И.В.Проскуряков

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТВЕТЫ

Пример 4. Вычислить методом выделения линейных множителей определитель Вандермонда n-го порядка:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Рассматривая D_n как многочлен от одного неизвестного x_n с коэффициентами, зависящими от $x_1, \dots, x_{n-1}$, видим, что он обращается в нуль при $x_n = x_1, x_n = x_2, \dots, x_n = x_{n-1}$ и потому делится на $x_n - x_1, x_n - x_2, \dots$ $\dots, x_n - x_{n-1}$.

Все эти множители взаимно просты (так как $x_1, x_2, \dots, x_n$ алгебраически независимы).

Значит, D_n делится на их произведение, т. е.

$$D_n = q(x_1, x_2, \dots, x_n)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}).$$

Разлагая D_n по последней строке, видим, что он является многочленом степени $n-1$ относительно x_n, причем коэффициент при x_n^{n-1} равен определителю Вандермонда D_{n-1} из неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$; так как произведение скобок в правой части последнего равенства содержит x_n^{n-1} с коэффициентом 1, то многочлен $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не содержит x_n, и, сравнивая коэффициенты при x_n^{n-1} в обеих частях равенства, получим $D_{n-1} = q(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, откуда $D_n = D_{n-1}(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})$. Применяя это равенство с заменой n на $n-1$, имеем:

$$D_{n-1} = D_{n-2}(x_{n-1} - x_1) \dots (x_{n-1} - x_{n-2}).$$

Это выражение для D_{n-1} подставим в предыдущее выражение для D_n. Повторяя это рассуждение, мы выделим, наконец, множитель $x_2 - x_1$, после чего придем к определителю Вандермонда первого порядка $D_1 = 1$.

Таким образом,

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}) = \prod_{i > j} (x_i - x_j).$$

3. Метод рекуррентных (рекурсивных, или возвратных) соотношений. Этот метод заключается в том, что данный определитель выражают, преобразуя и разлагая его по строке или столбцу, через определители того же вида, но более низкого порядка. Полученное равенство называется рекуррентным соотношением.

Затем вычисляют непосредственно по общему виду определителя столько определителей низших порядков, сколько их было в правой части рекуррентного соотношения. Определители более высокого порядка вычисляются последовательно из рекуррентного соотношения. Если надо получить выражение для определителя любого порядка n, то, вычислив из рекуррентного соотношения несколько определителей низших порядков, стараются заметить общий вид искомого выражения, а затем доказывают справедливость этого выражения при любом n с помощью рекуррентного соотношения и метода индукции по n.

Общее выражение можно получить и другим путем. Для этого в рекуррентное соотношение, выражающее определитель n-го порядка, подставляют выражение определителя $(n-1)$-го порядка из того же рекуррентного соот-

339. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{vmatrix}.$$

340. $$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

341. $$\begin{vmatrix} \sin^{n-1}\alpha_1 & \sin^{n-2}\alpha_1\cos\alpha_1 & \dots & \cos^{n-1}\alpha_1 \\ \sin^{n-1}\alpha_2 & \sin^{n-2}\alpha_2\cos\alpha_2 & \dots & \cos^{n-1}\alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sin^{n-1}\alpha_n & \sin^{n-2}\alpha_n\cos\alpha_n & \dots & \cos^{n-1}\alpha_n \end{vmatrix}.$$

342.

$$\begin{vmatrix} f_n(x_1, y_1) & y_1 f_{n-1}(x_1, y_1) & \dots & y_1^{n-1} f_1(x_1, y_1) & y_1^n \\ f_n(x_2, y_2) & y_2 f_{n-1}(x_2, y_2) & \dots & y_2^{n-1} f_1(x_2, y_2) & y_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n(x_{n+1}, y_{n+1}) & y_{n+1} f_{n-1}(x_{n+1}, y_{n+1}) & \dots & y_{n+1}^{n-1} f_1(x_{n+1}, y_{n+1}) & y_{n+1}^n \end{vmatrix},$$

где $f_i(x, y)$ — однородный многочлен от x, y степени i.

