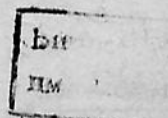


Л. А. КУЗНЕЦОВ

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ТИПОВЫЕ
РАСЧЕТЫ

Рекомендовано Государственным комитетом
Российской Федерации по высшему образованию
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений,
обучающихся по направлению «Математика»



Москва
«Высшая школа» 1994

ББК 22.11
К89
УДК 517

Федеральная программа книгоиздания России

Рецензент — кафедра высшей математики
Московского института электронной техники

К $\frac{1602010000 — 101}{001 (01) — 94}$ без объявл.

ISBN 5-06-002666-3

© Л. А. Кузнецов, 1994

Важным фактором усвоения математики и овладения ее методами является самостоятельная работа учащегося. Система типовых расчетов (ТР), как показал опыт ряда вузов нашей страны, активизирует самостоятельную работу студентов и способствует более глубокому изучению курса высшей математики. Применение системы ТР рекомендовано программой по высшей математике для вузов.

Каждый ТР содержит теоретические вопросы, теоретические упражнения и расчетную часть — задачи. Теоретические вопросы и теоретические упражнения являются общими для всех студентов, задачи для каждого студента группы индивидуальные (каждая задача составлена в 31 варианте).

Выполнение студентами ТР контролируется преподавателем. Предварительно проверяется правильность решения теоретических упражнений и задач. Завершающим этапом является защита ТР. Студент должен уметь правильно отвечать на теоретические вопросы, пояснять решения теоретических упражнений и задач, решать задачи аналогичного типа.

Настоящий сборник отражает опыт работы Московского энергетического института, в котором система типовых расчетов по высшей математике успешно используется начиная с 1971/72 учебного года. Наряду с традиционными текущими заданиями по математике студенты МЭИ в течение каждого семестра выполняют ТР по разделам, изучаемым в семестре. Задачи сдаются студентами на проверку частями по мере изучения курса. Защита ТР осуществляется в письменной форме во время занятий по расписанию (как правило, защита занимает один учебный час). Повторная защита проводится вне сетки расписания в письменной форме или в виде собеседования (по усмотрению преподавателя).

Работой по созданию типовых расчетов руководил автор сборника доц. Л. А. Кузнецов. Большую помощь в этой работе ему оказали доц. В. П. Пикулин, старшие преподаватели А. Ф. Леферова, А. С. Калинин. В составлении задач принимали участие многие преподаватели кафедры высшей математики МЭИ

В. В. Жаринов, В. А. Илюшкин, Н. К. Козлова, Р. Ф. Салихджанов, Г. А. Соколов и др. Созданию и внедрению системы типовых расчетов во многом способствовал чл.-кор. АН СССР проф. С. И. Похожаев.

При подготовке второго издания учтен опыт использования сборника в МЭИ и в ряде других вузов, внесены исправления, переработаны задачи в разделе «Ряды». Сборник дополнен разделом «Уравнения математической физики», в который включены простейшие задачи, рассчитанные на применение метода разделения переменных.

Автор благодарен проф. А. В. Ефимову, доцентам В. М. Терцигоровой, В. Г. Долголаптеву и И. Б. Кожухову за рецензирование рукописи и полезные замечания. Автор весьма признателен также проф. И. М. Петрушко и доц. А. Л. Павлову за участие в подготовке материалов для составления задач по уравнениям математической физики, доц. В. П. Пикулину, любезно предоставившему готовые материалы по аналитической геометрии и линейной алгебре, доц. П. А. Шмелеву за сделанные замечания и предложения по пересмотру ряда теоретических упражнений, доц. Минского радиотехнического института А. А. Карпуку, сообщившему замечания, накопленные при работе со сборником, и всем, кто проявил внимание и высказал добрые пожелания по совершенствованию сборника.

Автор

1. ПРЕДЕЛЫ

Теоретические вопросы

1. Понятия числовой последовательности и ее предела. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.
2. Понятие предела функции в точке. Понятие функции, ограниченной в окрестности точки. Теорема об ограниченности функции, имеющей предел.
3. Теорема о переходе к пределу в неравенствах.
4. Теорема о пределе промежуточной функции.
5. Понятие непрерывности функции. Доказать непрерывность функции $\cos x$.
6. Первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
7. Понятие бесконечно малой функции. Теорема о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой.
8. Теорема о сумме бесконечно малых функций.
9. Теорема о произведении бесконечно малой функции на ограниченную функцию.
10. Теорема об отношении бесконечно малой функции к функции, имеющей предел, отличный от нуля.
11. Теорема о пределе суммы.
12. Теорема о пределе произведения.
13. Теорема о пределе частного.
14. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции.
15. Непрерывность суммы, произведения и частного.
16. Непрерывность сложной функции.
17. Понятие бесконечно большой функции. Теоремы о связи бесконечно больших функций с бесконечно малыми.
18. Сравнение бесконечно малых функций.
19. Эквивалентные бесконечно малые функции. Теорема о замене бесконечно малых функций эквивалентными.
20. Условие эквивалентности бесконечно малых функций.

Теоретические упражнения

1. Доказать, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$. Вытекает ли из существования $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ существование $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$?

Указание. Доказать и использовать неравенство

$$||b| - |a|| \leq |b - a|.$$

2. Доказать, что последовательность $\{n^2\}$ расходится.

3. Сформулировать на языке « $\varepsilon - \delta$ » утверждение: «Число A не является пределом в точке x_0 функции $f(x)$, определенной в окрестности точки x_0 ».

4. Доказать, что если $f(x)$ непрерывная функция, то $F(x) = |f(x)|$ есть также непрерывная функция. Верно ли обратное утверждение?

5. Сформулировать на языке « $\varepsilon - \delta$ » утверждение: «Функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0 , не является непрерывной в этой точке».

6. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$, а $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ не существует. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \varphi(x)$ не существует.

Указание. Допустить противное и использовать теорему о пределе частного.

7. Пусть функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0 , а функция $\varphi(x)$ не имеет предела. Будут ли существовать пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + \varphi(x)]$; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \varphi(x)$?

Рассмотреть пример: $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

8. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$, а функция $\varphi(x)$ бесконечно большая при $x \rightarrow x_0$. Доказать, что произведение $f(x)\varphi(x)$ является бесконечно большой функцией при $x \rightarrow x_0$.

9. Является ли бесконечно большой при $x \rightarrow 0$ функция $\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$?

10. Пусть $\alpha'(x) \sim \alpha(x)$ и $\beta'(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$. Доказать, что если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$ не существует, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ тоже не существует.

Расчетные задания

Задача 1. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

- $$1.1. a_n = \frac{3n-2}{2n-1}, a = \frac{3}{2}$$
- $$1.2. a_n = \frac{4n-1}{2n+1}, a = 2$$
- $$1.3. a_n = \frac{7n+4}{2n+1}, a = \frac{7}{2}$$
- $$1.4. a_n = \frac{2n-5}{3n+1}, a = \frac{2}{3}$$
- $$1.5. a_n = \frac{7n-1}{n+1}, a = 7$$
- $$1.6. a_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}, a = \frac{4}{3}$$
- $$1.7. a_n = \frac{9-n^3}{1+2n^3}, a = -\frac{1}{2}$$
- $$1.8. a_n = \frac{4n-3}{2n+1}, a = 2$$
- $$1.9. a_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}, a = -\frac{1}{2}$$
- $$1.10. a_n = \frac{5n}{n+1}, a = -5$$
- $$1.11. a_n = \frac{n+1}{1-2n}, a = -\frac{1}{2}$$
- $$1.12. a_n = \frac{2n+1}{3n-5}, a = \frac{2}{3}$$
- $$1.13. a_n = \frac{1-2n^2}{n^2+3}, a = -2$$
- $$1.14. a_n = \frac{2-n^2}{3n^3}, a = -3$$
- $$1.15. a_n = \frac{1}{3n-1}, a = \frac{1}{3}$$
- $$1.16. a_n = \frac{4+2n}{n^3-1}, a = 3$$
- $$1.17. a_n = \frac{4+2n}{1-3n}, a = -\frac{2}{3}$$
- $$1.18. a_n = \frac{5n+15}{6-n}, a = -5$$
- $$1.19. a_n = \frac{3-n^2}{4+2n^2}, a = -\frac{1}{2}$$
- $$1.20. a_n = \frac{2n-1}{2-3n}, a = -\frac{2}{3}$$
- $$1.21. a_n = \frac{3n-1}{5n+1}, a = \frac{3}{5}$$
- $$1.22. a_n = \frac{4n-3}{2n+1}, a = 2$$
- $$1.23. a_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}, a = -\frac{1}{2}$$
- $$1.24. a_n = \frac{5n+1}{10n-3}, a = \frac{1}{2}$$
- $$1.25. a_n = \frac{2-2n}{3+4n}, a = -\frac{1}{2}$$
- $$1.26. a_n = \frac{4n-3}{2-n}, a = 4$$
- $$1.27. a_n = \frac{1+3n}{6-n}, a = -3$$
- $$1.28. a_n = \frac{2n+3}{n+5}, a = 2$$
- $$1.29. a_n = \frac{3n^2+2}{4n^2-1}, a = \frac{3}{4}$$
- $$1.30. a_n = \frac{2-3n^2}{4+5n^2}, a = -\frac{3}{5}$$
- $$1.31. a_n = \frac{2n^3}{n^3-2}, a = 2$$

Задача 2. Вычислить пределы числовых последовательностей.

- $$2.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}$$
- $$2.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^4 - (1+n)^4}$$
- $$2.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^3 - (1+n)^3}$$
- $$2.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-n)^4 - (1+n)^4}{(n+1)^3 - (1-n)^3}$$
- $$2.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6-n)^2 - (6+n)^2}{(6+n)^2 - (1-n)^2}$$
- $$2.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+1)^2}{(n-1)^3 - (n+1)^3}$$

- 2.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}$
- 2.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}$
- 2.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2 - (n+1)^3}$
- 2.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4-n)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2 - (n+2)^3}$
- 2.11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^3 - (n-2)^3}{n^2 + 2n - 3}$
- 2.12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n+2)^3}{(n+4)^3 + (n+5)^3}$
- 2.13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 + (n+4)^3}{(n+3)^4 - (n+4)^4}$
- 2.14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{8n^3 - 2n}$
- 2.15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(2n-3)^2 - (n+5)^3}$
- 2.16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^2 + (n+4)^2}{(n+10)^2 + (3n+1)^2}$
- 2.17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)^3 + (2n+3)^3}{(2n+1)^3 + (3n+2)^3}$
- 2.18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+6)^3 - (n+1)^3}{(n+7)^3 - (n+2)^3}$
- 2.19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^3 - (n-7)^3}{(2n+1)^3 - (2n+3)^3}$
- 2.20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)^2 + (4n+1)^2}{n^3 - (n-1)^3}$
- 2.21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 + (2n+3)^2}{(n+2)^4 - (n-2)^4}$
- 2.22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - n^4}{(n+1)^4 - (n-1)^4}$
- 2.23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)^2 + (n-5)^2}{(n+1)^3 - (n-1)^3}$
- 2.24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{(n+1)^3 - (n-1)^3}$
- 2.25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{(n+2)^3 + (n-2)^3}$
- 2.26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$
- 2.27. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 - 1}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$
- 2.28. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 3n}{(n+2)^2 - (n-2)^2}$
- 2.29. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{(2n+1)^2 - (n+1)^2}$
- 2.30. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 3n}{(n+3)^2}$
- 2.31. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n + 1}$

Задача 3. Вычислить пределы числовых последовательностей.

- 3.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[3]{5n^2} + \sqrt{9n^3 + 1}}{(n + \sqrt{n}) \sqrt{7 - n + n^2}}$
- 3.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3} + \sqrt[4]{n^5+1}}$
- 3.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n-1}}$
- 3.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2-1} + 7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1} - n}$
- 3.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n-1} - \sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[5]{n-n}}$
- 3.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[5]{n} - \sqrt[3]{27n^6+n^2}}{(n + \sqrt[4]{n}) \sqrt{9+n^2}}$
- 3.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1} - \sqrt[3]{n^4-1}}$
- 3.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4+2} + \sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2} + \sqrt{n-2}}$
- 3.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - \sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3} - n}$
- 3.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n+2} - \sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7} - n}$

$$3.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \sqrt{3n+1} + \sqrt{81n^4 - n^2 + 1}}{(n + \sqrt[3]{n}) \sqrt{5-n+n^2}}$$

$$3.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5+3} - \sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3} + \sqrt{n-3}}$$

$$3.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1} - \sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n-3} \sqrt[3]{n^5+n}}$$

$$3.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3-7} + \sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[4]{n^5+5} + \sqrt{n}}$$

$$3.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - \sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6+n^3+1} - 5n}$$

$$3.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \sqrt{11n} + \sqrt{25n^4-81}}{(n-7\sqrt{n}) \sqrt{n^2-n+1}}$$

$$3.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^7+5} - \sqrt{n-5}}{\sqrt[7]{n^7+5} + \sqrt{n-5}}$$

$$3.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2} - \sqrt[5]{n^5+2}}$$

$$3.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3} + \sqrt[4]{n^3+1}}$$

$$3.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2} - n}$$

$$3.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \sqrt{n} + \sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n + \sqrt[4]{n}) \sqrt[3]{n^3-1}}$$

$$3.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4} - \sqrt[4]{n^4+1}}$$

$$3.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n-9n^2}}{3n - \sqrt[4]{9n^8+1}}$$

$$3.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[3]{7n} - \sqrt[4]{81n^8-1}}{(n+4\sqrt{n}) \sqrt{n^2-5}}$$

$$3.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6+4} + \sqrt{n-4}}{\sqrt[5]{n^6+6} - \sqrt{n-6}}$$

$$3.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4} - \sqrt[5]{n^5+5}}$$

$$3.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7} - \sqrt{n+1}}$$

$$3.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+2} - 5n^2}{n - \sqrt{n^4-n+1}}$$

$$3.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{71n} - \sqrt[3]{64n^6+9}}{(n - \sqrt[3]{n}) \sqrt{11+n^2}}$$

$$3.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^8+6} - \sqrt{n-6}}{\sqrt[3]{n^8+6} + \sqrt{n-6}}$$

$$3.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[5]{n^5+1}}$$

Задача 4. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$4.1. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1})$$

$$4.2. \lim_{n \rightarrow \infty} n[\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2-3}]$$

$$4.3. \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt[3]{n^3-5})n\sqrt{n}$$

$$4.4. \lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)} - \sqrt{n^4-9}]$$

$$4.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5-8} - n\sqrt{n(n^2+5)}}{\sqrt{n}}$$

$$4.6. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-3n+2} - n)$$

$$4.7. \lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt[3]{4-n^3})$$

$$4.8. \lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n^2-2n+3}]$$

- 4.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{(n-1)(n+3)}]$. 4.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 [\sqrt{n(n^4-1)} - \sqrt{n^5-8}]$.
- 4.11. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{5+8n^3} - 2n)$. 4.12. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[3]{5+n^3} - \sqrt[3]{3+n^3})$.
- 4.13. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt[3]{(n+2)^2} - \sqrt[3]{(n-3)^2}]$. 4.14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$.
- 4.15. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+3n-2} - \sqrt{n^2-3})$. 4.16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3})$.
- 4.17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n^5+9)} - \sqrt{(n^4-1)(n^2+5)}}{n}$. 4.18. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+5)} - n)$.
- 4.19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3+8} (\sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3-1})$.
- 4.20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^3+1)(n^2+3)} - \sqrt{n(n^4+2)}}{2\sqrt{n}}$.
- 4.21. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)} - \sqrt{(n^2-1)(n^2-2)}]$.
- 4.22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^5+1)(n^2-1)} - n\sqrt{n(n^4+1)}}{n}$.
- 4.23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^4+1)(n^2-1)} - \sqrt{n^6-1}}{n}$. 4.24. $\lim_{n \rightarrow \infty} [n - \sqrt{n(n-1)}]$.
- 4.25. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 [\sqrt[3]{n^2(n^6+4)} - \sqrt[3]{(n^6-1)}]$. 4.26. $\lim_{n \rightarrow \infty} [n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)}]$.
- 4.27. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} [\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)}]$. 4.28. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n-4})$.
- 4.29. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^4+3} - \sqrt{n^4-2})$.
- 4.30. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n+1)(n+2)} (\sqrt{n^3-3} - \sqrt{n^3-2})$.
- 4.31. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)} - \sqrt{n^6-3n^3+5}}{n}$.

Задача 5. Вычислить пределы числовых последовательностей.

- 5.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$. 5.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}$.

- 5.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right]$
- 5.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
- 5.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$
- 5.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n}$
- 5.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+3} - n \right]$
- 5.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}$
- 5.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$
- 5.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$
- 5.11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+2}}$
- 5.12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^n}}$
- 5.13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3+5-7+9-11+\dots+(4n-3)-(4n-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n+1}}$
- 5.14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots+(2n-1)-2n}{n}$
- 5.15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\dots+(2n-1)}$
- 5.16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$
- 5.17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+2}{1+2+3+\dots+n} - \frac{2}{3} \right]$
- 5.18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n+2^n}{6^n} \right)$
- 5.19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-5+4-7+\dots+2n-(2n+3)}{n+3}$
- 5.20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$
- 5.21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n-n^2+3}$
- 5.22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+\sqrt{n-1}}{2+7+12+\dots+(5n-3)}$
- 5.23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \frac{9}{64} + \dots + \frac{1+2^n}{4^n} \right)$
- 5.24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{1+3+5+\dots+(2n-1)}$
- 5.25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+5+9+13+\dots+(4n-3)}{n+1} - \frac{4n+1}{2} \right]$
- 5.26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}}$
- 5.27. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}$
- 5.28. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$
- 5.29. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+6+9+\dots+3n}{n^2+4}$
- 5.30. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{10} + \frac{29}{100} + \dots + \frac{2^n+5^n}{10^n} \right)$

$$5.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+4+\dots+2n}{n+3} - n \right).$$

Задача 6. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$6.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n.$$

$$6.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^4}.$$

$$6.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1} \right)^{n^2}.$$

$$6.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1} \right)^{n/2}.$$

$$6.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n-7}{6n+4} \right)^{3n+2}.$$

$$6.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} \right)^{-n^2}.$$

$$6.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}.$$

$$6.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1} \right)^{2n+3}.$$

$$6.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+5} \right)^{n+4}.$$

$$6.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9} \right)^{2n+1}.$$

$$6.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7} \right)^{n+1}.$$

$$6.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5} \right)^{3n+2}.$$

$$6.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15} \right)^{n+2}.$$

$$6.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+n+1}{n^3+2} \right)^{2n^2}.$$

$$6.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1} \right)^{3n^2-7}.$$

$$6.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3} \right)^{1-2n}.$$

$$6.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1}.$$

$$6.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2}.$$

$$6.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1} \right)^{-n+1}.$$

$$6.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-10}{n+1} \right)^{3n+1}.$$

$$6.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7} \right)^{2n+5}.$$

$$6.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3} \right)^n.$$

$$6.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3} \right)^{n^2}.$$

$$6.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1} \right)^{-n^2}.$$

$$6.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3-1} \right)^{2n-n^3}.$$

$$6.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10n-3}{10n-1} \right)^{5n}.$$

$$6.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{-n^2}.$$

$$6.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+2} \right)^n.$$

$$6.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n+1}.$$

$$6.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{13n+3}{13n-10} \right)^{n-3}.$$

$$6.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-7} \right)^{n/6+1}.$$

Задача 7. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что:

- 7.1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7.$
- 7.2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1} = 6.$
- 7.3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2} = -7.$
- 7.4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3} = 10.$
- 7.5. $\lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{6x^2 + x - 1}{x + 1/2} = -5.$
- 7.6. $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{6x^2 - x - 1}{x - 1/2} = 5.$
- 7.7. $\lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{9x^2 - 1}{x + 1/3} = -6.$
- 7.8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} = 7.$
- 7.9. $\lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x + 1/3} = -4.$
- 7.10. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 8x + 1}{x + 1} = -6.$
- 7.11. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 2.$
- 7.12. $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x - 1/2} = 5.$
- 7.13. $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2 - 5x + 1}{x - 1/3} = -1.$
- 7.14. $\lim_{x \rightarrow -7/5} \frac{10x^2 + 9x - 7}{x + 7/5} = -19.$
- 7.15. $\lim_{x \rightarrow -7/2} \frac{2x^2 + 13x + 21}{2x + 7} = -\frac{1}{2}.$
- 7.16. $\lim_{x \rightarrow 5/2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{2x - 5} = \frac{1}{2}.$
- 7.17. $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2 + x - 1}{x - 1/3} = 5.$
- 7.18. $\lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{6x^2 - 75x - 39}{x + 1/2} = -81.$
- 7.19. $\lim_{x \rightarrow 11} \frac{2x^2 - 21x - 11}{x - 11} = 23.$
- 7.20. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x^2 - 24x - 5}{x - 5} = 26.$
- 7.21. $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{2x^2 + 15x + 7}{x + 7} = -13.$
- 7.22. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 6x - 8}{x + 4} = -10.$
- 7.23. $\lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{6x^2 - x - 1}{3x + 1} = -\frac{5}{3}.$
- 7.24. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = -8.$
- 7.25. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{3x^2 - 40x + 128}{x - 8} = 8.$
- 7.26. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{5x^2 - 51x + 10}{x - 10} = 49.$
- 7.27. $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 1/2} = -3.$
- 7.28. $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{3x^2 + 17x - 6}{x + 6} = -19.$
- 7.29. $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 17x - 6}{x - 1/3} = 19.$
- 7.30. $\lim_{x \rightarrow -1/5} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x + 1/5} = -8.$
- 7.31. $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - 1/3} = 8.$

Задача 8. Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 (найти $\delta(\varepsilon)$).

