В. С. Шипачев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ВЫСШАЯ ШКОЛА

В.С.Шипачев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ИЗДАНИЕ СЕДЬМОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСТВО ВЫСШАЯ ШКОЛА

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 2005

УДК 51
ББК 22.11
Ш63

Рецензент: д-р пед. наук, проф. А.Г. Мордкович

Шипачев, В.С.

Ш 63 Высшая математика: Учеб. для вузов/В.С. Шипачев. — 7-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2005. — 479 с.: ил.

ISBN 5-06-003959-5

Изложены элементы теории множеств и вещественных чисел, числовые последовательности и теория пределов, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, основы дифференциального и интегрального исчислений функций одной и нескольких переменных, элементы высшей алгебры, теория рядов и обыкновенные дифференциальные уравнения. Теоретический материал иллюстрируется большим количеством примеров.

Шестое издание вышло в 2003 г.

Для студентов высших учебных заведений.

УДК 51
ББК 22.11

ISBN 5-06-003959-5

1) если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$ и $-x \leqslant 0$. Отсюда $|x| \geqslant -x$, т. е. $-|x| \leqslant x = |x|$;

2) если $x < 0$, то $|x| = -x$, откуда $-|x| = x$. Далее, так как $x < 0$, то $2x < 0$, или $x + x < 0$, откуда $x < -x$, т. е. $x < |x|$. Итак, $-|x| = x < |x|$.

Из 1) и 2) получаем, что $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

Поскольку следующие три свойства очень важны, докажем их в виде теорем.

Теорема 1.2. *Пусть ε — положительное число. Тогда неравенства $|x| \leqslant \varepsilon$ и $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$ равносильны.**

Доказательство. Пусть $|x| \leqslant \varepsilon$. Тогда:

1) если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$ и, значит, $x \leqslant \varepsilon$, откуда $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$.

2) если $x < 0$ то $|x| = -x$ и, значит, $-x \leqslant \varepsilon$, откуда $-\varepsilon \leqslant x \leqslant 0$. Объединяя 1) и 2), при любом x получаем: $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$.

Пусть справедливы неравенства $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$. Это означает, что одновременно выполняются неравенства $x \leqslant \varepsilon$ и $x \geqslant -\varepsilon$. Из последнего неравенства имеем: $-x \leqslant \varepsilon$. Так как, по определению, $|x|$ есть либо x, либо $-x$, то $|x| \leqslant \varepsilon$.■

Теорема 1.3. *Абсолютная величина суммы двух чисел не больше суммы абсолютных величин этих чисел, т. е. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.*

Доказательство. Пусть x и y — любые числа. Согласно свойству 3° для них справедливы неравенства

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \text{ и } -|y| \leqslant y \leqslant |y|.$$

Складывая их почленно, получаем

$$-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant (|x| + |y|).$$

По теореме 1.2 это двойное неравенство равносильно неравенству $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.■

Заметим, что $|x - y| \leqslant |x| + |y|$.

Теорема 1.4. *Абсолютная величина разности двух чисел не меньше разности абсолютных величин этих чисел, т. е. $|x - y| \geqslant |x| - |y|$.*

Доказательство. Для любых чисел x и y имеем

$$x = y + (x - y).$$

По теореме 1.3 справедливо неравенство

$$|x| = |y + (x - y)| \leqslant |y| + |x - y|.$$

Откуда получаем: $|x - y| \geqslant |x| - |y|$.■

Заметим, что $|x + y| \geqslant |x| - |y|$.

В заключение отметим, что каковы бы ни были два числа x и y, имеют место легко проверяемые соотношения:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \text{ и } \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \text{ если } y \neq 0.$$

---

* Это утверждение с помощью логических символов можно записать так: $\forall \varepsilon > 0 : |x| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$.

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Понятие предела и понятие функции — фундаментальные понятия математического анализа. Начало изучению понятия предела положено в элементарной математике, где с помощью предельных переходов определяются длина окружности, объем цилиндра, конуса и т. д. Оно также было использовано при определении суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Операция предельного перехода является одной из основных операций анализа. В настоящей главе рассматривается простейшая форма операции предельного перехода, основанная на понятии предела числовой последовательности. Понятие предела числовой последовательности позволит в дальнейшем определить и другие более сложные формы операции предельного перехода.

§ 1. Числовые последовательности

1. Числовые последовательности и арифметические действия над ними. Числовые последовательности изучают уже в средней школе. Примерами таких последовательностей могут служить: 1) последовательность всех членов арифметической и геометрической прогрессий; 2) последовательность периметров правильных n-угольников, вписанных в данную окружность; 3) последовательность $x_1=1$, $x_2=1{,}4$, $x_3=1{,}41$... приближенных значений $\sqrt{2}$.

Уточним и расширим понятие числовой последовательности.

Определение. *Если каждому числу n из натурального ряда чисел*

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

поставлено в соответствие вещественное число x_n, то множество вещественных чисел

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \qquad (1)$$

*называется числовой последовательностью или просто последовательностью.**

Числа x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... будем называть *элементами* (или *членами*) последовательности (1), символ x_n — *общим* элементом (или членом) последовательности, а число n — его *номером*. Сокращенно последовательность (1) будем обозначать символом $\{x_n\}$. Так, например, символ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ обозначает последовательность 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

Последовательность считается заданной, если указан способ получения любого ее элемента. Например, формула $x_n=1+(-1)^n$

* Другими словами, числовую последовательность можно определить как множество пар чисел $(n;\ x_n)$, в которых первое число принимает последовательно значения 1, 2, 3, ...

задает последовательность: 0,2, 0,2, ... Обращая дробь $\frac{1}{3}$ в десятичную и оставляя один, два, три и т. д. знака после запятой, получаем последовательность

$$x_1=0{,}3;\ x_2=0{,}33;\ x_3=0{,}333,\ \dots;\ x_n=0{,}333\dots3,\ \dots$$

По самому определению, последовательность содержит бесконечное число элементов: любые два ее элемента отличаются, по крайней мере, своими номерами.

Геометрически последовательность изображается на координатной прямой в виде последовательности точек, координаты которых равны соответствующим элементам последовательности. На рис. 6, *а* и *б* изображены соответственно последовательности $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\{x_n\}=\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$.

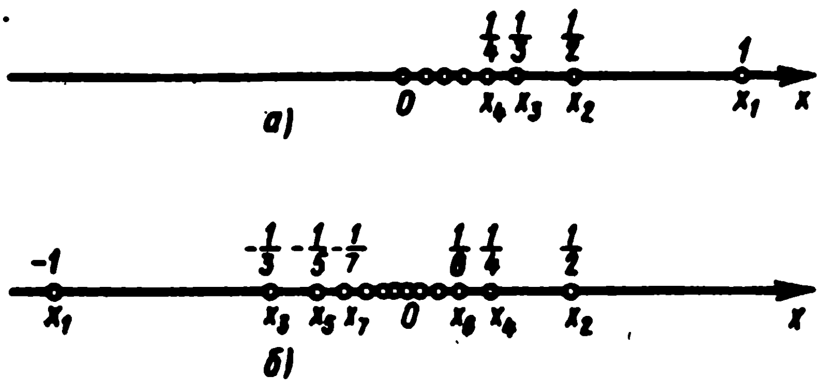


Рис. 6

Введем арифметические действия над числовыми последовательностями. Пусть даны последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Произведением последовательности $\{x_n\}$ на число m назовем последовательность $mx_1, mx_2, \dots, mx_n, \dots$;

суммой данных последовательностей назовем последовательность $x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n, \dots$;

разностью — последовательность $x_1-y_1,\ x_2-y_2,\ \dots,\ x_n-y_n,\ \dots$;

произведением — последовательность $x_1y_1,\ x_2y_2,\ \dots,\ x_ny_n,\ \dots$;

частным — последовательность $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots$, если все члены последовательности $\{y_n\}$ отличны от нуля.

Указанные действия над последовательностями символически записываются так:

$$m\{x_n\}=\{mx_n\},\ \{x_n\}+\{y_n\}=\{x_n+y_n\},$$
$$\{x_n\}-\{y_n\}=\{x_n-y_n\},\ \{x_n\}\cdot\{y_n\}=\{x_ny_n\},$$
$$\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}}=\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\},\ y_n\neq 0.^*$$

2. Ограниченные и неограниченные последовательности. Определение 1. *Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует число M (число m) такое, что любой эле-*

---

* $y_n\neq 0$ означает, что значения y_n отличны от нуля при любом n.

мент x_n *этой последовательности удовлетворяет неравенству* $x_n \leqslant M$ $(x_n \geqslant m)$.

Определение 2. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу, т. е. существуют числа* m *и* M *такие, что любой элемент* x_n *этой последовательности удовлетворяет неравенствам* $m \leqslant x_n \leqslant M$.

Пусть $A = \max\{|m|, |M|\}$. Тогда условие ограниченности последовательности можно записать в виде $|x_n| \leqslant A$.

Определение 3. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется неограниченной, если для любого положительного числа* A *существует элемент* x_n *этой последовательности, удовлетворяющий неравенству* $|x_n| > A$ *(т. е. либо* $x_n > A$, *либо* $x_n < -A$*)*.

Из данных определений следует, что если последовательность ограничена сверху, то все ее элементы принадлежат промежутку $(-\infty, M]$; если она ограничена снизу — промежутку $[m, +\infty)$, а если ограничена и сверху и снизу — промежутку $[m, M]$. Неограниченная последовательность может быть ограничена сверху (снизу).

Рассмотрим примеры ограниченных и неограниченных последовательностей.

1. Последовательность 1, 2, 3, ..., n, ... ограничена снизу, но не ограничена сверху.

2. Последовательность -1, -2, -3, ..., $-n$, ... ограничена сверху, но не ограничена снизу.

3. Последовательность 1, 1/2, 1/3, ..., $1/n$, ... ограничена, так как любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ $(m = 0, M = 1)$.

4. Последовательность $-1, 2, -3, 4, -5, ..., (-1)^n n$, ...неограниченная. В самом деле, каково бы ни было число A среди элементов x_n этой последовательности, найдутся элементы, для которых будет выполняться неравенство $|x_n| > A$.

С помощью логических символов данные выше определения можно записать следующим образом:

последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, если $(\exists M)(\forall x_n): x_n \leqslant M$;

последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу, если $(\exists m)(\forall x_n): x_n \geqslant m$;

последовательность $\{x_n\}$ ограничена, если $(\exists A > 0)(\forall x_n): |x_n| \leqslant A$,

последовательность $\{x_n\}$ неограничена, если $(\forall A > 0)(\exists x_n): |x_n| > A$.

Сравнивая запись с помощью логических символов двух последних определений, видим, что при построении отрицаний символы $\exists$ и $\forall$ заменяют друг друга.

3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.

Определение 1. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется бесконечно большой, если для любого положительного числа* A *существует номер* N *такой, что при* $n > N$* *выполняется неравенство* $|x_n| > A$.

---

* «При $n > N$» означает: «для всех элементов последовательности с номерами $n > N$».

Символическая запись определения бесконечно большой последовательности:

$$(\forall A > 0)(\exists N)(\forall n > N) : |x_n| > A.$$

Замечание. Очевидно, что любая бесконечно большая последовательность является неограниченной. Однако неограниченная последовательность может и не быть бесконечно большой. Например, неограниченная последовательность 1, 2, 1, 3, ..., 1, n, 1, $n+1$, ... не является бесконечно большой, поскольку при $A > 1$ неравенство $|x_n| > A$ выполняется не для всех элементов x_n с нечетными номерами.

Определение 2. *Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.*

Символическая запись определения бесконечно малой последовательности:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N) : |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Пример 1. Используя определение 1, докажем, что последовательность $\{n\}$ является бесконечно большой.

Возьмем любое число $A > 0$. Из неравенства $|x_n| = |n| > A$ получаем $n > A$. Если взять $N \geqslant A$, то для всех $n > N$ будет выполняться неравенство $|x_n| > A$, т. е. согласно определению 1 последовательность $\{n\}$ бесконечно большая.

Пример 2. Используя определение 2, докажем, что последовательность $\{1/n\}$ является бесконечной малой.

Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Из неравенства $|\alpha_n| = |1/n| < \varepsilon$ получаем $n > 1/\varepsilon$. Если взять $N = [1/\varepsilon]$*, то для всех $n > N$ будет выполняться неравенство $n \geqslant [1/\varepsilon] + 1 > 1/\varepsilon$, откуда $1/n = |\alpha_n| < \varepsilon$. Таким образом, согласно определению 2 последовательность $\{1/n\}$ является бесконечно малой.

Докажем теорему, устанавливающую связь между бесконечно большими и бесконечно малыми последовательностями.

Теорема 2.1. *Если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно малая, и, обратно, если $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность и $\alpha_n \neq 0$, то последовательность $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ — бесконечно большая.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и положим $A = \frac{1}{\varepsilon}$. Согласно определению 1 для этого A существует номер N такой, что при $n > N$ будет $|x_n| > A$. Отсюда получаем, что $\left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{A} = \varepsilon$

---

* Символ $[x]$ обозначает целую часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $[1] = 1$, $[3,1] = 3$, $[0,7] = 0$, $[-0,5] = -1$, $[-172,9] = -173$ и т. д. Очевидно, $[x] + 1 > x$.

для всех $n>N$. А это значит, что последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно малая.

Доказательство второй части теоремы проводится аналогично.■

4. Основные свойства бесконечно малых последовательностей.

Теорема 2.2. *Сумма и разность двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малые последовательности.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Требуется доказать, что последовательность $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ бесконечно малая. Пусть ε — произвольное положительное число, N_1 — номер, начиная с которого $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}$, а N_2—номер, начиная с которого $|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. (Такие номера N_1 и N_2 найдутся по определению бесконечно малой последовательности.) Возьмем $N=\max\{N_1, N_2\}$; тогда при $n>N$ будут одновременно выполняться два неравенства: $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, при $n>N$

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это значит, что последовательность $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ бесконечно малая.■

Следствие. *Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Теорема 2.3. *Произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Требуется доказать, что последовательность $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ бесконечно малая. Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, то для любого $\varepsilon>0$ существует номер N_1 такой, что $|\alpha_n|<\varepsilon$ при $n>N_1$, а так как $\{\beta_n\}$ также бесконечно малая последовательность, то для $\varepsilon=1$ существует номер N_2 такой, что $|\beta_n|<1$ при $n>N_2$. Возьмем $N=\max\{N_1, N_2\}$; тогда при $n>N$ будут выполняться оба неравенства. Следовательно, при $n>N$

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ бесконечно малая.■

Следствие. *Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Замечание. Частное двух бесконечно малых последовательностей может не быть бесконечно малой последовательностью и может даже не иметь смысла. Например, если $\alpha_n=1/n$, $\beta_n=1/n$, то все элементы $\{\alpha_n/\beta_n\}$ равны единице и данная последовательность является ограниченной. Если $\alpha_n=1/n$, $\beta_n=1/n^2$, то последовательность $\{\alpha_n/\beta_n\}$ бесконечно большая, а если $\alpha_n=1/n^2$, $\beta_n=1/n$, то — бесконечно малая. Если, начиная с некоторого номера, элементы $\{\beta_n\}$ равны нулю, то $\{\alpha_n/\beta_n\}$ не имеет смысла.

Теорема 2.4. *Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная, а $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательности. Требуется доказать, что последовательность $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ бесконечно малая. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то существует число $A > 0$ такое, что любой элемент x_n удовлетворяет неравенству $|x_n| \leqslant A$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Поскольку последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, для положительного числа $\frac{\varepsilon}{A}$ существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A}$. Следовательно, при $n > N$

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < A \cdot \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ бесконечно малая.■

Следствие. *Произведение бесконечно малой последовательности на число есть бесконечно малая последовательность.*

Перейдем теперь к одному из важнейших в математическом анализе понятию предела числовой последовательности.

§ 2. Сходящиеся последовательности

1. Понятие сходящейся последовательности. Определение. *Число а называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство*

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (1)$$

С помощью логических символов это определение можно записать в виде

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N) : |x_n - a| < \varepsilon.$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится и имеет своим пределом число a, то символически это записывается так:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a^* \text{ или } x_n \to a \text{ при } n \to \infty. \qquad (2)$$

Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется *расходящейся*.

Пример. Используя определение предела последовательности, докажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Так как $|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$, то для нахождения значений n, удовлетворяющих не-

* limes (лат.) — предел.

равенству $|x_n-1|<\varepsilon$, достаточно решить неравенство $1/(n+1)<\varepsilon$, откуда получаем $n>(1-\varepsilon)/\varepsilon$. Следовательно, в качестве N можно взять целую часть числа $(1-\varepsilon)/\varepsilon$, т. е. $N=[(1-\varepsilon)/\varepsilon]$. Тогда неравенство $|x_n-1|<\varepsilon$ будет выполняться при всех $n>N$. Этим и доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

З а м е ч а н и е 1. Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет своим пределом число a. Тогда $\{\alpha_n\}=\{x_n-a\}$ является бесконечно малой последовательностью, так как для любого $\varepsilon>0$ существует номер N такой, что при $n>N$ выполняется неравенство $|\alpha_n|=|x_n-a|<\varepsilon$. Следовательно, любой элемент x_n последовательности, имеющей пределом число a, можно представить в виде

$$x_n=a+\alpha_n, \tag{3}$$

где α_n — элемент бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$. Очевидно, справедливо и обратное: если x_n можно представить в виде $x_n=a+\alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Представление (3) используется при доказательствах теорем о пределах последовательностей.

З а м е ч а н и е 2. Неравенство (1) равносильно неравенствам

$$-\varepsilon<x_n-a<\varepsilon \text{ или } a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon,$$

которые означают, что элемент x_n находится в ε-окрестности точки a (рис. 7). Поэтому определение предела последовательности можно сформулировать следующим образом: число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности точки a существует номер N такой, что все элементы x_n с номерами $n>N$ находятся в этой ε-окрестности.

З а м е ч а н и е 3. Очевидно, что бесконечно большая последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела. Иногда говорят, что она имеет *бесконечный* предел, и пишут

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty.$$

Если при этом, начиная с некоторого номера, все члены последовательности положительны (отрицательны), то пишут

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty\ \left(\lim_{n\to\infty}x_n=-\infty\right).$$

Предел последовательности, как он был определен ранее, будем называть иногда в отличие от бесконечного предела *конечным* пределом.

З а м е ч а н и е 4. Очевидно, всякая бесконечно малая последовательность является сходящейся и имеет своим пределом число $a=0$.

2. Основные свойства сходящихся последовательностей. Докажем лемму, которая понадобится при доказательстве теоремы 2.5.

Л е м м а 2.1. *Если все элементы бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$ равны одному и тому же числу c, то $c=0$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $c \neq 0$. Положим $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$. Тогда по определению бесконечно малой последовательности существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$. Так как $\alpha_n = c$, а $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$, то последнее неравенство можно переписать в виде $|c| < \frac{|c|}{2}$, откуда $1 < \frac{1}{2}$. Полученное противоречие доказывает, что неравенство $c \neq 0$ не может иметь места и, значит, $c = 0$. ■

Теорема 2.5. *Сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела a и b. Тогда по формуле (3) для элементов x_n получаем

$$x_n = a + \alpha_n \text{ и } x_n = b + \beta_n,$$

где α_n и β_n — элементы бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Приравнивая правые части этих соотношений, найдем, что $\alpha_n - \beta_n = b - a$. Так как все элементы бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n - \beta_n\}$ равны одному и тому же числу $b - a$, то по лемме 2.1 $b - a = 0$, т. е. $b = a$. ■

Теорема 2.6. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

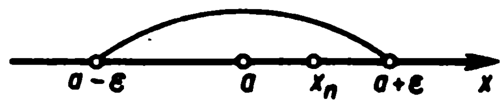


Рис. 7

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность и число a — ее предел. Пусть, далее, ε — произвольное положительное число и N — номер, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Тогда

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leqslant |x_n - a| + |a| < |a| + \varepsilon$$

для всех $n > N$. Пусть $A = \max\{|a| + \varepsilon, \ |x_1|, \ |x_2|, \ \ldots, \ |x_N|\}$. Очевидно, $|x_n| \leqslant A$ для всех номеров n, что и означает ограниченность последовательности $\{x_n\}$. ■

Замечание. Ограниченная последовательность может и не быть сходящейся. Например, последовательность $-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$ очевидно ограничена, но не сходится. Докажем это. Предположим, что данная последовательность имеет предел число a. Тогда для $\varepsilon = 1/2$ существует номер N такой, что при $n > N$ будет $|x_n - a| < 1/2$. Так как x_n принимает попеременно значения 1 и -1, то $|1 - a| < 1/2$ и $|(-1) - a| < 1/2$. Используя эти неравенства, получаем

$$2 = |1 - a + a - (-1)| \leqslant |1 - a| + |a - (-1)| < 1/2 + \\ + 1/2 = 1,$$

т. е. $2 < 1$. Полученное противоречие доказывает расходимость данной последовательности.

Теорема 2.7. *Сумма (разность) двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме (разности) пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.*

Доказательство. Пусть a и b — соответственно пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда по формуле (3):

$$x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Следовательно,

$$(x_n \pm y_n) - (a \pm b) = \alpha_n \pm \beta_n.$$

По теореме 2.2 последовательность $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ бесконечно малая. Таким образом, последовательность $\{(x_n \pm y_n) - (a \pm b)\}$ также бесконечно малая, и поэтому последовательность $\{x_n \pm y_n\}$ сходится и имеет своим пределом число $a \pm b$. ■

Теорема 2.8. *Произведение сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.*

Доказательство. Пусть a и b — соответственно пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда по формуле (3):

$$x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Следовательно,

$$x_n y_n - ab = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n.$$

Согласно теоремам 2.2—2.4 последовательность $\{a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n\}$ бесконечно малая. Таким образом, последовательность $\{x_n y_n - ab\}$ также бесконечно малая, и поэтому последовательность $\{x_n y_n\}$ сходится и имеет своим пределом число ab. ■

Теорема 2.9. *Частное двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при условии, что предел $\{y_n\}$ отличен от нуля,* есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.*

Доказательство. Пусть a и b $(b \neq 0)$ — соответственно пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда по формуле (3):

$$x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Следовательно,

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{by_n} = \frac{b(a + \alpha_n) - a(b + \beta_n)}{by_n} = \frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right).$$

В силу свойств бесконечно малых последовательностей последовательность $\left\{\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right\}$ бесконечно малая. Покажем, что

---

* В силу условия $\lim\limits_{n\to\infty} y \neq 0$ элементы y_n, начиная с некоторого номера N, не обращаются в нуль, поэтому частное $\{x_n/y_n\}$ имеет смысл для всех $n > N$.

$\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ — ограниченная последовательность. Так как $y_n \to b$ при $n \to \infty$, то для $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ найдется номер N такой, что для всех $n > N$ будет $|y_n - b| < \frac{|b|}{2}$. Поэтому

$$|y_n| = |b - (b - y_n)| \geqslant |b| - |y_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2},$$

т. е. $|y_n| > \frac{|b|}{2}$ и, следовательно, $\left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|b|}$ для всех $n > N$, что и означает ограниченность последовательности $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$.

По теореме 2.4 последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right)\right\}$ бесконечно малая, поэтому последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ также бесконечно малая. Следовательно, последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ сходится и имеет своим пределом число $\frac{a}{b}$. ■

Теоремы, доказанные в этом пункте, имеют большое не только теоретическое, но и практическое значение.

Пример. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n + 1}{3n^2 - 1}$.

При $n \to \infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, следовательно, применить теорему о пределе частного нельзя, так как в условии этой теоремы предполагается существование конечных пределов. Поэтому сначала преобразуем данную последовательность, разделив числитель и знаменатель на n^2. Затем, применяя теоремы о пределе частного и о пределе суммы, найдем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n + 1}{3n^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + 1/n + 1/n^2}{3 - 1/n^2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (2 + 1/n + 1/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty} (3 - 1/n^2)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} (1/n) + \lim\limits_{n\to\infty} (1/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 - \lim\limits_{n\to\infty} (1/n^2)} = \frac{2 + 0 + 0}{3 - 0} = \frac{2}{3}.$$

3. **Предельный переход в неравенствах.** **Теорема 2.10.** *Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geqslant b$ $(x_n \leqslant b)$, то и предел a этой последовательности удовлетворяет неравенству $a \geqslant b$ $(a \leqslant b)$.*

Доказательство. Пусть все элементы x_n, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geqslant b$. Требуется доказать неравенство $a \geqslant b$. Предположим противное, т. е. что $a < b$.

Так как a — предел $\{x_n\}$, то для $\varepsilon = b - a$ существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < b - a$, которое равносильно следующим двум неравенствам: $-(b - a) <$

$<x_n-a<b-a$. Из правого неравенства получаем: $x_n<b$ при $n>N$, а это противоречит условию теоремы. Следовательно, $a\geqslant b$. Случай $x_n\leqslant b$ рассматривается аналогично. ■

Следствие 1. *Если элементы сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n\leqslant y_n$, то их пределы удовлетворяют неравенству* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

В самом деле, начиная с некоторого номера, элементы последовательности $\{y_n-x_n\}$ неотрицательны, а поэтому неотрицателен и ее предел: $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} y_n-\lim\limits_{n\to\infty} x_n\geqslant 0$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Следствие 2. *Если все элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ сходятся на отрезке $[a, b]$, то и ее предел c также находится на этом отрезке.*

В самом деле, так как $a\leqslant x_n\leqslant b$, то $a\leqslant c\leqslant b$.

Следующая теорема играет важную роль в различных приложениях.

Теорема 2.11. *Пусть даны три последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$, причем $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$ для всех n, и пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ имеют один и тот же предел a. Тогда последовательность $\{y_n\}$ также имеет предел a.*

Доказательство. Возьмем любое $\varepsilon>0$. По этому ε для последовательности $\{x_n\}$ найдется номер N_1 такой, что $|x_n-a|<\varepsilon$ при $n>N_1$, т. е.

$$\underline{a-\varepsilon<x_n}<a+\varepsilon. \tag{4}$$

По тому же ε для последовательности $\{z_n\}$ найдется номер N_2 такой, что $|z_n-a|<\varepsilon$ при $n>N_2$, т. е.

$$a-\varepsilon<\underline{z_n<a+\varepsilon}. \tag{5}$$

Пусть $N=\max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n>N$ будут выполняться одновременно неравенства (4) и (5). Используя подчеркнутые неравенства, а также неравенства, данные в условии теоремы, получаем

$$a-\varepsilon<x_n\leqslant y_n\leqslant z_n<a+\varepsilon \text{ при } n>N.$$

Отсюда

$$a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon \text{ или } |y_n-a|<\varepsilon \text{ при } n>N.$$

Это означает, что предел последовательности $\{y_n\}$ равен a. ■

§ 3. Монотонные последовательности

1. Определение и признак сходимости монотонных последовательностей. Определение. *Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей, если $x_n<x_{n+1}$ для всех n; неубывающей, если $x_n\leqslant x_{n+1}$ для всех n; убывающей, если $x_n>x_{n+1}$ для всех n; невозрастающей, если $x_n\geqslant x_{n+1}$ для всех n.*

Все такие последовательности объединяются общим названием: *монотонные последовательности*. Возрастающие и убывающие последовательности называются также *строго монотонными*.

Рассмотрим примеры монотонных последовательностей.

1. Последовательность $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$ убывающая и ограниченная.

2. Последовательность $1, 1, 1/2, 1/2, 1/3, 1/3, \ldots 1/n, 1/n, \ldots$ невозрастающая и ограниченная.

3. Последовательность $1, 2, 3, \ldots n, \ldots$ возрастающая и неограниченная.

4. Последовательность $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots, n, n, \ldots$ неубывающая и неограниченная.

5. Последовательность $1/2, 2/3, 3/4, \ldots, n/(n+1), \ldots$ возрастающая и ограниченная.

Отметим, что монотонные последовательности ограничены, по крайней мере, с одной стороны: неубывающие последовательности — снизу ($x_n \geqslant x_1$ для всех n), невозрастающие — сверху ($x_n \leqslant x_1$ для всех n). Оказывается, что если монотонная последовательность ограничена с обеих сторон, т. е. просто ограничена, то она сходится. Немонотонные последовательности этим свойством не обладают. Например, немонотонная последовательность $\{(-1)^n\}$ ограничена, но не сходится (см. замечание к теореме 2.6).

Имеет место следующая основная теорема о монотонных последовательностях.

Теорема 2.12. *Монотонная ограниченная последовательность сходится.*

Доказательство. Рассмотрим случай неубывающей последовательности.

Пусть $x_n \leqslant x_{n+1}$ для всех n и существует число M такое, что все элементы x_n не больше M, т. е. $x_n \leqslant M$. Рассмотрим числовое множество X, состоящее из элементов данной последовательности. По условию это множество ограничено сверху и непусто. Поэтому в силу теоремы 1.1 множество X имеет точную верхнюю грань. Обозначим ее через a и докажем, что a является пределом данной последовательности.

Так как a — точная верхняя грань множества элементов последовательности $\{x_n\}$, то согласно свойству точной верхней грани для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что $x_N > a - \varepsilon$. Поскольку $\{x_n\}$ — неубывающая последовательность, то при $n > N$ будет $x_n > a - \varepsilon$. С другой стороны, по определению верхней грани $x_n \leqslant a < a + \varepsilon$ для всех n. Таким образом, при $n > N$ получаем неравенства $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, т. е. $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$. Это и означает, что число a — предел последовательности $\{x_n\}$.

Случай невозрастающей последовательности рассматривается аналогично. ■

Замечание. Ограниченность монотонной последовательности является необходимым и достаточным условием сходимости.

В самом деле, если монотонная последовательность ограничена, то в силу теоремы 2.12 она сходится; если же монотонная последовательность сходится, то по теореме 2.6 она ограничена.

2. Число e. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ с общим членом $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$:

$$(1+1)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots$$

Докажем, что она сходится. Для этого достаточно доказать, что последовательность $\{x_n\}$ — возрастающая и ограничена сверху. Применив формулу бинома Ньютона* [гл. 6, § 3, п. 4, формула (10)], получим

$$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n}.$$

Представим это выражение в следующей форме:

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (1)$$

Аналогичным образом представим x_{n+1}:

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Заметим теперь, что $\left(1-\frac{k}{n}\right) < \left(1-\frac{k}{n+1}\right)$ при $0<k<n$. Поэтому каждое слагаемое в выражении для x_{n+1} больше соответствующего слагаемого в выражении для x_n и, кроме того, у x_{n+1} по сравнению с x_n добавляется еще одно положительное слагаемое. Следовательно, $x_n < x_{n+1}$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

Для доказательства ограниченности сверху данной последовательности заметим, что каждое выражение в круглых скобках в соотношении (1) меньше единицы. Учитывая также, что $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$ при $n>2$, получаем

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Используя формулу суммы геометрической прогрессии, придем к неравенству

$$x_n < 1 + \frac{1-1/2^n}{1-1/2} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

---

* Ньютон Исаак (1642—1727) — великий английский физик, механик, астроном и математик.

Таким образом, доказано, что последовательность $\{(1+1/n)^n\}$ — возрастающая и ограничена сверху. По теореме 2.12 она имеет предел. Этот предел обозначают буквой e. Итак, по определению,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Отметим, что число e играет большую роль во многих вопросах математики. Оно, в частности, является основанием натуральных логарифмов. В настоящем параграфе дано только определение числа e. Далее будет рассмотрен способ вычисления этого числа с любой степенью точности.

Здесь лишь отметим, что так как $x_n<3$ и из (1) непосредственно очевидно, что $2<x_n$, то число e заключено в пределах $2\leqslant e\leqslant 3$. Доказано, что число e иррациональное.

Докажем теорему, которая в дальнейшем неоднократно используется при доказательстве других теорем.

§ 4. Теорема о вложенных отрезках

Пусть дана последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... таких, что каждый последующий содержится в предыдущем: $[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\ldots\supset[a_n, b_n]\supset\ldots$, т. е.

$$a_n\leqslant a_{n+1}<b_{n+1}\leqslant b_n \text{ для всех } n, \tag{1}$$

и пусть $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. Будем называть эту последовательность *последовательностью вложенных отрезков.*

Теорема 2.13. *Для любой последовательности вложенных отрезков существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности.*

Доказательство. Из неравенств (1) следует, что левые концы отрезков образуют неубывающую последовательность

$$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\ldots\leqslant a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant\ldots, \tag{2}$$

а правые концы — невозрастающую последовательность

$$b_1\geqslant b_2\geqslant b_3\geqslant\ldots\geqslant b_n\geqslant b_{n+1}\geqslant\ldots \tag{3}$$

При этом последовательность (2) ограничена сверху, а последовательность (3) ограничена снизу, так как $a_n\leqslant b_1$, а $b_n\geqslant a_1$, для любого n. Следовательно, на основании теоремы 2.12 эти последовательности имеют пределы. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c'$, а $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c''$. Тогда из условия

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}a_n=c''-c'=0$$

следует, что $c'=c''$, т. е. последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют общий предел. Обозначая этот предел буквой c, получаем, что для любого n справедливы неравенства $a_n\leqslant c\leqslant b_n$, т. е. точка c принадлежит всем отрезкам последовательности (1).

Докажем теперь, что такая точка только одна. Допустим, что существует еще одна точка c_1 $(c_1 \neq c)$, принадлежащая всем отрезкам последовательности (1). Тогда для любого n должно выполняться неравенство $b_n - a_n \geqslant |c_1 - c|$ и, следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) \geqslant |c_1 - c| \neq 0$, что противоречит условию теоремы.■

Замечание. Теорема неверна, если вместо отрезков рассматривать интервалы. Например, для последовательности вложенных интервалов

$$(0, 1) \supset (0, 1/2) \supset (0, 1/4) \supset \ldots \supset (0, 1/2^n) \supset \ldots \tag{4}$$

не существует точки, принадлежащей всем интервалам. В самом деле, какую бы точку c на интервале $(0, 1)$ ни взять, всегда найдется номер N такой, что при $n > N$ будет $1/2^n < c$ и, следовательно, точка c не будет принадлежать интервалам последовательности (4), начиная с интервала $(0, 1/2^{N+1})$.

Для дальнейшего изложения нам понадобятся некоторые сведения из аналитической геометрии. Поэтому следующая глава посвящена этому разделу математики.

ГЛАВА 3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Аналитическая геометрия — область математики, изучающая геометрические образы алгебраическими методами. Еще в XVII в. французским математиком Декартом был разработан метод координат, являющийся аппаратом аналитической геометрии.

В основе метода координат лежит понятие системы координат. Мы познакомимся с прямоугольной (или декартовой) и полярной системами координат.

§ 1. Прямоугольная система координат

Две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy, имеющие общее начало O и одинаковую масштабную единицу (рис. 8), образуют *прямоугольную систему координат на плоскости.*

Ось Ox называется *осью абсцисс,* ось Oy — *осью ординат,* а обе оси вместе — *осями координат.* Точка O пересечения осей называется *началом координат.* Плоскость, в которой расположены оси Ox и Oy, называется *координатной плоскостью* и обозначается Oxy.

Пусть M — произвольная точка плоскости. Опустим из нее перпендикуляры MA и MB на оси Ox и Oy.

Прямоугольными координатами x и y точки M будем называть соответственно величины OA и OB направленных отрезков $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$: $x = OA$, $y = OB$.

Координаты x и y точки M называются соответственно ее *абсциссой* и *ординатой*. Тот факт, что точка M имеет координаты x и y, символически обозначают так: $M(x;\ y)$. При этом первой в скобках указывают абсциссу, а второй — ординату. Начало координат имеет координаты $(0;\ 0)$.

Таким образом, при выбранной системе координат каждой точке M плоскости соответствует единственная пара чисел $(x;\ y)$* — ее прямоугольные координаты, и, обратно, на каждой паре чисел $(x;\ y)$ соответствует, и притом одна, точка M плоскости Oxy такая, что ее абсцисса равна x, а ордината y.

Итак, введение прямоугольной системы координат на плоскости позволяет установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством пар чисел, что дает возможность при решении геометрических задач применять алгебраические методы.

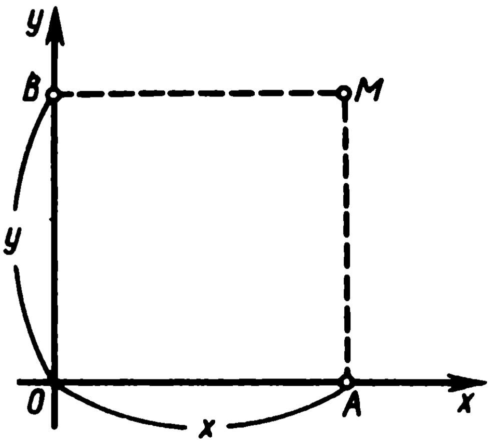


Рис. 8

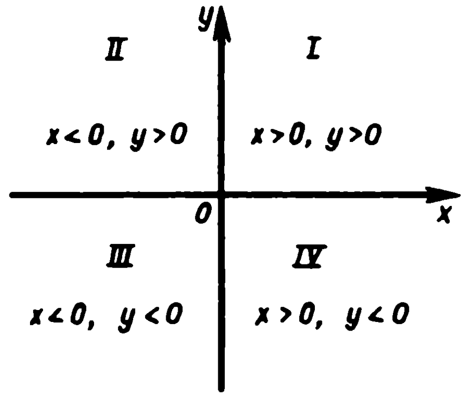


Рис. 9

Оси координат разбивают плоскость на четыре части, их называют *четвертями, квадрантами* или *координатными углами* и нумеруют римскими цифрами I, II, III, IV так, как показано на рис. 9. На рис. 9 указаны также знаки координат точек в зависимости от их расположения в той или иной четверти.

§ 2. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

1. Расстояние между двумя точками. Теорема 3.1. *Для любых двух точек $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$ плоскости расстояние d между ними выражается формулой*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

Доказательство. Опустим из точек M_1 и M_2 перпендикуляры M_1B и M_2A соответственно на оси Oy и Ox и обозначим через K точку пересечения прямых M_1B и M_2A (рис. 10). Точка K

* Здесь речь идет об упорядоченной паре чисел, т. е. о наборе из двух чисел, в котором указано, какое число является первым, а какое — вторым. Если $x \neq y$, то пары $(x;\ y)$ и $(y;\ x)$ различны, так как в первой из них первым числом является x, а во второй — y.

3*

имеет координаты $(x_2;\ y_1)$, поэтому (см. гл. 1, § 3)

$$|M_1K| = |x_2 - x_1|;\ |M_2K| = |y_2 - y_1|.$$

Так как треугольник M_1M_2K — прямоугольный, то по теореме Пифагора

$$d = \sqrt{(M_1K)^2 + (M_2K)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \blacksquare$$

2. Площадь треугольника. Теорема 3.2. *Для любых точек $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ и $C(x_3;\ y_3)$, не лежащих на одной прямой, площадь s треугольника ABC выражается формулой*

$$s = \frac{1}{2}\left|\left[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right]\right|. \tag{2}$$

Доказательство. Площадь треугольника ABC, изображенного на рис. 11, можно найти так:

$$s_{ABC} = s_{ADEC} + s_{BCEF} - s_{ABFD}, \tag{3}$$

где s_{ADEC}, s_{BCEF}, s_{ABFD} — площади соответствующих трапеций. Поскольку

$$s_{ADEC} = |DE|\frac{|AD| + |CE|}{2} = \frac{(x_3 - x_1)(y_3 + y_1)}{2},$$
$$s_{BCEF} = |EF|\frac{|EC| + |BF|}{2} = \frac{(x_2 - x_3)(y_2 + y_3)}{2},$$
$$s_{ABFD} = |DF|\frac{|AD| + |BF|}{2} = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2},$$

подставив выражения для этих площадей в равенство (3), получим формулу

$$s = \frac{1}{2}\left|\left[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)\right]\right|,$$

из которой следует формула (2). Для любого другого расположения треугольника ABC формула (2) доказывается аналогично.$\blacksquare$

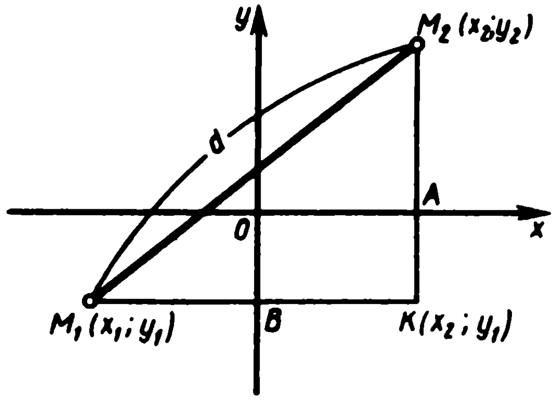


Рис. 10

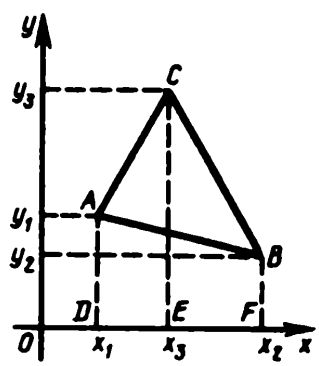


Рис. 11

Пример. Даны точки $A(1;\ 1)$, $B(6;\ 4)$, $C(8;\ 2)$. Найти площадь треугольника ABC. По формуле (2):

$$s = \frac{1}{2}\left|\left[(6 - 1)(2 - 1) - (8 - 1)(4 - 1)\right]\right| = \frac{1}{2}\left|\left[-16\right]\right| = 8.$$

3. Деление отрезка в данном отношении. Пусть на плоскости дан произвольный отрезок M_1M_2 и пусть M — любая точка этого отрезка, отличная от точки M_2 (рис. 12).

Число λ, определяемое равенством

$$\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}, \tag{4}$$

называется *отношением*, в котором точка M делит отрезок M_1M_2.

Задача о делении отрезка в данном отношении состоит в том, чтобы по данному отношению λ и данным координатам точек M_1 и M_2 найти координаты точки M.

Решить эту задачу позволяет следующая теорема.

Теорема 3.3. *Если точка $M(x;\ y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, то координаты этой точки определяются формулами*

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \tag{5}$$

где $(x_1;\ y_1)$ — координаты точки M_1; $(x_2;\ y_2)$ — координаты точки M_2.

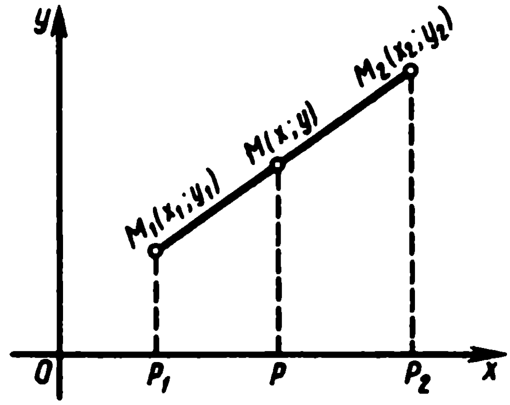


Рис. 12

Доказательство. Пусть прямая M_1M_2 не перпендикулярна оси Ox. Опустим перпендикуляры из точек M_1, M, M_2 на ось Ox и обозначим точки их пересечения с осью Ox соответственно через P_1, P и P_2 (рис. 12). На основании теоремы элементарной геометрии о пропорциональности отрезков прямых, заключенных между параллельными прямыми, имеем

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|} = \frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda,$$

но $|P_1P|=|x-x_1|$, $|PP_2|=|x_2-x|$ (см. гл. 1, § 3).

Так как числа $(x-x_1)$ и (x_2-x) одного и того же знака (при $x_1<x_2$ они положительны, а при $x_1>x_2$ — отрицательны), то $\frac{|x-x_1|}{|x_2-x|}=\frac{x-x_1}{x_2-x}$. Поэтому $\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$, откуда $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$. Если прямая M_1M_2 перпендикулярна оси Ox, то $x_1=x_2=x$ и эта формула также, очевидно, верна. Получена первая из формул (5). Вторая формула получается аналогично. ■

Следствие. Если $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$ — две произвольные точки и точка $M(x;\ y)$ — середина отрезка M_1M_2, т. е. $|M_1M|=|MM_2|$, то $\lambda=1$, и по формулам (5) получаем

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Таким образом, каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат.

Пример. Даны точки $M_1(1;\ 1)$ и $M_2(7;\ 4)$. Найти точку $M(x;\ y)$, которая в два раза ближе к M_1, чем M_2.

Решение. Искомая точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda=1/2$. Применяя формулы (5), находим координаты этой точки: $x=3$, $y=2$.

§ 3. Полярные координаты

Наиболее важной после прямоугольной системы координат является полярная система координат. Она состоит из некоторой точки O, называемой *полюсом*, и исходящего из нее луча OE — *полярной оси*. Кроме того, задается единица масштаба для измерения длин отрезков.

Пусть задана полярная система координат и пусть M — произвольная точка плоскости. Пусть ρ — расстояние точки M от точки O; φ — угол, на который нужно повернуть полярную ось для совмещения с лучом OM (рис. 13).

Полярными координатами точки M называются числа ρ и φ. При этом число ρ считается первой координатой и называется *полярным радиусом*, число φ — второй координатой и называется *полярным углом*.

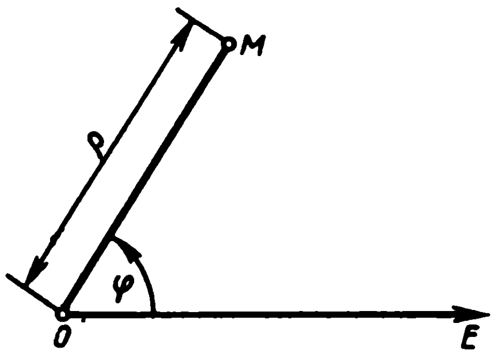


Рис. 13

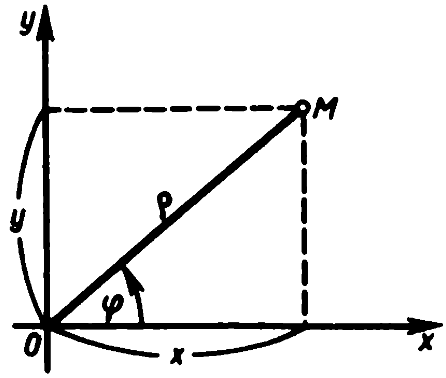


Рис. 14

Точка M с полярными координатами ρ и φ обозначается так: $M(\rho;\ \varphi)$. Очевидно, полярный радиус может иметь любое неотрицательное значение: $0 \leqslant \rho < +\infty$. Обычно считают, что полярный угол изменяется в следующих пределах: $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Однако в ряде случаев приходится рассматривать углы, большие 2π, а также отрицательные углы, т. е. углы, отсчитываемые от полярной оси по часовой стрелке.

Установим связь между полярными координатами точки и ее прямоугольными координатами. При этом будем предполагать, что начало прямоугольной системы координат находится в полюсе, а положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью. Пусть точка M имеет прямоугольные координаты x и y и полярные координаты ρ и φ (рис. 14). Очевидно,

$$x = \rho \cos \varphi,\ y = \rho \sin \varphi. \tag{1}$$

Формулы (1) выражают прямоугольные координаты через полярные. Выражения полярных координат через прямоугольные следуют из формул (1):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \operatorname{tg} \varphi = y/x. \tag{2}$$

Заметим, что формула $\operatorname{tg} \varphi = y/x$ определяет два значения полярного угла φ, так как φ изменяется от 0 до 2π. Из этих двух знавсего в качестве угла наклона берут наименьшее неотрицательное значение угла α, на который нужно повернуть (против часовой стрелки) ось Ox, чтобы ее положительное направление совпало с одним из направлений прямой (рис. 23). В таком случае $0 \leqslant \alpha < \pi$.

Тангенс угла наклона прямой к оси Ox называется *угловым коэффициентом* этой прямой и обозначается буквой k:

$$k = \operatorname{tg} \alpha. \tag{1}$$

Из формулы (1), в частности, следует, что если $\alpha = 0$, т. е. прямая параллельна оси Ox, то $k = 0$. Если $\alpha = \pi/2$, т. е. прямая перпендикулярна оси Ox, то $k = \operatorname{tg} \alpha$ теряет смысл. В таком случае говорят, что угловой коэффициент «обращается в бесконечность».

Выведем уравнение данной прямой, если известны ее угловой коэффициент k и величина b отрезка OB*, который она отсекает на оси Oy (рис. 23) (т. е. данная прямая не перпендикулярна оси Ox).

Обозначим через M произвольную точку плоскости с координатами x и y. Если провести прямые BN и NM, параллельные осям, то в случае $k \neq 0$ образуется прямоугольный треугольник BNM. Точка M лежит на прямой тогда и только тогда, когда величины NM и BN удовлетворяют условию

$$\frac{NM}{BN} = \operatorname{tg} \alpha,$$

но $NM = CM - CN = CM - OB = y - b$, $BN = x$. Отсюда, учитывая формулу (1), получаем, что точка $M(x;\ y)$ лежит на данной прямой тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению

$$\frac{y - b}{x} = k. \tag{2}$$

Уравнение (2) после преобразования принимает вид

$$y = kx + b. \tag{3}$$

Уравнение (3) называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. Если $k = 0$, то прямая параллельна оси Ox, и ее уравнение имеет вид $y = b$.

Итак, любая прямая, не перпендикулярная оси Ox, имеет уравнение вида (3). Очевидно, верно и обратное: любое уравнение вида (3) определяет прямую, которая имеет угловой коэффициент k и отсекает на оси Oy отрезок величины b.

Пример. Построить прямую, заданную уравнением

$$y = (3/4)\,x + 2.$$

Р е ш е н и е. Отложим на оси Oy отрезок OB, величина которого равна 2 (рис. 24); проведем через точку B параллельно оси Ox

---

* Более того, b является величиной направленного отрезка $\overline{OB}$ на оси Oy. Однако для краткости будем говорить просто «величина отрезка OB».

отрезок, величина которого $BN=4$, и через точку N параллельно оси Oy отрезок, величина которого $NM=3$. Затем проведем прямую BM, которая и является искомой. Она имеет угловой коэффициент $k=3/4$ и отсекает на оси Oy отрезок величины $b=2$.

2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом. В ряде случаев возникает необходимость составить уравнение прямой, зная одну ее точку $M_1(x_1;\ y_1)$ и угловой коэффициент k. Запишем уравнение прямой в виде (3), где b — пока неизвестное число. Так как прямая проходит через точку $M_1(x_1;\ y_1)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (3): $y_1=kx_1+b$. Определяя b из этого равенства и подставляя в уравнение (3), получаем искомое уравнение прямой:

$$y-y_1=k(x-x_1). \qquad (4)$$

З а м е ч а н и е. Если прямая проходит через точку $M_1(x_1;\ y_1)$ перпендикулярно оси Ox, т. е. ее угловой коэффициент обращается в бесконечность, то уравнение прямой имеет вид $x-x_1=0$. Формально это уравнение можно получить из (4), если разделить уравнение (4) на k и затем устремить k к бесконечности.

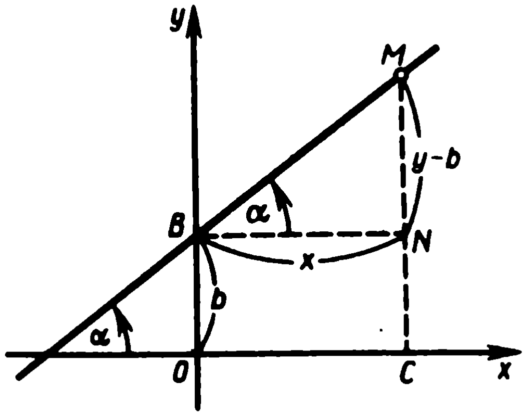


Рис. 23

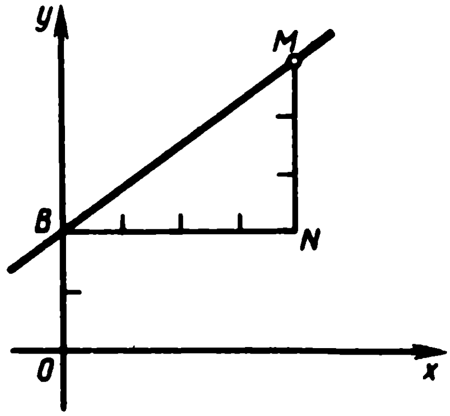


Рис. 24

3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Пусть даны две точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$ (рис. 25). Запишем уравнение прямой M_1M_2 в виде (4), где k — пока неизвестный угловой коэффициент. Так как прямая M_1M_2 проходит через точку M_2, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (4): $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$. Определяя k из этого равенства (при условии $x_1\neq x_2$) и подставляя в уравнение (4), получаем искомое уравнение прямой:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

Это уравнение, если $y_1\neq y_2$, можно записать в виде

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (5)$$

Если $y_1=y_2$, то уравнение искомой прямой имеет вид $y=y_1$. В этом случае прямая параллельна оси Ox. Если $x_1=x_2$, то прямая, проходящая через точки M_1 и M_2, параллельна оси Oy, и ее уравнение имеет вид $x=x_1$.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3;\ 1)$ и $M_2(5;\ 4)$.

Решение. Подставляя координаты точек M_1 и M_2 в соотношение (5), получаем искомое уравнение прямой:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{3},\ \text{или}\ 3x-2y-7=0.$$

4. Угол между двумя прямыми. Рассмотрим две прямые L_1 и L_2. Пусть уравнение L_1 имеет вид $y=k_1x+b_1$, где $k_1=\operatorname{tg}\alpha_1$, а уравнение L_2 — вид $y=k_2x+b_2$, где $k_2=\operatorname{tg}\alpha_2$ (рис. 26). Пусть φ — угол между прямыми L_1 и L_2: $0\leqslant\varphi<\pi$.

Из геометрических соображений устанавливаем зависимость между углами α_1, α_2, φ: $\alpha_2=\alpha_1+\varphi$ или $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$. Отсюда

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2},\ \text{или}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}. \tag{6}$$

Формула (6) определяет один из углов между прямыми. Второй угол равен $\pi-\varphi$.

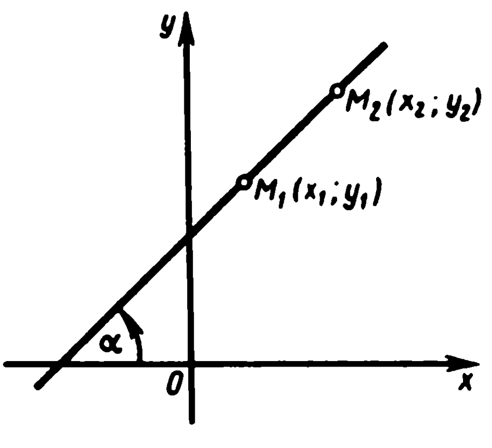


Рис. 25

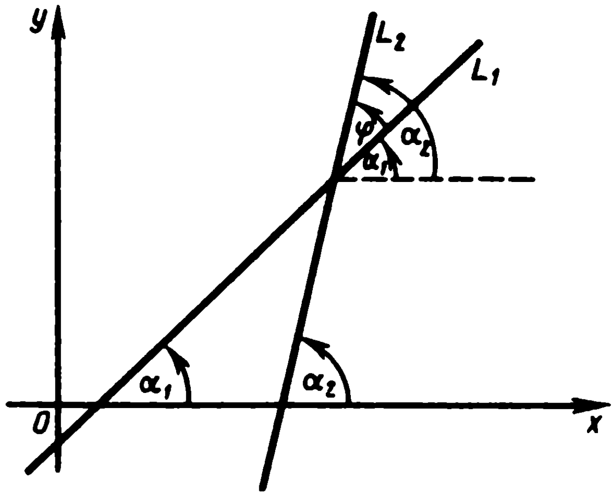


Рис. 26

Пример. Две прямые заданы уравнениями $y=2x+3$ и $y=-3x+2$. Найти угол между этими прямыми.

Решение. Очевидно, $k_1=2$, $k_2=-3$, поэтому по формуле (6) находим

$$\operatorname{tg}\varphi=(-3-2)/(1+(-3)\cdot 2)=-5/-5=1.$$

Таким образом, один из углов между данными прямыми равен $\pi/4$, другой угол $\pi-\pi/4=3\pi/4$.

5. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то $\varphi=0$ и $\operatorname{tg}\varphi=0$. В этом случае числитель в правой части формулы (6) равен нулю: $k_2-k_1=0$, откуда

$$k_2=k_1.$$

Таким образом, *условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов.*

Если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, т. е. $\varphi=\pi/2$, то $\alpha_2= =\pi/2+\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}(\pi/2+\alpha_1)=-\operatorname{ctg}\alpha_1=-1/(\operatorname{tg}\alpha_1)$, т. е.

$$k_2=-\frac{1}{k_1}.$$

Таким образом, *условие перпендикулярности двух прямых состоит в том, что их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку.* Это условие можно формально получить из формулы (6), если приравнять нулю знаменатель в правой части (6), что соответствует обращению $\operatorname{tg}\varphi$ в бесконечность, т. е. равенству $\varphi=\pi/2$.

6. Общее уравнение прямой. Теорема 3.4. *В прямоугольной системе координат любая прямая задается уравнением первой степени*

$$Ax+By+C=0, \tag{7}$$

и обратно, уравнение (7) при произвольных коэффициентах A, B, C (A и B не равны нулю одновременно) определяет некоторую прямую в прямоугольной системе координат Oxy.

Доказательство. Сначала докажем первое утверждение. Если прямая не перпендикулярна оси Ox, то, как было показано в п. 1, она имеет уравнение $y=kx+b$, т. е. уравнение вида (7), где $A=k$, $B=-1$ и $C=b$. Если прямая перпендикулярна оси Ox, то все ее точки имеют одинаковые абсциссы, равные величине a отрезка, отсекаемого прямой на оси Ox (рис. 27). Уравнение этой прямой имеет вид $x=a$, т. е. также является уравнением первой степени вида (7), где $A=1$, $B=0$, $C=-a$. Тем самым первое утверждение доказано. Докажем обратное утверждение. Пусть дано уравнение (7), причем хотя бы один из коэффициентов A и B не равен нулю.

Если $B\neq 0$, то (7) можно записать в виде

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Полагая $k=-A/B$, $b=-C/B$, получаем уравнение $y=kx+b$, т. е. уравнение вида (3), которое определяет прямую.

Если $B=0$, то $A\neq 0$ и (7) принимает вид $x=-C/A$. Обозначая $-C/A$ через a, получаем $x=a$, т. е. уравнение прямой, перпендикулярной оси Ox. ■

Линии, определяемые в прямоугольной системе координат уравнением первой степени, называются *линиями первого порядка.* Таким образом, каждая прямая есть линия первого порядка и, обратно, каждая линия первого порядка есть прямая.

Уравнение вида $Ax+By+C=0$ называется *общим уравнением прямой.* Оно содержит уравнение любой прямой при соответствующем выборе коэффициентов A, B, C.

7. Неполное уравнение первой степени. Уравнение прямой «в отрезках». Рассмотрим три частных случая, когда уравнение $Ax+By+C=0$ является *неполным*, т. е. какой-то из коэффициентов равен нулю.

1) $C=0$; уравнение имеет вид $Ax+By=0$ и определяет прямую, проходящую через начало координат.

2) $B=0$ $(A\neq 0)$; уравнение имеет вид $Ax+C=0$ и определяет прямую, параллельную оси Oy. Как было показано в теореме 3.4, это уравнение приводится к виду $x=a$, где $a=-C/A$, a — величина отрезка, который отсекает прямая на оси Ox (рис. 27). В частности, если $a=0$, то прямая совпадает с осью Oy. Таким образом, уравнение $x=0$ определяет ось ординат.

3) $A=0$ $(B\neq 0)$; уравнение имеет вид $By+C=0$ и определяет прямую, параллельную оси Ox. Этот факт устанавливается аналогично предыдущему случаю. Если положить $-C/B=b$, то уравнение принимает вид $y=b$, где b — величина отрезка, который отсекает прямая на оси Oy (рис. 28). В частности, если $b=0$, то прямая совпадает с осью Ox. Таким образом, уравнение $y=0$ определяет ось абсцисс.

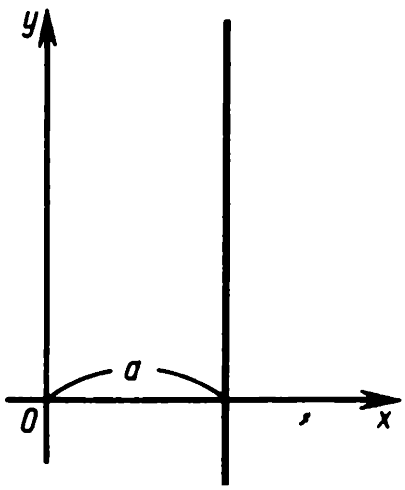


Рис. 27

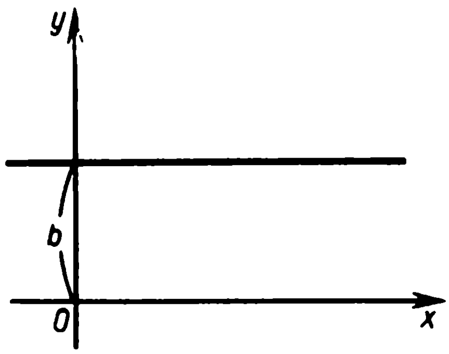


Рис. 28

Пусть теперь дано уравнение $Ax+By+C=0$ при условии, что ни один из коэффициентов A, B, C не равен нулю. Преобразуем его к виду

$$\frac{x}{-C/A}+\frac{y}{-C/B}=1.$$

Вводя обозначения $a=-C/A$, $b=-C/B$, получаем

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (8)$$

Уравнение (8) называется *уравнением прямой «в отрезках»*. Числа a и b являются величинами отрезков, которые прямая отсекает на осях координат. Эта форма уравнения прямой удобна для геометрического построения прямой.

Пример. Прямая задана уравнением $3x-5y+15=0$. Составить для этой прямой уравнение «в отрезках» и построить прямую.

Решение. Для данной прямой уравнение «в отрезках» имеет вид

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1.$$

Чтобы построить эту прямую, отложим на осях координат Ox и Oy отрезки, величины которых соответственно равны $a=-5$, $b=3$, и проведем прямую через точки $M_1(-5;\ 0)$ и $M_2(0;\ 3)$ (рис. 29).

8. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой. Пусть дана некоторая прямая L. Проведем через начало координат прямую n, перпендикулярную данной, и назовем ее *нормалью* к прямой L. Буквой N отметим точку, в которой нормаль пересекает прямую L (рис. 30, a). На нормали введем направление от точки O к точке N. Таким образом, нормаль станет осью. Если точки N и O совпадают, то в качестве направления нормали возьмем любое из двух возможных.

Обозначим через α угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки ось Ox до совмещения ее положительного направления с направлением нормали, через p — длину отрезка ON.

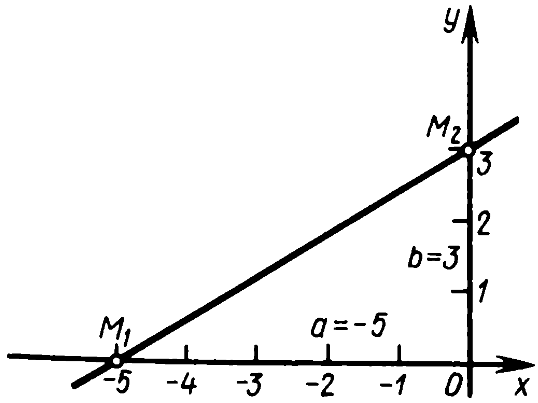


Рис. 29

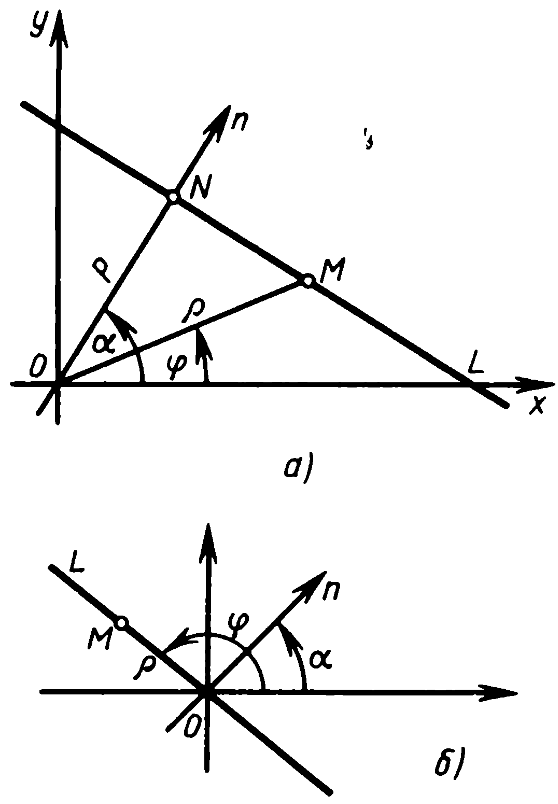


Рис. 30

Тем самым, $0\leqslant\alpha<2\pi$, $p\geqslant0$. Выведем уравнение данной прямой, считая известными числа α и p. Для этого возьмем на прямой произвольную точку M с полярными координатами $(\rho;\ \varphi)$, где O — полюс, Ox — полярная ось. Если точки O и N не совпадают, то из прямоугольного треугольника ONM имеем

$$p=\rho\cos(\alpha-\varphi)=\rho(\cos\alpha\cos\varphi+\sin\alpha\sin\varphi).$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\rho\cos\varphi\cos\alpha+\rho\sin\varphi\sin\alpha-p=0. \qquad (9)$$

Так как точки, не лежащие на данной прямой L, не удовлетворяют уравнению (9), то (9) — уравнение прямой L в полярных координатах. По формулам, связывающим прямоугольные координаты с полярными, имеем: $\rho\cos\varphi = x$, $\rho\sin\varphi = y$. Следовательно, уравнение (9) в прямоугольной системе координат принимает вид

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (10)$$

Если точки O и N совпадают, то прямая L проходит через начало координат (рис. 30, *б*) и $p=0$. В этом случае, очевидно, для любой точки M прямой L выполняется равенство $\cos(\varphi-\alpha)=0$. Умножая его на ρ, получаем $\rho\cos(\varphi-\alpha)=0$, откуда

$$\rho\cos\varphi\cos\alpha + \rho\sin\varphi\sin\alpha = 0$$

или

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0.$$

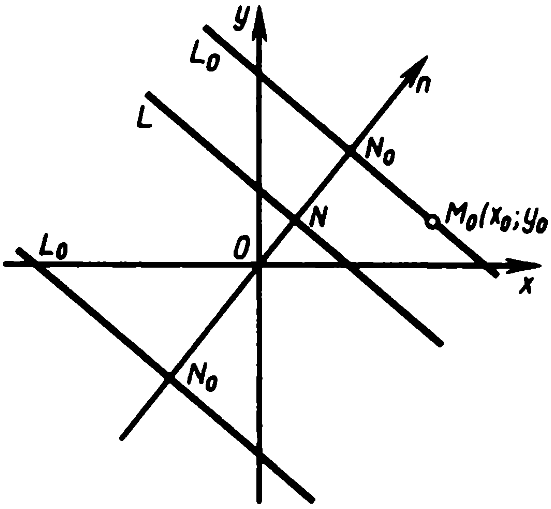


Рис. 31

Таким образом, и в этом случае уравнение прямой можно представить в виде (10).

Уравнение (10) называется *нормальным уравнением* прямой L.

С помощью нормального уравнения прямой можно определить расстояние от данной точки плоскости до прямой.

Пусть L — прямая, заданная нормальным уравнением: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, и пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ — точка, не лежащая на этой прямой. Требуется определить расстояние d от точки M_0 до прямой L.

Через точку M_0 проведем прямую L_0 параллельно прямой L. Пусть N_0 — точка пересечения L_0 с нормалью, p_0 — длина отрезка ON_0 (рис. 31).

Если точки N и N_0 лежат по одну сторону от точки O, то нормальное уравнение прямой L_0 имеет вид $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p_0 = 0$. Так как точка $M_0(x_0;\ y_0) \in L_0$, то $x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p_0 = 0$, откуда $p_0 = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha$. В этом случае

$$d = |p_0 - p| = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|.$$

Если же точки N и N_0 лежат по разные стороны от точки O, то нормальное уравнение прямой L_0 имеет вид $x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_0 = 0$, где α_1 отличается от α на π. Следовательно, $p_0 = x_0\cos\alpha_1 + y_0\sin\alpha_1 = -x_0\cos\alpha - y_0\sin\alpha$. В этом случае

$$d = |p_0 + p| = |-x_0\cos\alpha - y_0\sin\alpha + p| = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|.$$

Таким образом, в каждом из рассмотренных случаев получаем формулу

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|. \qquad (11)$$

Отметим, что формула (11) пригодна и в том случае, когда точка $M_0(x_0;\ y_0)$ лежит на прямой L, т. е. ее координаты удовлетворяют уравнению прямой L: $x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p = 0$. В этом случае по формуле (11) получаем $d=0$. Из формулы (11) следует, что для вычисления расстояния d от точки M_0 до прямой L нужно в левую часть нормального уравнения прямой L поставить вместо $(x;\ y)$ координаты точки M_0 и полученное число взять по модулю.

Теперь покажем, как привести общее уравнение прямой к нормальному виду. Пусть

$$Ax + By + C = 0 \tag{12}$$

— общее уравнение некоторой прямой, а

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \tag{13}$$

— ее нормальное уравнение.

Так как уравнения (12) и (13) определяют одну и ту же прямую, то их коэффициенты пропорциональны. Умножая все члены уравнения (12) на произвольный множитель $\mu \neq 0$, получаем уравнение

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0.$$

При соответствущем выборе μ полученное уравнение обращается в уравнение (13), т. е. выполняются равенства

$$\mu A = \cos\alpha,\ \mu B = \sin\alpha,\ \mu C = -p. \tag{14}$$

Чтобы найти множитель μ, возведем первые два из этих равенств в квадрат и сложим, тогда получаем

$$\mu^2(A^2 + B^2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Отсюда

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{15}$$

Число μ называется *нормирующим множителем*. Знак нормирующего множителя определяется с помощью третьего из равенств (14). Согласно этому равенству μC число отрицательное, если $C \neq 0$. Следовательно, в формуле (15) берется знак, противоположный знаку C. Если $C=0$, то знак нормирующего множителя можно выбрать произвольно.

Итак, для приведения общего уравнения прямой к нормальному виду надо найти значение нормирующего множителя μ, а затем все члены уравнения умножить на μ.

Пример. Даны прямая $3x - 4y + 10 = 0$ и точка $M(4;\ 3)$. Найти расстояние d от точки M до данной прямой.

Решение. Приведем данное уравнение к нормальному виду. Для этого найдем по формуле (15) нормирующий множитель:

$$\mu = -1/\sqrt{3^2 + 4^2} = -1/5.$$

Умножая данное уравнение на μ, получаем нормальное уравнение

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0.$$

4*

По формуле (11) находим искомое расстояние:

$$d = |(-3/5) \cdot 4 + (4/5) \cdot 3 - 2| = |-2| = 2.$$

§ 7. Линии второго порядка

Рассмотрим три вида линий: *эллипс, гиперболу* и *параболу*, уравнения которых в прямоугольной системе координат являются уравнениями второй степени. Такие линии называются *линиями второго порядка*.

1. Эллипс. Определение. *Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.*

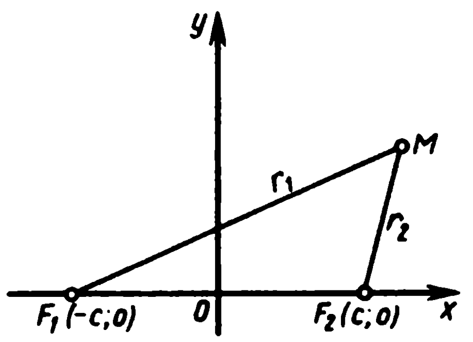


Рис. 32

Обозначим фокусы эллипса через F_1 и F_2, расстояние $|F_1F_2|$ между фокусами через $2c$, сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов через $2a$. По определению, $2a>2c$ или $a>c$.

Для вывода уравнения эллипса введем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы эллипса лежали на оси абсцисс, а начало координат делило отрезок F_1F_2 пополам. Тогда фокусы имеют координаты: $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$ (рис. 32). Выведем уравнение эллипса в выбранной системе координат.

Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка плоскости. Обозначим через r_1 и r_2 расстояния от точки M до фокусов ($r_1=|F_1M|$, $r_2=|F_2M|$). Числа r_1 и r_2 называются *фокальными радиусами* точки M. Из определения эллипса следует, что точка $M(x;\ y)$ будет лежать на данном эллипсе в том и только в том случае, когда

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{1}$$

По формуле (1) из § 2 находим

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\ r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{2}$$

Подставляя эти выражения в равенство (1), получаем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{3}$$

Уравнение (3) и есть искомое уравнение эллипса. Однако для практического использования оно неудобно, поэтому уравнение эллипса обычно приводят к более простому виду. Перенесем второй радикал в правую часть уравнения, а затем возведем обе части в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2, \quad \text{или}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \tag{4}$$

Снова возведем обе части уравнения в квадрат

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2.$$

Отсюда

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{5}$$

Введем в рассмотрение новую величину

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}, \tag{6}$$

геометрический смысл которой раскрыт далее. Так как по условию $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$ и, следовательно, b — число положительное. Из равенства (6) имеем

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Поэтому уравнение (5) можно переписать в виде

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Разделив обе части на a^2b^2, окончательно получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7}$$

Так как уравнение (7) получено из уравнения (3), то координаты любой точки эллипса, удовлетворяющие уравнению (3), будут удовлетворять и уравнению (7). Однако при упрощении уравнения (3) обе его части дважды были возведены в квадрат и могли появиться «лишние» корни, вследствие чего уравнение (7) могло оказаться неравносильным уравнению (3). Убедимся в том, что если координаты точки удовлетворяют уравнению (7), то они удовлетворяют и уравнению (3), т. е. уравнения (3) и (7) равносильны. Для этого, очевидно, достаточно показать, что величины r_1 и r_2 для любой точки, координаты которой удовлетворяют уравнению (7), удовлетворяют соотношению (1). Действительно, пусть координаты x и y некоторой точки удовлетворяют уравнению (7). Тогда, подставляя в выражение (2) значение $y^2 = b^2(1 - x^2/a^2)$, полученное из (7), после несложных преобразований найдем, что $r_1 = \sqrt{(a + cx/a)^2}$. Так как $|x| \leqslant a$ [это следует из (7)] и $c/a < 1$, то $a + cx/a > 0$, и поэтому $r_1 = a + cx/a$.

Аналогично найдем, что $r_2 = a - cx/a$. Складывая почленно эти равенства, получаем соотношение (1), что и требовалось установить. Таким образом, любая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (7), принадлежит эллипсу, и наоборот, т. е. уравнение (7) есть уравнение эллипса. Уравнение (7) называется *каноническим* (или простейшим) *уравнением эллипса.* Таким образом, эллипс — линия второго порядка.

Исследуем теперь форму эллипса по его каноническому уравнению (7). Заметим, что уравнение (7) содержит только члены с четными степенями координат x и y, поэтому эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy, а также относительно начала координат. Таким образом, можно знать форму всего эллипса, если установить вид той его части, которая лежит в I координатном угле. Для этой части $y \geqslant 0$, поэтому, разрешая уравнение (7) относительно y, получаем

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (8)$$

Из равенства (8) вытекают следующие утверждения.

1) Если $x=0$, то $y=b$. Следовательно, точка $(0;\ b)$ лежит на эллипсе. Обозначим ее через B.

2) При возрастании x от 0 до a y уменьшается.

3) Если $x=a$, то $y=0$. Следовательно, точка $(a;\ 0)$ лежит на эллипсе. Обозначим ее через A.

4) При $x>a$ получаем мнимые значения y. Следовательно, точек эллипса, у которых $x>a$, не существует.

Итак, частью эллипса, расположенной в I координатном угле, является дуга BA* (рис. 33).

Произведя симметрию относительно координатных осей, получим весь эллипс.

Замечание. Если $a=b$, то уравнение (7) принимает вид $x^2+y^2=a^2$. Это уравнение окружности радиуса a. Таким образом, окружность — частный случай эллипса. Заметим, что эллипс можно получить из окружности радиуса a, если сжать ее в a/b раз вдоль оси Oy. При таком сжатии точка $(x;\ y)$ перейдет в точку $(x;\ y_1)$, где $y_1=y\,(b/a)$. Подставляя $y=y_1\,(a/b)$ в уравнение окружности, получаем уравнение эллипса

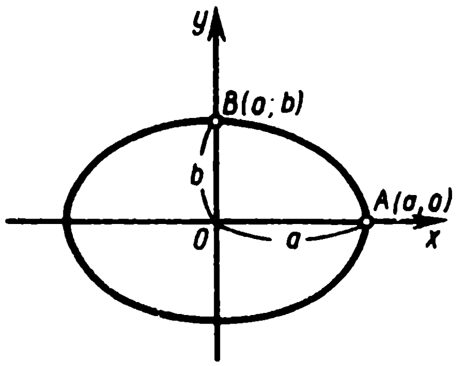


Рис. 33

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y_1)^2}{b^2} = 1.$$

Оси симметрии эллипса называются его *осями,* а центр симметрии (точка пересечения осей) — *центром эллипса.* Точки, в которых эллипс пересекает оси, называются его *вершинами.* Вершины ограничивают на осях отрезки, равные $2a$ и $2b$. Из равенства (6) следует, что $a \geqslant b$. Величины a и b называются соответственно *большой* и *малой полуосями* эллипса. В соответствии с этим оси эллипса называются *большой* и *малой* осями.

Введем еще одну величину, характеризующую форму эллипса.

Определение. *Эксцентриситетом эллипса называется отношение* $\frac{c}{a}$, *где* c *— половина расстояния между фокусами,* a *— большая полуось эллипса.*

Эксцентриситет обычно обозначают буквой ε: $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Так как $c<a$, то $0 \leqslant \varepsilon < 1$, т. е. эксцентриситет эллипса меньше еди-

---

* В гл. 6 будет введено понятие направления выпуклости графика функции $y=f(x)$ и показано, что дуга BA направлена выпуклостью вверх.

ницы. Принимая во внимание, что $c^2=a^2-b^2$, найдем

$$\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

откуда

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

Из последнего равенства легко получается геометрическое истолкование эксцентриситета эллипса. При очень малом ε числа a и b почти равны, т. е. эллипс близок к окружности. Если же ε близко к единице, то число b весьма мало по сравнению с числом a и эллипс сильно вытянут вдоль большой оси. Таким образом, эксцентриситет эллипса характеризует меру вытянутости эллипса.

Как известно, планеты и некоторые кометы движутся по эллиптическим траекториям. Оказывается, что эксцентриситеты планетных орбит весьма малы, а кометных — велики, т. е. близки к единице. Таким образом, планеты движутся почти по окружностям, а кометы то приближаются к Солнцу (Солнце находится в одном из фокусов), то значительно удаляются от него.

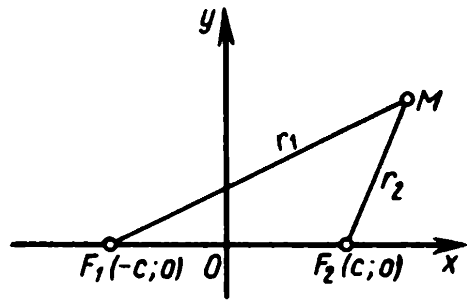


Рис. 34

2. Гипербола. Определение. *Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.*

Обозначим фокусы гиперболы через F_1 и F_2, расстояние $|F_1F_2|$ между фокусами через $2c$, а модуль разности расстояний от произвольной точки гиперболы до фокусов через $2a$. По определению, $2a<2c$ или $a<c$.

Для вывода уравнения гиперболы введем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы гиперболы лежали на оси абсцисс, а начало координат делило отрезок F_1F_2 пополам. Тогда фокусы гиперболы имеют координаты $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$ (рис. 34). Выведем уравнение гиперболы в выбранной системе координат. Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка плоскости. Числа $|F_1M|$ и $|F_2M|$ называются *фокальными радиусами* точки M и обозначаются через r_1 и r_2. Из определения гиперболы следует, что точка $M(x;\ y)$ будет лежать на данной гиперболе в том и только в том случае, когда $|r_1-r_2|=2a$. Отсюда

$$r_1-r_2=\pm 2a. \tag{9}$$

По формуле (1) из § 2 находим

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\ r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{10}$$

Подставляя эти выражения в равенство (9), получаем

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \tag{11}$$

Уравнение (11) и является искомым уравнением гиперболы. Упростим это уравнение аналогично тому, как было упрощено уравнение (3) для эллипса. Перенесем второй радикал в правую часть уравнения, после чего возведем обе части в квадрат. Получаем

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \quad \text{или}$$

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{12}$$

Снова возведем обе части уравнения в квадрат:

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2.$$

Отсюда

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2). \tag{13}$$

Введем в рассмотрение новую величину

$$b=\sqrt{c^2-a^2}, \tag{14}$$

геометрический смысл которой раскрыт далее. Так как $c>a$, то $c^2-a^2>0$ и b — число положительное. Из равенства (14) имеем

$$b^2=c^2-a^2.$$

Уравнение (13) принимает вид

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{15}$$

Как и для эллипса, можно доказать равносильность уравнений (15) и (11). Уравнение (15) называется *каноническим уравнением гиперболы.*

Исследуем форму гиперболы по ее каноническому уравнению. Так как уравнение (15) содержит члены только с четными степенями координат x и y, то гипербола симметрична относительно осей Ox и Oy, а также относительно начала координат. Поэтому достаточно рассмотреть только часть гиперболы, лежащую в I координатном угле. Для этой части $y\geqslant 0$, поэтому, разрешая уравнение (15) относительно y, получаем

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \tag{16}$$

Из равенства (16) вытекают следующие утверждения.

1) Если $0\leqslant x<a$, то y получает мнимые значения, т. е. точек гиперболы с абсциссами $0\leqslant x<a$ нет.

2) Если $x=a$, то $y=0$, т. е. точка $(a;\ 0)$ принадлежит гиперболе. Обозначим ее через A.

3) Если $x>a$, то $y>0$, причем y возрастает при возрастании x и $y\to+\infty$ при $x\to+\infty$. Переменная точка $M(x;\ y)$ на гиперболе движется с ростом x «вправо» и «вверх», ее начальное поло-

жение — точка $A(a;\ 0)$ (рис. 35). Уточним, как именно точка M «уходит в бесконечность».

Для этого кроме уравнения (16) рассмотрим уравнение

$$y = \frac{b}{a}x, \tag{17}$$

которое определяет прямую с угловым коэффициентом $k = b/a$, проходящую через начало координат. Часть этой прямой, расположенная в I координатном угле, изображена на рис. 35. Для ее построения можно использовать прямоугольный треугольник OAB с катетами $OA = a$ и $AB = b$.

Покажем, что точка M, уходя по гиперболе в бесконечность, неограниченно приближается к прямой (17), которая является *асимптотой* гиперболы.*

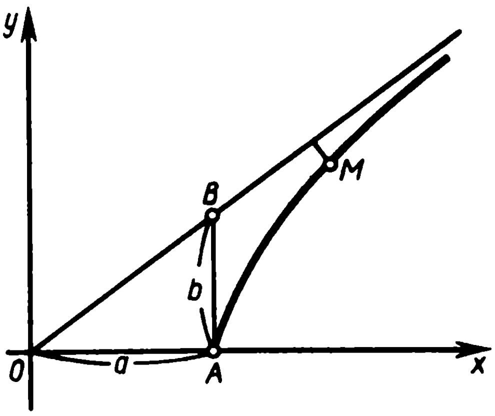


Рис. 35

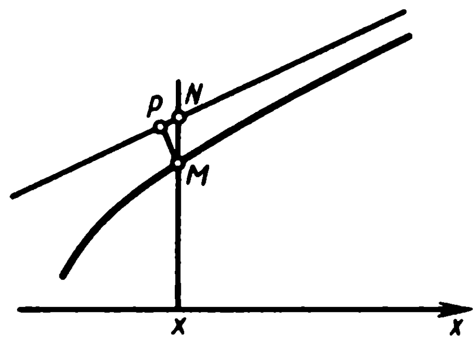


Рис. 36

Возьмем произвольное значение $x\,(x \geqslant a)$ и рассмотрим две точки $M\,(x;\ y)$ и $N\,(x;\ Y)$, где

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \text{ и } Y = \frac{b}{a}x.$$

Точка M лежит на гиперболе, точка N — на прямой (17). Поскольку обе точки имеют одну и ту же абсциссу x, прямая MN перпендикулярна оси Ox (рис. 36). Найдем длину отрезка MN.