343*. $$\begin{vmatrix} a_1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ a_2 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

344*. $$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

345. $$\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{vmatrix},$$

346. $$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{s-1} & x_1^{s+1} & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{s-1} & x_2^{s+1} & \dots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{s-1} & x_n^{s+1} & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

347*. $$\begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1-1) & x_1^2(x_1-1) & \dots & x_1^{n-1}(x_1-1) \\ 1 & x_2(x_2-1) & x_2^2(x_2-1) & \dots & x_2^{n-1}(x_2-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n(x_n-1) & x_n^2(x_n-1) & \dots & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{vmatrix}.$$

365*. Рядом Фибоначчи[1]) называется числовой ряд, который начинается числами 1, 2 и в котором каждое следующее число равно сумме двух предыдущих, т. е. ряд 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Доказать, что n-й член ряда Фибоначчи равен определителю n-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители:

366. $$\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

367. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

368. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

369*. $$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}.$$

370. $$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a \end{vmatrix}.$$

371*. Доказать равенство:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha.$$

---

[1]) Fibonacci — итальянский математик XIII века.

Пользуясь этим результатом и результатом задачи 369, получить выражение $\cos n\alpha$ через $\cos\alpha$.

372. Доказать равенство:

$$\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}=\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix},$$

где определитель имеет порядок $n-1$. Пользуясь этим равенством и результатом задачи 369, представить $\sin n\alpha$ в виде произведения $\sin\alpha$ на многочлен от $\cos\alpha$.

373*. Доказать равенство, не вычисляя самих определителей:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & b_2c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & b_3c_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители:

374.
$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

375.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

376*.
$$\begin{vmatrix} a & a+x & a+2x & \dots & a+(n-2)x & a+(n-1)x \\ a+(n-1)x & a & a+x & \dots & a+(n-3)x & a+(n-2)x \\ a+(n-2)x & a+(n-1)x & a & \dots & a+(n-4)x & a+(n-3)x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a+x & a+2x & a+3x & \dots & a+(n-1)x & a \end{vmatrix}.$$

377.
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \dots & x^{n-3} & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & \dots & x^{n-4} & x^{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x^2 & x^3 & \dots & x^{n-1} & 1 \end{vmatrix}.$$

и вторая система линейных форм, линейно зависящих от форм первой системы,

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{s} c_{ij} f_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, t). \tag{2}$$

Доказать, что ранг системы форм (2) не более ранга системы форм (1). Если $s = t$ и определитель $|c_{ij}|_s$ отличен от нуля, то ранги обеих систем линейных форм совпадают.

§ 11. Системы линейных уравнений

Исследовать совместность и найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

689. $$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 &= 2. \end{aligned}$$

690. $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 &= 1. \end{aligned}$$

691. $$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 &= 13. \end{aligned}$$

692. $$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 3. \end{aligned}$$

693. $$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 12. \end{aligned}$$

694. $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4. \end{aligned}$$

695. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 &= 18. \end{aligned}$$

696. $$\begin{aligned} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 &= -8. \end{aligned}$$

697. $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 &= 7. \end{aligned}$$

740.
$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+3x_3+\ 9x_4+\ 6x_5&=0,\\ 9x_1+8x_2+5x_3+\ 6x_4+\ 9x_5&=0,\\ 3x_1+8x_2+7x_3+30x_4+15x_5&=0,\\ 6x_1+6x_2+4x_3+\ 7x_4+\ 5x_5&=0. \end{aligned}$$

741. Образуют ли строки каждой из матриц

$$A=\begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5\\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2\\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3\\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4\\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+2x_3+\ x_4+\ 6x_5&=0,\\ 5x_1+9x_2+7x_3+4x_4+\ 7x_5&=0,\\ 4x_1+3x_2-\ x_3-\ x_4+11x_5&=0,\\ x_1+6x_2+8x_3+5x_4-\ 4x_5&=0. \end{aligned}$$

742. Какие из строк матрицы

$$\begin{Vmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7\\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4\\ 8 & 0 & -5 & 6 & -13\\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7 \end{Vmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4+\ x_5&=0,\\ 5x_1-8x_2+5x_3+4x_4+3x_5&=0,\\ x_1-7x_2+4x_3+2x_4\qquad&=0,\\ 4x_1-\ x_2+\ x_3+2x_4+3x_5&=0. \end{aligned}$$

743*. Доказать, что если в общее решение однородной системы линейных уравнений ранга r с n неизвестными, где $r<n$, вместо свободных неизвестных подставить числа поочередно из каждой строки определителя порядка $n-r$, отличного от нуля, и найти соответствующие значения остальных неизвестных, то получится фундаментальная система решений, и, обратно, любую фундаментальную систему решений данной системы уравнений можно получить таким путем при подходящем выборе определителя порядка $n-r$, отличного от нуля.