- 8.1. $f(x) = 5x^2 - 1, x_0 = 6.$
- 8.2. $f(x) = 4x^2 - 2, x_0 = 5.$
- 8.3. $f(x) = 3x^2 - 3, x_0 = 4.$
- 8.4. $f(x) = 2x^2 - 4, x_0 = 3.$
- 8.5. $f(x) = -2x^2 - 5, x_0 = 2.$
- 8.6. $f(x) = -3x^2 - 6, x_0 = 1.$
- 8.7. $f(x) = -4x^2 - 7, x_0 = 1.$
- 8.8. $f(x) = -5x^2 - 8, x_0 = 2.$

- 8.9. $f(x) = -5x^2 - 9, x_0 = 3.$
 8.11. $f(x) = -3x^2 + 8, x_0 = 5.$
 8.13. $f(x) = 2x^2 + 6, x_0 = 7.$
 8.15. $f(x) = 4x^2 + 4, x_0 = 9.$
 8.17. $f(x) = 5x^2 + 1, x_0 = 7.$
 8.19. $f(x) = 3x^2 - 2, x_0 = 5.$
 8.21. $f(x) = -2x^2 - 4, x_0 = 3.$
 8.23. $f(x) = -4x^2 - 6, x_0 = 1.$
 8.25. $f(x) = -4x^2 - 8, x_0 = 2.$
 8.27. $f(x) = -2x^2 + 9, x_0 = 4.$
 8.29. $f(x) = 3x^2 + 7, x_0 = 6.$
 8.31. $f(x) = 5x^2 + 5, x_0 = 8.$

- 8.10. $f(x) = -4x^2 + 9, x_0 = 4.$
 8.12. $f(x) = -2x^2 + 7, x_0 = 6.$
 8.14. $f(x) = 3x^2 + 5, x_0 = 8.$
 8.16. $f(x) = 5x^2 + 3, x_0 = 8.$
 8.18. $f(x) = 4x^2 - 1, x_0 = 6.$
 8.20. $f(x) = 2x^2 - 3, x_0 = 4.$
 8.22. $f(x) = -3x^2 - 5, x_0 = 2.$
 8.24. $f(x) = -5x^2 - 7, x_0 = 1.$
 8.26. $f(x) = -3x^2 - 9, x_0 = 3.$
 8.28. $f(x) = 2x^2 + 8, x_0 = 5.$
 8.30. $f(x) = 4x^2 + 6, x_0 = 7.$

Задача 9. Вычислить пределы функций.

9.1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}$

9.3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$

9.5. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}$

9.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x+x^2}$

9.9. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$

9.11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

9.13. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2}$

9.15. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4}$

9.17. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4}$

9.19. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2}$

9.21. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1}$

9.23. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$

9.25. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$

9.27. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1}$

9.2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$

9.4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$

9.6. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)^2}{x^4 + 2x + 1}$

9.8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$

9.10. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$

9.12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}$

9.14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 - x^2 - 1}{x^4 - 1}$

9.16. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}$

9.18. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}$

9.20. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2}$

9.22. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$

9.24. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$

9.26. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x}$

9.28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^2 + x^3}$

$$9.29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$9.31. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}$$

$$9.30. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$$

Задача 10. Вычислить пределы функций.

$$10.1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

$$10.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

$$10.5. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$$

$$10.7. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

$$10.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2} - 2}{x+x^2}$$

$$10.11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}}$$

$$10.13. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}}$$

$$10.15. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{\sqrt{3+x} - \sqrt{2x}}$$

$$10.17. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{16x} - 4}{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}}$$

$$10.19. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sqrt[3]{x/4} - 1/2}{\sqrt{1/2+x} - \sqrt{2x}}$$

$$10.21. \lim_{x \rightarrow 1/4} \frac{\sqrt[3]{x/16} - 1/4}{\sqrt{1/4+x} - \sqrt{2x}}$$

$$10.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x}}$$

$$10.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+3x^2} - (1+x)}{\sqrt[3]{x}}$$

$$10.27. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{(\sqrt{x} - 4)^2}}$$

$$10.2. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$$

$$10.4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$$

$$10.6. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$$

$$10.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2} - (1+x)}{x}$$

$$10.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}$$

$$10.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$$

$$10.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$$

$$10.16. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x+2}$$

$$10.18. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x^2} - 4}$$

$$10.20. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{\sqrt[3]{x/9} - 1/3}{\sqrt{1/3+x} - \sqrt{2x}}$$

$$10.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x}}$$

$$10.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{\sqrt[3]{x^3+x^3}}$$

$$10.26. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

$$10.28. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$$

$$10.29. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x^2-16}}$$

$$10.31. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$$

$$10.30. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$$

Задача 11. Вычислить пределы функций.

$$11.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4(x-\pi)}$$

$$11.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2-5x}{\sin 3x}$$

$$11.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$$

$$11.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^3 x}{4x^2}$$

$$11.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x+1}-2}{\ln(1+4x)}$$

$$11.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$$

$$11.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x)}{\sqrt{8x+4}-2}$$

$$11.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$$

$$11.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin[\pi(x+1)]}{\ln(1+2x)}$$

$$11.19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin[\pi(x+2)]}$$

$$11.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x \sin x}$$

$$11.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x}-1}{\sin[\pi(x/2+1)]}$$

$$11.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4}$$

$$11.27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1-\cos 2x)}$$

$$11.29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\pi(1+x/2))}{\ln(x+1)}$$

$$11.31. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1+\cos(x-3\pi)}$$

$$11.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 10(x+\pi)}{e^{x^2}-1}$$

$$11.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}$$

$$11.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{tg}[2\pi(x+1/2)]}$$

$$11.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$$

$$11.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2\pi(x+10))}$$

$$11.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x+5\pi/2) \operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2}$$

$$11.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos[\pi(x+1)/2]}$$

$$11.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{3 \operatorname{arctg} x}$$

$$11.18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1-\cos x}$$

$$11.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[5(x+\pi)]}{e^{3x}-1}$$

$$11.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\sin 3(x+\pi)}$$

$$11.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\cos(x-\pi)}{(e^{3x}-1)^2}$$

$$11.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$$

$$11.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+1)}{2-\sqrt{2x^2+4}}$$

$$11.30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4\pi x}-1}{\sqrt[3]{8+24x}-2}$$

Задача 12. Вычислить пределы функций.

$$12.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}.$$

$$12.3. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x}.$$

$$12.5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}.$$

$$12.7. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{(x - \pi)^4}.$$

$$12.9. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}.$$

$$12.11. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}.$$

$$12.13. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{\sin \pi x}.$$

$$12.15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{5x-3} - 3^{2x^2}}{\operatorname{tg} \pi x}.$$

$$12.17. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln 2x - \ln \pi}{\sin(5x/2) \cos x}.$$

$$12.19. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^\pi - e^x}{\sin 5x - \sin 3x}.$$

$$12.21. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - 2^4 - x^2}{2(\sqrt{2x} - \sqrt{3x^2 - 5x + 2})}.$$

$$12.23. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}.$$

$$12.25. \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}.$$

$$12.27. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}.$$

$$12.29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{10 - x}}{\sin 3\pi x}.$$

$$12.31. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}.$$

$$12.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}.$$

$$12.4. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{(\pi - 4x)^2}.$$

$$12.6. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}.$$

$$12.8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\operatorname{tg} \pi x}.$$

$$12.10. \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{e^{x^2} - e^{4\pi^2}}.$$

$$12.12. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5 - 2x)}{\sqrt{10 - 3x} - 2}.$$

$$12.14. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2}{\sin x}.$$

$$12.16. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - 16}{\sin \pi x}.$$

$$12.18. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}.$$

$$12.20. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9 - 2x^2)}{\sin 2\pi x}.$$

$$12.22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}.$$

$$12.24. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin(x/2)}{\pi - x}.$$

$$12.26. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x^2 - 2x)}{\sin 3\pi x}.$$

$$12.28. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x/2)}{1 - \sqrt{x}}.$$

$$12.30. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

Задача 13. Вычислить пределы функций.

$$13.1. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2 \cos^2 x - 1}{\ln \sin x}.$$

$$13.2. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{(2x - 1)^2}{e^{\sin \pi x} - e^{-\sin 3\pi x}}.$$

- 13.3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x - \sqrt[3]{2x-3})}{\sin(\pi x/2) - \sin[(x-1)\pi]}$
- 13.4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2}{\sin \ln(x-1)}$
- 13.5. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{\operatorname{tg} 2x} - e^{-\sin 2x}}{\sin x - 1}$
- 13.6. $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\ln \sin 3x}{(6x - \pi)^2}$
- 13.7. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(\sqrt{2x^2 - 3x - 5} - \sqrt{1+x})}{\ln(x-1) - \ln(x+1) + \ln 2}$
- 13.8. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(x-2\pi)^2}{\operatorname{tg}(\cos x - 1)}$
- 13.9. $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1 - \cos \pi x} - 1}$
- 13.10. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)/2}{\sqrt[3]{2+x+x^2} - 9}$
- 13.11. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^{\sin \pi x} - 1}{\ln(x^3 - 6x - 8)}$
- 13.12. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{(1 - \pi/x)^2}$
- 13.13. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} \ln(3x-5)}{e^{x+3} - e^{x^2+1}}$
- 13.14. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\ln \cos x}{3^{\sin 2x} - 1}$
- 13.15. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 + \ln^2 x} - 1}{1 + \cos \pi x}$
- 13.16. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos(x/2)}{e^{\sin x} - e^{\sin 4x}}$
- 13.17. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(2x-5)}{e^{\sin \pi x} - 1}$
- 13.18. $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{e^{\sin^2 6x} - e^{\sin^2 3x}}{\log_3 \cos 6x}$
- 13.19. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\operatorname{tg} 2x}}{\ln(2x/\pi)}$
- 13.20. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg}(e^{x+2} - e^{x^2-4})}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2}$
- 13.21. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2^x + 7} - \sqrt{2^{x+1} + 5}}{x^3 - 1}$
- 13.22. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(2 + \cos x)}{(3^{\sin x} - 1)^2}$
- 13.23. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x^3 - \pi^3) \sin 5x}{e^{\sin^2 x} - 1}$
- 13.24. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + 6}} - e}$
- 13.25. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 4x}$
- 13.26. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln \sin x}{(2x - \pi)^2}$
- 13.27. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{x^2 - a^2} - 1}{\operatorname{tg} \ln(x/a)}$
- 13.28. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sin(e^{\sqrt[3]{1-x^2/2}} - e^{\sqrt[3]{x+2}})}{\arctg(x+3)}$
- 13.29. $\lim_{x \rightarrow a\pi} \frac{\ln(\cos(x/a) + 2)}{a^{a^2 \pi^2/x^2 - a\pi/x} - a^{a\pi/x - 1}}$
- 13.30. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg}(3^{\pi/x} - 3)}{3^{\cos(3x/2)} - 1}$
- 13.31. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x^2/\pi)}{2\sqrt{\sin x + 1} - 2}$

Задача 14. Вычислить пределы функций.

- 14.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{72x - 53x}{2x - \operatorname{arctg} 3x}$
- 14.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-2x}}{2 \arcsin x - \sin x}$
- 14.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{62x - 7 - 2x}{\sin 3x - 2x}$
- 14.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{\sin 2x - \sin x}$

- 14.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 5^{3x}}{\arctg x + x^3}$
- 14.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^x}{x - \sin 9x}$
- 14.9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{12^x - 5 - 3x}{2 \arcsin x - x}$
- 14.11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^{7x}}{\arcsin 2x - x}$
- 14.13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^{7x}}{\operatorname{tg} 3x - x}$
- 14.15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^{2x} - 7 - x}{2 \operatorname{tg} x - \arctg x}$
- 14.17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{3x} - 3^{2x}}{\operatorname{tg} x + x^3}$
- 14.19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 7^x}{\arcsin 3x - 5x}$
- 14.21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{5x} - 9 - 2x}{\sin x - \operatorname{tg} x^3}$
- 14.23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x} - 2^{3x}}{\sin x + \sin x^2}$
- 14.25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 2^{3x}}{\arctg 2x - 7x}$
- 14.27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^{-7x}}{2x - \operatorname{tg} x}$
- 14.29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x + \operatorname{tg} x^2}$
- 14.31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{5x}}{\sin 7x - 2x}$
- 14.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{\arctg x - x^2}$
- 14.8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{-2x}}{2 \arctg x - \sin x}$
- 14.10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{-2x}}{\sin x - 2x}$
- 14.12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^x}{\arcsin x + x^3}$
- 14.14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{tg} 2x - \sin x}$
- 14.16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\sin 3x - \sin 5x}$
- 14.18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{2x}}{2 \operatorname{tg} x - \sin x}$
- 14.20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-5x}}{2 \sin x - \operatorname{tg} x}$
- 14.22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}$
- 14.24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{3x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}$
- 14.26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-2x}}{x + \sin x^2}$
- 14.28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\sin 2x - \sin x}$
- 14.30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{x + \arcsin x^3}$

Задача 15. Вычислить пределы функций.

- 15.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x}$
- 15.3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{\sin(x+1)}$
- 15.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$
- 15.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$
- 15.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}$
- 15.4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{\ln x - \ln a}$
- 15.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$
- 15.8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^x - e^{-x})}{e^{x^3} + 1 - e}$

- 15.9. $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$
- 15.10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}$
- 15.11. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\ln \operatorname{tg} x}$
- 15.12. $\lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b}$
- 15.13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin 3x}$
- 15.14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x \ln \cos 5x}$
- 15.15. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) + \ln(x-h) + 2 \ln x}{h^2}, x > 0$
- 15.16. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\log_2 x}$
- 15.17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x}$
- 15.18. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln x}$
- 15.19. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{h}$
- 15.20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sin 3x}$
- 15.21. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2}$
- 15.22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$
- 15.23. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{5+x} - 2}{\sin \pi x}$
- 15.24. $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$
- 15.25. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{\sqrt{x-9} - 1}$
- 15.26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+1} - 3}{\ln(1+x\sqrt{1+e^x})}$
- 15.27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x}$
- 15.28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx - \sin ax}{\ln(\operatorname{tg}(\pi/4 + ax))}$
- 15.29. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x}$
- 15.30. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_3 x - 1}{\operatorname{tg} \pi x}$
- 15.31. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\sin(x^2 - 1)}$

Задача 16. Вычислить пределы функций.

- 16.1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln(1+x^2))^{3/(x^2 \arcsin x)}$
- 16.2. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{1/x}$
- 16.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} \right)^{1/x^2}$
- 16.4. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - 3 \arctg^2 \sqrt{x})^{2/\sin x}$
- 16.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x \cos \alpha x}{1 + \sin x \cos \beta x} \right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$
- 16.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{4}{\cos x} \right)^{1/\sin^2 3x}$
- 16.7. $\lim_{x \rightarrow 0} [1 - \ln(1 + \sqrt[3]{x})]^{x/\sin^4 \sqrt[3]{x}}$
- 16.8. $\lim_{x \rightarrow 0} [2 - e^{\arcsin^2 \sqrt{x}}]^{3/x}$
- 16.9. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos \pi x)^{1/(x \sin \pi x)}$
- 16.10. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 3x)^{1/\ln \cos x}$
- 16.11. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right)^{\operatorname{ctg} x}$
- 16.12. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x \sin^2 x)^{1/\ln(1 + \pi x^2)}$

16.13. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - 5 \arcsin x^3)(\operatorname{cosec}^2 x)/x$

16.15. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{\sin x}) \operatorname{ctg} \pi x$

16.17. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{x^2}) / \ln(1 + \operatorname{tg}^2(\pi x/3))$

16.19. $\lim_{x \rightarrow 0} [2 - 3 \sin^2 x] / \ln \cos x$

16.21. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(6 - \frac{5}{\cos x}\right) \operatorname{ctg}^2 x$

16.23. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x \cos 2x}{1 + \sin x \cos 3x}\right)^{1/\sin x^2}$

16.25. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \ln \frac{1}{3} \operatorname{arctg}^6 \sqrt{x}\right)^{1/x^3}$

16.27. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x \cdot 3^x}{1+x \cdot 7^x}\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$

16.29. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln \cos x)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$

16.31. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x^2 2^x}{1+x^2 5^x}\right)^{1/\sin^3 x}$

16.14. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos 3x)^{1/\ln(1+x^2)}$

16.16. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/\ln(1+\sin^2 x)}$

16.18. $\lim_{x \rightarrow 0} (3 - 2 \cos x)^{-\operatorname{cosec}^2 x}$

16.20. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sqrt{2 - \cos x}$

16.22. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(3 - \frac{2}{\cos x}\right)^{\operatorname{cosec}^2 x}$

16.24. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{x^2})^{1/(1 - \cos \pi x)}$

16.26. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x \cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x \cos 5x}\right)^{1/x^2}$

16.28. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{1/\ln(1+3x^2)}$

16.30. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right)^{1/\ln(1+\operatorname{tg}^2 3x)}$

Задача 17. Вычислить пределы функций.

17.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$

17.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^{2/(x+2)}$

17.5. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{x+3}$

17.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{6x}\right)^{x/(x+2)}$

17.9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2}\right)^{(8x+3)/(1+x)}$

17.11. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 6x}{2x}\right)^{2+x}$

17.13. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)^{x^2}$

17.15. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3+8}{3x^2+10}\right)^{x+2}$

17.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x$

17.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x} - 1}{x}\right)^{\cos^2(\pi/4+x)}$

17.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2+4}{x+2}\right)^{x^2+3}$

17.8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} 4x}{x}\right)^{2+x}$

17.10. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{x+4}\right)^{\cos x}$

17.12. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2}\right)^{6/(1+x)}$

17.14. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)^{x+2}$

17.16. $\lim_{x \rightarrow 0} [\sin(x+2)]^{3/(3+x)}$

- 17.17. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^{2x} - 1}{x} \right)^{x+1}$
- 17.19. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{11x+8}{12x+1} \right)^{\cos^2 x}$
- 17.21. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \right)^{3/(x+8)}$
- 17.23. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{2(x+5)}$
- 17.25. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\cos x^4}$
- 17.27. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right)^{(e^x - 1)/x}$
- 17.29. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+8x}{2+11x} \right)^{1/(x^2+1)}$
- 17.31. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3+4}{x^3+9} \right)^{1/(x+2)}$
- 17.18. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^4+5}{x+10} \right)^{4/(x+2)}$
- 17.20. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3+1}{x^3+8} \right)^{2/(x+1)}$
- 17.22. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \frac{x}{\pi} \right)^{1+x}$
- 17.24. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} 3x}{x} \right)^{x+2}$
- 17.26. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x^2}{\sin x} \right)^{1/(x+6)}$
- 17.28. $\lim_{x \rightarrow 0} (6-5/\cos x)^{\operatorname{tg}^2 x}$
- 17.30. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin^2 x}{\arcsin^2 4x} \right)^{2x+1}$

Задача 18. Вычислить пределы функций.

- 18.1. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x-1}{x+1} \right)^{1/\left(\sqrt[3]{x-1}\right)}$
- 18.3. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^{1/\left(\sqrt[3]{x-1}\right)}$
- 18.5. $\lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{2x-7}{x+1} \right)^{1/\left(\sqrt[3]{x-2}\right)}$
- 18.7. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^{1/\left(\sqrt[3]{x-1}\right)}$
- 18.9. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\operatorname{ctg} 2x/\sin 3x}$
- 18.11. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6-x}{3} \right)^{\operatorname{tg}(\pi x/6)}$
- 18.13. $\lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$
- 18.15. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{9-2x}{3} \right)^{\operatorname{tg}(\pi x/6)}$
- 18.17. $\lim_{x \rightarrow 1} (2e^{x-1} - 1)^{x/(x-1)}$
- 18.19. $\lim_{x \rightarrow 1} (2e^{x-1} - 1)^{\frac{3x-1}{x-1}}$
- 18.2. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{1/(x-a)}$
- 18.4. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\cos x}{\cos 2} \right)^{1/(x-2)}$
- 18.6. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{1/\cos(3\pi/4-x)}$
- 18.8. $\lim_{x \rightarrow a} (2-x/a)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}$
- 18.10. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{1/\sin^2 2x}$
- 18.12. $\lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\operatorname{ctg} x/\sin 4x}$
- 18.14. $\lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\frac{5}{\operatorname{tg} 5x \sin 2x}}$
- 18.16. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{6 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 3x}$
- 18.18. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{1/(x-\pi/2)}$
- 18.20. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1+\cos 3x)^{\operatorname{sec} x}$

- 18.21. $\lim_{x \rightarrow 2} (2e^{x-2} - 1)^{\frac{3x+2}{x-2}}$
- 18.22. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(x-1)}{x-1} \right)^{\frac{\sin(x-1)}{x-1 - \sin(x-1)}}$
- 18.23. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2-x}{x} \right)^{1/\ln(2-x)}$
- 18.24. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)^{1/\cos x}$
- 18.25. $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{\sin(\pi x/2)}{\ln(2-x)}}$
- 18.26. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sin x}{\sin 3} \right)^{1/(x-3)}$
- 18.27. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{2x} \right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}$
- 18.28. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\frac{18 \sin x}{\operatorname{ctg} x}}$
- 18.29. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}$
- 18.30. $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right)^{1/\cos(x/2)}$
- 18.31. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}$

Задача 19. Вычислить пределы функций.

