко можно записать в виде

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + R_n(x),}$$

где $P_n(x) = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ — многочлен Тейлора.

Если функция $f(x)$ имеет производные любых порядков (т. е. бесконечно дифференцируема) в окрестности точки x_0 и остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$), то из формулы Тейлора получается разложение функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$, называемое *рядом Тейлора*:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.} \quad (64.2)$$

Если в ряде Тейлора положить $x_0 = 0$, то получим разложение функции по степеням x в так называемый *ряд Маклорена*:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.} \quad (64.3)$$

Отметим, что ряд Тейлора можно формально построить для любой бесконечно дифференцируемой функции (это необходимое условие) в окрестности точки x_0. Но отсюда еще не следует, что он будет сходиться к данной функции $f(x)$; он может оказаться расходящимся или сходиться, но не к функции $f(x)$. Так, например, функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ производные всех порядков, причем $f^{(n)}(0) = 0$ при всяком n (см. пример 19.5). Ряд Маклорена имеет вид

$$0 + \frac{0}{2!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \ldots + \frac{0}{n!}x^n + \ldots$$

Он сходится, но его сумма $S(x)$ в любой точке x равна нулю, а не $f(x)$.

Пусть для функции $f(x)$ составлен соответствующий ей ряд Тейлора.

Теорема 64.1. Для того чтобы ряд Тейлора (64.2) функции $f(x)$ сходился к $f(x)$ в точке x, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке остаточный член формулы Тейлора (64.1) стремился к нулю при $n \to \infty$, т. е. чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

❑ Пусть ряд Тейлора (64.2) сходится к функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0, т. е. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$. Так как n-я частичная сумма $S_n(x)$ ряда (64.2) совпадает с многочленом Тейлора $P_n(x)$, т. е. $S_n(x) = P_n(x)$, находим:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}(f(x) - P_n(x)) = \lim_{n\to\infty}(f(x) - S_n(x)) =$$
$$= f(x) - \lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Обратно, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty}(f(x) - R_n(x)) =$$
$$= f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x) - 0 = f(x). \quad ■$$

Замечание. Если ряд Тейлора (64.2) сходится к порождающей функции $f(x)$, то остаточный член формулы Тейлора равен остатку ряда Тейлора, т. е. $R_n(x) = r_n(x)$. (Напомним, что $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$, а $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$, где $S(x)$ — сумма ряда Тейлора.)

Таким образом, задача разложения функции $f(x)$ в степенной ряд сведена по существу к определению значений x, при которых

$R_n(x) \to 0$ (при $n \to \infty$). Если сделать это не просто, то следует каким-нибудь иным способом убедиться, что написанный ряд Тейлора сходится к данной функции.

На практике часто пользуются следующей теоремой, которая дает простое достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.

Теорема 64.2. Если модули всех производных функций $f(x)$ ограничены в окрестности точки x_0 одним и тем же числом $M > 0$, то для любого x из этой окрестности ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к функции $f(x)$, т. е. имеет место разложение (64.2).

❑ Согласно теореме 64.1, достаточно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. По условию теоремы 64.2 для любого n имеет место неравенство $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$. Тогда имеем:

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} M \cdot \left|\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right| = M \cdot \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right|.$$

Осталось показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right| = 0$. Для этого рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(x - x_0)^{n+1}|}{(n+1)!}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x - x_0|^{n+2} \cdot (n+1)!}{(n+2)! \cdot |x - x_0|^{n+1}} = |x - x_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0 < 1,$$

то по признаку Даламбера этот ряд сходится на всей числовой оси. Но тогда, в силу необходимого признака сходимости,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. ■

64.2. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена)

Для разложения функции $f(x)$ в ряд Маклорена (64.3) нужно:
а) найти производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$;
б) вычислить значения производных в точке $x_0 = 0$;

в) написать ряд (64.3) для заданной функции и найти его интервал сходимости;

г) найти интервал $(-R; R)$, в котором остаточный член ряда Маклорена $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Если такой интервал существует, то в нем функция $f(x)$ и сумма ряда Маклорена совпадают.

Замечание. В интервале сходимости степенного ряда остаточный член стремится к нулю при $n \to \infty$.

Приведем таблицу, содержащую разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций (эти разложения следует запомнить):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \tag{64.4}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \tag{64.5}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \tag{64.6}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

$$x \in \begin{cases} [-1; 1], & \text{если } \alpha \geqslant 0, \\ (-1; 1], & \text{если } -1 < \alpha < 0, \\ (-1; 1), & \text{если } \alpha \leqslant -1, \end{cases} \tag{64.7}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \qquad x \in (-1; 1), \tag{64.8}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \qquad x \in (-1; 1], \tag{64.9}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ldots, \qquad x \in [-1; 1], \tag{64.10}$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots \tag{64.11}$$

$$\ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \qquad x \in [-1; 1], \tag{64.12}$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \tag{64.13}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty). \tag{64.14}$$

Докажем формулу (64.4). Пусть $f(x) = e^x$.

❏ Имеем:

а) $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $\ldots$, $f^{(n)}(x) = e^x$, $\ldots$;

б) $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $\ldots$, $f^{(n)}(0) = 1$, $\ldots$;

в) $e^x \sim 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$; $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty$, т. е. ряд сходится в интервале $(-\infty; \infty)$;

г) для всех $x \in (-R; R)$ имеем $|f^{(n)}(x)| = e^x < e^R = M$, т. е. все производные в этом интервале ограничены одним и тем же числом $M = e^R$. Следовательно, по теореме 64.2 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Таким образом, $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ ■

Докажем формулу (64.5). Пусть $f(x) = \sin x$.

❏ Имеем:

а) $f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$, $f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2})$, $\ldots$, $f^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}) \ldots$;

б) $f^{(n)}(0) = \sin \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 0, 2, 4, 6, \ldots, \\ -1, & n = 3, 7, 11, \ldots, \\ +1, & n = 1, 5, 9, \ldots; \end{cases}$

в) $\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ Легко проверить, что полученный ряд сходится на всей числовой оси, т. е. при всех $x \in (-\infty; \infty)$;

г) любая производная функции $f(x) = \sin x$ по модулю не превосходит единицы, $|f^{(n)}(x)| = \left|\sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1$. Следовательно, по теореме 64.2 имеет место разложение (64.5). ■

Докажем формулу (64.6). Пусть $f(x) = \cos x$.

❏ Формулу (64.6) можно доказать так же, как и формулу (64.5). Однако проще получить разложение функции $\cos x$, воспользовавшись свойством 3 степенных рядов. Продифференцировав почленно ряд (64.5), получим:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty). \quad ■$$

Докажем формулы (64.13), (64.14). Пусть $f(x) = \operatorname{ch} x$ (или $f(x) = \operatorname{sh} x$).

❑ Заменив в формуле (64.4) x на $-x$, получим разложение функции e^{-x}:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad (64.15)$$

справедливое для всех $x \in (-\infty; \infty)$.

Суммируя (и вычитая) почленно равенства (64.4) и (64.15), получим разложение гиперболического косинуса (синуса):

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty),$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

Формулы (64.13) и (64.14) доказаны. ■

Докажем формулу (64.7). Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

❑ Имеем:

а) $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, $\ldots$, $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$, $\ldots$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $f(0) = 1$, $f'(0) = \alpha$, $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$, $\ldots$, $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$, $\ldots$;

в) $(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots$

$\ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$;

г) $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))\cdot(n+1)!}{n!\cdot\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))(\alpha-n)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1$, т. е. составленный для функции $(1+x)^\alpha$ ряд сходится в интервале $(-1; 1)$.