744. Пусть строки матрицы

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \dots & \alpha_{pn} \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений ранга r с n неизвестными ($n=r+p$). Доказать, что строки матрицы

$$B=\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{p1} & \beta_{p2} & \dots & \beta_{pn} \end{pmatrix}$$

тогда и только тогда также образуют фундаментальную систему решений той же системы уравнений, когда существует невырожденная матрица p-го порядка

$$C=\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1p} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{p1} & \gamma_{p2} & \dots & \gamma_{pp} \end{pmatrix}$$

такая, что

$$\beta_{i,k}=\sum_{j=1}^{p}\gamma_{ij}\alpha_{jk} \qquad (i=1, 2, \dots, p, \quad k=1, 2, \dots, n).$$

Пользуясь матричным умножением, эти равенства можно записать одним равенством $B=CA$.

745. Показать, что задача 743 является частным случаем задачи 744.

746. Доказать, что если ранг однородной системы линейных уравнений на единицу меньше числа неизвестных, то любые два решения этой системы пропорциональны, т. е. отличаются лишь числовым множителем (быть может, равным нулю).

747. Пользуясь теорией однородных систем линейных уравнений, решить задачу 509, т. е. доказать, что если определитель D порядка $n>1$ равен нулю, то алгебраические дополнения соответствующих элементов двух любых строк (столбцов) пропорциональны.

748*. Доказать, что если в однородной системе линейных уравнений число уравнений на единицу меньше числа неизвестных, то в качестве решения можно принять систему миноров, полученных из матрицы коэффициентов поочередным вычеркиванием 1-го, 2-го и т. д. столбцов, причем эти миноры берутся с чередующимися знаками.

Далее, показать, что если это решение не нулевое, то любое решение получается из него умножением на некоторое число.

869. $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

870. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$

871. $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} \cdot X = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

872. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в данной матрице A:

а) переставить i-ю и j-ю строки?

б) i-ю строку умножить на число c, не равное нулю?

в) к i-й строке прибавить j-ю, умноженную на число c, или совершить аналогичное преобразование столбцов?

873. Целочисленная квадратная матрица называется *унимодулярной*, если ее определитель равен ± 1. Доказать, что целочисленная матрица тогда и только тогда имеет целочисленную обратную матрицу, когда данная матрица унимодулярна.

874. Доказать, что матричное уравнение $AX = B$ разрешимо тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу матрицы (A, B), получаемой из A приписыванием к ней справа матрицы B.

875. Показать, что матричное уравнение $AX = 0$, где A — квадратная матрица, имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $|A| = 0$.

876. Пусть A и B — неособенные матрицы одного и того же порядка. Показать, что четыре равенства:

$$AB = BA, \quad AB^{-1} = B^{-1}A, \quad A^{-1}B = BA^{-1}, \quad A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

равносильны между собой.

877. Пусть A — квадратная матрица и $f(x)$ и $g(x)$ — любые многочлены. Показать, что матрицы $f(A)$ и $g(A)$ перестановочны, т. е. $f(A)\,g(A) = g(A)\,f(A)$.

878. Пусть A — квадратная матрица и $r(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ — рациональная функция от x. Показать, что значение $r(A)$ функции $r(x)$ при $x = A$ определено однозначно тогда и только тогда, когда $|g(A)| \neq 0$.

888. Показать, что произведение двух симметрических матриц тогда и только тогда будет матрицей симметрической, когда данные матрицы перестановочны.

889. Показать, что произведение двух кососимметрических матриц тогда и только тогда будет матрицей симметрической, когда данные матрицы перестановочны.

890*. Доказать, что произведение двух кососимметрических матриц A и B тогда и только тогда будет кососимметрической матрицей, когда $AB = -BA$.

Привести примеры кососимметрических матриц, удовлетворяющих условию $AB = -BA$.

891. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n называется *ортогональной*, если $AA' = E$, где E — единичная матрица. Показать, что для ортогональности квадратной матрицы A необходимо и достаточно любое из следующих условий:

а) столбцы A образуют ортонормированную систему, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, обозначающий 1 при $i = j$ и 0 при $i \neq j$;

б) строки A образуют ортонормированную систему, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}.$$

892. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n с вещественными или комплексными элементами называется *унитарной*, если $AA^* = E$ (смысл обозначения A^* тот же, что и в задаче 886). Показать, что для унитарности квадратной матрицы A необходимо и достаточно любое из следующих условий:

а) $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\bar{a}_{kj} = \delta_{ij}$,

(δ_{ij} — символ Кронекера).

б) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\bar{a}_{jk} = \delta_{ij}$

893. Доказать, что определитель ортогональной матрицы равен ± 1.

894. Доказать, что определитель унитарной матрицы по модулю равен единице.

895. Доказать, что если ортогональная матрица A имеет на главной диагонали квадратные клетки $A_1, A_2, \ldots, A_s$ и нули по одну сторону от этих клеток, то все элементы по другую сторону от них также равны нулю и все матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_s$ ортогональны.

896. Доказать, что для ортогональности квадратной матрицы A необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен ± 1

и каждый ее элемент был равен своему алгебраическому дополнению, взятому со своим знаком, если $|A|=1$, и с противоположным, если $|A|=-1$.

897*. Доказать, что вещественная квадратная матрица A порядка $n \geqslant 3$ будет ортогональна, если каждый ее элемент равен своему алгебраическому дополнению, и хотя бы один из элементов отличен от нуля.

898*. Доказать, что вещественная квадратная матрица A порядка $n \geqslant 3$ будет ортогональна, если каждый ее элемент равен своему алгебраическому дополнению, взятому с противоположным знаком, и хотя бы один из элементов отличен от нуля.

899*. Доказать, что сумма квадратов всех миноров второго порядка, лежащих в двух строках (или столбцах) ортогональной матрицы, равна единице.

900*. Доказать, что сумма квадратов модулей всех миноров второго порядка, лежащих в двух строках (или столбцах) унитарной матрицы, равна единице.

901*. Доказать, что сумма квадратов всех миноров k-го порядка, лежащих в любых k строках (столбцах) ортогональной матрицы, равна единице.

902*. Доказать, что сумма квадратов модулей всех миноров k-го порядка, лежащих в любых k строках (столбцах) унитарной матрицы, равна единице.

903*. Доказать, что минор любого порядка ортогональной матрицы A равен своему алгебраическому дополнению, взятому с его знаком, если $|A|=1$, и с противоположным знаком, если $|A|=-1$.

904*. Пусть A — унитарная матрица, M — ее минор любого порядка, M_A — алгебраическое дополнение минора M в матрице A. Доказать, что $M_A = |A| \cdot \overline{M}$, где $\overline{M}$ — число, сопряженное с M.

905. При каких условиях диагональная матрица является ортогональной?

906. При каких условиях диагональная матрица является унитарной?

907. Проверить, что любое из трех свойств квадратной матрицы: вещественность, ортогональность, унитарность — вытекает из двух остальных.

908. Квадратная матрица I называется инволютивной, если $I^2=E$. Показать, что каждое из трех свойств квадратной матрицы: симметрия, ортогональность, инволютивность — вытекает из двух остальных.

909. Проверить, что матрицы

а) $\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{Vmatrix}$

обладают всеми тремя свойствами предыдущей задачи.

Выяснить, эквивалентны ли между собой матрицы:

1000.

$$A=\begin{pmatrix} 3\lambda+1 & \lambda & 4\lambda-1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-\lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda+2 & \lambda & \lambda^2+2\lambda \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda-2 & \lambda^2-2\lambda \\ 2\lambda & 2\lambda-3 & \lambda^2-2\lambda \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1001.

$$A=\begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda+1 & 3\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda & 3\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2-\lambda & 2\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2 & -\lambda^2 & 2\lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2 & \lambda^2 \\ 2 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 3\lambda^2 & \lambda^2 \\ \lambda^2 & -\lambda^2 & 2\lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

1002.

$$A=\begin{pmatrix} 3\lambda^3-6\lambda^2+\lambda+3 & 2\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda-1 & \lambda^3-2\lambda^2+\lambda \\ 3\lambda^2-8\lambda+5 & 2\lambda^2-4\lambda+1 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 3\lambda^3-3\lambda^2-5\lambda+6 & 2\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+1 & \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} 3\lambda^3-9\lambda^2+7\lambda+1 & 2\lambda^3-6\lambda^2+7\lambda-2 & \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1 \\ 3\lambda^3-9\lambda^2+9\lambda-5 & 2\lambda^3-6\lambda^2+6\lambda-1 & \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1 \\ 3\lambda^3-9\lambda^2+5\lambda+5 & 2\lambda^3-6\lambda^2+8\lambda-2 & \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1 \end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix} 3\lambda^2-3\lambda+1 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 2\lambda^2-\lambda-1 & 7\lambda-3\lambda^2-4 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 5\lambda^2-7\lambda+3 & 5\lambda-2\lambda^2-3 & \lambda^2-2\lambda+1 \end{pmatrix}.$$

1003. λ-матрица называется *унимодулярной*, если ее определитель является многочленом нулевой степени относительно λ, т. е. константой, отличной от нуля. Найти нормальную диагональную форму унимодулярной λ-матрицы.