- 19.1. $\lim_{x \rightarrow e} \left(\frac{\ln x - 1}{x - e} \right)^{\frac{\pi}{2e} x}$
- 19.2. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$
- 19.3. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \left(\frac{\ln \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg} x} \right)^{1/(x+\pi/4)}$
- 19.4. $\lim_{x \rightarrow 2} (\sin x)^{3/(1+x)}$
- 19.5. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sin 3\pi x}{\sin \pi x} \right)^{\sin^2(x-2)}$
- 19.6. $\lim_{x \rightarrow \pi/6} (\sin x)^{6x/\pi}$
- 19.7. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(2 - \frac{x}{3} \right)^{\sin \pi x}$
- 19.8. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{(1-x^2)/(1-x)}$
- 19.9. $\lim_{x \rightarrow 1} (1+e^x)^{\frac{\sin \pi x}{1-x}}$
- 19.10. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\operatorname{tg} 9\pi x}{\sin 4\pi x} \right)^{x/(x+1)}$
- 19.11. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\arcsin(x-3)}{\sin 3\pi x} \right)^{x^2-8}$
- 19.12. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\sin 2x)^{\frac{x^2-\pi^2/16}{x-\pi/4}}$
- 19.13. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{arctg} \frac{x-3/4}{(x-1)^2} \right)^{x+1}$
- 19.14. $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right)^{\sin(x-\pi)}$
- 19.15. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x - \sin a}{x - a} \right)^{x^2/a^2}$
- 19.16. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} \right)^{1/x}$
- 19.17. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\sin x + \cos x)^{1/\operatorname{tg} x}$
- 19.18. $\lim_{x \rightarrow \pi/8} (\operatorname{tg} 2x)^{\sin(\pi/8+x)}$
- 19.19. $\lim_{x \rightarrow 1} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} \pi x}$
- 19.20. $\lim_{x \rightarrow \pi} (x + \sin x)^{\sin x + x}$
- 19.21. $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln^2 ex)^{1/(x^2+1)}$
- 19.22. $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+1})^{\pi/\operatorname{arctg} x}$
- 19.23. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3-1}{x-1} \right)^{1/x^2}$
- 19.24. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e^{\sin \pi x} - 1}{x-1} \right)^{x^2+1}$

$$19.25. \lim_{x \rightarrow 2} (\cos \pi x)^{\lg(x-2)}.$$

$$19.27. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\cos x + 1)^{\sin x}.$$

$$19.29. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x - 5} \right)^{1/(2-x)}.$$

$$19.31. \lim_{x \rightarrow 1} ((e^{2x} - e^2)/(x-1))^{x+1}.$$

$$19.26. \lim_{x \rightarrow 1/2} (\arcsin x + \arccos x)^{1/x}.$$

$$19.28. \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt[3]{x+x-1})^{\sin(\pi x/4)}.$$

$$19.30. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x} \right)^{x^2}.$$

Задача 20. Вычислить предел функции или числовой последовательности.

$$20.1. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4 \cos 3x + x \operatorname{arctg}(1/x)}.$$

$$20.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \sin n}{\sqrt{n} - \sqrt{n^3 - 7}}.$$

$$20.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/n} + \sin \frac{n}{n^2 + 1} \cdot \cos n}{1 + \cos(1/n)}.$$

$$20.7. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x + (4x - \pi) \cos \frac{x}{4x - \pi}}}{\lg(2 + \operatorname{tg} x)}.$$

$$20.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{3n^3 - 7}}{(n^2 - n \cos n + 1) \sqrt{n}}.$$

$$20.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \cos n) \sqrt[3]{n}}{\sqrt{2n+1} - 1}.$$

$$20.13. \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{\frac{1 + \cos \pi x}{4 + (x+2) \sin \frac{x}{x+2}}}.$$

$$20.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + \cos n} + \sqrt{3n^2 + 2}}{\sqrt[5]{n^6 + 1}}.$$

$$20.17. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\operatorname{arctg} x \sin^2 \frac{1}{x} + 5 \cos x}.$$

$$20.19. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2 \cos^2 x + (e^x - 1) \sin \frac{1}{x}}.$$

$$20.21. \lim_{x \rightarrow 0} \ln[(e^{x^2} - \cos x) \cos(1/x) + \operatorname{tg}(x + \pi/3)].$$

$$20.2. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \sqrt{3 \sin x + (2x - \pi) \sin \frac{x}{2x - \pi}}.$$

$$20.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x \cos(1/x) + \lg(2+x)}{\lg(4+x)}.$$

$$20.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{2+n^3} - \sqrt{2n^3+3}}{(n + \sin n) \sqrt{7n}}.$$

$$20.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{n^2 + 1} \operatorname{arctg} \frac{n}{n^2 + 1} \right).$$

$$20.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \sin n + \sqrt{n-1}}{n + \sqrt{n+1}}.$$

$$20.12. \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(2 + \sqrt{\operatorname{arctg} x \cdot \sin \frac{1}{x}} \right).$$

$$20.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^3 - 3} + \sin n}.$$

$$20.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}} + 3}{2 - \lg(1 + \sin x)}.$$

$$20.18. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4 \cos x + \sin \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)}.$$

$$20.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \ln \left(e + x \sin \frac{1}{x} \right)}{\cos x + \sin x}.$$

$$20.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \ln(1+x) \sqrt{2 + \cos(1/x)}}{2 + e^x}$$

$$20.24. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{(e^{\sin x} - 1) \cos \frac{1}{x} + 4 \cos x}$$

$$20.23. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos 2\pi x}{2 + (e^{\sqrt{x-1}} - 1) \operatorname{arctg} \frac{x+2}{x-1}}$$

$$20.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(1+x)}{\left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) \ln(1+x) + 2}$$

$$20.26. \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\lg(x+2) + \sin \sqrt{4-x^2} \cos \frac{x+2}{x-2}}$$

$$20.27. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2 + \cos x \sin \frac{2}{2x-\pi}}{3 + 2x \sin x}$$

$$20.28. \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \left(\cos x + \sin \frac{x-1}{x+1} \cos \frac{x+1}{x-1} \right)$$

$$20.29. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right) + 4 \cos x}$$

$$20.30. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x + \sin \pi x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}}{1 + \cos x}$$

$$20.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n - 1} + \sqrt[3]{2n^2 + 1}}{n + 2 \sin n}$$

II. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Теоретические вопросы

1. Понятие производной. Производная функции x^n .
2. Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали к графику функции.
3. Понятие дифференцируемости функции и дифференциала. Условие дифференцируемости. Связь дифференциала с производной.
4. Геометрический смысл дифференциала.
5. Непрерывность дифференцируемой функции.
6. Дифференцирование постоянной и суммы, произведения и частного.
7. Производная сложной функции.
8. Инвариантность формы дифференциала.
9. Производная обратной функции.
10. Производные обратных тригонометрических функций.
11. Гиперболические функции, их производные.
12. Производные высших порядков. Формула Лейбница.

13. Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность дифференциалов порядка выше первого.

14. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

Теоретические упражнения

1. Исходя из определения производной, доказать, что:

а) производная периодической дифференцируемой функции есть функция периодическая;

б) производная четной дифференцируемой функции есть функция нечетная;

в) производная нечетной дифференцируемой функции есть функция четная.

2. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x=0$ и $f(0)=0$, то $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

3. Доказать, что производная $f'(0)$ не существует, если

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

4. Доказать, что производная от функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

разрывна в точке $x=0$.

5. Доказать приближенную формулу

$$\sqrt{a^2+z} \approx a + z/(2a), \quad a > 0, \quad |z| \ll a.$$

6. Что можно сказать о дифференцируемости суммы $f(x) + g(x)$ в точке $x=x_0$, если в этой точке:

а) функция $f(x)$ дифференцируема, а функция $g(x)$ недифференцируема;

б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ недифференцируемы.

7. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, а функция $g(x)$ недифференцируема в этой точке. Доказать, что произведение $f(x)g(x)$ является недифференцируемым в точке x_0 .

8. Что можно сказать о дифференцируемости произведения $f(x)g(x)$ в предположениях задачи 6?

Рассмотреть примеры:

а) $f(x) = x$, $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$;

$$f(x) = x, \quad g(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \quad x_0 = 0; \end{cases}$$

б) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$;

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = |x| + 1, \quad x_0 = 0.$$

9. Найти $f'(0)$, если $f(x) = x(x+1)\dots(x+1\ 234\ 567)$.

10. Выразить дифференциал d^3y от сложной функции $y = y[u(x)]$ через производные от функции $y(u)$ и дифференциалы от функции $u(x)$.

11. Пусть $y(x)$ и $x(y)$ дважды дифференцируемые взаимно обратные функции. Выразить x'' через y' и y'' .

Расчетные задания

Задача 1. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$.

$$1.1. f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x^3 + x^2 \sin \frac{2}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.2. f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(x^2 \cos \frac{1}{9x}\right) + \frac{2}{3}x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.3. f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x \cos \frac{1}{5x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.4. f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \sin\left(x^3 \sin \frac{1}{x}\right)\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.5. f(x) = \begin{cases} \sin\left(x \sin \frac{3}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.6. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + \ln\left(1 + x^2 \sin \frac{1}{x}\right)^2} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.7. f(x) = \begin{cases} \sin\left(e^{x^2 \sin \frac{5}{x}} - 1\right) + x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.8. f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{4}{3x} + \frac{x^2}{2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.9. f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x^3 - x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{3x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.10. f(x) = \begin{cases} \sin x \cos \frac{5}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.11. f(x) = \begin{cases} x + \arcsin\left(x^2 \sin \frac{6}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.12. f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(2x^2 \cos(1/8x) - 1 + x), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.13. f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x \cdot \sin \frac{7}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.14. f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \cos \frac{1}{9x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.15. f(x) = \begin{cases} x^2 \cos^2 \frac{11}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.17. f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$1.19. f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.21. f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{2}{x} - 1 + 2x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.22. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + \ln(1 + 3x^2 \cos(2/x))} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.23. f(x) = \begin{cases} e^{x \sin(3/5x)} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.24. f(x) = \begin{cases} \frac{2 \operatorname{tg} x - 2 \sin x}{x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.25. f(x) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{3x}{2} - x^2 \sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$1.26. f(x) = \begin{cases} e^{\sin\left(x^{3/2} \sin \frac{2}{x}\right)} - 1 + x^2, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.27. f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1 - 2x^3 \sin \frac{5}{x}} - 1 + x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.28. f(x) = \begin{cases} x^2 e^{|x| \sin \frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.29. f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + 2x^2 + x^3)}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.30. f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos 3x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.31. f(x) = \begin{cases} 1 - \cos\left(x \cdot \sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$2.2. y = 2x^2 + 3x - 1, x_0 = -2.$$

$$2.4. y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32, x_0 = 4.$$

Задача 2. Составить уравнение нормали (в вариантах 2.1 — 2.12) или уравнение касательной (в вариантах 2.13 — 2.31) к данной кривой в точке с абсциссой x_0 .

$$2.1. y = (4x - x^2)/4, x_0 = 2.$$

$$2.3. y = x - x^3, x_0 = -1.$$

2.5. $y = x + \sqrt{x^3}$, $x_0 = 1$.

2.7. $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$, $x_0 = 4$.

2.9. $y = 2x^2 - 3x + 1$, $x_0 = 1$.

2.11. $y = \sqrt{x - 3} \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 64$.

2.13. $y = 2x^2 + 3$, $x_0 = -1$.

2.15. $y = 2x + 1/x$, $x_0 = 1$.

2.17. $y = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$, $x_0 = 1$.

2.19. $y = 3(\sqrt[2]{x} - 2\sqrt{x})$, $x_0 = 1$.

2.21. $y = x/(x^2 + 1)$, $x_0 = -2$.

2.23. $y = 2x/(x^2 + 1)$, $x_0 = 1$.

2.25. $y = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2}$, $x_0 = 1$.

2.27. $y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

2.29. $y = x^2/10 + 3$, $x_0 = 2$.

2.31. $y = 6\sqrt[3]{x} - 16\sqrt[4]{x}/3$, $x_0 = 1$.

2.6. $y = \sqrt[3]{x^3} - 20$, $x_0 = -8$.

2.8. $y = 8\sqrt[4]{x} - 70$; $x_0 = 16$.

2.10. $y = (x^2 - 3x + 6)/x^2$, $x_0 = 3$.

2.12. $y = (x^3 + 2)/(x^2 - 2)$, $x_0 = 2$.

2.14. $y = \frac{x^{29} + 6}{x^4 + 1}$, $x_0 = 1$.

2.16. $y = -2(x^3 + 2)/(3(x^4 + 1))$, $x_0 = 1$.

2.18. $y = \frac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2}$, $x_0 = 1$.

2.20. $y = 1/(3x + 2)$, $x_0 = 2$.

2.22. $y = (x^2 - 3x + 3)/3$, $x_0 = 3$.

2.24. $y = -2(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x})$, $x_0 = 1$.

2.26. $y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2$, $x_0 = 1$.

2.28. $y = (3x - 2x^3)/3$, $x_0 = 1$.

2.30. $y = (x^2 - 2x - 3)/4$, $x_0 = 4$.

Задача 3. Найти дифференциал dy .

3.1. $y = x \arcsin(1/x) + \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|$, $x > 0$.

3.3. $y = \sqrt{1 + 2x} - \ln(x + \sqrt{1 + 2x})$.

3.5. $y = \arccos(1/\sqrt{1 + 2x^2})$, $x > 0$.

3.7. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + (\operatorname{sh} x) \ln \operatorname{ch} x$.

3.9. $y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$.

3.11. $y = \frac{\ln|x|}{1 + x^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1 + x^2}$.

3.13. $y = x\sqrt{4 - x^2} + 4 \arcsin(x/2)$.

3.15. $y = 2x + \ln|\sin x + 2 \cos x|$.

3.17. $y = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2x} \right|$.

3.19. $y = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x}$.

3.2. $y = \operatorname{tg}(2 \arccos \sqrt{1 - 2x^2})$, $x > 0$.

3.4. $y = x^2 \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}$.

3.6. $y = x \ln|x + \sqrt{x^2 + 3}| - \sqrt{x^2 + 3}$.

3.8. $y = \arccos((x^2 - 1)/(x^2 \sqrt{2}))$.

3.10. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} \operatorname{arctg} x$.

3.12. $y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1} + \operatorname{arcsin} e^{-x})$.

3.14. $y = \ln \operatorname{tg}(x/2) - x/\sin x$.

3.16. $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}/3$.

3.18. $y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}$.

3.20. $y = \ln|x^2 - 1| - \frac{1}{x^2 - 1}$.

3.21. $y = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right)$.

3.23. $y = \ln |\cos \sqrt{x}| + \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x}$.

3.25. $y = x (\sin \ln x - \cos \ln x)$.

3.27. $y = \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x - \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

3.29. $y = \sqrt{x} - (1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

3.31. $y = x \sqrt{x^2 - 1} + \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}|$.

3.22. $y = \ln |2x + 2\sqrt{x^2 + x} + 1|$.

3.24. $y = e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x)$.

3.26. $y = \left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2} \right) e^2 \sqrt{x-1}$.

3.28. $y = \sqrt{3+x^2} - x \ln |x + \sqrt{3+x^2}|$.

3.30. $y = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2}$.

Задача 4. Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

4.1. $y = \sqrt[3]{x}, x = 7,76$.

4.3. $y = (x + \sqrt{5-x^2})/2, x = 0,98$.

4.5. $y = \arcsin x, x = 0,08$.

4.7. $y = \sqrt[3]{x}, x = 26,46$.

4.9. $y = x^{11}, x = 1,021$.

4.11. $y = x^{21}, x = 0,998$.

4.13. $y = x^6, x = 2,01$.

4.15. $y = x^7, x = 1,996$.

4.17. $y = \sqrt{4x-1}, x = 2,56$.

4.19. $y = \sqrt[3]{x}, x = 8,36$.

4.21. $y = x^7, x = 2,002$.

4.23. $y = \sqrt{x^3}, x = 0,98$.

4.25. $y = \sqrt[3]{x^2}, x = 1,03$.

4.27. $y = \sqrt{1+x+\sin x}, x = 0,01$.

4.29. $y = \sqrt[4]{2x - \sin(\pi x/2)}, x = 1,02$.

4.31. $y = 1/\sqrt{2x+1}, x = 1,58$.

4.2. $y = \sqrt{x^3+7x}, x = 1,012$.

4.4. $y = \sqrt[3]{x}, x = 27,54$.

4.6. $y = \sqrt{x^2+2x+5}, x = 0,97$.

4.8. $y = \sqrt{x^2+x+3}, x = 1,97$.

4.10. $y = \sqrt[3]{x}, x = 1,21$.

4.12. $y = \sqrt{x^2}, x = 1,03$.

4.14. $y = \sqrt[3]{x}, x = 8,24$.

4.16. $y = \sqrt[3]{x}, x = 7,64$.

4.18. $y = 1/\sqrt{2x^2+x+1}, x = 1,016$.

4.20. $y = 1/\sqrt{x}, x = 4,16$.

4.22. $y = \sqrt{4x-3}, x = 1,78$.

4.24. $y = x^5, x = 2,997$.

4.26. $y = x^4, x = 3,998$.

4.28. $y = \sqrt[3]{3x+\cos x}, x = 0,01$.

4.30. $y = \sqrt{x^2+5}, x = 1,97$.

Задача 5. Найти производную.

5.1. $y = \frac{2(3x^3+4x^2-x-2)}{15\sqrt{1+x}}$.

5.3. $y = \frac{x^4-8x^2}{2(x^2-4)}$.

5.2. $y = \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$.

5.4. $y = \frac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$.

$$5.5. y = \frac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$$

$$5.7. y = \frac{(x^2-6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}$$

$$5.9. y = \frac{4+3x^2}{x^2\sqrt{(2+x^2)^2}}$$

$$5.11. y = \frac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$$

$$5.13. y = \frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$$

$$5.15. y = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$$

$$5.17. y = \frac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$$

$$5.19. y = \frac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$$

$$5.21. y = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$$

$$5.23. y = \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$$

$$5.25. y = 3\sqrt[3]{(x+1)/(x-1)^2}$$

$$5.27. y = (x\sqrt{x+1})/(x^2+x+1)$$

$$5.29. y = ((x+3)\sqrt{2x-1})/(2x+7)$$

$$5.31. y = (3x^6+4x^4-x^2-2)/(15\sqrt{1+x^2})$$

$$5.6. y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$$

$$5.8. y = \frac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$$

$$5.10. y = \sqrt[3]{\frac{(1+x^{3/4})^2}{x^{3/2}}}$$

$$5.12. y = \frac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$$

$$5.14. y = \frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$$

$$5.16. y = \frac{128-8x^3-x^6}{\sqrt{8-x^3}}$$

$$5.18. y = (1-x^2)^5 \sqrt{x^3 + \frac{1}{x}}$$

$$5.20. y = \frac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$$

$$5.22. y = 2 \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$$

$$5.24. y = 3 \sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{x+1}}$$

$$5.26. y = (x+7)/(6\sqrt{x^2+2x+7})$$

$$5.28. y = (x^2+2)/(2\sqrt{1-x^4})$$

$$5.30. y = (3x+\sqrt{x})/(\sqrt{x^2+2})$$

Задача 6. Найти производную.

$$6.1. y = x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1})$$

$$6.2. y = e^{2x}(2 - \sin 2x - \cos 2x)/8$$

$$6.3. y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2}$$

$$6.5. y = 2\sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1}$$

$$6.7. y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - 2 \operatorname{arctg} e^x$$

$$6.9. y = 2(\sqrt{2^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{2^x - 1})/\ln 2$$

$$6.4. y = \frac{1}{\ln 4} \ln \frac{1+2^x}{1-2^x}$$

$$6.6. y = \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3}$$

$$6.8. y = \ln(e^x + 1) + \frac{18e^{2x} + 27e^x + 11}{6(e^x + 1)^3}$$

$$6.10. y = 2(x-2)\sqrt{1+e^x} - 2\ln\left(\frac{(\sqrt{1+e^x}-1)/(\sqrt{1+e^x}+1)}{1}\right).$$

$$6.11. y = e^{\alpha x} (\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x) / (\alpha^2 + \beta^2).$$

$$6.12. y = e^{\alpha x} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) / (\alpha^2 + \beta^2).$$

$$6.13. y = e^{\alpha x} \left[\frac{1}{2a} + \frac{a \cos 2bx + 2b \sin 2bx}{2(a^2 + 4b^2)} \right].$$

$$6.14. y = x + 1/(1+e^x) - \ln(1+e^x).$$

$$6.15. y = x - 3\ln[(1+e^{x/6})\sqrt{1+e^{x/3}}] - 3\operatorname{arctg} e^{x/6}.$$

$$6.16. y = x + \frac{8}{1+e^{x/4}}.$$

$$6.17. y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) + \arcsin e^{-x}.$$

$$6.18. y = x - e^{-x} \arcsin e^x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{2x}}).$$

$$6.19. y = x - \ln(1+e^x) - 2e^{-x/2} \operatorname{arctg} e^{x/2} - (\operatorname{arctg} e^{x/2})^2.$$

$$6.20. y = \frac{e^{x^2}}{1+x^2}.$$

$$6.21. y = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \left(e^{mx} \sqrt{\frac{a}{b}} \right).$$

$$6.22. y = 3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{x} + 2).$$

$$6.23. y = \ln \frac{\sqrt{1+e^x+e^{2x}} - e^x - 1}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}} - e^x + 1}.$$

$$6.24. y = e^{\sin x} \left(x - \frac{1}{\cos x} \right).$$

$$6.25. y = \frac{e^x}{2} [(x^2-1)\cos x + (x-1)^2 \sin x].$$

$$6.26. y = \operatorname{arctg}(e^x - e^{-x}).$$

$$6.27. y = 3e^{\sqrt[3]{x}} [2\sqrt[3]{x^3} - 5\sqrt[3]{x^2} + 20x - 60\sqrt[3]{x^2} + 120\sqrt[3]{x} - 120].$$

$$6.28. y = -e^{3x}/(3\ln^3 x).$$

$$6.29. y = \arcsin e^x - \sqrt{1 - e^{2x}}.$$

$$6.30. y = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^4 + 2x^2 + 2).$$

$$6.31. y = e^{x^2}/(1+x^2).$$

Задача 7. Найти производную.

$$7.1. y = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}) - \sqrt{x+a}.$$

$$7.2. y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}).$$

$$7.3. y = 2\sqrt{x} - 4\ln(2 + \sqrt{x}).$$

$$7.4. y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}.$$

$$7.5. y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}).$$

$$7.6. y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}.$$

$$7.7. y = \ln^2(x + \cos x).$$

$$7.8. y = \ln^3(1 + \cos x).$$

$$7.9. y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}.$$

$$7.10. y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right).$$

$$7.11. y = \ln \sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}.$$

$$7.12. y = x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right) + a^{\pi\sqrt{x}}.$$

$$7.13. y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}.$$

$$7.15. y = \log_4 \log_2 \operatorname{tg} x.$$

$$7.17. y = \ln \cos \frac{2x+3}{2x+1}.$$

$$7.19. y = \log_a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$7.21. y = \ln \arcsin \sqrt{1-e^{2x}}.$$

$$7.23. y = \ln (bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}).$$

$$7.25. y = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

$$7.27. y = \ln \frac{\sqrt{5} + \operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{5} - \operatorname{tg}(x/2)}.$$

$$7.29. y = \ln \ln \sin(1+1/x).$$

$$7.31. y = \ln \ln^2 \ln^3 x.$$

$$7.14. y = \log_{16} \log_3 \operatorname{tg} x.$$

$$7.16. y = x(\cos \ln x + \sin \ln x)/2.$$

$$7.18. = \lg \ln \operatorname{ctg} x.$$

$$7.20. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} \operatorname{tg} x + \sqrt{1+2 \operatorname{tg}^2 x}).$$

$$7.22. y = \ln \arccos \sqrt{1-e^{4x}}.$$

$$7.24. y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} + x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{2}}.$$

$$7.26. y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}).$$

$$7.28. y = \ln \frac{\ln x}{\sin(1/x)}.$$

$$7.30. y = \ln \ln^3 \ln^2 x.$$

Задача 8. Найти производную.