Можно показать, что и в данном случае, т. е. при $x \in (-1; 1)$, остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. ■

Ряд (64.7) называется *биномиальным*. Если $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то все члены ряда с $(n+1)$-го номера равны 0, так как содержат множитель $\alpha - n = n - n = 0$. В этом случае ряд (64.7) представляет собой известную формулу бинома Ньютона:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!}x^n.$$

Докажем формулу (64.8). Пусть $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

❑ Формула (64.8) может быть получена разными способами:

1) пользуясь правилом разложения функции в ряд;

2) рассматривая ряд $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$ как ряд геометрической прогрессии, первый член которой равен единице и знаменатель $q = x$; известно (см. пример 62.1), что данный ряд сходится при $x \in (-1; 1)$ и его сумма равна $\dfrac{1}{1-x}$;

3) воспользовавшись формулой (64.7): положив в ней $\alpha = -1$ и заменив x на $-x$, получим формулу (64.8). ■

Докажем формулу (64.9). Пусть $f(x) = \ln(1+x)$.

Формула (64.9) также может быть доказана разными способами. Приведем один из них.

❑ Рассмотрим равенство

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots,$$

справедливое для всех $x \in (-1; 1)$. Используя свойство 4 степенных рядов, проинтегрируем данный ряд на отрезке $[0; x]$, $x \in (-1; 1)$:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2\,dt - \int_0^x t^3\,dt + \ldots + (-1)^n \int_0^x t^n\,dt + \ldots,$$

или

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

Можно показать, что это равенство справедливо и для $x = 1$. ■

Докажем формулу (64.10). Пусть $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

❑ Положив в формуле (64.7) $\alpha = -1$ и заменив x на x^2, получим равенство

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n \cdot x^{2n} + \ldots, \quad x \in (-1; 1).$$

Тогда

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x 1\,dt - \int_0^x t^2\,dt + \int_0^x t^4\,dt - \ldots + \int_0^x (-1)^n t^{2n}\,dt + \ldots,$$

или

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Можно показать, что равенство справедливо и при $x = \pm 1$, т. е. при всех $x \in [-1; 1]$. ■

Докажем формулу (64.12). Пусть $f(x) = \arcsin x$.

❑ Положив в формуле (64.7) $\alpha = -\frac{1}{2}$ и заменив x на $(-x^2)$, получим равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots, \quad x \in [-1;1].$$

Тогда

$$\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int\limits_0^x dt + \int\limits_0^x \frac{t^2}{2}\,dt + \int\limits_0^x \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4\,dt + \ldots,$$

или

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots$$

Можно показать, что полученное равенство справедливо при всех $x \in [-1;1]$. ■

Ряды (64.4)–(64.14) в комбинации с правилами сложения, вычитания, умножения, дифференцирования, интегрирования степенных рядов (см. свойства степенных рядов) могут быть использованы при разложении (некоторых) других функций в ряд Маклорена (Тейлора).

Пример 64.1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = 3^x$.

○ Решение: Так как $3^x = e^{\ln 3^x} = e^{x\ln 3}$, то, заменяя x на $x\ln 3$ в разложении (64.4), получим:

$$3^x = 1 + \frac{\ln 3}{1!}x + \frac{\ln^2 3}{2!}x^2 + \frac{\ln^3 3}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\ln^n 3}{n!}x^n + \ldots, \quad x \in (-\infty;\infty).$$ ●

Пример 64.2. Выписать ряд Маклорена функции $f(x) = \ln(4-x)$.

○ Решение: Так как

$$f(x) = \ln(4-x) = \ln 4\left(1 - \frac{x}{4}\right) = \ln 4 + \ln\left[1 + \left(-\frac{x}{4}\right)\right],$$

то, воспользовавшись формулой (64.9), в которой заменим x на $(-\frac{x}{4})$, получим:

$$\ln(4-x) = \ln 4 + \left(-\frac{x}{4}\right) - \frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^3}{3} - \ldots,$$

или

$$\ln(4-x) = \ln 4 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4^2}\cdot\frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{1}{4^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} - \ldots,$$

если $-1 < -\frac{x}{4} \leqslant 1$, т. е. $-4 \leqslant x < 4$. ●

Пример 64.3. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = \frac{2}{3-x}.$$

○ Решение: Воспользуемся формулой (64.8). Так как

$$f(x) = \frac{2}{3-x} = \frac{2}{3\cdot\left(1-\frac{x}{3}\right)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}},$$

то, заменив x на $\frac{x}{3}$ в формуле (64.8), получим:

$$\frac{2}{3-x} = \frac{2}{3}\cdot\left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \ldots\right),$$

или

$$\frac{2}{3-x} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{x}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{3^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{3^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3^3} + \ldots + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^n}{3^n} + \ldots,$$

где $-1 < \frac{x}{3} < 1$, т. е. $-3 < x < 3$. ●

§ 65. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

65.1. Приближенное вычисление значений функции

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x = x_1$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$.

Если функцию $f(x)$ в интервале $(-R;R)$ можно разложить в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

и $x_1 \in (-R;R)$, то точное значение $f(x_1)$ равно сумме этого ряда при $x = x_1$, т. е.

$$f(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n + \ldots,$$

а приближенное — частичной сумме $S_n(x_1)$, т. е.

$$f(x_1) \approx S_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n.$$

Точность этого равенства увеличивается с ростом n. Абсолютная погрешность этого приближенного равенства равна модулю остатка ряда, т. е.

$$|f(x_1) - S_n(x_1)| = |r_n(x_1)|,$$

где

$$r_n(x_1) = a_{n+1}x_1^{n+1} + a_{n+2}x_1^{n+2} + \ldots$$

Таким образом, ошибку $|f(x_1) - S_n(x_1)|$ можно найти, оценив остаток $r_n(x_1)$ ряда.

Для рядов лейбницевского типа

$$|r_n(x_1)| = |u_{n+1}(x_1) + u_{n+2}(x_1) + u_{n+3}(x_1) + \ldots| < |u_{n+1}(x_1)|$$

(см. п. 61.1).

В остальных случаях (ряд знакопеременный или знакоположительный) составляют ряд из модулей членов ряда и для него стараются найти (подобрать) положительный ряд с большими членами (обычно это сходящийся ряд геометрической прогрессии), который легко бы суммировался. И в качестве оценки $|r_n(x_1)|$ берут величину остатка этого нового ряда.

Пример 65.1. Найти $\sin 1$ с точностью до 0,001.

◯ Решение: Согласно формуле (64.5),

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!}1^3 + \frac{1}{5!}1^5 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}.$$

Стоящий справа ряд сходится абсолютно (проверить самостоятельно). Так как $\frac{1}{5!} \approx 0{,}008(3) > 0{,}001$, а $\frac{1}{7!} \approx 0{,}0002 < 0{,}001$, то для нахождения $\sin 1$ с точностью до 0,001 достаточно первых трех слагаемых:

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 0{,}842.$$

Допускаемая при этом ошибка меньше, чем первый отброшенный член (т. е. меньше, чем 0,0002). Вычисленное микрокалькулятором значение $\sin 1$ примерно равно 0,84147. ●

Пример 65.2. Вычислить число e с точностью до 0,001.

◯ Решение: Подставляя $x = 1$ в формулу (64.4), получим:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Справа стоит знакоположительный ряд. Возьмем n слагаемых и оценим ошибку $r_n(x)$:

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}\right) = \frac{1}{n! \cdot n},$$

т. е. $r_n(x) < \frac{1}{n! \cdot n}$. Остается подобрать наименьшее натуральное число n, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{n! \cdot n} < 0{,}001$.