Прежде всего заметим, что при $x \geqslant a$

$$Y = \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} > \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = y.$$

Это означает, что при одной и той же абсциссе точка гиперболы лежит под соответствующей точкой асимптоты. Таким образом,

$$|MN| = Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) =$$
$$= \frac{b}{a}\frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

* В гл. 6 будет дано определение асимптоты графика функций $y = f(x)$ и показано, что прямая $y = \frac{b}{a}x$ является асимптотой гиперболы. Там же рассмотрен вопрос о направлении выпуклости гиперболы.

Из полученного выражения следует, что $|MN|$ стремится к нулю при $x \to +\infty$, так как знаменатель стремится к $+\infty$, а числитель есть постоянная величина ab.

Обозначим через P основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую (17). Тогда $|MP|$ — расстояние от точки M до этой прямой. Очевидно, $|MP| < |MN|$, а так как $|MN| \to 0$, то и подавно $|MP| \to 0$ при $x \to +\infty$, т. е. точка M неограниченно приближается к прямой (17), что и требовалось показать.

Вид всей гиперболы теперь можно легко установить, используя симметрию относительно координатных осей (рис. 37). Гипербола состоит из двух ветвей (правой и левой) и имеет две асимптоты: $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$, первая из которых уже рассмотрена, а вторая представляет собой ее симметричное отражение относительно оси Ox (или оси Oy).

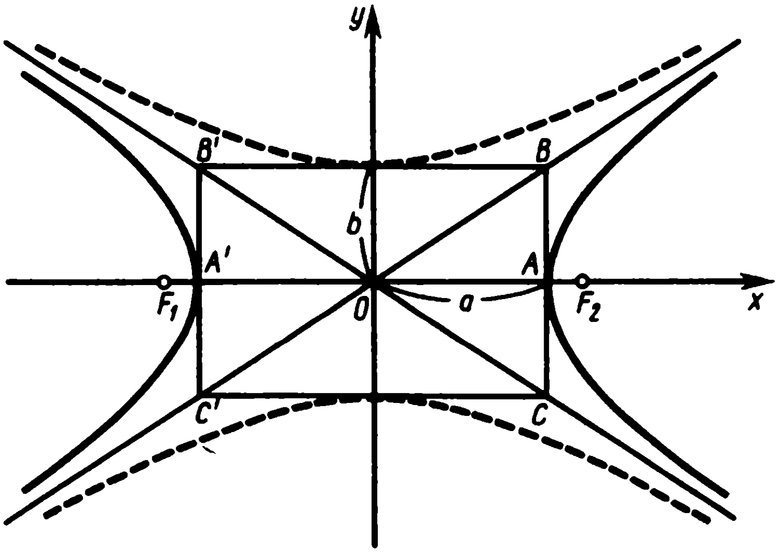


Рис. 37

Оси симметрии называются *осями* гиперболы, а центр симметрии (точка пересечения осей) — *центром* гиперболы. Одна из осей пересекается с гиперболой в двух точках, которые называются ее *вершинами* (они на рис. 37 обозначены буквами A' и A). Эта ось называется *действительной осью* гиперболы. Другая ось не имеет общих точек с гиперболой и называется *мнимой осью* гиперболы. Прямоугольник $BB'C'C$ со сторонами $2a$ и $2b$ (рис. 37) называется *основным прямоугольником* гиперболы. Величины a и b называются соответственно *действительной* и *мнимой полуосями* гиперболы.

Уравнение

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

также определяет гиперболу. Она изображена на рис. 37 пунктирными линиями; вершины ее лежат на оси Oy. Эта гипербола называется *сопряженной* по отношению к гиперболе (15). Обе эти гиперболы имеют одни и те же асимптоты.

Гипербола с равными полуосями ($a=b$) называется *равносторонней* и ее каноническое уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Так как основной прямоугольник равносторонней гиперболы является квадратом, то асимптоты равносторонней гиперболы перпендикулярны друг другу.

Определение. *Эксцентриситетом гиперболы называется отношение $\frac{c}{a}$, где c — половина расстояния между фокусами, a — действительная полуось гиперболы.*

Эксцентриситет гиперболы (как и эллипса) обозначим буквой ε. Так как $c>a$, то $\varepsilon>1$, т. е. эксцентриситет гиперболы больше единицы. Заметив, что $c^2=a^2+b^2$, найдем

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

откуда

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Из последнго равенства легко получается геометрическое истолкование эксцентриситета гиперболы. Чем меньше эксцентриситет, т. е. чем ближе он к единице, тем меньше отношение b/a, а это означает, что основной прямоугольник более вытянут в направлении действительной оси. Таким образом, эксцентриситет гиперболы характеризует форму ее основного прямоугольника, а значит, и форму самой гиперболы.

В случае равносторонней гиперболы ($a=b$) $\varepsilon=\sqrt{2}$.

3. Директрисы эллипса и гиперболы. Определение 1. *Две прямые, перпендикулярные большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии a/ε от него, называются директрисами эллипса (здесь a — большая полуось, ε — эксцентриситет эллипса).*

Уравнения директрис эллипса, заданного каноническим уравнением (7), имеют вид

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \text{ и } x = \frac{a}{\varepsilon}.$$

Так как для эллипса $\varepsilon<1$, то $a/\varepsilon>a$. Отсюда следует, что правая директриса расположена правее правой вершины эллипса, а левая — левее его левой вершины (рис. 38).

Определение 2. *Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии a/ε от него, называются директрисами гиперболы (здесь a — действительная полуось, ε — эксцентриситет гиперболы).*

Уравнения директрис гиперболы, заданной каноническим уравнением (15), имеют вид

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \text{ и } x = \frac{a}{\varepsilon}$$

Так как для гиперболы $\varepsilon > 1$, то $a/\varepsilon < a$. Отсюда следует, что правая директриса расположена между центром и правой вершиной гиперболы, а левая — между центром и левой вершиной (рис. 39).

С помощью понятий директрисы и эксцентриситета можно сформулировать общее свойство, присущее эллипсу и гиперболе. Имеют место следующие две теоремы.

Теорема 3.5. *Если r — расстояние от произвольной точки M эллипса до какого-нибудь фокуса, d — расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса.*

Доказательство. Предположим для определенности, что речь идет о правом фокусе F_2 и правой директрисе. Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка эллипса (см. рис. 38). Расстояние

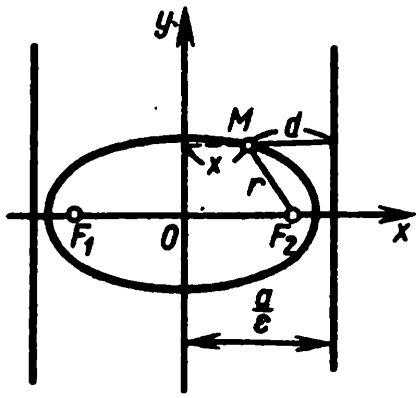


Рис. 38

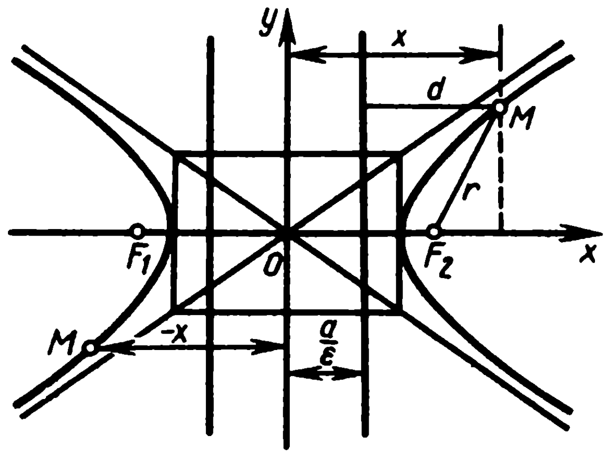


Рис. 39

от точки M до правой директрисы выражается равенством

$$d = \frac{a}{\varepsilon} - x, \tag{18}$$

которое легко устанавливается из рисунка. Из равенств (2) и (4) имеем

$$r = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x.$$

Полагая $c/a = \varepsilon$, получаем формулу расстояния от точки M до правого фокуса:

$$r = a - \varepsilon x. \tag{19}$$

Из соотношений (18) и (19) имеем

$$\frac{r}{d} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \frac{(a - \varepsilon x)\varepsilon}{a - \varepsilon x} = \varepsilon. \blacksquare$$

Теорема 3.6. *Если r — расстояние от произвольной точки M гиперболы до какого-нибудь фокуса, d — расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отноше-*

ние r/d есть величина постоянная, равная эксцентриситету гиперболы.

Доказательство. Предположим для определенности, что речь идет о правом фокусе F_2 и правой директрисе. Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка гиперболы (рис. 39). Рассмотрим два случая.

1) Точка M находится на правой ветви гиперболы. Тогда расстояние от точки M до правой директрисы выражается равенством

$$d = x - \frac{a}{\varepsilon}, \tag{20}$$

которое легко устанавливается из рисунка. Из равенств (10) и (12) имеем

$$r = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}x - a.$$

Полагая $c/a = \varepsilon$, получаем формулу расстояния от точки M до правого фокуса:

$$r = \varepsilon x - a. \tag{21}$$

Из соотношений (20) и (21) имеем

$$\frac{r}{d} = \frac{\varepsilon x - a}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{(\varepsilon x - a)\varepsilon}{\varepsilon x - a} = \varepsilon.$$

2) Точка M находится на левой ветви гиперболы. Тогда расстояние от точки M до правой директрисы выражается равенством (рис. 39)

$$d = -x + \frac{a}{\varepsilon}. \tag{22}$$

Аналогично (21), можно получить формулу расстояния от точки M до правого фокуса:

$$r = -\left(\frac{c}{a}x - a\right) = -(\varepsilon x - a). \tag{23}$$

Из соотношений (22) и (23) имеем

$$\frac{r}{d} = \frac{-(\varepsilon x - a)}{-x + \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{(-\varepsilon x + a)\varepsilon}{(-\varepsilon x + a)} = \varepsilon. \blacksquare$$

Установленное свойство эллипса и гиперболы можно положить в основу общего определения этих линий: *множество точек, для которых отношение расстояний до фокуса и до соответствующей директрисы является величиной постоянной, равной ε, есть эллипс, если $\varepsilon < 1$, и гипербола, если $\varepsilon > 1$.*

Естественно, возникает вопрос, что представляет собой множество точек, определенное аналогичным образом при условии $\varepsilon = 1$. Оказывается, это новая линия второго порядка, называемая *параболой*.

4. Парабола. Определение. *Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.*

Для вывода уравнения параболы введем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы ось абсцисс проходила через фокус перпендикулярно директрисе, и будем считать ее положительным направлением направление от директрисы к фокусу; начало координат расположим посередине между фокусом и директрисой. Выведем уравнение параболы в выбранной системе координат.

Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка плоскости. Обозначим через r расстояние от точки M до фокуса F $(r = |M|)$, через d — расстояние от точки M до директрисы, а через p — расстояние от фокуса до директрисы (рис. 40). Величину p называют *параметром* параболы, его геометрический смысл раскрыт далее. Точка M будет лежать на данной параболе в том и только в том случае, когда

$$r = d. \tag{24}$$

Фокус F имеет координаты $(p/2;\ 0)$; поэтому по формуле (1) из § 2 находим

$$r = |FM| = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}. \tag{25}$$

Расстояние d, очевидно, выражается равенством (рис. 40)

$$d = |MQ| = x + \frac{p}{2}. \tag{26}$$

Отметим, что эта формула верна только для $x \geqslant 0$: Если же $x < 0$, то для точки $M(x;\ y)$, очевидно, $r > d$, и, следовательно, такая точка не лежит на параболе. Заменяя в равенстве (24) r и d их выражениями (25) и (26), найдем

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \tag{27}$$

Это и есть искомое уравнение параболы. Приведем его к более удобному виду, для чего возведем обе части равенства (27) в квадрат. Получаем

$$x^2 - px + p^2/4 + y^2 = x^2 + px + p^2/4, \text{ или}$$

$$y^2 = 2px. \tag{28}$$

Проверим, что уравнение (28), полученное после возведения в квадрат обеих частей уравнения (27), не приобрело «лишних» корней. Для этого достаточно показать, что для любой точки $M(x;\ y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (28), выполнено соотношение (24). Действительно, из уравнения (28) вытекает, что $x \geqslant 0$, поэтому для точки $M(x;\ y)$ с неотрицательной абсциссой $d = p/2 + x$. Подставляя значение y^2 из (28) в выражение (25) для r и учитывая, что $x \geqslant 0$, получаем $r = p/2 + x$, е. величины r и d равны, что и требовалось показать. Таким обра- м, уравнению (28) удовлетворяют координаты точек данной па- болы и только они, т. е. уравнение (28) является уравнением нной параболы.

Уравнение (28) называется *каноническим уравнением параболы.* о уравнение второй степени. Таким образом, парабола есть ли- я второго порядка.

Исследуем теперь форму параболы по ее уравнению (28). Так к уравнение (28) содержит y только в четной степени, то пара- ла симметрична относительно оси Ox. Следовательно, достаточно ссмотреть только ее часть, лежащую в верхней полуплоскости. ıя этой части $y \geqslant 0$, поэтому разрешая уравнение (28) относи- ıьно y, получаем

$$y = \sqrt{2px}. \tag{29}$$

Из равенства (29) вытекают следующие утверждения.

1) Если $x < 0$, то уравнение (29) дает мнимые значения y. ıедовательно, левее оси Oy ни одной точки параболы нет, что ‹е отмечалось ранее.

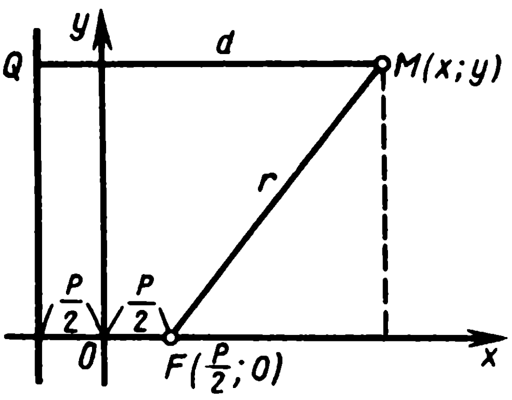


Рис. 40

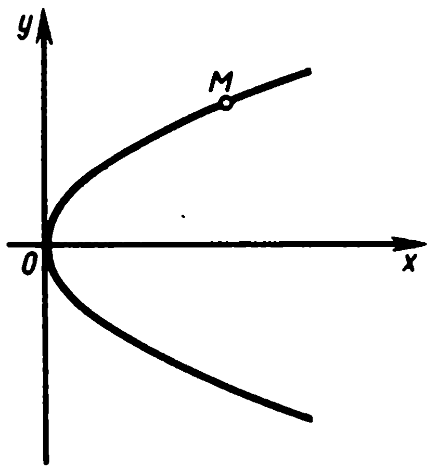


Рис. 41

2) Если $x = 0$, то $y = 0$. Таким образом, начало координат жит на параболе и является самой «левой» ее точкой.

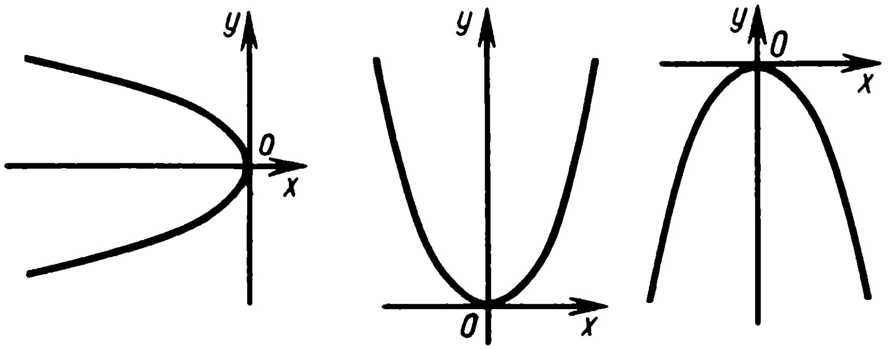
3) При возрастании x возрастает и y, причем если $x \to +\infty$, и $y \to +\infty$.

Таким образом, переменная точка $M(x;\ y)$, перемещающаяся параболе с ростом x, исходит из начала координат и движется право» и «вверх», причем при $x \to +\infty$ удаление точки M как оси Oy, так и от оси Ox является бесконечным.

Производя симметричное отражение рассмотренной части па- болы относительно оси Ox, получим всю параболу (рис. 41), данную уравнением (28).

Точка O называется *вершиной* параболы, ось симметрии (ось ·) — *осью* параболы. Число p, т. е. параметр параболы, выра- ıет расстояние от фокуса до директрисы. Выясним, как влияет раметр параболы на ее форму. Для этого возьмем какое-нибудь ределенное значение абсциссы, например $x = 1$, и найдем из уравнения (28) соответствующие значения ординаты: $y=\pm\sqrt{2p}$. Получаем на параболе две точки $M_1(1;\ +\sqrt{2p})$ и $M_2(1;\ -\sqrt{2p})$ симметричные относительно ее оси; расстояние между ними равно $2\sqrt{2p}$. Отсюда заключаем, что это расстояние тем больше, чем больше p. Следовательно, параметр p характеризует «ширину» области, ограниченной параболой. В этом и состоит геометрический смысл параметра p.

Парабола, уравнение которой $y^2=-2px$, $p>0$, расположена слева от оси ординат (рис. 42,*а*). Вершина этой параболы совпадает с началом координат, осью симметрии является ось Ox.



а) б) в)

Рис. 42

Уравнение $x^2=2py$, $p>0$, является уравнением параболы, вершина которой совпадает с началом координат, а осью симметрии является ось Oy (рис. 42,*б*). Эта парабола лежит выше оси абсцисс. Уравнение $x^2=-2py$, $p>0$, определяет параболу, лежащую ниже оси Ox, с вершиной в начале координат (рис. 42,*в*).

§ 8. Общее уравнение линии второго порядка

Важной задачей аналитической геометрии является исследование общего уравнения линии второго порядка и приведение его к простейшим (каноническим) формам.

Общее уравнение линии второго порядка имеет следующий вид:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (1)$$

где коэффициенты A, $2B$, C, $2D$, $2E$ и F* — любые числа и, кроме того, числа A, B и C не равны нулю одновременно, т. е. A^2+B^2+ $+C^2\neq 0$.

1. Приведение общего уравнения линии второго порядка к простейшему виду. Лемма 3.1. *Пусть в прямоугольной системе координат Oxy задано уравнение* (1) *и пусть $AC-B^2\neq 0$. Тогда с помощью параллельного сдвига и последующего поворота осей*

---

* Для удобства преобразований уравнения (1) коэффициенты при xy, x и y обозначены соответственно через $2B$, $2D$ и $2E$.

координат уравнение (1) *приводится к виду*

$$A'x''^2 + C'y''^2 + F' = 0, \tag{2}$$

где A', C', F' — *некоторые числа;* $(x''; y'')$ — *координаты точки в новой системе координат.*

Доказательство. Пусть прямоугольная система координат $O'x'y'$ получена параллельным сдвигом осей Ox и Oy, причем начало координат перенесено в точку $O'(x_0; y_0)$. Тогда старые координаты $(x; y)$ будут связаны с новыми $(x'; y')$ формулами

$$x = x' + x_0, y = y' + y_0$$

(см. формулы (1), § 4). В новых координатах уравнение (1) принимает вид

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0, \tag{3}$$

где

$$D' = Ax_0 + By_0 + D; E' = Bx_0 + Cy_0 + E;$$

$$F' = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F.$$

В уравнении (3) коэффициенты D' и E' обращаются в нуль, если подобрать координаты точки $(x_0; y_0)$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Так как $AC - B^2 \neq 0$, то система (4) имеет единственное решение относительно x_0, y_0.

Если пара чисел x_0, y_0 представляет собой решение системы (4), то уравнение (3) можно записать в виде

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0. \tag{5}$$

Пусть теперь прямоугольная система координат $O'x''y''$ получена поворотом системы $O'x'y'$ на угол α. Тогда координаты x', y' будут связаны с координатами x'', y'' формулами

$$x' = x'' \cos\alpha - y'' \sin\alpha, \ y' = x'' \sin\alpha + y'' \cos\alpha$$

(см. формулы (3), § 4). В системе координат $O'x''y''$ уравнение (5) принимает вид

$$A'x''^2 + 2B'x''y'' + C'y''^2 + F' = 0, \tag{6}$$

где

$$A' = A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha;$$

$$B' = -A\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + C\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$C' = A\sin^2\alpha - 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\cos^2\alpha.$$

Выберем угол α так, чтобы коэффициент B' в уравнении (6) обратился в нуль. Это требование приводит к уравнению $2B\cos 2\alpha = (A - C)\sin 2\alpha$ относительно α. Если $A = C$, то $\cos 2\alpha = 0$, и можно положить $\alpha = \pi/4$. Если же $A \neq C$, то выбираем $\alpha =$

$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2B}{A-C}$, и уравнение (6) принимает вид

$$A'x''^2+C'y''^2+F'=0,$$

т. е. получили уравнение (2). ■

Замечание. Уравнения (4) называются *уравнениями центра линии второго порядка*, а точка $(x_0; y_0)$, где x_0, y_0 — решение системы (4), называется *центром* этой линии. Заметим, что необходимым и достаточным условием существования единственного решения системы (4) является отличие от нуля числа $AC-B^2$, называемого определителем системы (см. гл. 10 § 2).

2. Инвариантность выражения $AC-B^2$. Классификация линий второго порядка. Коэффициенты A, B и C при старших членах уравнения (1) при параллельном переносе осей координат, как следует из доказательства леммы 3.1, не меняются, но они меняются при повороте осей координат. Однако выражение $AC-B^2$ остается неизменным как при переносе, так и при повороте осей, т. е. не зависит от преобразования координат. Действительно, при параллельном переносе этот факт очевиден [см. формулы (1) и (5)]; проверим его при повороте осей. Для этого воспользуемся выражениями для коэффициентов A', B' и C' уравнения (6). Имеем

$$A'C'-B'^2=(A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha)\times$$
$$\times(A\sin^2\alpha-2B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha)-$$
$$-[(C-A)\sin\alpha\cos\alpha+B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)]^2.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$A'C'-B'^2=AC(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2-B^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2=AC-B^2,$$

что и требовалось показать.

Величина $AC-B^2$ называется *инвариантом* общего уравнения линии второго порядка. Она имеет важное значение в исследовании линий второго порядка.

В зависимости от знака величины $AC-B^2$ линии второго порядка разделяются на следующие три типа:

1) эллиптический, если $AC-B^2>0$;

2) гиперболический, если $AC-B^2<0$;

3) параболический, если $AC-B^2=0$.

Рассмотрим линии различных типов.

1) Эллиптический тип. Поскольку $AC-B^2>0$, согласно лемме 3.1, общее уравнение линии второго порядка может быть приведено к виду (для удобства записи опускаем штрихи у коэффициентов и координат)

$$Ax^2+Cy^2+F=0.$$

Возможны следующие случаи:

а) $A>0$, $C>0$ (случай $A<0$, $C<0$ сводится к случаю $A>0$, $C>0$ умножением уравнения на -1) и $F<0$. Перенесем F в правую часть уравнения и разделим на него. Уравнение принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $a^2=-F/A$, $b^2=-F/C$. Сравнивая полученное уравнение с уравнением эллипса [см. формулу (7), § 7], заключаем, что оно является каноническим уравнением эллипса.

б) $A>0$, $C>0$ и $F>0$. Тогда, аналогично предыдущему, уравнение можно привести к виду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

Этому уравнению не удовлетворяют координаты никакой точки плоскости. Оно называется *уравнением мнимого эллипса.*

в) $A>0$, $C>0$, $F=0$. Уравнение имеет вид $(a^2=A,\ c^2=C)$:

$$a^2x^2+c^2y^2=0.$$

Ему удовлетворяют координаты только одной точки $x=0$, $y=0$. Такое уравнение назовем *уравнением пары мнимых пересекающихся прямых.*

2) Гиперболический тип. Поскольку $AC-B^2<0$, согласно лемме 3.1 общее уравнение линии второго порядка приводится к виду

$$Ax^2+Cy^2+F=0.$$

Возможны следующие случаи:

а) $A>0$, $C<0$ (случай $A<0$, $C>0$ сводится к случаю $A>0$, $C<0$ умножением уравнения на -1) и $F\neq 0$. Пусть, например, $F<0$. Перенесем F в правую часть уравнения и разделим на него. Уравнение принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $a^2=-F/A$, $b^2=F/C$. Сравнивая с уравнением гиперболы [см. формулу (15), § 7], заключаем, что полученное уравнение является каноническим уравнением гиперболы.

б) $A>0$, $C<0$ и $F=0$. Уравнение принимает вид $(a^2=A$, $c^2=-C)$:

$$a^2x^2-c^2y^2=0 \text{ или } (ax-cy)(ax+cy)=0.$$

Последнему уравнению удовлетворяют только координаты точек плоскости, расположенных на прямых $(ax-cy)=0$ и $(ax+cy)=0$, пересекающихся в начале координат, и, таким образом, имеем пару *пересекающихся прямых.*

3) Параболический тип. Если $AC-B^2=0$, то поворотом осей координат на такой же угол α, как и в лемме 3.1, общее уравнение линии второго порядка может быть приведено к виду

$$Ax^2+Cy^2+2Ey+2Dx+F=0. \qquad (7)$$

5*

Здесь $AC=0$ и, следовательно, один из коэффициентов A или C равен нулю.

Пусть $A=0$, $C\neq 0$. Представим уравнение (7) в виде

$$C\left[y^2+\frac{2E}{C}y+\left(\frac{E}{C}\right)^2\right]+2Dx+F-\frac{E^2}{C}=0,$$

или

$$C\left(y+\frac{E}{C}\right)^2+2Dx+F^*=0,$$

где $F^*=F-E^2/C$. Перенесем начало координат параллельно оси Oy в точку $(0, \ -E/C)$, т. е. перейдем к новым координатам по формулам $x'=x$, $y'=y+E/C$. Получаем уравнение

$$Cy'^2+2Dx'+F^*=0.$$

Возможны следующие случаи:

а) $D\neq 0$. Запишем уравнение в виде

$$Cy'^2+2D\left(x'+\frac{F^*}{2D}\right)=0.$$

Перенесем теперь начало координат параллельно оси Ox' в точку $(-F^*/(2D);\ 0)$, т. е. перейдем к новым координатам по формулам $x''=x'+F^*/(2D)$, $y''=y'$. Получаем уравнение

$$Cy''^2+2Dx''=0, \text{ или } y''^2=2px'',$$

где $p=-D/C$. Сравнивая последнее уравнение с уравнением параболы [см. формулу (28), § 7], заключаем, что оно является каноническим уравнением параболы.

б) $D=0$. Уравнение имеет вид

$$Cy'^2+F^*=0.$$

Если C и F^* имеют разные знаки, то, полагая $|F^*/C|=a^2$, уравнение можно записать в виде $(y'-a)(y'+a)=0$. Это уравнение определяет *пару параллельных прямых*.

Если C и F^* имеют одинаковые знаки, то уравнение принимает вид $y'^2+a^2=0$. Этому уравнению не удовлетворяют координаты никакой точки плоскости. Оно называется *уравнением пары мнимых параллельных прямых*.

Наконец, если $F^*=0$, то уравнение принимает вид $y'^2=0$ и определяет ось $O'x'$. Это уравнение можно рассматривать как предельный случай при $F^*\to 0$, т. е. как *уравнение пары совпавших прямых*.

Заканчивая исследование общего уравнения линии второго порядка, сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 3.7. *Пусть в прямоугольной системе координат задано общее уравнение линии второго порядка*

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Тогда существует такая прямоугольная система координат, в которой это уравнение принимает один из следующих девяти канонических видов: 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *(эллипс),* 2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ *(мнимый эллипс);* 3) $a^2x^2+c^2y^2=0$ *(пара мнимых пересекающихся прямых);* 4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *(гипербола);* 5) $a^2x^2-c^2y^2=0$ *(пара пересекающихся прямых);* 6) $y^2=2px$ *(парабола);* 7) $y^2-a^2=0$ *(пара параллельных прямых);* 8) $y^2+a^2=0$ *(пара мнимых параллельных прямых);* 9) $y^2=0$ *(пара совпавших прямых).*

ГЛАВА 4

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Начинаем изучение важнейшего понятия математического анализа — понятия функции. В этой главе будет введено понятие предела функции, а также понятие непрерывности функции.

§ 1. Понятие функции

1. Определение функции. Определение. *Пусть X и Y — некоторые числовые множества. Функцией называется множество f упорядоченных пар чисел $(x;\ y)$* таких, что $x\in X$, $y\in Y$, и каждое x входит в одну и только одну пару этого множества, а каждое y входит, по крайней мере, в одну пару. При этом говорят, что числу x поставлено в соответствие число y, и пишут $y=f(x)$. Число y называется значением функции f в точке x. Переменную y называют зависимой переменной, а переменную x — независимой переменной (или аргументом), множество X — областью определения (или существования) функции, а множество Y — множеством значений функции.*

Кроме буквы f для обозначения функций используют и другие буквы, например: $y=y(x)$, $y=g(x)$, $y=\varphi(x)$, $y=A(x)$, $y=F(x)$ и т. д. Другими буквами могут обозначаться зависимая и независимая переменные. Иногда зависимую переменную также называют функцией.

Наряду с термином «функция» употребляют равнозначный термин «отображение», а вместо записи $y=f(x)$ пишут $f\colon x\mapsto y$ и говорят, что отображение f отображает число x в число y, или, что то же самое, число y является образом числа x при отображении f.

При вычислениях запись $y=f(x)$ обычно удобнее записи вида $f\colon x\mapsto y$. Например, запись $f(x)=x^2$ значительно удобнее

* Напомним, что пара чисел x и y называется *упорядоченной*, если указано, какое из этих чисел считается первым, а какое — вторым. Упорядоченную пару чисел записывают в виде $(x;\ y)$, где x — первое число, y — второе число.

и проще использовать при аналитических преобразованиях, чем запись $f\colon x \mapsto x^2$.

Функция, все значения которой равны между собой, называется *постоянной*. Постоянную функцию часто обозначают буквой C.

Про функцию $f(x)$, определенную на некотором множестве X, говорят, что она *ограничена сверху (снизу)* на этом множестве, если существует число M (m) такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant M$ $(f(x) \geqslant m)$. Функция, ограниченная сверху и снизу на множестве X, называется *ограниченной* на этом множестве. Условие ограниченности функции $f(x)$ можно записать в виде: существует число $M > 0$ такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$. Например, функция $f(x) = \sin x$ ограничена на всей числовой прямой, так как $|\sin x| \leqslant \leqslant 1$ при любом x, а функция $f(x) = 1/x$ не является ограниченной сверху на интервале $(0;\ 1)$, так как не существует числа M такого, что для любого $x \in (0;\ 1)$ выполняется неравенство $1/x \leqslant M$.

На плоскости функция изображается в виде графика — множества точек $(x;\ y)$, координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$, называемым *уравнением графика*.

График функции может представлять собой некоторую «сплошную» линию (кривую или прямую), а может состоять из отдельных точек, например график функции $y = n!$ (рис. 45).

Заметим, что не всякая линия является графиком какой-либо функции. Например, окружность $x^2 + y^2 = 1$ не является графиком функции, так как каждое $x \in (-1;\ 1)$ входит не в одну, а в две пары чисел $(x;\ y)$ этого множества с разными значениями $y\colon y_1 = = \sqrt{1 - x^2}$ и $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$, что противоречит требованию однозначности в определении функции (рис. 43). Однако часть окружности, лежащая в нижней полуплоскости, является графиком функции $y = -\sqrt{1 - x^2}$, а другая ее часть, лежащая в верхней полуплоскости, — графиком функции $y = \sqrt{1 - x^2}$.

2. Способы задания функций. Задать функцию f — значит указать, как по каждому значению аргумента x находить соответствующее ему значение функции $f(x)$. Существуют три основных способа задания функций: *аналитический, табличный* и *графический*.

1) Аналитический способ. Этот способ состоит в том, что зависимость между переменными величинами определяется с помощью формулы, указывающей, какие действия нужно выполнить, чтобы получить значение функции, соответствующее данному значению аргумента.

Рассмотрим примеры.

1. Формула $y = x^2$ задает функцию, область определения которой — числовая прямая $(-\infty;\ +\infty)$, а множество значений — полупрямая $[0,\ +\infty)$ (рис. 44,*а*).

2. Формула $y = \sqrt{1 - x^2}$ задает функцию, областью определения которой является отрезок $[-1,\ 1]$, а множеством значений — отрезок $[0,\ 1]$ (рис. 44, *б*).

3. Формула $y=n!$ ставит в соответствие каждому натуральному числу (т. е. целому положительному числу) n число $y=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$. Например, если $n=3$, то $y=3!=6$. Таким образом, формула $y=n!$ задает функцию,область определения которой $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, а множество значений —$\{1!, 2!, 3!, \ldots, n!, \ldots\}$ (рис. 45).

4. $$y=\operatorname{sgn} x^{*}=\begin{cases}+1, \text{если } x>0,\\ 0, \text{если } x=0,\\ -1, \text{если } x<0.\end{cases}$$

Данная функция задана с помощью нескольких формул. Она определена на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$, а множество ее значений состоит из трех чисел: -1, 0 и $+1$ (рис. 46).

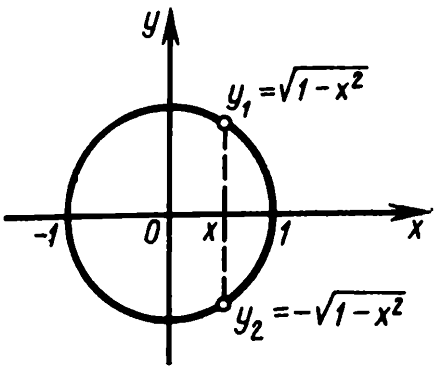


Рис. 43

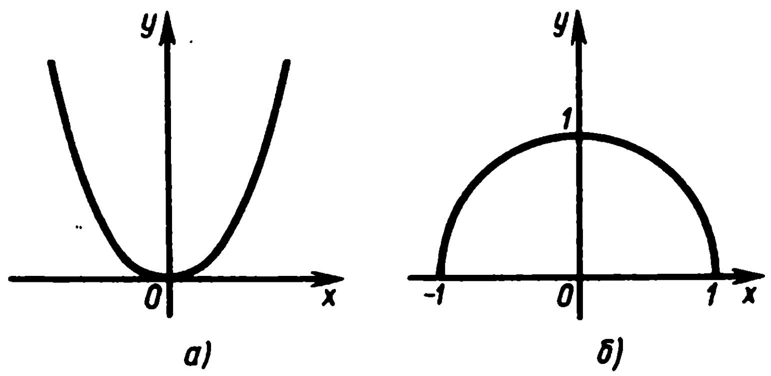


Рис. 44

5. Функция Дирихле**

$$y=\begin{cases}1, \text{если } x \text{ — рациональное число},\\ 0, \text{если } x \text{ — иррациональное число}.\end{cases}$$

Эта функция определена на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$, а множество ее значений состоит из двух чисел: 0 и 1.

Заметим, что функцию Дирихле изобразить графически не представляется возможным.

2) Табличный способ. Приведем следующую таблицу:

x	0	0,1	0,2	3	0,6	4	0,8	1,5	2
y	-1	10	1	-2	-8	0,5	-2	5	7

Поставим в соответствие каждому x, записанному в первой строке таблицы, число y, стоящее во второй строке под этим числом x, и будем говорить, что полученная функция задана таблицей. Областью определения данной функции является множество, состоящее из девяти чисел x, перечисленных в первой строке таб-

* Термин sgn происходит от латинского слова signum — знак.

** Дирихле Петер Густав Лежен (1805 — 1859) — немецкий математик.

лицы, а множеством ее значений — множество, состоящее из девяти чисел y, перечисленных во второй ее строке.

С помощью таблицы можно задать функцию только при конечном числе значений аргумента. Таблицы часто используют для задания функций. Так, хорошо известны, например, таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов и многие другие. Примером табличного способа задания функции может служить расписание движения поезда, которое определяет местоположение поезда в отдельные моменты времени.

3) Графический способ. Графический способ задания функции обычно используют в практике физических измерений, когда соответствие между переменными x и y задается посредством графика. Во многих случаях такие графики чертятся с помощью самопищущих приборов.

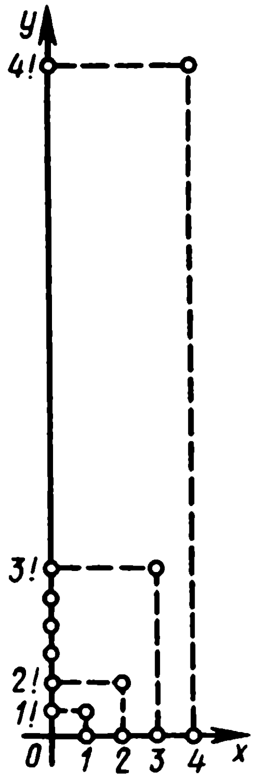


Рис. 45

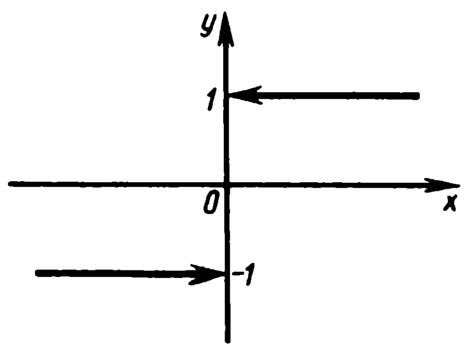


Рис. 46

Так, например, для измерения давления атмосферы на различных высотах используют специальный самопишущий прибор — барограф, который записывает на движущейся ленте в виде кривой линии изменение давления в зависимости от высоты.

3. Классификация функций. Постоянная функция $f(x)=C$, $C=\mathrm{const}$, степенная функция x^{α} (α — любое число), показательная функция a^{x} $(0<a\neq 1)$, логарифмическая функция $\log_a x$ $(0<a\neq 1)$, тригонометрические функции: $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$ и обратные тригонометрические функции: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\, x$, $\mathrm{arcctg}\, x$ называются *простейшими элементарными функциями.*

Все функции, получаемые с помощью конечного числа арифметических действий над простейшими элементарными функциями, а также суперпозицией (или наложением) этих функций, составляют класс *элементарных функций.* Примерами элементарных функций являются:

$f(x)=|x|\ \left(|x|=\sqrt{x^2}\right)$; $f(x)=\lg^3 \mathrm{arctg}\, 2^{\sqrt{x}}+\sin 3x$; $f(x)=\lg|\sin 3x|-e^{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}$ и т. д.

Имеет место следующая классификация элементарных функций.

1) Функция вида

$$P(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m,$$

где $m \geqslant 0$ — целое число; $a_0, a_1, \ldots, a_m$ — любые числа — коэффициенты ($a_0 \neq 0$), называется *целой рациональной функцией* или *алгебраическим многочленом степени m*. Многочлен первой степени называется также *линейной функцией*.

2) Функция, представляющая собой отношение двух целых рациональных функций

$$R(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n},$$

называется *дробно-рациональной функцией*.

Совокупность целых рациональных и дробно-рациональных функций образует класс *рациональных функций*.

3) Функция, полученная с помощью конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий над степенными функциями как с целыми, так и с дробными показателями и не являющаяся рациональной, называется *иррациональной функцией*.

Например,

$$f(x)=\sqrt{x},\ f(x)=x+\sqrt{x},\ f(x)=\sqrt{(5x^2+4x-7)/(3x^2-8x+4)}+\left(\sqrt[5]{x}+x\right)^3$$

и т. д. — иррациональные функции.

4) Всякая функция, не являющаяся рациональной или иррациональной, называется *трансцендентной функцией*. Это, например, функции $f(x) = \sin x$, $f(x) = \sin x + x$ и т. д.

§ 2. Предел функции

1. Предел функции при $x \to x_0$. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве X и пусть точка $x_0 \in X$ или $x_0 \notin X$. Возьмем из X последовательность точек, отличных от x_0:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots, \qquad (1)$$

сходящуюся к x_0*. Значения функции в точках этой последовательности также образуют числовую последовательность

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots, \qquad (2)$$

и можно ставить вопрос о существовании ее предела.

Определение 1. *Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любой сходящейся к x_0 последовательности* (1) *значений аргумента x, отличных от x_0, соответствующая последовательность* (2) *значений функции сходится к числу A.*

Символически это записывается так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Функция $f(x)$ может иметь в точке x_0 только один предел. Это следует из того, что последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет только один предел.

Рассмотрим примеры.

1. Функция $f(x) = C = \text{const}$ имеет предел в каждой точке x_0 числовой прямой. В самом деле, если (1) — любая последователь-

* Предполагается, что такая последовательность существует.

ность, сходящаяся к x_0, то последовательность (2) имеет вид C, C, ..., C, ..., т. е. $f(x_n)=C$. Отсюда заключаем, что $f(x_n)\to C$ при $n\to\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=C$.

2. Функция $f(x)=x$ имеет в любой точке x_0 числовой прямой предел, равный x_0. В этом случае последовательности (1) и (2) тождественны, т. е. $f(x_n)=x_n$. Следовательно, если $x_n\to x_0$, то $f(x_n)\to x_0$ при $n\to\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} x = f(x_0) = x_0$.

3. Функция $f(x)=\sin(1/x)$ (рис. 47), определенная для всех $x\neq 0$, в точке $x=0$ не имеет предела. Действительно, возьмем две последовательности значений аргумента x: $1/\pi$, $1/(2\pi)$, $1/(3\pi)$, ..., $1/(n\pi)$, ... и $2/\pi$, $2/(5\pi)$, $2/(9\pi)$, ..., $2/[(4n-3)\pi]$, ... сходящиеся к нулю. Для них соответствующими последовательностями значений функции являются: $f\left(\frac{1}{\pi}\right)$, $f\left(\frac{1}{2\pi}\right)$, $f\left(\frac{1}{3\pi}\right)$, ..., $f\left(\frac{1}{n\pi}\right)$, ... и $f\left(\frac{2}{\pi}\right)$, $f\left(\frac{2}{5\pi}\right)$, $f\left(\frac{2}{9\pi}\right)$, ..., $f\left(\frac{2}{(4n-3)\pi}\right)$, ... Так как при любом n $f\left(\frac{1}{n\pi}\right)=\sin n\pi=0$, а $f\left(\frac{2}{(4n-3)\pi}\right)=\sin\frac{(4n-3)\pi}{2}=1$, то для первой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi=0$, а для второй последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{(4n-3)\pi}{2}=1$. Таким образом, для двух сходящихся к нулю последовательностей значений аргумента x соответствующие последовательности значений функции имеют разные пределы. А это по определению предела функции и означает, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует.

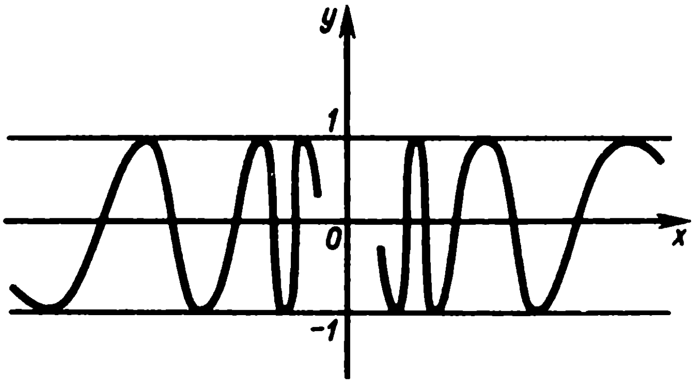


Рис. 47

4. Функция $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x-1}$ имеет в точке $x=0$ предел, равный 1. Действительно, возьмем любую последовательность значений аргумента x, сходящуюся к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, и $x_n\neq 0$, тогда в силу теорем 2.7—2.9 имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2+x_n-1}{x_n-1} = \frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^2+\lim\limits_{n\to\infty} x_n-1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n-1}=1.$$

Таким образом, существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=1$, и так как он не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к нулю, то на основании определения предела функции заключаем, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

5. Функция Дирихле, значения которой в рациональных точках равны единице, а в иррациональных — нулю, не имеет предела ни в одной точке x_0 числовой прямой. Действительно, для сходящейся к точке x_0 последовательности рациональных значений аргумента предел соответствующей последовательности значений функции равен единице, а для сходящейся к точке x_0 последовательности иррациональных значений аргумента предел соответствующей последовательности значений функции равен нулю.

Существует другое определение предела функции.

Определение 2. *Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Используя логические символы, определение 2 можно записать в виде

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X,\ x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Отметим, что неравенства $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$ можно записать в виде $0 < |x - x_0| < \delta$.

Первое определение основано на понятии предела числовой последовательности, поэтому его часто называют определением «на языке последовательностей». Второе определение называют определением «на языке $\varepsilon - \delta$».

Теорема 4.1. *Первое и второе определения предела функции эквивалентны.*

Доказательство. 1) Пусть A — предел $f(x)$ в точке x_0 согласно первому определению. Покажем, что A — предел согласно второму определению. Предположим обратное, т. е. A не является пределом этой функции согласно второму определению. Это значит, что не для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, чтобы из неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ следовало бы неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. существует такое $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$, для которого, какое бы $\delta > 0$ ни взять, найдется хоть одна точка $x \neq x_0$ такая, что $|x - x_0| < \delta$, но $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0$. Будем выбирать в качестве δ последовательно числа:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Тогда:

для $\delta = 1$ в X существует такое $x_1 \neq x_0$, что $|x_1 - x_0| < 1$,
а $|f(x_1) - A| \geqslant \varepsilon_0$;

для $\delta = 1/2$ в X существует такое $x_2 \neq x_0$, что $|x_2 - x_0| < 1/2$,
а $|f(x_2) - A| \geqslant \varepsilon_0$;

для $\delta = 1/3$ в X существует такое $x_3 \neq x_0$, что $|x_3 - x_0| < 1/3$,
а $|f(x_3) - A| \geqslant \varepsilon_0$;

. . . .

для $\delta = 1/n$ в X существует такое $x_n \neq x_0$, что $|x_n - x_0| < 1/n$,
а $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0$.

. . . .

В результате получается последовательность точек, отличных от x_0:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

сходящаяся к точке x_0, так как $|x_n - x_0| < 1/n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому, согласно первому определению предела функции, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к числу A. Следовательно, для ε_0 найдется номер N такой, что для всех $n > N$ будет выполнено неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon_0$. Но этого быть не может, так как для всех x_n выполняется неравенство $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0$. Полученное противоречие доказывает, что число A — предел функции $f(x)$ в точке x_0 согласно второму определению.

2) Пусть теперь A — предел $f(x)$ в точке x_0 согласно второму определению. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Покажем, что A — предел $f(x)$ согласно первому определению. Возьмем любую последовательность точек

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

сходящуюся к точке x_0 $(x_n \neq x_0)$. Тогда для данного значения $\delta > 0$, соответствующего ε по второму определению, найдется такое N, что при $n > N$ будут выполнены неравенства $0 < |x_n - x_0| < \delta$. Но вместе с этим в силу второго определения будет выполняться и неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. А так как ε было выбрано произвольно, то это и означает, что $f(x_n) \to A$ для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к точке x_0 $(x_n \neq x_0)$, т. е. число A является пределом $f(x)$ в точке x_0 согласно первому определению. ■

Итак, установлена эквивалентность обоих определений предела функции и можно использовать любое из них в зависимости от того, какое более удобно при решении той или иной задачи.

Заметим, что определение предела функции «на языке последовательностей» называют также определением предела функции по Гейне*, а определение предела функции «на языке $\varepsilon - \delta$» — определением предела функции по Коши**.

2. Предел функции при $x \to x_0 -$ и при $x \to x_0 +$. В дальнейшем будут использованы понятия односторонних пределов функции, которые определяются следующим образом.

Определение 3. *Число A называется правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой сходящейся к x_0 последовательности* (1), *элементы x_n которой больше (меньше) x_0, соответствующая последовательность* (2) *сходится к A.*

Символическая запись: $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = A \left(\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = A \right)$.

В качестве примера рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{sgn} x$***. Она имеет в точке $x = 0$ правый и левый пределы: $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$. В самом деле, если (1) — любая сходящаяся

---

* Гейне Генрих Эдуард (1821—1881) — немецкий математик.

** Коши Огюстен Луи (1789—1857) — французский математик.

*** Определение функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ приведено в п. 2, § 1.

к нулю последовательность значений аргумента этой функции, элементы x_n которой больше нуля $(x_n > 0)$, то $\operatorname{sgn} x_n = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sgn} x_n = 1$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$. Аналогично устанавливается, что $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$.

Можно дать равносильное определение односторонних пределов функции «на языке $\varepsilon - \delta$»: *число A называется правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $x_0 < x < x_0 + \delta$ $(x_0 - \delta < x < x_0)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.* Символическая запись:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x,\ x_0 < x < x_0 + \\ + \delta\ (x_0 - \delta < x < x_0)) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Связь между односторонними пределами и пределом функции устанавливает следующая теорема.

Теорема 4.2. *Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют как правый, так и левый пределы, и они равны. В этом случае предел функции равен односторонним пределам.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A$.

Тогда, согласно определению предела функции слева и справа, для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что для всех x, удовлетворящих неравенствам $x_0 - \delta_1 < x < x_0$, и для всех x, удовлетворяющих неравенствам $x_0 < x < x_0 + \delta_2$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для всех x, удовлетворяющих неравенствам $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. А это, согласно определению 2, и означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Обратно, пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Тогда, согласно определению предела функции в точке x_0, для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Тем самым, как для $x_0 - \delta < x < x_0$, так и для $x_0 < x < x_0 + \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. А это, согласно определению односторонних пределов, и означает, что $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A$. ■

3. Предел функции при $x \to \infty$, при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$. Кроме рассмотренных понятий предела функции при $x \to x_0$ и односторонних пределов существует также понятие предела функции при стремлении аргумента к бесконечности.

Определение 4. *Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любой бесконечно большой последовательности (1) значений аргумента соответствующая последовательность (2) значений функции сходится к A.*

Символическая запись: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

Определение 5. *Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, если для любой бесконечно большой последовательности значений аргумента, элементы x_n которой положительны (отрицательны), соответствующая последовательность значений функции сходится к A.*

Символическая запись: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A\right)$.

Рассмотрим пример. Пусть $f(x)=\frac{1}{x}$. Эта функция имеет предел, при $x\to\infty$ равный нулю. Действительно, если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность значений аргумента, то соответствующая последовательность значений функции: $1/x_1, 1/x_2, \ldots, 1/x_n \ldots$, по теореме 2.1 является бесконечно малой и поэтому имеет предел, равный нулю, т. е. $\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)=0$ (рис. 48).

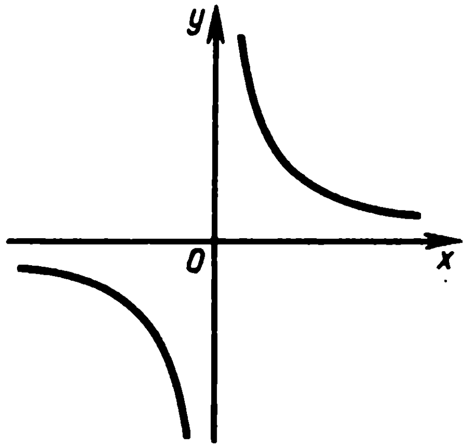


Рис. 48

Определения 4—5 даны «на языке последовательностей». Можно дать равносильные определения «на языке ε — δ» и записать их с помощью логических символов. Рекомендуем сделать это самостоятельно. В качестве примера сформулируем определение предела функции при $x\to+\infty$.

Определение 6. *Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x\to+\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует число δ такое, что для всех $x\in X$, удовлетворяющих неравенству $x>\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.*

§ 3. Теоремы о пределах функций

Определение предела функции «на языке последовательностей» дает возможность перенести доказанные выше теоремы о пределах последовательностей на функции. Покажем это на примере двух теорем.

Т е о р е м а 4.3. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 пределы B и C. Тогда функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\,g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при $C\neq 0$) имеют в точке x_0 пределы, равные соответственно $B\pm C$, BC и $\frac{B}{C}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{x_n\}$ $(x_n\neq x_0)$ — произвольная сходящаяся к x_0 последовательность значений аргумента функций $f(x)$ и $g(x)$. Соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ значений этих функций имеют пределы B и C. Но тогда в силу теорем 2.7—2.9 последовательности $\{f(x_n)\pm g(x_n)\}$, $\{f(x_n)\,g(x_n)\}$ и $\{f(x_n)/g(x_n)\}$ (при $C\neq 0$) имеют пределы, соответственно равные $B\pm C$, BC и B/C. Согласно определению 1 предела функции это означает, что

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=B\pm C,\quad \lim_{x\to x_0}[f(x)\,g(x)]=BC,\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{B}{C}. \blacksquare$$

Теорема 4.4. *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, и функции $f(x)$, $h(x)$ имеют в точке x_0 предел, равный A, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$. Пусть, кроме того, выполняются неравенства $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$. Тогда*

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=A.$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ $(x_n\neq x_0)$ — произвольная сходящаяся к x_0 последовательность значений аргумента функций $f(x)$ и $h(x)$. Соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{h(x_n)\}$ значений этих функций имеют предел, равный A, т. е. $f(x_n)\to A$, $h(x_n)\to A$ при $n\to\infty$. Используя неравенства, данные в условии теоремы, можно записать

$$f(x_n)\leqslant g(x_n)\leqslant h(x_n).$$

Отсюда по теореме 2.11 следует, что $g(x_n)\to A$. Согласно определению 1 предела функции это означает, что

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=A. \blacksquare$$

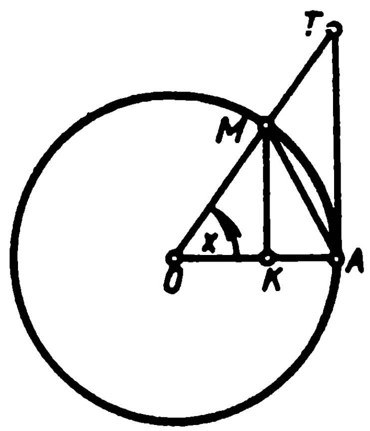


Рис. 49

Замечание. Теоремы 4.3 и 4.4 верны также и в случае, когда x_0 является одним из символов ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

§ 4. Два замечательных предела

1. Первый замечательный предел.

Докажем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Рассмотрим дугу окружности радиуса $R=1$ с центральным углом, радианная мера которого равна $x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 49). Тогда

$$OA=1, \sin x=MK, \operatorname{tg} x=AT. \qquad (1)$$

Очевидно, что площадь треугольника OAM меньше площади сектора OAM, которая меньше площади треугольника OAT, или, что то же самое, $(1/2)\ OA\cdot MK<(1/2)\ OA\cdot \breve{AM}<(1/2)\ OA\cdot AT$. Принимая во внимание равенства (1), последнее соотношение можно записать в виде $(1/2)\sin x<(1/2)\,x<(1/2)\operatorname{tg} x$, откуда получаем

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x. \qquad (2)$$

Разделив эти неравенства на $\sin x$, получим $1>(\sin x)/x>\cos x$, откуда находим: $0<1-(\sin x)/x<1-\cos x$. Так как $\sin(x/2)<1$, то $\sin^2(x/2)<\sin(x/2)$. Поэтому, учитывая первое неравенство (2), для всех x, удовлетворяющих неравенствам $0<x<\pi/2$, получаем $1-\cos x=2\sin^2(x/2)<2\sin(x/2)<2(x/2)=x$.

Итак, $0<1-(\sin x)/x<x$ при $0<x<\pi/2$.

Возьмем любое $\varepsilon>0$ и положим $\delta=\min\{\varepsilon, \pi/2\}$. Тогда для всех x, удовлетворяющих неравенствам $0<x<\delta$, будет выполняться неравенство $x<\varepsilon$, поэтому

$$0<1-(\sin x)/x<\varepsilon, \text{ откуда } |1-(\sin x)/x|<\varepsilon.$$

Это означает, что 1 является правым пределом функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1$. Заметим теперь, что функция $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ — четная, так как $f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x)$. Поэтому и левый предел функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$ равен 1. Отсюда в силу теоремы 4.2 следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. ■

З а м е ч а н и е. Используя неравенства $\sin x<x$ и $1-\cos x<x$ при $0<x<\pi/2$, полученные при рассмотрении первого замечательного предела, легко доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$. Сделайте это самостоятельно.

С помощью первого замечательного предела вычисляются многие другие пределы.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$.

Р е ш е н и е. Знаменатель дроби при $x\to 0$ стремится к нулю. Поэтому теорема 4.3 здесь неприменима. Для нахождения предела преобразуем данную дробь:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}\sin(x/2)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}\lim_{x\to 0}\sin(x/2)=1\cdot 0=0.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 4x}$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{5/4}{(\sin 4x)/(4x)}=\frac{5/4}{\lim\limits_{x\to 0}(\sin 4x)/(4x)}=\frac{5/4}{1}=1{,}25.$$

2. Второй замечательный предел. Докажем, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Как известно, $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n=e$ (см. гл. 2, § 3, п. 2). Пусть $x>1$. Положим $n=[x]$; тогда $x=n+\alpha$, где n — натуральное число, а α удовлетворяет условию $0\leqslant\alpha<1$. Так как $n\leqslant x<$ $<n+1$, $1/(n+1)<1/x\leqslant 1/n$, то

$$(1+1/(n+1))^n<(1+1/x)^x<(1+1/n)^{n+1}.$$

При $x\to+\infty$ $(n\to\infty)$

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n\lim_{n\to\infty}(1+1/n)=e\cdot 1=e$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/(n+1))^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/(n+1))}=\frac{e}{1}=e.$$

Отсюда по теореме 4.4 получаем

$$\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x=e.$$

Пусть теперь $x<-1$; положим $x=-y$. Тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e\cdot 1=e$$

при $x\to-\infty$.

Объединяя оба случая, окончательно имеем

$$\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e. \blacksquare$$

Второй замечательный предел имеет широкое применение. С его помощью находятся многие другие пределы.

Пример. 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$.

Р е ш е н и е. Сделаем замену переменной, полагая $1/x=\alpha$. Тогда очевидно, что $\alpha\to\infty$ при $x\to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{\alpha\to\infty}(1+1/\alpha)^\alpha=e.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^x$.

Р е ш е н и е. Положим $x=3t$. Тогда при $x\to\infty$ и $t\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^x=\lim_{t\to\infty}(1+1/t)^{3t}=\lim_{t\to\infty}[(1+1/t)^t(1+1/t)^t(1+1/t)^t]=$$

$$=\lim_{t\to\infty}(1+1/t)^t\lim_{t\to\infty}(1+1/t)^t\lim_{t\to\infty}(1+1/t)^t=e\cdot e\cdot e=e^3.$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

Решение. Для нахождения предела преобразуем данную дробь:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x}\log_a(1+x)\right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \log_a(1+x)^{1/x} = \log_a\left[\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x}\right].$$

Но $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ (см. пример 4). Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$.

В частности, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ при $a = e$.

§ 5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

1. Бесконечно малые функции. Определение 1. *Функция $f(x)$ называется бесконечно малой функцией (или просто бесконечно малой) в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.*

Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to x_0-$ и $x \to x_0+$.

Можно дать равносильное определение бесконечно малой функции «на языке $\varepsilon - \delta$»: *функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$;* или с помощью логических символов:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X,\ x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta) : |f(x)| < \varepsilon;$$

и «на языке последовательностей»: *функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = x_0$, если для любой сходящейся к x_0 последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x, отличных от x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ является бесконечно малой.*

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.5. *Для выполнения равенства $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$\alpha(x) = f(x) - A$$

была бесконечно малой при $x \to x_0$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Рассмотрим разность $f(x) - A = \alpha(x)$ и покажем, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$. Действительно, пределы каждой из функций $f(x)$ и A при $x \to x_0$ равны A, и поэтому в силу теоремы 4.3

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) - A] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} A = A - A = 0.$$

Достаточность. Пусть $f(x) - A = \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$. Покажем, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Так как $f(x) = A + \alpha(x)$, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [A + \alpha(x)] = \lim_{x \to x_0} A + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A. \blacksquare$$

Из теоремы 4.5 получаем специальное представление для функции, имеющей в точке $x = x_0$ предел, равный A:

$$f(x) = A + \alpha(x), \text{ где } \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

При этом обычно говорят, что функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 отличается от A на бесконечно малую функцию.

Бесконечно малые функции обладают такими же свойствами, что и бесконечно малые последовательности. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.6. *Алгебраическая сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$, а также произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию являются бесконечно малыми функциями при $x \to x_0$.*

Эта теорема непосредственно вытекает из первого определения предела функции и теорем 2.2—2.4.

Все сказанное о бесконечно малых функциях при $x \to x_0$ справедливо и для бесконечно малых функций при $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to x_0-$ и $x \to x_0+$.

2. Бесконечно большие функции. Определение 2. *Функция $f(x)$ называется бесконечно большой функцией (или просто бесконечно большой) в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$.*

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ и говорят, что функция стремится к бесконечности при $x \to x_0$, или что она имеет бесконечный предел в точке $x = x_0$.

Если же выполняется неравенство $f(x) > \varepsilon$ $(f(x) < -\varepsilon)$, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty\right)$ и говорят, что функция имеет в точке x_0 бесконечный предел, равный $+\infty$ $(-\infty)$.

Используя логические символы, определение 2 можно записать в виде

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in X,\ x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta) : |f(x)| > \varepsilon.$$

По аналогии с конечными односторонними пределами определяются и бесконечные односторонние пределы:

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to x_0+} f(x) = -\infty, \ \lim_{x \to x_0-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = -\infty.$$

Так, например, пишут $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих неравенствам $x_0 < x < x_0 + \delta$, выполняется неравенство $f(x) > \varepsilon$. Символическая запись

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, \quad x_0 < x < x_0 + \delta) : f(x) > \varepsilon.$$

«На языке последовательностей» это же определение записывается так: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = +\infty$, если для любой сходящейся к x_0 последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x, элементы x_n которой больше x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции является бесконечно большой положительного знака.

Точное определение других подобных пределов рекомендуем сделать самостоятельно.

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \to \infty$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Так, например, функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $|x| > \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Символическая запись определения бесконечно большой функции при $x \to \infty$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, \ |x| > \delta) : |f(x)| > \varepsilon.$$

Если же выполняется неравенство $f(x) > \varepsilon$ $(f(x) < -\varepsilon)$, то пишут $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty\right)$.

Предлагаем самостоятельно сформулировать определение бесконечно большой функции при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

В заключение покажем, что между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями существует такая же связь, как и между соответствующими последовательностями, т. е. функция, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой, и наоборот.

В самом деле, пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ и $f(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$. Докажем, что $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f(x)$ — бесконечно малая функция в точке x_0, то для числа $1/\varepsilon$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < 1/\varepsilon$. Но тогда для тех же x выполняется неравенство $|1/f(x)| > \varepsilon$, т. е. $1/f(x)$ — бесконечно большая функция в точке $x = x_0$, что и требовалось доказать. Обратное утверждение рекомендуем доказать самостоятельно.

§ 6. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Как было показано, сумма, разность и произведение бесконечно малых функций являются бесконечно малыми функциями. Этого, вообще говоря, нельзя сказать о частном: деление одной бесконечно малой на другую может привести к различным результатам. Так, например, если $\alpha(x)=x$, $\beta(x)=2x$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

Если же $\alpha(x)=x$, $\beta(x)=x^2$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty,\ \lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}x=0.$$

Рассмотрим правила сравнения бесконечно малых функций.

Пусть при $x\to x_0$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми. Тогда:

1) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$ (говорят также, что $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\beta(x)$, при $x\to x_0$);

2) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$ (A — число), то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые одного порядка;

3) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — эквивалентные бесконечно малые. Эквивалентность обозначается так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

В некоторых случаях недостаточно знать, что одна из двух бесконечно малых является бесконечно малой более высокого порядка, чем другая. Нужно еще оценить, как высок этот порядок. Поэтому вводится следующее правило:

4) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^n(x)}=A\neq 0$, то $\alpha(x)$ — бесконечно малая n-го порядка относительно $\beta(x)$.

Существуют аналогичные правила для сравнения бесконечно малых функций при $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$, а также при $x\to x_0$ справа и слева.

Рассмотрим примеры.

1. Функции $\sin x$ и x являются при $x\to 0$ эквивалентными бесконечно малыми, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

2. Функции $\sin 3x$ и $\sin x$ являются при $x\to 0$ бесконечно малыми одного порядка, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3\sin 3x)/(3x)}{(\sin x)/x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=3.$$

3. Функция $\alpha(x)=1-\cos x$ является при $x\to 0$ бесконечно малой второго порядка малости по отношению к бесконечно малой x, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

При сравнении бесконечно малых функций часто используют символ o («o малое»). Если функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая в в точке x_0 более высокого порядка, чем бесконечно малая в этой же точке $\beta(x)$, то это условно записывается так:

$$\alpha(x) = o(\beta(x)).$$

Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые в точке x_0, то функция $\alpha(x)\beta(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем каждый из сомножителей. В самом деле,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)\beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$$

и поэтому $\alpha(x)\beta(x) = o(\beta(x))$, $\alpha(x)\beta(x) = o(\alpha(x))$.

Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to x_0$ и существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, причем $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$. В самом деле, имеем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} \right] =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = 1 \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot 1 = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Доказанное утверждение во многих случаях упрощает вычисление пределов

Пример. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x + x^3}$.

Решение. Так как $\sin 5x \sim 5x$, $x + x^3 \sim x$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x + x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{x} = 5.$$

Для бесконечно больших функций имеют место аналогичные правила сравнения.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Функции $\alpha(x) = (1 + x)/x$ и $\beta(x) = 1/x$ являются при $x \to 0$ эквивалентными бесконечно большими, так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} (1 + x) = 1.$$

В этом случае говорят также, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют одинаковый порядок роста при $x \to 0$.

2. Функция $\alpha(x) = x^2 + 4$ является при $x \to \infty$ бесконечно большой более низкого порядка, чем $\beta(x) = x^3 - 2$ (имеет менее высокий порядок роста), так как

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 4}{x^3 - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + 4/x^2}{x - 2/x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

3. Бесконечно большие при $x \to \infty$ функции $\alpha(x) = 2x^2 + 1$ и $\beta(x) = x^2 - 1$ имеют одинаковый порядок роста, так как

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + 1/x^2}{1 - 1/x^2} = 2.$$

4. Функция $\alpha(x) = x^4 + x + 1$ является при $x \to \infty$ бесконечно большой второго порядка по отношению к бесконечно большой $\beta(x) = x^2 + 1$, так как

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + x + 1}{(x^2+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + 1/x^3 + 1/x^4}{1 + 2/x^2 + 1/x^4} = 1.$$

§ 7. Понятие непрерывности функции

Понятие непрерывности функции является одним из основных понятий математического анализа.

1. Определение непрерывности функции. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т. е.*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)^*. \tag{1}$$

Так как $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, то соотношение (1) можно записать в следующем виде:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right),$$

т. е. для непрерывной функции можно переставить знак функции и знак предела.

Приведем равносильное определение непрерывности функции «на языке последовательностей»: *функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любой последовательности значений аргумента x: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, сходящейся к x_0, последовательность соответствующих значений функции: $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$ сходится к $f(x_0)$.*

Сформулируем определение непрерывности функции «на языке $\varepsilon - \delta$».

Определение 2. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

Эквивалентность этих определений очевидна.

Запишем определение 2, используя логические символы:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in X, |x - x_0| < \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Если $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)\right)$, то функцию $f(x)$ называют *непрерывной в точке x_0 справа (слева)*. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и слева и справа, то она непрерывна в этой точке. Действительно, в силу теоремы 4.2 в данном случае предел функции в точке x_0 равен ее значению в этой точке.

---

* Из определения следует, что если функция непрерывна в точке x_0, то она определена в этой точке, т. е. существует $f(x_0)$. Заметим, что при определении предела функции в точке x_0 этого не требовалось.

Приведем еще одно определение непрерывности функции, которое по существу является перефразировкой первого определения. Перенесем в равенстве (1) $f(x_0)$ в левую часть и внесем $f(x_0)$ под знак предела. Так как условия $x \to x_0$ и $(x - x_0) \to 0$ равносильны, то получаем

$$\lim_{(x-x_0)\to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0. \tag{2}$$

Разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента* x в точке x_0 и обозначается, как правило, Δx, а разность $f(x) - f(x_0)$ — *приращением функции в точке* x_0, вызванным приращением аргумента Δx, и обозначается Δy. Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Отметим, что при фиксированной точке x_0 Δy является функцией аргумента Δx. Геометрический смысл приращений ясен из рис. 50. Равенство (2) в новых обозначениях принимает вид

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{3}$$

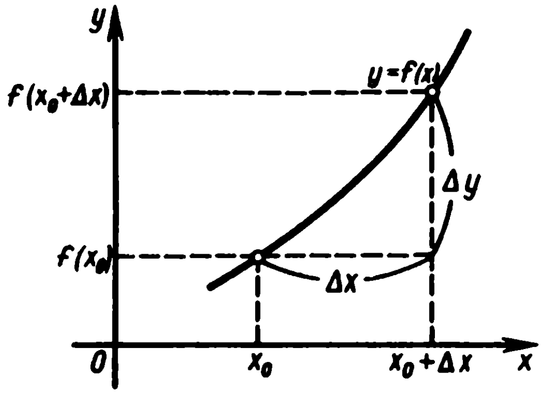


Рис. 50

Соотношение (3) и является еще одним определением непрерывности функции, которое можно сформулировать так.

Определение 3. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если ее приращение в этой точке является бесконечно малой функцией при $\Delta x \to 0$.*

Последнее определение для практического использования бывает иногда более удобным, и им будем также пользоваться.

2. Арифметические действия над непрерывными функциями. **Теорема 4.7.** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\,g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывны в этой точке (последняя при $g(x_0) \neq 0$).*

Доказательство. Так как непрерывные в точке x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в этой точке пределы, равные $f(x_0)$ и $g(x_0)$, то по теореме 4.3 пределы функций $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\,g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ существуют и соответственно равны $f(x_0) \pm g(x_0)$, $f(x_0)\,g(x_0)$, $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$. Но эти величины равны значениям соответствующих функций в точке x_0. Следовательно, согласно определению 1 функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\,g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывны в точке x_0. ■

§ 8. Непрерывность некоторых элементарных функций

Одним из важных свойств элементарных функций является их непрерывность в каждой точке, в окрестности которой они определены. На примере некоторых функций проверим данный факт, используя определение непрерывности функции в точке и теорему 4.7.

1. Непрерывность рациональных функций. Простейшим примером функции, непрерывной в любой точке x_0 числовой прямой, может служить постоянная функция $f(x)=C$. Действительно, в этом случае $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=C=f(x_0)$ (см. пример 1, § 2), т. е. постоянная функция непрерывна в каждой точке числовой прямой.

Непрерывна также в каждой точке x_0 числовой прямой функция $f(x)=x$, так как $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0=f(x_0)$ (см. пример 2, § 2), т. е. предел функции в точке x_0 равен ее значению в этой точке. Из сказанного и теоремы 4.7 следует, что в любой точке x_0 функции $x^2=x\cdot x$, $x^3=x^2\cdot x$, $x^4=x^3\cdot x$, ..., $x^n=x^{n-1}\cdot x$ (n — натуральное число) непрерывны. Как известно, функция $f(x)=x^n$ называется степенной, а функция вида

$$P(x)=C_0x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n,$$

где $n\geqslant 0$ — целое число; C_0, C_1, C_2, ..., C_n — любые числа, — алгебраическим многочленом.

Каждое из слагаемых

$$C_0x^n,\ C_1x^{n-1},\ C_2x^{n-2},\ \ldots,\ C_n$$

есть произведение двух непрерывных функций (постоянной и степенной). По теореме 4.7 оно непрерывно в любой точке x. Многочлен $P(x)$ является, таким образом, суммой функций, непрерывных в любой точке x, и, следовательно, непрерывен в любой точке x.

Дробно-рациональная функция, т. е. функция вида

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — алгебраические многочлены, непрерывна во всех таких точках x, в которых ее знаменатель не равен нулю (т. е. во всех точках, за исключением корней знаменателя), как частное непрерывных функций.

Например, функция $R(x)=(3x^2+7x-1)/(x^2-1)$ непрерывна во всех точках x, отличных от $+1$ и -1.

2. Непрерывность тригонометрических функций. Рассмотрим тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$. Покажем, что функция $\sin x$ непрерывна в любой точке x. Воспользуемся определением 3 непрерывности функции. Задав аргументу x приращение Δx, получим приращение функции

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x, \text{ или}$$
$$\Delta y=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Переходя к пределу в левой и правой частях равенства при $\Delta x\to 0$, получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=2\lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right]=0,$$

так как $|\cos(x+\Delta x/2)|\leqslant 1$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{2}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0^{*},$$

а произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая. Таким образом, функция $\sin x$ непрерывна в любой точке x.

Непрерывность функции $\cos x$ в любой точке x доказывается аналогично.

Из непрерывности функций $\sin x$ и $\cos x$ по теореме 4.7 следует непрерывность функций $\operatorname{tg} x=\sin x/\cos x$ и $\sec x=1/\cos x$ во всех точках, где $\cos x\neq 0$, т. е. во всех точках, кроме $x=\pi/2+n\pi$, и функций $\operatorname{ctg} x=\cos x/\sin x$ и $\operatorname{cosec} x=1/\sin x$ во всех точках, кроме $x=n\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

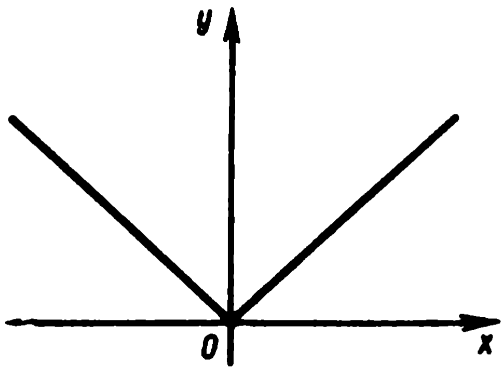


Рис. 51

3. Непрерывность функции $f(x)=|x|$. Функция $f(x)=|x|$, график которой изображен на рис. 51, определена и непрерывна во всех точках числовой прямой. Действительно, в точках интервала $(0, +\infty)$ она непрерывна, так как при $x>0$ $f(x)=x$ (см. п. 1). В точках интервала $(-\infty, 0)$ функция $f(x)$ также непрерывна, так как при $x<0$ $f(x)=-x$, ее можно представить как произведение двух непрерывных функций (-1) и x и применить теорему 4.7 о непрерывности произведения. Чтобы установить непрерывность функции $|x|$ в точке $x=0$, вычислим односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to 0-}|x|=\lim_{x\to 0-}(-x)=-\lim_{x\to 0-}x=0;\quad \lim_{x\to 0+}|x|=\lim_{x\to 0+}x=0.$$

Итак, пределы функции в точке $x=0$ слева и справа совпадают и равны значению функции в этой точке. Отсюда следует, что функция $|x|$ непрерывна в точке $x=0$ и, следовательно, непрерывна во всех точках числовой прямой.

Таким образом, рассмотренные функции непрерывны в каждой точке, в окрестности которой они определены. На основании теоремы 4.7 о непрерывности суммы, разности, произведения и частного можно утверждать, что функции, получаемые из них с помощью конечного числа арифметических действий, являются также непрерывными функциями в каждой точке, в окрестности которой они определены.

Будем говорить, что функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала; непрерывна

---

*Здесь использован первый замечательный предел, который получается в результате замены переменной $t=\Delta x/2$: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ (очевидно, что $t=\Delta x/2\to 0$ при $\Delta x\to 0$).

на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в интервале (a, b), и непрерывна в точке a справа, а в точке b слева, т. е.

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a), \text{ а } \lim_{x\to b-} f(x) = f(b).$$

§ 9. Классификация точек разрыва функции

1. Определение и классификация точек разрыва функции. Определение. *Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если $f(x)$ в точке x_0 не является непрерывной.*

Разрывы функций классифицируются следующим образом.

Разрыв 1-го рода. Точка x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-} f(x).$$

Пример. Для функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ точка $x=0$ является точкой разрыва 1-го рода (см. рис. 46), так как $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$.

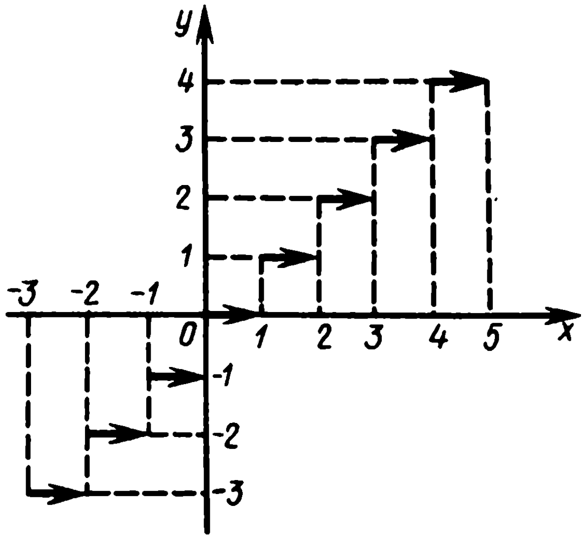


Рис. 52

Разрыв 2-го рода. Точка x_0 называется *точкой разрыва 2-го рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет, по крайней мере, одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

Пример. Для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ точка $x=0$ является точкой разрыва 2-го рода (см. рис. 48), так как $\lim\limits_{x\to 0+} (1/x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} (1/x) = -\infty$.

2. Кусочно-непрерывные функции. Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых имеет разрыв 1-го рода и, кроме того, имеет односторонние пределы в точках a и b.

Функция называется *кусочно-непрерывной на числовой прямой,* если она кусочно-непрерывна на любом отрезке.

Пример. Функция $f(x) = [x]$ кусочно-непрерывна как на любом отрезке, так и на всей числовой прямой. Напомним, что символ $[x]$ обозначает целую часть числа x. График функции $f(x) = [x]$ изображен на рис. 52, функция $[x]$ в точках $x = n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ непрерывна справа и разрывна слева. Во всех других точках она непрерывна как справа, так и слева.

§ 10. Основные свойства непрерывных функций

1. Теорема об устойчивости знака непрерывной функции. Теорема 4.8. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)\neq 0$. Тогда существует $\delta>0$ такое, что для всех $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ функция $f(x)$ имеет тот же знак, что $f(x_0)$.*

Доказательство. Пусть $f(x_0)>0$ (рис. 53). Тогда в силу второго определения непрерывности функции для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ выполняется для всех x, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, или, что то же самое, выполняются неравенства

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon \tag{1}$$

для всех $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$. Возьмем $\varepsilon=f(x_0)$. Тогда из левого неравенства (1) получаем: $f(x)>0$ для всех $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, что и требовалось доказать.

Если же $f(x_0)<0$, то рассмотрим функцию $-f(x)$. Так как $-f(x_0)>0$, то по доказанному существует δ-окрестность точки x_0, в которой $-f(x)>0$ и, следовательно, $f(x)<0$. ■

2. Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение. Рассмотрим теорему о прохождении непрерывной функции через нулевое значение при смене знаков.

Теорема 4.9 (первая теорема Больцано—Коши)*. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и на концах отрезка имеет значения разных знаков. Тогда существует точка $c\in(a,b)$, в которой $f(c)=0$.*

Доказательство. Пусть для определенности $f(a)<0$ и $f(b)>0$ (рис. 54). Разделим отрезок $[a,\ b]$ пополам. Если значение функции в середине отрезка $[a,\ b]$ равно нулю, то теорема доказана. В противном случае выберем тот из двух полученных отрезков, на концах которого функция имеет значения разных знаков, и обозначим его $[a_1,\ b_1]$. Разделим отрезок $[a_1,\ b_1]$ пополам. Если значение функции в середине отрезка $[a_1,\ b_1]$ равно нулю, то теорема доказана. В противном случае выберем тот из двух полученных отрезков, на концах которого функция $f(x)$ имеет значения разных знаков, и обозначим его $[a_2,\ b_2]$. Если продолжить этот процесс неограниченно, то либо на каком-то k-м шаге значение функции в середине отрезка $[a_k,\ b_k]$ окажется равным нулю и тогда теорема доказана, либо получим последовательность

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\supset\ldots$$

вложенных отрезков, причем $b_n-a_n=(b-a)/2^n\to 0$ при $n\to\infty$ и на концах каждого отрезка $[a_n,\ b_n]$ функция имеет значения разных знаков.

По теореме 2.13 о вложенных отрезках существует точка c, принадлежащая всем отрезкам. Докажем, что $f(c)=0$. Действительно, если допустить, что $f(c)>0$, то по теореме 4.8 об устойчи-

*Больцано Бернард (1781 — 1848) — чешский математик.

вости знака непрерывной функции существует окрестность точки c, в которой $f(x)>0$. В эту окрестность при достаточно большом n попадет отрезок $[a_n, b_n]$, следовательно, на отрезке $[a_n, b_n]$ будет выполнено неравенство $f(x)>0$. Но это противоречит тому, что на концах отрезка $[a_n, b_n]$ функция имеет значения разных знаков. Аналогично доказывается, что $f(c)$ не может быть меньше нуля. Остается принять, что $f(c)=0$. При этом очевидно, что точка $c\in(a, b)$. ■

Доказанная теорема имеет простой геометрический смысл: непрерывная кривая при переходе из одной полуплоскости, границей которой является ось абсцисс, в другую пересекает эту ось.

Рассмотрим теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

Теорема 4.10 (вторая теорема Больцано—Коши). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем $f(a)=A$, $f(b)=B$. Пусть, далее, C — любое число, заключенное между A и B. Тогда на отрезке $[a, b]$ найдется точка c такая, что $f(c)=C$.*

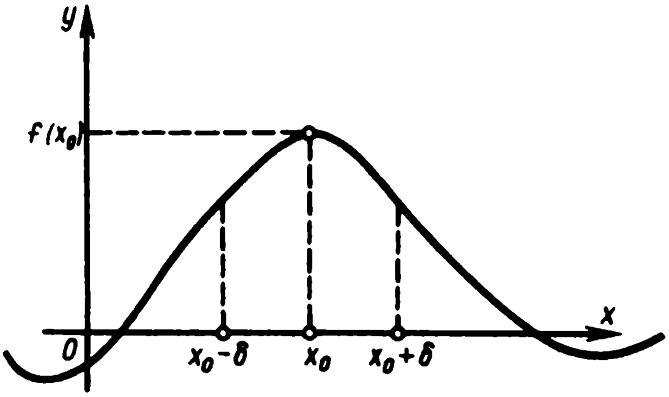


Рис. 53

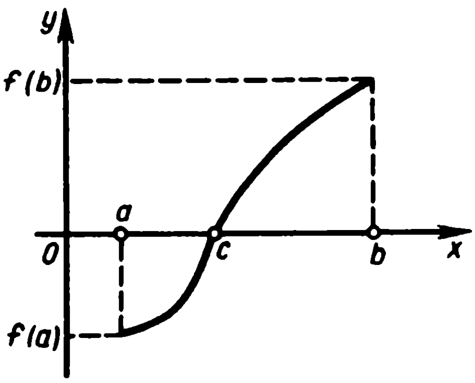


Рис. 54

Другими словами, непрерывная функция при переходе от одного значения к другому принимает и все промежуточные значения.