$$8.1. y = \sin \sqrt{3} + \frac{1}{3} \frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}.$$

$$8.3. y = \operatorname{tg} \lg \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \frac{\sin^2 4x}{\cos 8x}.$$

$$8.5. y = \frac{\cos \sin 5 \cdot \sin^2 2x}{2 \cos 4x}.$$

$$8.7. y = \frac{\cos \ln 7 \cdot \sin^2 7x}{7 \cos 14x}.$$

$$8.9. y = \operatorname{ctg} \cos 2 + \frac{1}{6} \frac{\sin^2 6x}{\cos 12x}.$$

$$8.11. y = \frac{1}{3} \cos \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \frac{\sin^2 10x}{\cos 20x}.$$

$$8.13. y = 8 \sin \operatorname{ctg} 3 + \frac{1}{5} \frac{\sin^2 5x}{\cos 10x}.$$

$$8.15. y = \frac{\cos \operatorname{tg}(1/3) \cdot \sin^2 15x}{15 \cos 30x}.$$

$$8.17. y = \frac{\operatorname{ctg} \sin(1/3) \cdot \sin^2 17x}{17 \cos 34x}.$$

$$8.19. y = \frac{\operatorname{tg} \ln 2 \cdot \sin^2 19x}{19 \cos 38x}.$$

$$8.2. y = \cos \ln 2 - \frac{1}{3} \frac{\cos^2 3x}{\sin 6x}.$$

$$8.4. y = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5} - \frac{1}{8} \frac{\cos^2 4x}{\sin 8x}.$$

$$8.6. y = \frac{\sin \cos 3 \cdot \cos^2 2x}{4 \sin 4x}.$$

$$8.8. y = \cos \operatorname{ctg} 2 - \frac{1}{16} \frac{\cos^2 8x}{\sin 16x}.$$

$$8.10. y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2} - \frac{1}{20} \frac{\cos^2 10x}{\sin 20x}.$$

$$8.12. y = \ln \sin \frac{1}{2} - \frac{1}{24} \frac{\cos^2 12x}{\sin 24x}.$$

$$8.14. y = \frac{\cos \operatorname{ctg} 3 \cdot \cos^2 14x}{28 \sin 28x}.$$

$$8.16. y = \frac{\sin \operatorname{tg}(1/7) \cdot \cos^2 16x}{32 \sin 32x}.$$

$$8.18. y = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2} \cdot \cos^2 18x}{36 \sin 36x}.$$

$$8.20. y = \operatorname{ctg} \cos 5 - \frac{1}{40} \frac{\cos^2 20x}{\sin 40x}.$$

$$8.21. y = \sqrt{\operatorname{tg} 4} + \frac{\sin^2 21x}{21 \cos 42x}$$

$$8.23. y = \ln \cos \frac{1}{3} + \frac{\sin^2 23x}{23 \cos 46x}$$

$$8.25. y = \sin \ln \frac{1}{2} + \frac{\sin^2 25x}{25 \cos 50x}$$

$$8.27. y = \sqrt{\operatorname{tg} \cos 2} + \frac{\sin^2 27x}{27 \cos 54x}$$

$$8.29. y = \cos^2 \sin 3 + \frac{\sin^2 29x}{29 \cos 58x}$$

$$8.31. y = \operatorname{tg} \sqrt{\cos(1/3)} + \frac{\sin^2 31x}{31 \cos 62x}$$

$$8.22. y = \cos \ln 13 - \frac{1 \cos^2 22x}{44 \sin 44x}$$

$$8.24. y = \operatorname{ctg} \sin \frac{1}{13} - \frac{1 \cos^2 24x}{48 \sin 48x}$$

$$8.26. y = \sqrt[3]{\cos \sqrt{2}} - \frac{1 \cos^2 26x}{52 \sin 52x}$$

$$8.28. y = \sin^2 \sqrt{\operatorname{tg} 2} - \frac{\cos^2 28x}{56 \sin 56x}$$

$$8.30. y = \sin^3 \cos 2 - \frac{\cos^2 30x}{60 \sin 60x}$$

Задача 9. Найти производную.

$$9.1. y = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}}$$

$$9.2. y = \arcsin \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{5x}}$$

$$9.3. y = \frac{2x-1}{4} \sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8} \arcsin \frac{2x-1}{3}$$

$$9.4. y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

$$9.5. y = \arccos \frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$$

$$9.6. y = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{6x}}$$

$$9.7. y = \frac{1}{4} \ln \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$$

$$9.8. y = (x-4) \sqrt{8x-x^2-7} / 2 - 9 \arccos \sqrt{(x-1)/6}$$

$$9.9. y = \frac{(1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{3x\sqrt{x}}$$

$$9.10. y = \frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{2+x^2}{9} \sqrt{1-x^2}$$

$$9.11. y = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1+x}{2x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}$$

$$9.12. y = \frac{3+x}{2} \sqrt{x(2-x)} + 3 \arccos \sqrt{\frac{x}{2}}$$

$$9.13. y = \frac{4+x^4}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x}$$

$$9.14. y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x}$$

$$9.15. y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x^2}-1} - \frac{\arccos x}{2x^2}$$

$$9.16. y = 6 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{6+x}{2} \sqrt{x(4-x)}$$

$$9.17. y = \frac{x-3}{2} \sqrt{6x-x^2-8} + \arcsin \sqrt{\frac{x}{2}} - 1$$

$$9.18. y = \frac{(1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x-\sqrt{x}}}{x}$$

$$9.19. y = \frac{2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x}}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$9.20. y = \frac{2x-5}{4} \sqrt{5x-4-x^2} + \frac{9}{4} \arcsin \sqrt{\frac{x-1}{3}}$$

$$9.21. y = \operatorname{arctg} x + \frac{5}{6} \ln \frac{x^2+1}{x^2+4}$$

$$9.22. y = \arcsin \frac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}$$

9.23. $y = \sqrt{1-x^2} - x \arcsin \sqrt{1-x^2}$.

9.24. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{2}$.

9.25. $y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}$.

9.26. $y = (2x^2 + 6x + 5) \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x+2} - x$.

9.27. $y = \frac{x}{2\sqrt{1-4x^2}} \arcsin 2x + \frac{1}{8} \ln(1-4x^2)$.

9.28. $y = \left(2x^2 - x + \frac{1}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} - \frac{x^3}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} x$.

9.29. $y = (x+2\sqrt{x+2}) \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}\right) - \sqrt{x}$.

9.30. $y = \sqrt{1+2x-x^2} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1+x} - \sqrt{2} \ln(1+x)$.

9.31. $y = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)+1}{2}$.

Задача 10. Найти производную.

10.1. $y = \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \frac{2+\sqrt{5}\operatorname{th} x}{2-\sqrt{5}\operatorname{th} x}$.

10.2. $y = \frac{\operatorname{sh} x}{4\operatorname{ch}^4 x} + \frac{3\operatorname{sh} x}{8\operatorname{ch}^2 x} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)$.

10.3. $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{\operatorname{th} x}}{1-\sqrt{\operatorname{th} x}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{th} x}$.

10.4. $y = \frac{3}{8\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2+\operatorname{th} x}}{\sqrt{2-\operatorname{th} x}} - \frac{\operatorname{th} x}{4(2-\operatorname{th}^2 x)}$.

10.5. $y = \frac{1}{2} \operatorname{th} x + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1+\sqrt{2}\operatorname{th} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th} x}$.

10.6. $y = \left(-\frac{1}{2} \ln \operatorname{th} \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x}\right)$.

10.7. $y = \frac{1}{2a\sqrt{1+a^2}} \ln \frac{a+\sqrt{1+a^2}\operatorname{th} x}{a-\sqrt{1+a^2}\operatorname{th} x}$.

10.8. $y = \frac{1}{18\sqrt{2}} \ln \frac{1+\sqrt{2}\operatorname{cth} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{cth} x}$.

10.9. $y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}$.

10.10. $y = \frac{1}{6} \ln \frac{1-\operatorname{sh} 2x}{2+\operatorname{sh} 2x}$.

10.11. $y = 4 \sqrt{\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}$.

10.12. $y = \frac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}$.

10.13. $y = \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}}$.

10.14. $y = \frac{\operatorname{sh} 3x}{\sqrt{\operatorname{ch} 6x}}$.

10.15. $y = \frac{1+8\operatorname{ch}^2 x \ln \operatorname{ch} x}{2\operatorname{ch}^2 x}$.

10.16. $y = -\frac{12\operatorname{sh}^2 x + 1}{3\operatorname{sh}^3 x}$.

10.17. $y = -\frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} + \frac{3}{2} \arcsin(\operatorname{th} x)$.

10.18. $y = \frac{1}{\sqrt{8}} \arcsin \frac{3+\operatorname{ch} x}{1+3\operatorname{ch} x}$.

10.19. $y = \frac{1}{\sqrt{8}} \ln \frac{4+\sqrt{8}\operatorname{th} \frac{x}{2}}{4-\sqrt{8}\operatorname{th} \frac{x}{2}}$.

10.20. $y = \left[\frac{1}{4} \ln \left|\operatorname{th} \frac{x}{2}\right| - \frac{1}{4} \ln \frac{3+\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right]$.

$$10.21. y = -\frac{1}{4} \arcsin \frac{5+3 \operatorname{ch} x}{3+5 \operatorname{ch} x}$$

$$10.22. y = \frac{1-8 \operatorname{ch}^2 x}{4 \operatorname{ch}^4 x}$$

$$10.23. y = \frac{2}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{3 \operatorname{sh}^3 x} + \frac{\operatorname{sh} x}{2 \operatorname{ch}^2 x} + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \operatorname{sh} x$$

$$10.24. y = \frac{8}{3} \operatorname{cth} 2x - \frac{1}{3 \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh}^3 x}$$

$$10.25. y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) - \frac{\operatorname{sh} x}{2 \operatorname{ch}^2 x}$$

$$10.26. y = \frac{3}{2} \ln \operatorname{th} \frac{x}{2} + \operatorname{ch} x - \frac{\operatorname{ch} x}{2 \operatorname{sh}^2 x}$$

$$10.27. y = -\frac{\operatorname{sh} x}{2 \operatorname{ch}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \operatorname{sh} x$$

$$10.28. y = \frac{\operatorname{sh} x}{2 \operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)$$

$$10.29. y = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} + \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) \right]$$

$$10.30. y = -\frac{\operatorname{ch} x}{2 \operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{2} \ln \operatorname{th} \frac{x}{2}$$

$$10.31. y = \frac{2}{3} \operatorname{cth} x - \frac{\operatorname{ch} x}{3 \operatorname{sh}^3 x}$$

Задача 11. Найти производную.

$$11.1. y = (\operatorname{arctg} x)^{(1/2) \ln \operatorname{arctg} x}$$

$$11.2. y = (\sin \sqrt{x})^{\ln \sin \sqrt{x}}$$

$$11.3. y = (\sin x)^{5e^x}$$

$$11.4. y = (\arcsin x)^{e^x}$$

$$11.5. y = (\ln x)^{3^x}$$

$$11.6. y = x^{\arcsin x}$$

$$11.7. y = (\operatorname{ctg} 3x)^{2e^x}$$

$$11.8. y = x^{e^{\operatorname{ctg} x}}$$

$$11.9. y = (\operatorname{tg} x)^{4e^x}$$

$$11.10. y = (\cos 5x)^{e^x}$$

$$11.11. y = (x \sin x)^{8 \ln(x \sin x)}$$

$$11.12. y = (x-5)^{\operatorname{ch} x}$$

$$11.13. y = (x^3+4)^{\operatorname{tg} x}$$

$$11.14. y = x^{\sin x^2}$$

$$11.15. y = (x^2-1)^{\operatorname{sh} x}$$

$$11.16. y = (x^4+5)^{\operatorname{ctg} x}$$

$$11.17. y = (\sin x)^{5x/2}$$

$$11.18. y = (x^2+1)^{\cos x}$$

$$11.19. y = 19^{x^{19}} x^{19}$$

$$11.20. y = x^{3^x} \cdot 2^x$$

$$11.21. y = (\sin \sqrt{x})^{e^{1/x}}$$

$$11.22. y = x^{e^{\operatorname{ctg} x}}$$

$$11.23. y = x^{e^{\cos x}}$$

$$11.24. y = x^{2^x} \cdot 5^x$$

$$11.25. y = x^{e^{\sin x}}$$

$$11.26. y = (\operatorname{tg} x)^{(\ln \operatorname{tg} x)/4}$$

$$11.27. y = x^{e^{\operatorname{arctg} x}}$$

$$11.28. y = (x^9+1)^{\operatorname{th} x}$$

$$11.29. y = x^{29^x} \cdot 29^x$$

$$11.30. y = (\cos 2x)^{(\ln \cos 2x)/4}$$

$$11.31. y = x^{e^x} x^9$$

Задача 12. Найти производную.

$$12.1. y = \frac{1}{24} (x^2+8) \sqrt{x^2-4} + \frac{x^4}{16} \arcsin \frac{2}{x}, x > 0.$$

$$12.2. y = \frac{4x+1}{16x^2+8x+3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{4x+1}{\sqrt{2}}$$

$$12.3. y = 2x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{4x}}) - e^{-2x} \arcsin(e^{2x})$$

$$12.4. y = \sqrt{9x^2 - 12x + 5} \operatorname{arctg}(3x-2) - \ln(3x-2 + \sqrt{9x^2 - 12x + 5})$$

- 12.5. $y = \frac{2}{x-1} \sqrt{2x-x^2} + \ln \frac{1+\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$.
- 12.6. $y = \frac{x^4}{81} \arcsin \frac{3}{x} + \frac{1}{81} (x^2+18) \sqrt{x^2-9}, x > 0$.
- 12.7. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3x-1}{3x^2-2x+1}$.
- 12.8. $y = 3x - \ln(1 + \sqrt{1-e^{6x}}) - e^{-3x} \arcsin(e^{3x})$.
- 12.9. $y = \ln(4x-1 + \sqrt{16x^2-8x+2}) - \sqrt{16x^2-8x+2} \cdot \operatorname{arctg}(4x-1)$.
- 12.10. $y = \ln \frac{1+2\sqrt{-x-x^2}}{2x+1} + \frac{4}{2x+1} \sqrt{-x-x^2}$.
- 12.11. $y = (2x+3)^4 \cdot \arcsin \frac{1}{2x+3} + \frac{2}{3} (4x^2+12x+11) \sqrt{x^2+3x+2}, 2x+3 > 0$.
- 12.12. $y = \frac{x+2}{x^2+4x+6} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{2}}$.
- 12.13. $y = 5x - \ln(1 + \sqrt{1-e^{10x}}) - e^{-5x} \arcsin(e^{5x})$.
- 12.14. $y = \sqrt{x^2-8x+17} \operatorname{arctg}(x-4) - \ln(x-4 + \sqrt{x^2-8x+17})$.
- 12.15. $y = \ln \frac{1+\sqrt{-3+4x-x^2}}{2-x} + \frac{2}{2-x} \sqrt{-3+4x-x^2}$.
- 12.16. $y = (3x^2-4x+2) \sqrt{9x^2-12x+3} + (3x-2)^4 \arcsin \frac{1}{3x-2}, 3x-2 > 0$.
- 12.17. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{x-1}{x^2-2x+3}$.
- 12.18. $y = \ln(e^{5x} + \sqrt{e^{10x}-1}) + \arcsin(e^{-5x})$.
- 12.19. $y = \ln(2x-3 + \sqrt{4x^2-12x+10}) - \sqrt{4x^2-12x+10} \operatorname{arctg}(2x-3)$.
- 12.20. $y = \ln \frac{1+\sqrt{-3-4x-x^2}}{-x-2} - \frac{2}{x+2} \sqrt{-3-4x-x^2}$.
- 12.21. $y = \frac{2}{3} (4x^2-4x+3) \sqrt{x^2-x} + (2x-1)^4 \arcsin \frac{1}{2x-1}, 2x-1 > 0$.
- 12.22. $y = \frac{2x-1}{4x^2-4x+3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{2}}$.
- 12.23. $y = \arcsin e^{-4x} + \ln(e^{4x} + \sqrt{e^{8x}-1})$.
- 12.24. $y = \ln(5x + \sqrt{25x^2+1}) - \sqrt{25x^2+1} \operatorname{arctg} 5x$.
- 12.25. $y = \frac{2}{3x-2} \sqrt{-3+12x-9x^2} + \ln \frac{1+\sqrt{-3+12x-9x^2}}{3x-2}$.
- 12.26. $y = (3x+1)^4 \arcsin \frac{1}{3x+1} + (3x^2+2x+1) \sqrt{9x^2+6x}, 3x+1 > 0$.

$$12.27. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{2}} + \frac{2x+1}{4x^2+4x+3}.$$

$$12.28. y = \ln(e^{3x} + \sqrt{e^{6x}-1}) + \operatorname{arcsin} e^{-3x}.$$

$$12.29. y = \sqrt{49x^2+1} \operatorname{arctg} 7x - \ln(7x + \sqrt{49x^2+1}).$$

$$12.30. y = \frac{1}{x} \sqrt{1-4x^2} + \ln \frac{1 + \sqrt{1-4x^2}}{2x}.$$

$$12.31. y = \operatorname{arcsin} e^{-2x} + \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x}-1}).$$

Задача 13. Найти производную.

$$13.1. y = \frac{x \operatorname{arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2}.$$

$$13.2. y = 4 \ln \frac{x}{1 + \sqrt{1-4x^2}} - \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2}.$$

$$13.3. y = x(2x^2+5)\sqrt{x^2+1} + 3 \ln(x + \sqrt{x^2+1}). \quad 13.4. y = x^3 \operatorname{arcsin} x + \frac{x^2+2}{3} \sqrt{1-x^2}.$$

$$13.5. y = 3 \operatorname{arcsin} \frac{3}{4x+1} + 2\sqrt{4x^2+2x-2}, \quad 4x+1 > 0.$$

$$13.6. y = \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$13.7. y = 2 \operatorname{arcsin} \frac{2}{3x+4} + \sqrt{9x^2+24x+12}, \quad 3x+4 > 0.$$

$$13.8. y = x(2x^2+1)\sqrt{x^2+1} - \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

$$13.9. y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

$$13.10. y = \sqrt{1-3x-2x^2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} \frac{4x+3}{\sqrt{17}}.$$

$$13.11. y = \sqrt{(4+x)(1+x)} + 3 \ln(\sqrt{4+x} + \sqrt{1+x}).$$

$$13.12. y = \ln \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$13.13. y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}.$$

$$13.14. y = 4 \operatorname{arcsin} \frac{4}{2x+3} + \sqrt{4x^2+12x-7}, \quad 2x+3 > 0.$$

$$13.15. y = 2 \operatorname{arcsin} \frac{2}{3x+1} + \sqrt{9x^2+6x-3}, \quad 3x+1 > 0.$$

$$13.16. y = (2+3x)\sqrt{x-1} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}.$$

$$13.17. y = \frac{1}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + \ln(\sqrt{x+1}+1).$$

$$13.18. y = \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+1}.$$

$$13.19. y = \ln^3 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2-1} \right) \operatorname{arctg} x.$$

$$13.20. y = x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2} (\arcsin x - x).$$

$$13.21. y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$13.22. y = 3 \arcsin \frac{3}{x+2} + \sqrt{x^2+4x-5}.$$

$$13.23. y = \sqrt{(3-x)(2+x)} + 5 \arcsin \sqrt{(x+2)/5}.$$

$$13.24. y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x.$$

$$13.25. y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x.$$

$$13.26. y = x^3 \arccos x - \frac{x^2+2}{3} \sqrt{1-x^2}.$$

$$13.27. y = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{x^2+2}}{x}.$$

$$13.28. y = (x/4)(10-x^2)\sqrt{4-x^2} + 6 \arcsin(x/2).$$

$$13.29. y = \arcsin \frac{1}{2x+3} + 2\sqrt{x^2+3x+2}, \quad 2x+3 > 0.$$

$$13.30. y = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$13.31. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}.$$

Задача 14. Найти производную.

$$14.1. y = \frac{1}{\sin \alpha} \ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} \alpha).$$

$$14.2. y = x \cos \alpha + \sin \alpha \ln \sin(x-\alpha).$$

$$14.3. y = \frac{1}{2\sqrt{2}} [\sin \ln x - (\sqrt{2}-1) \cos \ln x] x^{\sqrt{2}+1}.$$

$$14.4. y = \operatorname{arctg}(\cos x / \sqrt{\cos 2x}).$$

$$14.5. y = 3 \frac{\sin x}{\cos^2 x} + 2 \frac{\sin x}{\cos^4 x}.$$

$$14.6. y = (a^2 + b^2)^{-1/2} \cdot \arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} \sin x}{b} \right), \quad b > 0.$$

$$14.7. y = \frac{7^x (3 \sin 3x + \cos 3x \cdot \ln 7)}{(9 + \ln^2 7)}.$$

$$14.8. y = \ln \frac{\sin x}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}}.$$

$$14.9. y = (1/(a(1+a^2))) [\operatorname{arctg}(a \cos x) + a \ln \operatorname{tg}(x/2)].$$

$$14.10. y = -\frac{1}{3 \sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

$$14.11. y = (1+x^2) e^{\operatorname{arctg} x}$$

$$14.13. y = \frac{1}{2 \sin(\alpha/2)} \operatorname{arctg} \frac{2x \sin \frac{\alpha}{2}}{1-x^2}$$

$$14.15. y = \frac{6^x (\sin 4x \ln 6 - 4 \cos 4x)}{16 + \ln^2 6}$$

$$14.17. y = \operatorname{arctg} \frac{2 \sin x}{\sqrt{9 \cos^2 x - 4}}$$

$$14.19. y = \ln \frac{\sqrt{2} + \operatorname{th} x}{\sqrt{2} - \operatorname{th} x}$$

$$14.21. y = \frac{4^x ((\ln 4) \sin 4x - 4 \cos 4x)}{16 + \ln^2 4}$$

$$14.23. y = \frac{5^x (\sin 3x \ln 5 - 3 \cos 3x)}{9 + \ln^2 5}$$

$$14.25. y = \frac{2^x (\sin x + \cos x \ln 2)}{1 + (\ln 2)^2}$$

$$14.27. y = 2 \frac{\cos x}{\sin^4 x} + 3 \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$14.29. y = \frac{3^x ((\ln 3) \sin 2x - 2 \cos 2x)}{\ln^2 3 + 4}$$

$$14.31. y = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2 \operatorname{tg} x + 1}}{\operatorname{tg} x - \sqrt{2 \operatorname{tg} x + 1}}}$$

$$14.12. y = \frac{\operatorname{ctg} x + x}{1 - x \operatorname{ctg} x}$$

$$14.14. y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\sqrt{x^4 + 1} - x^2}}{x}, x > 0.$$

$$14.16. y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2 \operatorname{tg} x}}{1 - \operatorname{tg} x}$$

$$14.18. y = \frac{5^x (2 \sin 2x + \cos 2x \ln 5)}{4 + \ln^2 5}$$

$$14.20. y = \frac{3^x (4 \sin 4x + \ln 3 \cos 4x)}{16 + \ln^2 3}$$

$$14.22. y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2 \cos x - 3 \operatorname{intg} \frac{x}{2}$$

$$14.24. y = x - \ln(1 + e^x) - 2e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}$$

$$14.26. y = \frac{\ln(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \alpha)}{\sin \alpha}$$

$$14.28. y = \frac{\cos x}{3(2 + \sin x)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg}(x/2) + 1}{\sqrt{3}}$$

$$14.30. y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} - \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{3 \cos^3 x}$$