Нетрудно вычислить, что это неравенство выполняется при $n \geqslant 6$. Поэтому имеем:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2\frac{517}{720} \approx 2{,}718.$$ ●

Замечание. Оценку остатка ряда можно производить с помощью остаточного члена ряда Маклорена

$$|f(x_1) - S_n(x_1)| = |R_n(x_1)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right|,$$

где c находится между 0 и x_1. В последнем примере $R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}$, $0 < c < 1$. Так как $e^c < e^1 < 3$, то $R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$. При $n = 6$ имеем: $R_6(1) < \frac{3}{7!} < 0{,}001$, $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{6!} \approx 2{,}718$.

65.2. Приближенное вычисление определенных интегралов

Бесконечные ряды применяются также для приближенного вычисления неопределенных и определенных интегралов в случаях, когда первообразная не выражается в конечном виде через элементарные функции (см. § 34) либо нахождение первообразной сложно.

Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x)\,dx$ с точностью до $\varepsilon > 0$. Если подынтегральную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по степеням x и интервал сходимости $(-R; R)$ включит в себя отрезок $[a; b]$, то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда. Ошибку вычислений определяют так же, как и при вычислении значений функций.

Пример 65.3. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}\,dx$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

◯ Решение: Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, заменяя x на $(-x^2)$ в формуле (64.4):

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty). \qquad (65.1)$$

Интегрируя обе части равенства (65.1) на отрезке $\left[0;\frac{1}{4}\right]$, лежащем внутри интервала сходимости $(-\infty;\infty)$, получим:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots\right)dx =$$
$$=\left(x-\frac{x^3}{1!\cdot 3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\ldots\right)\Big|_0^{\frac{1}{4}}=$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{1!\cdot 3\cdot 4^3}+\frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5}-\frac{1}{3!\cdot 7\cdot 4^7}+\ldots$$

Получили ряд лейбницевского типа. Так как $\frac{1}{1!\cdot 3\cdot 4^3}=0{,}0052\ldots>$ $>0{,}001$, а $\frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5}<0{,}001$, то с точностью до 0,001 имеем:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{4}-\frac{1}{192}=0{,}245.$$ ●

Замечание. Первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=e^{-x^2}$ легко найти в виде степенного ряда, проинтегрировав равенство (65.1) в пределах от 0 до x:

$$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt=\int_0^x\left(1-\frac{t^2}{1!}+\frac{t^4}{2!}-\ldots\right)dt =$$
$$=x-\frac{x^3}{1!\cdot 3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\ldots,\quad x\in(-\infty;\infty).$$

Функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ и $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ играют очень важную роль в теории вероятностей. Первая — *плотность стандартного распределения вероятностей*, вторая — *функция Лапласа* $F(x)=$ $=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ (или *интеграл вероятностей*). Мы получили, что функция Лапласа представляется рядом

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{2^2 2!\cdot 5}-\frac{x^7}{2^3\cdot 3!\cdot 7}+\ldots\right),$$

который сходится на всей числовой оси.

65.3. Приближенное решение дифференциальных уравнений

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции в конечном виде или способ его решения слишком сложен, то для приближенного решения уравнения можно воспользоваться рядом Тейлора.

Познакомимся с двумя способами решения дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

Пусть, например, требуется решить уравнение

$$y''=f(x;y;y'), \tag{65.2}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=x_0}=y_0,\quad y'|_{x=x_0}=y'_0. \tag{65.3}$$

Способ последовательного дифференцирования

Решение $y=y(x)$ уравнения (65.2) ищем в виде ряда Тейлора:

$$y=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots, \tag{65.4}$$

при этом первые два коэффициента находим из начальных условий (65.3). Подставив в уравнение (65.2) значения $x=x_0$, $y=y_0$, $y'=y'_0$, находим третий коэффициент: $y''(x_0)=f(x_0;y_0;y'_0)$. Значения $y'''(x_0), y^{(4)}(x_0),\ldots$ находим путем последовательного дифференцирования уравнения (65.2) по x и вычисления производных при $x=x_0$. Найденные значения производных (коэффициентов) подставляем в равенство (65.4). Ряд (65.4) представляет искомое частное решение уравнения (65.2) для тех значений x, при которых он сходится. Частичная сумма этого ряда будет приближенным решением дифференциального уравнения (65.2).

Рассмотренный способ применим и для построения общего решения уравнения (65.2), если y_0 и y'_0 рассматривать как произвольные постоянные.

Способ последовательного дифференцирования применим для решения дифференциальных уравнений любого порядка.

Пример 65.4. Методом последовательного дифференцирования найти пять первых членов (отличных от нуля) разложения в ряд решения уравнения $y''=x^2+y^2$, $y(-1)=2$, $y'(-1)=\frac{1}{2}$.

❍ Решение: Будем искать решение уравнения в виде

$$y = y(-1) + \frac{y'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{y''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{y'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \ldots$$

Здесь $y(-1) = 2, y'(-1) = \frac{1}{2}$. Находим $y''(-1)$, подставив $x = -1$ в исходное уравнение: $y''(-1) = (-1)^2 + 2^2 = 5$. Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем заданное дифференциальное уравнение:

$$y''' = 2x + 2yy',$$
$$y^{(4)} = 2 + 2(y')^2 + 2yy'',$$
$$y^{(5)} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' = 6y'y'' + 2yy''', \ldots$$

При $x = -1$ имеем:

$$y'''(-1) = -2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$
$$y^{(4)}(-1) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 2 \cdot 5 = 22{,}5,$$
$$y^{(5)}(-1) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 0 = 15, \ldots$$

Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получим:

$$y = 2 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{5}{2}(x+1)^2 + \frac{15}{16}(x+1)^4 + \frac{1}{8}(x+1)^5 + \ldots \qquad \bullet$$

Способ неопределенных коэффициентов

Этот способ приближенного решения наиболее удобен для интегрирования линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Пусть, например, требуется решить уравнение

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \tag{65.5}$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Предполагая, что коэффициенты $p_1(x)$, $p_2(x)$ и свободный член $f(x)$ разлагаются в ряды по степеням $x - x_0$, сходящиеся в некотором интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$, искомое решение $y = y(x)$ ищем в виде степенного ряда

$$y = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots \tag{65.6}$$

с неопределенными коэффициентами.

Коэффициенты c_0 и c_1 определяются при помощи начальных условий $c_0 = y_0$, $c_1 = y'_0$.

Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем ряд (65.6) два раза (каков порядок уравнения) и подставляем выражения для функции y и ее производных в уравнение (65.5), заменив в нем $p_1(x)$, $p_2(x)$, $f(x)$ их разложениями. В результате получаем тождество, из которого методом неопределенных коэффициентов находим недостающие коэффициенты. Построенный ряд (65.6) сходится в том же интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ и служит решением уравнения (65.5).

Пример 65.5. Найти решение уравнения

$$y'' + xy' + y = x\cos x, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1,$$

используя метод неопределенных коэффициентов.