1004. Доказать, что матрица, обратная к λ-матрице, тогда и только тогда будет λ-матрицей, когда данная матрица A унимодулярна.

1005*. Доказать утверждение: для того чтобы две прямоугольные λ-матрицы A и B, каждая из m строк и n столбцов, были эквивалентны, необходимо и достаточно выполнение равенства $B=PAQ$, где P и Q — унимодулярные λ-матрицы порядков m и n соответственно. Показать, что требуемые матрицы P и Q можно найти так: найдя ряд элементарных преобразований, переводящий A в B, при-

1013. $$A=\begin{pmatrix} \lambda^2+3\lambda-4 & \lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^2+\lambda-2 \\ 2\lambda^2+3\lambda-5 & 2\lambda^2+2\lambda-4 & 2\lambda^2+\lambda-3 \end{pmatrix};$$
$$B=\begin{pmatrix} 2\lambda^2+2\lambda-4 & 3\lambda^2+2\lambda-5 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 2\lambda^2+\lambda-3 & 3\lambda^2+\lambda-4 & \lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}.$$

1014. $$A=\begin{pmatrix} \lambda^3+6\lambda^2+6\lambda+5 & \lambda^3+4\lambda^2+4\lambda+3 \\ \lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+2 & \lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+1 \\ 2\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1 & 2\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda \end{pmatrix};$$
$$B=\begin{pmatrix} \lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1 \\ 3\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-1 & 6\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-4 \\ \lambda^3-\lambda^2-\lambda-2 & 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda-3 \end{pmatrix}.$$

Найти инвариантные множители следующих λ-матриц:

1015. $$\begin{pmatrix} 3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \end{pmatrix}.$$

1016. $$\begin{pmatrix} 3\lambda^3-2\lambda+1 & 2\lambda^2+\lambda-1 & 3\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda-1 \\ 2\lambda^3-2\lambda & \lambda^2-1 & 2\lambda^3+\lambda^2-2\lambda-1 \\ 5\lambda^3-4\lambda+1 & 3\lambda^2+\lambda-2 & 5\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda-2 \end{pmatrix}.$$

1017.
$$\begin{Vmatrix} 2\lambda^3-\lambda^2+2\lambda-1 & 2\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2 & 5\lambda^3-2\lambda^2+5\lambda-2 \\ \lambda^3+\lambda^2+\lambda+1 & \lambda^3-3\lambda^2+\lambda-3 & -\lambda^3-\lambda^2-\lambda-1 & 7\lambda^3-\lambda^2+7\lambda-1 \\ \lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2 & \lambda^3+\lambda & 2\lambda^3-\lambda^2+2\lambda-1 & -2\lambda^3-\lambda^2-2\lambda-1 \\ 3\lambda^3-2\lambda^2+3\lambda-2 & 3\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda-4 & 2\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda-3 & 6\lambda^3-3\lambda^2+6\lambda-3 \end{Vmatrix}.$$

1018.
$$\begin{Vmatrix} \lambda^3+\lambda^2-\lambda+3 & \lambda^3-\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+\lambda^2-\lambda+4 & \lambda^3+\lambda^2-\lambda+2 \\ \lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+6 & \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-2 & 2\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+7 & \lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+4 \\ \lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+4 & \lambda^3-2\lambda^2+2\lambda-1 & 2\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+5 & \lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+3 \\ 2\lambda^3+\lambda^2-\lambda+5 & 2\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1 & 4\lambda^3+\lambda^2-\lambda+7 & 2\lambda^3+\lambda^2-\lambda+3 \end{Vmatrix}.$$

1019. $$\begin{Vmatrix} \lambda & 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 0 & \lambda & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \ldots & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{Vmatrix}.$$

1020*. $$\begin{pmatrix} \lambda-\alpha & \beta & \beta & \beta \dots & \beta \\ 0 & \lambda-\alpha & \beta & \beta \dots & \beta \\ 0 & 0 & \lambda-\alpha & \beta \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & \lambda-\alpha \end{pmatrix}$$

(порядок матрицы равен n).