Задача 15. Найти производную y'_x .

$$15.1. \begin{cases} x = \frac{3t^2 + 1}{3t^3}, \\ y = \sin(t^3/3 + t). \end{cases}$$

$$15.3. \begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = 1/\sqrt{(t-1)^2}. \end{cases}$$

$$15.5. \begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}), \\ y = t/\sqrt{t^2 + 1}. \end{cases}$$

$$15.7. \begin{cases} x = \operatorname{ctg}(2e^t), \\ y = \ln \operatorname{tge}^t. \end{cases}$$

$$15.2. \begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}, \\ y = \operatorname{tg} \sqrt{1 + t}. \end{cases}$$

$$15.4. \begin{cases} x = \arcsin(\sin t), \\ y = \arccos(\cos t). \end{cases}$$

$$15.6. \begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = \arcsin(t - 1). \end{cases}$$

$$15.8. \begin{cases} x = \ln \operatorname{ctg} t, \\ y = 1/\cos^2 t. \end{cases}$$

$$15.9. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} e^{t/2}, \\ y = \sqrt{e^t + 1}. \end{cases}$$

$$15.11. \begin{cases} x = \ln(1/\sqrt{1-t^2}), \\ y = \arcsin(1-t^2)/(1+t^2). \end{cases}$$

$$15.13. \begin{cases} x = \arcsin(\sqrt{1-t^2}), \\ y = (\arccos t)^2. \end{cases}$$

$$15.15. \begin{cases} x = (1 + \cos^2 t)^2, \\ y = \cos t / \sin^2 t. \end{cases}$$

$$15.17. \begin{cases} x = \arccos(1/t), \\ y = \sqrt{t^2 - 1} + \arcsin(1/t). \end{cases}$$

$$15.19. \begin{cases} x = \arcsin \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1 + \sqrt{t}}. \end{cases}$$

$$15.21. \begin{cases} x = t\sqrt{t^2 + 1}, \\ y = \ln \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$$

$$15.23. \begin{cases} x = \ln(1-t^2), \\ y = \arcsin \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

$$15.25. \begin{cases} x = \ln \sqrt{(1 - \sin t)/(1 + \sin t)}, \\ y = (1/2) \operatorname{tg}^2 t + \ln \cos t. \end{cases}$$

$$15.27. \begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} t, \\ y = 1/\sin^2 t. \end{cases}$$

$$15.29. \begin{cases} x = e^{\sec^2 t}, \\ y = \operatorname{tg} t \ln \cos t + \operatorname{tg} t - t. \end{cases}$$

$$15.31. \begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}), \\ y = \sqrt{1+t^2} - \ln \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$$

$$15.10. \begin{cases} x = \ln \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

$$15.12. \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = t/\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

$$15.14. \begin{cases} x = t/\sqrt{1-t^2}, \\ y = \ln(1 + \sqrt{1-t^2})/t. \end{cases}$$

$$15.16. \begin{cases} x = \ln((1-t)/(1+t)), \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

$$15.18. \begin{cases} x = 1/\ln t, \\ y = \ln \frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{t}. \end{cases}$$

$$15.20. \begin{cases} x = (\arcsin t)^2, \\ y = t/\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

$$15.22. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln \frac{\sqrt{1+t^2}}{t+1}. \end{cases}$$

$$15.24. \begin{cases} x = \operatorname{arctg}(t+1)/(t-1), \\ y = \arcsin \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

$$15.26. \begin{cases} x = \sqrt{t-t^2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-t}{t}}, \\ y = \sqrt{t} - \sqrt{1-t} \arcsin \sqrt{t}. \end{cases}$$

$$15.28. \begin{cases} x = \frac{t^2 \ln t}{1-t^2} + \ln \sqrt{1-t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t + \ln \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

$$15.30. \begin{cases} x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t + \ln \sqrt{1-t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$$

Задача 16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра $t=t_0$.

$$16.1. \begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t, \quad t_0 = \pi/3. \end{cases}$$

$$16.3. \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \quad t_0 = \pi/3. \end{cases}$$

$$16.5. \begin{cases} x = (2t + t^2)/(1 + t^2), \\ y = (2t - t^2)/(1 + t^2), \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$16.7. \begin{cases} x = t(t \cos t - 2 \sin t), \\ y = t(t \sin t + 2 \cos t), \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$$

$$16.9. \begin{cases} x = 2 \ln \operatorname{ctg} t + 1, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$$

$$16.11. \begin{cases} x = at \cos t, \\ y = at \sin t, \quad t_0 = \pi/2. \end{cases}$$

$$16.13. \begin{cases} x = \arcsin(t/\sqrt{1+t^2}), \\ y = \arccos(1/\sqrt{1+t^2}), \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$16.15. \begin{cases} x = (1+t)/t^2, \\ y = 3/(2t^2) + 2/t, \quad t_0 = 2. \end{cases}$$

$$16.17. \begin{cases} x = a(t \sin t + \cos t), \\ y = a(\sin t - t \cos t), \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$$

$$16.19. \begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3, \quad t_0 = 2. \end{cases}$$

$$16.21. \begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t \cos t, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$16.23. \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$$

$$16.25. \begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$16.27. \begin{cases} x = 2 \operatorname{tg} t, \\ y = 2 \sin^2 t + \sin 2t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$$

$$16.29. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = a^t, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$16.31. \begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t}, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$16.2. \begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t, \\ y = \sin t, \quad t_0 = \pi/3. \end{cases}$$

$$16.4. \begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$16.6. \begin{cases} x = \arcsin(t/\sqrt{1+t^2}), \\ y = \arccos(1/\sqrt{1+t^2}), \quad t_0 = -1. \end{cases}$$

$$16.8. \begin{cases} x = 3at/(1+t^2), \\ y = 3at^2/(1+t^2), \quad t_0 = 2. \end{cases}$$

$$16.10. \begin{cases} x = (1/2)t^2 - (1/4)t^4, \\ y = (1/2)t^2 + (1/3)t^3, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$16.12. \begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$$

$$16.14. \begin{cases} x = (1 + \ln t)/t^2, \\ y = (3 + 2 \ln t)/t, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$16.16. \begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$$

$$16.18. \begin{cases} x = (t+1)/t, \\ y = (t-1)/t, \quad t_0 = -1. \end{cases}$$

$$16.20. \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctg t, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$16.22. \begin{cases} x = (1+t^3)/(t^2-1), \\ y = t/(t^2-1), \quad t_0 = 2. \end{cases}$$

$$16.24. \begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$16.26. \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = \sin t, \quad t_0 = -\pi/3. \end{cases}$$

$$16.28. \begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \quad t_0 = -2. \end{cases}$$

$$16.30. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$$

Задача 17. Найти производную n -го порядка.

$$17.1. y = xe^{ax}.$$

$$17.2. y = \sin 2x + \cos(x+1).$$

$$17.3. y = \sqrt[2]{e^{\sqrt{x-1}}}.$$

$$17.4. y = (4x+7)/(2x+3).$$

17.5. $y = \lg(5x+2)$.

17.7. $y = x/(2(3x+2))$.

17.9. $y = \sqrt{x}$.

17.11. $y = 2^{3x+5}$.

17.13. $y = \sqrt[3]{e^{2x+1}}$.

17.15. $y = \lg(3x+1)$.

17.17. $y = x/(9(4x+9))$.

17.19. $y = 4/x$.

17.21. $y = a^{2x+3}$.

17.23. $y = \sqrt{e^{3x+1}}$.

17.25. $y = \lg(2x+7)$.

17.27. $y = x/(x+1)$.

17.29. $y = (1+x)/(1-x)$.

17.31. $y = 3^{2x+5}$.

17.6. $y = a^{3x}$.

17.8. $y = \lg(x+4)$.

17.10. $y = (2x+5)/(13(3x+1))$.

17.12. $y = \sin(x+1) + \cos 2x$.

17.14. $y = (4+15x)/(5x+1)$.

17.16. $y = 7^{5x}$.

17.18. $y = \lg(1+x)$.

17.20. $y = (5x+1)/(13(2x+3))$.

17.22. $y = \sin(3x+1) + \cos 5x$.

17.24. $y = (11+12x)/(6x+5)$.

17.26. $y = 2^{kx}$.

17.28. $y = \log_3(x+5)$.

17.30. $y = (7x+1)/(17(4x+3))$.

Задача 18. Найти производную указанного порядка.

18.1. $y = (2x^2 - 7) \ln(x-1)$, $y^V = ?$

18.3. $y = x \cos x^2$, $y^{\text{III}} = ?$

18.5. $y = \frac{\log_2 x}{x^3}$, $y^{\text{III}} = ?$

18.7. $y = x^2 \sin(5x-3)$, $y^{\text{III}} = ?$

18.9. $y = (2x+3) \ln^2 x$, $y^{\text{III}} = ?$

18.11. $y = (\ln x)/x^3$, $y^{\text{IV}} = ?$

18.13. $y = e^{1-2x} \cdot \sin(2+3x)$, $y^{\text{IV}} = ?$

18.15. $y = (2x^3+1) \cos x$, $y^V = ?$

18.17. $y = (1-x-x^2)e^{(x-1)/2}$, $y^{\text{IV}} = ?$

18.19. $y = (x+7) \ln(x+4)$, $y^V = ?$

18.21. $y = \frac{\ln(2x+5)}{2x+5}$, $y^{\text{III}} = ?$

18.23. $y = (\ln x)/x^5$, $y^{\text{III}} = ?$

18.25. $y = (x^2+3x+1)e^{3x+2}$, $y^V = ?$

18.27. $y = \frac{\ln(x-2)}{x-2}$, $y^V = ?$

18.29. $y = (5x-1) \ln^2 x$, $y^{\text{III}} = ?$

18.31. $y = (x^3+2)e^{4x+3}$, $y^{\text{IV}} = ?$

18.2. $y = (3-x^2) \ln^2 x$, $y^{\text{III}} = ?$

18.4. $y = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$, $y^{\text{III}} = ?$

18.6. $y = (4x^3+5)e^{2x+1}$, $y^V = ?$

18.8. $y = (\ln x)/x^2$, $y^{\text{IV}} = ?$

18.10. $y = (1+x^2) \arctg x$, $y^{\text{III}} = ?$

18.12. $y = (4x+3)2^{-x}$, $y^V = ?$

18.14. $y = \frac{\ln(3+x)}{3+x}$, $y^{\text{III}} = ?$

18.16. $y = (x^2+3) \ln(x-3)$, $y^{\text{IV}} = ?$

18.18. $y = (1/x) \sin 2x$, $y^{\text{III}} = ?$

18.20. $y = (3x-7)3^{-x}$, $y^{\text{IV}} = ?$

18.22. $y = e^{x/2} \sin 2x$, $y^{\text{IV}} = ?$

18.24. $y = x \ln(1-3x)$, $y^{\text{IV}} = ?$

18.26. $y = (5x-8) \cdot 2^{-x}$, $y^{\text{IV}} = ?$

18.28. $y = e^{-x}(\cos 2x - 3 \sin 2x)$, $y^{\text{IV}} = ?$

18.30. $y = \frac{\log_3 x}{x^2}$, $y^{\text{IV}} = ?$

Задача 19. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически.

$$19.1. \begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 2 \sec^2 t. \end{cases}$$

$$19.3. \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

$$19.5. \begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$$

$$19.7. \begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = 1/\sqrt{1-t}. \end{cases}$$

$$19.9. \begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = 1/\sin 2t. \end{cases}$$

$$19.11. \begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$$

$$19.13. \begin{cases} x = \sqrt{t^2-1}, \\ y = \ln t. \end{cases}$$

$$19.15. \begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = 1/\sqrt{t}. \end{cases}$$

$$19.17. \begin{cases} x = \sqrt{t-3}, \\ y = \ln(t-2). \end{cases}$$

$$19.19. \begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$$

$$19.21. \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$$

$$19.23. \begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$$

$$19.25. \begin{cases} x = \operatorname{ch} t, \\ y = \sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 t}. \end{cases}$$

$$19.27. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 4(2 + \cos t). \end{cases}$$

$$19.29. \begin{cases} x = 1/t^2, \\ y = 1/(t^2 + 1). \end{cases}$$

$$19.30. \begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$$

$$19.31. \begin{cases} x = \ln t, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

$$19.2. \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = 1/t. \end{cases}$$

$$19.4. \begin{cases} x = \operatorname{sh}^2 t, \\ y = 1/\operatorname{ch}^2 t. \end{cases}$$

$$19.6. \begin{cases} x = 1/t, \\ y = 1/(1+t^2). \end{cases}$$

$$19.8. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sec t. \end{cases}$$

$$19.10. \begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = t/\sqrt{t-1}. \end{cases}$$

$$19.12. \begin{cases} x = \cos t/(1+2 \cos t), \\ y = \sin t/(1+2 \cos t). \end{cases}$$

$$19.14. \begin{cases} x = \operatorname{sh} t, \\ y = \operatorname{th}^2 t. \end{cases}$$

$$19.16. \begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$$

$$19.18. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln \cos t. \end{cases}$$

$$19.20. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$$

$$19.22. \begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$$

$$19.24. \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4(t/2). \end{cases}$$

$$19.26. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = t^2/2. \end{cases}$$

$$19.28. \begin{cases} x = \sin t - t \cos t, \\ y = \cos t + t \sin t. \end{cases}$$

Задача 20. Показать, что функция y удовлетворяет уравнению (1).

$$20.1. y = xe^{-x^2/2},$$

$$xy' = (1-x^2)y. \quad (1)$$

$$20.2. y = \frac{\sin x}{x},$$

$$xy' + y = \cos x. \quad (1)$$

$$20.3. y = 5e^{-2x} + e^x/3, \\ y' + 2y = e^x. (1)$$

$$20.5. y = x\sqrt{1-x^2}, \\ yy' = x - 2x^3. (1)$$

$$20.7. y = -1/(3x+c), \\ y' = 3y^2. (1)$$

$$20.9. y = \sqrt{x^2 - cx}, \\ (x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0. (1)$$

$$20.11. y = e^{\operatorname{tg}(x/2)}, \\ y' \sin x = y \ln y. (1)$$

$$20.13. y = (b+x)/(1+bx), \\ y - xy' = b(1+x^2y). (1)$$

$$20.15. y = \sqrt{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2 + 1}, \\ (1+e^x)yy' = e^x. (1)$$

$$20.17. y = -\sqrt{\frac{2}{x^2} - 1}, \\ 1 + y^2 + xyy' = 0. (1)$$

$$20.19. y = a + 7x/(ax+1), \\ y - xy' = a(1+x^2y). (1)$$

$$20.21. y = \sqrt[4]{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}, \\ 8xy' - y = \frac{-1}{y^3\sqrt{x+1}}. (1)$$

$$20.23. y = \frac{2x}{x^3+1} + \frac{1}{x}, \\ x(x^3+1)y' + (2x^3-1)y = \frac{x^3-2}{x}. (1)$$

$$20.25. y = -x \cos x + 3x, \\ xy' = y + x^2 \sin x. (1)$$

$$20.27. y = x/(x-1) + x^2, \\ x(x-1)y' + y = x^2(2x-1). (1)$$

$$20.29. y = (x+1)^n(e^x-1), \\ y' - \frac{ny}{x+1} = e^x(1+x)^n. (1)$$

$$20.31. y = -\sqrt{x^4 - x^2}, \\ xyy' - y^2 = x^4. (1)$$

$$20.4. y = 2 + c\sqrt{1-x^2}, \\ (1-x^2)y' + xy = 2x. (1)$$

$$20.6. y = \frac{c}{\cos x}, \\ y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0. (1)$$

$$20.8. y = \ln(c + e^x), \\ y' = e^x - y. (1)$$

$$20.10. y = x(c - \ln x), \\ (x-y)dx + xdy = 0. (1)$$

$$20.12. y = (1+x)/(1-x), \\ y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}. (1)$$

$$20.14. y = \sqrt[3]{2+3x-3x^2}, \\ yy' = (1-2x)/y. (1)$$

$$20.16. y = \operatorname{tg} \ln 3x, \\ (1+y^2)dx = xdy. (1)$$

$$20.18. y = \sqrt[3]{x - \ln x - 1}, \\ \ln x + y^3 - 3xy^2y' = 0. (1)$$

$$20.20. y = a \operatorname{tg} \sqrt{\frac{a}{x} - 1}, \\ a^2 + y^2 + 2x\sqrt{ax - x^2}y' = 0. (1)$$

$$20.22. y = (x^2+1)e^{x^2}, \\ y' - 2xy = 2xe^{x^2}. (1)$$

$$20.24. y = e^{x+x^2} + 2e^x, \\ y' - y = 2xe^{x+x^2}. (1)$$

$$20.26. y = 1/\sqrt{\sin x + x}, \\ 2(\sin x)y' + y \cos x = -y^3(x \cos x - \sin x). (1)$$

$$20.28. y = x/\cos x, \\ y' - y \operatorname{tg} x = \sec x. (1)$$

$$20.30. y = 2\frac{\sin x}{x} + \cos x, \\ x(\sin x)y' + (\sin x - x \cos x)y = \sin x \cos x - x. (1)$$

III. ГРАФИКИ

Теоретические вопросы

1. Условия возрастания функции на отрезке.
2. Условия убывания функции на отрезке.
3. Точки экстремума. Необходимое условие экстремума.
4. Достаточные признаки максимума и минимума функции (изменение знака первой производной).
5. Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке.
6. Выпуклость и вогнутость графика функции. Достаточные условия выпуклости и вогнутости.
7. Точки перегиба графика функции. Необходимое условие перегиба. Достаточные условия перегиба.
8. Исследование функций на экстремум с помощью высших производных.
9. Асимптоты графика функции.

Теоретические упражнения

1. Доказать, что функция $f(x) = x - \sin x$ монотонно возрастает на отрезке: а) $[0, 2\pi]$; б) $[0, 4\pi]$. Следует ли из монотонности дифференцируемой функции монотонность ее производной?
2. Доказать теорему: если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a, b]$ и $\varphi'(x) > \psi'(x) \forall x \in (a, b)$, а $\varphi(a) = \psi(a)$, то $\varphi(x) > \psi(x) \forall x \in (a, b)$.

Дать геометрическую интерпретацию теоремы.

Указание. При доказательстве теоремы установить и использовать монотонность функции $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$.

3. Доказать неравенство $2x/\pi < \sin x$ для трех случаев:

а) $\forall x \in \left(0, \arccos \frac{2}{\pi}\right]$; б) $\forall x \in \left[\arccos \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Дать геометрическую интерпретацию неравенства.

4. Исходя из определений минимума и максимума, доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x=0$ минимум, а функция

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

не имеет в точке $x=0$ экстремума.

5. Исследовать на экстремум в точке x_0 функцию $f(x) =$

$= (x - x_0)^n \varphi(x)$, считая, что производная $\varphi'(x)$ не существует, но функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 и $\varphi(x_0) \neq 0$, n — натуральное число.

6. Исследовать знаки максимума и минимума функции $x^3 - 3x + q$ и выяснить условия, при которых уравнение $x^3 - 3x + q = 0$ имеет: а) три различных действительных корня; б) один действительный корень.

7. Определить «отклонение от нуля» многочлена $p(x) = 6x^3 - 27x^2 + 36x - 14$ на отрезке $[0, 3]$, т. е. найти на этом отрезке наибольшее значение функции $|p(x)|$.

8. Установить условия существования асимптот у графика рациональной функции.

Расчетные задания

Задача 1. Построить графики функций с помощью производной первого порядка.

1.1. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$.

1.3. $y = x^2(x - 2)^2$.

1.5. $y = 2 - 3x^2 - x^3$.

1.7. $y = 2x^3 - 3x^2 - 4$.

1.9. $y = (x - 1)^2(x - 3)^2$.

1.11. $y = 6x - 8x^3$.

1.13. $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$.

1.15. $y = (2x + 1)^2(2x - 1)^2$.

1.17. $y = 12x^2 - 8x^3 - 2$.

1.19. $y = 27(x^3 - x^2)/4 - 4$.

1.21. $y = x^2(x - 4)^2/16$.

1.23. $y = (16 - 6x^2 - x^3)/8$.

1.25. $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9$.

1.27. $y = -(x - 2)^2(x - 6)^2/16$.

1.29. $y = (11 + 9x - 3x^2 - x^3)/8$.

1.31. $y = 16x^3 + 12x^2 - 5$.

1.2. $y = 3x - x^3$.

1.4. $y = (x^3 - 9x^2)/4 + 6x - 9$.

1.6. $y = (x + 1)^2(x - 1)^2$.

1.8. $y = 3x^2 - 2 - x^3$.

1.10. $y = (x^3 + 3x^2)/4 - 5$.

1.12. $y = 16x^2(x - 1)^2$.

1.14. $y = 2 - 12x^2 - 8x^3$.

1.16. $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$.

1.18. $y = (2x - 1)^2(2x - 3)^2$.

1.20. $y = x(12 - x^2)/8$.

1.22. $y = 27(x^3 + x^2)/4 - 5$.

1.24. $y = -(x^2 - 4)^2/16$.

1.26. $y = (6x^2 - x^3 - 16)/8$.

1.28. $y = 16x^3 - 12x^2 - 4$.

1.30. $y = -(x + 1)^2(x - 3)^2/16$.

Задача 2. Построить графики функций с помощью производной первого порядка.

2.1. $y = 1 - \sqrt{x^2 - 2x}$.

2.3. $y = 12\sqrt{6(x - 2)^2} / (x^2 + 8)$.

2.5. $y = 1 - \sqrt{x^2 + 2x}$.

2.7. $y = 6\sqrt{6(x - 3)^2} / (x^2 - 2x + 9)$.

2.9. $y = 3\sqrt{(x - 3)^2} - 2x + 6$.

2.2. $y = 2x - 3\sqrt{x^2}$.

2.4. $y = -12\sqrt{6(x - 1)^2} / (x^2 + 2x + 9)$.

2.6. $y = 2x + 6 - 3\sqrt{(x + 3)^2}$.

2.8. $y = 1 - \sqrt{x^2 + 4x + 3}$.