❍ Решение: Разложим коэффициенты уравнения в степенные ряды: $p_1(x) = x$, $p_2 = 1$,

$$f(x) = x\cos x = x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right).$$

Ищем решение уравнения в виде ряда

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots$$

Тогда

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots,$$
$$y'' = 2c_2 + 2 \cdot 3 \cdot c_3x + 3 \cdot 4 \cdot c_4x^2 + \ldots$$

Из начальных условий находим: $c_0 = 0$, $c_1 = 1$. Подставляем полученные ряды в дифференциальное уравнение:

$$(2c_2 + 2 \cdot 3 \cdot c_3x + 3 \cdot 4 \cdot c_4x^2 + \ldots) + x(c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots) +$$
$$+ (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots) = x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{aligned} x^0 &: \quad 2c_2 = 0, \\ x^1 &: \quad 2 \cdot 3 \cdot c_3 + 2 = 1, \\ x^2 &: \quad 3 \cdot 4 \cdot c_4 + 2c_2 + c_2 = 0, \\ x^3 &: \quad 4 \cdot 5 \cdot c_5 + 3c_3 + c_3 = -\frac{1}{2}, \\ x^4 &: \quad 5 \cdot 6 \cdot c_6 + 4c_4 + c_4 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Отсюда находим, что $c_2 = c_4 = c_6 = \ldots = 0$, $c_3 = -\frac{1}{3!}$, $c_5 = \frac{1}{5!}$, $c_7 = -\frac{1}{7!}, \ldots$ Таким образом, получаем решение уравнения в виде

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

т. е. $y = \sin x$. $\bullet$

Глава XV. РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Лекции 56–58

§ 66. РЯДЫ ФУРЬЕ

66.1. Периодические функции. Периодические процессы

При изучении разнообразных *периодических процессов*, т. е. процессов, которые через определенный промежуток времени повторяются (встречаются в радиотехнике, электронике, теории упругости, теории и практике автоматического регулирования и т. д.), целесообразнее разлагать периодические функции, описывающие эти процессы, не в степенной ряд, а в так называемый тригонометрический ряд.

Напомним, что функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется *периодической* (см. п. 14.3) *с периодом* $T > 0$, если при каждом $x \in D$ значение $(x+T) \in D$ и выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$.

Для построения графика периодической функции периода T достаточно построить его на любом отрезке длины T и периодически продолжить его во всю область определения.

Отметим основные свойства периодической функции.

1. Алгебраическая сумма периодических функций, имеющих один и тот же период T, есть периодическая функция с периодом T.

2. Если функция $f(x)$ имеет период T, то функция $f(ax)$ имеет период $\frac{T}{a}$: действительно, $f\left(a\cdot\left(x+\frac{T}{a}\right)\right) = f(ax+T) = f(ax)$.

3. Если функция $f(x)$ имеет период T и интегрируема на отрезке $[x_0; x_1] \in \mathbb{R}$, то $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_b^{b+T} f(x)\,dx$ при любых a и $b \in [x_0; x_1]$.

❑ Пусть, например, $0 < a < b < T$, тогда

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_a^{b} f(x)\,dx + \int\limits_b^{a+T} f(x)\,dx. \tag{66.1}$$

С другой стороны,

$$\int\limits_b^{b+T} f(x)\,dx = \int\limits_b^{a+T} f(x)\,dx + \int\limits_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx. \tag{66.2}$$

Но $\int\limits_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx =$ (подстановка $x = u+T$) $= \int\limits_a^b f(u+T)\,du = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Подставляем полученный результат в (66.2) и, сравнивая с (66.1), имеем $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_b^{b+T} f(x)\,dx$. ■

В частности, $\int\limits_0^{T} f(x)\,dx = \int\limits_b^{b+T} f(x)\,dx$.

Простейшими периодическими функциями являются тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$. Период этих функций равен 2π, т. е. $T = 2\pi$.

Простейшим периодическим процессом (движением) является *простое гармоническое колебание* (движение), описываемое функцией

$$y = A\cdot\sin(\omega t + \varphi_0), \tag{66.3}$$

$t \geqslant 0$, где A — *амплитуда колебания*, ω — *частота*, φ_0 — *начальная фаза*.

Функцию такого вида (и ее график) называют *простой гармоникой*. Основным периодом функции (66.3) является $T = \frac{2\pi}{\omega}$, т. е. одно полное колебание совершается за промежуток времени $\frac{2\pi}{\omega}$ (ω показывает, сколько колебаний совершает точка в течение 2π единиц времени).

Проведем преобразование функции (66.3):

$$y = A\sin(\omega t+\varphi_0) = A\sin\omega t\cos\varphi_0 + A\cos\omega t\sin\varphi_0 = a\cos\omega t + b\sin\omega t, \tag{66.4}$$

где $a = A\sin\varphi_0$, $b = A\cos\varphi_0$. Отсюда видно, что простое гармоническое колебание описывается периодическими функциями $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$.

Сложное гармоническое колебание, возникающее в результате наложения конечного (или бесконечного) числа простых гармоник, также описывается функциями вида $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$. Так, функция

$$\varphi(t) = A_0 + A_1\sin(t+\varphi_1) + A_2\sin(2t+\varphi_2) + \ldots + A_{30}\sin(30t+\varphi_{30}) = A_0 + \sum_{n=1}^{30} A_n\sin(nt+\varphi_n)$$

или, что равносильно, функция $\varphi(t) = A_0 + \sum\limits_{n=1}^{30}(a_n\cos nt + b_n\sin nt)$ задает сложное гармоническое колебание. Так как период первой гармоники есть $T_1 = 2\pi$, второй $T_2 = \frac{2\pi}{2}$, третьей $T_3 = \frac{2\pi}{3}$, …, тридцатой

$T_{30} = \frac{2\pi}{30}$, а период функции $y = A_0$ («нулевая гармоника») есть любое число, то функция $\varphi(t)$ имеет период, равный 2π, т. е. $T = 2\pi$.

Понятно, что при наложении простых гармоник получаем периодическую функцию, описывающую сложное периодическое колебание (периодический процесс).

Возникает вопрос: всякую ли периодическую функцию, описывающую периодический процесс, можно представить в виде суммы простых гармоник вида (66.3) или (66.4)? Если да, то как найти неизвестные параметры (коэффициенты) каждой из этих гармоник? Ответим сначала на второй вопрос, а потом и на первый.

66.2. Тригонометрический ряд Фурье

С помощью так называемого тригонометрического ряда любую (практически) периодическую функцию можно представить в виде ряда, членами которого являются простые гармоники.

Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \cdots =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx, \quad (66.5)$$

где действительные числа a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ называются *коэффициентами* ряда.

Ряд (66.5) можно записать в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(nx + \varphi_n). \quad (66.6)$$

Действительно, положив $a_n = A_n\sin\varphi_n$, $b_n = A_n\cos\varphi_n$, получим $a_n\cos nx + b_n\sin nx = A_n\sin(nx + \varphi_n)$; ряд (66.5) принимает вид (66.6), при этом $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ и $\operatorname{tg}\varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$.

Свободный член ряда записан в виде $\frac{a_0}{2}$ для единообразия получающихся в дальнейшем формул.

Приведем формулы, которые понадобятся нам в дальнейшем. Считая m и n целыми положительными, находим:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = \begin{cases} \left.\dfrac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0 & (n \neq 0)\\ \left.x\right|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi & (n = 0), \end{cases} \quad (66.7)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx = 0 \quad \text{при любом } n, \quad (66.8)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)\,dx = \begin{cases}0 & (m\neq n),\\ \pi & (m = n),\end{cases} \quad (66.9)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)\,dx = 0, \quad (66.10)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)\,dx = \begin{cases}0 & (m\neq n),\\ \pi & (m = n).\end{cases} \quad (66.11)$$

Замечания.

1. Формулы (66.7)–(66.11) показывают, что семейство функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

обладает ***свойством ортогональности***: интеграл от произведения любых двух функций этого семейства на интервале, имеющем длину 2π, равен нулю.

2. Формулы (66.7)–(66.11) справедливы и в случае, когда область интегрирования есть отрезок $[0; 2\pi]$ (см. свойство 3 периодических функций, п. 66.1).