Элементарными делителями λ-матрицы A называются многочлены $e_1(\lambda)$, $e_2(\lambda)$, ..., $e_s(\lambda)$ со старшими коэффициентами, равными единице, совпадающие с наивысшими степенями неприводимых множителей, входящими в разложения инвариантных множителей $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, ..., $E_n(\lambda)$ матрицы A на неприводимые множители. При этом совокупность элементарных делителей матрицы A содержит каждый многочлен $E_i(\lambda)$ столько раз, сколько инвариантных множителей $E_k(\lambda)$ содержит его в своем разложении. Разложение на неприводимые множители берется над тем полем, над которым рассматриваются многочлены, являющиеся элементами матрицы A. В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются элементарные делители над полем комплексных чисел, т. е. наивысшие степени многочленов вида $\lambda-\alpha$, входящие в разложения инвариантных множителей матрицы A на линейные множители.

Найти элементарные делители следующих λ-матриц:

1021. $$\begin{pmatrix} \lambda^3+2 & \lambda^3+1 \\ 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda+3 & 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda+2 \end{pmatrix}.$$

1022. $$\begin{pmatrix} \lambda^3-2\lambda^2+2\lambda-1 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 2\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-1 & 2\lambda^2-2\lambda \end{pmatrix}.$$

1023. $$\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & 2\lambda+1 & \lambda^2+1 \\ \lambda^2+4\lambda+4 & 2\lambda+3 & \lambda^2+4\lambda+3 \\ \lambda^2-4\lambda+3 & 2\lambda-1 & \lambda^2-4\lambda+2 \end{pmatrix}.$$

1024.

$$\begin{pmatrix} \lambda^2-2\lambda-8 & \lambda^2+4\lambda+4 & \lambda^2-4 & \lambda^2-3\lambda-10 \\ \lambda^4+\lambda^3-\lambda-10 & 2\lambda^2+5\lambda+2 & \lambda^3+3\lambda^2-\lambda-6 & \lambda^4+\lambda^3-2\lambda-12 \\ \lambda^4+\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda-6 & \lambda^2+4\lambda+4 & \lambda^4+\lambda^3-2\lambda^2-\lambda-2 & \lambda^4+\lambda^3-2\lambda^2-4\lambda-8 \\ \lambda^4+\lambda^3-\lambda^2+\lambda-2 & \lambda^2+\lambda-2 & \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2 & \lambda^4+\lambda^3-\lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}.$$

1025. $$\begin{pmatrix} \lambda^2-2 & \lambda^2+\lambda+3 & \lambda^2+2 & \lambda^2-3 \\ \lambda^2+3\lambda-1 & \lambda^2+3\lambda+3 & \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^2+3\lambda-2 \\ 2\lambda^2-4 & \lambda^2+\lambda+4 & \lambda^2+3 & 2\lambda^2-5 \\ 2\lambda^2+3\lambda-3 & \lambda^2+3\lambda+4 & \lambda^2+2\lambda+2 & 2\lambda^2+3\lambda-4 \end{pmatrix}.$$

Найти элементарные делители следующих λ-матриц в поле рациональных, в поле действительных и в поле комплексных чисел:

1026. $\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & 2\lambda^2-2 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+1 & 2\lambda^2-2 \\ \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2-5 \end{pmatrix}$.

1027. $\begin{pmatrix} 2\lambda^2+3 & \lambda^2+1 & \lambda^6+6\lambda^4+\lambda^2+2 \\ 4\lambda^2+11 & 2\lambda^2+5 & 2\lambda^6+12\lambda^4+2\lambda^2-26 \\ 2\lambda^2+3 & \lambda^2+1 & 2\lambda^6+12\lambda^4+\lambda^2-30 \end{pmatrix}$.

1028. $\begin{pmatrix} \lambda^4+1 & \lambda^7-\lambda^4+\lambda^3-1 & \lambda^4-4\lambda^3+4\lambda-5 \\ 2\lambda^4+3 & 2\lambda^7-2\lambda^4+4\lambda^3-2 & 3\lambda^4-10\lambda^3+\lambda^2+10\lambda-14 \\ \lambda^4+2 & \lambda^7-\lambda^4+2\lambda^3-2 & 2\lambda^4-6\lambda^3+\lambda^2+6\lambda-9 \end{pmatrix}$.