Доказательство. Пусть для определенности $A<B$ и $A<C<B$ (рис. 55). Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - C.$$

Эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ (как разность непрерывных функций) и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков:

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0,$$
$$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

По теореме 4.9 существует точка $c\in(a, b)$ такая, что $\varphi(c)=$ $=f(c)-C=0$. Отсюда $f(c)=C$. ■

Следствие. *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором промежутке X, то множество ее значений Y также представляет собой некоторый промежуток.*

Прежде чем доказать это следствие, введем понятие точных граней функции. Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве

X, а Y — множество ее значений. Если множество Y ограничено сверху (снизу), то оно имеет точную верхнюю (нижнюю) грань. Точная верхняя (нижняя) грань множества Y называется *точной верхней (нижней) гранью функции* $y=f(x)$ на множестве X и обозначается $\sup\limits_X f(x)$ $\left(\inf\limits_X f(x)\right)$. Иными словами, определение точной верхней (нижней) грани функции $y=f(x)$ на множестве X можно сформулировать так: *число* M (m) *называется точной верхней (нижней) гранью функции* $y=f(x)$ *на множестве* X, *если выполнены два условия:*

1) $f(x)\leqslant M$ $(f(x)\geqslant m)$ *для любого* $x\in X$;

2) *для любого числа* $M'<M$ $(m'>m)$ *найдется такая точка* $x'\in X$, *что* $f(x')>M'$ $(f(x')<m')$.

Первое из этих условий показывает, что число M (m) является одной из верхних (нижних) граней функции $y=f(x)$ на множестве X, а второе условие показывает, что M (m) — наименьшая (наибольшая) из верхних (нижних) граней функции, т. е. точная грань.

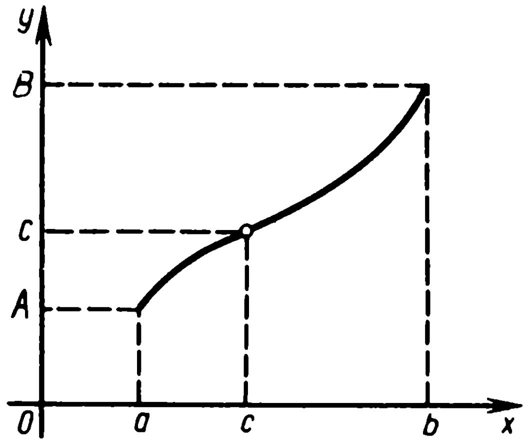


Рис. 55

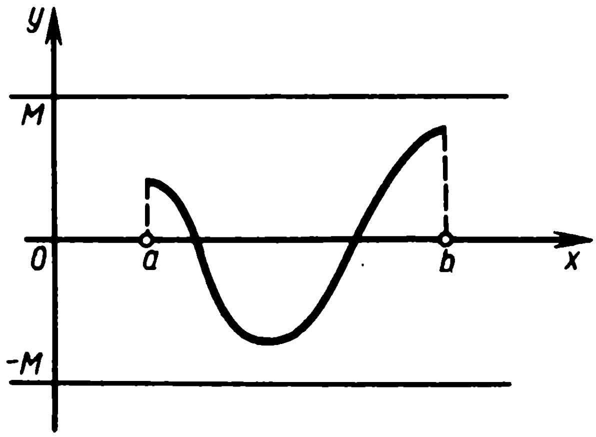


Рис. 56

Если множество Y не ограничено сверху (снизу), то пишут $\sup\limits_X f(x)=+\infty$ $\left(\inf\limits_X f(x)=-\infty\right)$. В этом случае для любого числа A существует такая точка $x'\in X$, что $f(x')>A$ $(f(x')<A)$.

Докажем теперь следствие теоремы 4.10.

Доказательство. Пусть $m=\inf\limits_X f(x)$, $M=\sup\limits_X f(x)$. Возьмем любое y из Y, не равное m и M, и выберем два значения y_1 и y_2 функции $f(x)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$m\leqslant y_1<y<y_2\leqslant M$$

(если $M=+\infty$ $(m=-\infty)$, то $y_2<M$ $(m<y_1)$). Существование таких значений функции $f(x)$ следует из определения точных граней. Тогда по теореме 4.10 о промежуточных значениях непрерывной функции существует точка x такая, что $f(x)=y$. Следовательно, множество Y представляет собой некоторый промежуток (конечный или бесконечный) с концами m и M, которые в зависимости от конкретного случая могут ему принадлежать или не принадлежать. ■

3. Теорема об ограниченности непрерывной функции на отрезке. Напомним, что функция $f(x)$ называется ограниченной на отрезке

$[a, b]$, если существует число $M>0$ такое, что для всех $x\in[a, b]$ выполняется неравенство $|f(x)|\leqslant M$ или $-M\leqslant f(x)\leqslant M$, т. е. график $f(x)$ не выходит из полосы, ограниченной прямыми $y=M$ и $y=-M$ (рис. 56).

Теорема 4.11 (первая теорема Вейерштрасса)*. *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Функция $f(x)$, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой ее окрестности.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon=1$; тогда согласно второму определению непрерывности функции в точке для данного ε существует $\delta>0$ такое, что для всех $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<1$. Используя это неравенство, получаем $|f(x)| = |(f(x) - f(x_0)) + f(x_0)| \leqslant |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| < 1+|f(x_0)|$, т. е. $|f(x)| <M$, где $M = 1 + |f(x_0)|$. Отсюда заключаем, что функция $f(x)$ ограничена в δ - окрестности точки x_0. ■

Доказательство теоремы. Предположим обратное, т. е. допустим, что функция $f(x)$ неограничена на отрезке $[a, b]$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам, тогда, по крайней мере, на одном из двух полученных отрезков функция $f(x)$ неограничена (в противном случае она была бы ограничена на $[a, b]$). Обозначим этот отрезок через $[a_1, b_1]$. Разделим $[a_1, b_1]$ пополам и обозначим через $[a_2, b_2]$ тот отрезок, на котором функция $f(x)$ не ограничена, и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, получаем последовательность

$$[a, b]\supset[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\ldots\supset[a_n, b_n]\supset\ldots$$

вложенных отрезков, на каждом из которых $f(x)$ не ограничена, причем $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}\to 0$ при $n\to\infty$.

По теореме 2.13 о вложенных отрезках существует точка c, принадлежащая всем отрезкам. Функция $f(x)$ по условию определена и непрерывна в точке c, следовательно, согласно доказанной лемме в некоторой окрестности точки c она ограничена. При достаточно большом n в эту окрестность попадет отрезок $[a_n, b_n]$, на котором функция $f(x)$ также ограничена. Но это противоречит тому, что $f(x)$ не ограчичена на каждом из вложенных отрезков. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Замечание. Теорема неверна, если отрезок $[a, b]$ заменить интервалом (a, b). Так, например, функция $f(x)=1/x$ непрерывна на $(0,1)$, но не ограничена, так как $\lim\limits_{x\to 0+}(1/x)=+\infty$. Доказательство теоремы для интервала «не проходит» там, где утверждается, что в точке c функция определена и непрерывна. Для интервала

*Вейерштрасс Карл (1815—1897) — немецкий математик.

точка c может совпадать с его концом и тогда $f(x)$ не будет определена и непрерывна в точке c.

4. Теорема о достижении функцией, непрерывной на отрезке, своих точных граней. В том случае, когда точные грани функции являются значениями функции, говорят, что функция достигает своих точных граней. Однако [см. формулу (1), гл. 1, теорему 1.1] не всякому множеству принадлежат его точные грани. Следующий пример показывает, что точные грани функции не всегда достигаются.

Пусть на отрезке $[0, b]$, $b \geqslant 1$, определена функция $f(x) = x - [x]$, график которой изображен на рис. 57. Множеством ее значений является $[0,1)$. Функция ограничена и сверху и снизу, имеет на данном отрезке точную верхнюю грань, равную 1, и точную нижнюю грань, равную 0. Очевидно, функция принимает значение, равное 0, но не принимает значения, равного 1. Следовательно, можно сказать, что функция достигает своей точной нижней и не достигает своей точной верхней грани.

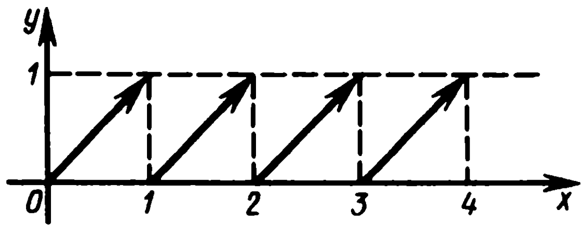


Рис. 57

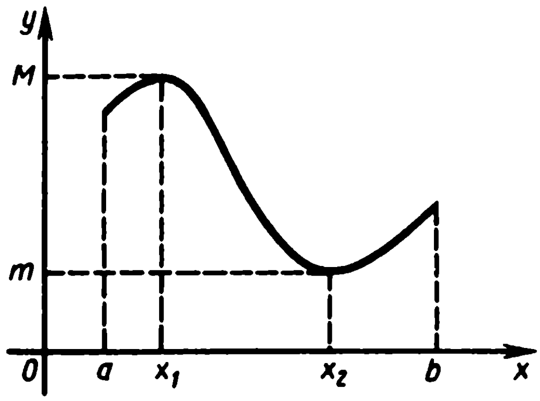


Рис. 58

Установим, при каком условии функция достигает своих точных граней.

Теорема 4.12 (вторая теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своих точных граней, т. е. существуют точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ такие, что* (рис. 58)

$$f(x_1) = M = \sup_{[a,b]} f(x), \quad f(x_2) = m = \inf_{[a,b]} f(x).$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то по теореме 4.11 она ограничена на этом отрезке. Следовательно, согласно теореме 1.1 существуют точная верхняя M и точная нижняя m грани функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Покажем, что функция $f(x)$ достигает M, т. е. существует такая точка $x_1 \in [a, b]$, что $f(x_1) = M$. Будем рассуждать от противного. Пусть функция $f(x)$ не принимает ни в одной точке $[a, b]$ значения, равного M. Тогда для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $f(x) < M$. Рассмотрим на $[a, b]$ вспомогательную, всюду положительную функцию

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

По теореме 4.7 функция $F(x)$ непрерывна как частное двух непрерывных функций. В этом случае согласно теореме 4.11 функция $F(x)$ ограничена, т. е. найдется положительное число μ такое, что для всех $x \in [a, b]$

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leqslant \mu, \text{откуда } f(x) \leqslant M - \frac{1}{\mu}.$$

Таким образом, число $M - 1/\mu$, меньшее M, является верхней гранью $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Но это противоречит тому, что число M является точной верхней, т. е. наименьшей верхней гранью функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Это противоречие и доказывает, что существует точка $x_1 \in [a, b]$, в которой $f(x_1) = M$.

Аналогично доказывается, что функция $f(x)$ достигает на $[a, b]$ своей точной нижней грани m. ■

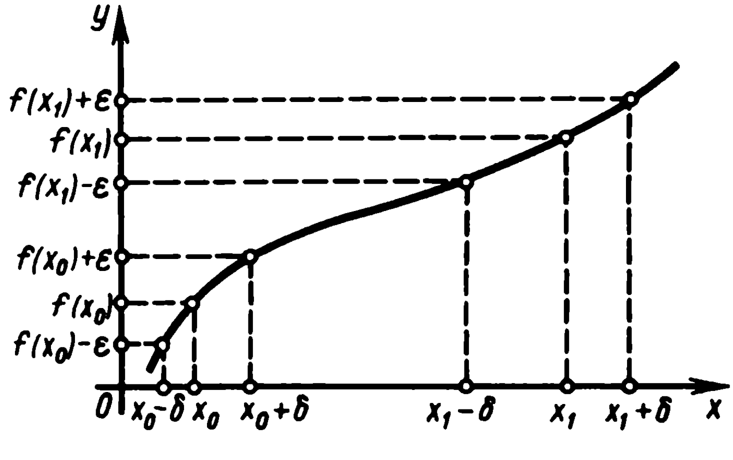


Рис. 59

Замечание 1. После того как доказано, что функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, достигает на этом отрезке своих точных верхней M и нижней m граней, можно назвать точную верхнюю грань максимальным значением, а точную нижнюю грань минимальным значением функции $f(x)$ на этом отрезке и сформулировать теорему 4.12 в следующем виде: *непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке максимальное и минимальное значения.*

Замечание 2. Разность между наибольшим и наименьшим значениями непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется колебанием непрерывной функции на этом отрезке и обозначается буквой ω: $\omega = M - m$, где

$$M = \max_{[a, b]} f(x), \quad m = \min_{[a, b]} f(x).$$

5. Понятие равномерной непрерывности функции. К числу других свойств функции, непрерывной на отрезке, относится очень важное свойство, называемое равномерной непрерывностью. Оно широко используется при доказательстве ряда фундаментальных теорем.

Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на некотором промежутке X, и пусть точка $x_0 \in X$. Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то согласно второму определению непрерывности для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$. Ясно, что δ зависит от ε, но δ зависит также и от x_0. При изменении x_0 в пределах рассматриваемого промежутка (при постоянном ε) число δ будет различным для разных x_0. Чем «круче» идет график функции $f(x)$ в окрестности точки x_0, тем меньше будет δ, соответствующее этой точке (рис. 59).

Таким образом, при заданном ε каждой точке x рассматриваемого промежутка соответствует некоторое $\delta > 0$. Если бы точек было конечное число, то из конечного множества чисел δ можно было бы выбрать наименьшее положительное δ, которое зависело бы только от ε и было «пригодно» для всех x. Для бесконечного числа точек этого, вообще говоря, сделать нельзя, так как этим точкам соответствует бесконечное множество чисел δ, среди которых могут найтись и сколь угодно малые.

Возникает вопрос, существуют ли непрерывные функции, определенные на некоторых промежутках, для которых по любому $\varepsilon > 0$ находилось бы $\delta > 0$, не зависящее от x, т. е. δ было бы общим для всех x из рассматриваемого промежутка. Это приводит к понятию равномерной непрерывности функции.

Определение. *Функция $f(x)$ называется равномерно-непрерывной на промежутке X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых двух точек $x', x'' \in X$, удовлетворяющих неравенству $|x'' - x'| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.*

В логических символах это определение имеет вид

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x', x'' \in X;\ |x'' - x'| < \delta) : |f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

По самому определению, δ зависит только от ε и является общим для всех x', x'' промежутка X. Из определения очевидно, что равномерно-непрерывная функция на X является непрерывной на этом промежутке.

Следующая теорема устанавливает условие, при котором непрерывная функция является и равномерно-непрерывной.

6. Теорема о равномерной непрерывности функции. Теорема 4.13 (теорема Кантора)*. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она и равномерно-непрерывна на нем.*

Доказательство. Докажем сначала, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ отрезок $[a, b]$ можно разбить на конечное число отрезков, любые два из которых или не имеют общих точек, или имеют только одну общую граничную точку и на каждом из которых для любых двух точек x', x'' будет выполняться неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Предположим обратное, т. е. допустим, что существует $\varepsilon > 0$, для которого такое разбиение отрезка $[a, b]$ невозможно. Разделим $[a, b]$ пополам и выберем тот из полученных отрезков, для которого такое разбиение невозможно. Обозначим его $[a_1, b_1]$. Разделим теперь отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и выберем тот из полученных двух отрезков, для которого такое разбиение невозможно, и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, получаем последовательность вложенных отрезков

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

---

* Кантор Георг (1845—1918) — немецкий математик, основатель современной теории множеств.

обладающих тем свойством, что ни один из них нельзя разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых для любых двух точек x' и x'' будет выполняться неравенство $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$. По теореме 2.13 о вложенных отрезках существует точка c, принадлежащая всем отрезкам. Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке c, то для рассматриваемого ε найдется δ такое, что $|f(x)-f(c)|<\varepsilon/2$ для любого x из δ-окрестности точки c. Тогда для любых двух точек x' и x'' δ-окрестности точки c будет выполняться неравенство

$$|f(x'')-f(x')| = |(f(x'')-f(c))+(f(c)-f(x'))| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x'')-f(c)|+|f(c)-f(x')| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$

т. е.

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon.$$

В δ-окрестность точки c при достаточно большом n попадет отрезок $[a_n, b_n]$, и, следовательно, для любых двух точек x' и x'' этого отрезка справедливо неравенство $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$, а это противоречит выбору последовательности вложенных отрезков.

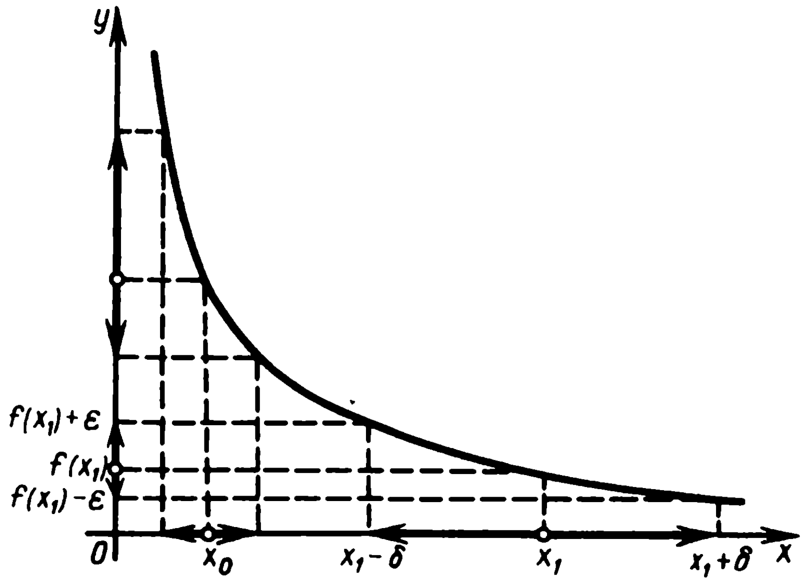


Рис. 60

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. По только что доказанному для любого $\varepsilon>0$ существует разбиение $[a, b]$ на конечное число отрезков, в каждом из которых разность между любыми двумя значениями функции $f(x)$ по абсолютной величине меньше $\varepsilon/2$. Обозначим через δ длину наименьшего из отрезков разбиения и рассмотрим любые две точки x' и x'' отрезка $[a, b]$, отстоящие друг от друга меньше, чем на δ, т. е. $|x''-x'|<\delta$. Возможны два случая: 1) точки x' и x'' принадлежат одному отрезку разбиения; 2) точки x' и x'' принадлежат двум соседним отрезкам разбиения. В первом случае $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon/2<\varepsilon$; во втором случае, обозначая через x_0 общую граничную точку соседних отрезков, имеем

$$|f(x'')-f(x')| = |(f(x'')-f(x_0))+(f(x_0)-f(x'))| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x'')-f(x_0)|+|f(x_0)-f(x')| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для любых двух точек x' и x'' отрезка $[a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x''-x'|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$, что и требовалось доказать. ■

Следствие. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что если*

$[a, b]$ произвольно разбить на конечное число отрезков с длинами, меньшими δ, то на каждом из них колебание ω функции $f(x)$ будет меньше ε.

Доказательство. Действительно, по доказанной теореме функция $f(x)$ равномерно-непрерывна на $[a, b]$. Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для любых точек x' и x'' отрезка $[a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x''-x'|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$. Разобьем отрезок $[a, b]$ произвольным образом на конечное число отрезков с длинами, меньшими указанного δ. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, на каждом из частичных отрезков можно указать такие точки x' и x'', что $f(x')=m$, а $f(x'')=M$, где m и M — точные нижняя и верхняя грани функции $f(x)$ на данном частичном отрезке. Так как $|x''-x'|<\delta$, то $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$. Но $f(x'')-f(x')=M-m=\omega$, поэтому $\omega<\varepsilon$. ■

Замечание. Теорема неверна, если отрезок $[a, b]$ заменить интервалом или полуинтервалом.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x)=1/x$ на интервале $(0, 1)$. Данная функция непрерывна на интервале $(0, 1)$, но не является равномерно-непрерывной на нем. Это следует из того, что для любого фиксированного $\varepsilon>0$, какое бы $\delta>0$ мы не взяли, всегда найдутся точки x' и x'', достаточно близкие к нулю, расстояниемежду которыми меньше δ, а модуль разности $|f(x'')-f(x')|$ больше ε (рис. 60).

§ 11. Понятие сложной функции

Определение. *Если на некотором промежутке X определена функция $z=\varphi(x)$ с множеством значений Z, а на множестве Z определена функция $y=f(z)$, то функция $y=f[\varphi(x)]$ называется сложной функцией* от x, а переменная z — промежуточной переменной сложной функции.*

Пример. Функция $y=\sin x^2$ — сложная функция, определенная на всей числовой прямой, так как $y=f(z)=\sin z$, $z=\varphi(x)=x^2$.

Теорема 4.14. *Пусть функция $z=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(z)$ непрерывна в точке $z_0=\varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Возьмем из X любую последовательность точек

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

сходящуюся к точке x_0. Тогда в силу непрерывности функции $z=\varphi(x)$ в точке x_0 имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\varphi(x_0)=z_0$, т. е.

*Наряду с термином «сложная функция» используют равнозначный термин «композиция (или суперпозиция) функций».

соответствующая последовательность точек

$$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$$

сходится к точке z_0. В силу же непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0 получаем $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=f(z_0)$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} f[\varphi(x_n)]=f[\varphi(x_0)]$. Следовательно, предел функции $f[\varphi(x)]$ в точке x_0 равен ее значению в этой точке, что и доказывает непрерывность сложной функции $f[\varphi(x)]$ в точке x_0. ■

Пример. Доказать непрерывность функции $y=\sin x^2$ в точке $x=0$.

Решение. Функция $z=x^2$ непрерывна в точке $x=0$, а функция $y=\sin z$ непрерывна в точке $z=0$, поэтому по доказанной теореме сложная функция $y=\sin x^2$ непрерывна в точке $x=0$.

§ 12. Понятие обратной функции

1. Определение обратной функции. Будем говорить, что функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на множестве X, если для любых x_1, $x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $x_1<x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$.

Неубывающие и невозрастающие функции объединяют общим названием *монотонные функции.*

Если для любых x_1, $x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $x_1<x_2$, справедливо неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$, то функция $f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на множестве X. Возрастающие и убывающие функции называются также *строго монотонными.*

Примеры. 1. Функция $f(x)=\operatorname{sgn} x$ является неубывающей на всей числовой прямой.

2. Функция $f(x)=x$ является возрастающей на всей числовой прямой.

Введем теперь понятие обратной функции.

Определение. *Пусть X и Y — некоторые множества и пусть задана функция f, т. е. множество пар чисел $(x;\ y)$ $(x \in X,\ y \in Y)$, в котором каждое число x входит в одну и только одну пару, а каждое число y, — по крайней мере, в одну пару. Если в каждой паре этого множества числа x и y поменять местами, то получим множество пар чисел $(y;\ x)$, которое называется обратной функцией φ к функции f.*

Обратную функцию будем обозначать символом $x=\varphi(y)$.

Отметим, что обратная функция, вообще говоря, не является функцией, так как каждое число y может входить не только в одну, но и в несколько пар. Так, например, для функции $y=x$ обратная функция $x=y$ — однозначна (каждое число y входит в одну пару), для функции $y=x^2$ обратная функция $x=\pm\sqrt{y}$ — двузначна (каждое число y входит в две пары), а обратная функция $x=\operatorname{Arcsin} y$ для функции $y=\sin x$ — многозначна (каждое число y

входит в бесконечное число пар). Геометрически данный факт очевиден.

Из определения следует, что если обратная функция однозначна, т. е. является функцией в обычном смысле, то множество значений Y функции f является областью определения обратной функции φ, а область определения X функции f — множеством значений обратной функции φ. Пусть, например, функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, отрезок $[\alpha, \beta]$ является множеством ее значений и каждое $y\in[\alpha, \beta]$ соответствует ровно одному x из $[a, b]$. Тогда, по определению, на отрезке $[\alpha, \beta]$ определена однозначная обратная функция $x=\varphi(y)$, множеством значений которой служит отрезок $[a, b]$ (рис. 61).

Таким образом, функция $y=f(x)$ и обратная функция $x=\varphi(y)$ имеют один и тот же график. Так, например, функция $y=5x$ и обратная функция $x=1/5y$ изображаются графически одной прямой.

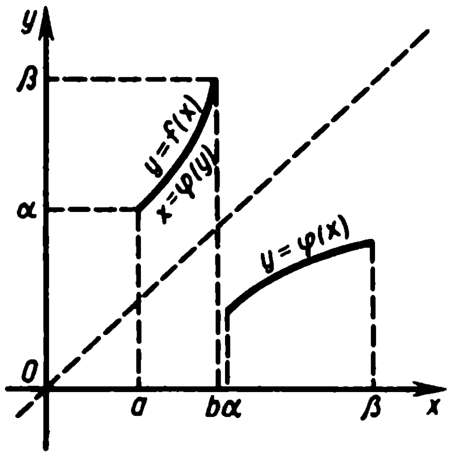


Рис. 61

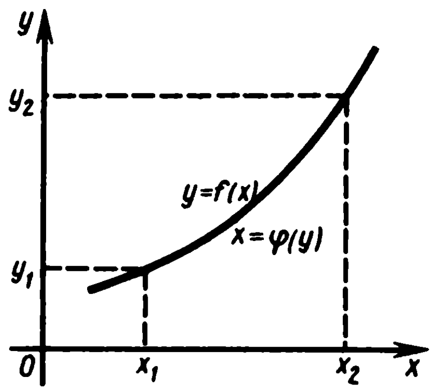


Рис. 62

Если оси Ox и Oy поменять местами, для чего следует повернуть в пространстве плоскость Oxy вокруг биссектрисы первого координатного угла на 180°, то новое положение графика обратной функции $x=\varphi(y)$ является графиком обратной функции $y=\varphi(x)$ (рис. 61).

2. Теорема о непрерывности обратной функции. Теорема 4.15. *Пусть функция $y=f(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна на некотором промежутке X и пусть Y — множество ее значений. Тогда на множестве Y обратная функция $x=\varphi(y)$ однозначна, строго монотонна и непрерывна.*

Доказательство. Пусть для определенности функция $f(x)$ возрастает на X, т. е. для любых $x_1, x_2\in X$, удовлетворяющих условию $x_1<x_2$, выполняется неравенство $y_1<y_2$ $(y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2))$ (рис. 62).

Однозначность обратной функции $x=\varphi(y)$ следует из того, что в силу возрастания функции $y=f(x)$ на X справедливо неравенство $y_1=f(x_1)\neq f(x_2)=y_2$ при $x_1\neq x_2$ и, значит, каждому $y\in Y$ соответствует единственное значение $x\in X$.

Докажем теперь, что обратная функция $x=\varphi(y)$ возрастает на Y. Действительно, если $y_1<y_2$, то и $x_1<x_2$ $(x_1=\varphi(y_1)$ и $x_2=$

$=\varphi(y_2))$, так как если бы было $x_1 \geqslant x_2$, то из возрастания $f(x)$ следовало бы, что $y_1 \geqslant y_2$, что противоречило бы предположению $y_1 < y_2$. Таким образом, факт строгой монотонности обратной функции $x=\varphi(y)$ установлен.

И наконец, покажем, что обратная функция $x=\varphi(y)$ непрерывна на Y. Согласно следствию теоремы 4.10 множество Y является промежутком с концами m и M, где $m=\inf\limits_X f(x)$, $M=\sup\limits_X f(x)$. Пусть $y_0 \in Y$, $x_0=\varphi(y_0)$. Рассмотрим сначала случай, когда $m<y_0<M$ (рис. 63). В этом случае точка x_0 является, очевидно, внутренней точкой промежутка X. Возьмем $\varepsilon>0$ таким, чтобы $(x_0-\varepsilon) \in X$ и $(x_0+\varepsilon) \in X$, и положим $y_1=f(x_0-\varepsilon)$ и $y_2=$ $=f(x_0+\varepsilon)$. Тогда в силу возрастания $f(x)$ получим

$$y_1 < y_0 < y_2.$$

Возьмем теперь $\delta>0$ таким, чтобы выполнялись неравенства

$$y_1 \leqslant y_0-\delta \text{ и } y_0+\delta \leqslant y_2.$$

Тогда, если y удовлетворяет неравенствам

$$y_0-\delta < y < y_0+\delta,$$

то

$$y_1 < y < y_2,$$

и, следовательно, в силу возрастания $\varphi(y)$ имеем

$$\varphi(y_1) < \varphi(y) < \varphi(y_2).$$

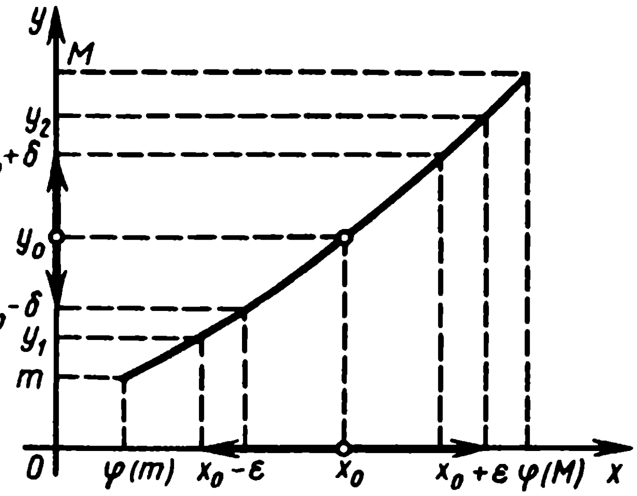


Рис. 63

Учитывая, что $\varphi(y_1)=x_0-\varepsilon=\varphi(y_0)-\varepsilon$ и $\varphi(y_2)=x_0+\varepsilon=$ $=\varphi(y_0)+\varepsilon$, получаем: $\varphi(y_0)-\varepsilon<\varphi(y)<\varphi(y_0)+\varepsilon$ при условии $y_0-\delta<y<y_0+\delta$.

Таким образом, доказано что для любого достаточно малого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех y, удовлетворяющих неравенству $|y-y_0|<\delta$, выполняется неравенство $|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon$, т. е. обратная функция $\varphi(y)$ непрерывна в точке y_0. Но y_0 — произвольная точка интервала (m, M). Значит, обратная функция $\varphi(y)$ непрерывна на (m, M).

Если $m \in Y$ или $M \in Y$, то с помощью аналогичных рассуждений можно доказать непрерывность $\varphi(y)$ справа в точке m и слева в точке M.

Итак, факт непрерывности обратной функции $x=\varphi(y)$ на Y доказан.

В случае убывания функции $f(x)$ доказательство теоремы аналогично. ■

Замечание. Если обратная функция $x=\varphi(y)$ однозначна, то, очевидно, функция $y=f(x)$ является обратной для функции $x=\varphi(y)$. Такие функции называют также *взаимно обратными*.

Пример. Функция $y=\sin x$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ возрастает, непрерывна и множеством ее значений является отрезок $[-1, 1]$. По теореме 4.15 на отрезке $[-1, 1]$ существует непрерывная возрастающая обратная функция с множеством значений $[-\pi/2, \pi/2]$. Эту обратную функцию обозначают $x=\arcsin y$. График ее совпадает с графиком функции $y=\sin x$, рассматриваемой при $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$ (рис. 64).

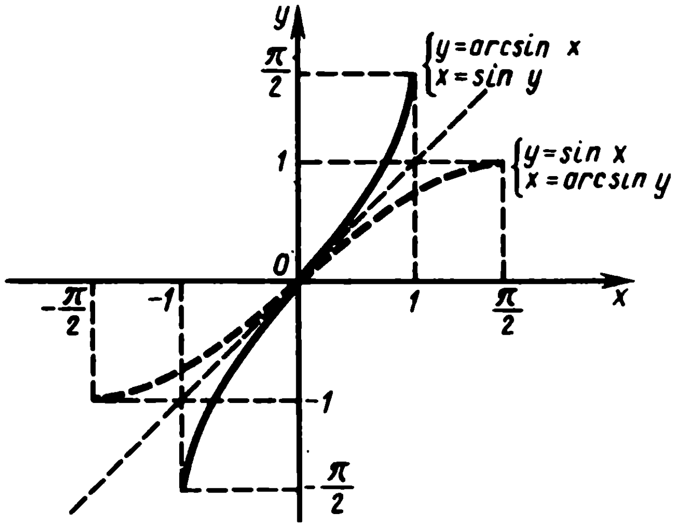


Рис. 64

Если теперь x и y поменять местами, т. е. если рассматривать функцию $y=\arcsin x$, то получится график, изображенный на рис. 64 сплошной линией.

ГЛАВА 5

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

§ 1. Понятие производной

1. Определение производной. Пусть на некотором промежутке X определена функция $y=f(x)$. Возьмем любую точку $x_0 \in X$ и зададим аргументу x в точке x_0 произвольное приращение Δx такое, что точка $x_0+\Delta x$ также принадлежит X. Функция получит приращение $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Определение. *Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел при $\Delta x \to 0$ отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента (при условии, что этот предел существует).*

Для обозначения производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 используют символы $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$.

Итак, по определению,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если для некоторого значения x_0 выполняется условие

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty \left(\text{или } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty\right),$$

то говорят, что в точке x_0 функция имеет *бесконечную производную* знака плюс (или знака минус). В отличие от бесконечной производной определенную выше производную функции иногда называют *конечной производной.* Если функция $f(x)$ имеет конечную производную в каждой точке $x \in X$, то производную $f'(x)$ можно рассматривать как функцию от x, также определенную на X.

Из определения производной вытекает и способ ее вычисления.

Пример. Найти производную функции $f(x)=x^2$ в точке $x=x_0$.

Решение. Давая аргументу x в точке x_0 приращение Δx, найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 =$$
$$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}.$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0.$$

Следовательно, производная функции $f(x)=x^2$ в точке x_0 равна числу $2x_0$, что в принятых обозначениях можно записать так: $f'(x_0)=2x_0$.

2. Геометрический смысл производной. Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале (a, b) и пусть точка M на графике функции соответствует значению аргумента x_0, а точка P — значению x_0+ $+\Delta x$. Проведем через точки M и P прямую и назовем ее *секущей*. Обозначим через $\varphi(\Delta x)$ угол между секущей и осью Ox (рис. 65). Очевидно, что этот угол зависит от Δx.

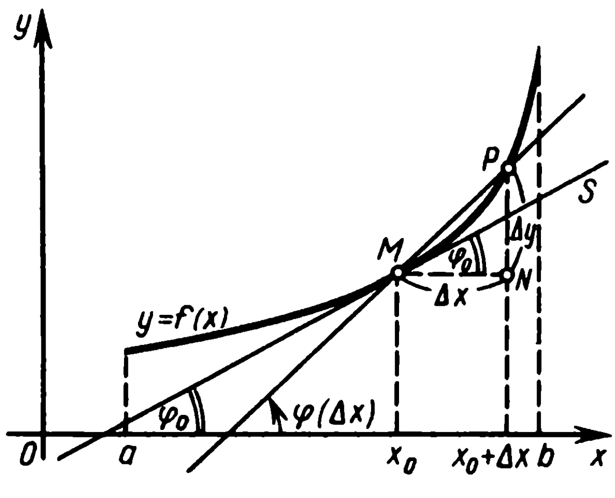


Рис. 65

Если существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)=$ $=\varphi_0$, то прямую с угловым коэффициентом $k=\operatorname{tg}\varphi_0$, проходящую через точку $M(x_0; f(x_0))$, называют *предельным положением секущей MP* при $\Delta x\to 0$ (или при $P\to M$).

Определение. *Касательной S к графику функции $y=f(x)$ в точке M будем называть предельное положение секущей MP при $\Delta x\to 0$, или, что то же, при $P\to M$.*

Из определения следует, что для существования касательной достаточно, чтобы существовал предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)=\varphi_0$, причем предел φ_0 равен углу наклона касательной к оси Ox.

Докажем, что если функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то существует касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$, причем угловой коэффициент этой касательной (т. е. тангенс угла наклона ее к оси Ox) равен производной $f'(x_0)$.

Действительно, из треугольника MNP получаем, что

$$\operatorname{tg}\varphi(\Delta x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Отсюда

$$\varphi(\Delta x)=\operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Перейдем в равенстве (1) к пределу при $\Delta x\to 0$. Так как существует производная $f'(x_0)$, то существует и предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

Отсюда и из непрерывности функции $\operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ следует, что существует предел правой части равенства (1):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{arctg}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{arctg}f'(x_0).$$

Следовательно, существует предел и левой части равенства (1). Таким образом, получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)=\operatorname{arctg}f'(x_0).$$

Но это и означает, что существует предельное положение секущей MP, т. е. существует касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0;\ f(x_0))$, причем угол наклона φ_0 этой касательной к оси Ox равен $\operatorname{arctg}f'(x_0)$ и, значит, угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg}\varphi_0=f'(x_0)$, что и требовалось доказать.

Итак, производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0;\ f(x_0))$.

3. Физический смысл производной. Предположим, что функция $y=f(x)$ описывает закон движения материальной точки M по прямой линии, т. е. $y=f(x)$ — путь, пройденный точкой M от начала отсчета за время x.

Тогда за время x_0 пройден путь $y=f(x_0)$, а за время x_1 — путь $y=f(x_1)$. За промежуток времени $\Delta x=x_1-x_0$ точка M пройдет отрезок пути $\Delta y=f(x_1)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ (рис. 66). Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ называется *средней скоростью* движения ($v_{\text{ср}}$) за время Δx, а предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$ определяет *мгновенную скорость* точки в момент времени x_0 ($v_{\text{мгн}}$).

Понятие скорости, заимствованное из физики, удобно при исследовании поведения произвольной функции. Какую бы зависимость ни отражала функция $y=f(x)$, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть средняя скорость изменения y относительно изменения x, а $y'(x_0)$ — мгновенная скорость изменения y при $x=x_0$.

Значение производной состоит в том, что при изучении любых процессов и явлений природы с ее помощью можно оценить скорость изменения связанных между собой величин.

4. Правая и левая производные. Используя понятие правого и левого предела функции, введем понятия правой и левой производных функции $y=f(x)$ в точке x_0.

Определение. *Правой (левой) производной функции* $y=f(x)$ *в точке* x_0 *называется правый (левый) предел отношения* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *при* $\Delta x \to 0$ *(при условии, что этот предел существует).*

Обозначение:

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}\left(f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right).$$

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то она имеет в этой точке правую и левую производные, которые совпадают.

Вместе с тем существуют функции, имеющие в данной точке x_0 правую и левую производные, но не имеющие производной в этой точке. Это, например, функция $f(x)=|x|$, которая имеет в точке $x=0$ правую производную, равную $f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$ (при $x\geqslant 0$ $\Delta y=\Delta x$), и левую производную, равную $f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1$ (при $x<0$ $\Delta y=-\Delta x$), но не имеет в этой точке производной, так как $f'_+(0)\neq f'_-(0)$.

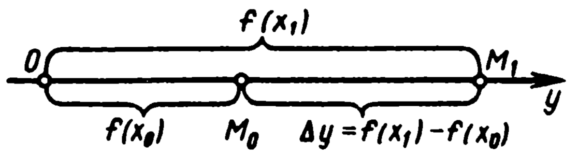


Рис. 66

§ 2. Понятие дифференцируемости функции

1. Понятие дифференцируемости функции в данной точке. Определение. *Функция* $y=f(x)$ *называется дифференцируемой в точке* x_0, *если ее приращение* Δy *в этой точке можно представить в виде*

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x, \tag{1}$$

где A *— некоторое число, не зависящее от* Δx, *а* $\alpha(\Delta x)$ *— функция аргумента* Δx, *являющаяся бесконечно малой при* $\Delta x\to 0$, *т. е.* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$.

Установим связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием производной в той же точке.

Теорема 5.1. *Для того чтобы функция* $y=f(x)$ *была дифференцируема в точке* x_0, *необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, т. е. ее приращение в этой точке можно представить в виде (1): $\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\,\Delta x$. Поделив это равенство на Δx (при $\Delta x \neq 0$), получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A.$$

Отсюда следует, что производная в точке x_0 существует и равна $A: f'(x_0) = A$.

Достаточность. Пусть существует конечная производная $f'(x_0)$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Пусть $f'(x_0) = A$; тогда функция $\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - A$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$ (см. теорему 4.5). Из последнего равенства имеем

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x),$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Получено представление (1), тем самым доказано, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. ■

Таким образом, для функций одной переменной дифференцируемость и существование производной — понятия равносильные. Поэтому операцию нахождения производной часто называют дифференцированием.

Замечание. Введенная при доказательстве достаточности функция $\alpha(\Delta x) = \Delta y / \Delta x - A$ не определена при $\Delta x = 0$. Следовательно, полученное для Δy выражение (1) также не определено при $\Delta x = 0$. Если определить $\alpha(0)$ произвольным образом, то равенство (1) будет справедливо и при $\Delta x = 0$. Для дальнейшего целесообразно условиться, что в выражении (1) функция $\alpha(\Delta x)$ определена при $\Delta x = 0$ по непрерывности, т. е. $\alpha(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

2. Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности.

Теорема 5.2. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке x_0, то она и непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Так как функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение в этой точке может быть представлено соотношением (1). Тогда, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0,$$

что и означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0 согласно третьему определению непрерывности функции в точке. ■

Замечание. Обратное утверждение неверно. Функция может быть непрерывной в точке, но не быть дифференцируемой, т. е. не иметь производной в этой точке.

Примером такой функции служит функция $f(x)=|x|$, которая непрерывна в точке $x=0$, но, как показано в п. 4, § 1, не имеет в этой точке производной, т. е. не является дифференцируемой.

Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка (дифференцируема в каждой точке этого промежутка), то будем говорить, что функция $f(x)$ дифференцируема на указанном промежутке.

§ 3. Понятие дифференциала

1. Определение и геометрический смысл дифференциала. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, т. е. ее приращение Δy в этой точке можно записать в виде суммы двух слагаемых:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. Слагаемое $A\Delta x$ является при $\Delta x\to 0$ бесконечно малой одного порядка с Δx (при $A\neq 0$), оно линейно относительно Δx. Слагаемое $\alpha(\Delta x)\,\Delta x$ при $\Delta x\to 0$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx $\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)\,\Delta x}{\Delta x}=0\right)$.

Таким образом, первое слагаемое (при $A\neq 0$) является главной частью приращения функции $y=f(x)$.

Определение. *Дифференциалом функции* $y=f(x)$ *в точке* x_0 *называется главная, линейная относительно* Δx, *часть приращения функции в этой точке:*

$$dy = A\Delta x. \tag{1}$$

Если $A=0$, то $A\Delta x=0$, и поэтому слагаемое $A\Delta x$ уже не является главной частью приращения Δy, так как слагаемое $\alpha(\Delta x)\,\Delta x$, вообще говоря, отлично от нуля. Однако и в этом случае по определению полагаем дифференциал функции в точке x_0 равным $A\Delta x$, т. е. здесь $dy=0$.

Принимая во внимание теорему 5.1, т. е. учитывая, что $A=f'(x_0)$, формулу (1) можно записать в виде

$$dy = f'(x_0)\,\Delta x. \tag{2}$$

Пусть $f(x)=x$. Тогда по формуле (2)

$$dy=dx=(x_0)'\,\Delta x=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta x}\right)\Delta x=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}\right)\Delta x=1\cdot\Delta x=\Delta x.$$

Дифференциалом независимой переменной x назовем приращение этой переменной $dx=\Delta x$. Соотношение (2) принимает теперь вид

$$dy = f'(x_0)\,dx. \tag{3}$$

Заметим, что с помощью равенства (3) производную $f'(x_0)$ можно вычислить как отношение дифференциала функции dy к дифференциалу dx независимой переменной, т. е.

$$f'(x_0)=\frac{dy}{dx}.$$

Дифференциал функции имеет геометрический смысл. Пусть точка M на графике функции $y=f(x)$ соответствует значению аргумента x_0, точка P — значению аргумента $x_0+\Delta x$, прямая MS — касательная к графику $y=f(x)$ в точке M, α — угол между касательной и осью Ox. Пусть, далее $MN \parallel Ox$, $PN \parallel Oy$, Q — точка пересечения касательной MS с прямой PN (рис. 67). Тогда приращение функции Δy равно величине отрезка NP. В то же время из прямоугольного треугольника MNQ получаем: $NQ = = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x = f'(x_0)\Delta x = \mathrm{d}y$, т. е. дифференциал функции $\mathrm{d}y$ равен величине отрезка NQ. Из геометрического рассмотрения видно, что величины отрезков NP и NQ различны.

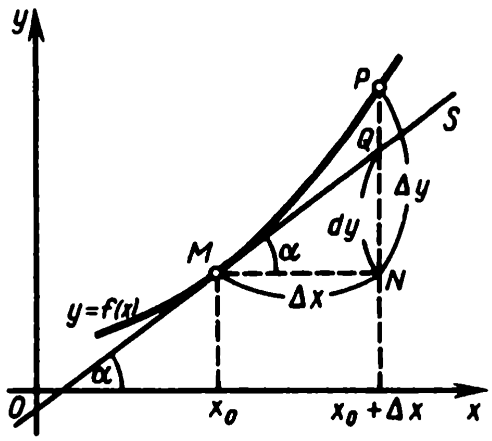


Рис. 67

Таким образом, дифференциал $\mathrm{d}y$ функции $y=f(x)$ в точке x_0 равен приращению «ординаты касательной» MS к графику этой функции в точке M $(x_0; f(x_0))$, а приращение функции Δy есть приращение «ординаты самой функции» $y=f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента, равному Δx.

2. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Из определения дифференциала следует, что он зависит линейно от Δx и является главной частью приращения функции Δy. Само же Δy зависит от Δx более сложно. Например, если $f(x) = x^3$, то $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, в то время как

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\,\Delta x = \left(\lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}\right)\Delta x = 3x_0^2\Delta x.$$

Во многих задачах приращение функции в данной точке приближенно заменяют дифференциалом функции в этой точке:

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y.$$

Абсолютная погрешность при такой замене равна $|\Delta y - \mathrm{d}y|$ и является при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

Пример. Покажем, что если α мало, то можно использовать приближенную формулу

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \alpha/2.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$. При малых Δx имеем

$$\Delta y = \sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0} \approx \mathrm{d}y, \text{ или } \sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0} \approx$$

$$\approx (\sqrt{x})'\Big|_{x=x_0} \Delta x = \left(\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x}\right)\Delta x =$$

$$= \left(\lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x_0+\Delta x) - x_0}{\Delta x\left(\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}\right)\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\,\Delta x,$$

откуда, положив $x_0=1$, $\Delta x=\alpha$, получим

$$\sqrt{1+\alpha}\approx 1+\alpha/2.$$

В частности, $\sqrt{1{,}0003}\approx 1{,}00015$ при $\alpha=0{,}0003$.

Установим теперь правила дифференцирования и вычисления производных простейших элементарных функций. Заметим только, что при выводе формул и практическом вычислении производных обычно пишут не x_0, а просто x, но при этом x считают фиксированным.

§ 4. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного

Теорема 5.3. *Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемы в точке x, то сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии, что $v(x)\neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место следующие формулы:*

$$(u\pm v)'=u'\pm v',\ (u\cdot v)'=u'v+uv',\ \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}. \quad (1)$$

Доказательство. Для вывода формул (1) воспользуемся определением производной, равенством $f(x+\Delta x)=f(x)+$ $+\Delta y$ и теоремой 4.3. Тогда получим:

$$(u\pm v)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'\pm v';$$

$$(uv)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\,v(x+\Delta x)-u(x)\,v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x)+\Delta u]\,[v(x)+\Delta v]-u(x)\,v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\,v(x)+\Delta u v(x)+u(x)\,\Delta v+\Delta u\Delta v-u(x)\,v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}+u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta v\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]=$$

$$=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=$$
$$=vu'+uv'+0\cdot u'=u'v+uv'.$$

так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$, а множители u и v не зависят от Δx;

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\,v(x)-u(x)\,v(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot v(x+\Delta x)\,v(x)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x)+\Delta u]\,v(x)-u(x)\,[v(x)+\Delta v]}{\Delta xv(x)\,[v(x)+\Delta v]}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{uv+\Delta uv-uv-u\Delta v}{\Delta xv(v+\Delta v)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\Delta v}=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v}=\frac{u'v-uv'}{v^2}.\ \blacksquare$$

§ 5. Вычисление производных постоянной, степенной, тригонометрических функций и логарифмической функции

1. Производная постоянной функции. Производная функции $y=f(x)=C$, где C — постоянное число, выражается формулой

$$y'=0.$$

Доказательство. Для любых x и Δx имеем $f(x+\Delta x)=C$ и $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=0$. Отсюда $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$ при любом $\Delta x\neq 0$ и, следовательно,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0.\ \blacksquare$$

2. Производная степенной функции. Производная функции $y=x^n$, показатель n которой является целым положительным числом, выражается формулой

$$y'=n\cdot x^{n-1}.$$

Доказательство. Используя формулу бинома Ньютона, можно записать:

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=$$
$$=\left[x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n\right]-x^n=$$
$$=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n.$$

Таким образом, при $\Delta x\neq 0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n+1)}{2!}x^{n-2}\,\Delta x+\ldots+(\Delta x)^{n-1}.$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^2=0$, ..., $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{n-1}=0$, то

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}.\ \blacksquare$$

Замечание. Случай степенной функции, показатель которой является любым вещественным числом, рассмотрен в п. 2, § 9.

3. Производные тригонометрических функций.

1) Производная функции $y=\sin x$ выражается формулой

$$y' = \cos x.$$

Доказательство. Имеем

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2).$$

Таким образом, при $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)}{\Delta x} = \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\cos(x+\Delta x/2).$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}=1$ (первый замечательный предел), а $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)=\cos x$ в силу непрерывности функции $\cos x$, то

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x. \blacksquare$$

2) Производная функции $y=\cos x$ выражается формулой

$$y' = -\sin x.$$

Доказательство. Имеем

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x = -2\sin(\Delta x/2)\sin(x+\Delta x/2).$$

Таким образом, при $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2\sin(\Delta x/2)\sin(x+\Delta x/2)}{\Delta x} = -\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\sin(x+\Delta x/2).$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\sin x$ в силу непрерывности функции $\sin x$, то

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x. \blacksquare$$

3) Производная функции $y=\operatorname{tg} x$ выражается формулой

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}\left(x \neq \frac{\pi}{2}+n\pi\right).$$

Доказательство. Так как $\operatorname{tg} x=\sin x/\cos x$, то по теореме 5.3 получим

$$y' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x},$$

следовательно,

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}. \blacksquare$$

4) Производная функции $y=\operatorname{ctg} x$ выражается формулой

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}\ (x \neq n\pi).$$

Доказательство. Так как $\operatorname{ctg} x=\cos x/\sin x$, то аналогично предыдущему имеем

$$y'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{(-\sin x)\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x},$$

следовательно,

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \ \blacksquare$$

4. Производная логарифмической функции. Производная функции $y=\log_a x\ (0<a\neq 1)$ выражается формулой

$$y' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}.$$

Доказательство. Имеем

$$\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a\frac{x+\Delta x}{x} = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Таким образом, при $\Delta x\neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right), \text{ или}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right].$$

Полагая $x/\Delta x=h$, имеем: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(1+\Delta x/x)^{x/\Delta x}=\lim\limits_{h\to\infty}(1+1/h)^h=e$ (второй замечательный предел), а так как логарифмическая функция является непрерывной, то

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right]=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}. \ \blacksquare$$

Следствие. *Если* $y=\log_e x=\ln x$, *то* $y'=(\ln x)'=1/x$.

§ 6. Теорема о производной обратной функции

Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.15 об обратной функции и функция $x=\varphi(y)$ является для нее обратной. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 5.4. *Если функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)\neq 0$, то обратная функция $x=\varphi(y)$ также имеет в соответствующей точке $y_0=f(x_0)$ производную, причем*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Дадим аргументу y обратной функции $x=\varphi(y)$ некоторое приращение $\Delta y\neq 0$ в точке y_0. Функция

$x = \varphi(y)$ получит некоторое приращение Δx, причем в силу возрастания (или убывания) обратной функции $\Delta x \neq 0$. Следовательно, можем записать:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta y \to 0$. Так как обратная функция $x = \varphi(y)$ непрерывна в точке y_0 (см. теорему 4.15), то $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Но при $\Delta x \to 0$ предел правой части равенства существует и равен $1/f'(x_0)$. Следовательно, существует предел и левой части равенства, который по определению равен $\varphi'(y_0)$. Таким образом, получаем

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \blacksquare \qquad (1)$$

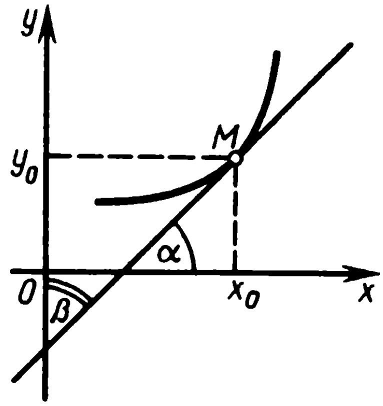


Рис. 68

Доказанная теорема имеет простой геометрический смысл. Рассмотрим в некоторой окрестности точки x_0 график функции $y = f(x)$ (или обратной функции $x = \varphi(y)$). Пусть точке x_0 на этом графике соответствует точка M (рис. 68). Как известно, производная $f'(x_0)$ равна тангенсу угла α наклона касательной, проходящей через точку M, к оси Ox. Производная обратной функции $\varphi'(y_0)$ равна тангенсу угла β наклона той же касательной к оси Oy. Поскольку углы α и β в сумме составляют $\pi/2$, то формула (1) выражает очевидный факт:

$$\varphi'(y_0) = \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{ctg} \beta} = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\pi/2 - \alpha)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

§ 7. Вычисление производных показательной функции и обратных тригонометрических функций

Используя доказанную выше теорему 5.4, продолжим вычисление производных простейших элементарных функций.

1. **Производная показательной функции.** Производная функции $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ выражается формулой

$$y' = a^x \ln a.$$

Доказательство. Показательная функция $y = a^x$ является обратной для логарифмической функции $x = \log_a y$. Так как

$$x'(y) = \frac{1}{y} \log_a e,$$

то в силу теоремы 5.4 о производной обратной функции и известного из элементарной математики соотношения $\log_a b = 1/\log_b a$

получаем

$$y'(x)=\frac{1}{x'(y)}=\frac{y}{\log_a e}=a^x \ln a. \blacksquare$$

Следствие. *Если* $y=e^x$, *то* $y'=(e^x)'=e^x$.

2. Производные обратных тригонометрических функций.

1) Производная функции $y=\arcsin x$ выражается формулой

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (|x|<1).$$

Доказательство. Функция $y=\arcsin x$ является обратной для функции $x=\sin y$. Так как $x'(y)=\cos y$, то по теореме 5.4 о производной обратной функции получаем

$$y'(x)=\frac{1}{x'(y)}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}.$$

Корень взят со знаком плюс, так как $\cos y$ положителен на интервале $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$. Учитывая, что $\sin y=x$ окончательно имеем

$$y'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \blacksquare$$

2) Производная функции $y=\arccos x$ выражается формулой

$$y'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Доказательство аналогично предыдущему.

3) Производная функции $y=\operatorname{arctg} x$ выражается формулой

$$y'=\frac{1}{1+x^2}.$$

Доказательство. Функция $y=\operatorname{arctg} x$ является обратной для функции $x=\operatorname{tg} y$.

Так как $x'(y)=1/\cos^2 y$, то $y'(x)=1/x'(y)=\cos^2 y$. Но $1/\cos^2 y=1+\operatorname{tg}^2 y=1+x^2$, следовательно,

$$y'(x)=\frac{1}{1+x^2}. \blacksquare$$

4) Производная функции $y=\operatorname{arcctg} x$ выражается формулой

$$y'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Доказательство аналогично предыдущему.

§ 8. Правило дифференцирования сложной функции

Теорема 5.5. *Если функция $x=\varphi(t)$ имеет производную в точке t_0, а функция $y=f(x)$ имеет производную в соответствующей точке $x_0=\varphi(t_0)$, то сложная функция $f[\varphi(t)]$ имеет произ-*

водную в точке t_0 и справедлива следующая формула:

$$y'(t_0) = f'(x_0)\,\varphi'(t_0). \tag{1}$$

Доказательство. Так как функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то приращение этой функции в точке x_0 может быть записано в виде

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x, \tag{2}$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. Поделив равенство (2) на Δt, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0)\,\frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha(\Delta x)\,\frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{3}$$

Равенство (3) справедливо при любых достаточно малых Δx. Возьмем Δx равным приращению функции $x=\varphi(t)$, соответствующему приращению Δt аргумента t в точке t_0, и устремим в этом равенстве Δt к нулю. Так как по условию функция $x=\varphi(t)$ имеет в точке t_0 производную, то она непрерывна в этой точке. Следовательно, согласно третьему определению непрерывности функции в точке, $\Delta x\to 0$ при $\Delta t\to 0$. Но тогда и $\alpha(\Delta x)$ также стремится к нулю, т. е. имеем

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\alpha(\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\alpha(\Delta x)\,\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = 0\cdot\varphi'(t_0) = 0. \tag{4}$$

В силу соотношения (4) существует предел правой части равенства (3) при $\Delta t\to 0$, равный $f'(x_0)\,\varphi'(t_0)$. Значит, существует предел при $\Delta t\to 0$ и левой части равенства (3), который, по определению производной, равен производной сложной функции $y=f[\varphi(t)]$ в точке t_0. Тем самым, доказана дифференцируемость сложной функции и установлена формула (1). ■

Замечание 1. В данной теореме рассмотрена сложная функция, где y зависит от t через промежуточную переменную x. Возможна и более сложная зависимость — с двумя, тремя и большим числом промежуточных переменных, но правило дифференцирования остается таким же.

Так, например, если $y=f(x)$, где $x=\varphi(u)$, а $u=\psi(v)$ и $v=\chi(t)$, то производную $y'(t)$ следует вычислять по формуле

$$y'(t) = f'(x)\,\varphi'(u)\,\psi'(v)\,\chi'(t). \tag{5}$$

Пример 1. Вычислить производную функции $y=\mathrm{e}^{\operatorname{arctg} x}$.

Решение. Данную функцию можно представить в виде $y=\mathrm{e}^u$, где $u=\operatorname{arctg} x$. Тогда по формуле (1)

$$y'(x) = y'(u)\,u'(x) = \mathrm{e}^u\,\frac{1}{1+x^2}.$$

Заменяя u на $\operatorname{arctg} x$, окончательно получим

$$y' = \mathrm{e}^{\operatorname{arctg} x}\,\frac{1}{1+x^2}.$$

Пример 2. Вычислить производную функции $y=\operatorname{tg}^2\sqrt{x^2+1}$.

Решение. Данную функцию можно представить в виде $y=u^2$, где $u=\operatorname{tg} v$, а $v=\sqrt{w}$ и $w=x^2+1$. Используя формулу (5), получаем

$$y'(x)=y'(u)\,u'(v)\,v'(w)\,w'(x)=(u^2)'\,(\operatorname{tg} v)'\,\left(\sqrt{w}\right)'\,(x^2+1)'=$$
$$=2u\sec^2 v\,\frac{1}{2\sqrt{w}}\,2x=\frac{2x\operatorname{tg}\sqrt{x^2+1}\,\sec^2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Замечание 2. Иногда производную приходится вычислять непосредственно исходя из ее определения. Найдем, например, производную функции

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

При $x\neq 0$ производная вычисляется по формулам и правилам дифференцирования:

$$f'(x)=\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'=(x^2)'\sin\frac{1}{x}+x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right)'\left(\frac{1}{x}\right)'=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}.$$

Этим выражением нельзя воспользоваться при $x=0$. В точке $x=0$ производную можно вычислить, используя определение производной:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}=0$$

(произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая). Таким образом,

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin(1/x)-\cos(1/x) & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

§ 9. Логарифмическая производная. Производная степенной функции с любым вещественным показателем. Таблица производных простейших элементарных функций

1. Понятие логарифмической производной функции. Вычислим производную функции $y=\ln|x|$ $(x\neq 0)$. Так как $(\ln x)'=1/x$ и $(\ln(-x))'=(-x)'/-x=1/x$ (последнее равенство получено на основании правила дифференцирования сложной функции), то производная данной функции выражается следующей формулой:

$$y'=(\ln|x|)'=\frac{1}{x}. \tag{1}$$

Учитывая формулу (1), вычислим производную сложной функции $y=\ln|u|$, где $u=f(x)$ — дифференцируемая функция. Имеем

$$y'=(\ln|u|)'=\frac{1}{u}\,u'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

или

$$(\ln|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}. \qquad (2)$$

Производная $(\ln|f(x)|)'$ называется *логарифмической производной* функции $f(x)$. Для упрощения записи при логарифмическом дифференцировании знак модуля у функции $f(x)$ обычно опускается.

Вычислим с помощью логарифмической производной производную показательно-степенной функции $y=u(x)^{v(x)}$, где u и v — некоторые функции от x $(u>0)$, имеющие в данной точке x производные $u'(x)$ и $v'(x)$. Так как $\ln y=v(x)\ln u(x)$, то, используя формулу (2), получаем

$$\frac{y'}{y}=[v(x)\ln u(x)]'=v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Отсюда, учитывая, что $y=u(x)^{v(x)}$, получаем следующую формулу для производной показательно-степенной функции:

$$y'=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]. \qquad (3)$$

Пример. Вычислить производную функции $y=x^x$.

Решение. Данную функцию можно представить в виде $y=u(x)^{v(x)}$, где $u(x)=x$ и $v(x)=x$. Используя формулу (3), получаем

$$y'=x^x\left[1\ln x+x\frac{1}{x}\right]=x^x(\ln x+1).$$

Производную показательно-степенной функции $y=u(x)^{v(x)}$ можно вычислить и другим способом. Представим функцию в виде $y=e^{v(x)\ln u(x)}$ и вычислим y':

$$y'=[e^{v(x)\ln u(x)}]'=e^{v(x)\ln u(x)}[v(x)\ln u(x)]'=$$
$$=y\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right],$$

подставляя $y=u(x)^{v(x)}$, приходим снова к формуле (3).

Логарифмическая производная очень удобна при нахождении производной степенной функции с любым вещественным показателем.

2. Производная степенной функции с любым вещественным показателем. Производная функции $y=x^\alpha$ (α — любое вещественное число) выражается формулой

$$y'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Доказательство. Так как $y=x^\alpha$, то $\ln y=\alpha\ln x$. По формуле (2) находим

$$\frac{y'}{y}=[\alpha\ln x]'=\frac{\alpha}{x}.$$

Отсюда, учитывая, что $y=x^{\alpha}$, получаем формулу для производной степенной функции:

$$y' = (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}. \blacksquare$$

Таким образом, нами вычислены производные всех простейших элементарных функций и мы можем составить следующую таблицу.

3. Таблица производных простейших элементарных функций.

I. $(C)' = 0$.

II. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, в частности $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

III. $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$, в частности $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

IV. $(a^x)' = a^x \ln a$, в частности, $(e^x)' = e^x$.

V. $(\sin x)' = \cos x$.

VI. $(\cos x)' = -\sin x$.

VII. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

VIII. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

IX. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

X. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XI. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

XII. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Формулы, приведенные в таблице, а также правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного и правило дифференцирования сложной функции являются основными формулами дифференциального исчисления. На основе правил и формул дифференцирования можно сделать важный вывод: производная любой элементарной функции также элементарная функция. Таким образом, операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций.

§ 10. Производные и дифференциалы высших порядков

1. Понятие производной n-го порядка. Как уже отмечалось в § 1 данной главы, производная $f'(x)$ функции $y=f(x)$ сама является некоторой функцией аргумента x. Следовательно, по отношению к ней снова можно ставить вопрос о существовании и нахождении производной.

Назовем $f'(x)$ *производной первого порядка* функции $f(x)$.

Производная от производной некоторой функции называется *производной второго порядка* (или *второй производной*) этой функции. Производная от второй производной называется *производной третьего порядка* (или *третьей производной*) и т. д. Производные, начиная со второй, называются *производными высших порядков* и обозначаются y'', y''', $y^{(4)}$, $y^{(5)}$, ..., $y^{(n)}$, ... (вместо y'' и y''' иногда пишут $y^{(2)}$ и $y^{(3)}$), или $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$, $f^{(5)}(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, ...

Производная n-го порядка является производной от производной $(n-1)$-го порядка, т. е. $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$.

Производные высших порядков имеют широкое применение в физике. Ограничимся физическим истолкованием второй производной $f''(x)$. Если функция $y=f(x)$ описывает закон движения материальной точки по прямой линии, то первая призводная $f'(x)$ есть мгновенная скорость точки в момент времени x, а вторая производная равна скорости изменения скорости, т. е. ускорению движущейся точки в этот момент.

2. Формулы для n-х производных некоторых функций.

1) Вычислим n-ю производную степенной функции $y=x^\alpha (x>0)$ (α — любое вещественное число). Последовательно дифференцируя, имеем*:

$$y'=\alpha x^{\alpha-1}, y^{(2)}=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, y^{(3)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}, ..., y^{(n)}= \\ =\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...[\alpha-(n-1)]\,x^{\alpha-n}.$$

В частном случае, если $\alpha=m$, где m — натуральное число, получаем

$$(x^m)^{(m)}=m(m-1)(m-2)...[m-(m-1)]\cdot 1=m!,$$
$$(x^m)^{(n)}=0 \text{ при } n>m.$$

2) Вычислим n-ю производную показательной функции $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$. Последовательно дифференцируя, имеем

$$y'=a^x\ln a, y^{(2)}=a^x(\ln a)^2, y^{(3)}=a^x(\ln a)^3, ..., y^{(n)}=a^x(\ln a)^n.$$

В частности, если $y=e^x$, то для любого n

$$(e^x)^{(n)}=e^x.$$

3) Вычислим n-ю производную функции $y=\sin x$. Последовательно дифференцируя, имеем

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), y^{(2)}=-\sin x=\sin(x+\pi)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y^{(3)}=-\cos x=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right), ..., y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, производную любого порядка от $\sin x$ можно вычислять по формуле

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Например, $(\sin x)^{(10)}=\sin(x+10(\pi/2))=\sin(x+\pi)=-\sin x$.

4) Аналогично можно получить формулу n-й производной функции $y=\cos x$:

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

---

*При строгом выводе формул n-х производных следует применить метод математической индукции.

3. Формула Лейбница для n-й производной произведения двух функций. Пусть $y = u \cdot v$, где u и v — некоторые функции от переменной x, имеющие производные любого порядка. Тогда

$$y' = u'v + uv',\ y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' =$$
$$= u''v + 2u'v' + uv'' = u^{(2)}v + 2u'v' + uv^{(2)},$$
$$y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' =$$
$$= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' = u^{(3)}v + 3u^{(2)}v' + 3u'v^{(2)} + uv^{(3)}.$$

Правые части полученных равенств похожи на разложения различных степеней бинома $(u+v)^n$ по формуле Ньютона, но вместо показателей степени стоят числа, определяющие порядок производных, а сами функции u и v для полной аналогии с формулой Ньютона нужно рассматривать как «производные нулевого порядка»: $u^{(0)}$ и $v^{(0)}$. Учитывая это, запишем общий вид n-й производной произведения двух функций:

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)}. \qquad (1)$$

Формула (1) называется *формулой Лейбница**. Докажем эту формулу методом математической индукции.

При $n=1$ эта формула принимает вид $(uv)' = u'v + uv'$, что совпадает с формулой дифференцирования произведения двух функций. Для $n=2$ и $n=3$ она также проверена. Поэтому достаточно, предположив справедливость формулы (1) для некоторого n, доказать ее справедливость для $n+1$. Продифференцируем эту формулу, т. е. найдем $y^{(n+1)} = (y^{(n)})'$:

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + u^{(n)}v' + n\left[u^{(n)}v' + u^{(n-1)}v''\right] +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2!}\left[u^{(n-1)}v'' + u^{(n-2)}v'''\right] +$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left[u^{(n-k+1)}v^{(k)} + u^{(n-k)}v^{(k+1)}\right] + \ldots$$
$$\ldots + u'v^{(n)} + uv^{(n+1)}.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + (n+1)u^{(n)}v' + \left(n + \frac{n(n-1)}{2!}\right)u^{(n-1)}v'' + \ldots$$
$$\ldots + \left[\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{(k-1)!} + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\right]u^{(n-k+1)}v^{(k)} + \ldots$$
$$\ldots + (n+1)u'v^{(n)} + uv^{(n+1)}.$$

---

*Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646—1716) — немецкий философ и математик.

Но выражение, стоящее в квадратных скобках, можно представить следующим образом:

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{(k-1)!}+\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(n-k+1)(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\dots 1}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)(n-k-2)\dots 1}+$$

$$+\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\dots 1}{k!(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\dots 1}=$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1}+\frac{1}{k}\right)=$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{n+1}{k(n-k+1)}=\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}=$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(n-k+1)\times\times(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\dots 1}{k!(n-k+1)(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\dots 1}=$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)}{k!}.$$

Поэтому

$$y^{(n+1)}=u^{(n+1)}v+(n+1)u^{(n)}v'+\frac{(n+1)n}{2!}u^{(n-1)}v''+\dots$$

$$\dots+\frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+2)}{k!}u^{(n-k+1)}v^{(k)}+\dots+(n+1)u'v^{(n)}+uv^{(n+1)}.$$

Формула (1) доказана. ■

Пример 1. Вычислить пятую производную функции $y=x^5e^x$.

Решение. Полагая $u=x^5$ и $v=e^x$, найдем: $u'=5x^4$, $u''=20x^3$, $u'''=60x^2$, $u^{(4)}=120x$, $u^{(5)}=120$; $v'=v''=v'''=v^{(4)}=$ $=v^{(5)}=e^x$. Подставляя эти выражения в формулу (1) при $n=5$, получаем

$$y^{(5)}=120\,e^x+5\cdot 120xe^x+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}60x^2e^x+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}20x^3e^x+5\cdot 5x^4e^x+x^5e^x=$$

$$=e^x(120+600x+600x^2+200x^3+25x^4+x^5).$$

Пример 2. Вычислить n-ю производную $(n\geqslant 2)$ функции $y=$ $=x^2\cos x$.

Решение. Полагая $u=\cos x$ и $v=x^2$, найдем

$$u^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\ v'=2x,\ v''=2,\ v'''=v^{(4)}=v^{(5)}=\dots=0.$$

Подставляя в формулу (1), получаем

$$y^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)x^2+2n\cos\left[x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]x+$$

$$+\frac{2n(n-1)}{1\cdot 2}\cos\left[x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right].$$

4. Дифференциалы высших порядков. Рассмотрим дифференциалы высших порядков. Для удобства будем наряду с обозначениями дифференциалов символами dy и dx использовать обозначения δy и δx.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке x некоторого промежутка. Тогда ее дифференциал

$$dy = f'(x)\,dx,$$

который назовем *дифференциалом первого порядка,* является функцией двух переменных: аргумента x и его дифференциала dx. Пусть функция $f'(x)$, в свою очередь, дифференцируема в некоторой точке x. Будем рассматривать dx в выражении для dy как постоянный множитель. Тогда функция dy представляет собой функцию только аргумента x и ее дифференциал в точке x имеет вид (при рассмотрении дифференциала от dy будем использовать новые обозначения для дифференциалов)

$$\delta(dy) = \delta[f'(x)\,dx] = [f'(x)\,dx]'\,\delta x = f''(x)\,dx\,\delta x.$$

Дифференциал $\delta(dy)$ от дифференциала dy в точке x, взятый при $\delta x = dx$, называется *дифференциалом второго порядка* функции $f(x)$ в точке x и обозначается d^2y, т. е.

$$d^2y = f''(x)(dx)^2.$$

В свою очередь, дифференциал $\delta(d^2y)$ от дифференциала d^2y, взятый при $\delta x = dx$, называется *дифференциалом третьего порядка* функции $f(x)$ и обозначается d^3y и т. д. Дифференциал $\delta(d^{n-1}y)$ от дифференциала d^{n-1}, взятый при $\delta x = dx$, называется *дифференциалом n-го порядка* (или *n-м дифференциалом)* функции $f(x)$ и обозначается d^ny.

Докажем, что для n-го дифференциала функции справедлива формула

$$d^ny = y^{(n)}(x)(dx)^n, n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Доказательство проведем по индукции. Для $n=1$ и $n=2$ формула (2) доказана. Пусть она верна для дифференциалов порядка $n-1$:

$$d^{n-1}y = y^{(n-1)}(x)(dx)^{n-1},$$

и функция $y^{(n-1)}(x)$, в свою очередь, дифференцируема в некоторой точке x. Тогда

$$d^ny = \delta(d^{n-1}y) = \delta\left[y^{(n-1)}(x)(dx)^{n-1}\right] =$$
$$= \left[y^{(n-1)}(x)(dx)^{n-1}\right]'\delta x = y^{(n)}(x)\,\delta x\,(dx)^{n-1}.$$

Полагая $\delta x = dx$, получаем

$$d^ny = \delta(d^{n-1}y)\Big|_{\delta x = dx} = y^{(n)}(x)(dx)^n,$$

что и требовалось доказать.

Из формулы (2) следует, что для любого n справедливо равенство

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{(dx)^n}, \text{ или } y^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n},$$

т. е. n-я производная функции $y=f(x)$ в точке x равна отношению n-го дифференциала этой функции в точке x к n-й степени дифференциала аргумента.

Пример 3. Вычислить дифференциал d^3y функции $y=x^4-3x^2+4$.

Решение. Последовательно дифференцируя, получаем

$$y'(x)=4x^3-6x,\ y''(x)=12x^2-6,\ y'''(x)=24x.$$

Следовательно, $d^3y=y'''(x)(dx)^3=24x(dx)^3$.

§ 11. Параметрическое задание функции и ее дифференцирование

1. Параметрическое задание функции. Пусть даны две функции

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t) \tag{1}$$

одной независимой переменной t, определенные и непрерывные в одном и том же промежутке. Если $x=\varphi(t)$ строго монотонна, то обратная к ней функция $t=\Phi(x)$ однозначна, также непрерывна и строго монотонна. Поэтому y можно рассматривать как функцию, зависящую от переменной x посредством переменной t, называемой *параметром:*

$$y=\psi[\Phi(x)].$$

В этом случае говорят, что функция y от x задана параметрически с помощью уравнений (1).

Отметим, что функция $\psi[\Phi(x)]$ непрерывна в силу теоремы о непрерывности сложной функции.

Пример 1. Пусть $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$. Так как функция $x=R\cos t$ убывает при $0\leqslant t\leqslant\pi$, то данные уравнения задают параметрически функцию y от x. Если выразить t через x из первого уравнения и подставить во второе, то получим искомую функцию переменной x в явном виде.

Это еще легче сделать, если заметить, что

$$x^2+y^2=R^2(\cos^2 t+\sin^2 t)=R^2.$$

Отсюда $y=\sqrt{R^2-x^2}$ или $y=-\sqrt{R^2-x^2}$. Так как функция $y=R\sin t$ неотрицательна для $0\leqslant t\leqslant\pi$, то перед радикалом выбираем знак плюс: $y=\sqrt{R^2-x^2}$.

Если $\pi\leqslant t\leqslant 2\pi$, то $y=-\sqrt{R^2-x^2}$.

Таким образом, можно сделать вывод, что когда t изменяется от 0 до 2π, то формулы $x=R\cos t$ и $y=R\sin t$ определяют две функции переменной x, графики которых образуют окружность радиуса R.

Пример. 2. Пусть $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

Данные равенства являются параметрическими уравнениями эллипса, так как (см. замечание п. 1, § 7, гл. 3) эллипс получается из окружности радиуса a сжатием ее в a/b раз вдоль оси Oy. Из примера 1 следует, что параметрическими уравнениями окружности $x^2+y^2=a^2$ являются уравнения $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$. Итак, параметрические уравнения эллипса получаются из параметрических уравнений окружности умножением правой части уравнения для ординаты y на b/a и имеют вид: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$. Можно поступить проще. Исключая из этих уравнений параметр t (разрешая их относительно $\cos t$ и $\sin t$, возводя полученные равенства в квадрат и складывая), получаем

$$(x/a)^2+(y/b)^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1 \text{ или } x^2/a^2+y^2/b^2=1$$

— уравнение эллипса.

Параметрическое задание функции имеет особо важное значение при изучении движения точки. Если точка движется на плоскости, то ее координаты x, y являются функциями времени t. Задав эти функции $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, мы полностью определим движение точки. Для каждого промежутка времени, в котором функция $\varphi(t)$ строго монотонна, можно, как и раньше, определить функцию $y=\psi[\Phi(x)]$, графиком которой является кривая, описываемая за этот промежуток времени движущейся точкой. В последнем примере функции описывали движение точки по эллипсу.

2. Дифференцирование функции, заданной параметрически. Предположим теперь, что функции $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$ имеют производные, причем $\varphi'(t)\neq 0$ на некотором промежутке. Из последнего неравенства вытекает (как будет показано) строгая монотонность функции $x=\varphi(t)$ (см. теорему 6.7, гл. VI) и, следовательно, однозначность обратной функции $t=\Phi(x)$. По теореме 5.4 о производной обратной функции функция $\Phi(x)$ имеет производную

$$\Phi'(x)=\frac{1}{\varphi'(t)},$$

а по теореме 5.5 о производной сложной функции функция $y=\psi[\Phi(x)]$ имеет производную

$$y'(x)=\psi'(\Phi(x))\,\Phi'(x).$$

Следовательно,

$$y'(x)=\left.\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right|_{t=\Phi(x)}. \tag{2}$$

Таким образом, доказано, что производная функции, заданной параметрически, выражается формулой (2).

Пример 1. Найти $y'(x)$, если $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant \pi)$.

Решение. По формуле (2) получаем [здесь $t=\Phi(x)=\arccos(x/R)$]

$$y'(x)=\left.\frac{R\cos t}{-R\sin t}\right|_{t=\arccos(x/R)}=$$

$$=-\left.\frac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}\right|_{t=\arccos(x/R)}=-\frac{\frac{x}{R}}{\sqrt{1-x^2/R^2}}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\,(x\neq\pm R).$$

Если воспользоваться явным выражением для функции y от $x: y=\sqrt{R^2-x^2}$, то получим, разумеется, тот же результат:

$$y'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\ (x\neq\pm R).$$

Пусть существуют вторые производные функций $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ в некоторой точке t. Тогда можно вычислить вторую производную функции, заданной параметрически. Заметим, что функция $y'(x)=\left.\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right|_{t=\Phi(x)}$, в свою очередь, задана параметрически уравнениями $y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\psi_1(t)$ и $x=\varphi(t)$. Следовательно, по формуле (2) имеем

$$y''(x)=(y'(x))'_x=\left.\frac{\psi_1'(t)}{\varphi'(t)}\right|_{t=\Phi(x)}=\left.\frac{\left(\frac{\psi'(x)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)}\right|_{t=\Phi(x)}=$$

$$=\left.\frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^2}}{\varphi'(t)}\right|_{t=\Phi(x)}=\left.\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}\right|_{t=\Phi(x)}$$

Здесь использовано правило дифференцирования частного. Итак,

$$y''(x)=\left.\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}\right|_{t=\Phi(x)}\tag{3}$$

Аналогично можно получить производную от y по x любого порядка.

Пример 2. Найти $y''(x)$, если $x=\cos t$, $y=\sin t\ (0\leqslant t\leqslant\pi)$.

Решение. $y'(t)=\cos t$, $y''(t)=-\sin(t)$; $x'(t)=-\sin t$, $x''(t)=-\cos t$. Подставляя в формулу (3), найдем

$$y''(x)=\left.\frac{(-\sin t)(-\sin t)-(-\cos t)(\cos t)}{(-\sin t)^3}\right|_{t=\arccos x}=$$

$$=\left.\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{(-\sin t)^3}\right|_{t=\arccos x}=-\left.\frac{1}{\sin^3 t}\right|_{t=\arccos x}=-\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

ГЛАВА 6

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

В предыдущей главе мы познакомились с дифференцированием функций. Рассмотрим теперь методы исследования функции и построение графиков, которые широко используются как в теории, так и на практике.

§ 1. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема 6.1 (теорема Ферма)*. *Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и в некоторой точке x_0 этого*

---

*Ферма Пьер (1601—1665) — французский математик.

интервала имеет наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если в точке x_0 существует производная, то она равна нулю, т. е. $f'(x_0)=0$.

Доказательство. Пусть для определенности функция $f(x)$ в точке x_0 имеет наибольшее значение, т. е. $f(x)\leqslant f(x_0)$ для любого $x\in(a, b)$. Это значит, что $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\leqslant 0$ для любой точки $x_0+\Delta x\in(a, b)$. Поэтому, если $\Delta x>0$ $(x>x_0)$, то $\Delta y/\Delta x\leqslant 0$ и, следовательно,

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}\leqslant 0,$$

если же $\Delta x<0$ $(x<x_0)$, то $\Delta y/\Delta x\geqslant 0$ и, следовательно,

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}\geqslant 0,$$

т. е. правая производная в точке x_0 неположительная, а левая — неотрицательная. По условию, $f'(x_0)$ существует и, значит, $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$. Это возможно только в случае, когда $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=0$. Но тогда и $f'(x_0)=0$.

Аналогично рассматривается случай, когда в точке x_0 функция $f(x)$ имеет наименьшее значение. ■

Геометрический смысл теоремы Ферма состоит в том, что если в точке x_0 дифференцируемая функция $f(x)$ имеет наибольшее или наименьшее значение, то в точке $(x_0; f(x_0))$ касательная к графику функции $f(x)$ параллельна оси Ox (рис. 69).

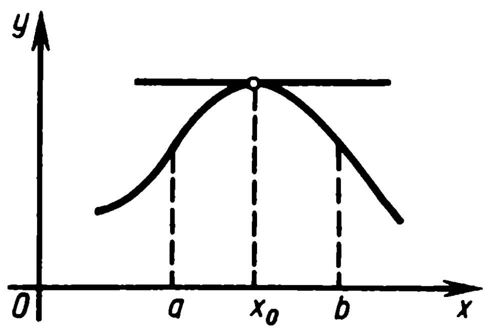


Рис. 69

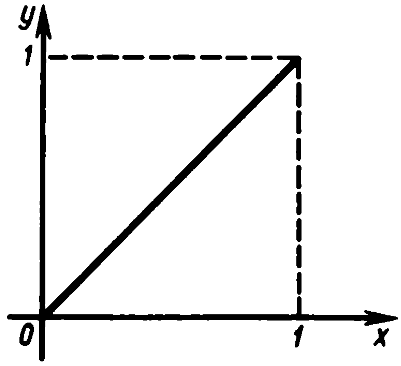


Рис. 70

Замечание. Теорема неверна, если функцию $f(x)$ рассматривать на отрезке $[a, b]$. Так, например, функция $f(x)=x$ на отрезке $[0, 1]$ в точке $x=0$ принимает наименьшее, а в точке $x=1$ — наибольшее значение, однако как в той, так и в другой точке производная в нуль не обращается, а равна единице (рис. 70).

Теорема 6.2 (теорема Ролля)*. *Пусть на $[a, b]$ определена функция $f(x)$, причем:* 1°) *$f(x)$ непрерывна на $[a, b]$;* 2°) *$f(x)$ дифференцируема на (a, b);* 3°) *$f(a)=f(b)$. Тогда существует точка $c\in(a, b)$, в которой $f'(c)=0$*

---

*Ролль Мишель (1652—1719) — французский математик.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по второй теореме Вейерштрасса она имеет на этом отрезке максимальное значение M и минимальное значение m, т. е. существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ и выполняются неравенства

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Возможны два случая: 1) $M = m$; 2) $m < M$.

В первом случае $f(x) = \text{const} = M = m$. Поэтому производная $f'(x)$ равна нулю в любой точке $[a, b]$, и теорема доказана.

Во втором случае так как $f(a) = f(b)$, то хотя бы одно из двух значений, m или M, не принимается на концах отрезка $[a, b]$, т. е. существует точка $c \in (a, b)$, в которой функция $f(x)$ принимает наибольшее или наименьшее значение на интервале (a, b). В этом случае, так как $f(x)$ дифференцируема в точке c, из теоремы Ферма следует, что $f'(c) = 0$. ■

Геометрически теорема Ролля означает, что у графика непрерывной на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемой внутри этого отрезка функции, принимающей на его концах равные значения, существует точка $(c; f(c))$, в которой касательная параллельна оси Ox (рис. 71). На рис. 71 в точке c функция $f(x)$ принимает наибольшее значение.