Пусть $f(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом 2π. Предположим, что функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд, т. е. $f(x)$ является суммой ряда (66.5):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx. \quad (66.12)$$

Так как функция $f(x)$ (и сумма ряда) имеет период 2π, то ее можно рассматривать в любом промежутке длины 2π. В качестве основного промежутка возьмем отрезок $[-\pi; \pi]$ (также удобно взять отрезок $[0; 2\pi]$) и предположим, что ряд (66.12) на этом отрезке можно почленно интегрировать. Вычислим коэффициенты a_n и b_n. Для этого проинтегрируем обе части равенства (66.12) в пределах от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,dx = \pi a_0.$$

Интегралы от всех, кроме нулевого, членов ряда равны нулю в силу формул (66.7) и (66.8).

Отсюда

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.} \tag{66.13}$$

Умножив обе части равенства (66.12) на $\cos mx$ и проинтегрировав полученный ряд в пределах от $-\pi$ до π, получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,dx\right).$$

В силу формул (66.7), (66.9) и (66.10) из последнего равенства при $m = n$ получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n\pi.$$

Отсюда

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 1,2,3,\ldots} \tag{66.14}$$

Аналогично, умножив равенство (66.12) на $\sin mx$ и проинтегрировав почленно на отрезке $[-\pi;\pi]$, найдем:

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1,2,3,\ldots} \tag{66.15}$$

Числа a_0, a_n, b_n, определяемые по формулам (66.13)–(66.15), называются ***коэффициентами Фурье*** функции $f(x)$, а тригонометрический ряд (66.5) с такими коэффициентами — ***рядом Фурье*** функции $f(x)$.

Для интегрируемой на отрезке $[-\pi;\pi]$ функции $f(x)$ записывают

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

и говорят: функции $f(x)$ соответствует (поставлен в соответствие) ее ряд Фурье. Если ряд Фурье сходится, то его сумму обозначим $S(x)$.

§ 67. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

67.1. Теорема Дирихле

Выясним условия, при которых знак соответствия ($\sim$) можно заменить знаком равенства ($=$), т. е. условия, при которых ряд Фурье функции $f(x)$ сходится и имеет своей суммой как раз функцию $f(x)$.

Будем рассматривать функции $f(x)$, имеющие период $T = 2\pi$. Такие функции называют 2π-*периодическими*.

Сформулируем теорему, представляющую достаточное условие разложимости функции в ряд Фурье.

Теорема 67.1 (Дирихле). Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ удовлетворяет двум условиям:

1. $f(x)$ кусочно-непрерывна, т. е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода;

2. $f(x)$ кусочно-монотонна, т. е. монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

1. В точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x) = f(x)$;

2. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна
$$S(x_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2},$$
т. е. равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева;

3. В точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ (на концах отрезка) сумма ряда равна
$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

Таким образом, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям 1 и 2 теоремы (*условия Дирихле*), то на отрезке $[-\pi;\pi]$ имеет место разложение (66.12):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx,$$

причем коэффициенты вычисляются по формулам (66.13)–(66.15). Это равенство может нарушиться только в точках разрыва функции $f(x)$ и на концах отрезка $[-\pi;\pi]$.

В силу периодичности исходной функции и суммы ряда Фурье может быть получено указанное разложение во всей области определения функции.

Замечания.

1. Если функция $f(x)$ с периодом 2π на отрезке $[0;2\pi]$ удовлетворяет условиям Дирихле, то для нее имеет место разложение (66.12), где коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ n = 1,2,3,\ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ n = 1,2,3,\ldots$$

(Интегралы $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ и $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx$ равны в силу свойства 3 периодической функции — см. п. 66.1.)

2. Условиям Дирихле удовлетворяют большинство функций, которые встречаются в математике и ее приложениях. Существуют функции, не удовлетворяющие условиям Дирихле, но при этом разложимые в ряд Фурье, т. е. теорема Дирихле дает лишь достаточное условие разложимости, но не необходимое.

Пример 67.1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ -x & \text{при } -\pi \leqslant x < 0. \end{cases}$$

❍ Решение: На рисунке 260 изображен график функции $f(x)$. Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле, значит, она разложима в ряд Фурье. Находим коэффициенты ряда:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\,dx = \frac{3\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\cos nx\,dx =$$

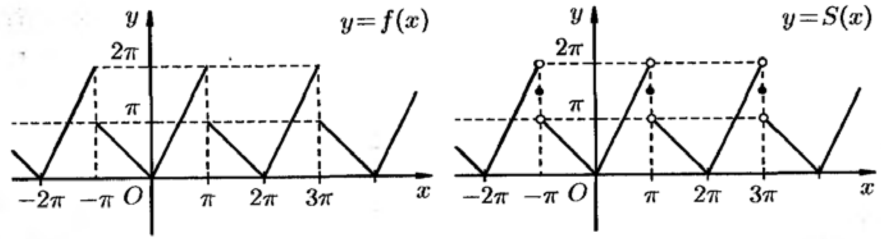


Рис. 260

$$\left(\text{интегрируем по частям: } \left[\begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx\,dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right]\right)$$

$$= \frac{-1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}\right) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2}(1-\cos\pi n) + \frac{2}{\pi n^2}(\cos\pi n - 1) = -\frac{3}{\pi n^2}(1-(-1)^n).$$

Аналогично находим

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \cdots = \frac{1}{n}(-1)^{n+1}.$$

Исходной функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim S(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{3}{\pi n^2}(1-(-1)^n)\cos nx + \frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin nx.$$

Функция $f(x)$ непрерывна во всех внутренних точкой отрезка $[-\pi;\pi]$, поэтому, согласно теореме Дирихле, для всех этих точек имеем равенство $f(x) = S(x)$, т. е.

$$f(x) = S(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + \\ + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \ldots\right).$$

В точках $x = \pm\pi$ сумма $S(x)$ ряда равна

$$\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{\pi + 2\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi.$$

Графики функций $f(x)$ и $S(x)$ показаны на рис. 260. ●

67.2. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Если разлагаемая на отрезке $[-\pi;\pi]$ в ряд Фурье функция $f(x)$ является четной или нечетной, то это отражается на формулах коэффициентов Фурье (вычисление их упрощается) и на виде самого ряда (он становится так называемым неполным).

Если функция $f(x)$ *четная*, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{67.1}$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{67.2}$$

Если функция $f(x)$ *нечетная*, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{67.3}$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{67.4}$$

❑ Как известно (см. п. 39.4), если функция $f(x)$ интегрируема на симметричном отрезке $[-a;a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\cdot\int_0^a f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция.} \end{cases} \tag{67.5}$$

Если функция $f(x)$ — четная, то $f(x)\cos nx$ — четная функция ($f(-x)\cos(-nx) = f(x)\cos nx$), а $f(x)\sin nx$ — нечетная функция ($f(-x)\sin(-nx) = -f(x)\sin nx$).

Если же $f(x)$ — нечетная функция, то, очевидно, функция $f(x)\cos nx$ — нечетная, а $f(x)\sin nx$ — четная.

С учетом формулы (67.5) из формул (66.13)–(66.15) получаем формулы (67.1)–(67.4). ■

Ряды (67.1) и (67.3) называются ***неполными*** тригонометрическими рядами, или рядами *по косинусам* и *по синусам* соответственно.

Пример 67.2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$, $x \in (-\pi;\pi)$, $T = 2\pi$.

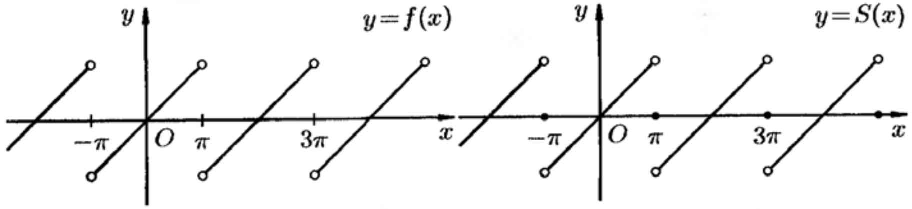


Рис. 261

○ Решение: На рисунке 261 изображен график заданной функции. Условиям Дирихле функция $y = x$ удовлетворяет. Эта функция — нечетная. Следовательно, $a_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, а

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\right)\cos\pi n,$$

т. е. $b_n = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ряд Фурье содержит только синусы:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}\cdot\sin nx = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

При этом $S(\pm\pi) = \dfrac{-\pi+\pi}{2} = 0$ (см. рис. 261). ●

67.3. Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода

Разлагать в ряд Фурье можно и периодические функции с периодом, отличным от 2π.