2.10. $y = -6\sqrt{6x^2} / (x^2 + 4x + 12)$.

- 2.11. $y = 4x + 8 - 6\sqrt{(x+2)^2}$.
 2.12. $y = 3\sqrt{6(x-4)^2} / (x^2 - 4x + 12)$.
 2.13. $y = \sqrt{x(x+2)}$.
 2.14. $y = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$.
 2.15. $y = -3\sqrt{6(x+1)^2} / (x^2 + 6x + 17)$.
 2.16. $y = 6\sqrt{(x-2)^2} - 4x + 8$.
 2.17. $y = 3\sqrt{6(x-5)^2} / (x^2 - 6x + 17)$.
 2.18. $y = 2 + 3\sqrt{8x(x+2)}$.
 2.19. $y = 6x - 6 - 9\sqrt{(x-1)^2}$.
 2.20. $y = \sqrt{x^2 + 6x + 8}$.
 2.21. $y = \sqrt{4x(x-1)}$.
 2.22. $y = -3\sqrt{6(x+2)^2} / (x^2 + 8x + 24)$.
 2.23. $y = \sqrt{x(x-2)}$.
 2.24. $y = 1 - \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.
 2.25. $y = 9\sqrt{(x+1)^2} - 6x - 6$.
 2.26. $y = 6\sqrt{6(x+3)^2} / (x^2 + 10x + 33)$.
 2.27. $y = 8x - 16 - 12\sqrt{(x-2)^2}$.
 2.28. $y = -6\sqrt{6(x-6)^2} / (x^2 - 8x + 24)$.
 2.29. $y = 12\sqrt{(x+2)^2} - 8x - 16$.
 2.30. $y = 3\sqrt{6(x-1)^2} / (2(x^2 + 2x + 9))$.
 2.31. $y = 3\sqrt{(x+4)^2} - 2x - 8$.

Задача 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках.

- 3.1. $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$, [1, 4].
 3.2. $y = 4 - x - \frac{4}{x^2}$, [1, 4].
 3.3. $y = \sqrt{2(x-2)^2(8-x)} - 1$, [0, 6].
 3.4. $y = \frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$, [-3, 3].
 3.5. $y = 2\sqrt{x-x}$, [0, 4].
 3.6. $y = 1 + \sqrt{2(x-1)^2(x-7)}$, [-1, 5].
 3.7. $y = x - 4\sqrt{x+5}$, [1, 9].
 3.8. $y = 10x / (1+x^2)$, [0, 3].
 3.9. $y = \sqrt{2(x+1)^2(5-x)} - 2$, [-3, 3].
 3.10. $y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59$, [2, 4].
 3.11. $y = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}$, [-1, 2].
 3.12. $y = \sqrt{2x^2(x-3)}$, [-1, 6].
 3.13. $y = 2(-x^2+7x-7) / (x^2-2x+2)$, [1, 4].
 3.14. $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8$, [-1, 7].
 3.15. $y = \sqrt{2(x-2)^2(5-x)}$, [1, 5].
 3.16. $y = 4x / (4+x^2)$, [-4, 2].
 3.17. $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8$, [-4, -1].
 3.18. $y = \sqrt{2x^2(x-6)}$, [-2, 4].
 3.19. $y = \frac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$, [-2, 1].
 3.20. $y = \frac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}$, [-5, 1].
 3.21. $y = \sqrt{2(x-1)^2(x-4)}$, [0, 4].
 3.22. $y = x^2 - 2x + 16 / (x-1) - 13$, [2, 5].
 3.23. $y = 2\sqrt{x-1} - x + 2$, [1, 5].
 3.24. $y = \sqrt{2(x+2)^2(1-x)}$, [-3, 4].
 3.25. $y = -x^2/2 + 2x + 8 / (x-2) + 5$, [-2, 1].
 3.26. $y = 8x + 4/x^2 - 15$, [1/2, 2].
 3.27. $y = \sqrt{2(x+2)^2(x-4)} + 3$, [-4, 2].
 3.28. $y = x^2 + 4x + 16 / (x+2) - 9$, [-1, 2].
 3.29. $y = 4/x^2 - 8x - 15$, [-2, -1/2].
 3.30. $y = \sqrt{2(x+1)^2(x-2)}$, [-2, 5].
 3.31. $y = \frac{10x+10}{x^2+2x+2}$, [-1, 2].

Задача 4. Варианты 1 — 10

Рыбаку нужно переправиться с острова A на остров B (рис. 1). Чтобы пополнить свои запасы, он должен попасть на участок берега MN . Найти наикратчайший путь рыбака $s = s_1 + s_2$.

- 4.1. $a=200, b=300, H=400, h=300, L=700$.
 4.2. $a=400, b=600, H=800, h=600, L=1400$.
 4.3. $a=600, b=900, H=1200, h=900, L=2100$.
 4.4. $a=800, b=1200, H=1600, h=1200, L=2800$.
 4.5. $a=1000, b=1500, H=2000, h=1500, L=3500$.
 4.6. $a=400, b=500, H=300, h=400, L=700$.
 4.7. $a=800, b=1000, H=600, h=800, L=1400$.
 4.8. $a=1200, b=1500, H=900, h=1200, L=2100$.
 4.9. $a=1600, b=2000, H=1200, h=1600, L=2800$.
 4.10. $a=2000, b=2500, H=1500, h=2000, L=3500$.

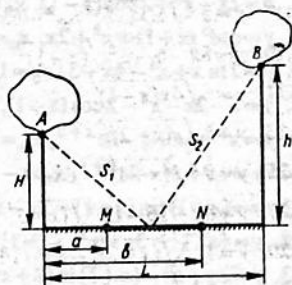


Рис. 1

Варианты 11 — 20

При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+k}$ -ю часть курса, а забывает αt -ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

- 4.11. $k=1/2, \alpha=2/49$.
 4.12. $k=1/2, \alpha=2/81$.
 4.13. $k=1/2, \alpha=2/121$.
 4.14. $k=1/2, \alpha=2/169$.
 4.15. $k=1, \alpha=1/25$.
 4.16. $k=1, \alpha=1/16$.
 4.17. $k=1, \alpha=1/36$.
 4.18. $k=1, \alpha=1/49$.
 4.19. $k=2, \alpha=1/18$.
 4.20. $k=2, \alpha=2/49$.

Варианты 21 — 31

Тело массой $m_0 = 3000$ кг падает с высоты H м и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности $k = 100$ кг/с. Считая, что начальная скорость $v_0 = 0$, ускорение $g = 10$ м/с², и пренебрегая сопротивлением воздуха, найти наибольшую кинетическую энергию тела.

- 4.21. $H=500$.
 4.22. $H=605$.
 4.23. $H=720$.
 4.24. $H=845$.
 4.25. $H=980$.
 4.26. $H=1125$.
 4.27. $H=1280$.
 4.28. $H=1445$.
 4.29. $H=1620$.
 4.30. $H=1805$.
 4.31. $H=2000$.

Задача 5. Исследовать поведение функций в окрестностях заданных точек с помощью производных высших порядков.

- 5.1. $y = x^2 - 4x - (x-2)\ln(x-1), x_0 = 2$.

- 5.2. $y=4x-x^2-2\cos(x-2)$, $x_0=2$.
 5.3. $y=6e^{x-2}-x^3+3x^2-6x$, $x_0=2$.
 5.4. $y=2\ln(x+1)-2x+x^2+1$, $x_0=0$.
 5.5. $y=2x-x^2-2\cos(x-1)$, $x_0=1$.
 5.6. $y=\cos^2(x+1)+x^2+2x$, $x_0=-1$.
 5.7. $y=2\ln x+x^2-4x+3$, $x_0=1$.
 5.8. $y=1-2x-x^2-2\cos(x+1)$, $x_0=-1$.
 5.9. $y=x^2+6x+8-2e^{x+2}$, $x_0=-2$.
 5.10. $y=4x+x^2-2e^{x+1}$, $x_0=-1$.
 5.11. $y=(x+1)\sin(x+1)-2x-x^2$, $x_0=-1$.
 5.12. $y=6e^{x-1}-3x-x^3$, $x_0=1$.
 5.13. $y=2x+x^2-(x+1)\ln(2+x)$, $x_0=-1$.
 5.14. $y=\sin^2(x+1)-2x-x^2$, $x_0=-1$.
 5.15. $y=x^2+4x+\cos^2(x+2)$, $x_0=-2$.
 5.16. $y=x^2+2\ln(x+2)$, $x_0=-1$.
 5.17. $y=4x-x^2+(x-2)\sin(x-2)$, $x_0=2$.
 5.18. $y=6e^x-x^3-3x^2-6x-5$, $x_0=0$.
 5.19. $y=x^2-2x-2e^{x-2}$, $x_0=2$.
 5.20. $y=\sin^2(x+2)-x^2-4x-4$, $x_0=-2$.
 5.21. $y=\cos^2(x-1)+x^2-2x$, $x_0=1$.
 5.22. $y=x^2-2x-(x-1)\ln x$, $x_0=1$.
 5.23. $y=(x-1)\sin(x-1)+2x-x^2$, $x_0=1$.
 5.24. $y=x^2-4x+\cos^2(x-2)$, $x_0=2$.
 5.25. $y=x^4+4x^3+12x^2+24(x+1-e^x)$, $x_0=0$.
 5.26. $y=\sin^2(x-2)-x^2+4x-4$, $x_0=2$.
 5.27. $y=6e^{x+1}-x^3-6x^2-15x-16$, $x_0=-1$.
 5.28. $y=\sin x+\operatorname{sh} x-2x$, $x_0=0$.
 5.29. $y=\sin^2(x-1)-x^2+2x$, $x_0=1$.
 5.30. $y=\cos x+\operatorname{ch} x$, $x_0=0$.
 5.31. $y=x^2-2e^{x-1}$, $x_0=1$.

Задача 6. Найти асимптоты и построить графики функций.

- 6.1. $y=(17-x^2)/(4x-5)$.
 6.2. $y=(x^2+1)/\sqrt{4x^2-3}$.
 6.3. $y=(x^3-4x)/(3x^2-4)$.
 6.4. $y=(4x^2+9)/(4x+8)$.
 6.5. $y=(4x^3+3x^2-8x-2)/(2-3x^2)$.
 6.6. $y=(x^2-3)/\sqrt{3x^2-2}$.
 6.7. $y=(2x^2-6)/(x-2)$.
 6.8. $y=(2x^3+2x^2-3x-1)/(2-4x^2)$.
 6.9. $y=(x^3-5x)/(5-3x^2)$.
 6.10. $y=(x^2-6x+4)/(3x-2)$.
 6.11. $y=(2-x^2)/\sqrt{9x^2-4}$.
 6.12. $y=(4x^3-3x)/(4x^2-1)$.
 6.13. $y=(3x^2-7)/(2x+1)$.
 6.14. $y=(x^2+16)/\sqrt{9x^2-8}$.

6.15. $y = (x^3 + 3x^2 - 2x - 2)/(2 - 3x^2)$.

6.17. $y = (2x^2 - 1)/\sqrt{x^2 - 2}$.

6.19. $y = (x^2 - 11)/(4x - 3)$.

6.21. $y = (x^3 - 2x^2 - 3x + 2)/(1 - x^2)$.

6.23. $y = (x^3 + x^2 - 3x - 1)/(2x^2 - 2)$.

6.25. $y = (3x^2 - 10)/\sqrt{4x^2 - 1}$.

6.27. $y = (2x^3 + 2x^2 - 9x - 3)/(2x^2 - 3)$.

6.29. $y = (-x^2 - 4x + 13)/(4x + 3)$.

6.31. $y = (9 - 10x^2)/\sqrt{4x^2 - 1}$.

6.16. $y = (21 - x^2)/(7x + 9)$.

6.18. $y = (2x^3 - 3x^2 - 2x + 1)/(1 - 3x^2)$.

6.20. $y = (2x^2 - 9)/\sqrt{x^2 - 1}$.

6.22. $y = (x^2 + 2x - 1)/(2x + 1)$.

6.24. $y = (x^2 + 6x + 9)/(x + 4)$.

6.26. $y = (x^2 - 2x + 2)/(x + 3)$.

6.28. $y = (3x^2 - 10)/(3 - 2x)$.

6.30. $y = (-8 - x^2)/\sqrt{x^2 - 4}$.

Задача 7. Провести полное исследование функций и построить их графики.

7.1. $y = (x^3 + 4)/x^2$.

7.3. $y = 2/(x^2 + 2x)$.

7.5. $y = 12x/(9 + x^2)$.

7.7. $y = (4 - x^3)/x^2$.

7.9. $y = (2x^3 + 1)/x^2$.

7.11. $y = x^2/(x - 1)^2$.

7.13. $y = (12 - 3x^2)/(x^2 + 12)$.

7.15. $y = -8x/(x^2 + 4)$.

7.17. $y = (3x^4 + 1)/x^3$.

7.19. $y = 8(x - 1)/(x + 1)^2$.

7.21. $y = 4/(x^2 + 2x - 3)$.

7.23. $y = (x^2 + 2x - 7)/(x^2 + 2x - 3)$.

7.25. $y = -(x/(x + 2))^2$.

7.27. $y = 4(x + 1)^2/(x^2 + 2x + 4)$.

7.29. $y = (x^2 - 6x + 9)/(x - 1)^2$.

7.31. $y = (x^3 - 4)/x^2$.

7.2. $y = (x^2 - x + 1)/(x - 1)$.

7.4. $y = 4x^2/(3 + x^2)$.

7.6. $y = (x^2 - 3x + 3)/(x - 1)$.

7.8. $y = (x^2 - 4x + 1)/(x - 4)$.

7.10. $y = (x - 1)^2/x^2$.

7.12. $y = (1 + 1/x)^2$.

7.14. $y = (9 + 6x - 3x^2)/(x^2 - 2x + 13)$.

7.16. $y = ((x - 1)/(x + 1))^2$.

7.18. $y = 4x/(x + 1)^2$.

7.20. $y = (1 - 2x^2)/x^2$.

7.22. $y = 4/(3 + 2x - x^2)$.

7.24. $y = 1/(x^4 - 1)$.

7.26. $y = (x^3 - 32)/x^2$.

7.28. $y = (3x - 2)/x^3$.

7.30. $y = (x^3 - 27x + 54)/x^3$.

Задача 8. Провести полное исследование функций и построить их графики.

8.1. $y = (2x + 3)e^{-2(x+1)}$.

8.3. $y = 3 \ln \frac{x}{x-3} - 1$.

8.5. $y = \frac{e^{2-x}}{2-x}$.

8.7. $y = (x - 2)e^{3-x}$.

8.9. $y = 3 - 3 \ln \frac{x}{x+4}$.

8.2. $y = \frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$.

8.4. $y = (3 - x)e^{x-2}$.

8.6. $y = \ln \frac{x}{x+2} + 1$.

8.8. $y = \frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$.

8.10. $y = -(2x + 1)e^{2(x+1)}$.

8.11. $y = \frac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}$

8.13. $y = (2x+5)e^{-2(x+2)}$

8.15. $y = 2 \ln \frac{x}{x+1} - 1$

8.17. $y = -\frac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}$

8.19. $y = (2x-1)e^{2(1-x)}$

8.21. $y = 2 \ln \frac{x}{x-4} - 3$

8.23. $y = \frac{e^{x+3}}{x+3}$

8.25. $y = -(2x+3)e^{2(x+2)}$

8.27. $y = \ln \frac{x-5}{x} + 2$

8.29. $y = \frac{e^{x-3}}{x-3}$

8.31. $y = 2 \ln \frac{x-1}{x} + 1$

8.12. $y = \ln \frac{x}{x-2} - 2$

8.14. $y = \frac{e^{3-x}}{3-x}$

8.16. $y = (4-x)e^{x-3}$

8.18. $y = 2 \ln \frac{x+3}{x} - 3$

8.20. $y = -\frac{e^{-(x+2)}}{x+2}$

8.22. $y = -(x+1)e^{(x+2)}$

8.24. $y = \ln \frac{x}{x+5} - 1$

8.26. $y = -\frac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}$

8.28. $y = (x+4)e^{-(x+3)}$

8.30. $y = \ln \frac{x+6}{x} - 1$

Задача 9. Провести полное исследование функций и построить их графики.

9.1. $y = \sqrt[3]{(2-x)(x^2-4x+1)}$

9.3. $y = \sqrt[3]{(x+2)(x^2+4x+1)}$

9.5. $y = \sqrt[3]{(x-1)(x^2-2x-2)}$

9.7. $y = \sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}$

9.9. $y = \sqrt[3]{x^2(x-2)^2}$

9.11. $y = \sqrt[3]{x^2(x+4)^2}$

9.13. $y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}$

9.15. $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^3}$

9.17. $y = \sqrt[3]{(x-4)(x+2)^2}$

9.19. $y = \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$

9.21. $y = \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}$

9.23. $y = \sqrt[3]{(x-6)x^2}$

9.25. $y = \sqrt[3]{x(x-3)^2}$

9.2. $y = -\sqrt[3]{(x+3)(x^2+6x+6)}$

9.4. $y = \sqrt[3]{(x+1)(x^2+2x-2)}$

9.6. $y = \sqrt[3]{(x-3)(x^2-6x+6)}$

9.8. $y = \sqrt[3]{x^2(x+2)^2}$

9.10. $y = \sqrt[3]{(x^2-2x-3)^2}$

9.12. $y = \sqrt[3]{x^2(x-4)^2}$

9.14. $y = \sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}$

9.16. $y = \sqrt[3]{(x+6)x^2}$

9.18. $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$

9.20. $y = \sqrt[3]{(x-3)x^2}$

9.22. $y = \sqrt[3]{(x+2)(x-4)^2}$

9.24. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$

9.26. $y = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$

9.27. $y = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x+3)^2}$.

9.29. $y = \sqrt[3]{x(x+6)^2}$.

9.31. $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$.

9.28. $y = \sqrt[3]{x(x-6)^2}$.

9.30. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}$.

Задача 10. Провести полное исследование функций и построить их графики.

10.1. $y = e^{\sin x + \cos x}$.

10.3. $y = \ln(\cos x + \sin x)$.

10.5. $y = e^{\sqrt{x} \sin x}$.

10.7. $y = \ln(\sqrt{2} \sin x)$.

10.9. $y = e^{\sin x - \cos x}$.

10.11. $y = \ln(\sin x - \cos x)$.

10.13. $y = e^{-\sqrt{x} \cos x}$.

10.15. $y = \ln(-\sqrt{2} \cos x)$.

10.17. $y = e^{-\sin x - \cos x}$.

10.19. $y = \ln(-\sin x - \cos x)$.

10.21. $y = e^{-\sqrt{x} \sin x}$.

10.23. $y = \ln(-\sqrt{2} \sin x)$.

10.25. $y = e^{\cos x - \sin x}$.

10.27. $y = \ln(\cos x - \sin x)$.

10.29. $y = e^{\sqrt{x} \cos x}$.

10.31. $y = \ln(\sqrt{2} \cos x)$.

10.2. $y = \arctg[(\sin x + \cos x)/\sqrt{2}]$.

10.4. $y = 1/(\sin x + \cos x)$.

10.6. $y = \arctg \sin x$.

10.8. $y = 1/(\sin x - \cos x)$.

10.10. $y = \arctg[(\sin x - \cos x)/\sqrt{2}]$.

10.12. $y = 1/(\sin x + \cos x)^2$.

10.14. $y = -\arctg \cos x$.

10.16. $y = 1/(\sin x - \cos x)^2$.

10.18. $y = \sqrt[3]{\sin x}$.

10.20. $y = \sqrt{(\sin x - \cos x)/\sqrt{2}}$.

10.22. $y = \sqrt[3]{\cos x}$.

10.24. $y = \sqrt{\cos x}$.

10.26. $y = \sqrt[3]{(\sin x + \cos x)/\sqrt{2}}$.

10.28. $y = \sqrt{\sin x}$.

10.30. $y = \sqrt{(\sin x + \cos x)/\sqrt{2}}$.

IV. ИНТЕГРАЛЫ

Теоретические вопросы

1. Понятие первообразной функции. Теоремы о первообразных.

2. Неопределенный интеграл, его свойства.

3. Таблица неопределенных интегралов.

4. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

5. Разложение дробной рациональной функции на простейшие дроби.

6. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций.

7. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.

8. Интегрирование иррациональных выражений.
9. Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл.
10. Основные свойства определенного интеграла.
11. Теорема о среднем.
12. Производная определенного интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона — Лейбница.
13. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
14. Интегрирование биномиальных дифференциалов.
15. Вычисление площадей плоских фигур.
16. Определение и вычисление длины кривой, дифференциал длины дуги кривой.

Теоретические упражнения

1. Считая, что функция $\frac{\sin x}{x}$ равна 1 при $x=0$, доказать, что она интегрируема на отрезке $[0, 1]$.
2. Какой из интегралов больше:

$$\int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx \text{ или } \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx?$$

3. Пусть $f(t)$ — непрерывная функция, а функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемые. Доказать, что

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = f[\psi(x)]\psi'(x) - f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

4. Найти $\frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{t^2} dt$.

5. Найти точки экстремума функции

$$f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)e^{-t^2} dt.$$

6. Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция с периодом T . Доказать, что

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx \quad \forall a.$$

7. Доказать, что если $f(x)$ — четная функция, то

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^{+a} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} f(x) dx.$$

8. Доказать, что для нечетной функции $f(x)$ справедливы равенства

$$\int_a^0 f(x) dx = - \int_0^{+a} f(x) dx \text{ и } \int_a^{+a} f(x) dx = 0.$$

Чему равен интеграл $\int_1^{+1} \sin^2 x \ln \frac{2+x}{2-x} dx$?

9. При каком условии, связывающем коэффициенты a, b, c , интеграл $\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} dx$ является рациональной функцией?

10. При каких целых значениях n интеграл $\int \sqrt{1+x^n} dx$ выражается элементарными функциями?

Расчетные задания

Задача 1. Найти неопределенные интегралы.