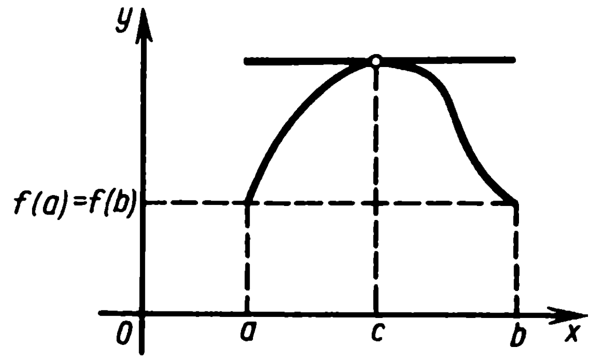


Рис. 71

Следует отметить, что все три условия теоремы Ролля существенны. Чтобы убедиться в этом, достаточно привести примеры функций, для которых выполнялись бы два условия тоеремы, а третье не выполнялось и производные которых не обращались бы в нуль ни в одной точке. Так, например, функция $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$ (см. рис. 70) удовлетворяет условиям 1° и 2°, но не удовлетворяет условию 3° и для нее не существует точки c такой, что $f'(c) = 0$. Рассмотрим еще два примера.

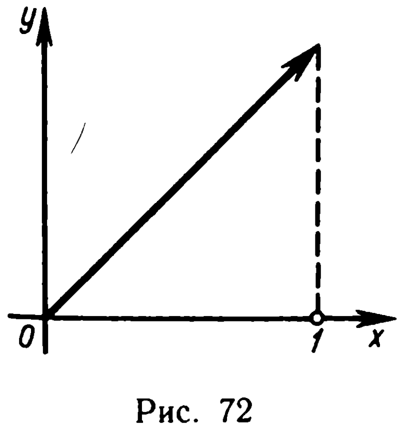


Рис. 72

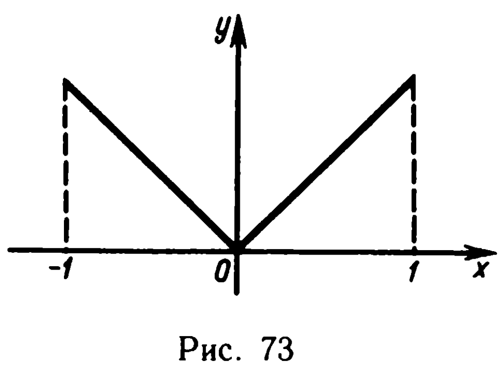


Рис. 73

Функция $f(x)$, равная x, если $0 \leqslant x < 1$, и равная 0, если $x = 1$ (рис. 72), удовлетворяет условиям 2° и 3°, но не удовлетворяет условию 1°. Функция $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$ (рис. 73) удовлетворяет условиям 1° и 3°, но не удовлетворяет условию 2°. Для этих функций также не существует точки, в которой их производная обращалась бы в нуль.

Отметим, что в математике существенность тех или иных условий доказываемых теорем проверяется построением соответствующих примеров, когда невыполнение того или иного условия теоремы приводит к тому, что утверждение теоремы становится неверным.

Теорема 6.3 (теорема Лагранжа)*. *Пусть на* $[a, b]$ *определена функция* $f(x)$, *причем:* 1°) $f(x)$ *непрерыная на* $[a, b]$; 2°) $f(x)$ *дифференцируема на* (a, b). *Тогда существует точка* $c\in(a, b)$ *такая, что справедлива формула*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

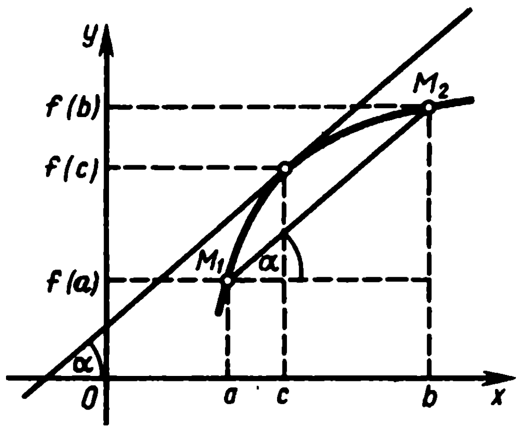


Рис. 74

Доказательство. Введем в рассмотрение на $[a, b]$ вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем трем условиям теоремы Ролля:

1) $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ (как разность двух непрерывных функций $f(x)$ и линейной функции $f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$);

2) $F(x)$ дифференцируема на (a, b), т. е. внутри $[a, b]$ имеет производную, равную $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$;

3) $F(a)=0$ и $F(b)=0$, т. е. $F(a)=F(b)$.

Следовательно, по теореме Ролля существует точка $c\in(a, b)$ такая, что $F'(c)=0$, т. е. $f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$. Отсюда получаем: $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

Установим геометрический смысл теоремы Лагранжа (рис. 74). Величина $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ является угловым коэффициентом секущей, проходящей через точки $M_1(a; f(a))$ и $M_2(b\ f(b))$ графика функции $y=f(x)$, а $f'(c)$ — угловой коэффициент касательной к графику в точке $(c; f(c))$. Из теоремы Лагранжа следует, что существует точка c такая, что касательная к графику в точке $(c; f(c))$ параллельна секущей M_1M_2 Таких точек может быть и несколько, но, по крайней мере, одна всегда существует.

Замечание 1. Равенство

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a),\ a<c<b, \tag{1}$$

*Лагранж Жозеф-Луи (1736—1813) — французский математик.

называется *формулой Лагранжа* или *формулой конечных приращений*.

Замечание 2. Так как точка c лежит между a и b, то $c = a+\theta(b-a)$, где $0<\theta<1$. Учитывая это, формулу Лагранжа можно записать в виде

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a), \text{ где } 0<\theta<1.$$

Замечание 3. Если положить $a=x$, $b=x+\Delta x$, то получим

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\,\Delta x)\,\Delta x, \text{ где } 0<\theta<1.$$

Такая запись формулы Лагранжа часто бывает удобнее, чем запись в виде (1).

Как будет показано в дальнейшем, теорема Лагранжа лежит в основе доказательства многих формул и теорем анализа.

Теорема 6.4 (теорема Коши). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b). Пусть, кроме того, $g'(x)\neq 0$. Тогда существует точка $c\in(a, b)$ такая, что справедлива формула*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{2}$$

Доказательство. Покажем сначала, что $g(b)\neq g(a)$, т. е. что формула (2) имеет смысл. Действительно, если допустить, что $g(b)=g(a)$, то по теореме Ролля для функции $g(x)$ найдется точка $\xi\in(a, b)$, в которой $g'(\xi)=0$. А это противоречит условию, что $g'(x)\neq 0$ на (a, b). Перейдем к доказательству формулы (2).

Рассмотрим на $[a, b]$ вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

Нетрудно заметить, что $F(x)$ на $[a, b]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. В самом деле, $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), и, кроме того, подстановка $x=a$ и $x=b$ дает $F(a)=0$ и $F(b)=0$, т. е. $F(a)=F(b)$. По теореме Ролля для $F(x)$ существует точка c, $a<c<b$, такая, что $F'(c)=0$.

Так как $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$, то

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0.$$

Откуда, учитывая, что $g'(c)\neq 0$, получаем формулу (2). ■

Замечание. Формула (2) называется *формулой Коши* или *обобщенной формулой конечных приращений*.

§ 2. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

1. Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Будем говорить, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to a$ есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

Раскрыть эту неопределенность — значит вычислить предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, если он существует, или установить, что он не существует. Следующая теорема устанавливает правило для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Теорема 6.5. (теорема Лопиталя)*. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Пусть, далее, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$*** и $g'(x) \neq 0$ в указанной окрестности точки a. Тогда, если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива формула*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность значений аргумента, сходящаяся к точке a, причем $x_n \neq a$. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a, положив их равными нулю, т. е. $f(a) = g(a) = 0$. Тогда, очевидно, функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, x_n]$, дифференцируемы на (a, x_n) и, по условию, $g'(x) \neq 0$. Таким образом, для $f(x)$ и $g(x)$ выполнены все условия теоремы Коши на $[a, x_n]$, т. е. внутри $[a, x_n]$ существует точка ξ_n такая, что

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}, \quad \xi_n \in (a, x_n).$$

По доопределению, $f(a) = g(a) = 0$, следовательно,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}, \quad \xi_n \in (a, x_n). \tag{1}$$

Пусть теперь в формуле (1) $n \to \infty$. Тогда, очевидно, $\xi_n \to a$ при $n \to \infty$ (рис. 75). Так как $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, то правая часть формулы (1) имеет при $n \to \infty$ предел, равный $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Следовательно, при $n \to \infty$ существует предел и левой части формулы (1), причем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

---

*Лопиталь Гильом Франсуа (1661—1704) — французский математик.

**Теорема остается справедливой и в случае, когда $x \to a-$ или $x \to a+$.

Так как $\{x_n\}$ — произвольная последовательность значений аргумента, сходящаяся к a, то отсюда заключаем, что $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ существует и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. ■

Доказанную теорему обычно называют *правилом Лопиталя.*

Замечание 1. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя можно применить повторно. При этом получаем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Замечание 2. Теорема остается верной и в случае, когда $x\to\infty$, $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$. В самом деле, пусть, например, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует (конечный или бесконечный). Сделаем подстановку $x=1/t$; тогда $t\to 0$ при $x\to\infty$ и $f(x)=f(1/t)\to 0$, $g(x)=g(1/t)\to 0$ при $t\to 0$. Применяя к функциям $f(1/t)$ и $g(1/t)$ теорему 6.5 и правило дифференцирования сложной функции, получаем

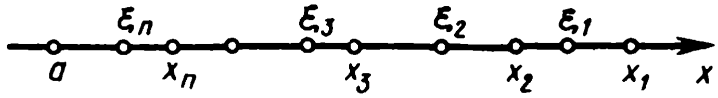


Рис. 75

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Рассмотрим примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\lim\limits_{x\to 0}e^x=1.$

2. Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$. Будем говорить, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to a$ есть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, если

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty,\ +\infty \text{ или } -\infty.$$

Для этой неопределенности справедливо утверждение, аналогичное теореме 6.5, а именно: если в формулировке теоремы заменить требование $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ на условие $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, то теорема останется справедливой.

Рассмотрим примеры.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1/x)}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$

3. $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}\ln x=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-1/2}}=$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{(-1/2)\,x^{-3/2}}=-2\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}=0.$$

3. Другие виды неопределенностей и их раскрытие. Неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ можно свести к неопределенностям $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Покажем это на примерах.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$.

Решение. Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Но $x\ln x=$ $=\frac{\ln x}{1/x}$, и получена неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0+} x=0.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sec x-\operatorname{tg} x)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Но $\sec x-\operatorname{tg} x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin x}{\cos x}$, и при том же условии $x\to\pi/2$ получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Воспользовавшись правилом Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to\pi/2}(\sec x-\operatorname{tg} x)=\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

И наконец, рассмотрим неопределенности вида 0^0, 1^∞, ∞^0. Такие неопределенности имеют место при рассмотрении функций $y=f(x)^{g(x)}$, если при $x\to a$ функция $f(x)$ стремится соответственно к 0, 1 и ∞, $g(x)$ — соответственно к 0, ∞ и 0. Эти неопределенности с помощью тождества

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

сводятся к неопределенности вида $0\cdot\infty$, которая уже рассмотрена.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

Решение. Имеем неопределенность вида 0^0. Но $x^x=e^{x\ln x}$, и в показателе степени получена неопределенность вида $0\cdot\infty$, которая нами уже рассмотрена (см. пример 1). Следовательно,

$$\lim_{x\to 0+} x^x=\lim_{x\to 0+} e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x}=e^0=1.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида 1^∞. Но

$$(1+x^2)^{1/(e^x-1-x)}=e^{[\ln(1+x^2)]/(e^x-1-x)},$$

и в показателе степени получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x/(1+x^2)}{e^x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{(e^x-1)(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{e^x(1+x^2)+(e^x-1)2x}=\frac{2}{1}=2.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}}=e^2.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида ∞^0. Но

$$(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}=e^{2\cos x\ln\operatorname{tg}x}=e^{\frac{2\ln\operatorname{tg}x}{1/(\cos x)}},$$

и в показателе степени получена неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\ln\operatorname{tg}x}{1/(\cos x)}=2\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\sec x}=2\lim_{x\to\pi/2}\frac{1/(\operatorname{tg}x)\sec^2 x}{\sec x\operatorname{tg}x}=$$

$$=2\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x}=2\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec x\operatorname{tg}x}{2\operatorname{tg}x\sec^2 x}=\lim_{x\to\pi/2}\cos x=0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}=e^{\lim\limits_{x\to\pi/2}2\cos x\ln\operatorname{tg}x}=e^0=1.$$

§ 3. Формула Тейлора

Рассмотрим одну из главных формул математического анализа, имеющую многочисленные применения как в самом анализе, так и в смежных дисциплинах.

1. Формула Тейлора. Теорема 6.6 (теорема Тейлора)*. *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке a и некоторой ее окрестности производные порядка $n+1$**. Пусть x — любое значение аргумента из указанной окрестности, $x\neq a$. Тогда между точками a и x найдется точка ξ такая, что справедлива следующая формула:*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \qquad (1)$$

---

* Тейлор Брук (1685—1731) — английский математик.

**Отсюда следует, что сама функция $f(x)$ и ее производные до порядка n непрерывны и дифференцируемы в этой окрестности.

Доказательство. Обозначим через $\varphi(x, a)$ многочлен относительно x степени n, стоящий в правой части формулы (1), т. е. положим

$$\varphi(x, a)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

(Он называется многочленом Тейлора степени n для функции $f(x)$.)

Далее обозначим через $R_{n+1}(x)$ разность

$$R_{n+1}(x)=f(x)-\varphi(x, a).$$

Теорема будет доказана, если установить, что

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\quad a<\xi<x.$$

Фиксируем любое значение x из указанной окрестности. Для определенности считаем $x>a$. Обозначим через t переменную величину, изменяющуюся на отрезке $a\leqslant t\leqslant x$, и рассмотрим на отрезке $[a, x]$ вспомогательную функцию

$$F(t)=f(x)-\varphi(x, t)-\frac{(x-t)^{n+1}R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}. \tag{2}$$

Функция $F(t)$ удовлетворяет на $[a, x]$ всем условиям теоремы Ролля: 1) из формулы (2) и из условий, наложенных на функцию $f(x)$, вытекает, что $F(t)$ непрерывна и дифференцируема на $[a, x]$, так как $f(t)$ и ее производные до порядка n непрерывны и дифференцируемы на $[a, x]$;

2) полагая в (2) $t=a$, имеем

$$F(a)=f(x)-\varphi(x, a)-R_{n+1}(x)=R_{n+1}(x)-R_{n+1}(x)=0.$$

Полагая в (2) $t=x$, получаем

$$F(x)=f(x)-f(x)-\frac{f'(x)}{1!}(x-x)-\frac{f''(x)}{2!}(x-x)^2-\ldots$$
$$\ldots-\frac{f^{n)}(x)}{n!}(x-x)^n-\frac{(x-x)^{n+1}R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}=0.$$

Таким образом, условие $F(a)=F(x)$ выполнено.

На основании теоремы Ролля внутри отрезка $[a, x]$ существует точка ξ такая, что

$$F'(\xi)=0. \tag{3}$$

Вычислим производную $F'(t)$. Дифференцируя равенство (2) по t, имеем

$$F'(t)=-f'(t)+\frac{f'(t)}{1!}-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}2(x-t)-\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1}-\frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(n+1)(x-t)^nR_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}.$$

Нетрудно заметить, что все члены в правой части равенства, за исключением двух последних, взаимно уничтожаются. Таким образом,

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}. \qquad (4)$$

Полагая в (4) $t=\xi$ и используя равенство (3), получаем

$$F'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{(n+1)(x-\xi)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0,$$

откуда

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \blacksquare$$

Формула (1) называется *формулой Тейлора,* а выражение для $R_{n+1}(x)$ — *остаточным членом в форме Лагранжа.* Его можно переписать в другом виде. Так как точка $\xi \in (a, x)$, то найдется такое число θ из интервала $0<\theta<1$, что $\xi = a+\theta(x-a)$, и остаточный член принимает вид

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, 0<\theta<1.$$

Эту форму остаточного члена наиболее часто используют в приложениях.

2. Другая запись формулы Тейлора и остаточного члена. Часто формулу Тейлора (1) записывают в ином виде. Положим в (1) $a=x_0$, $x-a=\Delta x$, $x=x_0+\Delta x$. Тогда

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}, 0<\theta<1. \qquad (5)$$

При $n=0$ из (5) получается формула Лагранжа

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x+\theta\Delta x)\Delta x.$$

Покажем, что если функция $f^{(n+1)}(x)$ ограничена в окрестности точки a, то остаточный член $R_{n+1}(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $(x-a)^n$ при $x\to a$:

$$\lim_{x\to a}\frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\frac{(x-a)^{n+1}}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a) = 0,$$

так как функция $f^{(n+1)}(\xi)$ ограничена, а $(x-a)\to 0$ при $x\to a$. Таким образом,

$$R_{n+1}(x) = o\left[(x-a)^n\right] \text{ при } x\to a. \qquad (6)$$

Формула (6) называется *остаточным членом в форме Пеано**.

3. Формула Маклорена. Формулой Маклорена** называют формулу Тейлора (1) при $a=0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x).$$

---

* Пеано Джузеппе (1858—1932) — итальянский математик.
** Маклорен Колин (1698—1746) — шотландский математик.

Остаточный член имеет вид:

1) в форме Лагранжа $R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1$;

2) в форме Пеано $R_{n+1}(x)=o(x^n)$.

4. Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена.

1) $f(x)=e^x$. Так как

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n+1)}(x)=e^x,$$
$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n+1)}(0)=1,$$

то формула Маклорена имеет вид

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n). \tag{7}$$

2) $f(x)=\sin x$. Так как

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(n)}(0)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=\begin{cases}0 & \text{при } n \text{ четном},\\ (-1)^{(n-1)/2} & \text{при } n \text{ нечетном},\end{cases}$$

то формула Маклорена имеет вид

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n}). \tag{8}$$

3) $f(x)=\cos x$. Так как

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(n)}(0)=\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=\begin{cases}0 & \text{при } n \text{ нечетном},\\ (-1)^{n/2} & \text{при } n \text{ четном},\end{cases}$$

то формула Маклорена имеет вид

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}). \tag{9}$$

В формуле (8) остаточный член записан в виде $o(x^{2n})$, а не в виде $o(x^{2n-1})$, так как следующий за последним член равен нулю [то же самое относится к формуле (9)].

4) $f(x)=(1+x)^\alpha$, где α — вещественное число. Так как

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$
$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1),$$

то формула Маклорена имеет вид

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_{n+1}(x),$$

где остаточный член в форме Лагранжа равен

$$R_{n+1}(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1},\ 0<\theta<1.$$

в частном случае, когда $\alpha = n$ — натуральное число, $f^{(n+1)}(x)=0$, следовательно, $R_{n+1}(x)=0$, мы получаем известную из элементарной математики *формулу бинома Ньютона*

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n. \qquad (10)$$

Приведенные выше разложения показывают, что с помощью формулы Маклорена функции можно с определенной степенью точности заменять многочленами, являющимися наиболее простыми элементарными функциями. Над многочленами удобно выполнять арифметические действия, нетрудно вычислить значение многочлена в любой точке и т. д. Формулы Тейлора и Маклорена позволяют приближенно заменять многочленами и более сложные функции. Кроме того, эти формулы имеют широкий круг приложений. Мы ограничимся рассмотрением двух.

5. Использование формулы Маклорена для вычисления пределов. Формула Тейлора является эффективным средством для вычисления пределов функций, с которыми часто приходится иметь дело при исследовании функций.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

Решение. По формуле (8) при $n=2$ имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3!} + \frac{o(x^4)}{x^3}}{1} =$$

$$= -\frac{1}{3!} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{3!} + 0 = -\frac{1}{6}.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^3 \sin x}$.

Решение. По формулам (7), (8) и (9) имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^3 \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2/2 + x^4/8 + o(x^4) - 1 + x^2/2 - x^4/24}{x^3(x + o(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4/8 - x^4/24 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{1/8 - 1/24 + \alpha(x)}{1 + \alpha(x)} = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

(здесь символом $\alpha(x)$ обозначена величина $\dfrac{o(x^4)}{x^4}$, являющаяся бесконечно малой при $x \to 0$).

6. Вычисление числа е. В п. 2, § 3, гл. 2 было введено число е как предел последовательности $\{(1+1/n)^n\}$ и получена грубая оценка $2 \leqslant e \leqslant 3$.

Покажем, как вычислить число е с любой необходимой точностью. Для этого запишем формулу (7) с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, 0 < \theta < 1. \qquad (11)$$

Если заменить функцию e^x ее многочленом Тейлора степени n, то получим приближенное равенство

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, \tag{12}$$

абсолютная погрешность которого

$$\left|R_{n+1}(x)\right| = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}|x|^{n+1},\ 0 < \theta < 1.$$

Если рассматривать функцию e^x для $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$\left|R_{n+1}(x)\right| \leqslant \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}. \tag{13}$$

Полагая в (12) $x=1$, получаем приближенное значение числа e:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

При этом абсолютная погрешность меньше $3/(n+1)!$ Если требуется вычислить значение e с точностью до 0,001, то число n определяется из неравенства $\frac{3}{(n+1)!} < 0{,}001$, или $(n+1)! > 3000$. Следовательно, если взять $n=6$, то требуемое неравенство удовлетворяется.

Таким образом, используя формулу Маклорена, можно вычислить число e с любой точностью, при этом алгоритм вычисления числа e, основанный на формулах (11) и (13), легко реализуется на ЭВМ.

§ 4. Исследование поведения функций и построение графиков

1. Признак монотонности функции. Теорема 6.7. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$ на (a, b), то функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на (a, b).*

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай $f'(x) \geqslant 0$. Пусть x_1 и x_2 — две произвольные точки из (a, b) и $x_1 < x_2$; тогда на отрезке $[x_1, x_2]$ выполняются все условия теоремы Лагранжа, согласно которой имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),\ c \in (x_1, x_2).$$

По условию, $f'(c) \geqslant 0$, $x_2 - x_1 > 0$, поэтому $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$ или $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, т. е. функция $f(x)$ не убывает на (a, b).

Доказательство для случая $f'(x) \leqslant 0$ аналогично. ■

Замечание. Точно так же можно доказать, что если $f'(x) > 0$ (< 0) на (a, b), то $f(x)$ возрастает (убывает) на (a, b).

2. Отыскание точек локального экстремума функции. Определение. *Точка x_0 называется точкой строгого локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если для всех x из некоторой δ-окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ при $x \neq x_0$* (рис. 76).

Локальный максимум (max) и локальный минимум (min) объединяются общим названием *локальный экстремум.*

Из определения следует, что понятие экстремума носит локальный характер в том смысле, что неравенство $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$) может и не выполняться для всех значений x в области определения функции, а должно выполняться лишь в некоторой окрестности точки x_0. Очевидно, функция может иметь несколько локальных максимумов и несколько локальных минимумов, причем может так случиться, что иной локальный максимум окажется меньше какого-то локального минимума.

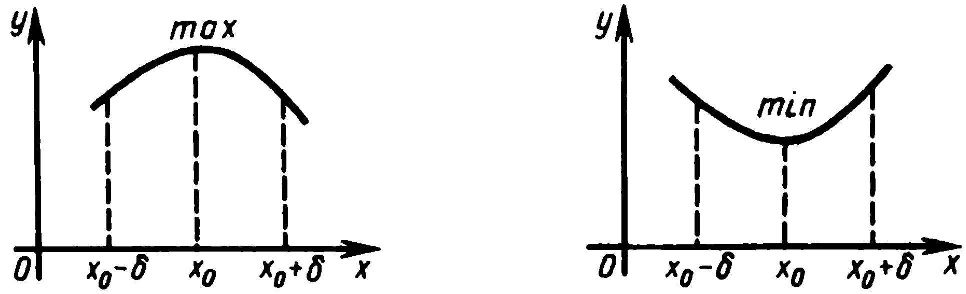


Рис. 76

Теорема 6.8 (необходимое условие локального экстремума). *Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0)=0$.*

Доказательство. Так как в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный экстремум, то существует такой интервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, в котором значение $f(x_0)$ является наибольшим или наименьшим среди всех других значений этой функции. Тогда по теореме Ферма производная функции в точке x_0 равна нулю, т. е. $f'(x_0)=0$. ■

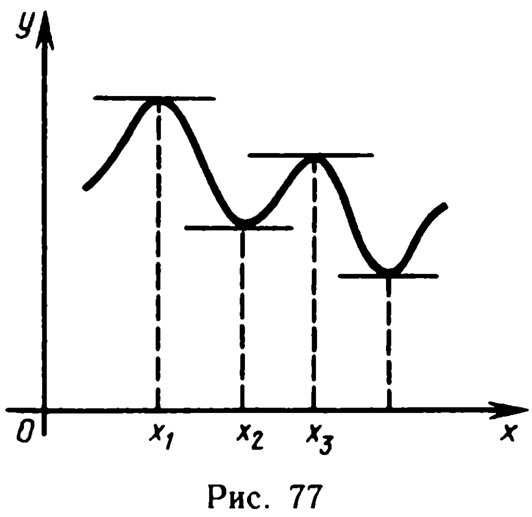


Рис. 77

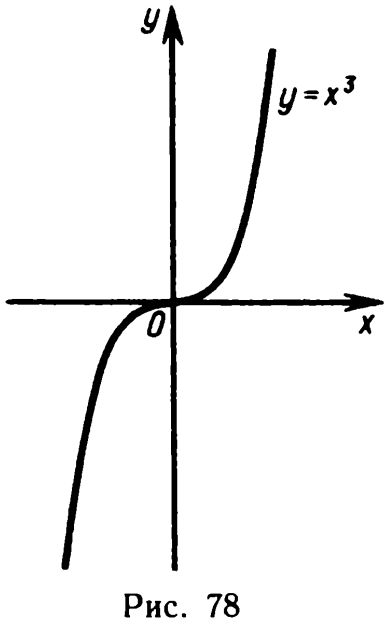


Рис. 78

Теорема 6.8 имеет следующий геометрический смысл. Если x_1, x_2 и x_3 — точки локального экстремума и в соответствующих точках графика существуют касательные, то эти касательные параллельны оси Ox (рис. 77).

Иногда такие точки называют стационарными; мы будем называть их *точками возможного экстремума.* Если точка x_0 — точка возможного экстремума, т. е. $f'(x_0)=0$, то она может и не быть точкой локального максимума или минимума. Например, если $f(x)=x^3$, то $f'(x)=3x^2=0$ при $x=0$, но, тем не менее, в точке $x=0$ нет локального экстремума (рис. 78). Установим достаточное условие существования локального экстремума. Этому посвящается следующая теорема.

Теорема 6.9 (достаточное условие локального экстремума). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки x_0. Тогда, если $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) для всех x из $(x_0-\delta,\ x_0)$, а $f'(x)<0$ ($f'(x)>0$) для всех x из $(x_0,\ x_0+\delta)$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный максимум (минимум); если же $f'(x)$ во всей δ-окрестности точки x_0 имеет один и тот же знак, то в точке x_0 локального экстремума нет.*

Другими словами, если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «—», то x_0 — точка локального максимума; если $f'(x)$ в точке x_0 меняет знак с «—» на «+», то x_0 — точка локального минимума; если же $f'(x)$ в точке x_0 знака не меняет, то в точке x_0 экстремума не существует.

Доказательство. Пусть $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «—» и пусть $x\in(x_0-\delta,\ x_0)$. Применим формулу Лагранжа к функции $f(x)$ на отрезке $[x,\ x_0]$. Получаем

$$f(x_0)-f(x)=f'(c)(x_0-x),\quad c\in(x,x_0).$$

Так как $f'(x)>0$ на $(x_0-\delta,\ x_0)$, то $f'(c)>0$, и, кроме того, $x_0-x>0$, следовательно,

$$f(x_0)-f(x)>0,\ \text{или}\ f(x_0)>f(x). \tag{1}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $x\in(x_0,\ x_0+\delta)$. Применим формулу Лагранжа к функции $f(x)$ на отрезке $[x_0,\ x]$. Получаем

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0),\ c\in(x_0,x).$$

Так как $f'(x)<0$ на $(x_0,\ x_0+\delta)$, то $f'(c)<0$, и, кроме того, $x-x_0>0$, следовательно,

$$f(x)-f(x_0)<0,\ \text{или}\ f(x_0)>f(x). \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2) следует, что в рассматриваемой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ при $x\neq x_0$, а это означает, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный максимум.

Аналогично рассматривается случай перемены знака $f'(x)$ с «—» на «+».

Осталось рассмотреть случай, когда $f'(x)$ знака не меняет. Пусть $f'(x)>0$ в некоторой окрестности $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$; тогда по теореме 6.7 функция $f(x)$ не убывает на $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, т. е. для любых $x<x_0$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$, а для любых $x>x_0$ выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$. Это означает, что точка x_0 не является точкой локального экстремума. ■

З а м е ч а н и е. Теорема 6.9 остается справедливой, если функция $f(x)$ в самой точке x_0 не дифференцируема, а только непрерывна. Так, например, функция $f(x)=|x|$ в точке $x=0$ непрерывна, но не дифференцируема.

В качестве примера рассмотрим вопрос об отыскании точек локального экстремума функции $f(x)=x^3-3x$. Находим производную: $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$. Решая уравнение $3(x^2-1)=0$, получаем две точки возможного экстремума: $x_1=-1$ и $x_2=1$. Дальнейшее исследование удобно вести, нарисовав вспомогательный чертеж (рис. 79). Отметив на нем точки $x_1=-1$ и $x_2=1$ и исследовав знак $f'(x)$ в окрестности этих точек, получаем: $f(x)$ в точке $x_1=-1$ имеет локальный максимум, а в точке $x_2=1$ — локальный минимум. Далее находим: $y_{\max}=f(-1)=2$, $y_{\min}=f(1)=-2$.

На рис. 79 видны и интервалы монотонности $f(x)$: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$, причем в первом и третьем из них функция возрастает, а во втором — убывает.

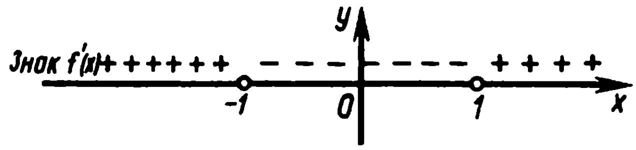


Рис. 79

3. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Тогда существует касательная к графику функции $y=f(x)$ в любой точке $M(x;\ f(x))$ этого графика $(a<x<b)$, причем касательная не параллельна оси Oy, поскольку ее угловой коэффициент, равный $f'(x)$, конечен.

Определение 1. *Будем говорить, что график функции $y=f(x)$ имеет на (a, b) выпуклость, направленную вниз (вверх), если он расположен не ниже (не выше) любой касательной к графику функции на (a, b)* (рис. 80).

Т е о р е м а 6.10. *Если функция $y=f(x)$ имеет на интервале (a, b) вторую производную и $f''(x)\geqslant 0$ $(f''(x)\leqslant 0)$ во всех точках (a, b), то график функции $y=f(x)$ имеет на (a, b) выпуклость, направленную вниз (вверх).*

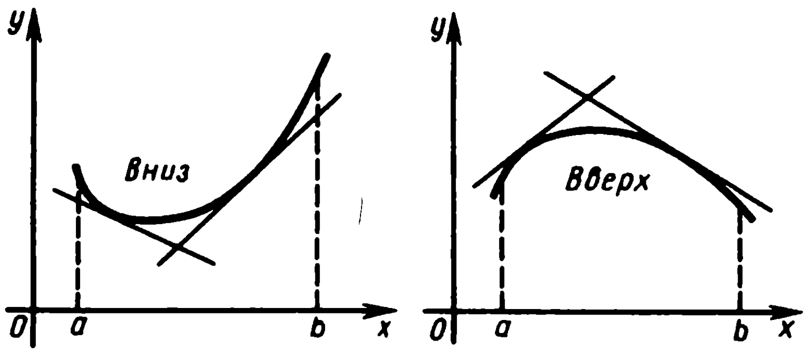


Рис. 80

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определенности рассмотрим случай $f''(x)\geqslant 0$ на (a, b). Обозначим через c произвольную точку (a, b) (рис. 81). Требуется доказать, что график функции $y=f(x)$ лежит не ниже касательной, проходящей через точку $M(c;\ f(c))$.

Запишем уравнение этой касательной, обозначая текущую ординату ее точек через Y: $Y-f(c)=f'(c)(x-c)$ или

$$Y=f(c)+f'(c)(x-c). \tag{3}$$

Разложим функцию $f(x)$ в окрестности точки c по формуле Тейлора при $n=1$. Получим

$$y=f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2,\quad \xi\in(c,x). \tag{4}$$

Формула (4) справедлива для любого x из (a, b).

Вычитая равенство (3) из равенства (4), имеем

$$y-Y=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2. \tag{5}$$

Так как, по условию, $f''(x)\geqslant 0$ на (a, b), то правая часть равенства (5) неотрицательна, т. е. $y-Y\geqslant 0$ для всех x из (a, b) или $y\geqslant Y$. Последнее неравенство и доказывает, что график функции $y=f(x)$ всюду в пределах (a, b) лежит не ниже касательной (3).

Аналогично доказывается теорема для случая $f''(x)\leqslant 0$. ■

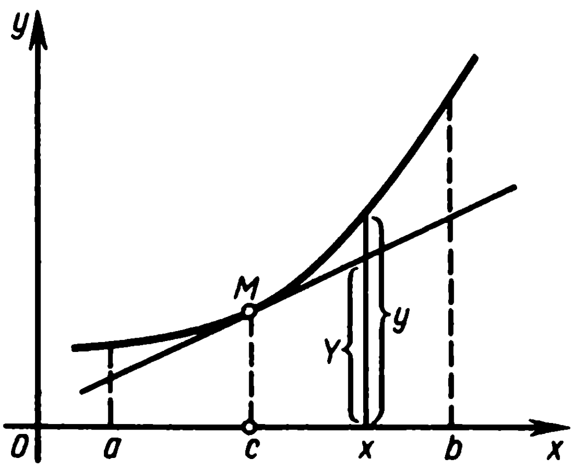


Рис. 81

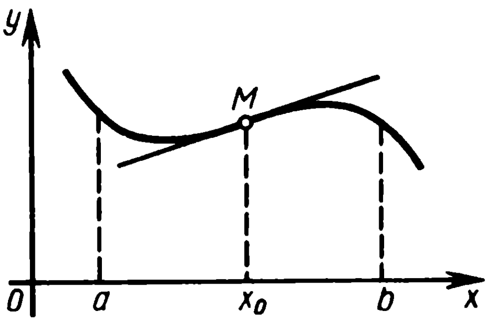


Рис. 82

Определение 2. *Точка $M(x_0;\ f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции $y=f(x)$, если в точке M график имеет касательную, и существует такая окрестность точки x_0, в пределах которой график функции $y=f(x)$ слева и справа от точки x_0 имеет разные направления выпуклости.*

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает график функции, так как с одной стороны от этой точки график лежит под касательной, а с другой — над нею, т. е. в окрестности точки перегиба график функции геометрически переходит с одной стороны касательной на другую и «перегибается» через нее. Отсюда и произошло название «точка перегиба» (рис. 82).

Теорема 6.11 (необходимое условие точки перегиба). *Пусть график функции $y=f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0;\ f(x_0))$ и пусть функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную. Тогда $f''(x)$ в точке x_0 обращается в нуль, т. е. $f''(x_0)=0$.*

Доказательство. Предположим обратное, т. е. допустим, что $f''(x_0) \neq 0$. Тогда в силу непрерывности второй производной по теореме 4.8 об устойчивости знака непрерывной функции существует окрестность точки x_0, в которой $f''(x)<0$ ($f''(x)>0$), и, значит, согласно теореме 6.10 график функции $y=f(x)$ имеет определенное направление выпуклости в этой окрестности. Но это противоречит наличию перегиба в точке $M(x_0;\ f(x_0))$ (рис. 82). Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Следует заметить, что не всякая точка $M(x_0;\ f(x_0))$, для которой $f''(x_0)=0$, является точкой перегиба. Например, график функции $f(x)=x^4$ не имеет перегиба в точке $(0;\ 0)$, хотя $f''(x)=12x^2=0$ при $x=0$ (рис. 83). Поэтому равенство нулю второй производной является лишь необходимым условием перегиба. Точки $M(x_0;\ f(x_0))$ графика, для которых $f''(x_0)=0$, будем называть *критическими*. Необходимо дополнительно исследовать вопрос о наличии перегиба в каждой критической точке, для чего следует установить достаточное условие перегиба.

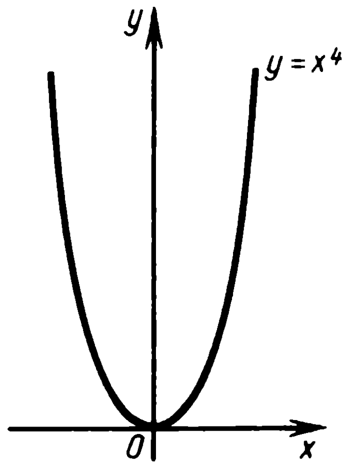


Рис. 83

Теорема 6.12 (достаточное условие точки перегиба). *Пусть функция $y=f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0. Тогда, если в пределах указанной окрестности $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, то график $y=f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0;\ f(x_0))$.*

Доказательство. Из того, что $f''(x)$ слева и справа от точки x_0 имеет разные знаки, на основании теоремы 6.10 заключаем, что направление выпуклости графика функции слева и справа от точки x_0 является различным. Это и означает наличие перегиба в точке $M(x_0;\ f(x_0))$. ■

Замечание. Теорема остается верной, если $f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0, за исключением самой точки x_0, и существует касательная к графику функции в точке M. Тогда, если в пределах указанной окрестности $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, то график функции $y=f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0;\ f(x_0))$. Доказательство данного факта аналогично доказательству теоремы.

Рассмотрим пример: $f(x)=x^{1/3}$. Эта функция в точке $x=0$ имеет бесконечную производную, а касательная к графику функции в точке $O(0;\ 0)$ совпадает с осью Oy. Вторая производная в точке $x=0$ не существует. Однако график функции $y=x^{1/3}$ имеет перегиб в точке $O(0; 0)$, так как вторая производная $f''(x)=2/(9x^{5/3})$ имеет слева и справа от точки $x=0$ разные знаки (рис. 84).

Итак, вопрос о направлении выпуклости и точках перегиба графика функции исследуется с помощью второй производной.

В качестве примера возьмем функцию $f(x)=x^3-3x$, которую начали рассматривать в п. 2. Знак второй производной будем отмечать на вспомогательном чертеже, изображенном на рис. 79. Находим вторую производную: $f''(x)=6x$. Из уравнения $6x=0$ получаем одну критическую точку: $O(0;\ 0)$. Отметив точку $x=0$ на вспомогательном чертеже (рис. 85) и исследовав знак $f''(x)$ в ее окрестности, получаем: слева от точки $x=0$ $f''(x)<0$ (выпуклость графика направлена вверх), а справа — $f''(x)>0$ (выпуклость графика направлена вниз), т. е. точка $O(0;\ 0)$ является точкой перегиба графика рассматриваемой функции. Этот график схематически изображен на рис. 86.

Докажем теперь, что часть эллипса $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$, расположенная в верхней полуплоскости ($y\geqslant0$), имеет на интервале $(-a,\ a)$ выпуклость, направленную вверх. В самом деле, из уравнения эллипса имеем $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Далее находим: $y'=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $y''=-\frac{ba}{(a^2-x^2)^{3/2}}$. Из выражения для второй производной вытекает, что она отрицательная на интервале $(-a,\ a)$. Значит, данная кривая на всем интервале $(-a,\ a)$ имеет выпуклость, направленную вверх (см. рис. 33).

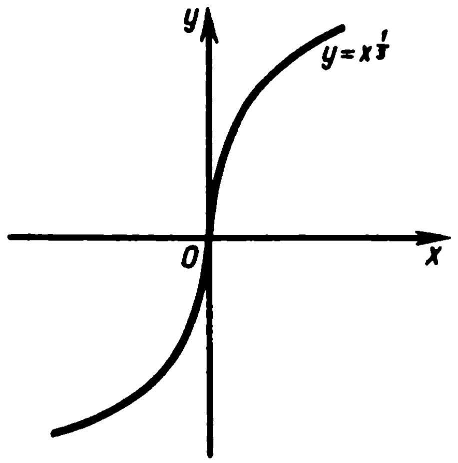


Рис. 84

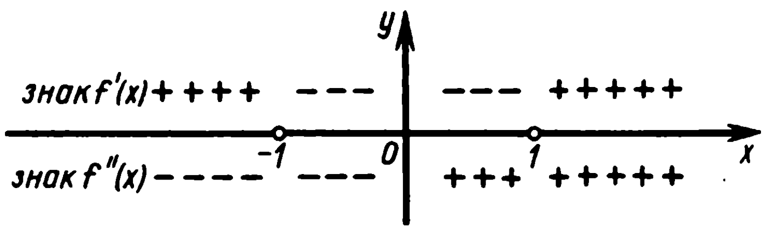


Рис. 85

Аналогично можно показать (сделайте это самостоятельно), что часть гиперболы $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\right)$, расположенная в верхней полуплоскости, на интервалах $(a,\ +\infty)$ и $(-\infty,\ -a)$ имеет выпуклость, направленную вверх.

4. Асимптоты графика функции. При исследовании поведения функции на бесконечности, т. е. при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ или вблизи точек разрыва 2-го рода, часто оказывается, что график функции сколь угодно близко приближается к той или иной прямой. Такие прямые называют *асимптотами**.

Существуют три вида асимптот: *вертикальные, горизонтальные и наклонные.*

Определение 1. *Прямая $x=x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.*

---

*Понятие асимптоты уже встречалось в аналитической геометрии при рассмотрении гиперболы (см. гл. 3 § 6, п. 2).

В этом случае расстояние от точки $M(x;\ f(x))$ до прямой $x=x_0$ равно $d=\sqrt{(x-x_0)^2+(f(x)-f(x))^2}=|x-x_0|$ и, следовательно, $d\to 0$ при $x\to x_0$.

Например, график функции $y=f(x)=1/x$ (рис. 87) имеет вертикальную асимптоту $x=0$, так как $f(x)\to+\infty$ при $x\to 0+$ и $f(x)\to-\infty$ при $x\to 0-$.

Определение 2. *Прямая $y=A$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, если* $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x)=A$.

В этом случае расстояние от точки $M(x;\ f(x))$ до прямой $y=A$ равно $d=\sqrt{(x-x)^2+(f(x)-A)^2}=|f(x)-A|$ и, следовательно, $d\to 0$ при $x\to\infty$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)-A|=0$.

Например, график рассмотренной выше функции $y=1/x$ имеет горизонтальную асимптоту $y=0$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$, так как $1/x\to 0$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

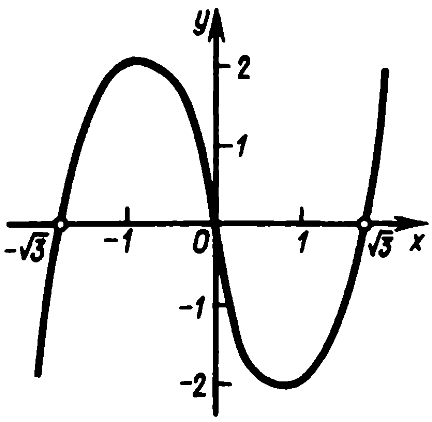


Рис. 86

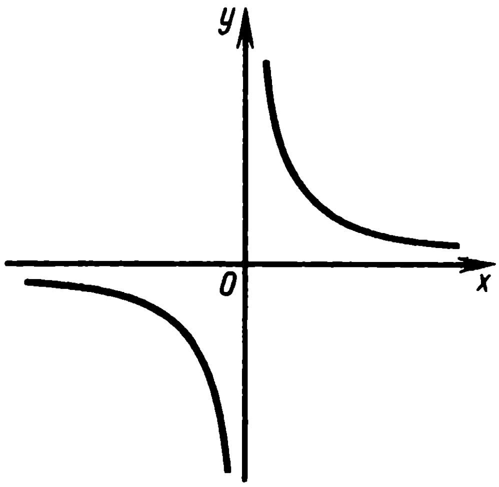


Рис. 87

Определение 3. *Прямая $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ называется наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x=+\infty$ $(x\to-\infty)$, если функцию $f(x)$ можно представить в виде*

$$f(x)=kx+b+\alpha(x), \tag{6}$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$.

Рассмотрим геометрический смысл наклонной асимптоты. Для определенности разберем случай, когда $x\to+\infty$. (Случай $x\to-\infty$ рассматривается аналогично).

Пусть $M(x;\ y)$ — точка графика функции $y=f(x)$ и пусть прямая $\tilde{y}=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции при $x\to+\infty$. Текущую ординату точки на асимптоте обозначим через $\tilde{y}$, точку на асимптоте — через $N(x;\ \tilde{y})$ (рис. 88). Тогда $|MN|=|y-\tilde{y}|=|f(x)-(kx+b)|=|\alpha(x)|\to 0$ при $x\to+\infty$. Опустим из точки M перпендикуляр MP на асимптоту. Расстояние d от точки M до асимптоты равно $|MP|=|MN|\cos\alpha$, где α — угол между асимптотой и осью Ox, и, следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty} d=0$.

Таким образом, расстояние от точки $M(x;\ y)$ графика функции до асимптоты стремится к нулю при $x \to +\infty$, т. е. график функции неограниченно приближается к асимптоте при $x \to +\infty$.

Рассмотрим способ отыскания наклонной асимптоты, т. е. способ определения чисел k и b в уравнении асимптоты. Разделив равенство (6) на x и перейдя к пределу при $x \to +\infty$, получим

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right] = k.$$

Итак,

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{7}$$

Далее, из соотношения (6) получаем: $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x \to +\infty} [b + \alpha(x)] = b$. Таким образом,

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx]. \tag{8}$$

Доказано, что если прямая $\tilde{y} = kx + b$ — наклонная асимптота, то числа k и b находятся по формулам (7) и (8). Обратно, если оба предела (7) и (8) существуют, причем $k \neq 0$, то прямая $\tilde{y} = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$.

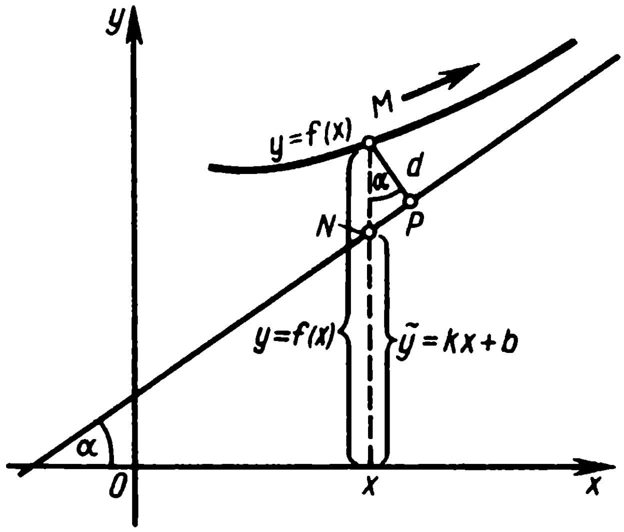


Рис. 88

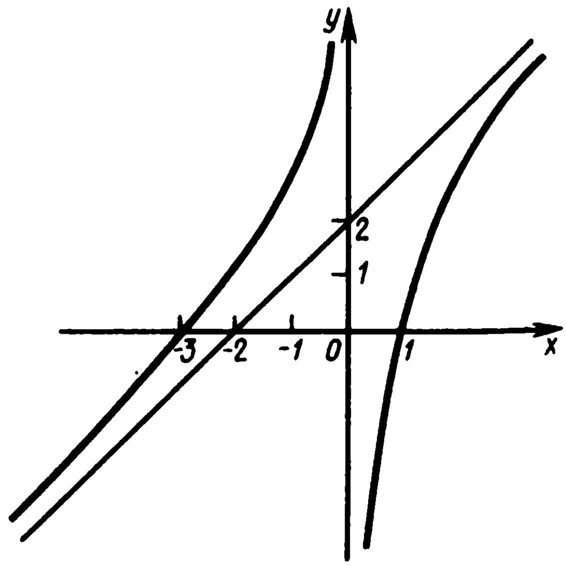


Рис. 89

В самом деле, полагая $\alpha(x) = f(x) - kx - b$ и используя равенство (8), получаем, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$. Следовательно, справедливо равенство (6): $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$, т. е. прямая $\tilde{y} = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции при $x \to +\infty$.

Практически целесообразно искать асимптоты в следующем порядке: 1) вертикальные асимптоты; 2) горизонтальные асимптоты; 3) наклонные асимптоты.

Пример 1. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x}$.

Решение. 1) Находим вертикальные асимптоты. Точка $x=0$ — точка разрыва 2-го рода данной функции, причем $y\to+\infty$ при $x\to0-$, $y\to-\infty$ при $x\to0+$. Следовательно, ось ординат $(x=0)$ — вертикальная асимптота.

2) Находим горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{x^2+2x-3}{x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left(x+2-\frac{3}{x}\right)=+\infty\,(-\infty),$$

следовательно, горизонтальных асимптот нет.

3) Находим наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=1,$$

$$b=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}[f(x)-kx]=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left[\frac{x^2+2x-3}{x}-x\right]=$$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left(\frac{2x-3}{x}\right)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left(2-\frac{3}{x}\right)=2.$$

Следовательно, прямая $y=x+2$ является наклонной асимптотой графика данной функции как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$.

График функции схематически изображен на рис. 89.

Пример 2. Доказать, что гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ имеет своими наклонными асимптотами прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Решение. Так как $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, то

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left[\pm\frac{b}{a}\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}\right]=\pm\frac{b}{a};$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}[f(x)-kx]=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left[\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\mp\frac{b}{a}x\right]=$$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left[\pm\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)\right]=\pm\frac{b}{a}\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x^2}=0.$$

Следовательно, прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ являются наклонными асимптотами данной гиперболы как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$.

5. Схема исследования графика функции. Рассмотрим примерную схему, по которой целесообразно исследовать поведение функции и строить ее график.

1. Найти область определения функции.
2. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
3. Найти асимптоты.
4. Найти точки возможного экстремума.
5. Найти критические точки.

6. С помощью вспомогательного чертежа исследовать знак первой и второй производных. Определить участки возрастания и убывания функции, найти направление выпуклости графика, точки экстремума и точки перегиба.

7. Построить график, учитывая исследование, проведенное в п. 1—6.

При этом в начале исследования полезно проверить, является данная функция четной или нечетной, чтобы при построении использовать симметрию графика относительно оси ординат или начала координат.

В качестве примера построим по изложенной выше схеме график функции $y=\frac{x^2+1}{x-1}$.

1. Областью определения функции является множество всех вещественных чисел, кроме $x=1$, при котором обращается в нуль знаменатель.

2. Так как уравнение $x^2+1=0$ не имеет вещественных корней, то график функции не имеет точек пересечения с осью Ox, но пересекает ось Oy в точке $(0; -1)$.

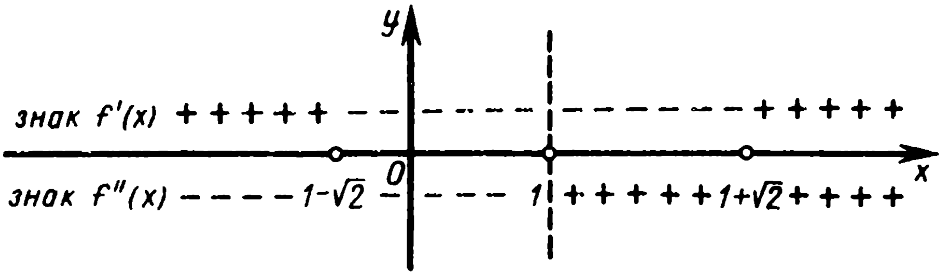


Рис. 90

3. Выясним вопрос о существовании асимптот. Исследуем поведение функции вблизи точки разрыва $x=1$. Так как $y\to-\infty$ при $x\to 1-$, $y\to+\infty$ при $x\to 1+$, то прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Если $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, то $y\to+\infty$ $(y\to-\infty)$, следовательно, горизонтальной асимптоты у графика нет. Далее, из существования пределов

$$k=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{x^2+1}{x^2-x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{1+1/x^2}{1-1/x}=1,$$

$$b=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}[f(x)-kx]=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left[\frac{x^2+1}{x-1}-x\right]=$$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{1+x}{x-1}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{1+1/x}{1-1/x}=1$$

вытекает, что при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ график функции имеет наклонную асимптоту $y=x+1$.

4. Для нахождения точек возможного экстремума вычислим первую производную функции:

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

Решая уравнение $x^2-2x-1=0$, получаем две точки возможного экстремума: $x_1=1-\sqrt{2}$ и $x_2=1+\sqrt{2}$.

5. Для нахождения критических точек вычислим вторую производную:

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4}=\frac{4}{(x-1)^3}.$$

Так как $f''(x)$ в нуль не обращается, то критических точек нет.

6. Нарисуем вспомогательный чертеж и исследуем знак первой и второй производных (рис. 90). Получаем, что функция на $(-\infty,\ 1-\sqrt{2})$ возрастает, на $(1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$ убывает, а на $(1+\sqrt{2},\ +\infty)$ снова возрастает. Точки экстремума: 1) максимум при $x=1-\sqrt{2}$, причем $f(1-\sqrt{2})=2-2\sqrt{2}$; 2) минимум при $x=1+\sqrt{2}$, причем $f(1+\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}$. На $(-\infty,\ 1)$ направление выпуклости графика вверх, а на $(1,\ +\infty)$ — вниз.

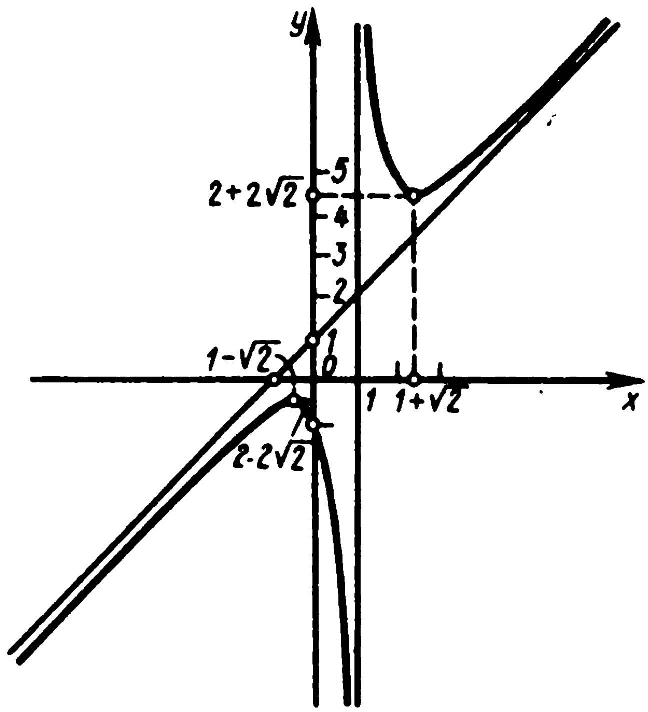


Рис. 91

7. Используя полученные данные, строим эскиз графика (рис. 91).

§ 5. Интерполяция функций

Интерполяция применяется при решении многих как теоретических, так и прикладных вопросов, связанных с вычислениями.

1. Постановка задачи. Пусть на отрезке $[a,\ b]$ заданы значения функции $y=f(x)$ в точках $a\leqslant x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n\leqslant b$:

$$f(x_0)=y_0,\ f(x_1)=y_1,\ f(x_2)=y_2,\ \ldots,\ f(x_n)=y_n.$$

Требуется найти многочлен не выше n-й степени:

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \qquad (1)$$

который в точках $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ принимает те же значения, что и данная функция, т. е. выполняются равенства

$$P_n(x_i)=f(x_i)=y_i,\ i=0,1,2,\ldots,n. \qquad (2)$$

Другими словами, требуется найти такой многочлен вида (1), который на отрезке $[a,\ b]$ являлся бы приближением для функции

$y=f(x)$. Поставленная задача называется *задачей интерполяции*, многочлен (1) — *интерполяционным многочленом*, а точки $x_0, x_1, \ldots$, $\ldots, x_n$ — *узлами интерполяции*. Решение данной задачи дает возможность находить приближенные значения функции $f(x)$ в точках x, лежащих между узлами. Это важно, когда функция задана только в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, а нужно уметь находить ее значения и в промежутках между этими точками, а также когда функция $f(x)$ задается формулой на всем отрезке $[a, b]$, но вычисление ее значений по этой формуле очень трудоемко.

Покажем, что всегда существует и притом единственный интерполяционный многочлен (1), удовлетворяющий условиям (2). Для простоты ограничимся случаем $n=2$, т. е. случаем многочлена второй степени

$$P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2. \tag{3}$$

Подставляя в уравнение (3) вместо x последовательно числа x_0, x_1 и x_2 и принимая во внимание, что в этих точках многочлен принимает соответственно значения y_0, y_1 и y_2, получаем систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными коэффициетами a_0, a_1, a_2:

$$\begin{cases} a_0x_0^2 + a_1x_0 + a_2 = y_0, \\ a_0x_1^2 + a_1x_1 + a_2 = y_1, \\ a_0x_2^2 + a_1x_2 + a_2 = y_2. \end{cases}$$

Так как числа x_0, x_1 и x_2 различны, то определитель этой системы отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_1 - x_2) \neq 0.$$

Следовательно (см. гл. 10, § 3), решение данной системы существует и оно единственно, что и доказывает утверждение. Геометрически это означает, что через три точки $M_0(x_0;\ y_0)$, $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$ проходит единственная линия, определяемая уравнением (3). Таким образом, интерполяционный многочлен (1) всегда существует и единствен. Далее будут рассмотрены различные формы интерполяционного многочлена.

2. Интерполяционная формула Лагранжа. Рассмотрим вопрос об отыскании коэффициентов интерполяционного многочлена (1). Подставляя этот многочлен в систему (2), получаем систему $n+1$ уравнений первой степени с $n+1$ неизвестными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \ldots + a_nx_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_1^n = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1x_n + \ldots + a_nx_n^n = y_n, \end{cases}$$

решая которую найдем значения коэффициентов a_0, a_1, ..., a_n. Подставляя эти значения в равенство (1), получаем искомый интерполяционный многочлен. Однако на практике, как правило, решение системы связано с громоздкими вычислениями. Поэтому интерполяционный многочлен (1) будем искать в виде

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)+a_1(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)+$$
$$+a_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)+\dots$$
$$\dots+a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1}). \quad (4)$$

Полагая в (4) $x=x_0$ и принимая во внимание условия (2), получаем

$$y_0=a_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n),$$

откуда

$$a_0=\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}.$$

Полагая затем в (4) $x=x_1$, имеем

$$y_1=a_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n),$$

откуда

$$a_1=\frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}.$$

Аналогично найдем

$$a_2=\frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)},$$

. . . .

$$a_n=\frac{y_n}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов a_0, a_1, .., a_n в формулу (4), получаем искомый интерполяционный многочлен

$$P_n(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}y_1+\dots$$
$$\dots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}y_n. \quad (5)$$

Формула (5) называется *интерполяционной формулой Лагранжа*.

Пример. В результате эксперимента в точках $x_0=1$, $x_1=3$, $x_2=5$ получены значения функции $f(x)$, соответственно равные $y_0=2$, $y_1=1$, $y_2=8$. Найти многочлен второй степени $P_2(x)$, приближенно выражающий функцию $f(x)$.

Решение. По формуле (5) находим

$$P_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2=\frac{(x-3)(x-5)}{(1-3)(1-5)}2+\frac{(x-1)(x-5)}{(3-1)(3-5)}1+\frac{(x-1)(x-3)}{(5-1)(5-3)}8;$$
$$P_2(x)=x^2-(9/2)x+11/2.$$

3. Интерполяционная формула Ньютона. Рассмотрим частный случай, когда разность h между соседними узлами интерполяции величина постоянная: $x_i - x_{i-1} = h$. Введем следующие обозначения:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,\ \Delta y_1 = y_2 - y_1,\ \Delta y_2 = y_3 - y_2,\ \ldots,$$
$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0,\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1,\ \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2,\ \ldots,$$
$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0,\ \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1,\ \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0,\ \Delta^n y_1 = \Delta^{n-1} y_2 - \Delta^{n-1} y_1,\ \ldots,$$

называемые *разностями первого, второго, третьего, ...,n-го порядков.*

Найдем интерполяционный многочлен n-й степени, принимающий в точках x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, ..., $x_n = x_0 + nh$ соответственно значения $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Сначала найдем многочлен первой степени,принимающий в точках x_0, $x_1 = x_0 + h$ значения y_0, y_1. Подставляя в формулу (5) вместо x_1 число $x_1 = x_0 + h$, получаем

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h}.$$

Аналогично находим

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1),$$
$$P_3(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + $$
$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),$$

и вообще

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}). \qquad (6)$$

Формула (6) определяет искомый многочлен и называется *интерполяционной формулой Ньютона.*

Задача интерполяции имеет единственное решение, поэтому формулы Лагранжа и Ньютона для данных значений x_i и y_i тождественны и отличаются лишь группировкой членов. На практике формула Ньютона более удобна. Особенность ее заключается в том, что в случае добавления новых узлов интерполяции в формуле Лагранжа надо пересчитывать заново все коэффициенты, а в формуле Ньютона добавятся только новые слагаемые, а старые остаются без изменения.

Существуют и другие формулы интерполяции, среди которых наиболее употребительна *эрмитова интерполяция*. Задача ставится так: заданы n узлов, n значений функции $f(x)$ и n значений ее производной $f'(x)$ в узлах; требуется найти многочлен степени не выше $2n-1$ такой, чтобы

$$P(x_i) = f(x_i) = y_i,\ P'(x_i) = f'(x_i) = y'_i,\ i=1, 2, \ldots, n.$$

На решении этой задачи останавливаться не будем, а только заметим, что если все x_i различны, то существует единственное решение, которое находится аналогично предыдущему.

4. Остаточный член интерполяции. Для оценки близости интерполяционного многочлена $P_n(x)$ к фунции $f(x)$ необходимо исследовать разность между функцией и интерполяционным многочленом

$$R(x) = f(x) - P_n(x),$$

называемую *остаточным членом интерполяции.*

Предположим, что на отрезке $[a, b]$ существует $(n+1)$-я непрерывная производная $f^{(n+1)}(x)$. Тогда

$$R^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x),\ a \leqslant x \leqslant b, \tag{7}$$

так как $P_n^{(n+1)}(x) \equiv 0$. Пусть x — любое фиксированное число, $a \leqslant x \leqslant b$, не совпадающее с узлами интерполяции, t — переменная величина, $a \leqslant t \leqslant b$. Положим

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

и рассмотрим на отрезке $[a, b]$ вспомогательную функцию

$$F(t) = R(t) - \frac{R(x)}{\omega(x)}\omega(t),\ a \leqslant t \leqslant b.$$

Функция $F(t)$, очевидно, $n+1$ раз дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем в силу (7) и того факта, что $\omega^{(n+1)}(t) = (n+1)!$, имеем

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\,\frac{R(x)}{\omega(x)}. \tag{8}$$

Далее, функция $F(t)$ обращается в нуль в $n+2$ точках: $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и x (x — фиксированное). Поэтому по теореме Ролля ее первая производная обращается в нуль, по крайней мере, в $n+1$ точке отрезка $[a, b]$, вторая производная обращается в нуль, по крайней мере, в n точках этого отрезка и т. д. По индукции получаем, что $(n+1)$-я производная функции $F(t)$ обращается, по крайней мере, один раз в нуль внутри отрезка $[a, b]$. Следовательно, существует точка ξ, $a < \xi < b$, такая, что

$$F^{(n+1)}(\xi) = 0. \tag{9}$$

Полагая в (8) $t = \xi$ и используя (9), находим

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!\,\frac{R(x)}{\omega(x)} = 0,$$

откуда

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x),\ a \leqslant x \leqslant b,\ a < \xi < b. \tag{10}$$

Равенство (10) определяет остаточный член интерполяции. Обозначая через k наибольшее значение функции $|f^{(n+1)}(x)|$ на отрезке

$[a, b]$, получаем формулу оценки остаточного члена для любого $x \in [a, b]$:

$$|R(x)| \leqslant \frac{k}{(n+1)!} |\omega(x)|.$$

§ 6. Методы приближенного вычисления корней уравнений

В этом параграфе рассмотрим вопрос о приближенном вычислении корней уравнения $f(x)=0$, где $f(x)$ — некоторая непрерывная функция.

Из элементарной математики известен способ нахождения корней уравнения $f(x)=0$, если $f(x)$ — линейная или квадратичная функция. Для более сложных функций обычно приходится прибегать к различным методам приближенного вычисления корней уравнения. Познакомимся с *методом «вилки»* и *методом касательных**.

1. Метод «вилки». Пусть интересующий нас корень уравнения $f(x)=0$ является внутренней точкой отрезка $[a, b]$ и других корней на $[a, b]$ нет. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет на концах этого отрезка значения разных знаков. На практике обычно грубой прикидкой находят такой отрезок. Назовем «вилкой» любой отрезок, на концах которого $f(x)$ имеет значения разных знаков.

Для определенности будем считать, что $f(a)<0$, $f(b)>0$. Разделим $[a, b]$ пополам и выберем тот из полученных отрезков, на концах которого $f(x)$ имеет разные знаки. Обозначим его $[a_1, b_1]$. (Если бы значение $f(x)$ в середине $[a, b]$ равнялось нулю, то корень был бы найден.) Разделим $[a_1, b_1]$ пополам и выберем тот из полученных отрезков, на концах которого $f(x)$ имеет разные знаки, и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, получаем последовательность вложенных отрезков — вилок:

$$[a,b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

обладающих тем свойством, что для любого n $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$. По теореме 2.13 о вложенных отрезках существует точка c, принадлежащая всем отрезкам, к которой сходится каждая из последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

Докажем, что точка c и является искомым корнем, т. е. $f(c)=0$. Поскольку $f(x)$ непрерывна в точке c, каждая из последовательностей $\{f(a_n)\}$ и $\{f(b_n)\}$ сходится к $f(c)$. Но тогда из условий $f(a_n)<0$ и $f(b_n)>0$ по теореме 2.10 получаем, что одновременно справедливы неравенства $f(c)\leqslant 0$ и $f(c)\geqslant 0$. Отсюда $f(c)=0$, что и требовалось доказать.

Теперь нетрудно понять, как вычислить приближенно корень $x=c$. За приближенное значение этого корня можно взять середину отрезка $[a_n, b_n]$, т. е. точку $(a_n+b_n)/2$. Так как длина $[a_n, b_n]$ равна $(b-a)/2^n$, а расстояние от корня c до точки $(a_n+b_n)/2$

---

*Этот метод называется также методом Ньютона.

не превышает половины длины отрезка $[a_n, b_n]$, то число $(a_n+b_n)/2$ отличается от точного значения корня не более чем на $(b-a)/2^{n+1}$. Таким образом, описанный метод позволяет вычислить искомый корень c с любой точностью, если взять достаточно большое n. Этот метод удобен тем, что требует однотипных вычислительных операций. Поэтому его часто используют при проведении вычислений на современных быстродействующих вычислительных машинах.

2. Метод касательных. Этот метод является одним из самых эффективных методов приближенного вычисления корней уравнения $f(x)=0$.

Пусть по-прежнему корень $x=c$ является внутренней точкой $[a, b]$. Предположим также, что на $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет непрерывные знакопостоянные производные $f'(x)$ и $f''(x)$, а ее значения $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки. Так как знак $f'(x)$ постоянен, то функция $f(x)$ на $[a, b]$ либо возрастает, либо убывает, и, следовательно, в обоих случаях график функции $y=f(x)$ пересекает ось Ox только в одной точке, т. е. $x=c$ является единственным корнем на $[a, b]$. Аналогично, так как знак $f''(x)$ постоянен, то направление выпуклости графика функции $y=f(x)$ на этом отрезке не меняется.

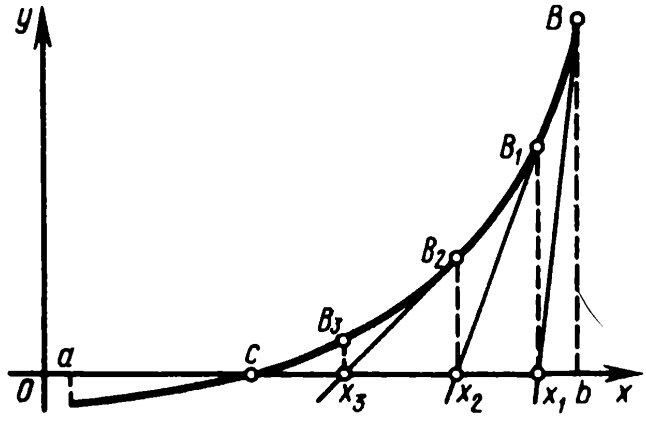


Рис. 92

Для определенности рассмотрим случай, когда $f'(x)>0$ и $f''(x)<0$. В этом случае $f(a)<0$, $f(b)>0$ и график направлен выпуклостью вниз (рис. 92). Проведем через точку $B(b;\ f(b))$ касательную к графику функции $y=f(x)$. Ее уравнение имеет вид

$$y-f(b)=f'(b)(x-b).$$

Полагая $y=0$, найдем абсциссу точки пересечения касательной с осью Ox:

$$x_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Так как $\frac{f(b)}{f'(b)}>0$, то $x_1<b$, а так как график функции $y=f(x)$ расположен не ниже касательной, то $x_1>c$. Итак, $c<x_1<b$. Возьмем за первое приближенное значение корня точку x_1. Далее проведем касательную к графику через точку $B_1(x_1;\ f(x_1))$ и, поступая аналогично, возьмем за второе приближенное значение корня точку x_2:

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

При этом $c<x_2<x_1$. Продолжая этот процесс неограниченно, для любого n получаем формулу

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{1}$$

выражающую x_{n+1} через x_n. Таким образом, имеем последовательность приближенных значений корня c, причем

$$x_1>x_2>x_3>\ldots>x_n>x_{n+1}>\ldots>c. \tag{2}$$

Формула (1) является основной расчетной формулой метода касательных. Он представляет собой метод последовательных приближений (итераций), который строится с помощью формулы (1).

Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к искомому корню c и оценим погрешность, т. е. отклонение приближенного значения x_n от точного значения корня c. Действительно, в силу (2), последовательность $\{x_n\}$ убывает и ограничена снизу числом c. Следовательно, по теореме 2.12 она имеет предел $c'\geqslant c$. Переходя к пределу в равенстве (1), учитывая непрерывность $f(x)$ и $f'(x)$, получаем

$$c'=c'-\frac{f(c')}{f'(c')},$$

откуда следует, что $f(c')=0$, т. е. c' — корень уравнения $f(x)=0$. Но так как на $[a, b]$ имеется только один корень c, то $c'=c$. Итак, последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню c.

Оценим теперь отклонение n-го приближения x_n от точного значения корня c. Применяя к выражению $f(x_n)=f(x_n)-f(c)$ формулу Лагранжа, имеем $f(x_n)=(x_n-c)f'(\xi_n)$, где $c<\xi_n<x_n$. Отсюда получаем следующую оценку:

$$|x_n-c|\leqslant\frac{|f(x_n)|}{m}, \tag{3}$$

где m — наименьшее значение $|f'(x)|$ на отрезке $[a, b]$. Формула (3) позволяет оценить отклонение приближенного значения x_n от точного значения корня c через значение модуля функции $f(x)$ в точке x_n Отметим, что оценка (3) справедлива не только для метода касательных, но и вообще для любого метода приближенного вычисления корня при условии $m\neq 0$.

Мы рассмотрели случай, когда $f'(x)>0$ и $f''(x)>0$ на $[a, b]$. В зависимости от комбинации знаков $f'(x)$ и $f''(x)$ возможны еще три случая: 1) $f'(x)>0$, $f''(x)<0$; 2) $f'(x)<0$, $f''(x)>0$; 3) $f'(x)<0$, $f''(x)<0$, в каждом из которых обоснование метода касательных аналогично рассмотренному случаю.

Пример. Вычислить корень уравнения $x^2-5=0$ методом касательных.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2-5$. Эта функция непрерывна на всей числовой прямой. Найдем отрезок, на концах которого функция $f(x)$ имеет значения разных знаков. Так как $f(2)=-1$, $f(3)=4$, то таким отрезком является отрезок $[2, 3]$.

Внутри него находится искомый корень уравнения. Функция $f(x)$ имеет на этом отрезке непрерывные положительные производные $f'(x)=2x$ и $f''(x)=2$. Следовательно, первую касательную к графику функции $y=f(x)$ следует проводить через точку (3; 4). Положив в формуле (1) $x_0=3$, получим первое приближение корня: $x_1=3-\frac{4}{2\cdot 3}=2\frac{1}{3}$. Положив теперь в формуле (1) $x_1=2\frac{1}{3}$, получим второе приближение корня: $x_2=2\frac{1}{3}-\frac{2}{21}=2\frac{5}{21}$, и, наконец, положив $x_2=2\frac{5}{21}$ в формуле (1), получим третье приближение корня: $x_3=2\frac{2}{21}-\frac{2}{987}=2{,}23607$ и т. д.

Для нахождения погрешности приближения x_3 воспользуемся формулой (3). Так как производная $f'(x)=2x$ на [2, 3] возрастает, то наименьшим ее значением на этом отрезке является $f'(2)=4$, т. е. $m=4$. Найдем $f(x_3)$: $f(x_3)=x_3^2-5=(2{,}23607)^2-5=$ $=0{,}00001$. Теперь по формуле (3) имеем

$$|x_3-c|<\frac{0{,}00001}{4}=0{,}0000025=2{,}5\cdot 10^{-6}.$$

Если по условию задачи такая точность вычисления корня достаточна, то процесс построения приближений следует прекратить, в противном случае этот процесс следует продолжить.

ГЛАВА 7

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл

1. Понятие первообразной функции. Одной из основных задач дифференциального исчисления является отыскание производной заданной функции. Разнообразные вопросы математического анализа и его многочисленные приложения в геометрии, механике, физике и технике приводят к обратной задаче: по данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, производная которой была бы равна функции $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$.

Восстановление функции по известной производной этой функции — одна из основных задач интегрального исчисления.

Определение 1. *Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x)=f(x)$.*

Рассмотрим примеры.

1. Функция $F(x)=\sin x$ является первообразной для функции $f(x)=\cos x$ на всей числовой прямой, так как при любом значении x $(\sin x)'=\cos x$.

2. Функция $F(x)=x^3$ — первообразная для функции $f(x)=$ $=3x^2$ на всей числовой прямой, ибо в каждой точке x $(x^3)'=3x^2$.

3. Функция $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ — первообразная для функции $f(x)=-x/\sqrt{1-x^2}$ на интервале $(-1, +1)$, так как в любой точке x этого интервала $\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=-x/\sqrt{1-x^2}$.

Задача отыскания по данной функции $f(x)$ ее первообразной решается неоднозначно. Действительно, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$, то функция $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной для $f(x)$, так как $[F(x)+C]'=f(x)$ для любого числа C. Например, для $f(x)=\cos x$ первообразной является не только $\sin x$, но и функция $\sin x+C$, так как $(\sin x+C)'=\cos x$.

Теперь покажем, что множество функций $F(x)+C$, где $F(x)$ — некоторая первообразная для функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная, исчерпывает все первообразные для функции $f(x)$.

Лемма 7.1. *Функция, производная которой на некотором промежутке X равна нулю, постоянна на этом промежутке.*

Доказательство. Пусть во всех точках промежутка X производная функции $f(x)$ равна нулю, т. е. $f'(x)=0$. Для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ по теореме Лагранжа получаем

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\quad x_1<\xi<x_2.$$

Так как $f'(\xi)=0$, то $f(x_2)=f(x_1)$. Это и означает, что значения функции во всех точках промежутка одинаковы, т. е. $f(x)=C$, где C — некоторое число. ■

Теорема 7.1. *Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, то любая другая первообразная для $f(x)$ на том же промежутке может быть представлена в виде $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная.*

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ — любая другая первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X, т. е. $\Phi'(x)=f(x)$. Тогда для любого $x\in X$

$$[\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0,$$

а (по лемме 7.1) это означает, что функция $\Phi(x)-F(x)$ постоянна, т. е. $\Phi(x)-F(x)=C$, где C — некоторое число. Следовательно, $\Phi(x)=F(x)+C$. ■

Из доказанной теоремы следует, что множество функций $F(x)+C$, где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная, исчерпывает все семейство первообразных для $f(x)$.

2. Неопределенный интеграл. Определение 2. *Если функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X, то множество функций $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом*

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, а переменная x — *переменной интегрирования*.

Символ $\int f(x)\,dx$ обозначает, таким образом, совокупность всех первообразных для функции $f(x)$. Но иногда будем понимать его как любой элемент из этой совокупности, т. е. как какую-то из первообразных.

Восстановление функции по ее производной, или, что то же, отыскание неопределенного интеграла по данной подынтегральной функции, называется *интегрированием* этой функции. Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию. Для того чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

В этой главе не рассматривается вопрос существования первообразных (а значит, и неопределенных интегралов) для широких классов функций. Отметим, что в гл. 8, § 6 будет доказано, что любая непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке первообразную (а следовательно, и неопределенный интеграл).

Примеры.

1. $\int 3x^2\,dx = x^3 + C$, так как $(x^3 + C)' = 3x^2$.
2. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$, так как $(\sin x + C)' = \cos x$.
3. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$, так как $(\ln|x| + C)' = \frac{1}{x}$.
4. $\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$, так как $\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C\right)' = e^{-2x}$, и т. д.

§ 2. Основные свойства неопределенного интеграла

Из определения неопределенного интеграла непосредственно вытекают следующие его свойства.

1°. *Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т. е.*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x) \text{ и } d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Действительно, $\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$ и

$$d\int f(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)'\,dx = f(x)\,dx.$$

2°. *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной, т. е.*

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

В самом деле, так как $dF(x) = F'(x)\,dx$, то $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$.

3°. *Постоянный множитель можно вынести из-под знака интеграла, т. е. если* $k = \text{const} \neq 0$, *то*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

Действительно, пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$. Тогда $kF(x)$ — первообразная для функции $kf(x)$: $(kF(x))'=kF'(x)=kf(x)$. Отсюда следует, что

$$k\int f(x)\,\mathrm{d}x = k[F(x)+C] = kF(x)+C_1 = \int kf(x)\,\mathrm{d}x,$$

где $C_1=kC$.

4°. *Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций в отдельности, т. е.*

$$\int [f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Действительно, пусть $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные для функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$F'(x)=f(x),\ G'(x)=g(x).$$

Тогда функции $F(x)\pm G(x)$ являются первообразными для функций $f(x)\pm g(x)$. Следовательно,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)+C_1]\pm[G(x)+C_2] =$$
$$=[F(x)\pm G(x)]+[C_1\pm C_2]=[F(x)\pm G(x)]+C=\int [f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x.$$

Отметим, что это свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых функций.

Таблица основных интегралов

Приведем таблицу *основных* интегралов. Часть формул этой таблицы непосредственно следует из определения интегрирования как операции, обратной дифференцированию, и таблицы производных. Справедливость остальных формул легко проверить дифференцированием.

I. $\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$.

II. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$.

III. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x+C$.

IV. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$.

V. $\int a^x\,\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C\ (0<a\neq1)$.

VI. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=e^x+C$.

VII. $\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

VIII. $\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$.

IX. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C$.

X. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C$.

XI. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$ $(a\neq0)$.

XII. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+k}}=$
$=\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+C$.

XIII. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$.

XIV. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$.

Интегралы, содержащиеся в этой таблице, принято называть *табличными*.

1. Непосредственное интегрирование. Вычисление интегралов с помощью непосредственного использования таблицы простейших интегралов и основных свойств неопределенных интегралов называется *непосредственным итегрированием.*

Пример 1. $\int\left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx=5\int\cos x dx+$
$+2\int dx-3\int x^2dx+\int\frac{dx}{x}-4\int\frac{dx}{x^2+1}=5\sin x+2x-x^3+\ln|x|-$
$-4\operatorname{arctg}x+C.$

Пример 2. $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\right.$
$\left.+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=\int(1+\sin x)\,dx=\int dx+\int\sin x dx=x-\cos x+C.$

Пример 3. $\int\operatorname{tg}^2 x dx=\int(\sec^2x-1)\,dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}-\int dx=\operatorname{tg}x-$
$-x+C.$

2. Метод подстановки. Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла, т. е. перейти к непосредственному интегрированию. Такой метод называется *методом подстановки* или *методом замены переменной.* Он основан на следующей теореме.

Теорема 7.2. *Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке T и пусть X — множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда, если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула*

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на множестве X. Рассмотрим на множестве T сложную функцию $F[\varphi(t)]$. По правилу дифференцирования сложной функции, учитывая, что $F'(x)=f(x)$, получаем

$$(F[\varphi(t)])'=F'_x[\varphi(t)]\,\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\,\varphi'(t),$$

т. е. функция $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$ имеет на множестве T первообразную $F[\varphi(t)]$ и, следовательно,

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=F[\varphi(t)]+C.$$

Замечая, что $F[\varphi(t)]+C=(F(x)+C)\Big|_{x=\varphi(t)}=\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}$, получаем формулу (1). ■

Формула (1) называется *формулой замены переменной в неопределенном интервале.*

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\frac{x^3}{(x-1)^2}dx.$

Решение. Положим $x-1=t$; тогда $x=t+1$. Отсюда $dx=dt$. По формуле (1)

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}\,dt = \int \left(t+3+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt =$$
$$= \frac{1}{2}t^2+3t+3\ln|t|-\frac{1}{t}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получаем

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\,dx = \frac{1}{2}(x-1)^2+3(x-1)+3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C.$$

Замечание. При замене переменной в неопределенном интеграле иногда более удобно задавать не x как функцию t, а, наоборот, задавать t как функцию от x.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{x^4\,dx}{x^5+7}$.

Решение. Положим $x^5+7=t$, $dt=5x^4dx$; тогда

$$\int \frac{x^4\,dx}{x^5+7} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln|t|+C,$$

так что

$$\int \frac{x^4\,dx}{x^5+7} = \frac{1}{5}\ln|x^5+7|+C.$$

Заметим, что удачный выбор подстановки обычно представляет известные трудности. Для их преодоления необходимо овладеть техникой дифференцирования и хорошо знать табличные интегралы.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

Решение. Положим $\sqrt{x^2+a}+x=t$, откуда $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}+1\right)dx=$ $=dt$. Таким образом,

$$dx = \frac{\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}+x}\,dt,$$

так что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln\left|\sqrt{x^2+a}+x\right|+C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \sin^n x\cos x\,dx$.

Решение. Положим $t=\sin x$, $dt=\cos x\,dx$. Тогда

$$\int \sin^n x\cos x\,dx = \int t^n\,dt = \begin{cases} \dfrac{t^{n+1}}{n+1}+C = \dfrac{\sin^{n+1}x}{n+1}+C & \text{при } n\neq -1, \\ \ln|t|+C = \ln|\sin x|+C & \text{при } n=-1. \end{cases}$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n}$, $n\neq 1$.

Решение. Положим $x^2+1=t$, $2x\,dx=dt$; тогда

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^n} = -\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{t^{n-1}}+C = -\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}+C.$$

При $n=1$ аналогично получим

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

3. Метод интегрирования по частям. Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы дифференцирования произведения двух функций.

Теорема 7.3. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на некотором промежутке X и пусть функция $u'(x)\,v(x)$ имеет первообразную на этом промежутке. Тогда на промежутке X функция $u(x)\,v'(x)$ также имеет первообразную и справедлива формула*

$$\int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

Доказательство. Из равенства

$$[u(x)\,v(x)]' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$

следует, что

$$u(x)\,v'(x) = [u(x)\,v(x)]' - u'(x)\,v(x).$$

Первообразной функции $[u(x)\,v(x)]'$ на промежутке X является функция $u(x)\,v(x)$. Функция $u'(x)\,v(x)$ имеет первообразную на X по условию теоремы. Следовательно, и функция $u(x)\,v'(x)$ имеет первообразную на промежутке X. Интегрируя последнее равенство, получаем формулу (2). ■

Формула (2) называется *формулой интегрирования по частям в неопределенном интеграле.*

Так как $v'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v$, $u'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, то ее можно записать в виде

$$\int u\,\mathrm{d}v = u \cdot v - \int v\,\mathrm{d}u.$$

Эта формула позволяет свести вычисление $\int u\,\mathrm{d}v$ к вычислению интеграла $\int v\,\mathrm{d}u$, который может оказаться более простым.