Пусть функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l;l]$, имеет период $2l$ ($f(x+2l) = f(x)$, где l — произвольное положительное число) и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле.

Сделав подстановку $x = \frac{l}{\pi}t$, данную функцию $f(x)$ преобразуем в функцию $\varphi(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$, которая определена на отрезке $[-\pi;\pi]$ и имеет период $T = 2\pi$.

Действительно, если $t = -\pi$, то $x = -l$, если $t = \pi$, то $x = l$ и при $-\pi < t < \pi$ имеем $-l < x < l$;

$$\varphi(t+2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(t+2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi}t + 2l\right) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \varphi(t),$$

т. е. $\varphi(t+2\pi) = \varphi(t)$.

Разложение функции $\varphi(t)$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$ имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos nt\,dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin nt\,dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Возвращаясь к переменной x и заметив, что $t = \frac{\pi x}{l}$, $dt = \frac{\pi}{l}dx$, получим

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l},} \qquad (67.6)$$

где

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),\\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots).\end{aligned}} \qquad (67.7)$$

Ряд (67.6) с коэффициентами, вычисляемыми по формулам (67.7), называется *рядом Фурье для функции* $f(x)$ с периодом $T = 2l$.

Замечание. Все теоремы, имеющие место для рядов Фурье 2π-периодических функций, остаются в силе и для рядов Фурье функций, период которых $T = 2l$. В частности, если $f(x)$ на отрезке $[-l;l]$ *четная*, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}, \qquad (67.8)$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots; \qquad (67.9)$$

если $f(x)$ — *нечетная* функция, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \qquad (67.10)$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (67.11)$$

Пример 67.3. Разложить функцию $f(x) = x$ на интервале $(-4;4)$ в ряд Фурье.

◯ Решение: Данная функция нечетная, удовлетворяет условиям Дирихле. По формулам (67.10) и (67.11), при $l = 4$, имеем:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{4},$$

где $b_n = \frac{2}{4}\int_0^4 x\sin\frac{\pi n x}{4}\,dx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Вычисляем b_n:

$$b_n = \frac{1}{2}\left(-x\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{4}\Big|_0^4 + \frac{4}{\pi n}\cdot\frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{4}\Big|_0^4\right) =$$

$$= -\frac{8}{\pi n}\cos\pi n = \frac{8}{\pi n}\cdot(-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Таким образом,

$$x = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{4}}{1} - \frac{\sin\frac{2\pi x}{4}}{2} + \frac{\sin\frac{3\pi x}{4}}{3} - \ldots\right)$$

для $-4 < x < 4$. ●

67.4. Представление непериодической функции рядом Фурье

Пусть $y = f(x)$ — непериодическая функция, заданная на всей числовой оси $(-\infty < x < \infty)$.

Такая функция не может быть разложена в ряд Фурье, т. к. сумма ряда Фурье есть функция периодическая и, следовательно, не может быть равна $f(x)$ для всех x.

Однако *непериодическая функция* $f(x)$ *может быть представлена в виде ряда Фурье* на любом *конечном промежутке* $[a;b]$, на котором она удовлетворяет условиям Дирихле. Для этого можно поместить начало координат в середину отрезка $[a;b]$ и построить функцию $f_1(x)$ периода $T = 2l = |b-a|$ такую, что $f_1(x) = f(x)$ при $-l \leqslant x \leqslant l$. На рисунке 262 приведена иллюстрация построения функции $f_1(x)$.

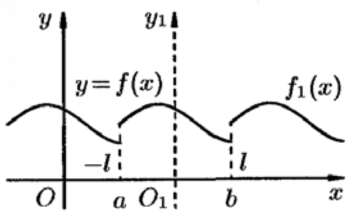


Рис. 262

Разлагаем функцию $f_1(x)$ в ряд Фурье. Сумма этого ряда во все точках отрезка $[a;b]$ (кроме точек разрыва) совпадает с заданной функ цией $f(x)$. Вне этого промежутка сумма ряда и $f(x)$ являются совер шенно различными функциями.

Пусть теперь непериодическую функцию $f(x)$ требуется разл жить в ряд Фурье на отрезке $[0;l]$. (Это частный случай: начало к ординат перенесено в точку $x = a$ отрезка $[a;b]$; область определени функции $f(x)$ будет иметь вид $[0;l]$, где $l = |b-a|$.)

Такую функцию можно произвольным образом доопределить н отрезке $[-l;0]$, а затем осуществить ее периодическое продолжение периодом $T = 2l$. Разложив в ряд Фурье на отрезке $[-l;l]$ полученну таким образом периодическую функцию $f_1(x)$, получим искомый ря для функции $f(x)$ при $x \in [0;l]$.

В частности, функцию $f(x)$ можно доопределить на отрезке $[-l;0]$ четным образом (т. е. чтобы при $-l \leqslant x \leqslant 0$ было $f(x) = f(-x)$) — см. рис. 263. В этом случае функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье который содержит только косинусы (см. формулы (67.8) и (67.9)).

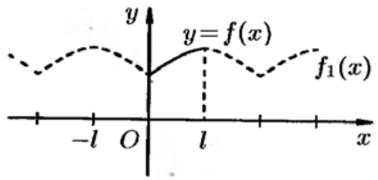


Рис. 263

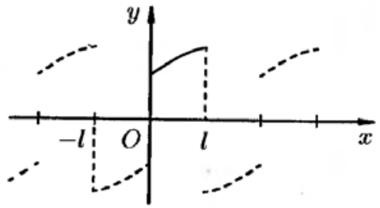


Рис. 264

Если же функцию $f(x)$ продолжить на отрезок $[-l;0]$ нечетны образом (см. рис. 264), то она разлагается в ряд, состоящий только из синусов (см. формулы (67.10) и (67.11)).

Ряд косинусов и ряд синусов для функции $f(x)$, заданной на отрез ке $[0;l]$, имеют одну и ту же сумму. Если x_0 — точка разрыва функци $f(x)$, то сумма как одного, так и другого ряда равна одному и тому же числу: $S(x_0) = \dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$.

Замечание. Все, что было сказано о разложении в ряд Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[0;l]$, переносится практически без изменения на случай, когда функция задана на отрезке $[0;\pi]$; такую функцию можно разложить как в ряд косинусов, так и в ряд синусов (формулы (67.1) и (67.3)).

Пример 67.4. Разложить в ряд косинусов функцию $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$, $0 < x < \pi$.