Найти нормальную диагональную форму квадратной λ-матрицы, если известны ее элементарные делители, ранг r и порядок n:

1029. $\lambda+1,\ \lambda+1,\ (\lambda+1)^2,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^2;\ r=4,\ n=5$.

1030. $\lambda+2,\ (\lambda+2)^2,\ (\lambda+2)^3,\ \lambda-2,\ (\lambda-2)^3;\ r=n=4$.

1031. $\lambda-1,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^3,\ \lambda+2,\ (\lambda+2)^2;\ r=4;\ n=5$.

1032*. Доказать, что совокупность элементарных делителей диагональной λ-матрицы получается объединением (с надлежащими повторениями) совокупностей элементарных делителей всех диагональных элементов этой матрицы.

1033*. Доказать, что совокупность элементарных делителей клеточно диагональной λ-матрицы равна объединению (с надлежащими повторениями) совокупностей элементарных делителей всех ее диагональных клеток.

Пользуясь задачами 1032 или 1033, найти нормальную диагональную форму следующих λ-матриц:

1034. $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^3 \end{pmatrix}$.

1035. $\begin{pmatrix} \lambda^2-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3-4\lambda \end{pmatrix}$.

1036. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^3+6\lambda^2+9\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2-6\lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2-4\lambda+4 & 0 & 0 \\ \lambda^4+\lambda^3-6\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1037. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^4+2\lambda^2-2\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda^4-2\lambda^2+2\lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda+1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1038. $\begin{pmatrix} \lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 & 0 \\ 2\lambda^2+2\lambda-4 & 2\lambda^2+\lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & \lambda+2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & \lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}$.

1039. $\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda-2 & \lambda^3+\lambda^2-\lambda-1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-4 & \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+2\lambda & \lambda^2+6\lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-2 & \lambda^2+5\lambda-7 \end{pmatrix}$.

1040. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^3-\lambda^2-\lambda-2 & \lambda^3-2\lambda-4 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2-6\lambda & \lambda^2+\lambda-6 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & \lambda-2 & 0 & 0 \\ \lambda^3-2\lambda^2+6\lambda-1 & \lambda^2-2\lambda+5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1041. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda-3 & \lambda^3+\lambda^2-9\lambda-9 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-\lambda-2 & \lambda^3+2\lambda^2-5\lambda-6 \\ 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 & 0 \\ \lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^3+2\lambda^2+\lambda-4 & \lambda^3+2\lambda^2-3 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

Определив эквивалентность и нормальную диагональную форму целочисленных матриц так, как это сделано в задачах 942, 943, найти наибольшие общие делители D_k миноров k-го порядка следующих матриц путем приведения их к нормальной диагональной форме с помощью элементарных преобразований:

1042. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 4 & -1 \\ 6 & 12 & 14 & 5 \\ 0 & 4 & 14 & -1 \\ 10 & 6 & -4 & 11 \end{Vmatrix}$.

1043. $\begin{Vmatrix} 0 & 6 & -9 & -3 \\ 12 & 24 & 9 & 9 \\ 30 & 42 & 45 & 27 \\ 66 & 78 & 81 & 63 \end{Vmatrix}$.

1044. Доказать, что любую λ-матрицу ранга r элементарными преобразованиями одних только строк (а также одних только столбцов) можно привести к треугольному или трапецеидальному виду, причем нули, по желанию, можно получить выше или ниже главной диагонали, и отличные от нуля элементы будут находиться лишь в первых r строках (соответственно в первых r столбцах).

1045*. Доказать, что каждую невырожденную λ-матрицу A можно представить в виде $A = PR$, где P — унимодулярная λ-матрица, а R — треугольная λ-матрица, элементы которой на главной диагонали имеют старший коэффициент, равный единице, ниже главной диагонали равны нулю, а выше главной диагонали имеют степень, меньшую степени элемента главной диагонали того же столбца (или равны нулю), причем такое представление единственно.

§ 14. Подобные матрицы. Характеристический и минимальный многочлены. Жорданова и диагональная формы матрицы. Функции от матриц

Все задачи этого параграфа ставятся в матричной форме. В частности, свойства характеристических чисел матрицы и приведение матрицы к жордановой форме рассматриваются вне связи со свойствами собственных векторов и инвариантных подпространств соответствующего линейного преобразования. Эта связь (в частности, отыскание базиса, в котором матрица данного линейного преобразования имеет жорданову форму) рассматривается в отделе IV. Это не мешает использовать задачи данного параграфа при изучении свойств линейных преобразований в той мере, в какой усвоена связь линейных преобразований с их матрицами в каком-либо базисе.