Пример 1. $$\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u}\,\underbrace{\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x,\ \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x,\ \int \mathrm{d}v = \int \mathrm{d}x,\ v = x \end{array} \right|^{*} = \underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u} - \int \underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}}_{\mathrm{d}u} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Пример 2. $$\int x e^x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} u = x,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x,\ \int \mathrm{d}v = \int e^x\,\mathrm{d}x,\ v = e^x \end{array} \right| = \int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\mathrm{d}e^x}_{\mathrm{d}v} = \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v}\,\underbrace{\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}u} = xe^x - e^x + C.$$

---

* Здесь вертикальными черточками отделены вспомогательные записи. Отметим также, что в качестве v можно взять любую функцию вида $x + C$, где C — постоянная. Мы взяли $v = x$, т. е. $C = 0$.

Пример 3. $\int x\ln x dx = \left| \begin{array}{c} u=\ln x,\ du=\frac{dx}{x} \\ dv=xdx,\ \int dv=\int xdx,\ v=\frac{x^2}{2} \end{array} \right| =$

$$= \int \ln x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Иногда для вычисления интеграла формулу интегрирования по частям приходится применять несколько раз.

Пример 4. $\int x^2 \cos x dx = \left| \begin{array}{c} u=x^2,\ du=2xdx \\ dv=\cos x dx,\ \int dv=\int \cos x dx,\ v=\sin x \end{array} \right| =$

$$= \int x^2\, d(\sin x) = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u=x, du=dx \\ dv=\sin x\, dx,\ \int dv=\int \sin x dx,\ v=-\cos x \end{array} \right| =$$

$$= x^2 \sin x + 2\int x d \cos x = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x dx =$$

$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

Таким образом, интеграл $\int x^2 \cos x\, dx$ вычислен двухкратным интегрированием по частям.

В заключение вычислим интеграл

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

(n — целое положительное число), который понадобится в следующем параграфе. При $n=1$ имеем табличный интеграл

$$I_1 = \operatorname{arctg} x + C.$$

Пусть $n>1$. Представив 1 в числителе как разность $(x^2+1)-x^2$, получим

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)^n}.$$

Во втором интеграле применим метод интегрирования по частям:

$$u=x, \quad du=dx, \quad dv=\frac{x\, dx}{(x^2+1)^n}, \quad v=\int \frac{x\, dx}{(x^2+1)^n} = -\frac{1}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}$$

(см. п. 2, пример 5),
тогда

$$\int \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)^n} = -\frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \int \frac{dx}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}},$$

следовательно,

$$I_n = I_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1},$$

откуда

$$I_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

Таким образом, интеграл I_n выражен через I_{n-1}:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}\quad (n>1).\qquad (3)$$

Формулы типа (3) называются *рекуррентными формулами.*

Пример 5. Вычислить $\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Решение. По рекуррентной формуле (3) имеем

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1},$$

а

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg} x,$$

поэтому окончательно имеем

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3x}{8(x^2+1)}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg} x+C.$$

§ 5. Интегрирование рациональных функций

Важный класс функций, интегралы от которых всегда выражаются через элементарные функции, образуют рациональные функции, т. е. функции, которые можно представить в виде дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены.

Если степень многочлена в числителе равна или больше степени многочлена в знаменателе, то, выполнив деление, получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=W(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},\qquad (1)$$

где $W(x)$ — некоторый многочлен, а $R(x)$ — многочлен степени ниже, чем $Q(x)$.

Примеры.

1. $\frac{x^5+x^3-x^2+1}{x^3-2x+1}=x^2+3-\frac{2x^2-6x+2}{x^3-2x+1}$,
2. $\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}$.

В высшей алгебре доказывается, что каждый многочлен может быть представлен в виде произведения

$$Q(x)=A(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\gamma),$$

где A — коэффициент при старшей степени многочлена $Q(x)$, а α, β, ..., γ — корни уравнения $Q(x)=0$. Множители $(x-\alpha)$ $(x-\beta)\ldots(x-\gamma)$ называются *элементарными множителями.* Если среди них имеются совпадающие, то, группируя, получаем представление

$$Q(x)=A(x-\alpha)^r(x-\beta)^s\dots(x-\gamma)^t, \qquad (2)$$

где r, s, ..., t — целые числа, которые называются соответственно *кратностями корней* α, β, ..., γ, причем $r+s+\dots+t=n$, n — степень многочлена $Q(x)$.

Среди корней представления (2) могут быть и комплексные. В алгебре доказывается, что если $\alpha=a+bi$ — r-кратный комплексный корень многочлена с вещественными коэффициентами, то этот многочлен имеет также сопряженный с α r-кратный корень $\bar{\alpha}=a-bi$. Другими словами, если в представление (2) входит множитель $(x-\alpha)^r$, где $\alpha=a+bi\ (b\neq 0)$, то оно содержит также и множитель $(x-\bar{\alpha})^r$. Перемножив эти два множителя, получим

$$\begin{aligned}(x-\alpha)^r(x-\bar{\alpha})^r&=\{[x-(a+bi)][x-(a-bi)]\}^r=\\&=[x^2-x(a+bi)-x(a-bi)+a^2+b^2]^r=\\&=[x^2-2ax+a^2+b^2]^r=(x^2+2px+q)^r,\end{aligned}$$

где $p=-a$, $q=a^2+b^2$, $p^2-q<0$, p и q — вещественные числа.

Поступая аналогично с остальными комплексными корнями, запишем представление (2) в виде

$$Q(x)=A(x-\alpha)^r(x-\beta)^s\dots(x^2+2px+q)^t(x^2+2ux+v)^\eta\dots, \qquad (3)$$

где α, β, ..., p, q, u, v, ... — вещественные числа.

В высшей алгебре доказывается следующая теорема.

Теорема. *Если рациональнная функция* $\frac{R(x)}{Q(x)}$ *имеет степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, а многочлен* $Q(x)$ *представлен в виде* (3), *то эту функцию можно единственным образом представить в виде*

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{Q(x)}&=\frac{A_1}{(x-\alpha)}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\dots+\frac{A_r}{(x-\alpha)^r}+\dots\\&\dots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+2px+q)^2}+\dots+\frac{M_tx+N_t}{(x^2+2px+q)^t}+\dots, \qquad (4)\end{aligned}$$

где A_1, A_2, ..., A_r, ..., M_1, N_1, M_2, N_2, ..., M_t, N_t, ... — некоторые вещественные числа.

Выражение (4) называется *разложением рациональной функции на элементарные дроби.*

Равенство (4) имеет место для всех x, не являющихся вещественными корнями многочлена $Q(x)$.

Чтобы определить числа A_1, A_2, ..., A_r, ..., M_1, N_1, ..., M_t, N_t, ..., умножим обе части разложения (4) с неизвестными пока A_1, A_2, ... на $Q(x)$. Поскольку равенство между многочленом $R(x)$ и многочленом, который получится в правой части, должно быть справедливо для всех x, то коэффициенты, стоящие при равных степенях x, должны быть равны между собой. Приравнивая их, получаем систему уравнений первой степени, из которой найдем неизвестные числа $A_1, A_2, \dots, A_r, \dots, M_1, N_1, \dots, M_t, N_t, \dots$

Такой метод отыскания коэффициентов разложения рациональной функции называется *методом неопределенных коэффициентов.*

Пример 1. Разложить рациональную функцию $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ на элементарные дроби.

Решение. Так как $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$, то по формуле (4) имеем

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}.$$

Умножая обе части равенства на x^2-5x+6, получаем
$2x-1=A(x-2)+B(x-3)$, или $2x-1=(A+B)x-2A-3B$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений первой степени относительно A и B:

$$\begin{cases} A+\ \ B=2, \\ 2A+3B=1, \end{cases}$$

откуда $A=5$, $B=-3$.

Таким образом,

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}.$$

Пример 2. Найти разложение рациональной функции $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ на элементарные дроби.

Решение. Квадратный трехчлен x^2+1 имеет комплексные корни, поэтому по формуле (4) имеем

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Умножая обе части равенства на $x(x^2+1)^2$, получаем

$$x^2-1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)x+(Dx+E)x$$

или

$$x^2-1=(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A.$$

Приравнивая коэффициенты при x^0, x^1, x^2, x^3 и x^4, придем к системе уравнений

$$\begin{cases} x^4: A+B=0, \\ x^3: C=0, \\ x^2: 2A+B+D=0, \\ x^1: C+E=0, \\ x^0: A=-1. \end{cases}$$

решая которую найдем $A=-1$, $B=1$, $C=0$, $D=2$, $E=0$, и поэтому искомое разложение имеет вид

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Из изложенного следует, что задача интегрирования рациональной функции (1) сводится к интегрированию многочлена $W(x)=$ $=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m$, интеграл от которого является табличным:

$$\int W(x)\,dx=a_0\frac{x^{m+1}}{m+1}+a_1\frac{x^m}{m}+\ldots+a_mx+C,$$

и интегрированию рациональной функции $\frac{R(x)}{Q(x)}$, что приводит к нахождению интегралов следующих четырех типов *:

I. $\int\frac{A}{x-\alpha}\,dx=A\ln|x-\alpha|+C$;

II. $\int\frac{A}{(x-\alpha)^r}\,dx=-\frac{A}{(r-1)(x-\alpha)^{r-1}}+C\ (r>1)$;

III. $\int\frac{Ax+B}{x^2+2px+q}\,dx$;

IV. $\int\frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r}\,dx\ (r>1)$.

При этом многочлен $x^2+2px+q$ не имеет вещественных корней, так что $p^2-q<0$.

Вычислим интеграл III типа, который часто встречается на практике. Выделим из трехчлена в знаменателе полный квадрат

$$x^2+2px+q=(x+p)^2+q-p^2.$$

Это представление «подсказывает» подстановку $x+p=t$, откуда $x=t-p$, $dx=dt$. Положим далее $q-p^2=h>0$ и перейдем к переменной t. В результате интеграл преобразуется к виду

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+2px+q}\,dx=\int\frac{At+B-Ap}{t^2+h}\,dt=\frac{1}{2}A\int\frac{2t\,dt}{t^2+h}+(B-A\cdot p)\int\frac{dt}{t^2+h}.$$

Первый интеграл в правой части берется непосредственно

$$\int\frac{2t\,dt}{t^2+h}=\ln|t^2+h|+C=\ln|x^2+2px+q|+C.$$

Второй интеграл вычисляется по формуле XIII таблицы основных интегралов.

Пример 3. Вычислить $\int\frac{6x+5}{x^2+4x+9}\,dx$.

Решение. Выделим в знаменателе полный квадрат: x^2+ $+4x+9=(x+2)^2+5$. Сделаем подстановку $x+2=t$, откуда $x=t-2$, $dx=dt$, поэтому

$$\int\frac{6x+5}{x^2+4x+9}\,dx=\int\frac{6x+5}{(x+2)^2+5}\,dx=\int\frac{6(t-2)+5}{t^2+5}\,dt=\int\frac{6t-7}{t^2+5}\,dt=$$

$$=3\int\frac{2t\,dt}{t^2+5}-7\int\frac{dt}{t^2+5}=3\ln(t^2+5)-\frac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}+C.$$

---

* Интегралы I и II типов интегрируются элементарно с помощью подстановки $t=x-\alpha$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}\,dx = 3\ln(x^2+4x+9) - \frac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}} + C.$$

Вычислим теперь интеграл IV типа: $\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r}\,dx$, $q-p^2>0$, $r>1$. Для этого введем новую переменную z по формуле $z=(x+p)/\sqrt{q-p^2}$, откуда $x=z\sqrt{q-p^2}-p$, $dx=\sqrt{q-p^2}dz$. (5)
Далее, имеем

$$z^2+1=\frac{(x+p)^2}{q-p^2}+1=\frac{x^2+2px+q}{q-p^2}. \qquad (6)$$

Таким образом, используя подстановку (5) и принимая во внимание (6), получаем

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r}\,dx=\int\frac{A\left[z\sqrt{q-p^2}-p\right]+B}{(z^2+1)^r(q-p^2)^r}\sqrt{q-p^2}\,dz=$$
$$=\int\frac{Mz+N}{(z^2+1)^r}\,dz=M\int\frac{z\,dz}{(z^2+1)^r}+N\int\frac{dz}{(z^2+1)^r},$$

где M и N — числа, значения которых ясны из предпоследнего равенства.

Ко второму интегралу можно применить рекуррентную формулу [см. § 4, п. 3, формулу (3)]. Положив в первом интеграле $z^2+1=t$, получим

$$M\int\frac{z\,dz}{(z^2+1)^r}=\frac{M}{2}\int\frac{dt}{t^r}=-\frac{M}{2(r-1)}\frac{1}{t^{r-1}}+C=-\frac{M}{2(r-1)}\frac{1}{(z^2+1)^{r-1}}+C.$$

Пример 4. Вычислить $\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx$.

Решение. Положим $z=\frac{x-1}{\sqrt{5-1}}=\frac{x-1}{2}$, откуда $x=1+2z$, $dx=2\,dz$, а $x^2-2x+5=4(z^2+1)$, следовательно,

$$\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx=\int\frac{5(1+2z)+3}{4^2(z^2+1)^2}2\,dz=\int\frac{10z+8}{8(z^2+1)^2}\,dz=$$
$$=\frac{5}{4}\int\frac{z\,dz}{(z^2+1)^2}+\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}.$$

Но

$$\int\frac{z\,dz}{(z^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2+1},\quad \int\frac{dz}{(z^2+1)^2}=\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z.$$

Таким образом,

$$\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx=-\frac{5}{8}\frac{1}{z^2+1}+\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+C=$$
$$=\frac{4z-5}{8(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx=\frac{2x-7}{2(x^2-2x+5)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)+C.$$

Итак, установлено, что интегрирование любой рациональной функции сводится к интегрированию многочлена и конечного числа элементарных дробей, интегралы от которых выражаются через рациональные функции, логарифмы и арктангенсы. Иными словами, любая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях.

§ 6. Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций

Предварительно введем обозначение рациональной функции от двух переменных u и v, т. е. функции, получающейся из двух переменных u и v и некоторых постоянных, над которыми производятся только операции сложения, вычитания, умножения и деления: $R(u, v)$. Такова, например, функция

$$R(u, v) = \frac{3u^2 v + u^5 v^4}{u^3 + 4v^2}.$$

Если переменные u и v, в свою очередь, являются функциями переменной x: $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, то функция $R[\varphi(x), \psi(x)]$ называется рациональной функцией от $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Например, функция

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{(x^2 - 1)^2}}{x^2 - 5\sqrt{x^2 - 1}}$$

является рациональной функцией от x и от $\sqrt{x^2 - 1}$: $f(x) = R\left(x, \sqrt{x^2 - 1}\right)$; здесь $R(u, v) = \frac{u + v^2}{u^2 - 5v}$, $u = x$, $v = \sqrt{x^2 - 1}$, а функция

$$f(x) = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^3 x + 2\cos x}$$

является рациональной функцией от $\sin x$ и от $\cos x$: $f(x) = R(\sin x, \cos x)$.

Рассмотрим теперь интегралы от некоторых простейших иррациональных и трансцендентных функций и покажем, что в ряде случаев они сводятся к интегралам от рациональных функций (или, как говорят, рационализируются) и могут быть вычислены методами, рассмотренными в § 5.

1. Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) dx$, **где** a, b, c, d **— некоторые числа** $\left(\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}\right)$; m **— натуральное число,** R **— рациональная функция от** x **и от** $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Покажем, что такой интеграл рационализируется подстановкой

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax + b}{cx + d}}.$$

В самом деле,

$$t^m=\frac{ax+b}{cx+d},\ x=\frac{b-dt^m}{ct^m-a},\ \mathrm{d}x=\frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}\,\mathrm{d}t,$$

так что

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{b-dt^m}{ct^m-a}, t\right)\frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}\,\mathrm{d}t=\int R_1(t)\,\mathrm{d}t,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция аргумента t.

Пример 1. Вычислить $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$.

Решение. Сделав подстановку $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, получим $t^2=\frac{1+x}{1-x}$, $1-x=\frac{2}{t^2+1}$, $x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $\mathrm{d}x=\frac{4t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$. Далее, имеем

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=2\int\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}=2\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=2\int\mathrm{d}t-2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=$$

$$=2t-2\operatorname{arctg}t+C=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

Пример 2. Вычислить $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Имеем

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt[6]{x})^2+(\sqrt[6]{x})^3}=\left|\begin{matrix} t=\sqrt[6]{x},\ x=t^6\\ \mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t\end{matrix}\right|=\int\frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^2+t^3}=$$

$$=6\int\frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t+1}=6\int\left[(t^2-t+1)\,\mathrm{d}t-\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}\right]=$$

$$=6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right]+C=$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C.$$

2. Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$, где a, b, c — некоторые числа; $a\neq0$; R — рациональная функция от x и от $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Если трехчлен ax^2+bx+c имеет вещественные корни x_1, x_2 $(x_1\neq x_2)$ и $a>0$, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=|x-x_1|\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}.$$

Следовательно,

$$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)=R\left(x, |x-x_1|\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right)=$$

$$=R_1\left(x, \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right),$$

т. е. получаем интеграл, рассмотренный в п. 1.

Если $x_1=x_2$, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=|x-x_1|\sqrt{a},$$

т. е. под знаком интеграла находится рациональная функция от x.

Поэтому интересен случай, когда трехчлен ax^2+bx+c не имеет вещественных корней и $a>0$. Покажем, что в данном случае интеграл рационализируется подстановкой Эйлера *:

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}.\ {}^{**}$$

Возводя обе части равенства $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$ в квадрат, получаем $bx+c=t^2-2\sqrt{a}tx$, так что

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b},$$

$$dx=2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}t+b\right)^2}dt.$$

Таким образом,

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=$$

$$=\int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}\right)2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}t+b\right)^2}dt=\int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t.

Если же в трехчлене ax^2+bx+c $a<0$, а $c>0$, то для рационализации интеграла можно применить другую подстановку Эйлера:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}.$$

Пример 3. Вычислить $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение. Поскольку трехчлен x^2+x+1 имеет комплексные корни, сделаем подстановку $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$. Возводя обе части равенства в квадрат, получаем
$x^2+x+1=t^2-2tx+x^2$ или $x+1=t^2-2tx$; отсюда

$$x=\frac{t^2-1}{1+2t},\ dx=2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt.$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=2\int\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt.$$

Далее, имеем

$$\frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1+2t}+\frac{D}{(1+2t)^2}.$$

Умножая обе части равенства на $t(1+2t)^2$, получаем

$$2t^2+2t+2=A(1+2t)^2+Bt(1+2t)+Dt,$$ или

$$2t^2+2t+2=(4A+2B)t^2+(4A+D+B)t+A.$$

---

* Эйлер Леонард (1707—1783) — выдающийся математик, механик, физик и астроном, член Петербургской Академии наук, большую часть жизни провел в России, по национальности швейцарец.

** Можно положить $t=\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a}$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему уравнений первой степени относительно A, B, D:

$$\begin{cases} 4A+2B=2, \\ 4A+D+B=2, \\ A=2, \end{cases}$$

откуда $A=2$, $B=-3$, $D=-3$. Следовательно,

$$\frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}=\frac{2}{t}-\frac{3}{1+2t}-\frac{3}{(1+2t)^2},$$

и окончательно

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{3}{1+2t}-\frac{3}{(1+2t)^2}\right]dt=$$

$$=2\int\frac{dt}{t}-\frac{3}{2}\int\frac{d(1+2t)}{1+2t}-\frac{3}{2}\int\frac{d(1+2t)}{(1+2t)^2}=$$

$$=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1+2t|+\frac{3}{2(1+2t)}+C=2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}+x\right|-$$

$$-\frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right|+\frac{3}{2\left(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right)}+C.$$

Пример 4. Вычислить $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$.

Решение. Здесь трехчлен $1+x-x^2$ имеет комплексные корни и $a<0$, $c>0$, поэтому воспользуемся подстановкой $\sqrt{1+x-x^2}=tx-1$. Возводя обе части равенства в квадрат, получаем

$$1+x-x^2=t^2x^2-2tx+1 \text{ или } 1-x=t^2x-2t;$$

отсюда

$$x=\frac{1+2t}{t^2+1},\ dx=\frac{2(1-t-t^2)}{(t^2+1)^2}dt,\ \sqrt{1+x-x^2}=\frac{t^2+t-1}{t^2+1}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{2(1-t-t^2)}{\left(1+\frac{1+2t}{t^2+1}\right)\frac{t^2+t-1}{t^2+1}(t^2+1)^2}dt=$$

$$=-2\int\frac{dt}{1+(t+1)^2}=-2\operatorname{arctg}(t+1)+C=$$

$$=-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x-x^2}+x+1}{x}+C.$$

Заметим, что вычисление интегралов с помощью подстановок Эйлера обычно приводит к громоздким выражениям и трудоемким выкладкам, поэтому их следует применять, только если данный интеграл не удается вычислить более коротким способом.

3. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, **где** R **— рациональная функция от** $\sin x$ **и от** $\cos x$. Покажем, что интеграл рационализируется подстановкой

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\quad -\pi<x<\pi.$$

Действительно,

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$
$$x=2\operatorname{arctg} t,\ \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

так что

$$\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int R_1(t)\,\mathrm{d}t,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t.

Пример 5. Вычислить $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

Решение. Применяя подстановку $t=\operatorname{tg}(x/2)$, получаем

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ x=2\operatorname{arctg} t,\ \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}=-\frac{2}{1+t}+C=-\frac{2}{1+\operatorname{tg}(x/2)}+C.$$

4. Интеграл вида $\int R(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}t$. Покажем, что данный интеграл рационализируется подстановкой

$$t=\mathrm{e}^x.$$

В самом деле, так как $x=\ln t$ и $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t}$, то

$$\int R(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=\int R(t)\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

где $R(t)$ — рациональная функция от t.

Пример 6. Вычислить $\int\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$.

Решение. Полагаем $t=\mathrm{e}^x$. Отсюда $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t}$. Следовательно,

$$\int\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{t-1}{t+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int\frac{2t-(t+1)}{(t+1)\,t}\,\mathrm{d}t=2\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}-\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=$$
$$=2\ln(1+t)-\ln t+C=2\ln(1+\mathrm{e}^x)-x+C.$$

В заключение отметим, что рассмотренные методы и приемы интегрирования не исчерпывают всех классов аналитически интегрируемых элементарных функций. В то же время из всего изложенного следует, что техника интегрирования сложнее по сравнению с дифференцированием. Необходимы определенные навыки и изобретательность, которые приобретаются на практике в результате решения большого числа примеров.

Отметим также, что если дифференцирование не выводит из класса элементарных функций, то при интегрировании дело обстоит иначе. Существуют такие элементарные функции (например, e^{-x^2}, $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\sin x}{x}$ и т. д.), первообразные от которых не являются элементарными функциями. Такие первообразные не только существуют, но и играют большую роль как в самом математическом анализе, так и в его приложениях. Они хорошо изучены, для них составлены таблицы и графики, помогающие их практическому использованию.

Если первообразная не является элементарной функцией, то говорят, что интеграл «не берется» в элементарных функциях.

ГЛАВА 8

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определение определенного интеграла

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $a<b$. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей точками:

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b.$$

Обозначим это разбиение через τ, а точки x_0, x_1, ..., x_n будем называть точками разбиения. В каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i $(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$. Через Δx_i обозначим разность x_i-x_{i-1}, которую условимся называть длиной частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Образуем сумму:

$$\sigma=f(\xi_1)\,\Delta x_1+f(\xi_2)\,\Delta x_2+\ldots+f(\xi_n)\,\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i, \qquad (1)$$

которую назовем *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на $[a, b]$, соответствующей данному разбиению $[a, b]$ на частичные отрезки и данному выбору промежуточных точек ξ_i. Геометрический смысл суммы σ очевиден: это сумма площадей прямоугольников с основаниями Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n и высотами $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$, если $f(x)\geqslant 0$ (рис. 93).

Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка разбиения τ: $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$.

Определение. *Если существует конечный предел I интегральной суммы* (1) *при $\lambda\to 0$, то этот предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается следующим образом:*

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (2)$$

или

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

В этом случае функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на $[a, b]$. Числа a и b называются соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ — подынтегральной функцией, x — переменной интегрирования.*

Сделаем ряд пояснений, так как имеет место не совсем обычный предельный переход. В самом деле, интегральная сумма зависит от точек разбиения x_i и промежуточных точек ξ_i. Число тех и других точек стремится к бесконечности при $\lambda \to 0$. Поэтому само понятие предела интегральной суммы требует уточнения. Сначала дадим соответствующее определение на «языке последовательностей». Пусть отрезок $[a, b]$ последовательно разбивается на части сначала одним способом, затем — вторым, третьим и т. д., причем длина λ_k наибольшего частичного отрезка k-го разбиения стремится к нулю, когда k стремится к бесконечности.

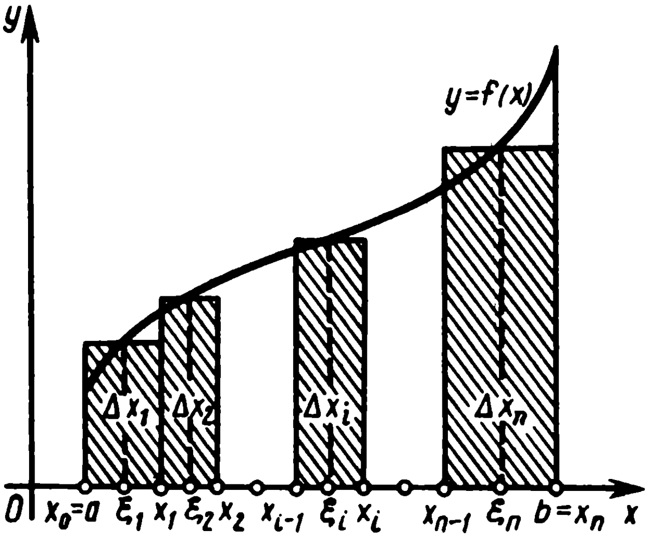


Рис. 93

В каждом разбиении выберем произвольно промежуточные точки ξ_i. Таким образом, получаем последовательность разбиения $\{\tau_k\}$, у которой $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0$ и можно дать определение определенного интеграла на «языке последовательностей»: *функция $f(x)$ называется интегрируемой на $[a, b]$, если для любой последовательности разбиений $\{\tau_k\}$, у которой $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0$, соответствующая последовательность интегральных сумм $\{\sigma_k\}$ стремится к одному и тому же числу I.*

Можно дать определение определенного интеграла и «на языке $\varepsilon - \delta$»: *число I называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\lambda < \delta$ (т. е. если отрезок разбит на части с длинами $\Delta x_i < \delta$) независимо от выбора точек ξ_i выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i - I \right| < \varepsilon.$$

Доказательство эквивалентности обоих определений можно провести аналогично доказательству эквивалентности двух определений предела функции. Определение «на языке последовательностей» дает возможность перенести основные понятия теории пределов и на этот новый вид предела.

Из определения определенного интеграла следует, что величина интеграла (2) зависит только от вида функций $f(x)$ и от чисел a и b. Следовательно, если заданы $f(x)$ и пределы интегрирования, то интеграл (2) определяется однозначно и представляет собой некоторое число. Отсюда, в частности, следует, что определенный интеграл не зависит от выбора обозначения для аргумента подынтегральной функции, т. е. от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\xi)\,d\xi \text{ и т. д.}$$

§ 2. Условия существования определенного интеграла

1. Ограниченность интегрируемой функции. Теорема 8.1 (необходимое условие интегрируемости функции). *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Предположим обратное, т. е. допустим, что $f(x)$ не ограничена на $[a, b]$. Покажем, что в этом случае интегральную сумму σ можно за счет выбора точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ сделать сколь угодно большой при любом разбиении отрезка $[a, b]$.

Действительно, так как $f(x)$ не ограничена на $[a, b]$, то при любом разбиении отрезка $[a, b]$ она обладает этим свойством хотя бы на одном частичном отрезке разбиения, например на $[x_0, x_1]$. Выберем на остальных частичных отрезках точки $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ произвольно и обозначим

$$\sigma' = f(\xi_2)\,\Delta x_2 + f(\xi_3)\,\Delta x_3 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n.$$

Зададим произвольное число $M>0$ и возьмем такое ξ_1 на $[x_0, x_1]$, чтобы

$$|f(\xi_1)| \geqslant \frac{|\sigma'| + M}{\Delta x_1}.$$

Это можно сделать в силу неограниченности функции $f(x)$ на $[x_0, x_1]$. Тогда

$$|f(\xi_1)|\,\Delta x_1 \geqslant |\sigma'| + M \text{ и } |\sigma| = |f(\xi_1)\,\Delta x_1 + \sigma'| \geqslant |f(\xi_1)|\,\Delta x_1 - |\sigma'| \geqslant M,$$

т. е. интегральная сумма σ по абсолютной величине больше любого наперед заданного числа. Поэтому интегральная сумма σ не имеет конечного предела при $\lambda \to 0$, а это означает, что определенный интеграл от неограниченной функции не существует. ■

Замечание. Обратная теорема неверна, т. е. условие ограниченности функции $f(x)$ необходимое, но не достаточное условие интегрируемости функции. Поясним это утверждение примером. Рассмотрим функцию Дирихле на отрезке $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное число.} \end{cases}$$

Функция Дирихле, очевидно, ограничена. Однако она не интегрируема на $[0, 1]$. Покажем это. Если при любом разбиении отрезка $[0, 1]$ выбрать рациональные точки ξ_i $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$, то получим

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = 1,$$

а если взять ξ_i иррациональными, то получим

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Таким образом, при разбиении на сколь угодно малые частичные отрезки интегральная сумма может принимать как значение, равное 0, так и значение, равное 1. Поэтому интегральная сумма σ при $\lambda \to 0$ предела не имеет.

Таким образом, для существования определенного интеграла от некоторой функции $f(x)$ последняя, помимо ограниченности, должна обладать дополнительными свойствами, обеспечивающими ее интегрируемость. Для установления этих свойств необходимо ввести понятия нижних и верхних сумм.

2. Суммы Дарбу*. Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и τ — разбиение этого отрезка точками: $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. Обозначим через m_i и M_i соответственно точную нижнюю и точную верхнюю грани этой функции на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ и составим следующие суммы:

$$S = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i,$$

$$s = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i.$$

Эти суммы называются соответственно *верхней* и *нижней суммами* или *верхней* и *нижней суммами Дарбу* функции $f(x)$ для данного разбиения τ отрезка $[a, b]$.

Из определения нижней и верхней граней следует, что $m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$ при $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Отсюда

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \leqslant \sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = S,$$

т. е. любая интегральная сумма и суммы Дарбу для данного разбиения связаны неравенствами

$$s \leqslant \sigma \leqslant S. \qquad (1)$$

Суммы Дарбу имеют простой геометрический смысл. Рассмотрим неотрицательную непрерывную функцию $f(x)$ на $[a, b]$ и криволинейную трапецию, т. е. фигуру, ограниченную графиком функции $f(x)$, двумя вертикальными прямыми, проведенными через

---

* Дарбу Гастон (1842—1917) — французский математик.

точки a и b оси Ox, и осью Ox (рис. 94 и 95). Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, она непрерывна и на $[x_{i-1}, x_i]$. По второй теореме Вейерштрасса функция $f(x)$ достигает на $[x_{i-1}, x_i]$ своих точных граней, и, следовательно, m_i и M_i — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции на этом отрезке. Поэтому сумма S равна площади заштрихованной на рис. 94 ступенчатой фигуры, «описанной» около криволинейной трапеции, а сумма s равна площади заштрихованной на рис. 95 ступенчатой фигуры, «вписанной» в данную криволинейную трапецию.

Следует особо отметить, что суммы Дарбу зависят только от разбиения отрезка $[a, b]$, в то время как интегральная сумма σ зависит еще и от выбора точек ξ_i на частичных отрезках $[x_{i-1}, x_i]$. При фиксированном разбиении отрезка $[a, b]$ суммы s и S — некоторые числа, а сумма σ — переменная величина, так как точки ξ_i произвольны.

3. Свойства сумм Дарбу. 1°. *Для любого фиксированного разбиения τ и для любого $\varepsilon>0$ точки ξ_i на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ можно выбрать так, что интегральная сумма σ будет удовлетворять неравенствам $0 \leqslant S-\sigma<\varepsilon$. Точки ξ_i можно выбрать также и таким образом, что интегральная сумма будет удовлетворять неравенствам $0 \leqslant \sigma-s<\varepsilon$.*

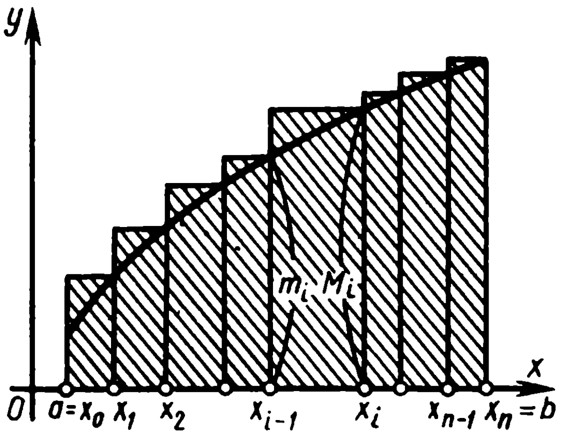


Рис. 94

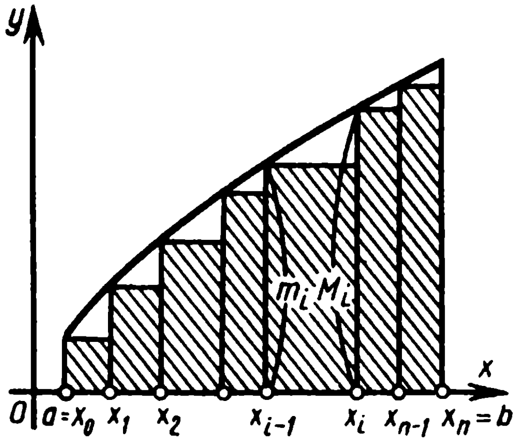


Рис. 95

Доказательство. Пусть τ — некоторое фиксированное разбиение отрезка $[a, b]$. Докажем, например, неравенства $0 \leqslant S-\sigma<\varepsilon$. Согласно свойству точной верхней грани M_i для данного $\varepsilon>0$ на $[x_{i-1}, x_i]$ можно указать такую точку ξ_i, что

$$0 \leqslant M_i - f(\xi_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Умножая эти неравенства на Δx_i и затем складывая, получаем $0 \leqslant S-\sigma<\varepsilon$. Аналогично устанавливаются неравенства $0 \leqslant \sigma-s<\varepsilon$. ■

2°. *От добавления к данному разбиению τ отрезка $[a, b]$ новых точек разбиения нижняя сумма Дарбу не уменьшается, а верхняя — не увеличивается.*

Доказательство. Для доказательства достаточно ограничиться добавлением к данному разбиению τ еще одной точки разбиения x', так как добавление нескольких точек разбиения можно провести, добавляя их по одной. Предположим, что эта новая точка x' попала на отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ (рис. 96). Обозначим соответственно через s и s' — нижние, а через S и S' — верхние суммы Дарбу для данного разбиения τ и полученного из него добавлением точки x' разбиения τ'.

Проведем доказательство для нижних сумм Дарбу s и s'. Обозначим через m'_i и m''_i точные нижние грани функции $f(x)$ соответственно на отрезках $[x_{i-1}, x']$ и $[x', x_i]$. В сумму s входит слагаемое $m_i\Delta x_i$, а в сумму s' вместо него слагаемые $m'_i(x'-x_{i-1})+$ $+m''_i(x_i-x')$. Остальные слагаемые в суммах s и s' одинаковы. Так как $m'_i\geqslant m_i$, $m''_i\geqslant m_i$ (точная нижняя грань на части $[x_{i-1}, x_i]$ не меньше точной нижней грани на всем $[x_{i-1}, x_i]$), то

$$m'_i(x'-x_{i-1})+m''_i(x_i-x')\geqslant m_i(x'-x_{i-1})+m_i(x_i-x')=m_i\Delta x_i.$$

Отсюда следует, что $s'\geqslant s$.

Аналогично доказывается, что $S'\leqslant S$. ■

3°. *Нижняя сумма Дарбу для любого разбиения τ' не превосходит верхней суммы для любого другого разбиения τ''.*

Доказательство. Пусть s' и S', s'' и S'' — нижняя и верхняя суммы Дарбу соответственно для разбиений τ' и τ''. Рассмотрим разбиение τ, состоящее из всех точек, входящих в разбиения τ' и τ''. Обозначим его суммы Дарбу через s и S. Так как разбиение τ может быть получено из разбиения τ' добавлением к нему точек разбиения τ'', то согласно свойству 2°, учитывая очевидное неравенство $s\leqslant S$, получаем

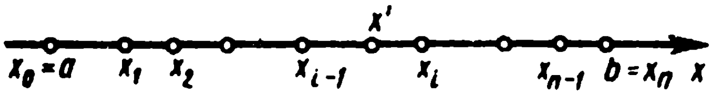


Рис. 96

$$s'\leqslant s\leqslant S\leqslant S'.$$

Но разбиение τ может быть также получено из разбиения τ'' добавлением точек разбиения τ'. Поэтому

$$s''\leqslant s\leqslant S\leqslant S''.$$

Сравнивая установленные неравенства, получаем $s'\leqslant S''$, $s''\leqslant$ $\leqslant S'$. ■

4°. *Множество $\{S\}$ верхних сумм Дарбу данной функции $f(x)$ для всевозможных разбиений отрезка $[a, b]$ ограничено снизу, а множество $\{s\}$ нижних сумм Дарбу ограничено сверху, причем точная верхняя грань множества $\{s\}$ не превосходит точную нижнюю грань множества $\{S\}$.*

Доказательство. Это свойство непосредственно следует из свойства 3°. Действительно, множество всех верхних сумм Дарбу $\{S\}$ ограничено снизу, например, любой нижней суммой Дарбу s, а множество всех нижних сумм Дарбу $\{s\}$ ограничено сверху, например, любой верхней суммой Дарбу S. Поэтому по теореме 1.1 множества $\{S\}$ и $\{s\}$ имеют точные грани. Обозначим через I^* точную нижнюю грань множества $\{S\}$, а через I_* — точную верхнюю грань множества $\{s\}$:

$$I^* = \inf\{S\}, I_* = \sup\{s\}.$$

Покажем, что $I_* \leqslant I^*$. Пусть $I_* > I^*$. Обозначим их разность через ε, так что $I_* - I^* = \varepsilon > 0$. Из свойства точных граней I_* и I^* вытекает, что существуют числа S' и s'', представляющие собой соответственно верхнюю и нижнюю суммы Дарбу некоторых разбиений τ' и τ'' отрезка $[a, b]$, такие, что $I^* + \varepsilon/2 > S'$ и $I_* - \varepsilon/2 < s''$. Вычитая второе неравенство из первого, получаем $S' - s'' < I^* - I_* + \varepsilon$. Но $I^* - I_* = -\varepsilon$, поэтому $S' - s'' < 0$, т. е. $s'' > S'$, что противоречит свойству 3°. Следовательно, $I_* \leqslant I^*$. ■

4. Необходимое и достаточное условие интегрируемости. Имеет место следующая основная теорема.

Теорема 8.2. *Для того чтобы ограниченная на отрезке* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\lambda\to 0}(S - s) = 0. \tag{2}$$

Условие (2) *означает, что для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что при* $\lambda < \delta$ *выполняется неравенство* $|S - s| < \varepsilon$. *Так как* $s \leqslant S$, *то последнее неравенство равносильно неравенству*

$$S - s < \varepsilon. \tag{3}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, т. е. существует определенный интеграл $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения τ, удовлетворяющего условию $\lambda < \delta$, независимо от выбора точек ξ_i выполняется неравенство

$$|\sigma - I| < \varepsilon/4. \tag{4}$$

Зафиксируем любое такое разбиение τ. Для него согласно свойству 1° можно указать такие интегральные суммы σ' и σ'', что

$$S - \sigma' \leqslant \varepsilon/4, \sigma'' - s \leqslant \varepsilon/4. \tag{5}$$

Отметим, что обе интегральные суммы σ' и σ'' удовлетворяют неравенству (4). Из соотношения

$$S - s = (S - \sigma') + (\sigma' - I) + (I - \sigma'') + (\sigma'' - s)$$

и неравенств (4) и (5) следует, что

$$S - s < \varepsilon,$$

а это и означает выполнение условия (3).

Достаточность. Пусть выполнено условие (3). Согласно свойству 4° $s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S$ для любых нижних и верхних сумм Дарбу, поэтому $0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S - s$, откуда согласно (3) следует, что $0 \leqslant I^* - I_* < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Значит, $I^* - I_* = 0$, т. е. $I^* = I_*$. Полагая $I = I^* = I_*$, получаем, что для любого разбиения выполняются неравенства

$$s \leqslant I \leqslant S. \tag{6}$$

Если же интегральная сумма σ и суммы Дарбу s и S отвечают одному и тому же разбиению τ, то, как известно [см. формулу (1)],

$$s \leqslant \sigma \leqslant S. \tag{7}$$

Из неравенств (6) и (7) следует, что

$$|\sigma - I| \leqslant S - s. \tag{8}$$

По условию для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\lambda < \delta$ выполняется неравенство (3): $S - s < \varepsilon$. Но тогда из неравенства (8) следует, что и

$$|\sigma - I| < \varepsilon \text{ при } \lambda < \delta,$$

а это означает, что число I является пределом интегральной суммы σ при $\lambda \to 0$, т. е. функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. ■

В дальнейшем понадобится другая форма записи необходимого и достаточного условия интегрируемости. Обозначая колебание $M_i - m_i$ функции $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ через ω_i, имеем

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i.$$

Так как $M_i \geqslant m_i$ и $\Delta x_i > 0$, то каждое слагаемое в последней сумме неотрицательно, и условие существования определенного интеграла можно переписать так: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \text{ при } \lambda < \delta.$$

В таком виде его обычно и применяют.

§ 3. Интегрируемость непрерывных и некоторых разрывных функций

Теорема 8.3. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на нем.*

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по теореме Кантора она и равномерно-непрерывна на нем. Пусть дано любое $\varepsilon > 0$. Согласно следствию из теоремы Кантора для положительного числа $\varepsilon/(b-a)$ найдется $\delta > 0$ такое, что при разбиении отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, длина которых $\Delta x_i < \delta$, все колебания ω_i меньше $\varepsilon/(b-a)$.

Отсюда

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon \qquad \text{при } \lambda < \delta.$$

Следовательно, для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ выполнено достаточное условие интегрируемости, а из него вытекает существование определенного интеграла*. ■

Как следует из теоремы, условие непрерывности функции является достаточным условием интегрируемости функции. Но это не означает, что определенный интеграл существует только для непрерывных функций. Класс интегрируемых функций гораздо шире. Так, например, существует определенный интеграл от функций, имеющих конечное число точек разрыва. Докажем это.

Теорема 8.4. *Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и непрерывна на нем всюду, кроме конечного числа точек, то она интегрируема на этом отрезке.*

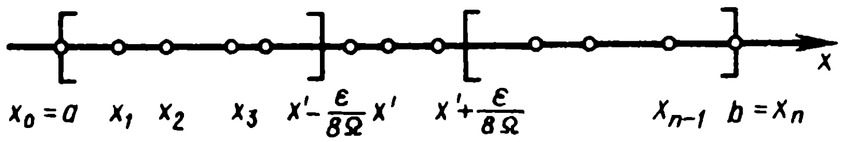


Рис. 97

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда между a и b имеется лишь одна точка разрыва x'. Пусть M и m — точные грани функции $f(x)$ на $[a, b]$, $\Omega = M - m$ — ее колебание на данном отрезке. Возьмем любое достаточно малое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим отрезки $[a, x' - \varepsilon/(8\Omega)]$ и $[x' + \varepsilon/(8\Omega), b]$ (рис. 97). На каждом из этих отрезков $f(x)$ непрерывна, и, следовательно, найдется $\delta' > 0$ такое, что при разбиении их на частичные отрезки $[x'_{i-1}, x'_i]$ с длинами $\Delta x'_i < \delta'$ все колебания ω'_i меньше $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Пусть $\delta = \min\{\delta', \varepsilon/(8\Omega)\}$. Рассмотрим теперь произвольное разбиение $[a, b]$ на частичные отрезки, длина которых $\Delta x_i < \delta$ (рис. 97). Для этого разбиения сумму $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$ разобьем на слагаемые $\sum' \omega_i \Delta x_i + \sum'' \omega_i \Delta x_i$, где в первую сумму входят частичные отрезки, лежащие целиком вне $\varepsilon/(8\Omega)$-окрестности точки x', а во вторую — частичные отрезки, либо заключенные целиком внутри $\varepsilon/(8\Omega)$-окрестности точки x', либо имеющие с ней общие точки.

Для первой суммы, как и при доказательстве предыдущей теоремы, имеем

$$\sum{}' \omega_i \Delta x_i < \varepsilon/2,$$

что касается второй суммы, то заметим, что длины отрезков, целиком попавших внутрь $\varepsilon/(8\Omega)$-окрестности точки x', в сумме меньше или равны $\varepsilon/(4\Omega)$; число отрезков, лишь частично попавших в эту

* Более простое доказательство теоремы см. кн.: Шипачев В. С. «Основы высшей математики», 1994.

окрестность, не больше двух, поэтому сумма их длин меньше $2\delta \leqslant$ $\leqslant \varepsilon/(4\Omega)$. Следовательно,

$$\sum'' \omega_i \Delta x_i \leqslant \Omega \sum'' \Delta x_i < \Omega \frac{\varepsilon}{2\Omega} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum' \omega_i \Delta x_i + \sum'' \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ при } \lambda < \delta.$$

Это и доказывает интегрируемость функции $f(x)$ на $[a, b]$. ■

Следствие. *Кусочно-непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.*

§ 4. Основные свойства определенного интеграла

1°. Интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ был введен для случая $a<b$. Обобщим понятие определенного интеграла на случай, когда пределы интегрирования совпадают или нижний предел больше верхнего. *По определению полагаем*

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0, \tag{1}$$

рассматривая эту формулу как естественное распространение понятия определенного интеграла на отрезок нулевой длины.

Также *по определению полагаем*

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx, \tag{2}$$

рассматривая формулу (2) *как естественное распространение понятия определенного интеграла на случай, когда отрезок* $[a, b]$ *при* $a<b$ *пробегается в направлении от* b *к* a. В этом случае точки разбиения x_i отрезка $[a, b]$ занумерованы в порядке следования от b к a и в интегральной сумме все разности $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ имеют отрицательный знак.

2°. *Каковы бы ни были числа* a, b, c, *имеет место равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

(Здесь и в § 4 и 5 предполагается, что интегралы, входящие в доказываемые формулы, существуют).

Доказательство. Допустим сначала, что $a<c<b$. Так как предел интегральной суммы σ не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$, то будем разбивать $[a, b]$ так, чтобы точка c была точкой разбиения. Если, например, $c = x_m$, то σ можно раз-

бить на две суммы:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\lambda \to 0$, получаем равенство (3).

Суть доказанного свойства состоит в том, что определенный интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по его частям.

Доказательство для другого расположения точек a, b, c легко сводится к рассмотренному случаю. Пусть, например, $a<b<c$; тогда по доказанному имеем

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

откуда, учитывая (2), получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

т. е. опять пришли к равенству (3). ■

3°. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т. е.*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Доказательство. Действительно, для любого разбиения отрезка $[a, b]$ и любого выбора точек ξ_i

$$\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\,\Delta x_i = k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, имеем

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\,\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0} k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$= k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = k\int_a^b f(x)\,dx,$$

т. е. получено равенство (4). ■

4°. *Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их интегралов, т. е.*

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Действительно, для любого разбиения отрезка $[a, b]$ и любого выбора точек ξ_i

$$\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i) \Delta x_i.$$

Так как

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx \text{ и } \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b g(x)\, dx,$$

то

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \pm \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i) \Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx. \blacksquare$$

Замечание. Свойство 4° имеет место для любого конечного числа слагаемых.

§ 5. Оценки интегралов. Формула среднего значения

1. Оценки интегралов (всюду в этом параграфе считаем, что $a < b$). 1°. *Если всюду на отрезке* $[a, b]$ *функция* $f(x) \geqslant 0$, *то*

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0.$$

Доказательство. В самом деле, любая интегральная сумма $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$ для функции $f(x)$ на $[a, b]$ неотрицательна, так как

$$f(\xi_i) \geqslant 0, \Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$ в неравенстве $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \geqslant 0$, получаем

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0. \blacksquare$$

2°. *Если всюду на отрезке* $[a, b]$ $f(x) \leqslant g(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b g(x)\, dx. \qquad (1)$$

Доказательство. Применяя оценку 1° к функции $g(x)-f(x)\geqslant 0$, имеем

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx \geqslant 0.$$

Но согласно свойству 4°

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0,$$

откуда получаем неравенство (1). ■

3°. *Для функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$, имеет место неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{2}$$

Доказательство. Применяя оценку 2° к очевидным неравенствам $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant |f(x)|$, получаем

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

а это равносильно неравенству (2). ■

Следствие. *Если всюду на отрезке $[a, b]$ $|f(x)|\leqslant k$, то*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant k(b-a). \tag{3}$$

Действительно, из неравенства $|f(x)|\leqslant k$ и оценок 2° и 3° следует, что

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b k\,dx = k\int_a^b dx.$$

Отсюда, замечая, что

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} 1\cdot \Delta x_i = b-a, \tag{4}$$

получаем соотношение (3).

4°. *Если m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{5}$$

Доказательство. По условию для любого $x\in[a, b]$ имеем

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Применяя оценку 2° к этим неравенствам, имеем

$$m\int_a^b dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\int_a^b dx,$$

откуда с учетом (4) получаем неравенства (5). ■

2. Формула среднего значения. Теорема 8.5 (теорема о среднем). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка c такая, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{6}$$

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по второй теореме Вейерштрасса существуют числа m и M такие, что

$$\min_{[a,b]} f(x) = m \leqslant f(x) \leqslant M = \max_{[a,b]} f(x).$$

Отсюда в силу оценки 4° получаем

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

и, следовательно,

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leqslant M.$$

Положим

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = \mu \quad (m \leqslant \mu \leqslant M).$$

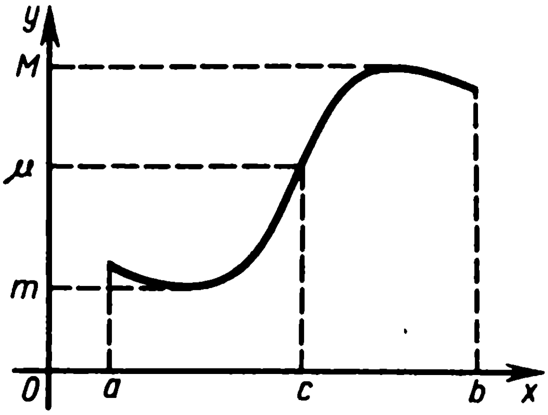


Рис. 98

Так как число μ заключено между наименьшими и наибольшими значениями непрерывной функции $f(x)$ на $[a, b]$ (рис. 98), то по теореме 4.10 о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение существует точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = \mu$. Поэтому

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c),$$

а это равносильно равенству (6). ■

Равенство (6) называется *формулой среднего значения*, а величина $f(c)$ — средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Замечание. Теорема о среднем имеет геометрический смысл: величина определенного интеграла при $f(x) \geqslant 0$ равна площади прямоугольника, имеющего высоту $f(c)$ и основание $b-a$.

§ 6. Интеграл с переменным верхним пределом

До сих пор мы рассматривали определенный интеграл с постоянными пределами интегрирования a и b. Если изменять, например, верхний предел так, чтобы не выйти за пределы отрезка $[a, b]$, то величина интеграла будет изменяться. Другими словами, интеграл с переменным верхним пределом представляет собой функцию своего верхнего предела.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^x f(t)\,dt$* $(a \leqslant x \leqslant b)$ с постоянным нижним пределом a и переменным верхним пределом x. Величина этого интеграла является функцией верхнего предела x. Обозначим эту функцию через $\Phi(x)$, т. е. положим

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \qquad (1)$$

и назовем ее *интегралом с переменным верхним пределом*. Геометрически функция $\Phi(x)$ представляет собой площадь заштрихованной на рис. 99 криволинейной трапеции, если $f(x) > 0$.

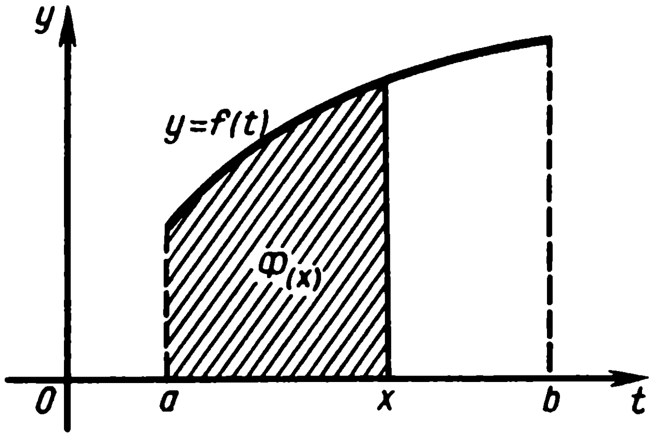


Рис. 99

Значение интеграла с переменным верхним пределом раскрывает следующая теорема.

Теорема 8.6. *Производная интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу, т. е.*

$$\Phi'(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x). \qquad (2)$$

Доказательство. Возьмем любое значение $x \in [a, b]$ и придадим ему приращение $\Delta x \neq 0$ такое, чтобы $x + \Delta x \in [a, b]$, т. е. $a \leqslant x + \Delta x \leqslant b$. Тогда функция $\Phi(x)$, определенная выражением (1), получит новое значение:

$$\Phi(x + \Delta x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Согласно свойству 2° определенного интеграла (см. § 4) имеем

$$\Phi(x + \Delta x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \Phi(x) + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

---

* Для удобства переменную интегрирования обозначили буквой t, так как x — верхний предел интегрирования.

Отсюда находим приращение функции $\Phi(x)$:

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Применяя теорему 8.5, получаем

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=f(c)\,\Delta x,$$

где c — число, заключенное между числами x и $x+\Delta x$. Разделим обе части равенства на Δx:

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(c).$$

Если теперь $\Delta x\to 0$, то $c\to x$, и тогда, в силу непрерывности функции $f(x)$ на $[a, b]$, $f(c)\to f(x)$. Поэтому, переходя к пределу при $\Delta x\to 0$ в последнем равенстве, получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)=\lim_{c\to x} f(c)=f(x)$$

или $\Phi'(x)=f(x)$. ■

Таким образом, установлено, что любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную, причем функция $\Phi(x)$ — интеграл с переменным верхним пределом — является первообразной для $f(x)$. А так как всякая другая первообразная для функции $f(x)$ может отличаться от $\Phi(x)$ только на постоянную (см. теорему 7.1), то установлена связь между неопределенным и определенным интегралами в виде

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t+C,$$

где C — произвольная постоянная.

§ 7. Формула Ньютона—Лейбница

Вычисление определенных интегралов методом, основанным на определении интеграла как предела интегральной суммы, как правило, связано с большими трудностями. Существует более удобный метод вычисления определенных интегралов, который, как будет показано, основан на установленной в § 6 связи между неопределенным и определенным интегралами.

Выше установлено, что функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, имеет на этом отрезке первообразные, причем одной из них является функция

$$\Phi(x)=\int\limits_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Пусть $F(x)$ — любая другая первообразная для функции $f(x)$ на том же отрезке $[a, b]$. Так как первообразные $\Phi(x)$ и $F(x)$ отличаются на постоянную, то имеет место равенство

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) + C,\ a \leqslant x \leqslant b,$$

где C — некоторое число. Подставляя в это равенство значение $x=a$ и используя формулу (1) из § 4, имеем

$$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) + C,\ 0 = F(a) + C,\ C = -F(a),$$

т. е. для любого $x \in [a, b]$

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

Полагая $x=b$, получаем основную формулу интегрального исчисления

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \tag{1}$$

которая называется *формулой Ньютона—Лейбница.*

Разность $F(b) - F(a)$ принято условно записывать так:

$$F(x)\big|_a^b \text{ или } [F(x)]_a^b,$$

и поэтому формула (1) принимает вид

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b.$$

Подчеркнем, что в формуле (1) в качестве $F(x)$ можно взять любую первообразную для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Формула (1) дает простой метод вычисления определенного интеграла: определенный интеграл от непрерывной функции равен разности значений любой ее первообразной, вычисленных для верхнего и нижнего пределов интегрирования. Эта формула открывает широкие возможности для вычисления определенных интегралов, поскольку задача вычисления определенного интеграла сводится к задаче вычисления неопределенного интеграла, которая достаточно полно изучена.

Рассмотрим примеры.

1. $\displaystyle\int_a^b \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\big|_a^b = \cos a - \cos b.$

2. $\displaystyle\int_0^2 (3x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = [x^3 - x]_0^2 = (2^3 - 2) - (0^3 - 0) = 6.$

3. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

4. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) =$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

5. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^3 = \ln\left(3+\sqrt{10}\right).$

Замечание. Формула Ньютона—Лейбница была выведена в предположении, что подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна. При некоторых условиях формула Ньютона—Лейбница имеет место и для разрывных функций.

§ 8. Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 8.7. *Пусть* $f(x)$ — *непрерывная функция на отрезке* $[a, b]$. *Тогда, если:* 1) *функция* $x = \varphi(t)$ *дифференцируема на* $[\alpha, \beta]$ *и* $\varphi'(t)$ *непрерывна на* $[\alpha, \beta]$; 2) *множеством значений функции* $x = \varphi(t)$ *является отрезок* $[a, b]$; 3) $\varphi(\alpha) = a$ *и* $\varphi(\beta) = b$ (рис. 100), *то справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

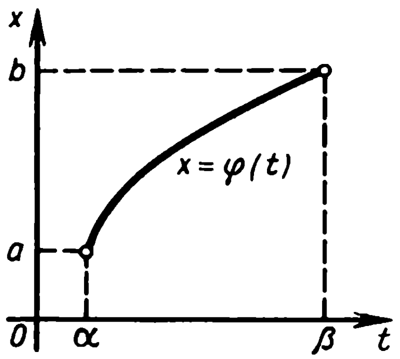


Рис. 100

Доказательство. По формуле Ньютона—Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$ на $[a, b]$. С другой стороны, рассмотрим на отрезке $[\alpha, \beta]$ сложную функцию от переменной t: $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции находим

$$\Phi'(t) = F'[\varphi(t)]\,\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\,\Phi'(t).$$

Отсюда следует, что функция $\Phi(t)$ является первообразной для функции $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$, непрерывной на $[\alpha, \beta]$, и поэтому, согласно формуле Ньютона—Лейбница, получаем

$$\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] =$$

$$= F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Этим доказана справедливость формулы (1). ■

Формула (1) называется *формулой замены переменной* или *подстановки в определенном интеграле*.

Замечание 1. Если при вычислении неопределенного интеграла с помощью замены переменной от новой переменной t следует возвращаться к старой переменной x, то при вычислении определенного интеграла этого делать не нужно, так как теперь следует найти число, которое согласно доказанной формуле равно значению каждого из рассматриваемых интегралов.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решение. Рассмотрим подстановку $x=\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$. Проверим законность такой подстановки.

Во-первых, функция $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ непрерывна на $[0, 1]$; во-вторых, функция $x=\sin t$ дифференцируема на $[0, \pi/2]$ и $x'_t = \cos t$ непрерывна на $[0, \pi/2]$ и, в-третьих, при изменении t от 0 до $\pi/2$ функция $x=\sin t$ изменяется от 0 до 1, причем $x(0)=0$ и $x(\pi/2)=1$. Таким образом, данная подстановка удовлетворяет всем условиям теоремы 8.7. Применяя формулу (1), получаем

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

Замечание 2. При использовании формулы (1) необходимо проверять выполнение перечисленных в теореме условий. Если эти условия нарушаются, то может быть получен и неверный результат.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}x$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}x = x\,\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+\cos^2 x} = \int\limits_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x(1+\mathrm{tg}^2 x)}.$$

Подстановка $\mathrm{tg}\,x=t$ формально приводит к следующему результату:

$$\int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}(\mathrm{tg}\,x)}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \int\limits_0^{0} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 0.$$

Получен неверный результат, так как $\pi \neq 0$. Это произошло потому, что функция $t=\mathrm{tg}\,x$ разрывна при $x=\pi/2$ и не удовлетворяет условиям теоремы 8.7.

§ 9. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

Теорема 8.8. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула*

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u. \qquad (1)$$

Доказательство. Так как функция $u(x)\ v(x)$ является первообразной для функции $[u(x)\ v(x)]' = u(x)\ v'(x) + v(x)\ u'(x)$, то по формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b [u(x)\,v'(x) + v(x)\,u'(x)]\,\mathrm{d}x = [u(x)\,v(x)]_a^b.$$

Отсюда, используя свойство 4° определенных интегралов (см. § 4), получаем

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b v(x)\,u'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)\ v(x)]_a^b,$$

или, что то же самое,

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v + \int_a^b v\,\mathrm{d}u = uv\Big|_a^b,$$

откуда и следует формула (1). ■

Формула (1) называется *формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.*

Пример 1. Вычислить $\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$.

Решение. Положим $u = \ln x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$; отсюда $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, $v = x$ и по формуле (1) находим

$$\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{\mathrm{d}x}{x} = [x\ln x - x]_1^e = 1.$$

Пример 2. Вычислить $\int_1^2 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Решение. Положим $u = x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$; отсюда $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $v = \mathrm{e}^x$ и по формуле (1) имеем

$$\int_1^2 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x\Big|_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x(x-1)]_1^2 = \mathrm{e}^2.$$

Пример 3. Вычислить $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

Решение. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$; отсюда $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$, и по формуле (1) находим

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x \, dx}{1+x^2} =$$

$$= \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}.$$

§ 10. Некоторые физические и геометрические приложения определенного интеграла

1. Площадь криволинейной трапеции. Пусть на плоскости Oxy дана фигура, ограниченная отрезком $[a, b]$ оси Ox, прямыми

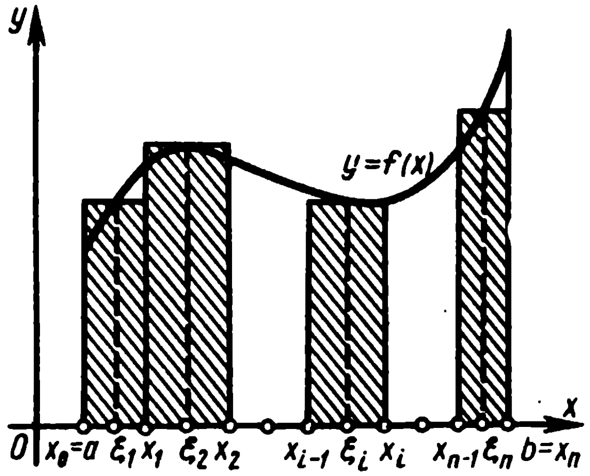


Рис. 101

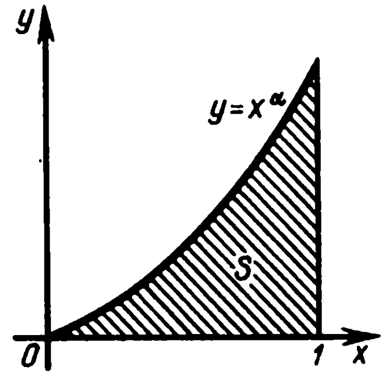


Рис. 102

$x = a$, $x = b$ и графиком непрерывной и неотрицательной функции $y = f(x)$ на $[a, b]$. Это криволинейная трапеция, площадь s* которой может быть вычислена по формуле

$$s = \int_a^b f(x) \, dx. \qquad (1)$$

Доказательство. Разобьем произвольно отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots \ldots < x_n = b$, выберем на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ произвольно точку ξ_i $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$ и рассмотрим ступенчатую фигуру (рис. 101). Площадь s криволинейной трапеции приближенно равна площади ступенчатой фигуры:

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \, \Delta x_i,$$

---

* О понятиях площади произвольной плоской фигуры, объема тела, площади поверхности, а также о теоремах, которые будут приниматься без доказательства, см. книгу: *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа, М., 1989. Т. 1, 2.

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Естественно считать, что при $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta x_i\} \to 0$ площадь ступенчатой фигуры стремится к площади криволинейной трапеции. С другой стороны, площадь ступенчатой фигуры является интегральной суммой для интеграла (1). Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то предел этой суммы при $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta x_i\} \to 0$ существует и равен интегралу от функции $f(x)$ по $[a, b]$. Следовательно, и площадь s криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу от функции $f(x)$ по $[a, b]$:

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx. \blacksquare$$

Итак, *определенный интеграл от неотрицательной непрерывной функции $f(x)$ по $[a, b]$ численно равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$*. В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла.

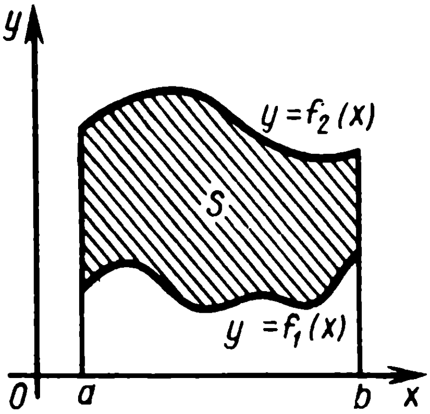


Рис. 103

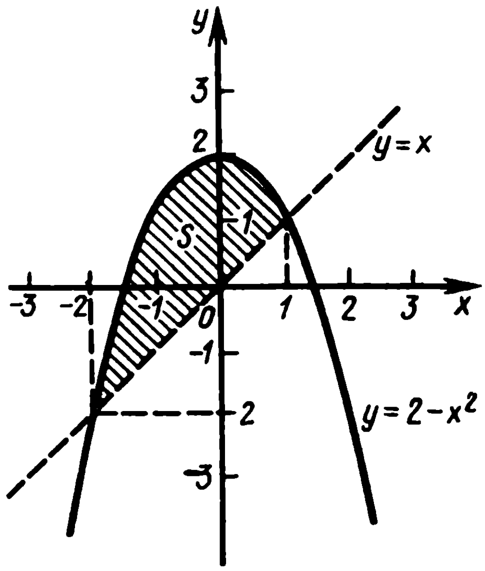


Рис. 104

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^\alpha$, $\alpha > 0$, прямой $x = 1$ и осью Ox (рис. 102).

Решение. По формуле (1) имеем

$$s = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Если $\alpha = 1$, то $s = 1/2$; если $\alpha = 1$, то $s = 1/3$, и т. д.

Пусть фигура ограничена снизу и сверху графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (рис. 103), где $f_1(x)$, $f_2(x)$ — две непрерывные функции. Если обе функции неотрицательны, то площадь s данной фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций, ограниченных сверху соответственно графиками функций $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$. Следовательно,

$$s = \int_a^b f_2(x)\, dx - \int_a^b f_1(x)\, dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx. \tag{2}$$

Заметим, что формула (2) справедлива и тогда, когда $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не являются неотрицательными. В самом деле, в силу их ограниченности существует число $h>0$ такое, что функции $f_1^*(x)=f_1(x)+h$, $f_2^*(x)=f_2(x)+h$ являются неотрицательными, и имеет место очевидное равенство

$$\int_a^b [f_2^*(x)-f_1^*(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\,\mathrm{d}x.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=f_1(x)=x$ и $y=f_2(x)=2-x^2$ (рис. 104).

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения прямой $y=x$ с параболой $y=2-x^2$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y=x, \\ y=2-x^2, \end{cases}$$

получаем $x_1=-2$, $x_2=1$. Это и есть пределы интегрирования. Искомая площадь фигуры согласно формуле (2) такова:

$$s=\int_{-2}^{1}[f_2(x)-f_1(x)]\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}[(2-x^2)-x]\,\mathrm{d}x=\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}.$$

Замечание. Для вычисления площади криволинейной трапеции в случае, когда верхняя граница задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, причем $\varphi(\alpha)=a$,

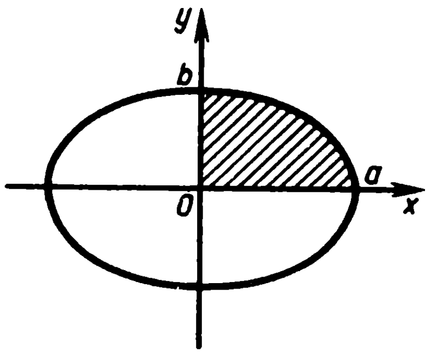


Рис. 105

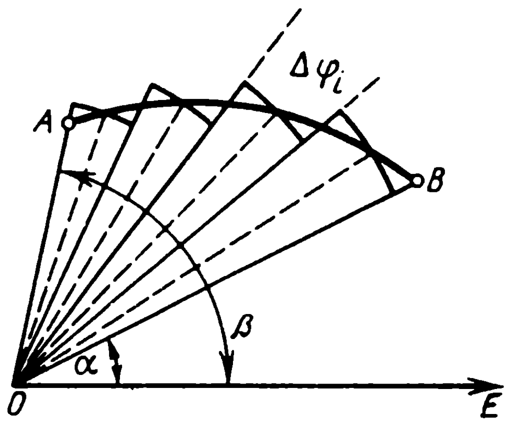


Рис. 106

$\varphi(\beta)=b$, в формуле (1) надо сделать замену переменной, положив $x=\varphi(t)$, $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. Тогда получим

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

Решение. Эллипс симметричен относительно осей координат, поэтому достаточно вычислить площадь части фигуры, находящейся в I четверти (рис. 105). Следовательно, искомая площадь равна

$$s = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t\,(a\cos t)'\,\mathrm{d}t = 4ab\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 t\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2ab\int_{0}^{\pi/2} (1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t = 2ab\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/2} = \pi ab.$$

В частности, если $a=b=R$, то получаем известную формулу площади круга πR^2.

2. Площадь криволинейного сектора. Пусть кривая AB задана в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$, причем функция $\rho(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[\alpha,\beta]$. Плоскую фигуру, ограниченную кривой AB и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β, будем называть *криволинейным сектором* (рис. 106). Площадь s криволинейного сектора

$$s = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi. \tag{3}$$

Доказательство. Разобьем произвольно отрезок $[\alpha,\beta]$ на n частей точками $\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\varphi_2<\ldots<\varphi_{i-1}<\varphi_i<\ldots$ $\ldots<\varphi_n=\beta$, выберем на каждом частичном отрезке $[\varphi_{i-1},\varphi_i]$ произвольно точку $\xi_i\,(\varphi_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant\varphi_i)$ и построим круговые секторы с радиусами $\rho(\xi_i)$. В результате получим веерообразную фигуру, площадь которой приближенно равна площади s криволинейного сектора:

$$s \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \rho^2(\xi_i)\,\Delta\varphi_i,$$

где $\Delta\varphi_i=\varphi_i-\varphi_{i-1}$. С другой стороны, площадь веерообразной фигуры является интегральной суммой для интеграла (3). Так как функция $\rho^2(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$, то предел этой суммы при $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\varphi_i\}\to 0$ существует и равен интегралу (3). Следовательно, и площадь криволинейного сектора численно равна этому определенному интегралу:

$$s = \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \rho^2(\xi_i)\,\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi. \blacksquare$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда: $\rho=a\varphi$, где a — положительное число (рис. 107).

Решение. При изменении φ от 0 до 2π полярный радиус описывает кривую, ограничивающую криволинейный сектор $OABC$. Поэтому по формуле (3) имеем

$$s_{OABC}=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{a^2}{2}\frac{8\pi^3}{3}=\frac{4}{3}\pi^3a^2.$$

Расстояние от точки C до полюса равно $\rho=2\pi a$. Поэтому круг радиуса OC имеет площадь $\pi\cdot OC^2=4\pi^3a^2=3\cdot\frac{4}{3}\pi^3a^2=3s_{OABC}$, т. е. площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда, равна $^1/_3$ площади круга с радиусом, равным наибольшему из полярных радиусов витка. К этому выводу пришел еще Архимед.

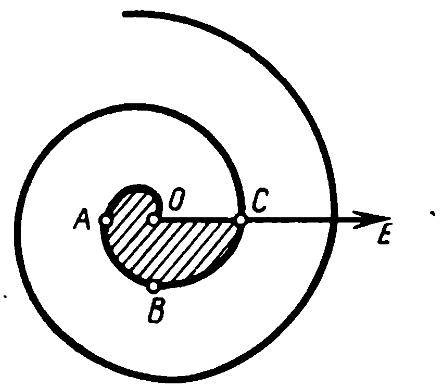


Рис. 107

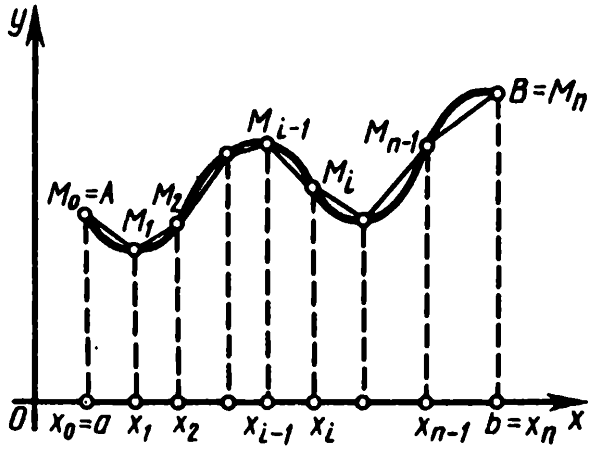


Рис. 108

3. Длина дуги кривой. Пусть плоская кривая AB задана уравнением $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, где $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Разобьем кривую AB на n произвольных частей точками $A=M_0$, M_1, M_2, ..., M_{i-1}, M_i, ..., $M_n=B$ в направлении от A к B. Соединив соседние точки хордами, получим некоторую вписанную в кривую AB ломаную, длину которой обозначим через P (рис. 108). Через l_i обозначим длину одного звена $M_{i-1}M_i$ ломаной, а через μ — длину наибольшего из ее звеньев: $\mu=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{l_i\}$.

Определение. *Число L называется пределом длин ломаных P при $\mu\to 0$ $\left(L=\lim\limits_{\mu\to 0}P\right)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всякой ломаной, у которой $\mu<\delta$, выполняется неравенство*

$$|L-P|<\varepsilon.$$

Если существует предел L длин P вписанных в кривую ломаных при $\mu\to 0$, то этот предел называется *длиной дуги AB*.

Если функция $f(x)$ непрерывна вместе с $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$, то длина L дуги AB выражается формулой

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим через $(x_i;\ f(x_i))$ координаты точки M_i, так что для абсцисс этих точек получим: $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$. Тогда длина l_i одного звена ломаной равна

$$l_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}.$$

По формуле Лагранжа

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),\ x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i.$$

Следовательно,

$$l_i=\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i,\ \Delta x_i=x_i-x_{i-1}.$$

Таким образом, длина всей ломаной равна

$$P=\sum_{i=1}^{n} l_i=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i.$$

Правая часть равенства представляет собой интегральную сумму для интеграла (4). Функция $\sqrt{1+f'^2(x)}$ непрерывна на $[a,\ b]$,

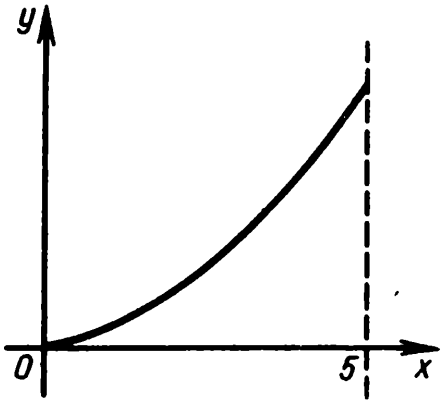


Рис. 109

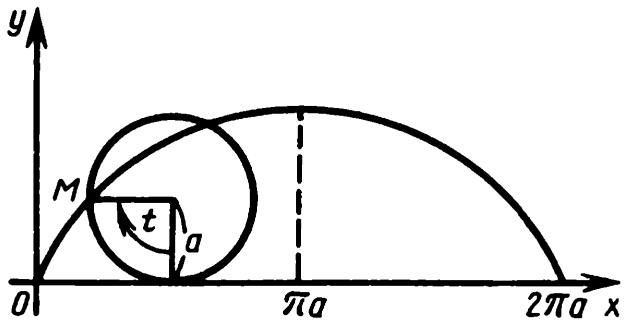


Рис. 110

поэтому предел этой суммы при $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\to 0$ существует и равен определенному интегралу (4). Так как $\lambda\leqslant\mu$*, то $\lambda\to 0$ при $\mu\to 0$. Следовательно,

$$L=\lim_{\mu\to 0}P=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x. \blacksquare$$

Пример 5. Вычислить длину дуги верхней ветви полукубической параболы $y=x^{3/2}$, если $0\leqslant x\leqslant 5$ (рис. 109).

Решение. Из уравнения $y=x^{3/2}$ находим: $y'=\frac{3}{2}x^{1/2}$. Следовательно, по формуле (4) получим

$$L=\int_0^5\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,\mathrm{d}x=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{3/2}\Big|_0^5=\frac{335}{27}.$$

---

* $l_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}$, откуда $|\Delta x_i|\leqslant l_i$.

Замечание 1. Для вычисления длины дуги в случае, когда кривая AB задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, где α и β — значения параметра t, соответствующие значениям $x=a$ и $x=b$, т. е. $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, в формуле $L=\int\limits_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$ надо сделать замену переменной, положив $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)\,dt$. Тогда получим

$$L=\int\limits_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\,\varphi'(t)\,dt=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt. \qquad (5)$$

Пример 6. Вычислить длину дуги одной арки циклоиды*: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ (рис. 110).

Решение. Из уравнений циклоиды находим: $\varphi'(t)=a(1-\cos t)$, $\psi'(t)=a\sin t$. Когда x пробегает отрезок $[0, 2\pi a]$, параметр t пробегает отрезок $[0, 2\pi]$. Следовательно, искомая длина дуги

$$L=\int\limits_0^{2\pi a}\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=2a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a.$$

Замечание 2. Для вычисления длины дуги в случае, когда кривая AB задана в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$, где $\rho(\varphi)$ имеет непрерывную производную $\rho'(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, и точкам A и B соответствуют значения φ, равные α и β, нужно перейти от полярных координат [см. гл. 3, § 3, формулу (1)] к прямоугольным. Тогда получим параметрическое задание кривой AB уравнениями $x=\rho(\varphi)\cos\varphi$, $y=\rho(\varphi)\sin\varphi$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$ (φ — параметр). Так как

$x'(\varphi)=\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi$, $y'(\varphi)=\rho'(\varphi)\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi$, то формула (5) принимает вид

$$L=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\rho(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi. \qquad (6)$$

Пример 7. Вычислить длину первого витка спирали Архимеда: $\rho=a\varphi$ (см. рис. 107).

Решение. Первый виток спирали образуется при изменении полярного угла φ от 0 до 2π. Поэтому по формуле (6) искомая

---

* Циклоида — плоская кривая, которую описывает точка M окружности радиуса a, катящейся без скольжения по прямой линии.

длина дуги равна

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi =$$

$$= a \left[\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\right) \right].$$

4. Объем тела вращения. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Тогда тело, которое образуется вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, имеет объем

$$v = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{7}$$

Доказательство. Разобьем произвольно отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots$ $\ldots < x_n = b$. На каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ построим прямоугольник (рис. 111). При вращении вокруг оси Ox каждый прямоугольник опишет цилиндр. Найдем объем i-го цилиндра, образованного вращением прямоугольника $PMNQ$:

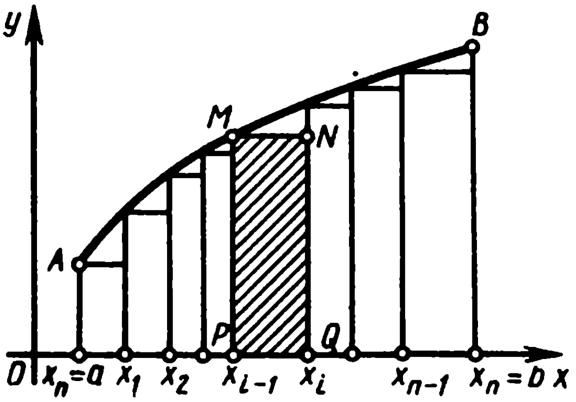


Рис. 111

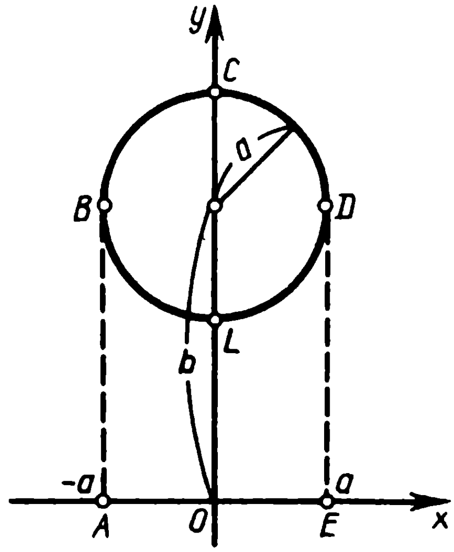


Рис. 112

$$v_i = \pi f^2(x_{i-1})\, \Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Сумма объемов всех n цилиндров приближенно равна объему данного тела вращения:

$$v \approx \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(x_{i-1})\, \Delta x_i.$$

С другой стороны, эта сумма является интегральной суммой для интеграла (7). Так как функция $f^2(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то предел этой суммы при $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta x_i\} \to 0$ существует и равен определенному интегралу (7). Таким образом,

$$v = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(x_{i-1})\, \Delta x_i = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \blacksquare$$

Пример 8. Вычислить объем тора. (Тором называется тело, получающееся при вращении круга радиуса a вокруг оси, лежащей в его плоскости на расстоянии b от центра круга ($b \geqslant a$). Форму тора имеет, например, баранка.)

Решение. Пусть круг вращается вокруг оси Ox (рис. 112). Объем тора можно представить как разность объемов тел, полученных от вращения криволинейных трапеций $ABCDE$ и $ABLDE$ вокруг оси Ox.