○ Решение: Продолжим функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi;0]$ четным образом (см. рис. 265). Разлагаем в ряд функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, & 0 < x < \pi, \\ \dfrac{\pi + x}{2}, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

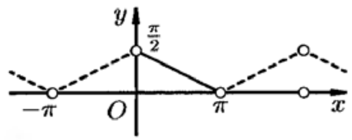


Рис. 265

с периодом $T = 2\pi$. Условиям теоремы Дирихле функция $f_1(x)$ удовлетворяет. Используя формулы (67.1) и (67.2), находим:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi - x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi - x}{2}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n^2}(1 - \cos \pi n).$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right),$$

где $0 < x < \pi$ $\left(\text{при этом } S(0) = \dfrac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi}{2},\ S(\pm\pi) = \dfrac{0+0}{2} = 0\right)$. ●

67.5. Комплексная форма ряда Фурье

Ряды Фурье часто применяются в комплексной форме записи. Преобразуем ряд (66.12) и его коэффициенты (66.13)–(66.15) к комплексной форме. Для этого используем формулы Эйлера, выражающие косинус и синус через показательную функцию:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

(из формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и вытекающего из нее равенства $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ находим, что $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$). Подставив эти выражения в ряд (66.12), находим:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - ib_n)e^{inx}}{2} + \frac{(a_n + ib_n)e^{-inx}}{2} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}, \quad (67.12)$$

где обозначено $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$.

Найдем выражения для комплексных коэффициентов c_n и c_{-n}. Используя выражения для a_n и b_n (формулы (66.14) и (66.15)), получим:

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,$$

т. е.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{67.13}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \tag{67.14}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx + i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx \quad (n = 1, 2, 3\ldots). \tag{67.15}$$

Таким образом, формулу (67.12) можно записать в виде

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}, \quad \text{или} \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \tag{67.16}$$

Коэффициенты этого ряда, согласно формулам (67.13)–(67.15), можно записать в виде

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots). \tag{67.17}$$

Равенство (67.16) называется ***комплексной формой ряда Фурье функции*** $f(x)$, а числа c_n, найденные по формуле (67.17), — ***комплексными коэффициентами ряда Фурье***.

Если функция $f(x)$ задается на отрезке $[-l; l]$, то комплексная форма ее ряда Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}, \quad c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{l}}dx \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots). \tag{67.18}$$

Как видим, комплексная форма ряда Фурье (и коэффициентов) более компактна, чем обыкновенный ряд Фурье.

В электротехнике и радиотехнике члены ряда $c_n e^{i\frac{\pi n x}{l}}$ называются *гармониками*, коэффициенты c_n — *комплексными амплитудами* гармоник, а числа $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ — *волновыми числами* функции $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}$.

Совокупность величин $\{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$ называется *амплитудным спектром*.

Графически амплитудный спектр изображается в виде вертикальных отрезков длиной c_n, расположенных в точках $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$ числовой оси.

Пример 67.5. Построить ряд Фурье в комплексной форме для 2-периодической функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0), \\ 1 & x \in [0; 1], \end{cases} \quad T = 2.$$

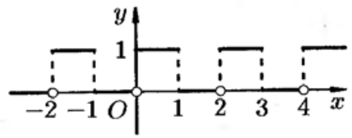


Рис. 266

Решение: На рисунке 266 изображен график функции $f(x)$. По формулам (67.18) находим ($l = 1$):

$$c_n = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-i\pi nx}dx = -\frac{e^{-i\pi nx}}{2\pi ni}\Big|_0^1 = \frac{-1}{2\pi ni}\left(e^{-i\pi n} - 1\right) =$$

$$= \frac{i}{2\pi n}(\cos\pi n - i\sin\pi n - 1) = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n}i, \quad n \neq 0; \quad c_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 dx = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, для всех точек непрерывности функции $f(x)$ справедливо равенство

$$f(x) = \frac{1}{2} + i\sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n}e^{i\pi nx} =$$

$$= \frac{1}{2} - i\left(\frac{e^{i\pi x}}{\pi} + \frac{e^{-\pi x}}{\pi} + \frac{e^{3i\pi x}}{3\pi} + \frac{e^{-3i\pi x}}{3\pi} + \ldots\right)$$

$\left(S(0) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2},\ S(\pm1) = \frac{1+1}{2} = 1\right.$, на графике $S(x)$ не отмечена$\Big)$. ●

§ 68. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Как известно, всякую (периодическую или непериодическую) функцию $f(x)$, удовлетворяющую на отрезке $[-l; l]$ условиям теоремы

Дирихле, можно разложить в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x, \tag{68.1}$$

где $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$,

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \omega_n t \, dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin \omega_n t \, dt \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{68.2}$$

Это разложение будет справедливым на всей числовой оси Ox том случае, когда $f(x)$ — периодическая функция с периодом $T = 2l$.

Рассмотрим случай, когда $f(x)$ — непериодическая функция, заданная на бесконечном промежутке $(-\infty; \infty)$ (т. е. $l = +\infty$).

Будем предполагать, что на любом конечном промежутке $[-l; l]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле и что сходится следующий несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx = M < \infty.$$

Говорят: $f(x)$ *абсолютно интегрируема* на всей числовой оси.

Подставляя в ряд (68.1) значения коэффициентов a_n и b_n (68.2), получим:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) \, dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t)(\cos \omega_n t \cdot \cos \omega_n x + \sin \omega_n t \cdot \sin \omega_n x) \, dt,$$

т. е.

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) \, dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \cdot \cos \omega_n (t - x) \, dt. \tag{68.3}$$

Будем теперь неограниченно увеличивать l. Первое слагаемое в правой части равенства (68.3) при $l \to +\infty$ стремится к нулю, т. к.

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) \, dt \right| \leqslant \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} |f(t)| dt \leqslant \frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt = \frac{M}{2l} \to 0.$$

Рассмотрим второе слагаемое в равенстве (68.3). Величина $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$ принимает значения $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$, $\omega_2 = \frac{2\pi}{l}$, $\omega_3 = \frac{3\pi}{l}$, ..., образующие бесконечную арифметическую прогрессию с разностью $\Delta\omega_n = \frac{\pi}{l}$

($\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$), при этом $\Delta\omega_n \to 0$ при $l \to +\infty$. Итак,

$$\frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \cdot \cos \omega_n (t - x) \, dt = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \cdot \cos \omega_n (t - x) \, dt \cdot \frac{\pi}{l} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^{l} f(t) \cdot \cos \omega_n (t - x) \, dt \right) \Delta\omega_n = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\omega_n) \cdot \Delta\omega_n,$$

где $\varphi(\omega_n) = \int_{-l}^{l} f(t) \cdot \cos \omega_n (t - x) \, dt$, $\omega_n = \frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \ldots, \frac{n\pi}{l}, \ldots$

Полученная сумма напоминает интегральную сумму для функции

$$\varphi(\omega) = \int_{-l}^{l} f(t) \cdot \cos \omega (t - x) \, dt, \quad \omega \in (0; +\infty)$$

(доказывается, что так оно и есть), поэтому, переходя в равенстве (68.3) к пределу при $l \to +\infty$, получаем

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\omega_n) \Delta\omega_n = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \varphi(\omega) \, d\omega,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega (t - x) \, dt. \tag{68.4}$$

Формула (68.4) называется ***формулой Фурье***, а интеграл в правой части формулы — ***интегралом Фурье*** для функции $f(x)$.

Формула Фурье имеет место в точках непрерывности функции $f(x)$; в точках разрыва данной функции интеграл Фурье равен среднему арифметическому ее односторонних пределов:

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega (t - x) \, dt = \frac{f(x - 0) + f(x + 0)}{2}.$$

Формулу (68.4) можно переписать в другом виде (в виде однократного интеграла):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega (t - x) \, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \omega t \cdot \cos \omega x + \sin \omega t \cdot \sin \omega x) dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} d\omega \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt \cdot \cos \omega x + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt \cdot \sin \omega x \right),$$

т. е.

$$\boxed{f(x) = \int_0^{\infty} \big(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\big)\,d\omega,} \tag{68.5}$$

где

$$\boxed{\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt,\\ B(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt.\end{aligned}}$$

Как видно, есть аналогия между рядом Фурье и интегралом Фурье: в обоих случаях функция $f(x)$ раскладывается на сумму гармонических составляющих. Однако, ряд Фурье суммируется по индексу n, принимающему дискретные значения $n = 1, 2, 3, \ldots$; в интеграле Фурье производится интегрирование по непрерывной переменной ω.