1046. Матрица A называется *подобной* матрице B (что обозначается так: $A \approx B$), если существует невырожденная матрица T такая, что $B = T^{-1}AT$. Показать, что соотношение подобия обладает следующими свойствами:

а) $A \approx A$; б) если $A \approx B$, то $B \approx A$;
в) если $A \approx B$ и $B \approx C$, то $A \approx C$.

1047. Доказать, что если хотя бы одна из двух матриц A, B невырожденна, то матрицы AB и BA подобны.

Привести пример двух вырожденных матриц A, B, для которых матрицы AB и BA не будут подобны.

1048*. Найти все матрицы, каждая из которых подобна только сама себе.

1049. Пусть матрица B получена из A перестановкой i-й и j-й строк, а также i-го и j-го столбцов. Доказать, что A и B подобны и найти невырожденную матрицу T, для которой $B = T^{-1}AT$.

1050*. Показать, чта матрица A подобна матрице B, полученной из A зеркальным отражением в ее центре.

1051. Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — любая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Доказать, что матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1}a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} a_{i_1i_1}a_{i_1i_2} & \ldots & a_{i_1i_n} \\ a_{i_2i_1}a_{i_2i_2} & \ldots & a_{i_2i_n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{i_ni_1}a_{i_ni_2} & \ldots & a_{i_ni_n} \end{pmatrix}$$

подобны.

1052. Пусть даны матрицы A и B, подобные между собой. Показать, что совокупность всех невырожденных матриц T, для которых $B=T^{-1}AT$, получится из совокупности всех невырожденных матриц, перестановочных с A, путем умножения этих матриц справа на одну любую матрицу T_0 со свойством $B=T_0^{-1}AT_0$.

1053. Доказать, что если матрица A подобна диагональной матрице, то и p-я ассоциированная с ней матрица A_p (задача 969) также подобна диагональной матрице.

1054. Доказать, что если две матрицы A и B подобны диагональным матрицам, то их кронекеровское произведение $A\times B$ (задача 963) также является матрицей, подобной диагональной матрице.

1055. Доказать, что если матрицы A и B подобны, то и p-е ассоциированные с ними матрицы A_p и B_p (взятые при любых двух расположениях сочетаний по p из n номеров строк и столбцов) также подобны.

1056. Доказать, что если матрицы A_1, B_1 подобны соответственно матрицам A_2, B_2, то кронекеровские произведения $A_1\times B_1$ и $A_2\times B_2$ (взятые при любых двух расположениях пар индексов) также подобны между собой.

1057. Доказать, что если квадратная λ-матрица B представляется в виде $B=B_0\lambda^s+B_1\lambda^{s-1}+\ldots+B_s$, где $B_0, B_1, \ldots, B_s$ — матрицы, не зависящие от λ, и матрица B_0 невырожденна, то любую квадратную λ-матрицу A того же порядка, что и B, можно разделить на B слева или справа, т. е. существуют правые частное Q_1 и остаток R_1 такие, что $A=BQ_1+R_1$, и левые частное Q_2 и остаток R_2 такие, что $A=Q_2B+R_2$, причем степени элементов матриц R_1 и R_2 относительно λ ниже s и обе пары Q_1, R_1 и Q_2, R_2 определены однозначно.

1058. Матрицу

$$A=\begin{pmatrix} -2\lambda^2+5\lambda+3 & -\lambda^2+3\lambda+2 & -\lambda+6 \\ -3\lambda^2+7\lambda+11 & -3\lambda^2+9\lambda+1 & -2\lambda+8 \\ -\lambda^2+2\lambda+8 & -2\lambda^2+5\lambda+3 & -\lambda+4 \end{pmatrix}$$

разделить слева на $B-\lambda E$, где $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1059. Матрицу

$$A=\begin{pmatrix} -\lambda^3+\lambda^2+3\lambda+6 & \lambda^2+2\lambda & \lambda^2+2\lambda+6 \\ -2\lambda^3+2\lambda^2+9\lambda+8 & \lambda^2+6\lambda+1 & 2\lambda^2+7\lambda+8 \\ -\lambda^3+\lambda^2+3\lambda+5 & \lambda^2+2\lambda-9 & \lambda^2+5\lambda-2 \end{pmatrix}$$

разделить справа на $B-\lambda E$, где $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.