1.1. $\int (4-3x)e^{-3x} dx.$

1.2. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1} dx.$

1.3. $\int (3x+4)e^{3x} dx.$

1.4. $\int (4x-2) \cos 2x dx.$

1.5. $\int (4-16x) \sin 4x dx.$

1.6. $\int (5x-2)e^{3x} dx.$

1.7. $\int (1-6x)e^{2x} dx.$

1.8. $\int \ln(x^2+4) dx.$

1.9. $\int \ln(4x^2+1) dx.$

1.10. $\int (2-4x) \sin 2x dx.$

1.11. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{6x-1} dx.$

1.12. $\int e^{-2x}(4x-3) dx.$

1.13. $\int e^{-3x}(2-9x) dx.$

1.14. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx.$

1.15. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1} dx.$

1.16. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} dx.$

1.17. $\int (5x+6) \cos 2x dx.$

1.18. $\int (3x-2) \cos 5x dx.$

1.19. $\int (x\sqrt{2}-3) \cos 2x dx.$

1.20. $\int (4x+7) \cos 3x dx.$

1.21. $\int (2x-5) \cos 4x dx.$

1.22. $\int (8-3x) \cos 5x dx.$

1.23. $\int (x+5) \sin 3x dx.$

1.24. $\int (2-3x) \sin 2x dx.$

1.25. $\int (4x+3) \sin 5x dx.$

1.26. $\int (7x-10) \sin 4x dx.$

1.27. $\int (\sqrt{2}-8x) \sin 3x dx.$

1.28. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$

1.29. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$

1.30. $\int x \sin^2 x dx.$

1.31. $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}.$

Задача 2. Вычислить определенные интегралы.

2.1. $\int_{-2}^0 (x^2+5x+6) \cos 2x dx.$

2.2. $\int_{-2}^0 (x^2-4) \cos 3x dx.$

2.3. $\int_{-1}^0 (x^2+4x+3) \cos x dx.$

2.4. $\int_{-2}^0 (x+2)^2 \cos 3x dx.$

2.5. $\int_{-4}^0 (x^2+7x+12) \cos x dx.$

2.6. $\int_0^{\pi} (2x^2+4x+7) \cos 2x dx.$

2.7. $\int_0^{2\pi} (9x^2+9x+11) \cos 3x dx.$

2.8. $\int_0^{\pi} (8x^2+16x+17) \cos 4x dx.$

2.9. $\int_0^{2\pi} (3x^2+5) \cos 2x dx.$

2.10. $\int_0^{2\pi} (2x^2-15) \cos 3x dx.$

2.11. $\int_0^{2\pi} (3-7x^2) \cos 2x dx.$

2.12. $\int_0^{\pi} (1-8x^2) \cos 4x dx.$

2.13. $\int_{-1}^0 (x^2+2x+1) \sin 3x dx.$

2.14. $\int_0^3 (x^2-3x) \sin 2x dx.$



- 2.15. $\int_0^{\pi} (x^2 - 3x + 2) \sin x dx.$
- 2.17. $\int_{-3}^0 (x^2 + 6x + 9) \sin 2x dx.$
- 2.19. $\int_0^{\pi/2} (1 - 5x^2) \sin x dx.$
- 2.21. $\int_1^2 x \ln^2 x dx.$
- 2.23. $\int_1^8 \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$
- 2.25. $\int_2^3 (x-1)^3 \ln^2(x-1) dx.$
- 2.27. $\int_0^2 (x+1)^2 \ln^2(x+1) dx.$
- 2.29. $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x/2} dx.$
- 2.31. $\int_{-2}^0 (x^2 + 2) e^{x/2} dx.$
- 2.16. $\int_0^{\pi/2} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x dx.$
- 2.18. $\int_0^{\pi/4} (x^2 + 17,5) \sin 2x dx.$
- 2.20. $\int_0^3 (3x - x^2) \sin 2x dx.$
- 2.22. $\int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}.$
- 2.24. $\int_0^1 (x+1) \ln^2(x+1) dx.$
- 2.26. $\int_{-1}^0 (x+2)^3 \ln^2(x+2) dx.$
- 2.28. $\int_1^e \sqrt{x} \ln^2 x dx.$
- 2.30. $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$

Задача 3. Найти неопределенные интегралы.

- 3.1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$
- 3.3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
- 3.5. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$
- 3.7. $\int \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$
- 3.9. $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2} dx.$
- 3.2. $\int \frac{1+\ln x}{x} dx.$
- 3.4. $\int \frac{x^2+\ln x^2}{x} dx.$
- 3.6. $\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
- 3.8. $\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$
- 3.10. $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx.$

3.11.
$$\int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$$

3.13.
$$\int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx.$$

3.15.
$$\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

3.17.
$$\int \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^3 + 3x + 1)^3}.$$

3.19.
$$\int \frac{x^3}{x^2 + 4} dx.$$

3.21.
$$\int \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx.$$

3.23.
$$\int \frac{1/(2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx.$$

3.25.
$$\int \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

3.27.
$$\int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1 + x^2} dx.$$

3.29.
$$\int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx.$$

3.31.
$$\int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} dx.$$

3.12.
$$\int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$$

3.14.
$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}.$$

3.16.
$$\int \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$$

3.18.
$$\int \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx.$$

3.20.
$$\int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx.$$

3.22.
$$\int \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx.$$

3.24.
$$\int \frac{x}{x^4 + 1} dx.$$

3.26.
$$\int \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

3.28.
$$\int \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1 + x^2} dx.$$

3.30.
$$\int \frac{(\operatorname{arcsin} x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

Задача 4. Вычислить определенные интегралы.

4.1.
$$\int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$$

4.3.
$$\int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx.$$

4.5.
$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx.$$

4.7.
$$\int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx.$$

4.2.
$$\int_0^1 \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^3 + 3x + 1)^2}.$$

4.4.
$$\int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2 + 4}.$$

4.6.
$$\int_0^{\pi/4} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx.$$

4.8.
$$\int_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx.$$

$$4.9. \int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 1}$$

$$4.11. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$4.13. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\arctg x)^4}{1+x^2} dx.$$

$$4.15. \int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$4.17. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$$

$$4.19. \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$4.21. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

$$4.23. \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$$

$$4.25. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$4.27. \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$$

$$4.29. \int_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1} dx.$$

$$4.31. \int_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

$$4.10. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$4.12. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\arctg x + x}{1+x^2} dx.$$

$$4.14. \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx.$$

$$4.16. \int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} dx.$$

$$4.18. \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx.$$

$$4.20. \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$

$$4.22. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^2}$$

$$4.24. \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$$

$$4.26. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx.$$

$$4.28. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$$

$$4.30. \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$$

Задача 5. Найти неопределенные интегралы.

- | | |
|--|--|
| 5.1. $\int \frac{x^3+1}{x^2-x} dx.$ | 5.2. $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1} dx.$ |
| 5.3. $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3} dx.$ | 5.4. $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2} dx.$ |
| 5.5. $\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6} dx.$ | 5.6. $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2} dx.$ |
| 5.7. $\int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx.$ | 5.8. $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)} dx.$ |
| 5.9. $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx.$ | 5.10. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx.$ |
| 5.11. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)x} dx.$ | 5.12. $\int \frac{4x^3+x^2+2}{x(x-1)(x-2)} dx.$ |
| 5.13. $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x} dx.$ | 5.14. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-2)x} dx.$ |
| 5.15. $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x} dx.$ | 5.16. $\int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x} dx.$ |
| 5.17. $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x} dx.$ | 5.18. $\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x} dx.$ |
| 5.19. $\int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2+3x} dx.$ | 5.20. $\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x} dx.$ |
| 5.21. $\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)} dx.$ | 5.22. $\int \frac{x^5+2x^4-2x^3+5x^2-7x+9}{(x+3)(x-1)x} dx.$ |
| 5.23. $\int \frac{2x^4-5x^2-8x-8}{x(x-2)(x+2)} dx.$ | 5.24. $\int \frac{4x^4+2x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)} dx.$ |
| 5.25. $\int \frac{3x^4+3x^3-5x^2+2}{x(x-1)(x+2)} dx.$ | 5.26. $\int \frac{2x^4+2x^3-41x^2+20}{x(x-4)(x+5)} dx.$ |
| 5.27. $\int \frac{x^5-x^4-6x^3+13x+6}{x(x-3)(x+2)} dx.$ | 5.28. $\int \frac{3x^3-x^2-12x-2}{x(x+1)(x-2)} dx.$ |
| 5.29. $\int \frac{2x^4+2x^3-3x^2+2x-9}{x(x-1)(x+3)} dx.$ | 5.30. $\int \frac{2x^3-x^2-7x-12}{x(x-3)(x+1)} dx.$ |
| 5.31. $\int \frac{2x^3-40x-8}{x(x+4)(x-2)} dx.$ | |

Задача 6. Найти неопределенные интегралы.

- | | |
|--|--|
| 6.1. $\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3} dx.$ | 6.2. $\int \frac{x^3+6x^2+13x+8}{x(x+2)^3} dx.$ |
| 6.3. $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3} dx.$ | 6.4. $\int \frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^3} dx.$ |
| 6.5. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-10}{(x+2)(x-2)^3} dx.$ | 6.6. $\int \frac{x^3+6x^2+11x+7}{(x+1)(x+2)^3} dx.$ |

6.7.
$$\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 1}{(x-1)(x+1)^3} dx.$$

6.9.
$$\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 2}{x(x+1)^3} dx.$$

6.11.
$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 7}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

6.13.
$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 10x - 10}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

6.15.
$$\int \frac{3x^3 + 9x^2 + 10x + 2}{(x-1)(x+1)^3} dx.$$

6.17.
$$\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 4}{(x+2)(x+1)^3} dx.$$

6.19.
$$\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x}{(x-2)(x+1)^3} dx.$$

6.21.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 4x + 24}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

6.23.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 18x - 4}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

6.25.
$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 4}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

6.27.
$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x - 4}{(x-2)(x-1)^3} dx.$$

6.29.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 - 10x + 52}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

6.31.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

6.8.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 10}{(x-1)(x+2)^3} dx.$$

6.10.
$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 8}{x(x-2)^3} dx.$$

6.12.
$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 6}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

6.14.
$$\int \frac{x^3 + x + 2}{(x+2)x^3} dx.$$

6.16.
$$\int \frac{2x^3 + x + 1}{(x+1)x^3} dx.$$

6.18.
$$\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x}{(x+2)(x+1)^3} dx.$$

6.20.
$$\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x + 4}{(x-2)(x+1)^3} dx.$$

6.22.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 4}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

6.24.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 12}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

6.26.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 15x + 2}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

6.28.
$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x}{(x+2)(x-1)^3} dx.$$

6.30.
$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

Задача 7. Найти неопределенные интегралы.

7.1.
$$\int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2(x^2 + x + 1)} dx.$$

7.3.
$$\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x - 1}{(x+2)^2(x^2 + x + 1)} dx.$$

7.5.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 6}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

7.7.
$$\int \frac{3x^3 + 6x^2 + 5x - 1}{(x+1)^2(x^2 + 2)} dx.$$

7.9.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 8x + 8}{(x+2)^2(x^2 + 4)} dx.$$

7.11.
$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - 16x - 12}{(x-1)^2(x^2 + 4x + 5)} dx.$$

7.13.
$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x+1)^2(x^2 - x + 1)} dx.$$

7.2.
$$\int \frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2(x^2 + 1)} dx.$$

7.4.
$$\int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

7.6.
$$\int \frac{2x^3 + 11x^2 + 16x + 10}{(x+2)^2(x^2 + 2x + 3)} dx.$$

7.8.
$$\int \frac{x^3 + 9x^2 + 21x + 21}{(x+3)^2(x^2 + 3)} dx.$$

7.10.
$$\int \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2 + 4)} dx.$$

7.12.
$$\int \frac{-3x^3 + 13x^2 - 13x + 1}{(x-2)^2(x^2 - x + 1)} dx.$$

7.14.
$$\int \frac{3x^3 + x + 46}{(x-1)^2(x^2 + 9)} dx.$$

$$7.15. \int \frac{4x^3 + 24x^2 + 20x - 28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)} dx.$$

$$7.17. \int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.19. \int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)} dx.$$

$$7.21. \int \frac{4x^2 + 3x + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} dx.$$

$$7.23. \int \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.25. \int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.27. \int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.29. \int \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.31. \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.16. \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.18. \int \frac{x^2 + x + 3}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.20. \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 9}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)} dx.$$

$$7.22. \int \frac{3x^3 + 4x^2 + 6x}{(x^2 + 2)(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

$$7.24. \int \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.26. \int \frac{2x^3 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.28. \int \frac{x + 4}{(x^2 + x + 2)(x^2 + 2)} dx.$$

$$7.30. \int \frac{3x^3 + 7x^2 + 12x + 6}{(x^2 + x + 3)(x^2 + 2x + 3)} dx.$$

Задача 8. Вычислить определенные интегралы.

$$8.1. \int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 - \cos x)}.$$

$$8.3. \int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 + \cos x)}.$$

$$8.5. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1 + \sin x)^2} dx.$$

$$8.7. \int_{2 \operatorname{arctg}(1/3)}^{2 \operatorname{arctg}(1/2)} \frac{dx}{\sin x (1 - \sin x)}.$$

$$8.9. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{5 + 4 \cos x}.$$

$$8.11. \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x - \cos x}.$$

$$8.2. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2 + \cos x}.$$

$$8.4. \int_{2 \operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1 - \cos x)^3}.$$

$$8.6. \int_{2 \operatorname{arctg} 2}^{2 \operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{\cos x (1 - \cos x)}.$$

$$8.8. \int_{2 \operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{dx}{(1 + \sin x - \cos x)^2}.$$

$$8.10. \int_0^{2\pi/3} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx.$$

$$8.12. \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + \cos x) dx}{1 + \cos x + \sin x}.$$

$$8.13. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1 + \cos x + \sin x}$$

$$8.15. \int_0^2 \frac{\cos x dx}{1 + \cos x + \sin x}$$

$$8.17. \int_{-2\pi/3}^0 \frac{\cos x dx}{1 + \cos x - \sin x}$$

$$8.19. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$$

$$8.21. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x)^2}$$

$$8.23. \int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}$$

$$8.25. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$$

$$8.27. \int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin x(1 + \sin x)}$$

$$8.29. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{2 + \sin x}$$

$$8.31. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{5 + 3 \sin x}$$

$$8.14. \int_0^{2 \operatorname{arctg}(1/2)} \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)^2} dx.$$

$$8.16. \int_0^{2 \operatorname{arctg}(1/3)} \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x)(1 - \sin x)}$$

$$8.18. \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}$$

$$8.20. \int_0^{2 \operatorname{arctg}(1/2)} \frac{(1 - \sin x) dx}{\cos x(1 + \cos x)}$$

$$8.22. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x + \cos x)^2}$$

$$8.24. \int_{-2\pi/3}^0 \frac{\cos^2 x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}$$

$$8.26. \int_0^{2\pi/3} \frac{\cos^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$$

$$8.28. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1 + \sin x + \cos x)^2}$$

$$8.30. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x(1 + \cos x)}$$

Задача 9. Вычислить определенные интегралы.

$$9.1. \int_{\operatorname{arctg} 3}^{\pi/4} \frac{dx}{(3 \operatorname{tg} x + 5) \sin 2x}$$

$$9.3. \int_0^{\operatorname{arccos}(1/\sqrt{7})} \frac{3 + 2 \operatorname{tg} x}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 1} dx.$$

$$9.2. \int_{\operatorname{arccos}(4/\sqrt{17})}^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{ctg} x + 1}{(2 \sin x + \cos x)^2} dx.$$

$$9.4. \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{1 - \sin 2x + 4 \cos^2 x} dx.$$

$$9.5. \int_0^{\arctg(1/3)} \frac{(8 + \operatorname{tg} x)}{18 \sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx.$$

$$9.7. \int_{\arcsin(1/\sqrt{37})}^{\pi/4} \frac{6 \operatorname{tg} x dx}{3 \sin 2x + 5 \cos^2 x}.$$

$$9.9. \int_{-\arctg(1/3)}^0 \frac{3 \operatorname{tg} x + 1}{2 \sin 2x - 5 \cos 2x + 1} dx.$$

$$9.11. \int_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{3})} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x - 5 \cos^2 x + 4} dx.$$

$$9.13. \int_0^{\arctg 3} \frac{4 + \operatorname{tg} x}{2 \sin^2 x + 18 \cos^2 x} dx.$$

$$9.15. \int_0^{\arctg(2/3)} \frac{6 + \operatorname{tg} x}{9 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx.$$

$$9.17. \int_0^{\pi/4} \frac{7 + 3 \operatorname{tg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx.$$

$$9.19. \int_{-\arccos(1/\sqrt{10})}^0 \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 50}{2 \operatorname{tg} x + 7} dx.$$

$$9.21. \int_{\pi/4}^{\arcsin(2/\sqrt{3})} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{4 \cos^2 x - \sin 2x + 1} dx.$$

$$9.23. \int_{-\arccos(1/\sqrt{5})}^0 \frac{11 - 3 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 3} dx.$$

$$9.25. \int_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{36 dx}{(6 - \operatorname{tg} x) \sin 2x}.$$

$$9.27. \int_{-\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\pi/4} \frac{2 - \operatorname{tg} x}{(\sin x + 3 \cos x)^2} dx.$$

$$9.6. \int_0^{\arccos \sqrt{2/3}} \frac{\operatorname{tg} x + 2}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x - 3} dx.$$

$$9.8. \int_0^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{tg}^2 x - 11 \operatorname{tg} x - 22}{4 - \operatorname{tg} x} dx.$$

$$9.10. \int_{\pi/4}^{\arctg 3} \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx.$$

$$9.12. \int_0^{\pi/4} \frac{6 \sin^2 x}{3 \cos 2x - 4} dx.$$

$$9.14. \int_0^{\arctg 2} \frac{12 + \operatorname{tg} x}{3 \sin^2 x + 12 \cos^2 x} dx.$$

$$9.16. \int_0^{\arcsin \sqrt{3/7}} \frac{\operatorname{tg}^2 x dx}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x - 7}.$$

$$9.18. \int_{\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\arcsin(3/\sqrt{10})} \frac{2 \operatorname{tg} x + 5}{(5 - \operatorname{tg} x) \sin 2x} dx.$$

$$9.20. \int_0^{\pi/4} \frac{5 \operatorname{tg} x + 2}{2 \sin 2x + 5} dx.$$

$$9.22. \int_0^{\arcsin \sqrt{7/8}} \frac{6 \sin^2 x dx}{4 + 3 \cos 2x}.$$

$$9.24. \int_0^{\arcsin(3/\sqrt{10})} \frac{2 \operatorname{tg} x - 5}{(4 \cos x - \sin x)^2} dx.$$

$$9.26. \int_0^{\pi/4} \frac{4 - 7 \operatorname{tg} x}{2 + 3 \operatorname{tg} x} dx.$$

$$9.28. \int_{\pi/4}^{\arcsin \sqrt{2/3}} \frac{8 \operatorname{tg} x dx}{3 \cos^2 x + 8 \sin^2 x - 7}.$$

$$9.29. \int_{\arccos(1/\sqrt{10})}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{12 dx}{(6+5 \operatorname{tg} x) \sin 2x}$$

$$9.31. \int_0^{\arccos(1/\sqrt{6})} \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5} dx.$$

$$9.30. \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4+3 \cos 2x} dx.$$

Задача 10. Вычислить определенные интегралы.

$$10.1. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x dx.$$

$$10.3. \int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$10.5. \int_0^{\pi} 2^4 \cos^8(x/2) dx.$$

$$10.7. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$10.9. \int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$10.11. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^8(x/2) dx.$$

$$10.13. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$10.15. \int_0^{2\pi} \cos^8 x dx.$$

$$10.17. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6(x/2) \cos^2(x/2) dx.$$

$$10.19. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$10.2. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$10.4. \int_0^{2\pi} \sin^2(x/4) \cos^6(x/4) dx.$$

$$10.6. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^6 x dx.$$

$$10.8. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$10.10. \int_0^{2\pi} \cos^8(x/4) dx.$$

$$10.12. \int_{-\pi}^0 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$10.14. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$10.16. \int_0^{2\pi} \sin^8(x/4) dx.$$

$$10.18. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$10.20. \int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 x dx.$$

$$10.21. \int_0^{2\pi} \sin^8 x dx.$$

$$10.23. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4(x/2) \cos^4(x/2) dx.$$

$$10.25. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \cos^8 x dx.$$

$$10.27. \int_0^{2\pi} \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$10.29. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^2(x/2) \cos^6(x/2) dx.$$

$$10.31. \int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x dx.$$

$$10.22. \int_0^{2\pi} \sin^6(x/4) \cos^2(x/4) dx.$$

$$10.24. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$10.26. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^8 x dx.$$

$$10.28. \int_0^{2\pi} \sin^4(x/4) \cos^4(x/4) dx.$$

$$10.30. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \cos^8 x dx.$$

Задача 11. Вычислить определенные интегралы.

$$11.1. \int_0^1 \frac{4\sqrt{1-x} - \sqrt{3x+1}}{(\sqrt{3x+1} + 4\sqrt{1-x})(3x+1)^2} dx.$$

$$11.3. \int_{-14/15}^{-7/15} \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2 \sqrt{x+1}} dx.$$

$$11.5. \int_0^5 e^{\sqrt{\frac{5-x}{3+x}}} \frac{dx}{(5+x)\sqrt{25-x^2}}.$$

$$11.7. \int_0^1 e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$11.9. \int_1^8 \frac{5\sqrt{x+24}}{(x+24)^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$11.11. \int_6^{10} \sqrt{\frac{4-x}{x-12}} dx.$$

$$11.2. \int_1^{64} \frac{1 - \sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x + 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}} dx.$$

$$11.4. \int_6^9 \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}} dx.$$

$$11.6. \int_8^{12} \sqrt{\frac{6-x}{x-14}} dx.$$

$$11.8. \int_{5/2}^{10/3} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(x-2)^2} dx.$$

$$11.10. \int_1^2 \frac{x + \sqrt{3x-2} - 10}{\sqrt{3x-2} + 7} dx.$$

$$11.12. \int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{2x+2}) dx}{(\sqrt{2x+2} + 4\sqrt{2-x})(2x+2)^2}.$$

$$11.13. \int_{-1/2}^0 \frac{x dx}{2 + \sqrt{2x+1}}$$

$$11.15. \int_{1/8}^1 \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2\sqrt{x}} dx.$$

$$11.17. \int_2^3 \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}} dx.$$

$$11.19. \int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{3x+2}) dx}{(\sqrt{3x+2} + 4\sqrt{2-x})(3x+2)^2}$$

$$11.21. \int_3^5 \sqrt{\frac{2-x}{x-6}} dx.$$

$$11.23. \int_9^{15} \sqrt{\frac{6-x}{x-18}} dx.$$

$$11.25. \int_1^{64} \frac{(2 + \sqrt[3]{x}) dx}{(\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})\sqrt{x}}$$

$$11.27. \int_0^6 \frac{e^{\sqrt{(6-x)/(6+x)}} dx}{(6+x)\sqrt{36-x^2}}$$

$$11.29. \int_0^1 \frac{(4\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}) dx}{(\sqrt{x+1} + 4\sqrt{1-x})(x+1)^2}$$

$$11.31. \int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{x+2}) dx}{(\sqrt{x+2} + 4\sqrt{2-x})(x+2)^2}$$

$$11.14. \int_0^4 e^{\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}} \frac{dx}{(4+x)\sqrt{16-x^2}}$$

$$11.16. \int_{-5/3}^1 \frac{\sqrt[3]{3x+5} + 2}{1 + \sqrt[3]{3x+5}} dx.$$

$$11.18. \int_0^7 \frac{\sqrt{x+25} dx}{(x+25)^2\sqrt{x+1}}$$

$$11.20. \int_0^2 e^{\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}} \frac{dx}{(2+x)\sqrt{4-x^2}}$$

$$11.22. \int_{1/24}^{1/3} \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\sqrt{x}} dx.$$

$$11.24. \int_0^1 \frac{(4\sqrt{1-x} - \sqrt{2x+1}) dx}{(\sqrt{2x+1} + 4\sqrt{1-x})(2x+1)^2}$$

$$11.26. \int_{16/15}^{4/3} \frac{4\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x-1}} dx.$$

$$11.28. \int_1^{64} \frac{6 - \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3 - 7x - 6}\sqrt[4]{x^3}} dx.$$

$$11.30. \int_0^3 \frac{e^{\sqrt{(3-x)/(3+x)}} dx}{(3+x)\sqrt{9-x^2}}$$

Задача 12. Вычислить определенные интегралы.