Некоторые сведения, связанные с интегралом Фурье, изложим в виде замечаний.

Замечания.

1. Если функция $f(x)$ — *четная,* то формула Фурье (68.5) принимает вид

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega x\,d\omega, \quad \text{где} \quad A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt; \tag{68.6}$$

в случае нечетной функции —

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\omega)\sin\omega x\,d\omega, \quad \text{где} \quad B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt. \tag{68.7}$$

2. Если функция $f(x)$ задана лишь на промежутке $(0; +\infty)$, то ее можно продолжить на промежуток $(-\infty; 0)$ разными способами, в частности — четным или нечетным образом: в первом случае она будет представлена формулой (68.6), во втором — формулой (68.7).

3. Формулу Фурье (68.5) можно представить в симметричной форме записи, если положить в формулах (68.6) и (68.7) $A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\widetilde{A}(\omega)$, $B(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\widetilde{B}(\omega)$. В случае четной функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \widetilde{A}(\omega)\cos\omega x\,d\omega, \quad \text{где} \quad \widetilde{A}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt;$$

в случае нечетной функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \widetilde{B}(\omega)\sin\omega x\,d\omega, \quad \text{где} \quad \widetilde{B}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt.$$

Функции $\widetilde{A}(\omega)$ и $\widetilde{B}(\omega)$ называются соответственно ***косинус-преобразованием*** и ***синус-преобразованием Фурье*** для функции $f(x)$.

4. *Интеграл Фурье* (68.4) *в комплексной форме* имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt;$$

интеграл Фурье (68.5) имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)e^{i\omega x}d\omega,$$

где $c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$; или в симметричной форме записи

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{c}(\omega)e^{i\omega x}d\omega,$$

где

$$\widetilde{c}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$\left(c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widetilde{c}(\omega)\right)$.

Пример 68.1. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \in (0; +\infty),\\ 0, & x = 0,\\ e^{x}, & x \in (-\infty; 0).\end{cases}$$

○ Решение: Функция удовлетворяет условиям представимости интегралом Фурье, абсолютно интегрируема на промежутке $(-\infty; +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}dx + \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 2.$$

Функция нечетная, применим формулу (68.7):

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin\omega t\,dt = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\omega}{1+\omega^2}.$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\omega}{1+\omega^2}\cdot\sin\omega x\,d\omega, \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$ ●

Замечание. Интересно отметить, что если $x = 1$, то

$$f(1) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\omega \sin \omega}{1 + \omega^2}\, d\omega.$$

С другой стороны, $f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Таким образом,

$$\int\limits_0^\infty \frac{y \sin y}{1 + y^2}\, dy = f(1) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2e}.$$

Иными словами, при помощи представления функций интегралом Фурье иногда можно вычислить величины несобственных интегралов.

Таблица основных интегралов

1. $\int u^\alpha\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\quad(\alpha\neq-1)\qquad\left(\int du = u+C\right)$;

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u|+C$;

3. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a}+C$;

4. $\int e^u\,du = e^u+C$;

5. $\int \sin u\,du = -\cos u+C\qquad\left(\int \operatorname{sh} u\,du = \operatorname{ch} u+C\right)$;

6. $\int \cos u\,du = \sin u+C\qquad\left(\int \operatorname{ch} u\,du = \operatorname{sh} u+C\right)$;

7. $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u|+C$;

8. $\int \operatorname{ctg} u\,du = \ln|\sin u|+C$;

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u+C\qquad\left(\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u+C\right)$;

10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u+C\qquad\left(\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u+C\right)$;

11. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right|+C$;

12. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$;

13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a}+C$;

14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln|u+\sqrt{u^2+a^2}|+C$;

15. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C$;

16. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+C$;

17. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a}+C$;

18. $\int \sqrt{u^2\pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{u^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|+C.$

Таблица разложений в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots,\qquad x\in(-\infty;\infty),$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots,\qquad x\in(-\infty;\infty),$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots,\qquad x\in(-\infty;\infty),$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\dots,$$

$$x\in\begin{cases}[-1;1], & \text{если } \alpha\geqslant 0,\\ (-1;1], & \text{если } -1<\alpha<0,\\ (-1;1), & \text{если } \alpha\leqslant -1,\end{cases}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^n+\dots,\qquad x\in(-1;1),$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\dots,\qquad x\in(-1;1],$$

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\dots,\qquad x\in[-1;1],$$

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\dots$$

$$\dots+\frac{1\cdot3\cdot5\dots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\dots(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots,\qquad x\in[-1;1],$$

$$\operatorname{sh} x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots,\qquad x\in(-\infty;\infty),$$

$$\operatorname{ch} x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\dots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots,\qquad x\in(-\infty;\infty).$$

Таблица оригиналов и изображений

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$
1		$\frac{1}{p}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$
4	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
5	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
6	$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
7	$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
8	$e^{at}\cdot\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
9	$e^{at}\cdot\cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
10	$e^{at}\cdot\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$
11	$e^{at}\cdot\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$
12	t^n (n — целое)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
13	$e^{at}\cdot t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
14	$t\cdot\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
15	$t\cdot\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
16	$t\cdot\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2-\omega^2)^2}$
17	$t\cdot\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
18	$e^{at}\cdot t\cdot\sin\omega t$	$\frac{2\omega(p-a)}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
19	$e^{at}\cdot t\cdot\cos\omega t$	$\frac{(p-a)^2-\omega^2}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
20	$\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$	$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$
21	$\frac{1}{2\omega^3}(\omega t\,\mathrm{ch}\,\omega t-\mathrm{sh}\,\omega t)$	$\frac{1}{(p^2-\omega^2)^2}$
22	$\sin(\omega t\pm\varphi)$	$\frac{\omega\cos\varphi\pm p\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$
23	$\cos(\omega t\pm\varphi)$	$\frac{p\cos\varphi\mp\omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$

По вопросам оптовых закупок обращаться:
тел./факс: (495) 785-15-30, e-mail: trade@airis.ru
Адрес: Москва, пр. Мира, 106

Наш сайт: www.airis.ru

Вы можете приобрести наши книги
с 11^{00} до 17^{30}, кроме субботы, воскресенья,
в киоске по адресу: пр. Мира, д. 106, тел.: 785-15-30

Адрес редакции: 129626, Москва, а/я 66

Издательство «Айрис-пресс» приглашает к сотрудничеству
авторов образовательной и развивающей литературы.
По всем вопросам обращаться
по тел.: (495) 785-15-33, e-mail: editor@airis.ru

Учебное издание

Письменный Дмитрий Трофимович

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
Полный курс

Ведущий редактор *В. В. Черноруцкий*
Редактор *Л. В. Абламская*
Художественный редактор *А. М. Кузнецов*
Обложка *А. М. Драговой*
Иллюстрации *Е. В. Панкратьев, А. Ю. Терская*
Технический редактор *С. С. Коломеец*
Компьютерная верстка *Е. Г. Иванов*
Корректоры *Н. С. Калашникова, З. А. Тихонова*

Подписано в печать 19.12.05. Формат 60×90/16.
Гарнитура «Компьютер Модерн». Печать офсетная. Печ. л. 38.
Усл.-печ. л. 38. Тираж 5000 экз. Заказ № 52.

ООО «Издательство "Айрис-пресс"»
113184, Москва, ул. Б. Полянка, д. 50, стр. 3.

ОАО «Тверской ордена Трудового Красного Знамени
полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР».
170040, г. Тверь, пр. 50 лет Октября, 46.