Уравнение окружности $LBCD$ имеет вид

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2,$$

причем уравнение кривой BCD

$$y = y_1(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2},$$

а уравнение кривой BLD

$$y = y_2(x) = b - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Используя формулу (7), получаем для объема v тора выражение

$$v = 2\pi \int_0^a y_1^2\,\mathrm{d}x - 2\pi \int_0^a y_2^2\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^a (y_1^2 - y_2^2)\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \int_0^a \left[\left(b + \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2\right] \mathrm{d}x =$$

$$= 8\pi b \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi^2 a^2 b.$$

5. Площадь поверхности вращения. Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и непрерывна вместе со своей первой производной на отрезке $[a, b]$. Тогда поверхность, образованная вращением графика этой функции вокруг оси Ox, имеет площадь P, которая может быть вычислена по формуле

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x. \quad (8)$$

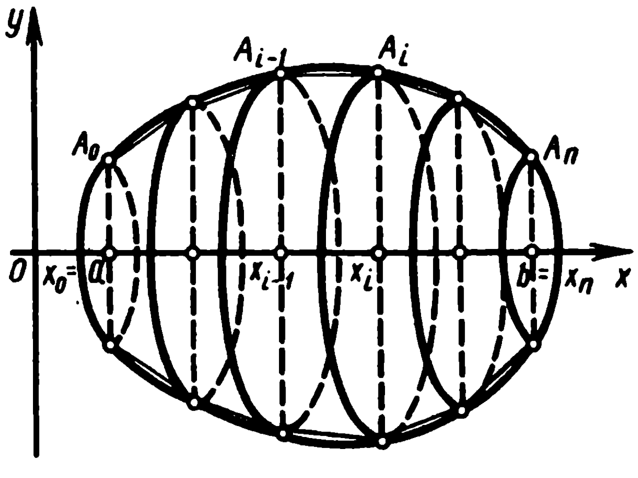


Рис. 113

Доказательство. Разобьем произвольно отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. Пусть A_0, A_1, A_2, ..., A_{i-1}, A_i, ..., A_n — соответствующие точки графика функции $f(x)$. Построим ломаную $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ (рис. 113). При вращении этой ломаной вокруг оси Ox получим поверхность, составленную из боковых поверхностей усеченных конусов (цилиндров). Площадь боковой поверхности усеченного конуса (цилиндра), образованного вращением i-го звена ломаной, равна $2\pi\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}l_i$, где l_i — длина хорды $A_{i-1}A_i$, т. е.

$$l_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}.$$

По формуле Лагранжа

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),\ x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i.$$

Полагая $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$, получаем

$$l_i=\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i.$$

Итак, площадь P поверхности вращения приближенно равна площади поверхности, полученной от вращения ломаной

$$P\approx\sum_{i=1}^{n}2\pi\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i.$$

Представим эту сумму в виде двух сумм

$$P\approx 2\pi\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i+$$

$$+\pi\left\{\sum_{i=1}^{n}[(f(x_{i-1})-f(\xi_i))+(f(x_i)-f(\xi_i))]\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i\right\}. \quad (9)$$

Первая сумма в правой части последнего равенства является интегральной суммой для интеграла (8), и при $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\to 0$ в силу непрерывности функции $f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$ имеет своим пределом этот интеграл. Покажем, что выражение в фигурных скобках в правой части равенства (9) имеет при $\lambda\to 0$ предел, равный нулю. Действительно, так как функция $f(x)$ равномерно-непрерывна на $[a, b]$, то по теореме Кантора для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что при $\lambda<\delta$ выполняются неравенства $|f(x_{i-1})-f(\xi_i)|<\varepsilon$ и $|f(x_i)-f(\xi_i)|<\varepsilon$. Если обозначить через M максимальное значение функции $\sqrt{1+f'^2(x)}$ на отрезке $[a, b]$, то выражение в фигурных скобках при $\lambda<\delta$ оценивается следующим образом:

$$\left|\left\{\sum_{i=1}^{n}[(f(x_{i-1})-f(\xi_i))+(f(x_i)-f(\xi_i))]\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i\right\}\right|<$$

$$<2M\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=2M(b-a)\,\varepsilon.$$

Так как ε произвольно мало, то отсюда следует, что предел указанного выражения равен нулю при $\lambda\to 0$.

Таким образом, переходя в равенстве (9) к пределу при $\lambda \to 0$, имеем

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx,$$

т. е. получена искомая формула (8). ■

Замечание. Если поверхность получается вращением вокруг оси Ox кривой AB, заданной параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, причем $\psi(t) \geqslant 0$, $\varphi(t)$ изменяется от a до b при изменении t от α до β, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то, производя в интеграле (8) замену переменной $x = \varphi(t)$, получаем

$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \tag{10}$$

Наконец, если кривая задана уравнением в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, где $\rho(\varphi)$ имеет непрерывную производную на $[\alpha, \beta]$, то этот случай, как уже отмечалось в п. 3, сводится к параметрическому заданию кривой $x = \rho(\varphi) \cos \varphi$, $y = \rho(\varphi) \sin \varphi$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, и формула (10) принимает вид

$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\varphi) \sin \varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

Пример 9. Вычислить площадь P поверхности шарового пояса, образованного вращением полуокружности $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R < a \leqslant x \leqslant b < R$, вокруг оси Ox.

Решение. По формуле (8) получаем

$$P = 2\pi \int_a^b \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_a^b R\, dx = 2\pi R(b - a) = 2\pi R h,$$

где h — высота пояса.

Пример 10. Вычислить площадь P поверхности, полученной вращением одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, вокруг оси Ox.

Решение. По формуле (10) имеем

$$P = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{(a \sin t)^2 + (a(1 - \cos t))^2}\, dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{3/2}\, dt = \frac{64}{3} \pi a^2.$$

6. Работа переменной силы. Из рассмотренных выше задач, связанных с геометрическим приложением определенного интеграла, следует, что для их решения применяется один и тот же вычислительный метод: приближенное значение искомой величины представляется в виде интегральной суммы, а затем предельным переходом получается точное значение в виде интеграла. С помощью этого же метода решается целый ряд других задач механики, физики и техники. В качестве примера вычислим работу переменной силы.

Пусть материальная точка перемещается под действием силы F, направленной вдоль оси Ox и имеющей переменную величину, зависящую от x. Требуется определить работу A, совершаемую силой F по перемещению материальной точки вдоль оси Ox из точки $x=a$ в точку $x=b\,(a<b)$. Функция $F(x)$ предполагается непрерывной на отрезке $[a, b]$ (рис. 114).

Разобьем произвольно отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$. Выберем на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ точку ξ_i. Сила, действующая на материальную точку на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, изменяется от точки к точке. Но если длина отрезка мала, то значение силы в точках отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ мало отличается от ее значения в любой точке $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$, так как $F(x)$ непре-

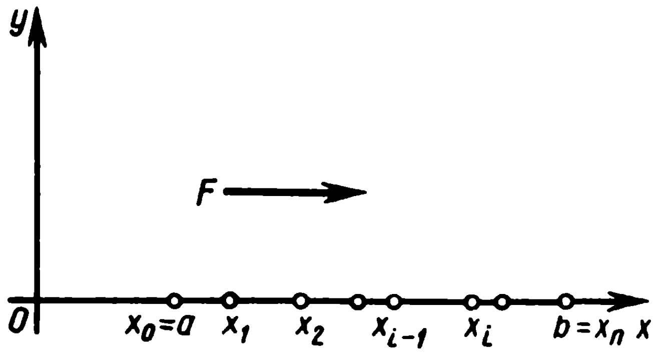


Рис. 114

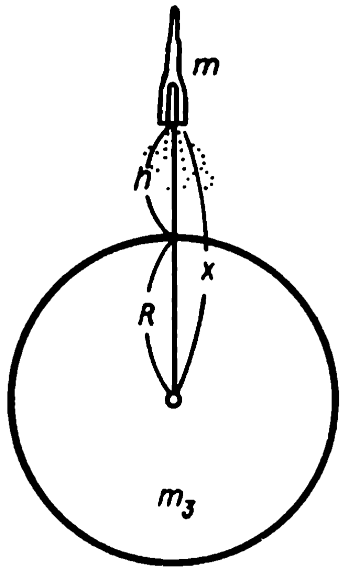


Рис. 115

рывна. Поэтому работу A_i, совершаемую силой F на $[x_{i-1}, x_i]$, можно считать приближенно равной работе, совершаемой на том же отрезке постоянной силой $F(\xi_i)$, т. е.

$$A_i \approx F(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Проводя аналогичные рассуждения для каждого отрезка разбиения, получаем приближенное значение работы A силы F на всем отрезке:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

С другой стороны, сумма в правой части равенства является интегральной суммой для функции $F(x)$. Так как функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то предел этой суммы при $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\to 0$ существует и равен определенному интегралу от функции $F(x)$ по отрезку $[a, b]$. Таким образом,

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\Delta x_i=\int_a^b F(x)\,dx. \qquad (11)$$

Пример 11. Определить работу A, необходимую для запуска тела массой m с поверхности Земли вертикально вверх на высоту h (рис. 115).

Р е ш е н и е. Обозначим через F силу притяжения тела Землей. Пусть m_3 — масса Земли. Согласно закону Ньютона

$$F = G\frac{mm_3}{x^2},$$

где x — расстояние от тела до центра Земли. Полагая $Gmm_3 = K$, получаем $F(x) = K/x^2$, $R \leqslant x \leqslant h+R$, где R — радиус Земли. При $x = R$ сила $F(R)$ равна весу тела $P = mg$, т. е. $K/R^2 = P$, откуда $K = PR^2$, и $F(x) = PR^2/x^2$. Таким образом, по формуле (11) получаем

$$A = \int\limits_R^{R+h} F(x)\,\mathrm{d}x = PR^2 \int\limits_R^{R+h} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -PR^2 \frac{1}{x}\Big|_R^{R+h} = \frac{PRh}{R+h}.$$

§ 11. Несобственные интегралы

Вводя определенный интеграл как предел интегральных сумм, мы предполагали, что отрезок интегрирования конечный, а подынтегральная функция ограничена на этом отрезке. Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то данное выше определение определенного интеграла теряет смысл. Так, в случае бесконечного отрезка интегрирования нельзя разбить отрезок на n частей конечной длины, а в случае неограниченной функции интегральная сумма не имеет конечного предела. Однако и на эти случаи можно обобщить понятие определенного интеграла. В результате такого обобщения и появилось понятие несобственного интеграла.

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема по любому отрезку $[a, R]$, т. е. существует определенный интеграл $\int\limits_a^R f(x)\,\mathrm{d}x$ при любом $R > a$. Тогда, если существует конечный предел*

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_a^R f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (1)$$

то его называют несобственным интегралом первого рода и обозначают

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

Таким образом, по определению,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_a^R f(x)\,\mathrm{d}x.$$

В этом случае говорят, что интеграл (2) существует или сходится. Если же предел (1) не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл (2) не существует или расходится.

Аналогично интегралу (2) вводится несобственный интеграл по промежутку $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_{R}^{b} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Наконец, как сумму интегралов вида (2) и (3) можно определить несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами, т. е.

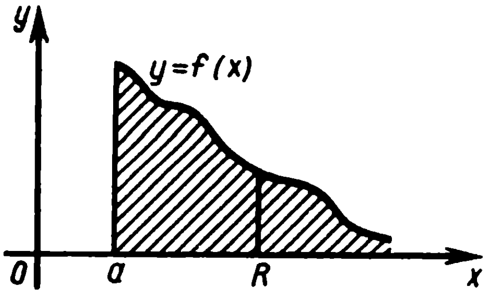


Рис. 116

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{4}$$

где c — любое число, при условии существования обоих интегралов справа.

Установим геометрический смысл несобственного интеграла первого рода. Пусть $f(x) \geqslant 0$. Тогда определенный интеграл $\int_{a}^{R} f(x)\,dx$ выражает площадь области, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, снизу — осью Ox, слева — прямой $x=a$, справа — прямой $x=R$. Естественно считать, что несобственный интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ выражает конечную площадь бесконечной области, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, снизу осью Ox, слева прямой $x=a$ (рис. 116). Аналогичная интерпретация имеет место для интегралов (3) и (4).

Рассмотрим несколько примеров вычисления несобственных интегралов первого рода.

Пример 1. $$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to+\infty} \int_{0}^{R} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to+\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^R = \lim_{R\to+\infty} \operatorname{arctg} R = \frac{\pi}{2},$$

т. е. данный интеграл сходится.

Пример 2. $$\int_{0}^{+\infty} \cos x\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{0}^{R} \cos x\,dx = \lim_{R\to+\infty} \sin x \Big|_0^R = \lim_{R\to+\infty} \sin R,$$

но предел функции $\sin R$ при $R\to+\infty$ не существует, следовательно, интеграл расходится.

Пример 3. $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^x\,dx;$$

интеграл расходится, так как

$$\int_0^{+\infty} e^x\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^x\,dx = \lim_{R\to+\infty} e^x\Big|_0^R = \lim_{R\to+\infty}(e^R-1)=\infty.$$

Пример 4. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$, α — некоторое число.

1) Если $\alpha\neq 1$, то для любого $R>0$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_1^R\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{R\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^R = \lim_{R\to+\infty}\frac{R^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases}\frac{-1}{1-\alpha} & \text{при } \alpha>1,\\ \infty & \text{при } \alpha<1.\end{cases}$$

2) Если $\alpha=1$, то для любого $R>0$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_1^R\frac{dx}{x} = \lim_{R\to+\infty}\ln x\Big|_1^R = \lim_{R\to+\infty}\ln R=\infty.$$

Таким образом, данный интеграл сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leqslant 1$.

Заметим, что в рассмотренных примерах вычисление несобственного интеграла было основано на его определении.

2. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b)$. Точку $x=b$ будем называть особой, если функция $f(x)$ неограничена в любой окрестности этой точки, но ограничена на любом отрезке $[a, b-\varepsilon]$, заключенном в $[a, b)$* (рис. 117). *Пусть на любом отрезке $[a, b-\varepsilon]$ функция $f(x)$ интегрируема, т. е. существует определенный интеграл $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ при любом $\varepsilon>0$ таком, что $b-\varepsilon>a$. Тогда, если существует конечный предел*

$$\lim_{\varepsilon\to0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \tag{5}$$

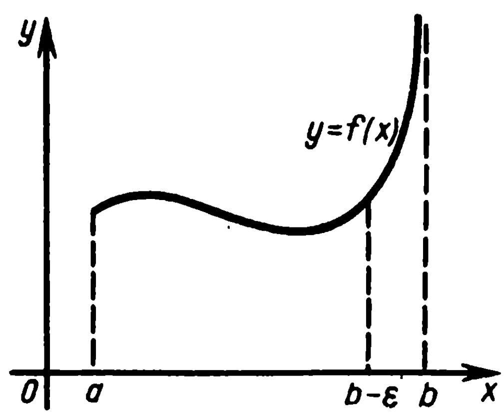


Рис. 117

то его называют несобственным интегралом второго рода и обозначают

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

В этом случае говорят, что интеграл (6) существует или сходится. Если же предел (5) не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл (6) не существует или расходится.

Аналогично, если $x=a$ — особая точка, то несобственный интеграл определяется так:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности какой-нибудь внутренней точки $c\in[a,\ b]$, то при условии существования обоих интегралов справа по определению полагают

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Наконец, если a и b — особые точки, то если оба интеграла справа существуют, несобственный интеграл определяется как сумма

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

где c — любая точка из (a, b).

Пример 5. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$, $\alpha>0$ — некоторое число.

1) Если $\alpha\neq 1$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \infty & \text{при} \quad \alpha>1, \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{при} \quad 0<\alpha<1. \end{cases}$$

2) Если $\alpha=1$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\ln x\,\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+}(-\ln\varepsilon)=\infty.$$

Таким образом, данный интеграл сходится при $0<\alpha<1$ и расходится при $\alpha\geqslant 1$.

3. Признак сходимости несобственных интегралов. Рассмотрим вопрос о сходимости несобственных интегралов вида $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Теорема 8.9 (признак сравнения несобственных интегралов). *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке $[a,\ +\infty)$ и удовлетворяют на нем условию $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$, то из сходимости интеграла*

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{8}$$

а из расходимости интеграла (8) *следует расходимость интеграла* (7).

Доказательство. Введем обозначения

$$F(R)=\int_a^R f(x)\,dx,\ G(R)=\int_a^R g(x)\,dx.$$

Так как $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ при $x\geqslant a$, то в силу оценок 1° и 2° (см. § 5) справедливы неравенства

$$0\leqslant F(R)\leqslant G(R) \text{ при } R\geqslant a, \tag{9}$$

и, кроме того, функция $F(R)$ [а также $G(R)$] является неубывающей на промежутке $[a, +\infty)$. В самом деле, если $a\leqslant R_1\leqslant R_2$, то $\int_{R_1}^{R_2} f(x)\,dx\geqslant 0$ и, следовательно,

$$F(R_2)=\int_a^{R_2} f(x)\,dx=\int_a^{R_1} f(x)\,dx+\int_{R_1}^{R_2} f(x)\,dx\geqslant\int_a^{R_1} f(x)\,dx=F(R_1).$$

Пусть интеграл (7) сходится, т. е. функция $G(R)$ имеет конечный предел при $R\to+\infty$. Отсюда в силу неубывания $G(R)$ следует, что функция $G(R)$ ограничена на $[a, +\infty)$. Но тогда согласно равенству (9) и функция $F(R)$ ограничена на $[a, +\infty)$ и, следовательно, имеет на $[a, +\infty)$ точную верхнюю грань. Пусть $\sup\limits_{[a,+\infty)} F(R)=I$. По определению точной верхней грани для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $R_\varepsilon\geqslant a$, что $0\leqslant I-F(R_\varepsilon)<\varepsilon$. Так как функция $F(R)$ не убывает на $[a, +\infty)$, то для любого $R>R_\varepsilon$ выполняется неравенство $F(R)\geqslant F(R_\varepsilon)$ и, значит, $0\leqslant\leqslant I-F(R)<\varepsilon$ при $R\geqslant R_\varepsilon$.

Таким образом,

$$|F(R)-I|<\varepsilon \text{ при } R\geqslant R_\varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{R\to+\infty} F(R)=I$, т. е. интеграл (8) сходится.

Пусть теперь интеграл (8) расходится. Тогда, если предположить, что интеграл (7) сходится, то в силу доказанного выше интеграл (8) сходится, что противоречит условию. Следовательно, интеграл (7) также расходится. ■

Замечание. Аналогичный признак сравнения для несобственных интегралов второго рода можно сформулировать следующим образом: если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на полуинтервале $(a, b]$ и для всех точек x в некотором интервале $(a, a+\varepsilon)$ выполняются условия $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$.

Пример 6. Исследовать сходимость $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})}$.

Решение. Сравним подынтегральную функцию $\frac{1}{x^2(1+e^{-x})}$ с функцией $\frac{1}{x^2}$ на промежутке $1 \leqslant x < +\infty$. Очевидно, что

$$\frac{1}{x^2(1+e^{-x})} < \frac{1}{x^2}.$$

Но интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, так как $\alpha = 2 > 1$ (см. пример 4). Следовательно, согласно признаку сравнения сходится и данный интеграл.

Пример 7. Исследовать сходимость $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$.

Решение. Сравнивая подынтегральную функцию $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ с функцией $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ на промежутке $1 \leqslant x < +\infty$, имеем

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x+x} \leqslant \frac{\sqrt{x}}{1+x}.$$

Но интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ расходится, так как $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ (см. пример 4). Следовательно, согласно признаку сравнения и данный интеграл расходится.

4. Пример использования несобственного интеграла. Вычислим вторую космическую скорость тела, т. е. начальную скорость, при которой оно способно выйти из поля притяжения Земли в межпланетное пространство.

Ранее (см. § 10, п. 6, пример 11) с помощью определенного интеграла была вычислена работа, необходимая для запуска тела массой m с поверхности Земли на высоту h:

$$A = \int\limits_{R}^{R+h} F(x)\,dx = \frac{PRh}{R+h},$$

Выход тела в межпланетное пространство означает запуск его на бесконечную высоту ($h = \infty$). Вычислим необходимую для этого работу:

$$\lim_{h\to\infty} A = \int\limits_{R}^{\infty} F(x)\,dx = \lim_{h\to\infty} \frac{PRh}{R+h} = \lim_{h\to\infty} \frac{PR}{1+R/h} = PR = mgR,$$

где m — масса тела; g — ускорение свободного падения у поверхности Земли (трение и притяжение других планет при этом не учитываются). Эта работа совершается за счет изменения кинетической энергии тела. Поэтому кинетическая энергия тела в начальный момент должна быть не меньше этой работы, т. е. начальная скорость тела v должна быть такая, чтобы

$$\frac{mv^2}{2} \geqslant mgR \text{ или } v \geqslant \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 6\,400\,000} \text{ м/с} =$$

$$= 1{,}4 \cdot 8000 \text{ м/с} = 11{,}2 \text{ км/с}.$$

Если начальная скорость тела равна 11,2 км/с, то его траектория движения представляет собой параболу. При начальной скорости, большей 11,2 км/с, траектория будет представлять собой гиперболу, а при начальной скорости, меньшей 11,2 км/с, тело будет двигаться по эллиптической траектории, при этом либо упадет на Землю, либо станет искусственным спутником Земли.

§ 12. Приближенное вычисление определенных интегралов

При решении физических и технических задач приходится находить определенные интегралы от функций, первообразные которых не выражаются через элементарные функции. Это привело к необходимости вывода приближенных формул вычисления определенных интегралов. Познакомимся с двумя из них: *формулой трапеций* и *формулой парабол.*

1. Формула трапеций. Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, где $f(x)$ — непрерывная функция. Для простоты рассуждений ограничимся случаем, когда $f(x) \geqslant 0$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных отрезков точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$ и с помощью прямых $x = x_k$ построим n прямолинейных трапеций (эти трапеции заштрихованы на рис. 118). Сумма площадей трапеций приближенно равна площади криволинейной трапеции, т. е.

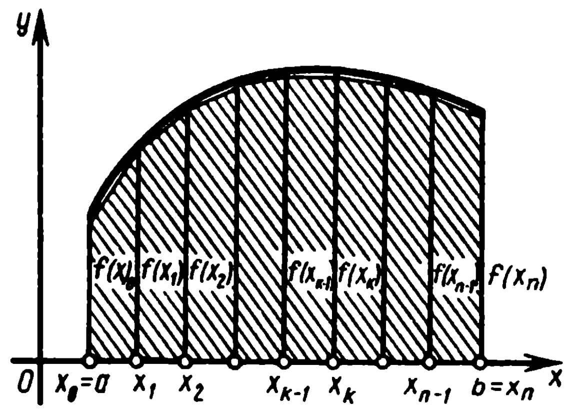


Рис. 118

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}(x_1 - x_0) + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}(x_2 - x_1) + \ldots +$$

$$+ \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}(x_n - x_{n-1}) = \frac{b-a}{2n}\left\{f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right\},$$

где $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$ — соответственно основания трапеций; $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n$ — их высоты.

Таким образом, получена приближенная формула

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right\},$$

которая и называется *формулой трапеций*. Эта формула тем точнее, чем больше n.

Рассмотрим в качестве примера интеграл $\int_0^1 x^2\,dx$. Точное значение этого интеграла находится просто:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} = 0{,}3333...$$

Вычислим теперь по формуле трапеций его приближенное значение. Пусть $n=5$. Тогда имеем: $a=x_0=0$, $x_1=0{,}2$, $x_2=0{,}4$, $x_3=0{,}6$, $x_4=0{,}8$, $x_5=1=b$ и соответственно $f(x_0)=0$, $f(x_1)=0{,}04$, $f(x_2)=0{,}16$, $f(x_3)=0{,}36$, $f(x_4)=0{,}64$, $f(x_5)=1$. Следовательно,

$$\int_0^1 x^2\,dx \approx \frac{1}{10}\{1+2[0{,}04+0{,}16+0{,}36+0{,}64]\} = \frac{3{,}4}{10} = 0{,}34.$$

Точное значение интеграла равно 0,3333..., поэтому абсолютная ошибка меньше 0,007. Во многих технических задачах эта точность достаточна.

Если увеличить число n, то точность будет большей. Так, например, при $n=10$

$$\int_0^1 x^2\,dx \approx \frac{1}{20}\{1+2\cdot 2{,}85\} = \frac{6{,}7}{20} = 0{,}335,$$

т. е. абсолютная ошибка меньше 0,002.

В более полных курсах высшей математики доказывается, что если функция $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную вторую производную, то абсолютная величина погрешности формулы трапеций не больше, чем

$$k\,\frac{(b-a)^3}{12n^2},$$

где k — наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

Следует отметить, что с увеличением n увеличивается не только точность вычисления определенного интеграла, но и объем вычислительной работы. Однако здесь на помощь приходят ЭВМ.

Вычислим по формуле трапеции интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ при $n=10$. Разобьем отрезок [0, 1] на 10 равных частей точками $x_0=0$,

$x_1=0,1, \quad \ldots, \quad x_9=0,9, \quad x_{10}=1$. Вычислим приближенно значения функции $f(x)=\frac{1}{1+x}$ в этих точках: $f(0)=1,0000$, $f(0,\ 1)=$ $=0,9091$, $f(0,2)=0,8333$, $f(0,3)=0,7692$, $f(0,4)=0,7143$, $f(0,5)=0,6667$, $f(0,6)=0,6250$, $f(0,7)=0,5882$, $f(0,8)=0,5556$, $f(0,9)=0,5263$, $f(1)=0,5000$.

По формуле трапеций получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{10}\left(\frac{1,0000+0,5000}{2}+0,9091+0,8333+\right.$$

$$\left.+0,7692+0,7143+0,6667+0,6250+0,5882+0,5556+0,5263\right)=$$
$$=0,69377 \approx 0,6938.$$

Оценим погрешность полученного результата. Так как $f(x)=$ $=1/(1+x)$, то $f'(x)=-1/(1+x)^2$, $f''(x)=2/(1+x)^3$. На отрезке $[0,\ 1]$ имеем $|f''(x)|\leqslant 2$. Поэтому погрешность полученного результата не превосходит величины

$$\frac{k(b-a)^3}{12n^2}=\frac{2}{12\cdot 10^2}=\frac{1}{600}<0,0017.$$

Вычислим точное значение данного интеграла по формуле Ньютона—Лейбница:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2 \approx 0,69315.$$

Абсолютная ошибка результата, полученного по формуле трапеций, меньше 0,0007. Это находится в соответствии с данной выше оценкой погрешности.

Идею, которая была использована при построении формулы трапеций, можно использовать для получения более точных приближенных формул для вычисления определенного интеграла.

2. Формула парабол. Докажем предварительно две леммы.

Лемма 8.1. *Через любые три точки $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, $M_3(x_3;\ y_3)$ с различными абсциссами можно провести единственную кривую вида*

$$y=Ax^2+Bx+C. \qquad (1)$$

Доказательство. Подставляя в уравнение параболы (1) координаты точек M_1, M_2, M_3, получаем систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными A, B, C:

$$\begin{cases} Ax_1^2+Bx_1+C=y_1, \\ Ax_2^2+Bx_2+C=y_2, \\ Ax_3^2+Bx_3+C=y_3. \end{cases}$$

ку. При этом говорят, что упорядоченной паре чисел $(x;\ y)$ поставлено в соответствие число z, и пишут $z=f(x;\ y)$. Число z называется значением функции f в точке $(x;\ y)$. Переменную z называют зависимой переменной, а переменные x и y — независимыми переменными (или аргументами); множество $\{(x;\ y)\}$ — областью определения функции, а множество Z — множеством значений функции.

Функцию двух переменных обозначают также следующими символами: $z=z(x,\ y)$, $z=\varphi(x,\ y)$, $z=h(x,\ y)$, $z=F(x,\ y)$ и т. д.

Так как каждой упорядоченной паре чисел $(x;\ y)$ при фиксированной прямоугольной системе координат соответствует единственная точка M плоскости и, обратно, каждой точке M соответствует единственная упорядоченная пара чисел $(x;\ y)$, то функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точки M и вместо $z=f(x,\ y)$ писать $z=f(M)$. Областью определения функции в этом случае является некоторое множество $\{M\}$ точек плоскости. В дальнейшем будем использовать эти два обозначения функции двух переменных.

Способы задания функции двух переменных, как и в случае одной переменной, могут быть различными. В примерах мы используем, как правило, аналитический способ задания, когда функция задается с помощью формулы. Областью определения функции в этом случае считается множество всех точек плоскости, для которых эта формула имеет смысл.

Рассмотрим примеры функций двух переменных.

1. $z=x^2+y^2$. Область определения этой функции — множество $\{M\}$ всех пар чисел $(x;\ y)$, т. е. вся плоскость Oxy, а множество значений — промежуток $Z=[0, +\infty)$.

2. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Областью определения данной функции является множество всех точек, для которых выражение $\sqrt{1-x^2-y^2}$ определено, т. е. множество точек, для которых $1-x^2-y^2\geqslant 0$ или $x^2+y^2\leqslant 1$. Множество всех таких точек образует круг с центром в начале координат и радиусом, равным единице. Множество значений функции представляет собой отрезок $[0, 1]$.

3. $z=1/\sqrt{x^2+y^2-1}$. Область определения этой функции — множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2+y^2>1$, т. е. множество точек, лежащих вне круга с радиусом 1 и центром в начале координат, а множество значений представляет собой промежуток $(0, +\infty)$.

Из рассмотренных примеров следует, что областью определения функции двух переменных может быть вся плоскость Oxy или ее часть.

Из аналитической геометрии известно, что множество всех упорядоченных троек чисел $(x;\ y;\ z)$ образует координатное пространство. При этом каждой тройке $(x;\ y;\ z)$ в пространстве соответствует точка $M(x;\ y;\ z)$, и наоборот. Если вместо множества $\{M\}$ точек плоскости взять множество $\{M\}$ точек пространства, то аналогично можно дать определение функции трех переменных

$u=f(M)$ или $u=f(x; y; z)$. Областью определения функции трех переменных является все пространство или его часть. Так, например, функция $u=x^2+y^2+z^2$ определена во всем пространстве, а функция $u=\ln xyz$ — на множестве точек пространства, координаты которых удовлетворяют неравенству $xyz>0$. В первом случае множеством значений функции является промежуток $[0, +\infty)$, а во втором — $(-\infty, +\infty)$.

Аналогично можно дать определение функции четырех переменных $u=f(x, y, z, t)$. В этом случае множество упорядоченных четверок чисел $(x; y; z; t)$ образуют так называемое четырехмерное пространство, а каждая четверка $(x; y; z; t)$ называется точкой этого пространства. Однако область определения функции четырех переменных уже не имеет наглядного геометрического истолкования. Аналогично можно ввести понятия функции пяти и вообще n переменных $u=f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Далее подробно рассмотрены функции двух переменных; следует иметь в виду, что обобщение определений и полученных результатов на функции трех и более переменных не содержит принципиальных отличий.

§ 2. Геометрическое изображение функции двух переменных

Как известно, функция одной переменной изображается на плоскости в виде линии, определенной уравнением $y=f(x)$. Функция двух переменных изображается в пространстве в виде поверхности, которая определяется уравнением $z=f(x, y)$, т. е. сама формула, задающая функцию, и есть уравнение этой поверхности.

В аналитической геометрии рассматриваются различные поверхности и их уравнения. Так, например, уравнение $z-2x+5y+10=0$ является уравнением плоскости. Данная плоскость есть график функции $z=2x-5y-10$.

Уравнение $x^2+y^2+z^2=R^2$ является уравнением сферы радиуса R с центром в начале координат. С другой стороны, сфера есть объединение графиков двух функций $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ и $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

Построение графиков функций двух переменных во многих случаях представляет значительные трудности. Поэтому существует еще один способ изображения функции двух переменных, основанный на сечении поверхности $z=f(x, y)$ плоскостями $z=c$, где c — любое число, т. е. плоскостями, параллельными плоскости Oxy.

Назовем *линией уровня* функции $z=f(x, y)$ множество точек $(x; y)$ плоскости Oxy, в которых функция принимает одно и то же значение c. Очевидно, при различных c получаются различные линии уровня для данной функции.

Если взять числа $c_1, c_2, ..., c_n$, образующие арифметическую прогрессию с разностью h, то получим ряд линий уровня, по взаимному расположению которых можно получить представление о графике функции, т. е. о форме поверхности. Там, где линии располагаются «гуще», функция изменяется быстрее (поверхность идет круче), а в тех местах, где линии уровня располагаются реже, функция изменяется медленнее (поверхность более пологая) (рис. 162). Ясно, что чем меньше h, тем полнее представление о графике функции.

Термин «линии уровня» заимствован из картографии. Там линии уровня — это линии, на которых высота точек земной поверхности над уровнем моря постоянна. По ним можно судить не только о высоте над уровнем моря определенной точки местности, но и о характере рельефа, что особенно важно, если местность гористая.

Пример. Построить линии уровня функции $z=x^2+y^2$.

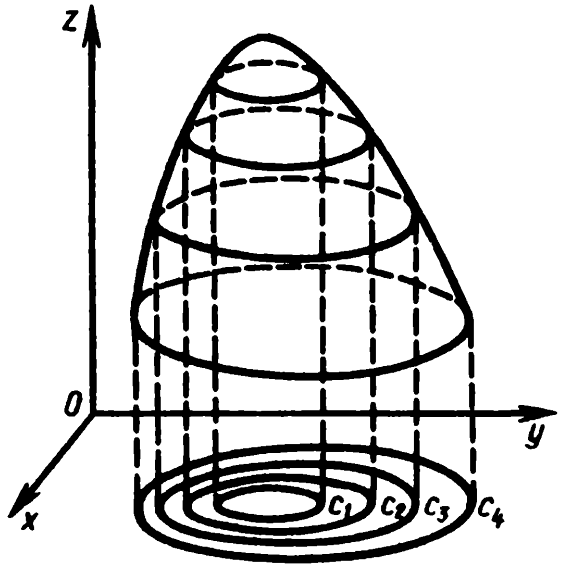


Рис. 162

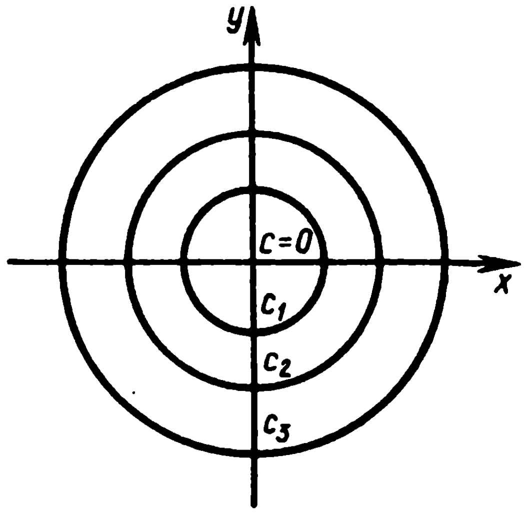


Рис. 163

Решение. Линии уровня данной функции определяются уравнением $x^2+y^2=c$ $(0\leqslant c<+\infty)$. Давая c различные значения, получаем семейство линий уровня, представляющих собой концентрические окружности. При $c=0$ окружность вырождается в точку (0; 0) (рис. 163).

Так как в данном случае линии уровня — окружности с центрами в начале координат, то графиком данной функции должна быть поверхность вращения вокруг оси Oz. Действительно, из аналитической геометрии известно, что уравнение $z=x^2+y^2$ определяет параболоид вращения.

§ 3. Предел функции двух переменных

Введем понятие δ-окрестности данной точки $M_0(x_0;\ y_0)$ и понятие сходящейся последовательности точек плоскости.

Определение 1. *Множество* $\{M(x;\ y)\}$ *всех точек, координаты* x *и* y *которых удовлетворяют неравенству* $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, *или, короче,* $\rho(M;\ M_0)<\delta$, *называется* δ*-окрестностью точки* $M_0(x_0;\ y_0)$.

Другими словами, δ-окрестность точки M_0 — это все точки, лежащие внутри круга с центром M_0 радиуса δ.

Рассмотрим последовательность точек $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, ..., $M_n(x_n;\ y_n)$, ... Будем кратко обозначать эту последовательность символом $\{M_n\}$*.

Определение 2. *Последовательность точек $\{M_n\}$ называется сходящейся к точке M_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует номер N такой, что при $n>N$ выполняется неравенство $\rho(M_n;\ M_0)<\varepsilon$. При этом точка M_0 называется пределом последовательности $\{M_n\}$.*

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$ или $M_n \to M_0$ при $n\to\infty$.

Заметим, что понятие сходящейся последовательности точек плоскости является обобщением понятия сходящейся числовой последовательности. Действительно, задание последовательности $\{M_n\}$ точек на прямой равносильно заданию числовой последовательности $\{x_n\}$ и неравенство $\rho(M_n;\ M_0)<\varepsilon$ переходит в этом случае в неравенство $|x_n - x_0|<\varepsilon$.

Теперь определим предел функции двух переменных. Его определение аналогично определению предела функции одной переменной **.

Пусть функция $z=f(M)$ определена на некотором множестве $\{M\}$ и точка $M_0\in\{M\}$ или $M_0\notin\{M\}$, но обладает тем свойством, что в любой δ-окрестности этой точки содержится хотя бы одна точка множества $\{M\}$, отличная от M_0.

Определение 3. *Число A называется пределом функции $z=f(M)$ в точке M_0, если для любой сходящейся к M_0 последовательности точек M_1, M_2, ..., M_n, ... $(M_n\neq M_0,\ M_n\in\{M\})$ соответствующая последовательность значений функции $f(M_1)$, $f(M_2)$, ..., $f(M_n)$, ... сходится к A.*

Обозначение: $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = A$ или $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A$.

Так, например, функция $f(x,\ y)=x^2+y^2$ определена на всей плоскости. Найдем предел этой функции в точке $M_0(1;\ 2)$. Для любой последовательности точек $\{M_n\}$, сходящейся к точке M_0, имеем

$$\lim_{n\to\infty}(x_n^2+y_n^2)=\lim_{n\to\infty}x_n^2+\lim_{n\to\infty}y_n^2=1^2+2^2=5,$$

следовательно, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(x^2+y^2)=5$.

Приведем пример функции, не имеющей предела в некоторой точке. Функция $f(x,\ y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ определена всюду, кроме точек прямой $x+y=0$. Покажем, что она не имеет предела в точке $(0;\ 0)$. Для этого выберем две сходящиеся к точке $(0;\ 0)$ последовательности точек $M_n(1/n;\ 0)$ и $M_n'(0;\ 1/n)$; тогда

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n-0}{1/n+0}=1 \text{ и } \lim_{n\to\infty} f(M_n')=\lim_{n\to\infty}\frac{0-1/n}{0+1/n}=-1.$$

---

* Задание последовательности $\{M_n\}$ равносильно заданию двух числовых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, так как точка на плоскости определяется двумя координатами x и y.

** Рекомендуем повторить гл. 4, § 2, п. 1.

Таким образом, двум различным последовательностям точек, сходящимся к началу координат, соответствуют две последовательности значений функции, которые имеют разные пределы. Следовательно, по определению 3 данная функция не имеет предела в точке $(0; 0)$.

Приведенное определение предела функции двух переменных дано с помощью понятия предела последовательности. Так же, как для функции одной переменной, можно дать эквивалентное определение, используя «$\varepsilon - \delta$»-терминологию.

Определение 4. *Число A называется пределом функции $z = f(M)$ в точке M_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех точек $M \in \{M\}$, удовлетворяющих условию $0 < \rho(M; M_0) < \delta$, выполняется неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$.*

Используя логические символы, данное определение можно записать в виде

$$(\forall \varepsilon>0)\ (\exists \delta>0)\ (\forall M \in \{M\},\ 0<\rho(M; M_0)<\delta) : |f(M)-A|<\varepsilon.$$

Доказательство эквивалентности определений 3 и 4 проводится точно так же, как и в случае функции одной переменной. Следует только в доказательстве теоремы 4.1 заменить последовательность $\{x_n\}$ последовательностью точек $\{M_n\}$, точку x_0 — точкой M_0, разности $|x - x_0|$ и $|x_n - x_0|$ — соответственно расстояниями $\rho(M; M_0)$ и $\rho(M_n; M_0)$, а числовую последовательность $\{f(x_n)\}$ — числовой последовательностью $\{f(M_n)\}$.

Используя определение предела функции двух переменных, можно перенести основные теоремы о пределах для функции одной переменной на функции двух переменных. Например, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть функции $f(M)$ и $g(M)$ определены на одном и том же множестве $\{M\}$ и имеют в точке M_0 пределы B и C. Тогда функции $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$ и $f(M)/g(M)$ $(C \neq 0)$ имеют в точке M_0 пределы, равные соответственно $B \pm C$, $B \cdot C$ и B/C.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.3 и может быть получено из него формальной заменой букв x и x_0 буквами M и M_0, только вместо определения 1 предела функции одной переменной следует использовать определение 3 предела функции двух переменных.

Определение 5. *Функция $z = f(M)$ называется бесконечной малой в точке $M = M_0$ (или при $M \to M_0$), если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = 0$.*

Если функция $z = f(M)$ имеет в точке M_0 предел, равный A, то функция $\alpha(M) = f(M) - A$ является бесконечно малой в точке M_0. Действительно, $\lim\limits_{M\to M_0} \alpha(M) = \lim\limits_{M\to M_0} [f(M) - A] = \lim\limits_{M\to M_0} f(M) - \lim\limits_{M\to M_0} A = A - A = 0$. Отсюда получаем специальное представление для функции, имеющей в точке M_0 предел, равный A: $f(M) = A + \alpha(M)$, где $\lim\limits_{M\to M_0} \alpha(M) = 0$. При этом говорят, что функция

$f(M)$ в окрестности точки M_0 отличается от числа A на бесконечно малую функцию.

Сравнение бесконечно малых функций двух переменных производится точно так же, как и бесконечно малых функций одной переменной, причем, как и в случае одной переменной, под символом $o(\beta)$ будем понимать любую бесконечно малую в данной точке M_0 функцию более высокого порядка малости, чем бесконечно малая в точке M_0 функция $\beta(M)$, т. е. $\lim\limits_{M\to M_0}\frac{o(\beta)}{\beta}=0$.

§ 4. Непрерывность функции двух переменных

Понятие непрерывности функции двух переменных вводится на основе понятия предела.

1. Определение непрерывности функции двух переменных. Пусть на некотором множестве $\{M\}$ определена функция $f(M)$, точка $M_0\in\{M\}$ и любая δ-окрестность точки M_0 содержит точки множества $\{M\}$.

Определение 1. *Функция $z=f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если предел функции в этой точке существует и равен значению функции в этой точке, т. е.*

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0), \text{ или } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0).$$

Согласно определению предела функции в терминах последовательностей данное определение непрерывности функции в точке M_0 равносильно тому, что для любой последовательности $\{M_n\}$ ($M_n\in\in\{M\}$) такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=M_0$, последовательность $\{f(M_n)\}$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n)=f(M_0), \text{ или } \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n)=f(x_0, y_0).$$

Точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются *точками разрыва* этой функции.

Например, функция

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x+y} & \text{при } x+y\neq 0,\\ 1 & \text{при } x+y=0\end{cases}$$

разрывна в точке $(0; 0)$, так как предел этой функции при $x\to 0$, $y\to 0$ не существует; функция

$$f(x, y)=\begin{cases}x^2+y^2 & \text{всюду, кроме } x=1, y=2,\\ 0 & \text{при } x=1, y=2\end{cases}$$

в точке $(1; 2)$ разрывна, так как $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x, y)=5$, а $f(1; 2)=0$.

Сформулируем определение непрерывности функции, используя определение предела функции в терминах «$\varepsilon-\delta$».

Определение 2. *Функция $z = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех точек $M \in \{M\}$, удовлетворяющих условию $\rho(M;\ M_0) < \delta$, выполняется неравенство $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.*

Используя символы, определение 2 можно записать в виде $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall M \in \{M\},\ \rho(M;\ M_0) < \delta) : |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.

Так же как для функции одной переменной, используя данные определения непрерывности и соответствующие теоремы о пределах, можно доказать, что арифметические операции над непрерывными функциями и построение сложных функций из непрерывных функций приводят к непрерывным функциям.

В дальнейшем используется определение 1 непрерывности функции, записанное в другом виде.

Назовем *полным приращением* функции $z = f(M)$ в точке M_0 функцию Δz, определяемую формулой

$$\Delta z = f(M) - f(M_0),$$

где M — любая точка из области определения функции. Пусть точки M_0 и M имеют соответственно координаты $(x_0;\ y_0)$ и $(x;\ y)$. Обозначим $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$. Используя эти обозначения, для Δz получаем следующее выражение:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Определение 3. *Функция $z = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если ее полное приращение в этой точке есть бесконечно малая при $M \to M_0$ функция, т. е.*

$$\lim_{M \to M_0} \Delta z = \lim_{M \to M_0} [f(M) - f(M_0)] = 0, \text{ *или* } \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Это условие, очевидно, равносильно условию $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ из определения 1.

Пример. Функция $z = x^2 + y^2$ непрерывна в любой точке $(x;\ y)$. Действительно, полное приращение данной функции в точке $(x;\ y)$ имеет вид

$$\Delta z = [(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2] - (x^2 + y^2) = 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Очевидно, $\Delta z \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, т. е. согласно определению 3 функция $z = x^2 + y^2$ непрерывна в точке $(x;\ y)$.

Функция $z = f(M)$ называется непрерывной на некотором множестве $\{M\}$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

2. Основные свойства непрерывных функций двух переменных. Приведем без доказательства основные свойства непрерывных функций двух переменных, поскольку они в основном аналогичны доказательствам соответствующих свойств функций одной переменной. Предварительно введем ряд понятий для множеств $\{M\}$ точек плоскости.

Определение 4. *Множество $\{M\}$ точек плоскости называется связным, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной линией, состоящей из точек данного множества.*

Например, круг — связное множество, а множество, состоящее из двух кругов, не имеющих общих точек, не является связным.

Определение 5. *Точка M называется внутренней точкой множества $\{M\}$, если существует δ-окрестность этой точки, состоящая из точек данного множества.*

Определение 6. *Множество $\{M\}$, состоящее лишь из внутренних точек, называется открытым множеством.*

Определение 7. *Связное открытое множество $\{M\}$ точек называется открытой областью, или короче, областью.*

Простейшими областями являются: внутренность треугольника, круга, эллипса и т. п.

Определение 8. *Точка M называется граничной точкой области, если в любой ее δ-окрестности есть точки как принадлежащие, так и не принадлежащие этой области. Множество всех граничных точек области называется границей этой области.*

Например, для области, которая состоит из точек, лежащих внутри круга, границей является окружность.

Определение 9. *Множество $\{M\}$ точек, образованное областью и ее границей, называется замкнутой областью.*

Определение 10. *Множество $\{M\}$ называется ограниченным, если существует круг, внутри которого оно содержится.*

Отрезок и треугольник — ограниченные множества. Прямая не является ограниченным множеством.

Замкнутая ограниченная область, в которой определена функция двух переменных, является аналогом отрезка для функции одной переменной.

Теперь сформулируем основные свойства непрерывных функций двух переменных.

1°. Если функция $z=f(M)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области, то она ограничена в этой области, т. е. существует число k такое, что для всех точек области выполняется неравенство $|f(M)|\leqslant k$.

2°. Если функция $z=f(M)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области, то она достигает в этой области своих точных граней.

3°. Если функция $z=f(M)$ непрерывна в области, то она принимает все промежуточные значения между любыми двумя своими значениями, т. е. если $A<C<B$, где A и B — какие-то значения функции $f(M)$ в данной области, то в этой области существует точка M_0, в которой $f(M_0)=C$.

Отсюда, в частности, следует, что если M_1 и M_2 — точки данной области и $f(M_1)<0$, а $f(M_2)>0$, то в области существует точка M_0, в которой $f(M_0)=0$.

4°. Если функция $z=f(M)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области, то она равномерно-непрерывна в этой области, т. е. для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любых двух точек M' и M'' области, удовлетворяющих условию $\rho(M'; M'') < \delta$, выполняется неравенство $|f(M'') - f(M')| < \varepsilon$.

В заключение отметим, что понятия предела, непрерывности и перечисленные свойства функций двух переменных легко обобщаются на функции трех и более переменных.

ГЛАВА 12

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Частные производные

Пусть функция $z = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x; y)$*. Придадим переменной x в точке M произвольное приращение Δx, оставляя значение переменной y неизменным, т. е. перейдем на плоскости от точки $M(x; y)$ к точке $M_1(x + \Delta x; y)$. При этом Δx таково, что точка M_1 лежит в указанной окрестности точки M. Тогда соответствующее приращение функции

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

называется *частным приращением функции по переменной* x в точке $M(x; y)$.

Аналогично определяется *частное приращение функции по переменной* y:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Определение. *Если существует предел*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \right),$$

то он называется частной производной функции $z = f(M)$ *в точке* M *по переменной* x *(по переменной* y*) и обозначается одним из следующих символов:*

$$z'_x, f'_x, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} \left(z'_y, f'_y, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

(иногда частные производные обозначают без штриха).

Из определения следует, что частная производная функции двух переменных по переменной x представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной x при фиксированном значении переменной y. Поэтому частные производные вычисляют по формулам и правилам вычисления производных функций одной переменной.

---

* Окрестностью точки M называется произвольная область, содержащая точку M. В частности, если область — внутренность круга радиуса δ с центром в точке M, то такая окрестность является δ-окрестностью точки M.

Примеры.

1. $z=x^2-2xy^2+y^3, \frac{\partial z}{\partial x}=2x-2y^2, \frac{\partial z}{\partial y}=-4xy+3y^2.$

2. $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x}{x^2+y^2}.$

3. $z=x^2\sin y, \frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin y, \frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos y.$

4. $z=xye^{x+2y}, \frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+2y}y(1+x), \frac{\partial z}{\partial y}=e^{x+2y}x(1+2y).$

Отметим, что мы определили частные производные функции $z=f(x, y)$ в такой точке M, в окрестности которой функция определена, т. е. во внутренней точке области определения функции. Если $M(x; y)$ — граничная точка области определения функции, то $\Delta_x z$ $(\Delta_y z)$ может быть не определено, так как точка $M_1(x+\Delta x; y)$ $(M_2(x; y+\Delta y))$ может не принадлежать области определения функции ни при каком $\Delta x \neq 0$ $(\Delta y \neq 0)$. Это, например, имеет место для точки M_0 на рис. 164. В этом случае, если существует частная производная z'_x во внутренних точках M области и существует $\lim\limits_{M\to M_0} z'_x(M)$, то по определению полагают

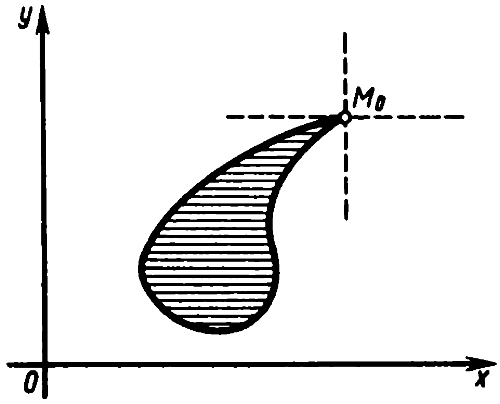


Рис. 164

$$z'_x(M_0)=\lim_{M\to M_0} z'_x(M).$$

Аналогично определяется $z'_y(M_0)$.

§ 2. Понятие дифференцируемости функции

1. Определение дифференцируемости. Напомним, что полным приращением функции $z=f(M)$ в точке $M(x; y)$, соответствующим приращениям Δx и Δy переменных x и y, называется функция

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Пусть функция $z=f(M)$ определена в некоторой окрестности точки M.

Определение. *Функция $z=f(M)$ называется дифференцируемой в точке M, если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде*

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y, \qquad (1)$$

где A и B — некоторые не зависящие от Δx и Δy числа, а $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ функции.

Известно, что если функция одной переменной дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна и имеет производную в этой точке. Из существования производной функции одной переменной в данной точке следует дифференцируемость функции в этой точке. Выясним, как переносятся эти свойства на функции двух переменных.

2. Необходимые условия дифференцируемости. Теорема 12.1. *Если функция $z=f(M)$ дифференцируема в точке M, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Если функция $z=f(M)$ дифференцируема в точке M, то, как следует из соотношения (1), $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z=0$, а это и означает, что функция непрерывна в точке M. ■

Теорема 12.2. *Если функция $z=f(M)$ дифференцируема в точке $M(x;\ y)$, то она имеет в этой точке частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$, причем*

$$f'_x(x,y)=A,\ f'_y(x,y)=B.$$

Доказательство. Так как функция $z=f(M)$ дифференцируема в точке M, то имеет место соотношение (1). Полагая $\Delta y=0$, имеем $\Delta_x z=A\,\Delta x+\alpha(\Delta x,\ 0)\,\Delta x$, где $\alpha(\Delta x,\ 0)$ — бесконечно малая при $\Delta x\to 0$ функция. Разделив на Δx и переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[A+\alpha(\Delta x,0)]=A.$$

Следовательно, в точке M существует частная производная $f'_x(x,y)=$ $=A$.

Аналогично доказывается, что в точке M существует частная производная $f'_y(x,y)=B$. ■

Обратные утверждения к теоремам 12.1 и 12.2 неверны, т. е. из непрерывности функции двух переменных в точке M, а также из существования ее частных производных в этой точке еще не следует дифференцируемость функции.

Например, функция $f(x,\ y)=\sqrt{x^2+y^2}$ непрерывна в точке $(0;0)$, но не имеет в этой точке частных производных. В самом деле,

$$\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{(0+\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Но функция $\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не имеет предела при $\Delta x\to 0$. Следовательно, $f'_x(0,\ 0)$ не существует. Аналогично доказывается, что не существует $f'_y(0,\ 0)$. Так как данная функция не имеет частных производных в точке $(0;\ 0)$, то она и не дифференцируема в данной точке.

Функция

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{на осях координат,}\\ 1 & \text{в остальных точках плоскости}\end{cases}$$

имеет частные производные по x и y в точке $(0;\ 0)$. Это следует из того, что $f(x,\ 0)\equiv 0$ и $f(0,\ y)\equiv 0$, следовательно, $f'_x(0,\ 0)=0$ и $f'_y(0,\ 0)=0$. Но $f(x,\ y)$ не является непрерывной в этой точке, так как, например, вдоль прямой $y=x$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=1$, а $f(0, 0)=0$. Следовательно, $f(x, y)$ недифференцируема в точке $(0; 0)$.

И последний пример: функция $f(x, y)=\sqrt{|x|\,|y|}$ непрерывна в точке $(0; 0)$, так как $f(0, 0)=0$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=0$, и имеет частные производные по x и y в этой точке:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x|\cdot 0}-0}{\Delta x}=0, f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{0\cdot|\Delta y|}-0}{\Delta y}=0,$$

но, тем не менее, данная функция не является дифференцируемой в точке $(0; 0)$. Действительно, полное приращение функции в точке $(0; 0)$ равно

$$\Delta z=\sqrt{|\Delta x|\,|\Delta y|}.$$

Если бы функция была дифференцируема в точке $(0; 0)$, то, как следует из соотношения (1) и теоремы 12.2, выполнялось бы равенство

$$\Delta z=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y,$$

где α и $\beta\to 0$ при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$. Далее из равенства

$$\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y=\left(\frac{\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y}{\rho}\right)\rho=\gamma\rho, \text{где } \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},$$

получаем, что $\gamma\to 0$ при $\rho\to 0$ [см. § 4 вывод формулы (3)]. Но в данном случае при любых $\Delta x=\Delta y$

$$\gamma=\sqrt{|\Delta x|\,|\Delta y|}/\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=1/\sqrt{2},$$

т. е. не является бесконечно малой функцией при $\rho\to 0$.

Таким образом, функция $f(x, y)=\sqrt{|x|\,|y|}$ непрерывна в точке $(0; 0)$, имеет в этой точке частные производные и, тем не менее, не является дифференцируемой в этой точке.

3. Достаточные условия дифференцируемости. Теорема 12.3. *Если функция $z=f(M)$ имеет частные производные в некоторой δ-окрестности точки M и эти производные непрерывны в самой точке M, то функция дифференцируема в точке M.*

Доказательство. Придадим переменным x и y столь малые приращения Δx и Δy, чтобы точка $M_1(x+\Delta x;\ y+\Delta y)$ не выходила за пределы указанной δ-окрестности точки M. Полное приращение функции

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$$

можно записать в виде

$$\Delta z=[f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)]+[f(x, y+\Delta y)-f(x,y)]. \quad (2)$$

Выражение $[f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y+\Delta y)]$ можно рассматривать как приращение функции $f(x, y+\Delta y)$ одной переменной x (второй аргумент имеет постоянное значение, равное $y+\Delta y$). Так как согласно условию эта функция имеет производную $f'_x(x, y+\Delta y)$, то по теореме Лагранжа получаем

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) =$$
$$= f'_x(x+\theta_1 \Delta x, y+\Delta y)\Delta x, \; 0<\theta_1<1.$$

Рассуждая аналогично, для выражения $[f(x, y+\Delta y)-f(x, y)]$ имеем

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = f'_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y, \; 0<\theta_2<1.$$

Производные f'_x и f'_y непрерывны в точке $M(x; y)$, поэтому

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f'_x(x, y),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f'_y(x, y).$$

Отсюда следует, что

$$f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha(\Delta x, \Delta y),$$
$$f'_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f'_y(x, y) + \beta(\Delta x, \Delta y),$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые функции при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$. Подставляя полученные выражения в формулу (2) для Δz, находим

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

а это и означает, что функция $z=f(M)$ дифференцируема в точке M. ■

Следствие. *Из непрерывности частных производных следует непрерывность самой функции.*

Теорема 12.3 имеет важное значение для установления дифференцируемости функций, поскольку непосредственная проверка дифференцируемости функции с помощью определения часто затруднительна, в то время как проверка непрерывности частных производных оказывается проще.

В заключение заметим, что понятие дифференцируемости для функций трех и более переменных вводится аналогично случаю функции двух переменных.

§ 3. Производные сложных функций

Пусть $z=f(x, y)$ — функция двух переменных x и y, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимой переменной t: $x=x(t)$, $y=y(t)$. Тогда функция $z=f[x(t), y(t)]$ является сложной функцией независимой переменной t, а переменные x и y — промежуточные переменные. Имеет место следующая теорема.

Теорема 12.4. *Если функции $x=x(t)$ и $y=y(t)$ дифференцируемы в точке t, а функция $z=f(x, y)$ дифференцируема в точке $M[x(t); y(t)]$, то сложная функция $z=f[x(t), y(t)]$ также диф-*

ференцируема в точке t. При этом производная этой сложной функции вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \qquad (1)$$

Доказательство. Придадим переменной t произвольное приращение Δt; тогда функции $x(t)$ и $y(t)$ получат соответственно приращения Δx и Δy, а функция $z=f(x, y)$, в свою очередь, приращение

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y).$$

Так как функция $z=f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x; y)$, где $x=x(t)$, $y=y(t)$, то Δz можно записать в виде

$$\Delta z=f'_x(x,y)\,\Delta x+f'_y(x,y)\,\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\,\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\,\Delta y,$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые функции при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$. Доопределим эти функции при $\Delta x=0$, $\Delta y=0$, положив $\alpha(0,0)=0$, $\beta(0,0)=0$.

Разделив обе части равенства для Δz на Δt, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=f'_x(x,y)\frac{\Delta x}{\Delta t}+f'_y(x,y)\frac{\Delta y}{\Delta t}+\alpha(\Delta x,\Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t}+\beta(\Delta x,\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}. \qquad (2)$$

По условию, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{dy}{dt}$. Кроме того, так как функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке t, то они непрерывны в этой точке, т. е. $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ при $\Delta t\to 0$ и, как следствие, $\alpha(\Delta x, \Delta y)\to 0$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)\to 0$. Поэтому слагаемые $\alpha(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t}$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}$ стремятся к нулю при $\Delta t\to 0$.

Таким образом, доказано, что при $\Delta t\to 0$ существует предел правой части равенства (2), а следовательно, существует предел левой части

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{dz}{dt},$$

причем

$$\frac{dz}{dt}=f'_x(x,y)\frac{dx}{dt}+f'_y(x,y)\frac{dy}{dt}\text{ или }\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.\ \blacksquare$$

Замечание. Обратите внимание на то, когда в обозначениях производных пишется «∂» и когда «d».

Примеры.

1. Пусть $z=f(x, y)$, $x=t^3+2$, $y=3t^4-1$. По формуле (1) имеем

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}3t^2+\frac{\partial z}{\partial y}12t^3.$$

2. Пусть $z=x\sin\frac{x}{y}$, $x=1+3t$, $y=\sqrt{1+t^2}$. По формуле (1) имеем

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\left(\sin\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}\right)3-\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

3. Пусть $z=x^2y^3$, $x=t$, $y=t^2$. По формуле (1) получаем

$$\frac{dz}{dt}=2xy^3\cdot 1+3x^2y^2\cdot 2t.$$

Учитывая, что $x=t$, $y=t^2$, находим $\frac{dz}{dt}=2t(t^2)^3+3t^2(t^2)^2 2t=$ $=8t^7$. С другой стороны, можно найти $\frac{dz}{dt}$, выразив предварительно z через t. Имеем $z=x^2y^3=t^2(t^2)^3=t^8$, откуда $\frac{dz}{dt}=8t^7$, что, безусловно, совпадает с результатом, полученным по формуле (1).

Если $z=f(x, y)$, где $y=\varphi(x)$, то $z=f[x, \varphi(x)]$ — сложная функция x. На основании формулы (1), в которой роль t играет теперь x, получим

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

а так как $\frac{dx}{dx}=1$, то

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Аналогично решается вопрос о производной сложной функции, когда число промежуточных переменных больше двух. Например, если $u=f(x, y, z)$, где $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, то формула (1) принимает вид

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть $z=f(x, y)$ — функция двух переменных x и y, которые, в свою очередь, зависят от двух или большего числа независимых переменных. Например, пусть $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$. Тогда функция $z=f[x(u, v), y(u, v)]$ является сложной функцией независимых переменных u и v, а переменные x и y — промежуточные.

Если функции $x(u, v)$ и $y(u, v)$ дифференцируемы в точке $M'(u; v)$, а функция $z=f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x; y)$, где $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, то сложная функция $z=f[x(u, v), y(u, v)]$ дифференцируема в точке $M'(u, v)$, причем ее частные производные в этой точке находятся по формулам

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u},\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}.\end{cases}\qquad(3)$$

Дифференцируемость сложной функции доказывать не будем. Для вычисления же ее частных производных фиксируем значение одной из переменных u или v. Тогда попадаем в условия только что доказанной теоремы 12. 4. Из формулы (1) в обоих случаях вытекают формулы (3).

Примеры.

1. Пусть $z=f(x, y)$, $x=u^2+2v$, $y=\frac{u^2}{v}$. По формулам (3) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}2u+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{2u}{v};\ \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}2+\frac{\partial z}{\partial y}\left(-\frac{u^2}{v^2}\right)$$

2. Пусть $z=x^2y^2$, $x=u+v$, $y=\frac{u}{v}$. По формулам (3) получаем

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2xy^2\cdot 1+2x^2y\cdot\frac{1}{v};\ \frac{\partial z}{\partial v}=2xy^2\cdot 1+2x^2y\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right).$$

Подставьте самостоятельно в эти формулы выражения $x=u+v$, $y=\frac{u}{v}$ и, с другой стороны, найдите $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, предварительно выразив z через u и v, а затем сравните полученные результаты.

3. Пусть $z=x^2-y^2$, $x=u\cos v$, $y=u\sin v$. По формулам (3) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2x\cos v-2y\sin v;\ \frac{\partial z}{\partial v}=-2xu\sin v-2yu\cos v.$$

Если $z=f(x)$, где $x=x(u, v)$, то $z=f[x(u, v)]$ — сложная функция, зависящая через переменную x от двух переменных u и v, и ее частные производные также находятся по формулам (3):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{dz}{dx}\dfrac{\partial x}{\partial u},\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{dz}{dx}\dfrac{\partial x}{\partial v}.\end{cases}$$

Обратите внимание на обозначения производных в этих формулах.

Формулы (3) можно обобщить на случай большего числа промежуточных переменных.

Например, если $w=f(x, y, z)$ — функция трех переменных x, y, z, а каждая из них зависит от u и v, то формулы (3) принимают вид

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial u}=\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial u},\\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial v}=\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial v}.\end{cases}$$

§ 4. Дифференциал функции

1. Определение дифференциала. Напомним, что если функция $z=f(M)$ дифференцируема в точке M, то ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta z=A\,\Delta x+B\,\Delta y+\alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x+\beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y, \qquad (1)$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые функции при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Определение. *Дифференциалом* dz *дифференцируемой в точке* M *функции* $z=f(M)$ *называется линейная относительно приращений*

Δx и Δy часть полного приращения этой функции в точке M, т. е.

$$dz = A\,\Delta x + B\,\Delta y. \tag{2}$$

Используя теорему 12.2, выражение (2) можно переписать следующим образом:

$$dz = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y.$$

Дифференциалами независимых переменных x и y назовем приращения этих переменных: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тогда дифференциал функции можно записать в виде

$$dz = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy.$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что разность между полным приращением и дифференциалом функции в точке M

$$\Delta z - dz = \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y$$

есть бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ [ρ — расстояние между точками $M(x;\ y)$ и $M_1(x + \Delta x;\ y + \Delta y)$]. Действительно,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta z - dz}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(\alpha \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \frac{\Delta y}{\rho}\right) = 0,$$

так как α и β — бесконечно малые, а $\frac{\Delta x}{\rho}$ и $\frac{\Delta y}{\rho}$ — ограниченные функции: $\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| \leqslant 1$, $\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| \leqslant 1$. Отсюда получаем: $\Delta z - dz = o(\rho)$ или

$$\Delta z = dz + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right). \tag{3}$$

Отбрасывая при достаточно малых Δx и Δy величину $o(\rho)$, получаем приближенную формулу

$$\Delta z \approx dz,$$

которую широко используют в приближенных вычислениях, так как легче вычислить дифференциал, чем полное приращение.

2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл дифференциала. Аналогично тому, как дифференциал функции одной переменной геометрически представляет собой приращение «ординаты касательной», дифференциал функции двух переменных есть приращение «аппликаты касательной плоскости». Введем понятие касательной плоскости к поверхности в точке N_0.

Плоскость, проходящая через точку N_0 поверхности, называется касательной плоскостью к поверхности в этой точке, если угол между секущей (прямой), проходящей через точку N_0 и любую точку N поверхности, и плоскостью стремится к нулю, когда точка N стремится к точке N_0.

Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x,\ y)$ и функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0;\ y_0)$.

Докажем, что касательная плоскость к поверхности в точке $N_0(x_0; y_0; z_0)$, где $z_0=f(x_0; y_0)$, определяется уравнением

$$z-z_0=f'_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0, y_0)(y-y_0). \quad (4)$$

Действительно, из аналитической геометрии известно, что уравнение (4) определяет плоскость, проходящую через точку $N_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющую нормальный вектор $\overline{n}=\{f'_x;\ f'_y;\ -1\}$. Чтобы установить, что эта плоскость является касательной, достаточно доказать, что угол φ между вектором $\overline{n}$ и вектором $\overline{N_0N}$ любой секущей N_0N стремится к $\pi/2$, когда точка N стремится к N_0. Координаты точки N обозначим через $(x;\ y;\ z)$, где $z=f(x,\ y)$. Так как координаты вектора $\overline{n}$ равны f'_x, f'_y, -1, а координаты вектора $\overline{N_0N}$ равны $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, то

$$\cos\varphi=\frac{f'_x(x-x_0)+f'_y(y-y_0)-(z-z_0)}{\sqrt{f'^2_x+f'^2_y+1}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}.$$

Но, как следует из соотношения (3), $f'_x(x-x_0)+f'_y(y-y_0)-(z-z_0)=o(\rho)$, где $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. Поэтому

$$|\cos\varphi|\leqslant\frac{|o(\rho)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=\frac{|o(\rho)|}{\rho}\to 0,$$

когда $\rho\to 0$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{N\to N_0}\varphi=\pi/2$, что и требовалось доказать.

Нормальный вектор $\overline{n}=\{f'_x;\ f'_y;\ -1\}$ касательной плоскости называют *нормалью* к поверхности $z=f(x,\ y)$ в точке N_0. Пусть $x-x_0=\Delta x$, $y-y_0=\Delta y$, $z-z_0=\Delta z$; тогда из равенства (4) получаем, что приращение Δz «аппликаты касательной плоскости» определяется формулой

$$\Delta z=f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y,$$

т. е. действительно совпадает с дифференциалом dz функции $z=f(x,\ y)$.

§ 5. Производная по направлению. Градиент

Рассмотрим функцию $z=f(M)$, определенную в некоторой окрестности точки $M(x;\ y)$, и произвольный единичный вектор $\overline{l}=\{\cos\alpha;\ \cos\beta\}$ (рис. 165).

Для характеристики скорости изменения функции в точке $M(x;\ y)$ в направлении вектора $\overline{l}$ введем понятие производной по направлению. Для этого проведем через точку M прямую L так, чтобы одно из направлений на ней совпадало с направлением вектора $\overline{l}$, и возьмем на направленной прямой точку $M_1(x+\Delta x;\ y+\Delta y)$. Обозначим величину отрезка MM_1 через Δl, т. е. $\Delta l=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, если точка M_1 расположена так, как на рис. 165, и $\Delta l=-\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, если точка M_1 расположена по другую сторону от точки M. Функция $f(M)$ получит при этом приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Определение 1. *Предел отношения* $\frac{\Delta z}{\Delta l}$ *при* $\Delta l \to 0$ $(M_1 \to M)$, *если он существует, называется производной функции* $z = f(M)$ *в точке* $M(x; y)$ *по направлению вектора* $\overline{l}$ *и обозначается* $\frac{\partial z}{\partial l}$, *т. е.*

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial l}.$$

Предположим теперь, что функция $f(M)$ дифференцируема в точке M. Тогда ее приращение в этой точке вдоль прямой L можно записать в виде

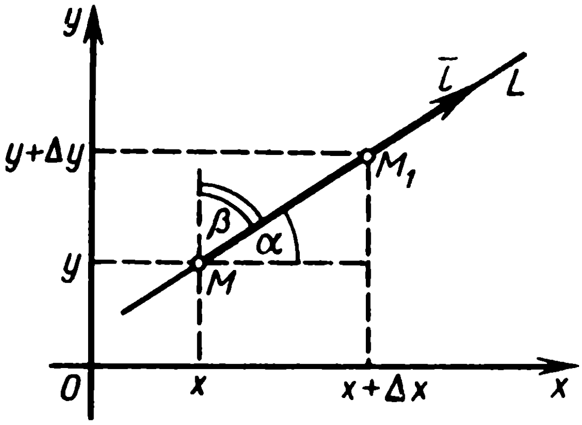


Рис. 165

$$\Delta z = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta_1(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y,$$

где α_1 и β_1 — бесконечно малые функции при $\Delta l \to 0$. Разделив обе части равенства на Δl и учитывая, что $\Delta x = \Delta l \cos\alpha$, $\Delta y = \Delta l \sin\alpha = \Delta l \cos\beta$, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta l} = f'_x(x, y)\cos\alpha + f'_y(x, y)\cos\beta + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\cos\alpha + \beta_1(\Delta x, \Delta y)\cos\beta.$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $\Delta l \to 0$, получаем формулу для производной по направлению

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta. \qquad (1)$$

Из формулы (1) следует, что производная по направлению является линейной комбинацией частных производных, причем направляющие косинусы являются как бы весовыми множителями, показывающими вклад в производную по направлению соответствующей частной производной.

В частности, $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}$ при $\alpha = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$; $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial y}$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\beta = 0$. Отсюда следует, что частные производные по x и y являются частными случаями производной по направлению.

Пример. Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2 x$ в точке $M(1; 2)$ по направлению вектора $\overline{MM_1}$, где M_1 — точка с координатами $(3; 0)$.

Решение. Найдем единичный вектор $\overline{l}$, имеющий данное направление:

$$\overline{MM_1} = \{2; -2\} = 2\overline{i} - 2\overline{j};\ |\overline{MM_1}| = 2\sqrt{2};\ \overline{l} = \frac{\overline{MM_1}}{|\overline{MM_1}|} =$$

$$= \frac{2\overline{i} - 2\overline{j}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j},$$

откуда $\cos\alpha=1/\sqrt{2}$, $\cos\beta=-1/\sqrt{2}$. Вычислим частные производные функции в точке $M(1;\ 2)$:
$f'_x(x,\ y)=2x+y^2$, $f'_y(x,\ y)=2xy$, откуда $f'_x(1;\ 2)=6$, $f'_y(1;\ 2)=4$. По формуле (1) получим

$$\frac{\partial z}{\partial l}=6\frac{1}{\sqrt{2}}-4\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Определение 2. *Градиентом функции* $z=f(M)$ *в точке* $M(x;\ y)$ *называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial z}{\partial y}$, *взятым в точке* $M(x;\ y)$.

Обозначение: $\operatorname{grad} z=\left\{\frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial z}{\partial y}\right\}$.

Используя понятие градиента функции и учитывая, что вектор $\overline{l}$ имеет координаты $\cos\alpha$, $\cos\beta$, представим формулу (1) в виде скалярного произведения векторов $\operatorname{grad} z$ и $\overline{l}$:

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta=\operatorname{grad} z\cdot\overline{l}. \tag{2}$$

С другой стороны, по определению скалярного произведения имеем

$$\operatorname{grad} z\cdot\overline{l}=|\operatorname{grad} z|\cdot|\overline{l}|\cos\varphi, \tag{3}$$

где $|\operatorname{grad} z|$ — длина вектора $\operatorname{grad} z$; φ — угол между векторами $\overline{l}$ и $\operatorname{grad} z$. Сравнивая формулы (2) и (3) и учитывая, что $|\overline{l}|=1$, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial l}=|\operatorname{grad} z|\cos\varphi.$$

Из последнего равенства следует, что производная функции по направлению имеет наибольшую величину при $\cos\varphi=1$ $(\varphi=0)$, т. е. когда направление вектора $\overline{l}$ совпадает с направлением $\operatorname{grad} z$. При этом $\frac{\partial z}{\partial l}=|\operatorname{grad} z|$.

Таким образом, градиент функции $z=f(M)$ в точке $M(x;\ y)$ характеризует направление и величину максимальной скорости возрастания этой функции в данной точке.

Аналогично определяется производная по направлению для функции трех переменных $u=f(x,\ y,\ z)$, выводится формула

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

вводится понятие градиента

$$\operatorname{grad} u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x};\ \frac{\partial u}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$

и исследуются его свойства.

Понятия производной по направлению и градиента функции играют важную роль во многих приложениях.

§ 6. Частные производные и дифференциалы высших порядков

1. Частные производные высших порядков. Пусть частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ функции $z = f(M)$, определенной в окрестности точки M, существуют в каждой точке этой окрестности. В этом случае частные производные представляют собой функции двух переменных x и y, определенные в указанной окрестности точки M. Назовем их *частными производными первого порядка.*

В свою очередь, частные производные по переменным x и y от функций $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в точке M, если они существуют, называются *частными производными второго порядка* от функции $f(M)$ в этой точке и обозначаются следующими символами:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y) = f^{(2)}_{x^2}(x, y); \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = f''_{yx}(x, y) = f^{(2)}_{yx}(x, y);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y) = f^{(2)}_{y^2}(x, y); \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f''_{xy}(x, y) = f^{(2)}_{xy}(x, y).$$

Частные производные второго порядка вида $f''_{yx}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$ называются *смешанными частными производными.*

Примеры:

1. $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 8xy^3 + 7y, \frac{\partial z}{\partial y} = 12x^2y^2 + 7x.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 8y^3, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = 24xy^2 + 7, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24x^2y.$$

2. $z = \sin x \cos y$. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \cos y, \frac{\partial z}{\partial y} = -\sin x \sin y.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \cos y, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\cos x \sin y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \cos y.$$

В обоих примерах смешанные частные производные $f''_{yx}(x, y)$ и $f''_{xy}(x, y)$ равны. Но, вообще говоря, значения смешанных производных зависят от порядка, в котором производится дифференцирование. Так, например, функция

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

в точке (0; 0) имеет смешанные частные производные $f''_{yx}(x, y)$ и $f''_{xy}(x, y)$, но они не равны друг другу. Действительно,

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f''_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(0,0+\Delta y)-f'_x(0,0)}{\Delta y}=-1.$$

Проводя аналогичные вычисления, получим $f''_{xy}(0,\ 0)=1$. Таким образом, $f''_{yx}(0,0)\neq f''_{xy}(0,0)$.

Ответ на вопрос о том, при каких условиях значения смешанных производных не зависят от того, в каком порядке производится дифференцирование, дает следующая теорема.

Теорема 12.5. *Если производные $f''_{xy}(x,\ y)$ и $f''_{yx}(x,\ y)$ существуют в некоторой δ-окрестности точки $M(x;\ y)$ и непрерывны в самой точке M, то они равны между собой в этой точке, т. е. имеет место равенство*

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y).$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$A=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)]-[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)],$$

где Δx и Δy — любые столь малые числа, что точка $M_1\ (x+\Delta x;\ y+\Delta y)$ находится в указанной δ-окрестности точки M.

Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x)=f(x,y+\Delta y)-f(x,y);$$

тогда выражение A можно рассматривать как приращение дифференцируемой на отрезке $[x,\ x+\Delta x]$ функции $\varphi(x)$ одной переменной x:

$$A=\Delta\varphi=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x).$$

Поэтому, применяя к этой разности теорему Лагранжа, запишем

$$A=\Delta\varphi=\varphi'(x+\theta_1\Delta x)\,\Delta x=$$
$$=[f'_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)-f'_x(x+\theta_1\Delta x,y)]\,\Delta x,\ \ 0<\theta_1<1.$$

Выражение в квадратных скобках можно рассматривать как приращение дифференцируемой на отрезке $[y,\ y+\Delta y]$ функции $f'_x(x+\theta_1\Delta x,\ y)$ одной переменной y. Применяя еще раз теорему Лагранжа (по переменной y), получаем

$$A=f''_{yx}(x+\theta_1\Delta x,y+\theta_2\Delta y)\,\Delta x\,\Delta y,\ 0<\theta_1,\quad \theta_2<1. \qquad (1)$$

С другой стороны, если ввести вспомогательную функцию

$$\psi(y)=f(x+\Delta x,y)-f(x,y),$$

то, поступая аналогично, получим

$$A=\Delta\psi=\psi(y+\Delta y)-\psi(y),$$

а затем

$$A=f''_{xy}(x+\theta_4\Delta x,y+\theta_3\Delta y)\,\Delta y\,\Delta x,\quad 0<\theta_3,\theta_4<1. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем

$$f''_{yx}(x+\theta_1\Delta x,y+\theta_2\Delta y)=f''_{xy}(x+\theta_4\Delta x,y+\theta_3\Delta y).$$

Переходя теперь в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ и учитывая непрерывность частных производных $f''_{yx}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$ в точке M, получим

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}(x+\theta_1 \Delta x, y+\theta_2 \Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(x+\theta_4 \Delta x, y+\theta_3 \Delta y) \text{ или}$$

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y). \blacksquare$$

Аналогично частным производным второго порядка вводятся частные производные третьего, четвертого, ..., n-го порядка и доказывается теорема типа 12.5 о равенстве смешанных производных любого порядка.

2. Дифференциалы высших порядков. В § 4 было введено понятие дифференциала дифференцируемой в точке M функции $z=f(M)$ и получена формула

$$dz = f'_x(x, y)\, dx + f'_y(x, y)\, dy. \tag{3}$$

Будем называть dz *дифференциалом первого порядка*. Для удобства условимся обозначать дифференциалы не только символом d, но и символом δ (например, δx, δy).

Пусть функции $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ дифференцируемы в точке M. Будем рассматривать dx и dy в выражении для dz как постоянные множители. Тогда функция dz представляет собой функцию только переменных x и y, дифференцируемую в точке M, и ее дифференциал имеет вид

$$\delta(dz) = \delta\left[f'_x(x, y)\, dx + f'_y(x, y)\, dy\right] =$$
$$= \left[f'_x(x, y)\, dx + f'_y(x, y)\, dy\right]'_x \delta x + \left[f'_x(x, y)\, dx + f'_y(x, y)\, dy\right]'_y \delta y. \tag{4}$$

Дифференциал $\delta(dz)$ от дифференциала dz в точке M, взятый при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, называется *дифференциалом второго порядка* функции $z=f(M)$ в точке M и обозначается d^2z. В свою очередь, дифференциал $\delta(d^2z)$ от d^2z, взятый при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, называется *дифференциалом третьего порядка* функции $z=f(M)$ и обозначается d^3z и т. д. Дифференциал $\delta(d^{n-1}z)$ от дифференциала $d^{n-1}z$, взятый при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, называется *дифференциалом n-го порядка (или n-м дифференциалом) функции* $z=f(M)$ и обозначается d^nz.

Итак, для n-го дифференциала функции $z=f(M)$ справедлива формула

$$d^nz = \delta(d^{n-1}z)\Big|_{\substack{\delta x = dx. \\ \delta y = dy}}$$

При нахождении второго (и последующих) дифференциалов обычно вычисление $\delta(dz)$ и приравнивание дифференциалов аргументов ($\delta x = dx$, $\delta y = dy$) производятся одновременно.

С помощью формулы (4) найдем выражение для дифференциала второго порядка:

$$d^2z = \delta(dz)\Big|_{\substack{\delta x = dx \\ \delta y = dy}} = (f'_x\, dx + f'_y\, dy)'_x\, dx + (f'_x\, dx + f'_y\, dy)'_y\, dy =$$
$$= f''_{xx}(dx)^2 + f''_{xy}\, dx\, dy + f''_{yx}\, dy\, dx + f''_{yy}(dy)^2.$$

Если f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны, то согласно теореме 12.5 слагаемые $f''_{xy}\,dx\,dy$ и $f''_{yx}\,dy\,dx$ равны, так что

$$d^2z = f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xy}\,dx\,dy + f''_{yy}(dy)^2.$$

Аналогично,

$$d^3z = f'''_{x^3}(dx)^3 + 3f'''_{x^2y}(dx)^2\,dy + 3f'''_{xy^2}\,dx\,(dy)^2 + f'''_{y^3}(dy)^3,$$

. . . .

$$d^nz = f^{(n)}_{x^n}(dx)^n + nf^{(n)}_{x^{n-1}y}(dx)^{n-1}\,dy + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}f^{(n)}_{x^{n-k}y^k}(dx)^{n-k}(dy)^k + \ldots + f^{(n)}_{y^n}(dy)^n.$$

Формула для d^nz напоминает разложение двучлена в n-й степени по формуле Ньютона. Поэтому выражение для d^nz символически можно записать в виде, более удобном для запоминания:

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x, y).$$

Примеры.

1. Найти d^2z для функции $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$. Имеем

$$f'_x = \frac{y}{x^2+y^2},\ f'_y = -\frac{x}{x^2+y^2},\ f''_{xy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = f''_{yx},$$

$$f''_{x^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ f''_{y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Следовательно,

$$d^2z = \frac{-2xy(dx)^2 + 2(x^2-y^2)\,dx\,dy + 2xy(dy)^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

2. Найти d^3z для функции $z = \sin x\cos y$. Имеем

$$f'_x = \cos x\cos y,\ f'_y = -\sin x\sin y,\ f''_{x^2} = -\sin x\cos y,$$

$$f''_{y^2} = -\sin x\cos y,\ f''_{xy} = -\cos x\sin y,$$

$$f'''_{x^3} = -\cos x\cos y,\ f'''_{y^3} = \sin x\sin y,$$

$$f'''_{x^2y} = \sin x\sin y,\ f'''_{xy^2} = -\cos x\cos y.$$

Следовательно,

$$d^3z = -\cos x\cos y\,(dx)^3 + 3\sin x\sin y\,(dx)^2\,dy -$$
$$-3\cos x\cos y\,dx\,(dy)^2 + \sin x\sin y\,(dy)^3.$$

§ 7. Формула Тейлора для функции двух переменных

Аналогично функции одной переменной функцию двух переменных можно представить в виде суммы многочлена n-й степени и некоторого остаточного члена. Докажем следующую теорему.

Теорема 12.6. *Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна вместе со всеми частными производными до $(n+1)$-го порядка включительно в некоторой δ-окрестности точки $M(x, y)$. Пусть точка $M_1(x+\Delta x;\ y+\Delta y)$ принадлежит этой окрестности. Тогда приращение $\Delta f = f(M_1) - f(M)$ этой функции в точке M можно* *представить в следующей форме:*

$$\Delta f = df(x, y) + \frac{d^2 f(x, y)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x, y)}{n!} +$$
$$+ \frac{d^{n+1} f(x + \theta\,\Delta x, y + \theta\,\Delta y)}{(n+1)!},\ 0 < \theta < 1. \qquad (1)$$

Формула (1) называется *формулой Тейлора* для функции $z = f(x, y)$.

Доказательство. Для доказательства введем вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x + t\,\Delta x, y + t\,\Delta y),$$

которая является сложной функцией независимой переменной t, изменяющейся в пределах от 0 до 1, и имеет $(n+1)$-ю производную по t на отрезке $[0;\ 1]$.

Дифференцируя функцию $F(t)$ по t, получаем

$$F'(t) = f'_x(x + t\,\Delta x, y + t\,\Delta y)\,\Delta x + f'_y(x + t\,\Delta x, y + t\,\Delta y)\,\Delta y =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right) f(x + t\,\Delta x, y + t\,\Delta y),$$

$$F''(t) = f''_{xx}(x + t\,\Delta x,\ y + t\,\Delta y)(\Delta x)^2 + 2 f_{xy''}(x + t\Delta x,\ y + t\Delta y)\,\Delta x\,\Delta y +$$
$$+ f''_{yy}(x + t\,\Delta x,\ y + t\,\Delta y)\,(\Delta y)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x + t\,\Delta x,\ y + t\,\Delta y).$$

По индукции найдем

$$F^{(n)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x + t\,\Delta x, y + t\,\Delta y),$$

$$F^{(n+1)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x + t\,\Delta x, y + t\,\Delta y).$$

С другой стороны, применяя к функции $F(t)$, как функции одной переменной t, формулу Маклорена (см. гл. 6, § 3, п. 3) и полагая $t = 1$, получаем

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!},\ 0 < \theta < 1. \quad (2)$$

Но

$$F(1) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(M_1),$$
$$F(0) = f(x, y) = f(M),$$
$$F'(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right) f(x, y) = df(x, y),$$
$$F''(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x, y) = d^2 f(x, y),$$

. . . .

$$F^{(n)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x, y) = d^n f(x, y),$$

$$F^{(n+1)}(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x + \theta\,\Delta x, y + \theta\,\Delta y) =$$
$$= d^{n+1} f(x + \theta\,\Delta x, y + \theta\,\Delta y).$$

Учитывая эти равенства, из формулы (2) имеем

$$F(1)-F(0)=f(M_1)-f(M)=\Delta f=\mathrm{d}f(x, y)+\frac{\mathrm{d}^2 f(x, y)}{2!}+\ldots+\frac{\mathrm{d}^n f(x, y)}{n!}+$$
$$+\frac{\mathrm{d}^{n+1} f(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)}{(n+1)!}, \ 0<\theta<1,$$

т. е. получена формула (1). ■

Формула Тейлора для функции двух переменных напоминает формулу Тейлора для функции одной переменной. Но на самом деле, если раскрыть выражения для дифференциалов функции $f(x, y)$ в формуле (1), то получим формулу более громоздкую и сложную, чем для функции одной переменной.

Формула Тейлора для функций большего числа переменных имеет аналогичный вид.

Замечание. При $n=0$ из (1) получается формула Лагранжа (или формула конечных приращений) для функции двух переменных

$$\Delta f = \mathrm{d}f(x+\theta\,\Delta x, y+\theta\,\Delta y) =$$
$$= f'_x(x+\theta\,\Delta x, y+\theta\,\Delta y)\,\Delta x + f'_y(x+\theta\,\Delta x, y+\theta\,\Delta y)\,\Delta y, \ 0<\theta<1,$$

из которой, в частности, следует, что если $f'_x=f'_y\equiv 0$, то полное приращение функции тождественно равно нулю и функция $f(x, y)$ является постоянной.

§ 8. Экстремумы функции двух переменных

1. Определение экстремума. Пусть функция $z=f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$.

Определение. *Говорят, что функция $z=f(x, y)$ имеет в точке M_0 локальный максимум (минимум), если существует такая окрестность точки M_0, в которой для любой точки $M(x; y)$ выполняется неравенство $f(x, y)\leqslant f(x_0, y_0)$ $(f(x, y)\geqslant f(x_0, y_0))$.*

Точки локального максимума и локального минимума называются *точками экстремума.* Из определения следует, что если функция $z=f(x, y)$ имеет экстремум в точке M_0, то полное приращение $\Delta z=f(M)-f(M_0)$ этой функции в точке M_0 удовлетворяет в некоторой окрестности точки M_0 одному из следующих условий:

$$\Delta z \leqslant 0 \text{ (в случае локального максимума)},$$
$$\Delta z \geqslant 0 \text{ (в случае локального минимума)}.$$

И обратно, если в некоторой окрестности точки M_0 выполняется одно из этих неравенств, то функция имеет экстремум в точке M_0.

2. Необходимые условия экстремума. Теорема 12.7. *Если функция $f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремум и имеет в точке M_0 частные производные первого порядка, то в этой точке частные производные первого порядка равны нулю, т. е.*

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, например, равенство нулю частной производной $f'_x(x_0, y_0)$. Для этого рассмотрим в окрестности точки M_0 только те точки, для которых $y = y_0$. Получена функция $f(x, y_0)$ одной переменной x, которая имеет в точке $x = x_0$ экстремум и в точке $x = x_0$ производную $f'_x(x_0, y_0)$. Следовательно, в этой точке выполняется необходимое условие экстремума функции одной переменной: $f'_x(x_0, y_0) = 0$, что и требовалось доказать.

Аналогично, рассматривая функцию $f(x_0, y)$ одной переменной y, находим $f'_x(x_0, y_0) = 0$.■

Условие (1) не является достаточным условием экстремума. Например, частные производные функции $z = x^2 - y^2$ равны нулю в точке (0; 0), однако эта функция не имеет экстремума в указанной точке, так как равна в ней нулю и ни в какой окрестности точки (0; 0) не сохраняет знак: если $x = 0$, то $z < 0$, а если $y = 0$, то $z > 0$. Графиком функции $z = x^2 - y^2$ является гиперболический параболоид (см. рис. 160).

Таким образом, условие (1) является только необходимым условием экстремума. Точки, в которых оно выполняется, будем по аналогии с функциями одной переменной называть *точками возможного экстремума*. Такие точки называются также стационарными.

3. Достаточные условия экстремума. Т е о р е м а 12.8. *Пусть в точке $M_0(x_0; y_0)$ возможного экстремума и некоторой ее окрестности функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. Положим*

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

Тогда:

а) *если $\Delta > 0$, то в точке M_0 функция имеет экстремум, причем при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ — локальный максимум, при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ — локальный минимум;*

б) *если $\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Пусть $\Delta > 0$. Введем следующие обозначения: $f''_{xx}(x_0, y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$ и $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$. По условию, $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$, $A > 0$ (или $A < 0$). Согласно формуле Тейлора (1) из § 7, взятой для $n = 1$, полное приращение функции $f(x, y)$ в точке M_0 можно записать в виде

$$\Delta f = \frac{1}{2!}\left[A'(\Delta x)^2 + 2B'\,\Delta x\,\Delta y + C'(\Delta y)^2\right], \qquad (1)$$

где $A' = f''_{xx}(x_0 + \theta\,\Delta x,\ y_0 + \theta\,\Delta y)$, $B' = f''_{xy}(x_0 + \theta\,\Delta x,\ y_0 + \theta\,\Delta y)$, $C' = f''_{yy}(x_0 + \theta\,\Delta x,\ y_0 + \theta\,\Delta y)$, $0 < \theta < 1$. Из непрерывности частных производных второго порядка в точке M_0 следует:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} A' = f''_{xx}(x_0, y_0) = A > 0 \text{ (или } A < 0\text{)},$$

а также

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (A'C' - B'^2) = f''_{xx}(x_0, y_0)\, f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 = \Delta > 0.$$

Поэтому для достаточно малых Δy и Δx имеем

$$A' > 0 \text{ (или } A' < 0), \; A'C' - B'^2 = \Delta' > 0.$$

Так как $A' \neq 0$, то соотношение (1) можно переписать в виде

$$\Delta f = \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{A'} \left[A'^2 (\Delta x)^2 + 2A'B' \, \Delta x \, \Delta y + A'C' (\Delta y)^2 \right],$$

или, дополняя до полного квадрата,

$$\Delta f = \frac{1}{2!} \frac{1}{A'} \left[(A' \, \Delta x + B' \, \Delta y)^2 + (A'C' - B'^2) (\Delta y)^2 \right].$$

Выражение в квадратных скобках неотрицательно, поэтому если $A' > 0$ $(f''_{xx}(x_0, \; y_0) > 0)$, то $\Delta f \geqslant 0$, и, следовательно, в точке M_0 локальный минимум; если же $A' < 0$ $(f''_{xx}(x_0, \; y_0) < 0)$, то $\Delta f \leqslant 0$, и, следовательно, в точке M_0 локальный максимум, что и требовалось доказать.

б) Пусть теперь $\Delta = AC - B^2 < 0$ и по-прежнему $A = f''_{xx}(x_0, \; y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, \; y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, \; y_0)$. Рассмотрим многочлен

$$A + 2Bx + Cx^2.$$

Так как $B^2 - AC > 0$, то можно указать два числа x_1 и x_2 такие, что

$$A + 2Bx_1 + Cx_1^2 > 0, \; A + 2Bx_2 + Cx_2^2 < 0.$$

Полное приращение функции $f(x, \; y)$ в точке M_0, как и в п. а), запишем в виде (1). В силу непрерывности частных производных второго порядка

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (A' + 2B'x_1 + C'x_1^2) = A + 2Bx_1 + Cx_1^2 > 0.$$

Следовательно, существует δ-окрестность точки M_0 такая, что если точка $M(x_0 + \Delta x; \; y_0 + \Delta y)$ принадлежит этой окрестности, то

$$A' + 2B'x_1 + C'x_1^2 > 0. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь произвольную δ'-окрестность точки M_0 такую, что $\delta' \leqslant \delta$. Можно выбрать число $t > 0$ столь малым, что точка $M_1(x + t; \; y + tx_1)$ будет принадлежать δ'-окрестности точки M_0. Полагая в (1) $\Delta x = t$, $\Delta y = tx_1$, в силу (2) получаем

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!} t^2 \left[A' + 2B'x_1 + C'x_1^2 \right] > 0.$$

Рассуждая аналогично относительно значения x_2, получим, что в произвольной δ'-окрестности точки M_0 существует точка $M_2(x + \Delta x; \; y + \Delta y)$, для которой

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) < 0,$$

т. е. приращение функции $f(x, \; y)$ в сколь угодно малой окрестности точки M_0 не сохраняет знак и, следовательно, в точке M_0 нет экстремума. ■

З а м е ч а н и е. Если $\Delta=0$, то функция $f(x, y)$ в точке M_0 возможного экстремума может иметь экстремум, но может и не иметь его.

Примеры.

1. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+xy+y^2-2x-3y$. Имеем

$$f'_x=2x+y-2,\ f'_y=x+2y-3.$$

Найдем точки возможного экстремума. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+\ \ y-2=0, \\ \ x+2y-3=0, \end{cases}$$

решения которой $x=1/3$, $y=4/3$. Следовательно, $M_0(1/3;\ 4/3)$ — точка возможного экстремума.

Далее, $f''_{xx}=2$, $f''_{xy}=1$, $f''_{yy}=2$, $\Delta=2\cdot 2-1=3$. Так как $\Delta=3>0$ и $f''_{xx}=2>0$, то в точке $M_0(1/3;\ 4/3)$ данная функция имеет минимум.

2. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2-y^2$. Имеем $f'_x=2x$, $f'_y=-2y$. Решая систему уравнений $2x=0$, $-2y=0$, получаем, что $M_0(0;\ 0)$ — точка возможного экстремума. Так как $f''_{xx}=2$, $f''_{xy}=0$, $f''_{yy}=-2$ и, следовательно, $\Delta=2\cdot(-2)-0=-4<0$, то в точке $M_0(0;\ 0)$ экстремума нет.

3. Исследовать на экстремум функцию $z=x^4+y^4$. Имеем $f'_x=4x^3$, $f'_y=4y^3$, $f''_{xx}=12x^2$, $f''_{xy}=0$, $f''_{yy}=12y^2$. Решая систему уравнений $4x^3=0$, $4y^3=0$, находим, что $M_0(0;\ 0)$ — точка возможного экстремума. В этой точке $f''_{xx}(0,\ 0)=0$, $f''_{yy}(0,\ 0)=0$ и, следовательно, $\Delta=0$. Согласно замечанию в точке $M_0(0;\ 0)$ экстремум может быть и может не быть. В данном случае экстремум есть, так как $z>0$ во всех точках, кроме M_0 и $z=0$ в точке M_0, т. е. данная функция в точке M_0 имеет минимум.

4. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3$. Имеем $f'_x=3x^2$, $f'_y=3y^2$, $f''_{xx}=6x$, $f''_{xy}=0$, $f''_{yy}=6y$. Решая систему уравнений $3x^2=0$, $3y^2=0$, находим, что $M_0(0;\ 0)$ — точка возможного экстремума. В этой точке $f''_{xx}(0,\ 0)=0$, $f''_{yy}(0,\ 0)=0$ и, следовательно, $\Delta=0$. В данном случае в точке M_0 экстремума нет. В самом деле, $z(0,\ 0)=0$, $z(x,\ 0)=x^3$, откуда $z>0$ при $x>0$ и $z<0$ при $x<0$, т. е. в любой окрестности точки M_0 данная функция имеет значения как большие, так и меньшие $z(0,\ 0)$.

§ 9. Метод наименьших квадратов

В различных исследованиях приходится использовать формулы, составленные на основании эксперимента. Одним из лучших способов получения таких формул является *метод наименьших квадратов*.

Пусть на основании эксперимента необходимо установить функциональную зависимость между двумя переменными величинами

x и y. Например, между температурой и удлинением прямолинейного металлического стержня. По результатам измерений составим следующую таблицу:

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y	y_1	y_2		y_i		y_n

Установим теперь вид функции $y=f(x)$ по характеру расположения на координатной плоскости экспериментальных точек. Пусть, например, точки, взятые из таблицы, расположены так, как показано на рис. 166. В данном случае естественно предположить, что между x и y существует линейная зависимость, выражающаяся формулой

$$y = ax + b. \tag{1}$$

Ограничимся только случаем линейной зависимости.

Так как точки $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$, ..., $(x_n;\ y_n)$ не лежат точно на прямой, а лишь вблизи нее, то формула (1) является приближенной. Поэтому, подставляя значения координат точек в выражение $y-(ax+b)$, получаем равенства

$$y_1-(ax_1+b)=\delta_1,\ y_2-(ax_2+b)=\delta_2,\ \ldots,\ y_n-(ax_n+b)=\delta_n,$$

где $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ — некоторые числа, которые назовем погрешностями.

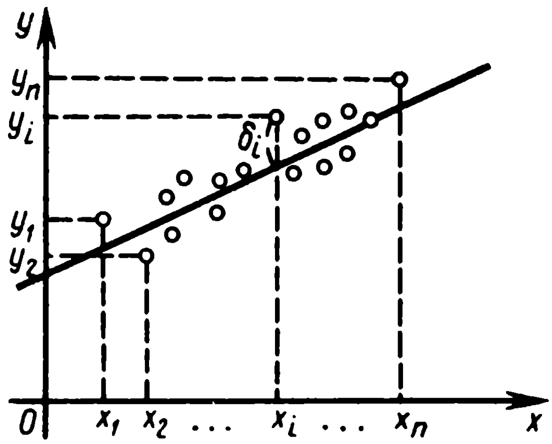


Рис. 166

Поставим задачу подобрать коэффициенты a и b таким образом, чтобы эти погрешности были возможно меньше по абсолютной величине. Для решения этой задачи воспользуемся методом наименьших квадратов. Рассмотрим сумму квадратов погрешностей

$$S(a,\ b) = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\delta_i^2.$$

Здесь x_i и y_i — заданные числа, а коэффициенты a и b — неизвестные числа, подлежащие определению, исходя из условия минимума $S(a,\ b)$, т. е. $S(a,\ b)$ можно рассматривать как функцию двух переменных a и b и исследовать ее на экстремум.

Таким образом, задача свелась к нахождению значений a и b, при которых функция $S(a,\ b)$ имеет минимум. Имеем

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i + b)\right]x_i,\ \frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i + b)\right].$$

Приравнивая эти частные производные к нулю, получаем линейную систему двух уравнений с двумя неизвестными a и b:

$$\left[\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i,\\ \sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn.\end{array}\right. \qquad (2)$$

Система (2) называется *нормальной системой метода наименьших квадратов*. Из этой системы находим числа a и b и затем, подставляя их в уравнение (1), получаем уравнение искомой прямой.

Тот факт, что функция $S(a, b)$ в найденной точке $M(a; b)$ имеет минимум, легко устанавливается с помощью частных производных второго порядка. Имеем

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ \frac{\partial^2 S}{\partial a\,\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n.$$

Следовательно,

$$\Delta = \frac{\partial^2 S}{\partial a^2}\frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a\,\partial b}\right)^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$$

Это выражение можно записать в виде $\Delta = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2$, откуда следует, что $\Delta > 0$. Так как $\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0$, то в точке $M(a; b)$ функция $S(a, b)$ имеет минимум.

Пример. Пусть в результате эксперимента получены пять значений искомой функции y при пяти значениях аргумента

x	−2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

Будем искать функциональную зависимость между x и y в виде линейной функции $y = ax + b$.

При составлении нормальной системы (2) для определения коэффициентов a и b предварительно вычислим:

$$\sum_{i=1}^{5} y_i x_i = 16{,}5;\ \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 25;\ \sum_{i=1}^{5} x_i = 5;\ \sum_{i=1}^{5} y_i = 8.$$

Система (2) принимает вид

$$\begin{cases} 25a + 5b = 16{,}5,\\ 5a + 5b = 8.\end{cases}$$

Решая эту систему, найдем: $a = 0{,}425$, $b = 1{,}175$. Следовательно, $y = 0{,}425x + 1{,}175$ — уравнение искомой прямой.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

В данной главе рассмотрим основные вопросы интегрирования функций двух переменных. Полученные определения и результаты могут быть перенесены на функции трех и более переменных.

§ 1. Двойные интегралы

Двойной интеграл представляет собой обобщение понятия определенного интеграла на случай функций двух переменных.

1. Определение и условия существования двойного интеграла. Пусть G — некоторая замкнутая ограниченная область, а $z=f(x, y)$ — произвольная функция, определенная и ограниченная в этой области.

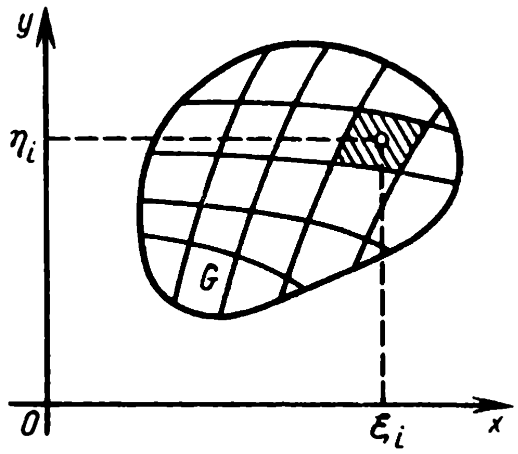


Рис. 167

Предполагается, что граница области G состоит из конечного числа кривых, заданных уравнениями вида $y=f(x)$ или $x=\varphi(y)$, где $f(x)$ и $\varphi(y)$ — непрерывные функции. Такой областью, например, является замкнутый многоугольник, граница которого состоит из конечного числа отрезков, представляющих собой графики непрерывных функций вида $y=kx+b$ или $x=a$. Другой пример — область, ограниченная эллипсом (здесь граница состоит из двух кривых: $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$) и т. д.

Разобьем область G произвольно на n частей G_i, не имеющих общих внутренних точек, с площадями $\Delta s_i (i=1, 2, ..., n)$ (рис. 167). В каждой части G_i выберем произвольную точку $(\xi_i; \eta_i)$ и составим сумму

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i; \eta_i)\,\Delta s_i, \qquad (1)$$

которую назовем *интегральной суммой* для функции $f(x, y)$ в области G. Назовем *диаметром* $\mathrm{d}(G)$ области G наибольшее расстояние между граничными точками этой области. Обозначим через λ наибольший из диаметров частичных областей G_i ($\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\mathrm{d}(G_i)\}$).

Определение. *Если интегральная сумма* (1) *при* $\lambda\to 0$ *имеет предел, равный* I*, *то этот предел называется двойным интегра-*

---

* Число I называется пределом интегральной суммы (1) при $\lambda\to 0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что при $\lambda<\delta$ независимо от выбора точек $(\xi_i; \eta_i)$ выполняется неравенство $|\sigma-I|<\varepsilon$.

лом от функции $f(x, y)$ *по области* G *и обозначается одним из следующих символов:*

$$I = \iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}s = \iint_G f(x, y,)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

В этом случае функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой* в области G, G — *областью интегрирования,* x и y — *переменными интегрирования,* $\mathrm{d}s$ (или $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$) — *элементом площади.*

Давая определение двойного интеграла, мы предполагаем, что функция $f(x, y)$ ограничена. Как и для функции одной переменной, это условие является необходимым условием интегрируемости. Однако оно не является достаточным, т. е. существуют ограниченные, но не интегрируемые функции. Примером таких функций является функция, определенная на квадрате $\{(x; y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ следующим образом:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ и } y \text{ рациональные числа}, \\ 0, & \text{если } x \text{ или } y \text{ иррациональное число}. \end{cases}$$

Доказательство неинтегрируемости такой функции непосредственно следует из определения двойного интеграла.

Для нахождения достаточных условий интегрируемости, как и в случае одной переменной, удобно воспользоваться теорией сумм Дарбу, которая полностью переносится на случай двойного интеграла*. Аналогично доказательству соответствующей теоремы для определенного интеграла доказывается следующая теорема.

Теорема 13.1. *Функция* $f(x, y)$, *непрерывная в замкнутой ограниченной области* G, *интегрируема в этой области.*

Однако не следует считать, что двойной интеграл существует только для непрерывных функций. Имеет место более общая теорема.

Теорема 13.2. *Функция* $f(x, y)$, *ограниченная в замкнутой ограниченной области* G *и непрерывная в ней всюду, кроме точек, лежащих на конечном числе кривых, являющихся графиками непрерывных функций вида* $y = f(x)$ *или* $x = \varphi(y)$, *интегрируема в этой области.*

2. Геометрический смысл двойного интеграла. Пусть в пространстве дано тело P (рис. 168), ограниченное сверху графиком непрерывной и неотрицательной функции $z = f(x, y)$, которая определена в области G, с боков — цилиндрической поверхностью, направляющей которой служит граница области G, а образующие параллельны оси Oz, и снизу областью G, лежащей в плоскости Oxy. Тело такого вида называют *криволинейным цилиндром.*

Аналогично тому как задача о вычислении площади криволинейной трапеции приводит к установлению геометрического смысла

---

* В частности, можно доказать, что если функция $f(x, y)$ интегрируема в области G, то предел как нижних, так и верхних сумм Дарбу при $\lambda \to 0$ равен $\iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}s$.

определенного интеграла, так и задача о вычислении объема тела P приводит к геометрическому толкованию двойного интеграла.

Действительно, в данном случае интегральная сумма (1) представляет собой сумму объемов прямых цилиндров с площадями оснований Δs_i и высотами $f(\xi_i, \eta_i)$, которую можно принять за приближенное значение объема тела P:

$$v_P \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_i.$$

Это приближенное равенство тем точнее, чем мельче разбиение области G на части. При переходе к пределу при $\lambda \to 0$ это приближенное равенство становится точным:

$$v_P = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_i.$$

Так как функция $f(x, y)$ интегрируема, то предел интегральной суммы существует и равен двойному интегралу от этой функции по области G. Следовательно,

$$v_P = \iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

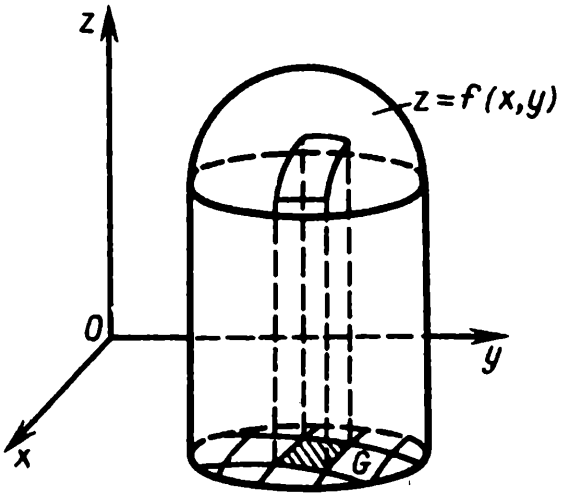


Рис. 168

Отсюда следует геометрический смысл двойного интеграла: *двойной интеграл от непрерывной, неотрицательной функции равен объему криволинейного цилиндра.*

З а м е ч а н и е. Если положить $f(x, y) \equiv 1$ всюду в области G, то непосредственно из определения двойного интеграла получим выражение площади s области G в виде двойного интеграла:

$$\iint_G 1 \cdot \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta s_i = \lim_{\lambda\to 0} s = s.$$

3. Свойства двойного интеграла. Основные свойства двойного интеграла аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла. Поэтому ограничимся формулировкой этих свойств, не останавливаясь на доказательствах.

1°. *Если k — произвольное число и функция $f(x, y)$ интегрируема в области G, то функция $kf(x, y)$ тоже интегрируема в G и*

$$\iint_G kf(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = k\iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

т. е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

2°. *Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в области G, то их алгебраическая сумма также интегрируема в этой области и*

$$\iint_G [f(x, y) \pm g(x, y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \pm \iint_G g(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

3°. *Если область G является объединением областей G_1 и G_2, не имеющих общих внутренних точек, в каждой из которых функция $f(x, y)$ интегрируема, то в области G эта функция также интегрируема и*

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G_1} f(x, y)\,dx\,dy + \iint\limits_{G_2} f(x, y)\,dx\,dy.$$

4°. Теорема о среднем. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области G, то в этой области найдется такая точка $(\xi_i;\ \eta_i)$, что*

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = f(\xi_i;\ \eta_i)\,s,$$

где s — площадь фигуры G.

Итак, рассмотрены определение и основные свойства двойного интеграла, условия существования, выяснен его геометрический смысл. Теперь рассмотрим способы вычисления двойных интегралов.

§ 2. Сведение двойного интеграла к повторному

1. Случай прямоугольной области. Сначала рассмотрим двойной интеграл по некоторому прямоугольнику D со сторонами, параллельными осям координат.

Теорема 13.3. *Пусть для функции $f(x, y)$ в прямоугольнике $D=\{(x;\ y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b;\ c\leqslant y\leqslant d\}$ существует двойной интеграл*

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy. \tag{1}$$

Пусть, далее, для каждого x из отрезка $[a, b]$ существует определенный интеграл

$$I(x) = \int\limits_c^d f(x, y)\,dy. \tag{2}$$

Тогда существует интеграл

$$\int\limits_a^b I(x)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy$$

(он называется повторным) и справедливо равенство

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy. \tag{3}$$

Доказательство. Разобьем прямоугольник D с помощью точек $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ и $c=y_0<y_1<y_2<\ldots<y_k=d$ на nk частичных прямоугольников $D_{ij}=\{(x;\ y)\,|\,x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i;\ y_{j-1}\leqslant y\leqslant y_j\}$. Положим $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $\Delta y_j=y_j-y_{j-1}$ и обозначим через m_{ij} и M_{ij} соответственно точную нижнюю и верхнюю грани функции $f(x, y)$ на частичном прямоуголь-

нике D_{ij} (рис. 169). Тогда всюду на этом прямоугольнике

$$m_{ij} \leqslant f(x, y) \leqslant M_{ij}. \tag{4}$$

Положим в этом неравенстве $x = \xi_i$, где ξ_i — произвольная точка отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ и затем проинтегрируем (4) по y в пределах от y_{j-1} до y_j. Получим

$$m_{ij}\,\Delta y_j \leqslant \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\,\mathrm{d}y \leqslant M_{ij}\,\Delta y_j. \tag{5}$$

Суммируя (5) по всем j от 1 до k и используя обозначение (2) имеем

$$\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\,\Delta y_j \leqslant I(\xi_i) \leqslant \sum_{j=1}^{k} M_{ij}\,\Delta y_j. \tag{6}$$

Далее, умножая (6) на Δx_i и суммируя по всем i от 1 до n, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j \leqslant \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\,\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} M_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j. \tag{7}$$

Пусть наибольший диаметр частичных прямоугольников D_{ij} стремится к нулю ($\lambda \to 0$). Тогда и наибольшая из длин $\Delta x_i \to 0$. Крайние члены в (7), представляющие собой нижнюю и верхнюю суммы Дарбу, стремятся при этом к двойному интегралу (1) (см. сноску на с. 308). Таким образом, существует предел и среднего члена (7), равный тому же самому двойному интегралу. Но этот предел по определению определенного интеграла равен

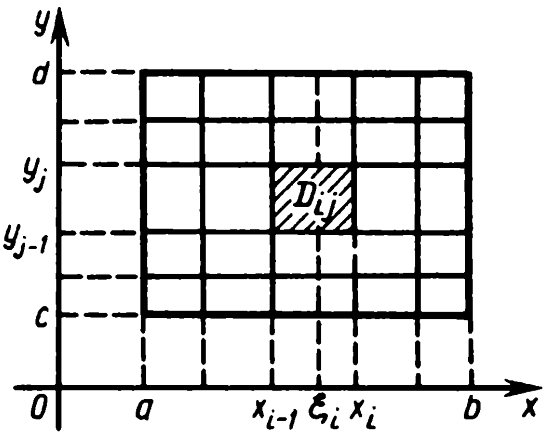


Рис. 169

$$\int\limits_a^b I(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Тем самым доказано существование повторного интеграла и равенство (3). ■

З а м е ч а н и е. Если в теореме 13.3 поменять x и y ролями, то будет доказано существование повторного интеграла

$$\int\limits_c^d I(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

и справедливость равенства

$$\iint\limits_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

С помощью формул (3) и (8) двойной интеграл приводится к повторному. Например, в формуле (8) интегрирование сначала производится по x при постоянном y, а затем полученный результат интегрируется по y, т. е. последовательно вычисляются два определенных интеграла.

Пример. Вычислить $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, где $D=\{(x;\ y)\,|\,1\leqslant x\leqslant 2;$ $1\leqslant y\leqslant 2\}$.

Решение. Имеем

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\int\limits_1^2 dy\int\limits_1^2 xy\,dx=$$
$$=\int\limits_1^2\left[y\frac{x^2}{2}\right]_1^2 dy=\int\limits_1^2\left[2y-\frac{1}{2}y\right]dy=\frac{3}{4}y^2\Big|_1^2=\frac{9}{4}.$$

2. Случай криволинейной области. Теорема 13.4. *Пусть функция $z=f(x,\ y)$ определена в области $G=\{(x;\ y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b;$ $y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\}$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непрерывные функции, $y_1(x)\leqslant y_2(x)$ для $a\leqslant x\leqslant b$. Пусть также существует двойной интеграл*

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$$

и для каждого x из отрезка $[a,b]$ существует определенный интеграл

$$I(x)=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Тогда существует повторный интеграл

$$\int\limits_a^b I(x)\,dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

и справедливо равенство

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy. \qquad (9)$$

Доказательство. Положим $c=\min\limits_{[a,b]} y_1(x)$, $d=\max\limits_{[a,b]} y_2(x)$ и заключим область G в прямоугольник $D=\{(x;\ y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b;\ c\leqslant$ $\leqslant y\leqslant d\}$ (рис. 170). Рассмотрим в этом прямоугольнике вспомогательную функцию

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & \text{в точках области } G,\\ 0 & \text{в остальных точках } D.\end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. Действительно, она интегрируема в области G, так как совпадает в ней с $f(x,\ y)$, и интегрируема в остальной части $D-G$ прямоугольника D, где она равна нулю. Следовательно, согласно свойству 3°

§ 1, она интегрируема и по всему прямоугольнику D. При этом

$$\iint\limits_G F(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy \text{ и } \iint\limits_{D-G} F(x, y)\,dx\,dy = 0,$$

откуда

$$\iint\limits_D F(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy. \quad (10)$$

Далее, для каждого x из $[a, b]$ существует интеграл

$$\int\limits_c^d F(x,y)\,dy = \int\limits_c^{y_1(x)} F(x,y)\,dy + \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x,y)\,dy + \int\limits_{y_2(x)}^{d} F(x,y)\,dy,$$

так как существует каждый из трех интегралов, стоящих справа. Действительно, отрезки $[c, y_1(x)]$ и $[y_2(x), d]$ лежат вне области G и на них $F(x, y)$ равна нулю, отсюда первый и третий интегралы

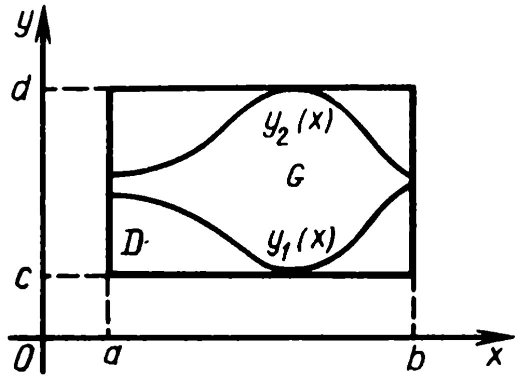


Рис. 170

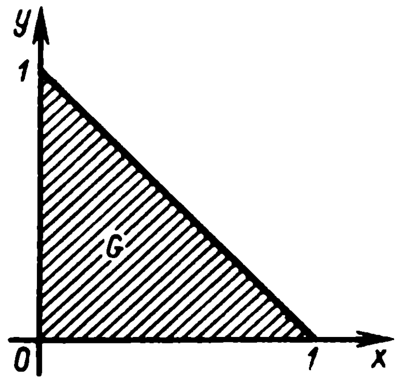


Рис. 171

равны нулю, а второй интеграл существует по условию, так как $F(x,y)=f(x,y)$ на отрезке $[y_1(x), y_2(x)]$. Поэтому

$$\int\limits_c^d F(x,y)\,dy = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy. \quad (11)$$

Таким образом, для функции $F(x, y)$ выполнены все условия теоремы 13.3 и, следовательно, двойной интеграл от этой функции по прямоугольнику D может быть сведен к повторному

$$\iint\limits_D F(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d F(x, y)\,dy.$$

Отсюда и из равенств (10) и (11) получаем

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy,$$

т. е. формулу (9). ■

З а м е ч а н и е 1. Если в теореме 13.4 поменять ролями x и y, то теорема будет утверждать существование повторного интеграла

$$\int\limits_c^d I(y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx$$

и равенства

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx. \qquad (12)$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_G (x^2+xy+2y^2)dx\,dy$ по области $G=\{(x;\ y)|0\leqslant x\leqslant 1;\ 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$.

Решение. Область G представляет собой треугольник, ограниченный осями координат и прямой $y=-x+1$ (рис. 171). Следовательно, $y_1(x)=0$, $y_2(x)=1-x$. По формуле (9) имеем

$$\iint\limits_G (x^2+xy+2y^2)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x^2+xy+2y^2)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[x^2(1-x)+\frac{x(1-x)^2}{2}+\frac{2(1-x)^3}{3}\right]dx = \frac{7}{24}.$$

Данный интеграл можно вычислить и по формуле (12), если в G поменять x и y ролями. Тогда треугольник определяется неравенствами $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant x\leqslant 1-y$, откуда $x_1(y)=0$, $x_2(y)=1-y$, и легко проверить, что интеграл $\iint\limits_G (x^2+xy+2y^2)\,dx\,dy= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} (x^2+xy+2y^2)\,dx$ имеет то же самое значение.

Замечание 2. Если область G не удовлетворяет условиям теоремы 13.4 (например, прямые (вертикальные или горизонтальные) пересекают ее границу более чем в двух точках), то необходимо область G разбить на части, каждая из которых удовлетворяла бы условиям теоремы 13.4, и сводить к повторному каждый из соответствующих двойных интегралов отдельно.

§ 3. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой замкнутой ограниченной области G. Тогда для функции $f(x, y)$ существует двойной интеграл

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (1)$$

Предположим, далее, что с помощью формул

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v) \qquad (2)$$

мы переходим к новым переменным u и v. Будем считать, что u и v определяются из (2) единственным образом:

$$u = u(x, y),\ v = v(x, y). \qquad (3)$$

С помощью формул (3) каждой точке $M(x;\ y)$ из области G ставится в соответствие некоторая точка $M^*(u;\ v)$ на координатной плоскости с прямоугольными координатами u и v. Пусть множество всех точек $M^*(u, v)$ образует ограниченную замкнутую область G^*. Формулы (2) называют *формулами преобразования координат*, а формулы (3) — *формулами обратного преобразования.*

При сделанных предположениях можно доказать, что если функции (2) имеют в области G^* непрерывные частные производные первого порядка и если определитель

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{4}$$

отличен в G^* от нуля, то для интеграла (1) справедлива формула замены переменных

$$\iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{G^*} f[x(u, v), y(u, v)] \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{5}$$

Определитель (4) называется ***функциональным определителем*** или ***якобианом*** (по имени немецкого математика Якоби) функций $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ по переменным u и v.

Коротко изложенное можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 13.5. *Если преобразование* (2) *переводит замкнутую ограниченную область G в замкнутую ограниченную область G^* и является взаимно однозначным и если функции* (2) *имеют в области G^* непрерывные частные производные первого порядка и отличный от нуля якобиан* (4), *а функция $f(x,y)$ непрерывна в области G, то справедлива формула замены переменных* (5).

Доказательство теоремы достаточно сложное и здесь не приводится*.

Как в двойном, так и в определенном интеграле замена переменных — важнейший способ приведения интеграла к виду, более удобному для вычисления.

Пример 1. Вычислить интеграл $\iint_G (2x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где G — параллелограмм, ограниченный прямыми $x + y = 1$, $x + y = 2$, $2x - y = 1$, $2x - y = 3$ (рис. 172, *а*).

Решение. Непосредственное вычисление этого интеграла достаточно громоздкое, так как для сведения его к повторному (сначала по y, а затем по x) необходимо область G разбить на три области (штриховые линии на рис. 172) и затем вычислить соответственно три интеграла. Однако простая замена переменных

$$x + y = u,\ 2x - y = v \tag{6}$$

позволяет значительно упростить решение. Прямые $x + y = 1$ и $x + y = 2$ в системе координат Oxy переходят в прямые $u = 1$

* Отметим также, что формула (5) справедлива и в более общем случае, в частности якобиан (4) может обращаться в нуль в конечном числе точек или кривых.

и $u=2$ в системе координат $O'uv$ (рис. 172, *б*), а прямые $2x-y=1$ и $2x-u=3$ — в прямые $v=1$ и $v=3$. Параллелограмм G взаимно однозначно преобразуется в прямоугольник G^*, который является более простой областью интегрирования. Осталось вычислить якобиан. Для этого выразим x и y через u и v из равенств (6): $x=(u+v)/3$, $y=(2u-v)/3$. Следовательно,

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}=\begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{vmatrix}=-\frac{1}{9}-\frac{2}{9}=-\frac{1}{3}.$$

По формуле (5) окончательно получаем

$$\iint\limits_{G}(2x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{G^*}\frac{1}{3}v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int\limits_1^2\mathrm{d}u\int\limits_1^3 v\,\mathrm{d}v=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_1^2\left[\frac{v^2}{2}\right]_1^3\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)\int\limits_1^2\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 1=\frac{4}{3}.$$

Замечание. Если подынтегральная функция или уравнение границы области интегрирования содержат сумму x^2+y^2, то во многих случаях упрощение интеграла достигается преобразованием его к полярным координатам, так как данная сумма в полярных координатах ($x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$) принимает достаточно простой вид $(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=\rho^2$.

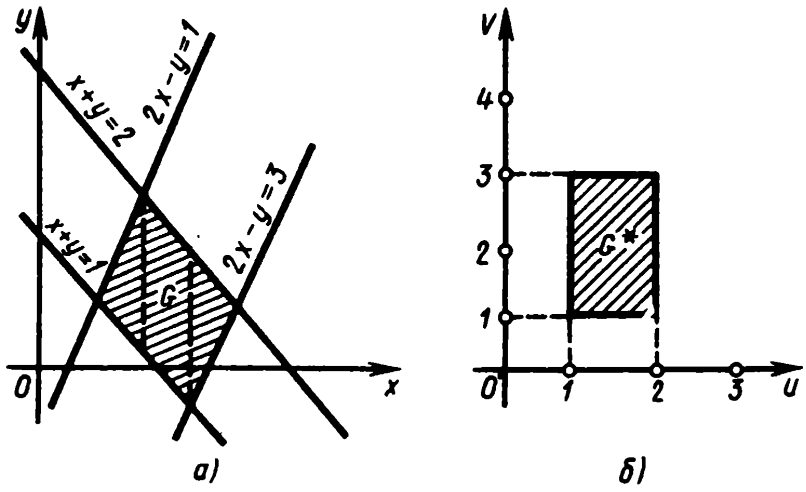


Рис. 172

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint\limits_G e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где G — четверть круга $x^2+y^2=1$, расположенная в I квадранте (рис. 173).

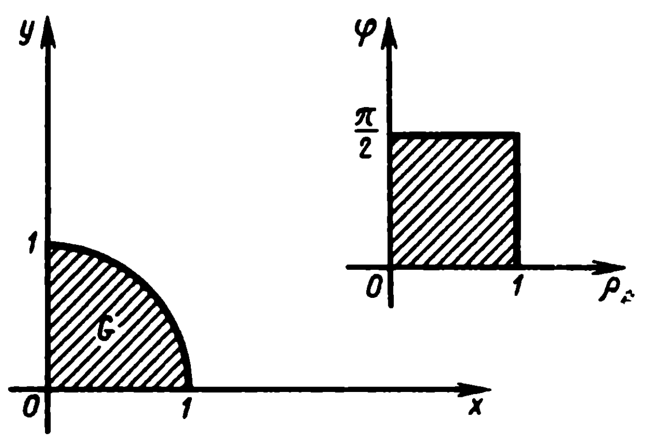


Рис. 173

Решение. Преобразуем интеграл к полярным координатам по формулам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тогда $x^2+y^2=\rho^2$ и

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}=$$

$$=\rho\left[\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right]=\rho.$$

Наглядно видно, что в области G ρ изменяется в пределах от 0 до 1, а φ — от 0 до $\pi/2$. Иначе говоря, область G преобразуется в прямоугольник $\{(\rho;\ \varphi)\,|\,0\leqslant\rho\leqslant 1;\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2\}^*$ (рис. 173). Таким образом, по формуле (5) получаем

$$\iint\limits_G e^{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1 e^{\rho^2}\rho\,d\rho=\frac{1}{2}(e-1)\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi=$$
$$=\frac{1}{2}(e-1)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}(e-1).$$

На практике при замене переменных нет необходимости детально строить область G^*. Обычно выясняют пределы изменения новых координат, используя вид области G на плоскости Oxy, что и сделано вначале в данном примере.

§ 4. Некоторые геометрические и физические приложения двойных интегралов

1. Вычисление объема. Как известно, объем v криволинейного цилиндра, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,\ y)>0$, снизу плоскостью $z=0$ и с боковых сторон цилиндрической поверхностью, у которой образующие параллельны оси Oz, а направляющей служит контур области G, вычисляется по формуле

$$v=\iint\limits_G f(x,\,y)\,dx\,dy,$$

т. е. с помощью двойных интегралов можно вычислять объемы тел.

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и $x+y+z=1$ (рис. 174).

Решение. Имеем

$$v=\iint\limits_G (1-x-y)\,dx\,dy,$$

где G — треугольная область интегрирования, ограниченная прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=1$. Расставляя пределы интегрирования в двойном интеграле, получаем

$$v=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(1-x-y)\,dy=\int\limits_0^1\left[(1-x)\,y-\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-x)^2\,dx=\frac{1}{6}.$$

2. Вычисление площади. Как было установлено (см. замечание в § 1), площадь s области G может быть вычислена с помощью двойного интеграла по формуле

$$s=\iint\limits_G dx\,dy.$$

---

* Якобиан обращается в нуль при $\rho=0$, но формула замены переменных остается в силе.

Эта формула более универсальна, чем соответствующая формула, выражающая площадь криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла, так как данная формула применима не только к криволинейным трапециям, но и к фигурам, расположенным произвольно по отношению к координатным осям.

Пример 2. Вычислить площадь области G, ограниченной линиями $y^2=x+1$, $x+y=1$ (рис. 175).

Решение. Область G представляет собой фигуру, ограниченную слева параболой $y^2=x+1$, справа прямой $y=-x+1$. Решая совместно уравнения параболы и прямой, находим точки их пересечения: $M_1(3;\ -2)$, $M_2(0;\ 1)$. Следовательно, искомая площадь

$$s=\iint\limits_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_{-2}^{1}\mathrm{d}y\int\limits_{y^2-1}^{1-y}\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{1}(2-y-y^2)\,\mathrm{d}y=\frac{9}{2}.$$

При вычислении двойных интегралов с помощью повторного интегрирования одним из главных моментов является расстановка пределов интегрирования. Если в данном примере выбрать другой порядок повторного интегрирования (сначала по y, а затем по x),

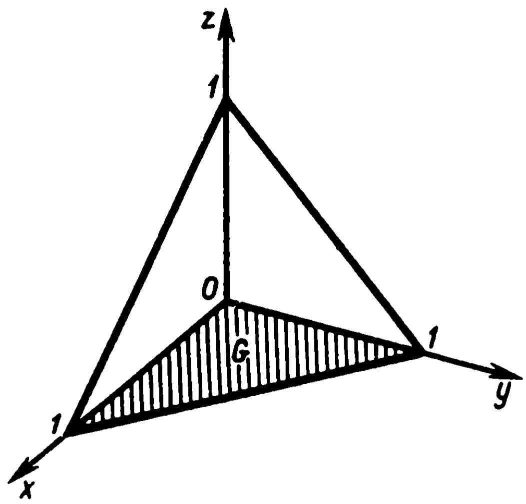


Рис. 174

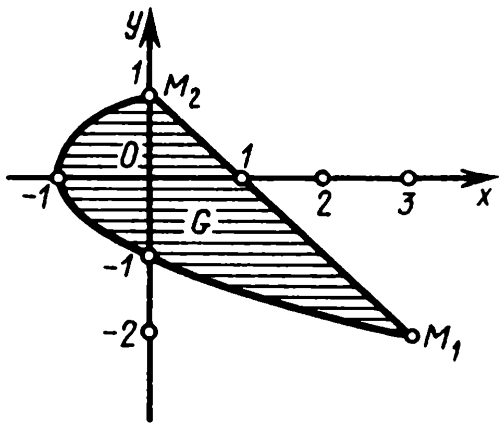


Рис. 175

то область G предварительно пришлось бы разбить на две части (осью Oy), так как она ограничена сверху линией, заданной на отрезках $-1\leqslant x\leqslant 0$ и $0\leqslant x\leqslant 3$ двумя различными уравнениями. Разумеется, был бы получен тот же результат, однако вычисления оказались бы более громоздкими.

Поэтому полезно запомнить следующее правило: если все прямые, параллельные оси Oy, входят в область интегрирования G на линии, заданной одним уравнением, и выходят из области на линии, заданной одним уравнением, то внутренний интеграл целесообразно брать по переменной y, а внешний — по x; аналогично, если все прямые, параллельные оси Ox, входят в область интегрирования на линии, заданной одним уравнением (в данном случае на параболе), и выходят на линии, заданной одним уравнением (в данном случае на прямой), то внутренний интеграл следует брать по переменной x, а внешний — по y: в этом случае область интегрирования не нужно разбивать на части.

3. Вычисление площади поверхности. С помощью двойных интегралов можно вычислять площади не только плоских фигур, но и кривых поверхностей.

Пусть поверхность S задана уравнением $z=f(x, y)$, проекцией S на плоскость Oxy является область G (рис. 176) и в этой области функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$. Для определения площади поверхности S разобьем область G произвольно на n частей G_i без общих внутренних точек с площадями Δs_i ($i=1, 2, ..., n$) и обозначим через S_i часть поверхности S, проекцией которой на плоскость Oxy является частичная область G_i. Таким образом, поверхность S будет разбита на n частей.

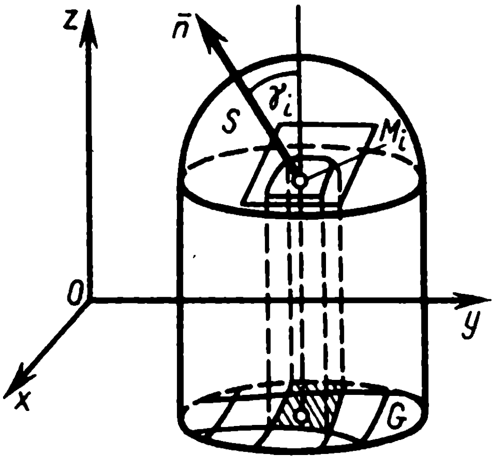


Рис. 176

В каждой части G_i выберем произвольную точку $(\xi_i; \eta_i)$, на поверхности S ей будет соответствовать точка $M_i[\xi_i; \eta_i; f(\xi_i; \eta_i)]$. Проведем через точку M_i касательную плоскость к поверхности:

$$f'_x(\xi_i, \eta_i)(x-\xi_i)+f'_y(\xi_i, \eta_i)(y-\eta_i)-$$
$$-(z-z_i)=0,$$

здесь x, y, z — координаты произвольной точки на плоскости; ξ_i, η_i, $z_i=f(\xi_i, \eta_i)$ — координаты точки касания (см. гл. 12, § 4, п. 2). Напомним, что вектор $\overline{n}$ (нормаль), перпендикулярный касательной плоскости, имеет следующие координаты: $\overline{n}=\{-f'_x(\xi_i, \eta_i); -f'_y(\xi_i, \eta_i); +1\}$. (Здесь вектор $\overline{n}$ направлен противоположно вектору $\overline{n}$ из гл. 12, § 4, п. 2. Данный вектор $\overline{n}$ образует острый угол с осью Oz.)

Рассмотрим на касательной плоскости ту ее часть, проекцией которой на плоскость Oxy является область G_i. Обозначим эту часть через σ_i, а ее площадь через $\Delta\sigma_i$. Площадь $\Delta\sigma_i$ можно считать приближенно равной площади части S_i поверхности, а сумму всех таких площадей

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i$$

приближенным значением площади всей поверхности S.

За точное значение площади поверхности S примем по определению предел такой суммы

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i^*, \qquad (1)$$

---

* Определение предела суммы $\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i$ при $\lambda\to 0$ аналогично определению предела интегральной суммы для двойного интеграла (см. сноску на с. 307). В дальнейшем все аналогичные определения опущены.

где λ — наибольший из диаметров частичных областей G_i. Докажем, что этот предел существует и равен двойному интегралу

$$s = \iint\limits_G \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}\, dx\, dy. \qquad (2)$$

Обозначим через γ_i угол между вектором $\overline{n}$ и осью Oz. Он равен углу между касательной плоскостью в точке M_i и плоскостью Oxy. Так как область G_i есть проекция σ_i на плоскость Oxy, то площади этих областей связаны соотношением

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta s_i}{\cos\gamma_i}.$$

Действительно, данная формула, как известно, справедлива для треугольников. Она, очевидно, справедлива и для плоских многоугольников, так как плоский многоугольник можно разбить на несколько треугольников. Она также справедлива и для любой плоской фигуры площади $\Delta\sigma$, ограниченной некоторой кривой, поскольку ее площадь можно рассматривать как предел площадей вписанных в нее многоугольников.

С другой стороны, как известно из аналитической геометрии,

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)}}.$$

Следовательно,

$$\Delta\sigma_i = \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)}\, \Delta s_i$$

Подставляя значение $\Delta\sigma_i$ в сумму (1), получаем

$$s = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)}\, \Delta s_i.$$

Стоящая под знаком предела сумма представляет собой интегральную сумму для функции $\sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}$. Так как эта функция по условию непрерывна в области G, то предел этой суммы при $\lambda \to 0$ существует и равен двойному интегралу (2), что и требовалось доказать.

Соотношение (2) представляет собой формулу, с помощью которой вычисляется площадь поверхностей, заданных уравнением $z = f(x, y)$.

Пример 3. Вычислить площадь той части плоскости $6x + 3y + 2z = 12$, которая заключена в первом октанте (рис. 177).

Р е ш е н и е. Так как функция $z = 6 - 3x - (3/2)y$ и область G, являющаяся проекцией данной части поверхности на плоскость Oxy, удовлетворяют сформулированным выше условиям, то искомую площадь можно вычислить по формуле (2). Имеем

$$f_x'(x, y) = -3,\ f_y'(x, y) = -3/2;$$

$$\sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} = \sqrt{1 + 9 + 9/4} = 7/2.$$

Областью G является треугольник, ограниченный осями Ox, Oy и прямой $6x+3y=12$, получаемой из уравнения данной плоскости при $z=0$. Расставляя пределы интегрирования в двойном интеграле, получаем

$$s=\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{4-2x} \frac{7}{2}\,\mathrm{d}y=\frac{7}{2}\int_0^2 [y]_0^{4-2x}\,\mathrm{d}x=\frac{7}{2}\int_0^2 (4-2x)\,\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{7}{2}\left[4x-x^2\right]_0^2=\frac{7}{2}\cdot 4=14.$$

4. Вычисление массы пластинки. Рассмотрим на плоскости Oxy материальную пластинку, т. е. некоторую область G, по которой распределена масса m с плотностью $\rho(x, y)$. Вычислим по заданной плотности $\rho(x, y)$ массу m этой пластинки, считая, что $\rho(x, y)$ — непрерывная функция. Разобьем G произвольно на n частей G_i $(i=1, 2, ..., n)$ и обозначим через m_i массы этих частей. В каждой

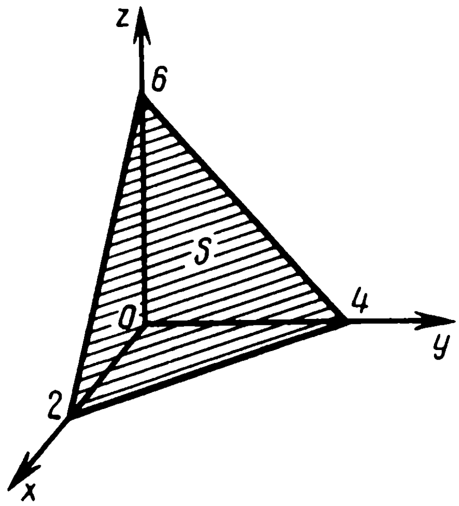


Рис. 177

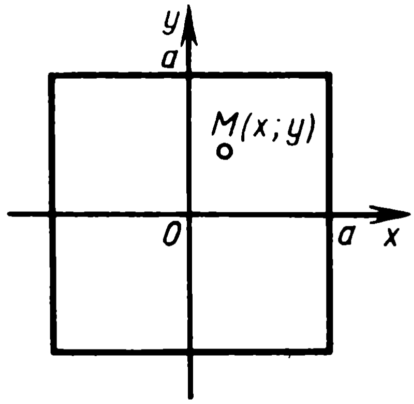


Рис. 178

части произвольно возьмем точку $(\xi_i;\ \eta_i)$. Массу m_i каждой такой части G_i можно считать приближенно равной $\rho(\xi_i\ \eta_i)\,\Delta s_i$, где Δs_i — площадь G_i, а масса m всей пластинки приближенно равна сумме

$$m=\sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\ \eta_i)\,\Delta s_i,$$

которая является интегральной суммой для непрерывной функции $\rho(x, y)$ в области G. В пределе при $\lambda \to 0$, очевидно, получим точное значение массы пластинки, равное двойному интегралу от функции $\rho(x, y)$ по области G, т. е.

$$m=\iint_G \rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3}$$

Пример 4. Определить массу квадратной пластинки со стороной $2a$, если плотность $\rho(x, y)$ в каждой точке $M(x;\ y)$ пропорциональна квадрату расстояния от точки M до точки пересечения диагоналей, и коэффициент пропорциональности равен k.

Р е ш е н и е. Выберем систему координат так, как показано на рис. 178. После этого можно найти функцию $\rho(x, y)$ исходя из условия задачи. Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка квадратной пластинки. Тогда квадрат расстояния от точки M до точки пересечения диагоналей равен x^2+y^2. Следовательно, плотность в точке M

$$\rho(M)=\rho(x,y)=k(x^2+y^2).$$

По формуле (3) имеем

$$m=\iint\limits_G k(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Учитывая, что подынтегральная функция четна относительно x и y, а область интегрирования симметрична относительно осей координат, можно ограничиться вычислением интеграла по той части области G, которая расположена в I четверти, т. е.

$$m=4k\int\limits_0^a \mathrm{d}x\int\limits_0^a (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y=4k\int\limits_0^a\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^a\mathrm{d}x=$$

$$=4k\int\limits_0^a\left(ax^2+\frac{a^3}{3}\right)\mathrm{d}x=4k\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{a^3x}{3}\right]_0^a=4k\,\frac{2a^4}{3}=\frac{8}{3}\,ka^4.$$

5. Вычисление координат центра масс пластинки. Найдем координаты центра масс пластинки, занимающей в плоскости Oxy некоторую область G. Пусть $\rho(x,\ y)$ — плотность этой пластинки в точке $M(x;\ y)$, причем $\rho(x,\ y)$ — непрерывная функция. Разбив область G на части $G_i\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, выберем в каждой из этих частей некоторую точку $(\xi_i;\ \eta_i)$ и будем приближенно считать массу m_i каждой из частей пластинки равной $\rho(\xi_i;\ \eta_i)\,\Delta s_i$ (Δs_i — площадь G_i). Если считать, что каждая из этих масс сосредоточена в одной точке, а именно в точке $(\xi_i;\ \eta_i)$, то для координат x_c и y_c центра масс такой системы материальных точек получим следующие выражения:

$$x_c=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\rho(\xi_i,\eta_i)\,\Delta s_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\,\Delta s_i};\quad y_c=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i\rho(\xi_i,\eta_i)\,\Delta s_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\,\Delta s_i},\tag{4}$$

которые представляют собой приближенные значения координат центра масс пластинки. Чтобы получить точные значения этих координат, необходимо в (4) перейти к пределу при $\lambda\to 0$. При этом интегральные суммы перейдут в соответствующие интегралы и мы получим, что координаты центра масс пластинки определяются формулами

$$x_c=\frac{\iint\limits_G x\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{m};\quad y_c=\frac{\iint\limits_G y\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{m},\tag{5}$$

где $m=\iint\limits_G\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ — масса пластинки.

Если пластинка однородна, т. е. $\rho = \text{const}$, то формулы координат центра масс упрощаются:

$$x_c = \frac{\iint\limits_G x\,dx\,dy}{\iint\limits_G dx\,dy}; \quad y_c = \frac{\iint\limits_G y\,dx\,dy}{\iint\limits_G dx\,dy}. \tag{6}$$

Величины $M_y = \iint\limits_G x\rho(x, y)\,dx\,dy$ и $M_x = \iint\limits_G y\rho(x, y)\,dx\,dy$ в формулах (5) называются ***статическими моментами*** пластинки относительно осей Oy и Ox.

Таким образом, вычисление координат центра масс пластинки сводится к вычислению трех двойных интегралов.

Пример 5. Найти координаты центра масс однородной пластинки, ограниченной двумя параболами $y^2 = x$ и $x^2 = y$ (рис. 179).

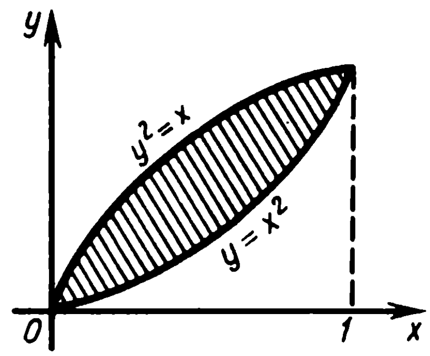


Рис. 179

Решение. Координаты центра масс данной пластинки найдем по формулам (6). Сначала вычислим массу пластинки

$$m = \iint\limits_G dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \frac{1}{3}.$$

Далее вычислим статические моменты ее относительно осей координат:

$$M_y = \iint\limits_G x\,dx\,dy = \int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{20};$$

$$M_x = \iint\limits_G y\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy = \frac{3}{20}.$$

Затем по формулам (6) найдем

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{3}{20} : \frac{1}{3} = \frac{9}{20}; \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{3}{20} : \frac{1}{3} = \frac{9}{20}.$$

Итак, $x_c = y_c = \frac{9}{20}$.

6. Вычисление момента инерции пластинки. Как известно, момент инерции материальной точки относительно некоторой оси равен произведению массы точки на квадрат ее расстояния до этой оси, а момент инерции системы материальных точек равен сумме моментов инерции этих точек.

Пусть область G плоскости Oxy занята пластинкой, имеющей непрерывную плотность $\rho(x, y)$. Разбив область G на части G_i, площади которых равны Δs_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и выбрав в каждой из них некоторую точку $(\xi_i; \eta_i)$, заменим пластинку системой материальных точек с массами $m_i = \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$ и координатами $(\xi_i; \eta_i)$. Момент инерции такой системы точечных масс, например, относительно оси Oy равен $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$. Примем это выражение за приближенное значение момента инерции пластинки. Но оно же представляет собой интегральную сумму для непрерывной функции $x^2\rho(x, y)$. Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получаем для момента инерции пластинки относительно оси Oy следующую формулу:

$$I_y = \iint_G x^2\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Аналогично, момент инерции пластинки относительно оси Ox равен

$$I_x = \iint_G y^2\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Найдем момент инерции I_0 пластинки относительно начала координат. Принимая во внимание, что момент инерции материальной точки с массой m относительно начала координат равен $m(x^2 + y^2)$, рассуждая, как и выше, получаем, что

$$I_0 = \iint_G (x^2 + y^2)\,\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{7}$$

т. е.

$$I_0 = I_x + I_y.$$

Пример 6. Найти момент инерции круга радиуса R с постоянной плотностью $\rho(x, y) = 1$ относительно начала координат.

Решение. По формуле (7) имеем

$$I_0 = \iint_G (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Перейдем к полярным координатам. Уравнение окружности (границы круга) в полярных координатах имеет вид $\rho = R$. Поэтому

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \rho^2\rho\,\mathrm{d}\rho = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4}\left[R^4\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi R^4}{2}.$$

§ 5. Криволинейные интегралы

Обобщим понятие определенного интеграла на случай, когда областью интегрирования является отрезок некоторой кривой, лежащей в плоскости.

Интегралы такого рода называются *криволинейными*. Они имеют широкое применение в различных разделах математики.

Различают два типа криволинейных интегралов: криволинейные интегралы первого и второго рода.

1. Определение криволинейного интеграла первого рода. Рассмотрим на плоскости Oxy некоторую кривую AB, гладкую или кусочно-гладкую*, и предположим, что функция $z = f(x, y)$ определена и ограничена на кривой AB.

Разобьем кривую AB произвольно на n частей точками $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_{n-1}, M_n = B$, выберем на каждой из частичных дуг $M_{i-1}M_i$ произвольную точку M_i^* (рис. 180) и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i^*)\,\Delta l_i, \tag{1}$$

где Δl_i — длина дуги $M_{i-1}M_i$. Сумма (1) называется *интегральной суммой* для функции $z = f(x, y) = f(M)$ по кривой AB. Обозначим через λ наибольшую из длин частичных дуг $M_{i-1}M_i$ $\left(\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\Delta l_i\}\right)$.

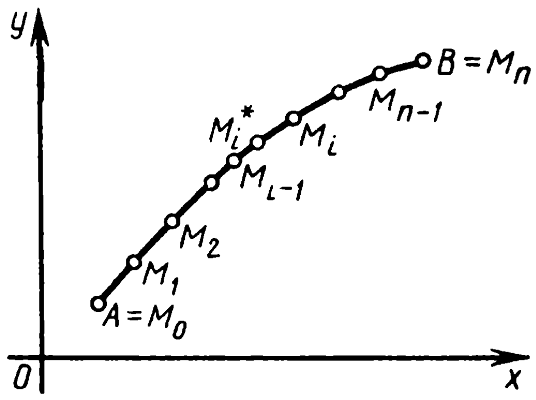


Рис. 180

Определение. *Если интегральная сумма* (1) *при* $\lambda \to 0$ *имеет предел, равный* I, *то этот предел называется криволинейным интегралом первого рода от функции* $f(x, y)$ *по кривой* AB *и обозначается одним из следующих символов*

$$I = \int_{AB} f(M)\,dl = \int_{AB} f(x, y)\,dl.$$

В этом случае функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой* вдоль кривой AB, сама кривая AB — *контуром интегрирования*, A — *начальной*, а B — *конечной точками интегрирования.*

Криволинейный интеграл первого рода легко сводится к определенному интегралу. Действительно, приняв на кривой AB за параметр длину дуги l, отсчитываемую от точки A, получим параметрическое представление кривой $x = x(l)$, $y = y(l)$ $(0 \leqslant l \leqslant L)$. При этом функция $f(x, y)$, заданная вдоль AB, становится сложной функцией параметра l: $f[x(l), y(l)]$. Обозначив через l_i^* значение параметра l, отвечающее точке M_i^*, а через l_i — отвечающее точке M_i, перепишем интегральную сумму (1) в виде

$$\sum_{i=1}^{n} f[x(l_i^*), y(l_i^*)]\,\Delta l_i, \tag{2}$$

где $\Delta l_i = l_i - l_{i-1}$ и $l_{i-1} \leqslant l_i^* \leqslant l_i$. Сумма (2) является интегральной для определенного интеграла от функции $f[x(l), y(l)]$ на отрезке $[0, L]$. Поскольку интегральные суммы (1) и (2) равны между

---

* Кривая, заданная уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, называется *гладкой*, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, не обращающиеся в нуль одновременно (тем самым кривая в каждой точке имеет касательную). Непрерывная кривая, составленная из конечного числа гладких кусков, называется *кусочно-гладкой*.

собой, равны и соответствующие им интегралы, т. е.

$$\int_{AB} f(x, y)\,\mathrm{d}l = \int_0^L f[x(l), y(l)]\,\mathrm{d}l. \tag{3}$$

Заметим, что формула (3) не только выражает криволинейный интеграл через определенный, но и доказывает существование криволинейного интеграла от функции $f(x, y)$, непрерывной вдоль рассматриваемой кривой AB*.

Как было показано, криволинейный интеграл первого рода непосредственно сводится к определенному, однако между этими понятиями имеется следующее различие. В интегральной сумме (1) величины Δl_i обязательно положительны, независимо от того, какую точку кривой AB считать начальной, а какую — конечной, т. е.

$$\int_{AB} f(x, y)\,\mathrm{d}l = \int_{BA} f(x, y)\,\mathrm{d}l,$$

в то время как определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ при перестановке пределов интегрирования меняет знак. В остальном криволинейный интеграл первого рода обладает теми же свойствами, что и определенный интеграл. Это непосредственно вытекает из формулы (3).

Криволинейный интеграл первого рода, так же как и определенный, имеет геометрический смысл. Если определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ при $f(x) \geqslant 0$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, то криволинейный интеграл $\int_{AB} f(M)\,\mathrm{d}l$ при $f(M) \geqslant 0$ численно равен площади куска цилиндрической поверхности, которая составлена из перпендикуляров к плоскости Oxy, восставленных в точках $M(x; y)$ кривой AB и имеющих переменную длину $f(M)$ (рис. 181).

В частности, если AB — не кривая, а отрезок прямой $[a, b]$, расположенный на оси Ox, то $f(x, y) = f(x)$, $\Delta l_i = \Delta x_i$ и криволинейный интеграл будет обычным определенным интегралом.

Наконец, если положить $f(M) \equiv 1$, то получим криволинейный интеграл $\int_{AB} \mathrm{d}l$, значение которого есть длина дуги кривой AB.

Таким образом, с помощью криволинейного интеграла первого рода можно вычислять площадь цилиндрических поверхностей и длины дуг. Кроме этого, криволинейный интеграл первого рода имеет широкое применение в физике. С его помощью можно, как это делали в случае двойных интегралов, находить массу матери-

---

* Непрерывность функции $f(x, y) = f(M)$ вдоль кривой AB означает, что $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ в любой точке M_0 кривой AB, где M также точка этой кривой.

альной кривой по ее плотности, моменты инерции относительно координатных осей, координаты центра масс такой кривой и т. д.

2. Вычисление криволинейных интегралов первого рода. Вычисление криволинейных интегралов первого рода сводится к вычислению определенных интегралов.

Пусть кривая AB задана параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные вместе со своими производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ функции, а $f(x, y)$ — функция, непрерывная вдоль этой кривой, причем для определенности будем считать, что точке A соответствует значение $t = \alpha$, точке B — значение $t = \beta$. Тогда для любой точки $M(\varphi(t); \psi(t))$ кривой AB длину l дуги AM можно рассматривать как функцию параметра $t: l = l(t)$, и вычислять ее (гл. 8, § 10, п. 3) по формуле

$$l = l(t) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt,$$

откуда, согласно правилу дифференцирования интеграла по верхнему пределу,

$$dl = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt. \quad (4)$$

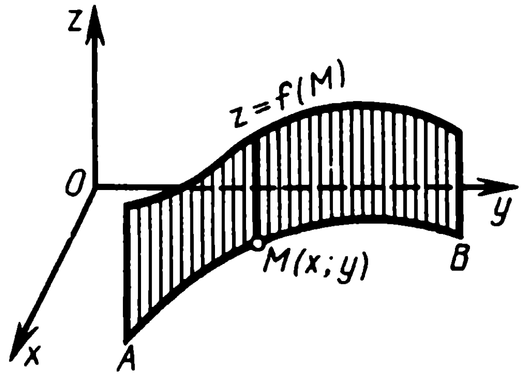


Рис. 181

Заменяя переменную $l = l(t)$ в определенном интеграле в правой части равенства (3) и учитывая (4), получаем

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl = \int_0^L f[x(l), y(l)]\, dl =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt. \quad (5)$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{AB} y^2\, dl$, где AB — часть окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

Решение. Так как

$$y^2 = a^2 \sin^2 t,\ dl = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}\, dt = a\, dt,$$

то по формуле (5) получаем

$$\int_{AB} y^2\, dl = \int_0^{\pi/2} a^2 \sin^2 t \cdot a\, dt = \frac{a^3}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t)\, dt =$$

$$= \frac{a^3}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{a^3 \pi}{4}.$$

В частности, если кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, где $y(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция *,

* Т. е. имеющая непрерывную производную.

то, принимая x за параметр ($t=x$), из формулы (5) имеем

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,\mathrm{d}l=\int\limits_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x. \qquad (6)$$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} y\,\mathrm{d}l$, где AB — дуга параболы $y^2=2x$ от точки (0; 0) до точки (2; 2).

Решение. Имеем

$$y=\sqrt{2x},\ y'=1/\sqrt{2x},\ \mathrm{d}l=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+1/(2x)}\,\mathrm{d}x.$$

По формуле (6) получаем

$$\int\limits_{AB} y\,\mathrm{d}l=\int\limits_0^2\sqrt{2x}\sqrt{1+1/(2x)}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int\limits_0^2\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[(2x+1)^{3/2}\right]_0^2=\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

Замечание. Формула (4) представляет самостоятельный интерес. Возводя в квадрат, получаем: $(\mathrm{d}l)^2=[\varphi'(t)\,\mathrm{d}t]^2+[\psi'(t)\,\mathrm{d}t]^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2$. Это равенство дает простое геометрическое истолкование дифференциала дуги $\mathrm{d}l$. Учитывая, что дифференциал функции $y=y(x)$ равен приращению ординаты касательной (гл. 5, § 3, п. 1), получаем, что дифференциал дуги $\mathrm{d}l$ (см. рис. 185) равен длине отрезка касательной к кривой AB от точки касания с абциссой x до точки $(x+\mathrm{d}x;\ y+\mathrm{d}y)$, т. е. гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами $|\mathrm{d}x|$ и $|\mathrm{d}y|$, а равенство $(\mathrm{d}l)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2$ представляет собой теорему Пифагора.

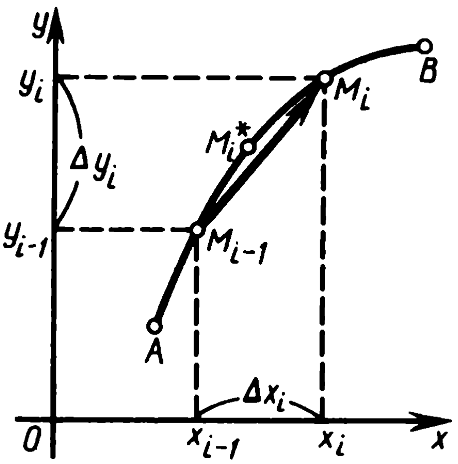


Рис. 182

3. Определение криволинейного интеграла второго рода. Пусть на кривой AB определены две ограниченные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Разобьем кривую AB на n частей точками $A=M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_{i-1},\ M_i,\ \ldots,\ M_n=B$. Обозначим через Δx_i и Δy_i проекции вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$ на оси координат (рис. 182), на каждой частичной дуге $M_{i-1}M_i$ возьмем произвольную точку M_i^* и составим интегральную сумму для функции $P(x,y)$ $[Q(x,y)]$:

$$\sum_{i=1}^{n} P(M_i^*)\,\Delta x_i\left[\sum_{i=1}^{n} Q(M_i^*)\,\Delta y_i\right]. \qquad (7)$$

Определение. *Если интегральная сумма* (7) *при* $\lambda\to 0$ $(\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta l_i\}$, Δl_i — *длина дуги* $M_{i-1}M_i$) *имеет предел, равный* I, *то этот предел называется криволинейным интегралом второго рода от функции* $P(x,y)[Q(x,y)]$ *по кривой* AB *и обозначается* *символом*

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx \left[\int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy\right].$$

Сумму

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy$$

называют *общим криволинейным интегралом второго рода* и обозначают символом

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.^*$$

Криволинейные интегралы второго рода, как и интегралы первого рода, легко сводятся к определенным интегралам.

Действительно, пусть кривая AB задана параметрически уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные вместе со своими производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ функции, причем точке A кривой соответствует значение $t=\alpha$, точке B — значение $t=\beta$, $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вдоль кривой AB. Тогда справедливы следующие формулы:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t)\,dt;$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q[\varphi(t), \psi(t)]\,\psi'(t)\,dt; \tag{8}$$

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\,\psi'(t)\}\,dt,$$

сводящие криволинейные интегралы к определенным интегралам.

Докажем первую из формул (8):

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \tag{9}$$

вторая формула доказывается аналогично, а третья получается в результате сложения первой и второй.

Пусть точкам M_i разбиения кривой AB соответствуют значения t_i параметра t, точкам M_i^* — значения t_i^*, т. е. M_i имеет координаты $[\varphi(t_i);\ \psi(t_i)]$, а M_i^* — координаты $[\varphi(t_i^*);\ \psi(t_i^*)]$, $i=1, 2, \ldots, n$. Функция $P(x, y)$ на кривой является сложной функцией параметра t: $P[\varphi(t), \psi(t)]$. Так как функции $x=\varphi(t)$ и

---

* Вместо $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ иногда будем писать просто P и Q, а криволинейный интеграл записывать в виде $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$.

$y = \psi(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функция $P(x, y)$ непрерывна вдоль кривой AB, то по теореме о непрерывности сложной функции функция $P[\varphi(t), \psi(t)]$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Составим интегральную сумму (7) для функции $P(x, y)$:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} P(M_i^*)\, \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} P[\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)]\, \Delta x_i.$$

Так как $\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$, то по формуле Ньютона—Лейбница

$$\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Поэтому

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} P[\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)] \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} P[\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)]\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t.$$

С другой стороны, так как функция $P[\varphi(t), \psi(t)]\, \varphi'(t)$ является непрерывной функцией на $[\alpha, \beta]$, то для нее существует определенный интеграл, стоящий в формуле (9) справа. Запишем его в виде суммы интегралов по частичным отрезкам $[t_{i-1}, t_i]$

$$I = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} P[\varphi(t), \psi(t)]\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Рассмотрим и оценим разность

$$\sigma - I = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \{P[\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)] - P[\varphi(t), \psi(t)]\}\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t. \quad (10)$$

Из непрерывности функции $P[\varphi(t), \psi(t)]$ на $[\alpha, \beta]$ по теореме Кантора следует ее равномерная непрерывность на $[\alpha, \beta]$. А это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\mu = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta t_i\} < \delta$ выполняется неравенство

$$\left|P[\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)] - P[\varphi(t), \psi(t)]\right| < \varepsilon. \quad (11)$$

Из непрерывности функции $\varphi'(t)$ на $[\alpha, \beta]$ следует ее ограниченность на $[\alpha, \beta]$, т. е. существует число k такое, что

$$|\varphi'(t)| \leqslant k. \quad (12)$$

Используя (11) и (12), получаем для разности (10) следующую оценку:

$$|\sigma - I| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|P[\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)] - P[\varphi(t), \psi(t)]\right| |\varphi'(t)|\, \mathrm{d}t <$$

$$< \varepsilon k \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon k (\beta - \alpha).$$

щаются и принимают вид

$$x_c=\frac{\iiint\limits_V x\,\mathrm{d}v}{v};\ y_c=\frac{\iiint\limits_V y\,\mathrm{d}v}{v};\ z_c=\frac{\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}v}{v},$$

где v — объем данного тела.

Как уже было отмечено, тройной интеграл $\iiint\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ равен объему тела V. Тройные интегралы в некоторых случаях более удобны для вычисления объемов, чем двойные, так как с их помощью можно вычислить объем не только криволинейного цилиндра, но и других тел.

Пример 5. Определить координаты центра масс верхней половины однородного шара V радиуса R с центром в начале координат.

Решение. Данный полушар ограничен поверхностями $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ и $z=0$. В силу симметрии полушара $x_c=y_c=0$. Координата z_c определяется по формуле

$$z_c=\frac{\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}=\frac{\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\frac{2}{3}\pi R^3}.$$

Переходя к сферическим координатам, получаем

$$z_c=\frac{\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int\limits_0^R\rho^3\,\mathrm{d}\rho}{\frac{2}{3}\pi R^3}=\frac{2\pi\frac{R^4}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\pi R^3}=\frac{3}{8}R.$$

§ 11. Поверхностные интегралы

В этом параграфе рассмотрены интегралы от функций, заданных на поверхности, так называемые поверхностные интегралы.

Теория поверхностных интегралов во многом аналогична теории криволинейных интегралов.Различают поверхностные интегралы первого и второго рода.

1. Определение поверхностного интеграла первого рода. Пусть в точках некоторой поверхности S гладкой или кусочно-гладкой* определена ограниченная функция $f(M)=f(x,\ y,\ z)$. Разобьем поверхность S произвольно на n частей с площадями ΔS_1, ΔS_2, ..., ..., ΔS_n (рис. 201). Выбрав на каждой частичной поверхности про-

* Поверхность называется *гладкой*, если в каждой ее точке существует касательная плоскость и при переходе от точки к точке положение этой касательной плоскости меняется непрерывно. Поверхность, состоящая из конечного числа гладких кусков, которые соединены непрерывно, называется *кусочно-гладкой*.

извольную точку $M_i(\xi_i;\ \eta_i;\ \varsigma_i)$, составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta S_i. \qquad (1)$$

Сумма (1) называется *интегральной суммой* для функции $f(M)$ по поверхности S. Обозначим через λ наибольший из диаметров частей поверхности.

Определение. *Если интегральная сумма* (1) *при* $\lambda \to 0$ *имеет предел, равный* I, *то этот предел называется поверхностным интегралом первого рода от функции* $f(x, y, z)$ *по поверхности* S *и обозначается одним из следующих символов:*

$$I = \iint_S f(M)\,\mathrm{d}S = \iint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S.$$

В этом случае функция $f(x, y, z)$ называется *интегрируемой по поверхности* S, S — *областью интегрирования.*

Данное определение по сути аналогично определению двойного интеграла. Поэтому свойства двойных интегралов и условия их существования без особых изменений переносятся на поверхностные интегралы.

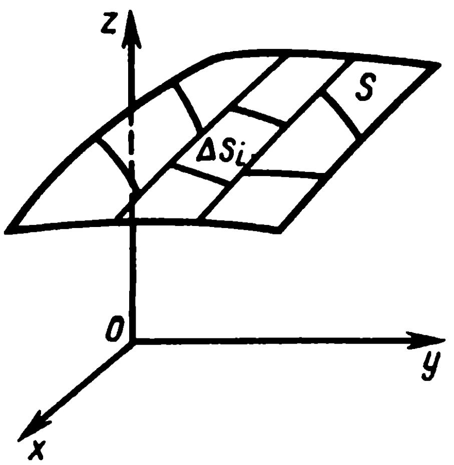


Рис. 201

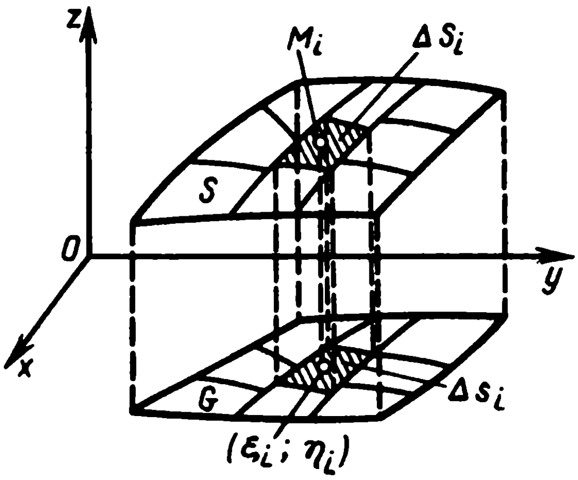


Рис. 202

В частности, если $f(x, y, z) \equiv 1$ на поверхности S, то

$$\iint_S \mathrm{d}S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = s,$$

где s — площадь поверхности S, т. е. с помощью поверхностного интеграла первого рода можно вычислять площади поверхностей.

Кроме того, с их помощью можно определять массы, статические моменты, моменты инерции, координаты центра масс и подобные величины для материальных поверхностей с известной поверхностной плотностью распределения масс. Эти задачи решаются аналогично соответствующим задачам для случая материальной кривой, материальной плоской и пространственной области.

2. Вычисление поверхностных интегралов первого рода. Вычисление поверхностного интеграла первого рода производится сведением поверхностного интеграла к двойному.

Пусть поверхность S задана уравнением $z=z(x, y)$, где функция $z(x, y)$ вместе с производными $z'_x(x, y)$ и $z'_y(x, y)$ непрерывна в замкнутой области G — проекции S на плоскость Oxy (рис. 202), и пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности S и, следовательно, интегрируема по этой поверхности.

Разобьем поверхность S произвольно на n частей и спроектируем это разбиение на плоскость Oxy. Получим соответственно разбиение области G на части $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Площадь ΔS_i каждой части поверхности может быть представлена в виде (см. формулу (2), п. 3, § 4)

$$\Delta S_i = \iint\limits_{G_i} \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Применяя к двойному интегралу теорему о среднем, получаем

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_i, \eta_i) + z_y'^2(\xi_i, \eta_i)}\,\Delta s_i, \qquad (2)$$

где $(\xi_i; \eta_i)$ — некоторая точка области G_i; Δs_i — площадь G_i. Обозначим через M_i точку на частичной поверхности с координатами $(\xi_i; \eta_i; \varsigma_i)$, где $\varsigma_i = z(\xi_i, \eta_i)$, а $(\xi_i; \eta_i)$ — точка, которая имеется в формуле (2). Составим интегральную сумму для функции $f(x, y, z)$ по поверхности S, выбирая точки M_i в качестве промежуточных:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_\lambda)\,\Delta S_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f[\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)]\sqrt{1 + z_x'^2(\xi_i, \eta_i) + z_y'^2(\xi_i, \eta_i)}\,\Delta s_i. \qquad (3)$$

В правой части равенства находится интегральная сумма для двойного интеграла от непрерывной в области G функции $f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}$. Поэтому предел правой части (3) при $\lambda \to 0$ равен двойному интегралу

$$\iint\limits_{G} f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Так как функция $f(x, y, z)$ интегрируема по поверхности S, то предел левой части (3) при $\lambda \to 0$ равен поверхностному интегралу

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S.$$

Следовательно, переходя к пределу в (3) при $\lambda \to 0$, получаем искомую формулу

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{G} f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad (4)$$

выражающую поверхностный интеграл первого рода через двойной по проекции поверхности S на плоскость Oxy.

Аналогично получаются формулы, выражающие интеграл по поверхности S через двойные по ее проекциям на плоскости Oyz и Oxz.

Пример 1. Вычислить интеграл $\iint\limits_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dS$, где S — часть параболоида вращения $z=1-x^2-y^2$, отсеченного плоскостью $z=0$ (рис. 203).

Решение. Поверхность S, заданная уравнением $z=1-$ $-x^2-y^2$, проектируется на плоскость Oxy в область G, ограниченную окружностью $x^2+y^2=1$ (уравнение окружности получается из уравнения параболоида при $z=0$). Следовательно, областью G является круг $x^2+y^2\leqslant 1$. В этом круге функции $z=1-x^2-y^2$, $z'_x(x,\ y)=-2x$, $z'_y(x,\ y)=2y$ непрерывны. По формуле (4) получаем

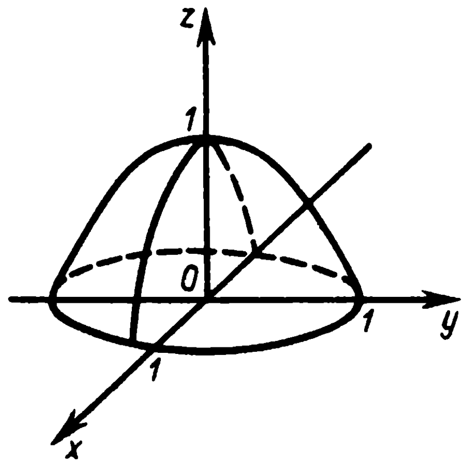


Рис. 203

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS=\iint\limits_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dS=$$

$$=\iint\limits_G \sqrt{1+4x^2+4y^2}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_G (1+4x^2+4y^2)\,dx\,dy.$$

Переходя в полученном двойном интеграле к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, находим

$$\iint\limits_G (1+4x^2+4y^2)\,dx\,dy=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (1+4\rho^2)\,\rho\,d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}+\rho^4\right]_0^1 d\varphi=\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi=\frac{3}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi}=3\pi.$$

3. Определение поверхностного интеграла второго рода. Введем предварительно понятие стороны поверхности.

Возьмем на гладкой поверхности S произвольную точку M и проведем через нее нормаль к поверхности (вектор $\overline{n}$). Рассмотрим теперь на поверхности S какой-либо замкнутый контур, проходящий через точку M и не имеющий общих точек с границей поверхности S. Будем перемещать точку M по замкнутому контуру вместе с вектором $\overline{n}$ так, чтобы вектор $\overline{n}$ все время оставался нормальным к S и чтобы его направление менялось при этом перемещении непрерывно (рис. 204). В начальное положение точка M вернется либо с тем же направлением нормали, либо с противоположным.

Если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности S и не пересекающему ее границы, при возвращении в исходную точку не меняет направления нормали к поверхности, то поверхность называется *двусторонней*.

Примерами двусторонних поверхностей служат плоскость, сфера, любая поверхность, заданная уравнением $z=f(x, y)$, где $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ — функции, непрерывные в некоторой области G плоскости Oxy.

Если же на поверхности S существует замкнутый контур, при обходе которого направление нормали меняется после возвращения в исходную точку на противоположное, то поверхность называется *односторонней*.

Простейшим примером односторонней поверхности служит лист Мёбиуса*, изображенный на рис. 205. Его можно получить, взяв полоску бумаги $ABCD$ и склеив ее так, чтобы точка A совпала с точкой C, а точка B — с точкой D, т. е. повернув перед склеиванием один из ее краев на 180°. При обходе листа Мёбиуса по его средней линии и возвращении в исходную точку направление нормали меняется на противоположное.

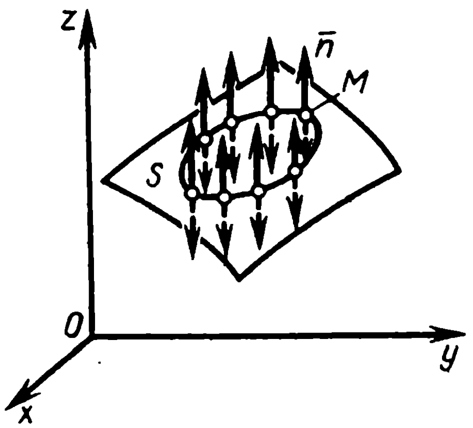


Рис. 204

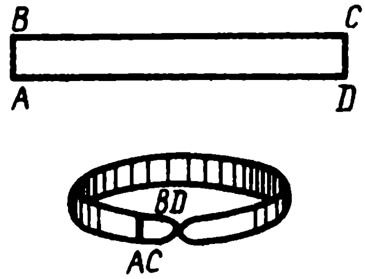


Рис. 205

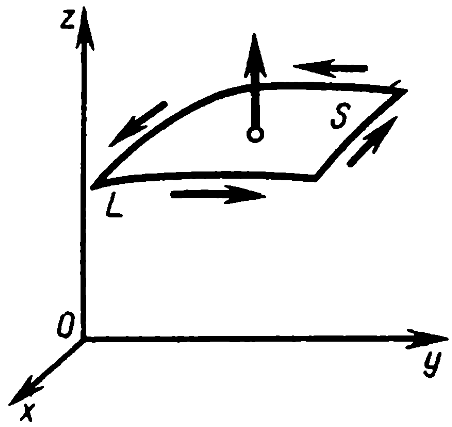


Рис. 206

В дальнейшем рассматриваются только двусторонние поверхности. Для двусторонней поверхности совокупность всех ее точек с выбранным в них направлением нормали, изменяющимся непрерывно при переходе от точки к точке, называется ***стороной поверхности***, а выбор определенной ее стороны — ***ориентацией поверхности***. Двустороннюю поверхность называют также *ориентируемой*, а одностороннюю — ***неориентируемой***.

С понятием стороны поверхности тесно связано понятие ориентации ее границы.

Пусть S — ориентированная (сторона уже выбрана) поверхность, ограниченная контуром L, не имеющим точек самопересечения. Будем считать ***положительным*** направлением обхода контура L то, при движении по которому наблюдатель, расположенный так, что направление нормали совпадает с направлением от ног к голове, оставляет поверхность слева от себя (рис. 206). Противоположное направление обхода называется ***отрицательным***. Если изменить ориентацию поверхности, т. е. изменить на-

* Мёбиус Август Фердинанд (1790—1868) — немецкий математик.

правление нормали на противоположное, то положительное и отрицательное направления обхода контура L поменяются ролями.

Перейдем теперь к определению поверхностного интеграла второго рода.

Пусть S — гладкая поверхность, заданная уравнением $z=f(x, y)$, и $R(x, y, z)$ — ограниченная функция, определенная в точках поверхности S. Выберем одну из двух сторон поверхности, т. е. одно из двух возможных направлений нормали в точках поверхности (тем самым мы ориентировали поверхность). Если нормали составляют острые углы с осью Oz, то будем говорить, что выбрана *верхняя сторона* поверхности $z=f(x, y)$, если тупые углы, то *нижняя сторона* поверхности. Разобьем поверхность S произвольно на n частей и обозначим через G_i проекцию i-й части поверхности на плоскость Oxy. Выбрав на каждой частичной поверхности произвольную точку $M_i(\xi_i; \eta_i; \varsigma_i)$, составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i; \eta_i; \varsigma_i)\,\Delta s_i, \tag{5}$$

где Δs_i — площадь G_i, взятая со знаком плюс, если выбрана верхняя сторона поверхности S, и со знаком минус, если выбрана нижняя сторона поверхности S. Сумма (5) называется *интегральной суммой* для функции $R(M)=R(x, y, z)$. Обозначим через λ наибольший из диаметров частей поверхности S.

Определение. *Если интегральная сумма* (5) *при* $\lambda\to 0$ *имеет предел, равный* I, *то этот предел называется поверхностным интегралом второго рода от функции* $R(x, y, z)$ *по выбранной стороне поверхности* S *и обозначается одним из следующих символов:*

$$I=\iint_S R(M)\,dx\,dy=\iint_S R(x,y,z)\,dx\,dy.$$

В этом случае функция $R(x, y, z)$ называется *интегрируемой по поверхности* S по переменным x и y.

Аналогично определяется поверхностный интеграл второго рода по выбранной стороне поверхности S по переменным y и z [z и x] от функции $P(x, y, z)$ [$Q(x, y, z)$], которая определена на поверхности S:

$$\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz\left[\iint_S Q(x,y,z)\,dz\,dx\right].$$

Сумму

$$\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz+\iint_S Q(x,y,z)\,dz\,dx+\iint_S R(x,y,z)\,dx\,dy$$

называют *общим поверхностныминтегралом второго рода* и обозначают символом

$$\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz+Q(x,y,z)\,dz\,dx+R(x,y,z)\,dx\,dy. \tag{6}$$

Поверхностный интеграл второго рода обладает такими же свойствами, как и поверхностный интеграл первого рода, но в отличие от последнего при изменении стороны поверхности (переориентации) он меняет знак.

К понятию поверхностного интеграла второго рода приводит, например, задача о потоке векторного поля, которая будет рассмотрена в § 14.

Для односторонней поверхности понятие поверхностного интеграла второго рода не вводится.

4. Вычисление поверхностных интегралов второго рода. Поверхностные интегралы второго рода вычисляют сведением их к двойным интегралам.

Пусть ориентированная (выберем верхнюю сторону) гладкая поверхность S задана уравнением $z = f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ определена в замкнутой области G — проекции поверхности S на плоскость Oxy, а $R(x, y, z)$ — непрерывная функция на поверхности S.

Разобьем поверхность S произвольно на n частей и спроектируем это разбиение на плоскость Oxy (рис. 207). Область G разобьется соответственно на части G_1, G_2, ... G_n. Выберем на каждой части поверхности произвольную точку $M_i(\xi_i;\ \eta_i;\ \varsigma_i)$ и составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\, \Delta s_i$, где Δs_i — площадь G_i. Так как $\varsigma_i = f(\xi_i, \eta_i)$, то

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\, \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} R[\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)]\, \Delta s_i. \qquad (7)$$

В правой части равенства находится интегральная сумма для двойного интеграла от непрерывной в области G функции $R[x, y, f(x, y)]$. Переходя к пределу в (7) при $\lambda \to 0$, получаем искомую формулу

$$\iint_S R(x, y, z)\, dx\, dy = \iint_G R[x, y, f(x, y)]\, dx\, dy, \qquad (8)$$

выражающую поверхностный интеграл второго рода по переменным x и y через двойной. Кроме того, формула (8) доказывает существование поверхностного интеграла от функции $R(x, y, z)$, непрерывной на рассматриваемой поверхности S. Если выбрать нижнюю сторону поверхности, то перед интегралом в правой части (8) появится знак минус.

Аналогично устанавливается справедливость следующих формул:

$$\iint_S P(x, y, z)\, dy\, dz = \iint_{G_1} P[f(y, z), y, z]\, dy\, dz, \qquad (9)$$

$$\iint_S Q(x, y, z)\, dz\, dx = \iint_{G_2} Q[x, f(x, z), z]\, dz\, dx, \qquad (10)$$

где поверхность S задана соответственно уравнением $x=f(y, z)$ и $y=f(x, z)$, а G_1 и G_2 — проекции поверхности S соответственно на плоскости Oyz и Oxz.

Для вычисления интеграла общего вида (6) используют те же формулы (8) — (10), если поверхность S однозначно проектируется на все три координатные плоскости. В более сложных случаях поверхность S разбивают на части, обладающие указанными свойствами, а интеграл (6) — на сумму интегралов по этим частям.

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint\limits_S (y^2+z^2)\,dx\,dy$, где S — верхняя сторона поверхности $z=\sqrt{1-x^2}$, отсеченная плоскостями $y=0$, $y=1$ (рис. 208).

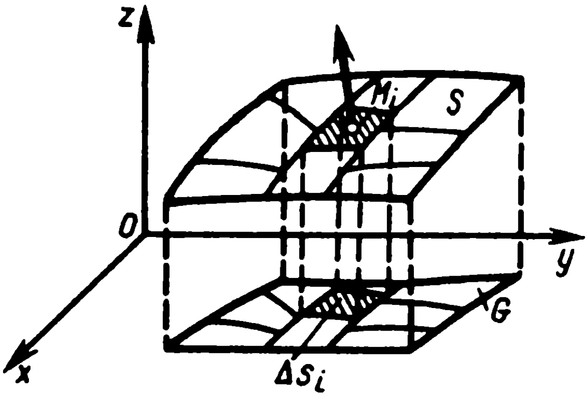


Рис. 207

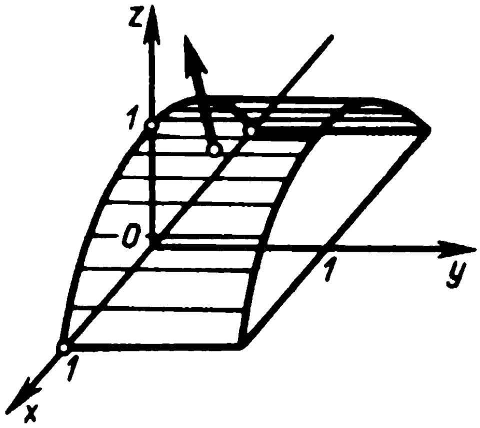


Рис. 208

Решение. Проекцией G данной поверхности на плоскость Oxy является прямоугольник, определяемый неравенствами $-1\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$. По формуле (8) находим

$$\iint\limits_S (y^2+z^2)\,dx\,dy=\iint\limits_G [y^2+(\sqrt{1-x^2})^2]\,dx\,dy=\int\limits_{-1}^{1} dx\int\limits_0^1 (y^2+1-x^2)\,dy=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{y^3}{3}+y-x^2y\right]_0^1 dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{4}{3}-x^2\right)dx=\left[\frac{4}{3}x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=2.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$, где S — верхняя сторона части плоскости $x+z-1=0$, отсеченная плоскостями $y=0$, $y=4$ и лежащая в первом октанте (рис. 209).

Решение. По определению,

$$\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{G_1} x(y,z)\,dy\,dz+\iint\limits_S y\,dz\,dx+\iint\limits_{G_2} z(x,y)\,dx\,dy.$$

Здесь G_1 и G_2 — проекции поверхности S на плоскости Oyz и Oxy, а $\iint\limits_S y\,dz\,dx=0$, так как плоскость S параллельна оси Oy. По формулам (8) и (9) соответственно находим

$$\iint\limits_{S} z\,dx\,dy = \iint\limits_{G_2} (1-x)\,dx\,dy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^1 (1-x)\,dx = 2,$$

$$\iint\limits_{S} x\,dy\,dz = \iint\limits_{G_1} (1-z)\,dy\,dz = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^1 (1-z)\,dz = 2.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{S} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = 2 + 0 + 2 = 4.$$

5. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода. Поверхностные интегралы второго рода можно ввести и другим способом, а именно как поверхностные интегралы первого рода, в которых под знаком интеграла стоят некоторые специальные выражения. Обозначим через $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ направляющие косинусы нормали ориентированной поверхности в произвольной ее точке. Поверхностные интегралы второго рода различаются своим отношением к координатным плоскостям:

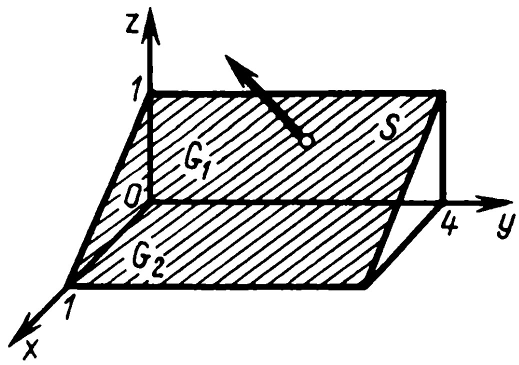


Рис. 209

1) поверхностный интеграл второго рода для плоскости Oxy от функции $R(x, y, z)$ выражается через поверхностный интеграл первого рода с помощью следующей формулы:

$$\iint\limits_{S} R(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{S} R(x, y, z)\cos\gamma\,dS; \tag{11}$$

2) поверхностный интеграл второго рода для плоскости Oxz от функции $Q(x, y, z)$ выражается через поверхностный интеграл первого рода с помощью следующей формулы:

$$\iint\limits_{S} Q(x, y, z)\,dz\,dx = \iint\limits_{S} Q(x, y, z)\cos\beta\,dS; \tag{12}$$

3) поверхностный интеграл второго рода для плоскости Oyz от функции $P(x, y, z)$ выражается через поверхностный интеграл первого рода с помощью следующей формулы:

$$\iint\limits_{S} P(x, y, z)\,dy\,dz = \iint\limits_{S} P(x, y, z)\cos\alpha\,dS. \tag{13}$$

Суммируя формулы (11) — (13), получаем формулу, выражающую поверхностный интеграл второго рода общего вида по выбранной стороне поверхности через поверхностный интеграл первого рода:

$$\iint\limits_{S} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS. \tag{14}$$

Если выбрать другую сторону поверхности, то направляющие косинусы нормали $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ изменят знак и, следовательно, изменит знак поверхностный интеграл второго рода.

Пример 4. Вычислить интеграл $\iint\limits_S z \cos \gamma \, dS$, где S — внешняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной над плоскостью Oxy, а γ — острый угол между нормалью к поверхности S с осью Oz (рис. 210).

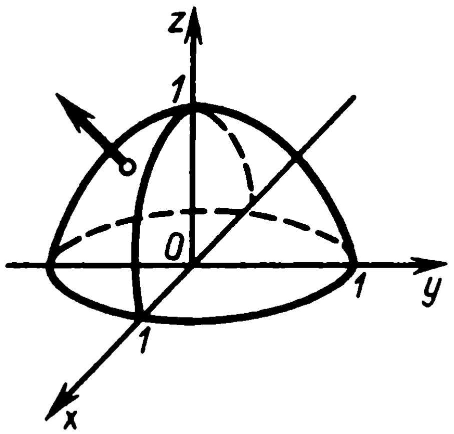


Рис. 210

Решение. По формуле (11), связывающей поверхностные интегралы обоих типов, имеем

$$\iint\limits_S z \cos \gamma \, dS = \iint\limits_S z \, dx \, dy.$$

Проекцией G данной поверхности S на плоскость Oxy является круг $x^2+y^2 \leqslant 1$. По формуле (8) получаем

$$\iint\limits_S z \, dx \, dy = \iint\limits_G \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy.$$

Переходя в двойном интеграле к полярным координатам, находим

$$\iint\limits_G \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2} \, \rho \, d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[-\frac{(1-\rho^2)^{3/2}}{3} \right]_0^1 d\varphi = \frac{1}{3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3} \pi.$$

§ 12. Формула Остроградского

Формула Остроградского* устанавливает связь между поверхностным интегралом по замкнутой поверхности и тройным интегралом по пространственной области, ограниченной этой поверхностью. Эта формула является аналогом формулы Грина, которая, как известно, связывает криволинейный интеграл по замкнутой кривой с двойным интегралом по плоской области, ограниченной этой кривой. Формула Остроградского имеет широкое применение как в самом анализе, так и в его приложениях.

Выведем эту формулу для замкнутой пространственной области, граница которой пересекается с любой прямой, параллельной осям координат, не более чем в двух точках. Назовем для краткости такие области *простыми*. При этом будем рассматривать внешнюю сторону поверхности, ограничивающей эту область. Предполагается, что поверхность гладкая или кусочно-гладкая.

Теорема 13.8. *Пусть V — простая замкнутая область, ограниченная поверхностью S и пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$*

---

* Остроградский Михаил Васильевич (1801—1861) — выдающийся русский математик.

и $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в данной области. Тогда имеет место следующая формула:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \iint\limits_S P \mathrm{d}y \mathrm{d}z + Q \mathrm{d}z \mathrm{d}x + R \mathrm{d}x \mathrm{d}y, \quad (1)$$

называемая формулой Остроградского.

Доказательство. Пусть область G — проекция поверхности S (и области V) на плоскость Oxy (рис. 211), а $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y,)$ — уравнения соответствующих частей поверхности S — нижней части S_1 и верхней S_2.

Преобразуем тройной интеграл

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

в поверхностный. Для этого сведем его к повторному интегралу и по формуле Ньютона—Лейбница выполним интегрирование по z. Получим

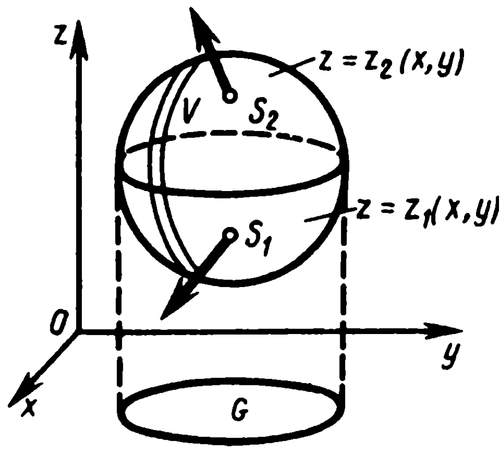


Рис. 211

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint\limits_G \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}z =$$

$$= \iint\limits_G R\left[x, y, z_2(x, y)\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y -$$

$$- \iint\limits_G R\left[x, y, z_1(x, y)\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Так как область G является проекцией на плоскость Oxy и поверхности S_2, и поверхности S_1, то двойные интегралы можно заменить равными им поверхностными интегралами [см. § 11, п. 4, формулу (8)], взятыми соответственно по верхней стороне поверхности $z = z_2(x, y)$ и верхней стороне поверхности $z = z_1(x, y)$, т. е.

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint\limits_{S_2} R(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y - \iint\limits_{S_1} R(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Меняя в интеграле по S_1 сторону поверхности, получаем

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint\limits_{S_2} R(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y +$$

$$+ \iint\limits_{S_1} R(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint\limits_S R\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \quad (2)$$

где S — внешняя сторона поверхности, ограничивающей область V.

Аналогично доказываются формулы

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint\limits_S P\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z, \quad (3)$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint\limits_S Q\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x. \quad (4)$$

Складывая почленно равенства (2), (3), (4), приходим к формуле (1). ■

Замечание. Формула Остроградского верна для любой замкнутой пространственной области V, которую можно разбить на конечное число простых областей. В самом деле, применяя формулу (1) к каждой из областей разбиения и складывая результаты, получаем в левой части равенства тройной интеграл по всей области V, а в правой — поверхностный интеграл по поверхности S, ограничивающей область V, так как поверхностные интегралы по вспомогательным поверхностям берутся дважды по противоположным сторонам и при суммировании взаимно уничтожаются.

С помощью формулы Остроградского удобно вычислять поверхностные интегралы по замкнутым поверхностям.

Пример 1. Вычислить интеграл $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ (см. рис. 196).

Решение. Используя формулу Остроградского, получаем

$$\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy=\iiint\limits_V (1+1+1)\,dx\,dy\,dz=3\iiint\limits_V dx\,dy\,dz=$$

$$=3\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} dz=3\int_0^1 dx\int_0^{1-x}[z]_0^{1-x-y}\,dy=$$

$$=3\int_0^1\left[y-xy-\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x}dx=$$

$$=3\int_0^1\left[1-x-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right]dx=3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Решение. Применяя формулу Остроградского, имеем

$$\iint\limits_S x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy=3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

откуда, введя сферические координаты, получаем

$$3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^R\rho^4\,d\rho=\frac{12}{5}\pi R^5.$$

Как было отмечено (§ 9, п. 1), формула Грина выражает площадь области через криволинейный интеграл по ее границе. Точно также из формулы Остроградского легко получить выражение для объема области в виде поверхностного интеграла по замкнутой поверхности S — границе этой области. Действительно, подберем функции P, Q и R так, чтобы

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\equiv 1.$$

Тогда получим

$$v = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy,$$

где v — объем, ограниченный поверхностью S. В частности, полагая $P = x/3$, $Q = y/3$, $R = z/3$, получаем для вычисления объема формулу

$$v = \frac{1}{3}\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy.$$

§ 13. Формула Стокса

Формула Стокса* устанавливает связь между поверхностным и криволинейным интегралами. Подобно формулам Грина и Остроградского, формулу Стокса широко применяют как в самом анализе, так и в его приложениях.

Пусть S — поверхность, заданная уравнением $z = z(x, y)$, где функции $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ непрерывны в замкнутой области G — проекций S на плоскость Oxy; L — контур, ограничивающий S, а l — его проекция на плоскость Oxy, являющаяся контуром, ограничивающим область G. Выберем верхнюю сторону поверхности S (рис. 212). Тогда при сделанных предположениях справедлива следующая теорема.

Теорема 13.9. *Если функция $P(x, y, z)$ непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка на поверхности S, то имеет место следующая формула:*

$$\oint\limits_L P(x, y, z)\,dx = \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) dS, \qquad (1)$$

где $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к поверхности S, а контур L пробегается в положительном направлении.

Доказательство. Преобразуем криволинейный интеграл

$$\oint\limits_L P(x, y, z)\,dx,$$

взятый по контуру L, в интеграл по поверхности S. Это преобразование проведем по следующей схеме:

$$\oint\limits_L \to \oint\limits_l \to \iint\limits_G \to \iint\limits_S,$$

т. е. криволинейный интеграл по пространственному контуру L преобразуем сначала в криволинейный интеграл по плоскому контуру l, затем переведем его в двойной интеграл по области G и, наконец, этот последний интеграл преобразуем в интеграл по поверхности S.

* Стокс Джорж Габриель (1819—1903) — английский физик и математик.

Так как контур L лежит на поврхности S, то координаты его точек удовлетворяют уравнению $z=z(x, y)$ и поэтому значения функции $P(x, y, z)$ в точках контура L равны значениям функции $P[x, y, z(x, y)]$ в соответствующих точках контура l, являющегося проекцией L. Проекции же соответствующих участков разбиения контуров L и l на ось Ox совпадают. Поэтому совпадают также интегральные суммы для криволинейных интегралов второго рода от функции P по контурам L и l, а значит, равны и интегралы:

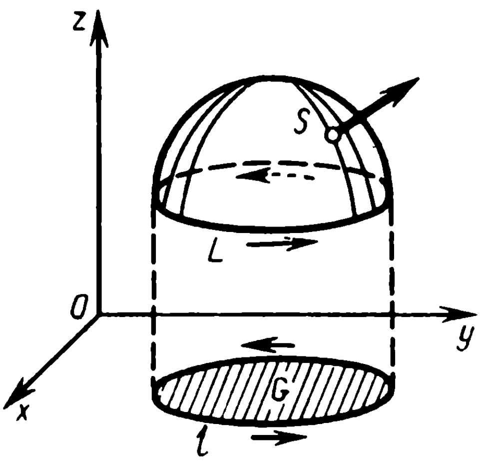


Рис. 212

$$\oint_L P(x,y,z)\,dx=\oint_l P[x,y,z(x,y)]\,dx.$$

Далее, применяя формулу Грина, перейдем к двойному интегралу по области G. Получаем

$$\oint_l P[x,y,z(x,y)\,dx=-\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}z'_y\right)dx\,dy.$$

Здесь подынтегральная функция равна частной производной по y от сложной функции, получающейся из $P(x, y, z)$ после подстановки $z(x, y)$ вместо z.

Поскольку s — верхняя сторона поверхности, т. е. $\cos\gamma>0$ (γ — острый угол между нормалью и осью Oz), нормаль имеет проекции $-z'_x$, $-z'_y$, 1. А так как направляющие косинусы нормали пропорциональны соответствующим проекциям, то

$$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}=\frac{-z'_y}{1}=-z'_y.$$

Поэтому

$$-\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}z'_y\right)dx\,dy=-\iint_G\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial з}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)dx\,dy.$$

Теперь, воспользовавшись формулами (8) и (11) из § 11, можно этот двойной интеграл преобразовать в поверхностный. Получаем

$$-\iint_G\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)dx\,dy=-\iint_S\left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma-\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right)dS.$$

Итак,

$$\oint_L P(x,y,z)\,dx=\iint_S\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS. \blacksquare$$

Аналогично доказывается при соответствующих условиях справедливость следующих двух формул:

$$\oint_L Q(x,y,z)\,dy=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma-\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)dS, \tag{2}$$

$$\oint_L R(x,y,z)\,dz=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha-\frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)dS. \tag{3}$$

Складывая почленно равенства (1), (2), (3), получаем формулу

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right] dS,$$

которая называется *формулой Стокса.*

С помощью формулы, связывающей поверхностные интегралы, (14) из § 11 формулу Стокса можно переписать в следующем виде:

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx. \quad (4)$$

Формулу Стокса легко запомнить, заметив, что первое слагаемое в правой ее части это то же самое выражение, которое стоит под знаком двойного интеграла в формуле Грина, а второе и третье получаются из него циклической перестановкой координат x, y, z и функций P, Q, R.

В частности, если поверхность S — область плоскости Oxy, ограниченная контуром L, то интегралы по $dz dx$ и $dy dz$ обращаются в нуль и формула Стокса переходит в формулу Грина.

Формула Стокса позволяет вычислять криволинейные интегралы по замкнутым контурам с помощью поверхностных интегралов.

Пример. Вычислить с помощью формулы Стокса интеграл $\oint_L x^2y^3\,dx + dy + z\,dz$, где L — окружность, заданная уравнениями $x^2+y^2=1$, $z=0$, а поверхностью S служит верхняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=1$ $(z>0)$ и контур L проходится в положительном направлении.

Решение. Так как

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2y^2; \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0,$$

то по формуле Стокса (4) получаем

$$\oint_L x^2y^3\,dx + dy + z\,dz = -3\iint_S x^2y^2\,dx\,dy = -\frac{\pi}{8}.$$

Из формулы Стокса следует, что если

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad (5)$$

то криволинейный интеграл по любой пространственной замкнутой кривой L равен нулю:

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0. \quad (6)$$

А это значит, что в данном случае криволинейный интеграл не зависит от выбора пути интегрирования.

Как и в случае плоской кривой, условия (5) являются необходимыми и достаточными для выполнения равенства (6).

При выполнении условий (5) или (6) подынтегральное выражение $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x, y, z)$:

$$dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{(x_0;\,y_0;\,z_0)}^{(x_1;\,y_1;\,z_1)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = U(x_1; y_1; z_1) - U(x_0; y_0; z_0).$$

Справедливость этого равенства устанавливается так же, как соответствующая формула (4) из § 8 для функции двух переменных.

§ 14. Скалярное и векторное поля

Понятие поля лежит в основе многих представлений современной физики. Изучение теории поля выходит за рамки данного курса, поэтому ограничимся только краткими сведениями.

В общем случае говорят, что в пространстве задано поле некоторой величины u, если в каждой точке пространства (или некоторой его части) определено значение этой величины. Так, например, при изучении потока газа приходится исследовать несколько полей: температурное поле (в каждой точке температура имеет определенное значение), поле давлений, поле скоростей и т. д.

Поле величины u называется *стационарным* (или *установившимся*), если u не зависит от времени t. В противном случае поле называется *нестационарным* (или *неустановившимся*). Таким образом, величина u есть функция точки M и времени t.

В физических задачах чаще всего приходится иметь дело со скалярными и векторными величинами. В соответствии с этим различают два вида полей: *скалярные* и *векторные*. Для простоты будем считать их стационарными.

1. Скалярное поле. Пусть G — некоторая область на плоскости или в пространстве. *Если в каждой точке M из G определена скалярная величина u, то говорят, что в области G задано скалярное поле.* Понятия скалярного поля и функции, определенной в области G, совпадают. Обычно используют следующую терминологию: скалярное поле задается с помощью функции $u=F(M)$, которая называется *скалярной функцией*. Если в пространстве ввести систему координат $Oxyz$, то каждая точка M будет иметь определеные координаты x, y, z и скалярная величина u является функцией этих координат: $u=F(M)=F(x, y, z)$.

Примером скалярного поля может служить поле температур воздуха в некотором помещении, если температуру рассматривать как функцию точки. В точках, расположенных ближе к источнику теплоты, температура выше, дальше от источника теплоты — ниже.

Если окажется, что температура везде одинаковая, то в этом случае скалярное поле постоянно.

2. Векторное поле. Аналогично с понятием скалярного поля вводится понятие векторного поля: *если в каждой точке M из G определен вектор $\overline{F}(M)$, то говорят, что в области G задано векторное поле.* Функция $\overline{F}(M)$, с помощью которой задается векторное поле, называется *векторной функцией.*

Примером векторного поля может служить поле сил любой природы. Каждой точке области соответствует определенный вектор, имеющий числовую величину и направление силы в этой точке.

Пример 1. Найти векторное поле скоростей $\overline{v}(M)$ точек твердого тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси.

Решение. Скорость $\overline{v}$ точки M равна векторному произведению $\overline{v}=\overline{\omega}\times\overline{r}$, где $\overline{\omega}$ — вектор угловой скорости; $\overline{r}$ — радиус-вектор точки M вращающегося тела относительно какой-либо точки оси вращения. Примем эту неподвижную точку оси за начало координат, а ось вращения — за ось Oz. Тогда $\overline{\omega}=\omega\overline{k}$, $\overline{r}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$ и, следовательно,

$$\overline{v}=\overline{\omega}\times\overline{r}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x & y & z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & \omega\\ y & z\end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix}0 & \omega\\ x & z\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}0 & 0\\ x & y\end{vmatrix}\overline{k}=-\omega y\overline{i}+\omega x\overline{j}$$

— искомое векторное поле.

3. Потенциальное поле. Введем понятие потенциального поля. Рассмотрим некоторое скалярное поле $F(M)$. *Если в каждой точке M из G определен вектор* grad F, *то поле этого вектора называется потенциальным полем.* Само скалярное поле называется при этом *потенциалом* векторного поля, а вектор, определяющий потенциальное поле, часто называют *потенциальным* вектором, т. е. вектор $\overline{a}(M)$ потенциальный, если найдется такая скалярная функция $F(M)$, что

$$\overline{a}=\operatorname{grad} F=\frac{\partial F}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\overline{k}. \tag{1}$$

Возникает вопрос, при каких условиях данное векторное поле $\overline{a}(M)$ потенциальное. Фактически этот вопрос уже рассмотрен в § 7. Пусть P, Q и R — проекции вектора $\overline{a}$ на оси координат Ox, Oy, Oz соответственно, т. е.

$$\overline{a}=\overline{a}(M)=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}.$$

В силу соотношения (1) векторное поле $\overline{a}(M)$ является потенциальным, если найдется функция $F(M)$ такая, что

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P;\ \frac{\partial F}{\partial y}=Q;\ \frac{\partial F}{\partial z}=R. \tag{2}$$

В теореме 13.7 было показано, что выражение $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ (где P, Q, R — непрерывные функции, имеющие непрерывные частные производные первого порядка) полный дифференциал некоторой функции $F(x, y, z)$ в том и только в том случае, когда P, Q, R удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y};\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{3}$$

Но если $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}F$, то справедливы и равенства (2), т. е. условие (3) как раз и означает, что данное векторное поле потенциальное. Функция $F(x, y, z)$ в этом случае называется *потенциальной функцией* поля.

Примером потенциального поля служит поле сил тяготения. Если в начале координат помещена масса m, то эта масса создает поле сил тяготения; в каждой точке M пространства на помещенную в эту точку единичную массу по закону Ньютона действует сила $\overline{F}(M)$, равная по величине $k\frac{m}{r^2}$ и направленная к началу координат. Здесь $r=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ — расстояние от начала координат O до точки M; k — коэффициент пропорциональности.

Пусть x, y, z — координаты точки M. Тогда проекции P, Q и R силы $\overline{F}(M)$ определяются следующим образом:

$$P=\left|\overline{F}\right|\cos\alpha=\frac{km}{r^2}\left(-\frac{x}{r}\right)=-\frac{kmx}{r^3},$$

$$Q=\left|\overline{F}\right|\cos\beta=\frac{km}{r^2}\left(-\frac{y}{r}\right)=-\frac{kmy}{r^3},$$

$$R=\left|\overline{F}\right|\cos\gamma=\frac{km}{r^2}\left(-\frac{z}{r}\right)=-\frac{kmz}{r^3},$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\overline{F}(M)$. Следовательно,

$$\overline{F}(M)=-\frac{kmx}{r^3}\overline{i}-\frac{kmy}{r^3}\overline{j}-\frac{kmz}{r^3}\overline{k}.$$

Можно проверить, что данное векторное поле потенциальное и его потенциальная функция $u(r)=\frac{km}{r}$.

В заключение найдем работу силы $\overline{F}(M)$ при перемещении единичной массы из точки $B(x_1;\ y_1;\ z_1)$ в точку $C(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Как известно, работа A выражается криволинейным интегралом

$$A=\int\limits_{BC}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z,$$

где P, Q и R — проекции силы $\overline{F}(M)$ на оси координат. Так как данное силовое поле является потенциальным, то подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал, поэтому интеграл не зависит от выбора пути интегрирования и может быть вычислен по формуле

$$A=\int\limits_{B}^{C}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=u(C)-u(B),$$

т. е. работа силы $\overline{F}(M)$ равна разности значений потенциальной функции в точках C и B. В данном случае

$$A = u(r_2) - u(r_1) = \frac{km}{r_2} - \frac{km}{r_1} = km\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

где r_1 и r_2 — расстояния точек B и C от начала координат.

Заметим, что областью, в которой определено поле сил тяготения, является все пространство, за исключением начала координат.

4. Задача о потоке векторного поля. Пусть в пространстве задано векторное поле $\overline{v}(M)$ скоростей жидкости, т. е. пространство заполнено движущейся жидкостью, скорость которой в каждой точке $M(x;\, y;\, z)$ задается вектором

$$\overline{v}(M) = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k},$$

где P, Q и R — проекции скорости на оси координат. Пусть P, Q и R — непрерывные функции координат. Вычислим количество Π жидкости, протекающей за единицу времени через некоторую ориентированную поверхность S, ограниченную пространственной кривой L, считая плотность жидкости $\rho = 1$.

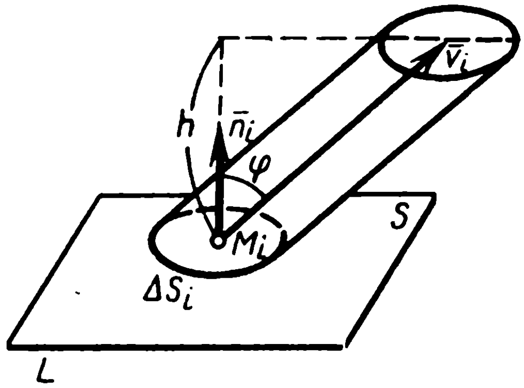


Рис. 213

Пусть

$$\overline{n} = \cos\alpha\,\overline{i} + \cos\beta\,\overline{j} + \cos\gamma\,\overline{k}$$

— единичный вектор нормали к поверхности S, и пусть его направляющие косинусы являются непрерывными функциями координат x, y, z точек данной поверхности.

Разобьем поверхность S произвольно на n частей с площадями ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n и в каждой из них выберем точку $M_i(x_i;\, y_i;\, z_i)$. Найдем количество Π_i жидкости, протекающей за единицу времени через i-ю часть поверхности (рис. 213). Обозначим через φ угол между векторами $\overline{n_i} = \overline{n}(M_i)$ и $\overline{v_i} = \overline{v}(M_i)$. Если этот угол острый, т. е. жидкость течет в «ту сторону», куда указывает нормаль $\overline{n_i}$, то величину Π_i будем считать положительной, а если угол тупой, т. е. жидкость течет в «обратную сторону», — отрицательной.

Приближенно можно считать, что при достаточно мелком разбиении поверхности S скорость $\overline{v}$ во всех точках i-й части постоянна и равна $\overline{v}(M_i)$, а частичные поверхности — плоские. Тогда величина Π_i приближенно равна взятому с соответствующим знаком объему цилиндра с площадью основания ΔS_i и высотой, равной модулю проекции вектора $\overline{v_i}$ на нормаль $\overline{n_i}$, т. е. $\Pi_i \approx \Delta S_i h$, где h — указанная проекция. А так как $h = |\overline{v_i}| \cos\varphi = |\overline{v_i}|\,|\overline{n_i}| \cos\varphi = (\overline{v_i} \cdot \overline{n_i})$, то

$$\Pi_i \approx (\overline{v_i} \cdot \overline{n_i})\,\Delta S_i.$$

Суммируя по i от 1 до n, получаем приближенное значение количества П жидкости, протекающей через ориентированную поверхность S за единицу времени:

$$\Pi \approx \sum_{i=1}^{n} (\overline{v}_i \cdot \overline{n}_i) \Delta S_i.$$

Сумма справа является интегральной суммой для функции $(\overline{v} \cdot \overline{n})$. Так как проекции P, Q, R вектора $\overline{v}$ и направляющие косинусы вектора $\overline{n}$ — непрерывные функции координат x, y, z точек поверхности S, то скалярное произведение $\overline{v} \cdot \overline{n} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$ непрерывная функция. Следовательно, предел этой суммы при стремлении к нулю наибольшего из диаметров частей поверхности существует и равен поверхностному интегралу первого рода по поверхности S от функции $(\overline{v} \cdot \overline{n})$. Переходя к пределу, получаем точное значение П:

$$\Pi = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\overline{v}_i \cdot \overline{n}_i) \Delta S_i = \iint_S (\overline{v} \cdot \overline{n})\, dS,$$

или, выражая скалярное произведение через координаты векторов,

$$\Pi = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS.$$

Воспользовавшись формулой (14) из § 11, связывающей поверхностные интегралы первого и второго рода, окончательно имеем

$$\Pi = \iint_S P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy. \tag{4}$$

Таким образом, количество П жидкости, протекающей за единицу времени через ориентированную поверхность S, представляет собой поверхностный интеграл второго рода по выбранной стороне поверхности.

Для произвольного векторного поля $\overline{v}(M)$ поверхностный интеграл второго рода (4) называется *потоком вектора* $\overline{v}(M)$ [или *потоком векторного поля* $\overline{v}(M)$] через поверхность S. Для векторного поля иной природы, чем в рассмотренном примере, поток, разумеется, имеет другой физический смысл.

5. Дивергенция. Пусть в некоторой области V, ограниченной поверхностью S, задано векторное поле $\overline{a}(M) = \{P;\ Q;\ R\}$, такое, что функции $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ непрерывны в V вместе с частными производными.

Определение 1. *Дивергенцией векторного поля* $\overline{a}(M)$ *называется скалярная функция* $\operatorname{div}\overline{a}(M)$, *определяемая равенством*

$$\operatorname{div}\overline{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{5}$$

Используя выражение для дивергенции и понятие потока вектора через поверхность, формулу Остроградского (см. формулу (1), § 12) можно записать в более кампактной векторной форме. Поверхностный интеграл в формуле Остроградского представляет собой поток вектора $\overline{a}=\{P, Q, R\}$ через поверхность S:

$$\iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_S\left(\overline{a}\cdot\overline{n}\right)\mathrm{d}S.$$

Используя это выражение и формулу (5), запишем формулу Остроградского в виде

$$\iint\limits_S\left(\overline{a}\cdot\overline{n}\right)\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\operatorname{div}\overline{a}\,(M)\,\mathrm{d}v. \tag{6}$$

Таким образом, поток вектора $\overline{a}\,(M)$ через замкнутую поверхность S равен тройному интегралу от дивергенции поля $\overline{a}\,(M)$, взятому по области, ограниченной поверхностью S.

Покажем, что дивергенция не зависит от выбора системы координат, хотя ее определение и было с ней связано. Для этого возьмем произвольную точку M, заключим ее в область V, ограниченную поверхностью S, и применим к области V формулу Остроградскаго. Далее, используя теорему о среднем для тройного интеграла, получаем

$$\iint\limits_S\left(\overline{a}\cdot\overline{n}\right)\mathrm{d}S=\operatorname{div}\overline{a}\,(M_0)\,v,$$

где M_0 — некоторая точка области V; v — объем области V. Отсюда

$$\operatorname{div}\overline{a}\,(M_0)=\frac{\iint\limits_S\left(\overline{a}\cdot\overline{n}\right)\mathrm{d}S}{v}.$$

Будем теперь стягивать область V в точку M. При этом $v\to 0$, $M_0\to M$, и мы получаем

$$\operatorname{div}\overline{a}\,(M)=\lim_{v\to 0}\frac{\iint\limits_S\left(\overline{a}\cdot\overline{n}\right)\mathrm{d}S}{v}, \tag{7}$$

т. е. дивергенция векторного поля $\overline{a}\,(M)$ в точке M является пределом отношения потока вектора $\overline{a}\,(M)$ через поверхность S, окружающую точку M, к объему области. А так как поток и объем не зависят от выбора системы координат, то и дивергенция также не зависит от выбора системы координат, что и требовалось показать.

Выясним теперь с помощью формулы (7) физический смысл дивергенции. Для этого будем рассматривать векторное поле $\overline{a}\,(M)$ как поле скоростей жидкости с плотностью $\rho=1$. Как установлено в п. 4, поток

$$\Pi=\iint\limits_S\left(\overline{a}\cdot\overline{n}\right)\mathrm{d}S$$

вектора $\overline{a}\,(M)$ равен количеству жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность S в направлении нормали $\overline{n}$. Пусть $\overline{n}$ — внешняя нормаль. Поскольку S — замкнутая поверхность, то, очевидно, поток вектора $\overline{a}\ (M)$ равен количеству жидкости, которое за единицу времени возникает или уничтожается в пределах области V, ограниченной поверхностью S. Назовем это количество *суммарной мощностью источников* (если $\Pi > 0$) или *стоков* (если $\Pi < 0$), расположенных в области V. Рассмотрим отношение

$$\frac{\iint\limits_S (\overline{a} \cdot \overline{n})\, dS}{v}.$$

Оно представляет собой среднюю плотность источников (или стоков), т. е. количество жидкости, возникающей (или исчезающей) за единицу времени в единице объема области V, а предел

$$\lim_{v \to 0} \frac{\iint\limits_S (\overline{a} \cdot \overline{n})\, dS}{v}$$

при условии, что область V стягивается в точку M, можно назвать *плотностью* источников (или стоков) в точке M. Но этот предел равен $\operatorname{div} \overline{a}\ (M)$. Таким образом, дивергенция векторного поля скоростей характеризует плотность источников жидкости.

Если $\operatorname{div} \overline{a}\ (M) > 0$, то, как следует из формулы (6), $\Pi > 0$, т. е. внутри области V имеются источники жидкости и из нее вытекает жидкости больше, чем втекает; если $\operatorname{div} \overline{a}\ (M) < 0$, то $\Pi < 0$, т. е. внутри области V имеются стоки жидкости и в нее втекает жидкости больше, чем вытекает. Если же $\operatorname{div} \overline{a}\ (M) = 0$, то $\Pi = 0$, т. е. внутри области V нет ни стоков, ни источников и в нее втекает столько же жидкости, сколько и вытекает. Это, например, имеет место для любой области V, расположенной в потоке воды, текущей в реке.

Для произвольного векторного поля $\operatorname{div} \overline{a}\ (M)$ имеет аналогичный физический смысл: дивергенция характеризует плотность источников поля.

Векторное поле $\overline{a}\ (M)$ называется *соленоидальным* (или *трубчатым*), если в каждой его точке $\operatorname{div} \overline{a}\ (M) = 0$. Примером такого поля служит, как было показано выше, поле скоростей жидкости при отсутствии стоков и источников.

Пример 2. Вычислить дивергенцию поля скоростей $\overline{v}\ (M) = -\omega y \overline{i} + \omega x \overline{j}$ твердого тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz.

Решение. Здесь $P = -\omega y$, $Q = \omega x$, $R = 0$. Поэтому

$$\operatorname{div} \overline{v}\ (M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial(-\omega y)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega x)}{\partial y} = 0,$$

т. е. данное векторное поле является соленоидальным.

6. Циркуляция. Ротор. Пусть снова в некоторой области задано векторное поле

$$\overline{a}\ (M) = P(M)\,\overline{i} + Q(M)\,\overline{j} + R(M)\,\overline{k}$$

и L — гладкая или кусочно-гладкая кривая, расположенная в этой области. Выберем на кривой L одно из двух направлений движения и обозначим через $d\overline{l}$ вектор, имеющий в каждой точке направление, совпадающее с направлением движения по кривой в этой точке, и по модулю равный дифференциалу длины дуги:

$$d\overline{l} = dx\overline{i} + dy\overline{j} + dz\overline{k}.$$

Тогда криволинейный интеграл от скалярного произведения векторов $\overline{a}(M)$ и $d\overline{l}$

$$\int_L \overline{a}(M) \cdot d\overline{l} = \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

называется *циркуляцией векторного поля* $\overline{a}(M)$ *вдоль кривой* L. В силовом поле циркуляция выражает работу силового поля при перемещении материальной точки вдоль пути L. Для полей другой природы циркуляция имеет иной физический смысл.

Определение 2. *Ротором векторного поля* $\overline{a}(M)$ *называется вектор* $\operatorname{rot}\overline{a}(M)$, *определяемый равенством*

$$\operatorname{rot}\overline{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}.$$

С помощью понятий ротора и циркуляции формулу Стокса

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS$$

можно записать в компактной векторной форме

$$\oint_L \overline{a}(M) \cdot d\overline{l} = \iint_S \left[\operatorname{rot}\overline{a}(M) \cdot \overline{n}\right] dS.$$

Таким образом, циркуляция векторного поля $\overline{a}(M)$ вдоль замкнутого контура L равна потоку ротора этого векторного поля через поверхность S, ограниченную контуром L.

Так же как и для дивергенции, можно показать, что $\operatorname{rot}\overline{a}(M)$ не зависит от выбора системы координат, а определяется только самим векторным полем $\overline{a}(M)$.

Пример 3. Вычислить ротор поля скоростей $\overline{v}(M) = -\omega y\overline{i} + \omega x\overline{j}$ твердого тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz.

Решение. Используя определение ротора, получаем

$$\operatorname{rot}\overline{a}(M) = \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial(\omega x)}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial(-\omega y)}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}\right)\overline{j} +$$
$$+ \left(\frac{\partial(\omega x)}{\partial x} - \frac{\partial(-\omega y)}{\partial y}\right)\overline{k} = 2\omega\overline{k},$$

т. е. ротор данного векторного поля направлен по оси вращения Oz, а по модулю равен удвоенной угловой скорости.

Понятие ротора непосредственно связано с понятием потенциального поля. Было показано, что векторное поле $\overline{a}(M)=\{P;\ Q;\ R\}$ потенциальное в том и только в том случае, если

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y};\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Но это означает, равенство нулю всех трех координат ротора поля $\overline{a}(M)$, т. е. для того чтобы векторное поле $\overline{a}(M)$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{rot}\overline{a}(M)\equiv 0.$$

7. Оператор Гамильтона. Основные понятия теории поля: градиент, дивергенция, ротор и операции над ними удобно представлять с помощью оператора Гамильтона*, или оператора «набла»:

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial}{\partial z}\overline{k}.$$

Оператор ∇ будем рассматривать как символический вектор с координатами $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$, а операции с ним проводить по правилам векторной алгебры. При этом под произведением $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$ на скалярную функцию будем понимать частную производную этой функции соответственно по x, y и z.

Примеры.

1. Пусть $u(x,\ y,\ z)$ — скалярная функция. Тогда произведение оператора ∇ на функцию u дает градиент этой функции:

$$\nabla u=\left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial}{\partial z}\overline{k}\right)u=\frac{\partial u}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}=\operatorname{grad}u.$$

2. Пусть $\overline{a}(M)=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}$ — вектор-функция. Тогда скалярное произведение оператора ∇ на вектор-функцию $\overline{a}(M)$ дает дивергенцию этой функции

$$\nabla\cdot\overline{a}(M)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial}{\partial z}\overline{k}\right)\cdot\left(P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}\right)=$$
$$=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\operatorname{div}\overline{a}(M).$$

3. Векторное произведение оператора ∇ на вектор-функцию $\overline{a}(M)$ дает ротор этой функции

$$\nabla\times\overline{a}(M)=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=$$
$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}=\operatorname{rot}\overline{a}(M).$$

---

* Гамильтон Уильям Роуан (1805—1865) — английский математик.

В приложениях часто встречаются так называемые операции второго порядка, т. е. попарные комбинации трех указанных выше операций. Рассмотрим наиболее важные из них.

1°. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{a}\,(M)=0$. Действительно,

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{a}\,(M)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 R}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial y}=0$$

в силу равенства смешанных производных второго порядка. Этот же результат легко получить с помощью оператора ∇:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{a}\,(M)=\nabla\cdot\left(\nabla\times\overline{a}\right)=0,$$

так как здесь имеем смешанное произведение трех «векторов»: ∇, ∇, $\overline{a}$, два из которых одинаковы. Такое произведение, очевидно, равно нулю.

2°. **rot grad $u=0$. Действительно,**

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}u=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\overline{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\overline{j}+$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\overline{k}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}\right)\overline{i}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right)\overline{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\right)\overline{k}=0$$

в силу равенства смешанных производных второго порядка. Этот же результат легко получить с помощью оператора ∇:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}u=\nabla\times(\nabla u)=(\nabla\times\nabla)\,u=0,$$

так как векторное произведение одинаковых «векторов» равно нулю.

3°. $\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Действительно,

$$\operatorname{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\overline{k},$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \qquad (8)$$

Правая часть равенства (8) символически обозначается так:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\ \text{или}\ \Delta u=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u.$$

Символ

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

называется *оператором Лапласа**. Оператор Лапласа Δ естественно рассматривать как скалярный квадрат «вектора» ∇. В самом деле,

$$(\nabla\cdot\nabla)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2=\Delta.$$

* Лаплас Пьер Симон (1749—1827) — французский математик и физик.

Поэтому равенство (8) с помощью оператора ∇ записывается в виде

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla \cdot (\nabla u) = (\nabla \cdot \nabla) u = \nabla^2 u$$

Отметим, что уравнение

$$\Delta u = 0$$

называется *уравнением Лапласа*. С его помощью описываются стационарные процессы различной физической природы, например: стационарное распределение теплоты, электростатическое поле точечных зарядов, установившееся движение несжимаемой жидкости внутри некоторой области и т. д. Скалярное поле $u(x, y, z)$, удовлетворяющее условию $\Delta u = 0$, называется *лапласовым*, или *гармоническим, полем*.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

РЯДЫ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА 14

РЯДЫ

В настоящей главе будут рассмотрены ряды, являющиеся важным математическим аппаратом, применяемым для вычислений и исследований как в различных разделах самой математики, так и во многих ее приложениях.

§ 1. Понятие числового ряда

1. Основные определения. Пусть дана числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ *Выражение вида*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

называется числовым рядом или просто рядом.

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами ряда,* член a_n с произвольным номером — *общим членом ряда.*

Суммы конечного числа членов ряда

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots,$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \ldots$$

называются *частичными суммами ряда* (1). Так как число членов ряда бесконечно, то частичные суммы ряда образуют бесконечную последовательность частичных сумм

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots \qquad (2)$$

Ряд (1) называется *сходящимся,* если последовательность его частичных сумм (2) сходится к какому-нибудь числу S, которое в этом случае называется *суммой ряда* (1). Символически это записывается так:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \text{ или } S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если же последовательность частичных сумм (2) расходится, то ряд (1) называется *расходящимся.*

Пример 1. Покажем, что ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

сходится. Возьмем сумму S_n первых n членов ряда

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Слагаемые этой суммы могут быть представлены в виде

$$\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2};\ \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3};\ \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4};\ \dots;\ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Поэтому

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда следует, что предел последовательности частичных сумм данного ряда равен единице:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1.$$

Таким образом, ряд сходится, и его сумма S равна 1.

Пример 2. Установим, сходится или расходится ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.$$

Последовательность его частичных сумм имеет вид $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0$, ... и, значит, не сходится ни к какому пределу, поэтому данный ряд расходится.

Пример 3. Рассмотрим ряд, составленный из элементов геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1},\ a \neq 0. \qquad (3)$$

Частичная сумма S_n этого ряда при $q \neq 1$ имеет вид

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Отсюда:

1) если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{1-q} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$, т. е.

ряд сходится и его сумма $S = \frac{a}{1-q}$. Например, при $a = 1$, $q = 1/2$ имеем:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = 2;$$

2) если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a - aq^n}{1-q} = \infty$, т. е. ряд расходится;

3) при $q = 1$ ряд (3) принимает вид $a + a + a + \dots + a + \dots$ В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{(a + a + a + \dots + a)}_{n\ \text{раз}} = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a = \infty$, т. е. ряд расходится;

4) при $q=-1$ ряд (3) принимает вид $a-a+a-a+\ldots$ Для него $S_n=\frac{a}{2}-\frac{a(-1)^n}{2}$, т. е. $S_n=0$ при n четном и $S_n=a$ при n нечетном. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует и ряд расходится.

Таким образом, ряд (3) является сходящимся при $|q|<1$ и расходящимся при $|q|\geqslant 1$.

2. Свойства сходящихся рядов. Теорема 14.1. *Если сходится ряд*

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{k-1}+a_k+a_{k+1}+\ldots+a_{n-1}+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (4)$$

то сходится и ряд

$$a_{k+1}+\ldots+a_{n-1}+a_n+\ldots=\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n, \quad (5)$$

и обратно, если сходится ряд (5), *то сходится и ряд* (4).

Другими словами, на сходимость ряда не влияет отбрасывание любого конечного числа его первых членов.

Доказательство. Пусть ряд (4) сходится и имеет сумму S, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$. Обозначим через S_k сумму отброшенных членов ряда (4), а через σ_{n-k} сумму $n-k$ первых членов ряда (5). Тогда

$$S_n=S_k+\sigma_{n-k}, \quad (6)$$

где S_k — некоторое число, не зависящее от n. Из равенства (6) следует

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{n-k}=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_k)=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_k=S-S_k,$$

т. е. последовательность частичных сумм $\{\sigma_{n-k}\}$ ряда (5) имеет предел, что означает сходимость ряда (5).

Пусть теперь ряд (5) сходится и имеет сумму σ, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{n-k}=\sigma$. Тогда из (6) следует

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(S_k+\sigma_{n-k})=\lim_{n\to\infty}S_k+\lim_{n\to\infty}\sigma_{n-k}=S_k+\sigma,$$

что означает сходимость ряда (4). ■

Над сходящимися рядами можно выполнять обычные арифметические действия.

Теорема 14.2. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится и его сумма равна* S, *то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$, *где* c — *некоторое число, также сходится, и его сумма равна* cS.

Доказательство. Пусть S_n — частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а σ_n — частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$. Тогда

$$\sigma_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ldots + ca_n = c\,(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = cS_n.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = cS,$$

т. е. последовательность частичных сумм $\{\sigma_n\}$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ сходится к cS. Следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = cS$. ■

Теорема 14.3. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся и их суммы соответственно равны* S *и* σ, *то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ *сходится и его сумма равна* $S \pm \sigma$.

Доказательство. Пусть S_n и σ_n — частичные суммы рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, а τ_n — частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$. Тогда

$$\tau_n = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) =$$
$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = S_n \pm \sigma_n.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \lim_{n\to\infty} (S_n \pm \sigma_n) = \lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} \sigma_n = S \pm \sigma,$$

т. е. последовательность частичных сумм $\{\tau_n\}$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ сходится к $S \pm \sigma$. Следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = S \pm \sigma$. ■

Таким образом, установлено, что сходящиеся ряды можно умножать на число, почленно складывать и вычитать так же, как и конечные суммы.

3. Необходимое условие сходимости ряда. При рассмотрении рядов возникают две задачи: 1) исследовать ряд на сходимость и 2) зная, что ряд сходится, найти его сумму. Будем решать в основном первую задачу, имеющую теоретический характер. Приведем необходимое условие сходимости рядов.

Теорема 14.4. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то его общий член стремится к нулю, т. е.* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство. По условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Обозначим через S его сумму. Рассмотрим частичные суммы ряда $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ и $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$. Отсюда $a_n = S_n - S_{n-1}$. Так как $S_n \to S$ и $S_{n-1} \to S$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \blacksquare$$

Условие $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ является необходимым, но не достаточным условием сходимости ряда.

Пример. Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который называют ***гармоническим рядом***. Очевидно, что для гармонического ряда выполнено необходимое условие сходимости, так как $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Докажем, что этот ряд расходится. Действительно, если бы этот ряд сходился, то, обозначая его сумму через S, мы бы имели

$$\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0.$$

Но

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

т. е. $S_{2n} - S_n > 1/2$. Отсюда следует, что равенство $\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$ невозможно, т. е. гармонический ряд расходится.

Таким образом, если общий член ряда стремится к нулю, то еще нельзя сделать вывод о сходимости ряда. Необходимо дополнительное исследование, которое может быть проведено с помощью достаточных условий (признаков) сходимости ряда.

Если же для некоторого ряда его общий член не стремится к нулю, то теорема 14.4 позволяет сразу сказать, что такой ряд расходится.

§ 2. Ряды с неотрицательными членами

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых достаточных условий сходимости рядов с неотрицательными членами. Предварительно докажем теорему, которая будет использована в последующих рассуждениях.

Теорема 14.5. *Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Это значит, что последовательность его частичных сумм имеет предел. В силу теоремы 2.6 всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.

Достаточность. Пусть последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами, то его частичные суммы образуют неубывающую последовательность: $0 \leqslant S_1 \leqslant S_2 \leqslant \ldots \leqslant S_n \leqslant S_{n+1} \leqslant \ldots$ В силу теоремы 2.12 о монотонных ограниченных последовательностях она сходится, т. е. сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ■

Достаточные условия сходимости ряда. Установим ряд признаков, позволяющих сделать вывод о сходимости (расходимости) рассматриваемого ряда.

Признак сравнения.

Теорема 14.6. *Пусть даны два ряда с неотрицательными членами* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *и для всех n выполняется неравенство* $a_n \leqslant b_n$. *Тогда из сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *а из расходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует расходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. Обозначим через S_n и σ_n соответственно частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Из неравенства $a_n \leqslant b_n$ следует, что

$$S_n \leqslant \sigma_n. \tag{7}$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то по теореме 14.5 (необходимость) последовательность его частичных сумм ограничена, т. е. для любого n $\sigma_n \leqslant M$, где M — некоторое число. Но тогда по формуле (7) и $S_n \leqslant M$, откуда по той же теореме 14.5 (достаточность) следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится, так как, допустив сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, получим по только что доказанному сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а это противоречит условию теоремы. ■

Пример 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ сходится, так как сходится ряд из членов геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \left(q=\frac{1}{2}<1\right)$, а члены данного ряда не больше соответствующих членов ряда сходящейся геометрической прогрессии: $\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.

Пример 2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} (s \leqslant 1)$ расходится, поскольку его члены не меньше членов гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}: \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^s}$, а гармонический ряд расходится.

Существуют признаки сходимости рядов, позволяющие непосредственно судить о сходимости (или расходимости) данного ряда, не сравнивая его с другим рядом, о котором известно, сходится он или расходится. Рассмотрим два из них.

Признак Даламбера*.

Теорема 14.7. *Пусть дан ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *с положительными членами и существует предел* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$. *Тогда* а) *при* $\rho<1$ *ряд сходится;* б) *при* $\rho>1$ *ряд расходится.*

Доказательство. а) Пусть $\rho<1$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$. Докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. По определению предела числовой последовательности для любого $\varepsilon>0$ существует номер N такой, что при $n \geqslant N$ выполняется неравенство $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho\right| < \varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\rho - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \varepsilon. \qquad (8)$$

Так как $\rho<1$, то ε можно взять настолько малым, что будет выполнено неравенство $\rho+\varepsilon<1$. Полагая $\rho+\varepsilon=q$, на основании правого из неравенств (8) имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q, \text{ или } a_{n+1} < a_n q$$

* Даламбер Жан Лерон (1717—1783) — французский математик, механик и философ-просветитель.

для $n=N$, $N+1$, $N+2$, ... Придавая n эти значения, из последнего неравенства получаем

$$a_{N+1} < a_N q,$$
$$a_{N+2} < a_{N+1} q < a_N q^2,$$
$$a_{N+3} < a_{N+2} q < a_N q^3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

т. е. члены ряда

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \dots \tag{9}$$

меньше соответствующих членов ряда, составленного из элементов геометрической прогрессии:

$$a_N q + a_N q^2 + a_N q^3 + \dots \tag{10}$$

Так как $q<1$, то ряд (10) сходится (см. пример 3 из § 1). Тогда согласно признаку сравнения ряд (9) также сходится. Но ряд (9) получен из данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ в результате отбрасывания конечного числа первых членов, следовательно, по теореме 14.1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

б) Пусть теперь $\rho>1$. Докажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Возьмем ε настолько малым, чтобы $\rho-\varepsilon>1$. Тогда при $n \geqslant N$ в силу левого из неравенств (8) выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ или $a_{n+1}>a_n$. Таким образом, члены ряда, начиная с некоторого номера N, возрастают с увеличением их номеров, т. е. общий член ряда a_n не стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, согласно теореме 14.4 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. ■

Замечание. При $\rho=1$, как показывают примеры, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может как сходиться, так и расходиться. В этом случае необходимо дополнительное исследование ряда с помощью признака сравнения или других признаков.

Пример 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Пример 4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Пример 5. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Имеем $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$. Согласно признаку Даламбера сделать заключение о сходимости или расходимости ряда нельзя. Однако, как было показано ранее (см. пример 2), этот ряд расходится.

Интегральный признак.

Теорема 14.8. *Пусть дан ряд*

$$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

члены которого являются значениями некоторой функции $f(x)$, *положительной, непрерывной и убывающей на полуинтервале* $[1, +\infty)$. *Тогда, если* $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится, то сходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$; *если же* $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *также расходится.*

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $y = f(x)$, с боковых сторон прямыми $x = 1$, $x = n$, снизу осью Ox. Впишем в эту трапецию и опишем около нее две ступенчатые фигуры, состоящие из прямоугольников с основаниями $[1, 2]$, $[2, 3]$, ..., $[n-1, n]$ и высотами $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ..., $f(n-1)$, $f(n)$ (рис. 214). Тогда, принимая во внимание геометрический смысл определенного интеграла, имеем

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(n) < \int_1^n f(x)\,dx < f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1),$$

или, короче,

$$S_n - f(1) < \int_1^n f(x)\,dx < S_n - f(n).$$

Отсюда получаем

$$S_n < f(1) + \int_1^n f(x)\,dx, \tag{11}$$

$$S_n > f(n) + \int_1^n f(x)\,dx, \tag{12}$$

где S_n — частичные суммы рассматриваемого ряда.

Пусть интеграл $\int_1^n f(x)\,dx$ сходится. Это значит, что существует $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx = I$. Так как $f(x) > 0$, то последовательность $\int_1^n f(x)\,dx$ возрастает с увеличением n и ограничена сверху своим пределом:

$\int\limits_1^n f(x)\,dx < I$. Из неравенства (11) следует, что $S_n < f(1) + I$, т. е. последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ ограничена. По теореме 14.5 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится.

Пусть теперь интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится. В этом случае $\int\limits_1^n f(x)\,dx \to +\infty$ при $n \to \infty$ (как монотонно возрастающая неограниченная последовательность). Из неравенства (12) следует, что $S_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, т. е. последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится и, следовательно, ряд расходится. ■

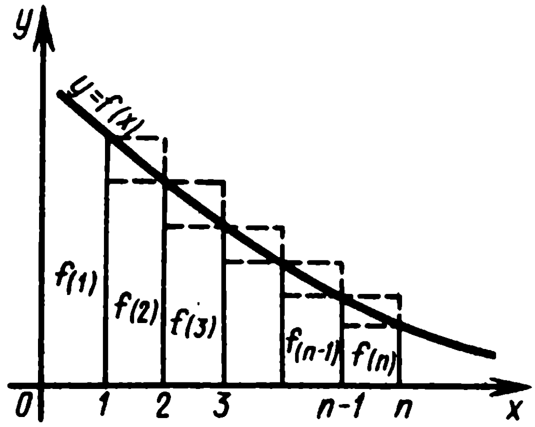


Рис. 214

Пример 6. Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

$(\alpha > 0)$. С помощью интегрального признака выясним поведение данного ряда при $\alpha > 0$. Возьмем в качестве функции $f(x)$ функцию $\frac{1}{x^\alpha}$ $(x \geqslant 1)$, которая удовлетворяет условиям теоремы 14.8. Члены ряда равны значениям этой функции при $x = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ Как известно (см. гл. 8, § 11, п. 1, пример 4), несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ при $\alpha > 1$ сходится, а при $\alpha \leqslant 1$ расходится. Следовательно, данный ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Заметим, что при $\alpha \leqslant 0$ такие ряды также расходятся, так как их общий член не стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. нарушается необходимое условие сходимости ряда (см. теорему 14.4).

В частности, при $\alpha = 2$ имеем сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; при $\alpha = 1$ — расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; при $\alpha = \frac{1}{2}$ — расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ и т. д.

§ 3. Знакочередующиеся ряды

До сих пор мы рассматривали ряды с неотрицательными членами. Ряды с неположительными членами отличаются от соответствующих рядов с неотрицательными членами только множителем -1, поэтому вопрос о их сходимости решается аналогично.

Перейдем теперь к рассмотрению знакочередующихся рядов, члены которых имеют чередующиеся знаки. Для удобства будем считать, что первый член такого ряда положителен. Тогда знакочередующийся ряд можно записать в виде

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots, \tag{1}$$

где $a_n>0$.

Для знакочередующихся рядов имеет место следующий очень простой достаточный признак сходимости.

Признак Лейбница.

Теорема 14.9. *Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда* (1) *монотонно убывают:* $a_1>a_2>a_3>\ldots$ *и общий член ряда стремится к нулю:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, *то ряд сходится.*

Доказательство. Пусть дан ряд (1) и пусть $a_n>a_{n+1}$ и $a_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Рассмотрим частичную сумму ряда с четным числом членов

$$S_{2n}=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+a_{2n-1}-a_{2n}=$$
$$=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2n-1}-a_{2n}).$$

Все разности в скобках в силу первого условия положительны, поэтому последовательность частичных сумм $\{S_{2n}\}$ является возрастающей. Докажем, что она ограничена. Для этого представим S_{2n} в виде

$$S_{2n}=a_1-[(a_2-a_3)+(a_4-a_5)+\ldots+(a_{2n-2}-a_{2n-1})+a_{2n}].$$

Отсюда следует, что $S_{2n}<a_1$ для любого n, т. е. $\{S_{2n}\}$ ограничена.

Итак, последовательность $\{S_{2n}\}$ возрастающая и ограниченная, следовательно, она имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=S$.

Покажем теперь, что и последовательность частичных сумм нечетного числа членов сходится к тому же пределу S. Действительно, $S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}$. Переходя в этом равенстве к пределу при $n\to\infty$ и используя второе условие ($a_n\to 0$ при $n\to\infty$), получаем

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}+a_{2n+1})=\lim_{n\to\infty} S_{2n}+\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}=S+0=S.$$

Таким образом, последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда (1) сходится к пределу S. Это и означает, что ряд (1) сходится. ■

Пример. Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

сходится, так как удовлетворяет условиям признака Лейбница:

$x \in X$ — элемент x принадлежит множеству X
$x \notin X$ — элемент x не принадлежит множеству X
$X \subset Y$ — множество X есть подмножество множества Y
$X \not\subset Y$ — множество X не является подмножеством множества Y
$\varnothing$ — пустое множество
$\{x\ P(x)\}$ — множество чисел x, обладающих свойством $P(x)$
$x = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ — x есть максимальное из чисел $x_1, \ldots, x_n$
$x = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$ — x есть минимальное из чисел $x_1, \ldots, x_n$
$\forall x$ — для любого x
$\exists x$ — существует такое x
$(x; y)$ — координаты точки на плоскости, упорядоченная пара чисел
$(x; y; z)$ — координаты точки в пространстве, упорядоченная тройка чисел
$\overline{AB}$ — направленный отрезок
$\overline{AB}$, $\overline{a}$ — вектор
$|\overline{AB}|$, $|\overline{a}|$ — длина вектора
$\overline{AB} = \{X; Y; Z\}$ — вектор $\overline{AB}$ имеет координаты X, Y, Z
$\text{пр}_u \overline{AB}$ — проекция вектора $\overline{AB}$ на ось u
$\overline{a} \cdot \overline{b}$ — скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$
$\overline{a} \times \overline{b}$ — векторное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$
$\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})$ — смешанное произведение векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$
$[a, b]$ — отрезок, сегмент
(a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, +\infty)$ — интервалы
$[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ — полуинтервалы
$(-\infty, +\infty)$ — числовая прямая, множество всех вещественных чисел
$(a - \delta, a + \delta)$ — δ-окрестность точки a
$\sup X$ — точная верхняя грань множества X
$\inf X$ — точная нижняя грань множества X
$|x|$ — абсолютная величина (модуль) числа x
$\operatorname{sgn} x$ — функция знак x
$[x]$ — целая часть числа x
$\{x_n\}$ — числовая последовательность
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — числовой ряд
$y = f(x)$, $f : x \mapsto y$ — функция, отображение
$\lim_{x \to x_0} f(x)$ — предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$
$\lim_{x \to x_0+} f(x)$ — предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ справа, правый предел
$\lim_{x \to x_0-} f(x)$ — предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ слева, левый предел

$\alpha(x) \sim \beta(x)$	— бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны
$\alpha(x) = o(\beta(x))$	— бесконечно малая $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с бесконечно малой $\beta(x)$
$\sup\limits_X f(x)$	— точная верхняя грань функции $f(x)$ на множестве X
$\inf\limits_X f(x)$	— точная нижняя грань функции $f(x)$ на множестве X
$f'(x)$, $y'(x)$	— производная функции $y = f(x)$ в точке x
$f'_+(x)$	— правая производная функции $y = f(x)$ в точке x
$f'_-(x)$	— левая производная функции $y = f(x)$ в точке x
$\mathrm{d}y$	— дифференциал функции $y = f(x)$
y'', y''', ..., $y^{(n)}$	— производные второго, третьего, ..., n-го порядка
d^2y, d^3y, ..., d^ny	— дифференциалы второго, третьего, ..., n-го порядка
Δy, $\Delta^2 y$, ..., $\Delta^n y$	— разности первого, второго, ..., n-го порядка
$z = f(x, y)$, $z = f(M)$	— функция двух переменных
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$, $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$	— предел функции $z = f(x, y) = f(M)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$
z'_x, f'_x, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$	— частная производная функции $z = f(x, y)$ по x
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, $f''_{xy}(x, y)$	— смешанная частная производная второго порядка функции $z = f(x, y)$
$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	— неопределенный интеграл от функции $f(x)$
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	— определенный интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$
$\iint\limits_G f(x, y)\,\mathrm{d}s$, $\iint\limits_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	— двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области G
$\int\limits_{AB} f(M)\,\mathrm{d}l$, $\int\limits_{AB} f(x, y)\,\mathrm{d}l$	— криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x, y) = f(M)$ по кривой AB
$\int\limits_{AB} P(x, y)\,\mathrm{d}x$	— криволинейный интеграл второго рода от функции $P(x, y)$ по кривой AB
$\oint\limits_L P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$	— криволинейный интеграл по замкнутому контуру L
$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}v$, $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	— тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ по области V
$\iint\limits_S f(M)\,\mathrm{d}S$, $\iint\limits_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$	— поверхностный интеграл первого рода от функции $f(x, y, z) = f(M)$ по поверхности S
$\iint\limits_S R(M)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\iint\limits_S R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	— поверхностный интеграл второго рода от функции $R(x, y, z) = R(M)$ по поверхности S
$\operatorname{grad} z$	— градиент функции $z = f(x, y)$
$\operatorname{div} \overline{a}$	— дивергенция векторного поля $\overline{a}(M)$
$\operatorname{rot} \overline{a}$	— ротор векторного поля $\overline{a}(M)$
∇	— оператор Гамильтона
Δ	— оператор Лапласа

Аналитическая геометрия на плоскости

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ — расстояние между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$

$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ — координаты точки, делящей отрезок с концами $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ в отношении $\lambda=|M_1M|:|MM_2|$

$Ax+By+C=0$ — общее уравнение прямой (A, B, C — любые вещественные числа, $A^2+B^2\neq 0$)

$y=kx+b$ — уравнение прямой с угловым коэффициентом k (b — величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy)

$y-y_1=k(x-x_1)$ — уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$

$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ — уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ — уравнение прямой в отрезках (a, b — величины отрезков, отсекаемых прямой на осях Ox и Oy)

$d=\frac{|Ax_0+Bx_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ — расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$

$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ — формула вычисления одного из углов между прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — каноническое уравнение эллипса (a, b — полуоси)

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ — каноническое уравнение гиперболы

$y^2=2px$, $y^2=-2px$ — каноническое уравнение параболы с осью симметрии Ox ($p>0$ — параметр)

$X=x_2-x_1,\ Y=y_2-y_1,\ Z=z_2-z_1$ — выражение координат вектора $\overline{AB}$ через координаты точек $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$

$|\bar{a}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ — выражение длины вектора $\bar{a}=\{X;\ Y;\ Z\}$ через его координаты

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ — расстояние между точками $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$

$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\ |\bar{b}|\cos\varphi$ — определение скалярного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (φ — угол между векторами)

$\bar{a}\cdot\bar{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2$ — выражение скалярного произведения векторов $\bar{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$ и $\bar{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$ через их координаты

$\cos\varphi=\dfrac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\ \sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}$ — выражение угла между векторами

$Ax+By+Cz+D=0$ — общее уравнение плоскости ($A,\ B,\ C$ — любые вещественные числа, $A^2+B^2+C^2\neq0$)

$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{A^2+B^2+C^2}$ — расстояние от точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$

$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ — канонические уравнения прямой с направляющим вектором $\bar{a}=\{l;\ m;\ n\}$, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$

$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt$ — параметрические уравнения прямой

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ — каноническое уравнение эллипсоида ($a,\ b,\ c$ — полуоси)

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ — каноническое уравнение однополостного гиперболоида

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ — каноническое уравнение двуполостного гиперболоида

$\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$ — каноническое уравнение эллиптического параболоида ($p>0$, $q>0$ — параметры)

$\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z$ — каноническое уравнение гиперболического параболоида

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ — каноническое уравнение конуса второго порядка

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ — первый замечательный предел

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ — второй замечательный предел

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ — определение производной функции $y=f(x)$ в точке x_0

$\mathrm{d}y=f'(x_0)\,\mathrm{d}x$ — дифференциал функции $f(x)$ точке x_0

$(C)'=0$, $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}$, $(a^x)'=a^x\ln a$,

$(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$, $(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$, $(\mathrm{ctg}\, x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$,

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\mathrm{arctg}\, x)'=\frac{1}{1+x^2}$,

$(\mathrm{arcctg}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$ — производные простейших элементарных функций

$y'(t_0)=f'(x_0)\ \varphi'(t_0)$ — правило дифференцирования сложной функции $y=f[\varphi(t)]$ в точке t_0; здесь $x_0=\varphi(t_0)$

$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$ — правило дифференцирования обратной функции $x=\varphi(y)$ в точке $y_0=f(x_0)$

$y^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v''+\ldots+uv^{(n)}$ — формула Лейбница

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ — формула Лагранжа; $c\in(a,b)$

$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ — формула Коши; $c\in(a,b)$

$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+$
$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}+(x-a)^{n+1}$ — формула Тейлора; $\xi\in(a,x)$

$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x)$ — формула Маклорена

$$\int x^{\alpha}\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\,(\alpha\neq-1),\ \int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C,\ \int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C,\ \int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\,(0<a\neq1),\ \int e^x\,dx=e^x+C,$$

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+C,\ \int\cos x\,dx=\sin x+C,\ \int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C,\ \int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\,(a\neq0),$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+C,\ \int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C,$$

$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$ — табличные интегралы

$\int f(x)\,dx\,\Big|_{x=\varphi(t)}=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$ — формула замены переменной в неопределенном интеграле

$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$ — формула замены переменной в определенном интеграле; $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$

$\int u(x)v'(x)\,dx=u(x)\,v(x)-\int v(x)u'(x)dx$ — формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле

$\int_a^b u\,dv=uv\,\Big|_a^b-\int_a^b v\,du$ — формула интегрирования по частям в определенном интеграле

$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)\,(b-a)$ — формула среднего значения; $c\in[a,\,b]$

$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=F(x)\,\Big|_a^b$ — формула Ньютона — Лейбница

$s=\int_a^b f(x)\,dx$ — площадь криволинейной трапеции $0\leqslant y\leqslant f(x),\ a\leqslant x\leqslant b$

$s=\int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$ — площадь криволинейной трапеции, верхняя граница которой задана параметрически: $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta$

$s=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi$ — площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах: $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$.

$L=\int\limits_{a}^{b}\sqrt{1+f'^2\,x)}\,dx$ — длина дуги кривой, заданной уравнением $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$

$L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$ — длина дуги кривой, заданной параметрически: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$

$L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi$ — длина дуги кривой, заданной в полярных координатах: $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$

$v=\pi\int\limits_{a}^{b}f^2(x)\,dx$ — объем тела вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции $0\leqslant y\leqslant f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$

$P=2\pi\int\limits_{a}^{b}f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ — площадь поверхности вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции $0\leqslant y\leqslant f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$.

Дифференцирование и интегрирование функций нескольких переменных

$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ — определение частной производной функции $z=f(x, y)$ по переменной x

$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ — правило дифференцирования сложной функции $z=f[x(t), y(t)]$

$dz=f'_x(x_0, y_0)dx+f'_x(x_0, y_0)dy$ — дифференциал функции $z=f(x, y)$ в точке $(x_0; y_0)$

$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$ — формула для производной функции $z=f(x, y)$ по направлению вектора $l=\{\cos\alpha; \cos\beta\}$

$\Delta f=df(x, y)+\frac{d^2f(x, y)}{2!}+\ldots+\frac{d^nf(x, y)}{n!}+\frac{d^{n+1}f(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)}{(n+1)!}$, $0<\theta<1$ — формула Тейлора для функции $z=f(x, y)$

$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy$ — формула вычисления двойного интеграла по области $G=\{(x, y)|a\leqslant x\leqslant b;\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\}$

$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{G^*} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi$ — формула вычисления двойного интеграла в полярных координатах

$s=\iint\limits_G dx\,dy$ — площадь области G на плоскости xOy

$v=\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ — объем криволинейного цилиндра $0\leqslant z\leqslant f(x, y)$; $(x, y)\in G$

$s=\iint\limits_G \sqrt{1+f_x'^2(x, y)+f_y'^2(x, y)}\,dx\,dy$ — площадь поверхности S, заданной уравнением $z=f(x, y)$; $(x, y)\in G$

$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dt=\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t), \psi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$ — формула вычисления криволинейного интеграла первого рода по кривой $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$

$\int\limits_{AB} P\,dx+G\,dy=\int\limits_a^b \{P[x, y(x)]+Q[x, y(x)]\,y'(x)\}\,dx$ — формула вычисления криволинейного интеграла второго рода вдоль кривой $y=y(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$

$\iint\limits_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint\limits_L P\,dx+Q\,dy$ — формула Грина (L — граница области G)

$s=\oint\limits_L x\,dy$, $s=-\oint\limits_L y\,dx$, $s=\frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy-y\,dx$ — формулы вычисления площади области G, ограниченной кривой L

$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_G dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz$ — формула вычисления тройного интеграла по области $V=\{(x, y, z)\,|\,(x, y)\in G,\ z_1(x, y)\leqslant z\leqslant z_2(x, y)\}$

$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V^*} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$ — формула вычисления тройного интеграла в цилиндрических координатах

$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V^*} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$ — формула вычисления тройного интеграла в сферических координатах

$v=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$ — объем тела V в пространстве $Oxyz$

$\iint\limits_S f(x, y, z)\,dS=\iint\limits_G f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1+z_x'^2(x, y)+z_y'^2(x, y)}\,dx\,dy$ — формула вычисления поверхностного интеграла первого рода по поверхности S, заданной уравнением $z=f(x, y)$; $(x, y)\in G$

$\iint\limits_S R(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_G R[x, y, f(x, y)]\,dx\,dy$ — формула вычисления поверхностного интеграла второго рода по поверхности S, заданной уравнением $z=f(x, y)$; $(x, y)\in G$

$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \iint\limits_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$ — формула Остроградского

$\oint P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$

$=\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right]dS$ — формула Стокса

$\operatorname{grad} F=\frac{\partial F}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial R}{\partial z}\bar{k}$ — определение градиента скалярного поля $F(x, y, z)$

$\operatorname{div}\ \bar{a}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ — определение дивергенции векторного поля $\bar{a}=\{P(x, y, z), Q\ (x, y, z), R(x, y, z)\}$

$\operatorname{rot}\bar{a}\ (M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}$ — определение ротора векторного поля $\bar{a}=\{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$

$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$ — определение оператора Гамильтона

Ряды

$a_0+a_1x+a_2x^2+a_nx^n+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ — степенной ряд

$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$ — ряд Маклорена

$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ — ряд Фурье, где $a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$,

$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ — коэффициенты Фурье

Дифференциальные уравнения

$F(x, y, y')=0$ — уравнение первого порядка

$y'=f_1(x)f_2(y)$ — уравнение с разделяющимися переменными

$y'+p(x)y=f(x)$ — линейное уравнение первого порядка

$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ — уравнение в полных дифференциалах

$F(x, y, y', y'') = 0$ — уравнение второго порядка

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ — линейное уравнение второго порядка

$y'' + py' + qy = f(x)$ — линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ — уравнение n-го порядка

ОГЛАВЛЕНИЕ