$$12.1. \int_0^{16} \sqrt{256-x^2} dx.$$

$$12.2. \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$12.3. \int_0^5 \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$$

$$12.4. \int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$$

$$12.5. \int_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$$

$$12.7. \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$12.9. \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(2-x^2)^{3/2}}$$

$$12.11. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$12.13. \int_0^4 x^2 \sqrt{16-x^2} dx.$$

$$12.15. \int_0^5 x^2 \sqrt{25-x^2} dx.$$

$$12.17. \int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}$$

$$12.19. \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}$$

$$12.21. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

$$12.23. \int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$$

$$12.25. \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$12.27. \int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$$

$$12.6. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx.$$

$$12.8. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$$

$$12.10. \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$12.12. \int_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}$$

$$12.14. \int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$12.16. \int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx.$$

$$12.18. \int^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4} dx.$$

$$12.20. \int_{-3}^{\sqrt{2}} x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$$

$$12.22. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$$

$$12.24. \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx.$$

$$12.26. \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx.$$

$$12.28. \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(4-x^2)^{3/2}}$$

$$12.29. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$12.30. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$12.31. \int_0^{3/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

Задача 13. Найти неопределенные интегралы.

$$13.1. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x^4 \sqrt{x^3}} dx.$$

$$13.2. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x^3 \sqrt{x^2}} dx.$$

$$13.3. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x \sqrt{x}} dx.$$

$$13.4. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^2 \sqrt{x^4}} dx.$$

$$13.5. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2 \sqrt{x^8}} dx.$$

$$13.6. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x^2 \sqrt{x^5}} dx.$$

$$13.7. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2 \sqrt[9]{x}} dx.$$

$$13.8. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x^6 \sqrt{x^5}} dx.$$

$$13.9. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx.$$

$$13.10. \int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$13.11. \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x^8 \sqrt{x^7}} dx.$$

$$13.12. \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x^{12} \sqrt{x^7}} dx.$$

$$13.13. \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2 \sqrt[6]{x}} dx.$$

$$13.14. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2 \sqrt[8]{x}} dx.$$

$$13.15. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2} dx.$$

$$13.16. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2 \sqrt[4]{x}} dx.$$

$$13.17. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^4}}{x^{10} \sqrt{x^9}} dx.$$

$$13.18. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^4}}{x^3 \sqrt{x^3}} dx.$$

$$13.19. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx.$$

$$13.20. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^4}}{x^2 \sqrt[20]{x^7}} dx.$$

$$13.21. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[5]{x^4})}}{x^2 \sqrt[25]{x^{11}}} dx.$$

$$13.22. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx.$$

13.23.
$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x^4}}}{x^{21/5}\sqrt{x}} dx.$$

13.24.
$$\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x^4})^2}}{x^2\sqrt{x}} dx.$$

13.25.
$$\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x^4})^3}}{x^{2/3}\sqrt{x^3}} dx.$$

13.26.
$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x^2\sqrt{x}} dx.$$

13.27.
$$\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x^{1/2}\sqrt{x^3}} dx.$$

13.28.
$$\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt{x}}}{x^{1/2}\sqrt{x^3}} dx.$$

13.29.
$$\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt{x^2}}}{x^6\sqrt{x^5}} dx.$$

13.30.
$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x^{15}\sqrt{x^4}} dx.$$

13.31.
$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x^5\sqrt{x^2}} dx.$$

Задача 14. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

14.1. $y = (x-2)^3, y = 4x-8.$

14.2. $y = x\sqrt{9-x^2}, y = 0,$
 $(0 \leq x \leq 3).$

14.3. $y = 4-x^2,$
 $y = x^2-2x.$

14.4. $y = \sin x \cos^2 x, y = 0$
 $(0 \leq x \leq \pi/2).$

14.5. $y = \sqrt{4-x^2}, y = 0,$
 $x = 0, x = 1.$

14.6. $y = x^2\sqrt{4-x^2}, y = 0$
 $(0 \leq x \leq 2).$

14.7. $y = \cos x \sin^2 x, y = 0$
 $(0 \leq x \leq \pi/2).$

14.8. $y = \sqrt{e^x-1}, y = 0,$
 $x = \ln 2.$

14.9. $y = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}},$
 $y = 0, x = 1, x = e^3.$

14.10. $y = \arccos x, y = 0,$
 $x = 0.$

14.11. $y = (x+1)^2,$
 $y^2 = x+1.$

14.12. $y = 2x-x^2+3,$
 $y = x^2-4x+3.$

14.13. $y = x\sqrt{36-x^2}, y = 0$
 $(0 \leq x \leq 6).$

14.14. $x = \arccos y, x = 0,$
 $y = 0.$

14.15. $y = x \operatorname{arctg} x, y = 0,$
 $x = \sqrt{3}.$

14.16. $y = x^2\sqrt{8-x^2}, y = 0$
 $(0 \leq x \leq 2\sqrt{2}).$

14.17. $x = \sqrt{e^y-1}, x = 0,$
 $y = \ln 2.$

14.18. $y = x\sqrt{4-x^2}, y = 0$
 $(0 \leq x \leq 2).$

14.19. $y = x/(1+\sqrt{x}), y = 0,$
 $x = 1.$

14.20. $y = 1/(1+\cos x), y = 0,$
 $x = \pi/2, x = -\pi/2.$

14.21. $x = (y-2)^3,$
 $x = 4y-8.$

14.22. $y = \cos^3 x \sin 2x, y = 0$
 $(0 \leq x \leq \pi/2).$

14.23. $y = \frac{x}{(x^2+1)^2}, y = 0, x = 1.$

14.24. $x = 4-y^2, x = y^2-2y.$

$$14.25. x = \frac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}, x=0, y=1, y=e^3.$$

$$14.27. y = x^2\sqrt{16-x^2}, y=0 \\ (0 \leq x \leq 4).$$

$$14.29. y = (x-1)^2, \\ y^2 = x-1.$$

$$14.31. x = 4 - (y-1)^2, x = y^2 - 4y + 3.$$

$$14.26. y = \frac{e^{1/x}}{x^2}, y=0, x=2, x=1.$$

$$14.28. x = \sqrt{4-y^2}, x=0, \\ y=0, y=1.$$

$$14.30. y = x^2 \cos x, y=0, \\ (0 \leq x \leq \pi/2).$$

Задача 15. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

$$15.1. \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$$

$$15.3. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4 \quad (0 < x < 8\pi, y \geq 4). \end{cases}$$

$$15.5. \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \\ y = 3 \quad (y \geq 3). \end{cases}$$

$$15.7. \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 6\sqrt{3} \quad (x \geq 6\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.9. \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ y = 3 \quad (0 < x < 6\pi, y \geq 3). \end{cases}$$

$$15.11. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \\ y = 3 \quad (y \geq 3). \end{cases}$$

$$15.13. \begin{cases} y = 32 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 4 \quad (x \geq 4). \end{cases}$$

$$15.15. \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 12\pi, y \geq 6). \end{cases}$$

$$15.17. \begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \\ y = 2\sqrt{3} \quad (y \geq 2\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.2. \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \\ y = 2 \quad (y \geq 2). \end{cases}$$

$$15.4. \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$$

$$15.6. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 3 \quad (0 < x < 4\pi, y \geq 3). \end{cases}$$

$$15.8. \begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \\ y = \sqrt{3} \quad (y \geq \sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.10. \begin{cases} x = 8\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 4 \quad (x \geq 4). \end{cases}$$

$$15.12. \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 9 \quad (0 < x < 12\pi, y \geq 9). \end{cases}$$

$$15.14. \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \\ y = 4 \quad (y \geq 4). \end{cases}$$

$$15.16. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \\ x = 3\sqrt{3} \quad (x \geq 3\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.18. \begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \\ y = 15 \quad (0 < x < 20\pi, y \geq 15). \end{cases}$$

$$15.19. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 1 \quad (x \geq 1). \end{cases}$$

$$15.21. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ y = 1 \quad (0 < x < 2\pi, y \geq 1). \end{cases}$$

$$15.23. \begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \\ y = 2 \quad (y \geq 2). \end{cases}$$

$$15.25. \begin{cases} x = 24 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t \sqrt{3}, \\ x = 9\sqrt{3} \quad (x \geq 9\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.27. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 2 \quad (0 < x < 4\pi, y \geq 2). \end{cases}$$

$$15.29. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 5\sqrt{2} \sin t, \\ y = 5 \quad (y \geq 5). \end{cases}$$

$$15.31. \begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \\ x = 12\sqrt{3} \quad (x \geq 12\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.20. \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 4\sqrt{2} \sin t, \\ y = 4 \quad (y \geq 4). \end{cases}$$

$$15.22. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \\ x = 1 \quad (x \geq 1). \end{cases}$$

$$15.24. \begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 8(1 - \cos t) \\ y = 12 \quad (0 < x < 16\pi, y \geq 12). \end{cases}$$

$$15.26. \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \\ y = 4\sqrt{3} \quad (y \geq 4\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.28. \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$$

$$15.30. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 8\pi, y \geq 6). \end{cases}$$

Задача 16. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями в полярных координатах.

$$16.1. r = 4 \cos 3\varphi, r = 2 \quad (r \geq 2).$$

$$16.3. r = \sqrt{3} \cos \varphi, r = \sin \varphi, \\ (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$16.5. r = 2 \cos \varphi, r = 2\sqrt{3} \sin \varphi \\ (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$16.7. r = 6 \sin 3\varphi, r = 3 \quad (r \geq 3).$$

$$16.9. r = \cos \varphi, \\ r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4) \\ (-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$16.11. r = 6 \cos 3\varphi, r = 3 \quad (r \geq 3).$$

$$16.13. r = \cos \varphi, \\ r = \sin \varphi \\ (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$16.15. r = \cos \varphi, r = 2 \cos \varphi.$$

$$16.17. r = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi.$$

$$16.2. r = \cos 2\varphi.$$

$$16.4. r = 4 \sin 3\varphi, r = 2 \quad (r \geq 2).$$

$$16.6. r = \sin 3\varphi.$$

$$16.8. r = \cos 3\varphi.$$

$$16.10. r = \sin \varphi, \\ r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4) \\ (0 \leq \varphi \leq 3\pi/4).$$

$$16.12. r = 1/2 + \sin \varphi.$$

$$16.14. r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4), \\ r = \sqrt{2} \sin(\varphi - \pi/4) \\ (\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4).$$

$$16.16. r = \sin \varphi, r = 2 \sin \varphi.$$

$$16.18. r = 1/2 + \cos \varphi.$$

- 16.19. $r = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi$.
 16.20. $r = (5/2) \sin \varphi, r = (3/2) \sin \varphi$.
 16.21. $r = (3/2) \cos \varphi, r = (5/2) \cos \varphi$.
 16.22. $r = 4 \cos 4\varphi$.
 16.23. $r = \sin 6\varphi$.
 16.24. $r = 2 \cos \varphi, r = 3 \cos \varphi$.
 16.25. $r = \cos \varphi + \sin \varphi$.
 16.26. $r = 2 \sin 4\varphi$.
 16.27. $r = 2 \cos 6\varphi$.
 16.28. $r = \cos \varphi - \sin \varphi$.
 16.29. $r = 3 \sin \varphi, r = 5 \sin \varphi$.
 16.30. $r = 2 \sin \varphi, r = 4 \sin \varphi$.
 16.31. $r = 6 \sin \varphi, r = 4 \sin \varphi$.

Задача 17. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

- 17.1. $y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$.
 17.2. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq 2$.
 17.3. $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq 7/9$.
 17.4. $y = \ln \frac{5}{2x}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.
 17.5. $y = -\ln \cos x, 0 \leq x \leq \pi/6$.
 17.6. $y = e^x + 6, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$.
 17.7. $y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}, 1/4 \leq x \leq 1$.
 17.8. $y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 3$.
 17.9. $y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x, 0 \leq x \leq 8/9$.
 17.10. $y = \ln(1-x^2), 0 \leq x \leq 1/4$.
 17.11. $y = 2 + \operatorname{ch} x, 0 \leq x \leq 1$.
 17.12. $y = 1 - \ln \cos x, 0 \leq x \leq \pi/6$.
 17.13. $y = e^x + 13, \ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$.
 17.14. $y = -\arccos \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}, 0 \leq x \leq 1/4$.
 17.15. $y = 2 - e^x, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}$.
 17.16. $y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq \frac{15}{16}$.
 17.17. $y = 1 - \ln \sin x, \pi/3 \leq x \leq \pi/2$.
 17.18. $y = 1 - \ln(x^2 - 1), 3 \leq x \leq 4$.
 17.19. $y = \sqrt{x-x^2} - \arccos \sqrt{x} + 5, 1/9 \leq x \leq 1$.
 17.20. $y = -\arccos x + \sqrt{1-x^2} + 1, 0 \leq x \leq 9/16$.
 17.21. $y = \ln \sin x, \pi/3 \leq x \leq \pi/2$.
 17.22. $y = \ln 7 - \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.
 17.23. $y = \operatorname{ch} x + 3, 0 \leq x \leq 1$.
 17.24. $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 3/4$.
 17.25. $y = \ln \cos x + 2, 0 \leq x \leq \pi/6$.
 17.26. $y = e^x + 26, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$.
 17.27. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3, 0 \leq x \leq 2$.
 17.28. $y = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + 4, 0 \leq x \leq 1/2$.
 17.29. $y = (e^{2x} + e^{-2x} + 3)/4, 0 \leq x \leq 2$.
 17.30. $y = e^x + e, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$.
 17.31. $y = (1 - e^x - e^{-x})/2, 0 \leq x \leq 3$.

Задача 18. Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

$$18.1. \begin{cases} x=5(t-\sin t), \\ y=5(1-\cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

$$18.3. \begin{cases} x=4(\cos t + t \sin t), \\ y=4(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

$$18.5. \begin{cases} x=10 \cos^3 t, \\ y=10 \sin^3 t, \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

$$18.7. \begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(t-\cos t), \\ \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$18.9. \begin{cases} x=3(\cos t + t \sin t), \\ y=3(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi/3. \end{cases}$$

$$18.11. \begin{cases} x=6 \cos^3 t, \\ y=6 \sin^3 t, \\ 0 \leq t \leq \pi/3. \end{cases}$$

$$18.13. \begin{cases} x=2,5(t-\sin t), \\ y=2,5(1-\cos t), \\ \pi/2 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

$$18.15. \begin{cases} x=6(\cos t + t \sin t), \\ y=6(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

$$18.17. \begin{cases} x=8 \cos^3 t, \\ y=8 \sin^3 t, \\ 0 \leq t \leq \pi/6. \end{cases}$$

$$18.19. \begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \\ \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3. \end{cases}$$

$$18.21. \begin{cases} x=8(\cos t + t \sin t), \\ y=8(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi/4. \end{cases}$$

$$18.23. \begin{cases} x=4 \cos^3 t, \\ y=4 \sin^3 t, \\ \pi/6 \leq t \leq \pi/4. \end{cases}$$

$$18.25. \begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

$$18.2. \begin{cases} x=3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y=3(2 \sin t - \sin 2t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$18.4. \begin{cases} x=(t^2-2) \sin t + 2t \cos t, \\ y=(2-t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

$$18.6. \begin{cases} x=e^t(\cos t + \sin t), \\ y=e^t(\cos t - \sin t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

$$18.8. \begin{cases} x=\frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, \\ y=\frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \\ \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3. \end{cases}$$

$$18.10. \begin{cases} x=(t^2-2) \sin t + 2t \cos t, \\ y=(2-t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi/3. \end{cases}$$

$$18.12. \begin{cases} x=e^t(\cos t + \sin t), \\ y=e^t(\cos t - \sin t), \\ \pi/2 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

$$18.14. \begin{cases} x=3,5(2 \cos t - \cos 2t), \\ y=3,5(2 \sin t - \sin 2t), \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

$$18.16. \begin{cases} x=(t^2-2) \sin t + 2t \cos t, \\ y=(2-t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

$$18.18. \begin{cases} x=e^t(\cos t + \sin t), \\ y=e^t(\cos t - \sin t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$18.20. \begin{cases} x=2(2 \cos t - \cos 2t), \\ y=2(2 \sin t - \sin 2t), \\ 0 \leq t \leq \pi/3. \end{cases}$$

$$18.22. \begin{cases} x=(t^2-2) \sin t + 2t \cos t, \\ y=(2-t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$18.24. \begin{cases} x=e^t(\cos t + \sin t), \\ y=e^t(\cos t - \sin t), \\ 0 \leq t \leq 3\pi/2. \end{cases}$$

$$18.26. \begin{cases} x=4(2 \cos t - \cos 2t), \\ y=4(2 \sin t - \sin 2t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

$$18.27. \begin{cases} x=2(\cos t + t \sin t), \\ y=2(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

$$18.29. \begin{cases} x=2 \cos^3 t, \\ y=2 \sin^3 t, \\ 0 \leq t \leq \pi/4. \end{cases}$$

$$18.31. \begin{cases} x=(t^2-2) \sin t + 2t \cos t, \\ y=(2-t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

$$18.28. \begin{cases} x=(t^2-2) \sin t + 2t \cos t, \\ y=(2-t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

$$18.30. \begin{cases} x=e^t(\cos t + \sin t), \\ y=e^t(\cos t - \sin t), \\ \pi/6 \leq t \leq \pi/4. \end{cases}$$

Задача 19. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах.

$$19.1. \rho = 3e^{3\varphi/4}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$19.3. \rho = \sqrt{2}e^\varphi, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$19.5. \rho = 6e^{12\varphi/5}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$19.7. \rho = 4e^{4\varphi/3}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.9. \rho = 5e^{3\varphi/12}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.11. \rho = 1 - \sin \varphi, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq -\pi/6.$$

$$19.13. \rho = 3(1 + \sin \varphi), \quad -\pi/6 \leq \varphi \leq 0.$$

$$19.15. \rho = 5(1 - \cos \varphi), \quad -\pi/3 \leq \varphi \leq 0.$$

$$19.17. \rho = 7(1 - \sin \varphi), \quad -\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$19.19. \rho = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 3/4.$$

$$19.21. \rho = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 5/12.$$

$$19.23. \rho = 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 3/4.$$

$$19.25. \rho = 5\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 12/5.$$

$$19.27. \rho = 8 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/4.$$

$$19.29. \rho = 2 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$19.31. \rho = 6 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.2. \rho = 2e^{4\varphi/3}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$19.4. \rho = 5e^{5\varphi/12}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$19.6. \rho = 3e^{3\varphi/4}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.8. \rho = \sqrt{2}e^\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.10. \rho = 12e^{12\varphi/5}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.12. \rho = 2(1 - \cos \varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq -\pi/2.$$

$$19.14. \rho = 4(1 - \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$19.16. \rho = 6(1 + \sin \varphi), \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq 0.$$

$$19.18. \rho = 8(1 - \cos \varphi), \quad -2\pi/3 \leq \varphi \leq 0.$$

$$19.20. \rho = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 4/3.$$

$$19.22. \rho = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 12/5.$$

$$19.24. \rho = 3\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 4/3.$$

$$19.26. \rho = 2 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$19.28. \rho = 6 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.30. \rho = 8 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/4.$$

Задача 20. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями.

$$20.1. \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, \quad z=y, \quad z=0 \quad (y \geq 0).$$

$$20.3. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad z=0, \quad z=3.$$

$$20.5. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad z=1, \quad z=0.$$

$$20.7. z = x^2 + 9y^2, \quad z=3.$$

$$20.9. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{64} = -1, \quad z=16.$$

$$20.2. z = x^2 + 4y^2, \quad z=2.$$

$$20.4. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1, \quad z=12.$$

$$20.6. x^2 + y^2 = 9, \quad z=y, \quad z=0, \quad (y \geq 0).$$

$$20.8. \frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1, \quad z=0, \quad z=3.$$

$$20.10. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, \quad z=2, \quad z=0.$$

- 20.11. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1, z = y\sqrt{3}, z = 0, (y \geq 0)$.
- 20.12. $z = 2x^2 + 8y^2, z = 4$.
- 20.13. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} - z^2 = 1, z = 0, z = 2$.
- 20.14. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = -1, z = 12$.
- 20.15. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, z = 3, z = 0$.
- 20.16. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{16} = 1, z = y\sqrt{3}, z = 0 (y \geq 0)$.
- 20.17. $z = x^2 + 5y^2, z = 5$.
- 20.18. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 4$.
- 20.19. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1, z = 20$.
- 20.20. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1, z = 4, z = 0$.
- 20.21. $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{25} = 1, z = \frac{y}{\sqrt{3}}, z = 0, (y \geq 0)$.
- 20.22. $z = 4x^2 + 9y^2, z = 6$.
- 20.23. $x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 3$.
- 20.24. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{100} = -1, z = 20$.
- 20.25. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1, z = 5, z = 0$.
- 20.26. $\frac{x^2}{27} + y^2 = 1, z = \frac{y}{\sqrt{3}}, z = 0 (y \geq 0)$.
- 20.27. $z = 2x^2 + 18y^2, z = 6$.
- 20.28. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1, z = 0, z = 2$.
- 20.29. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{64} = -1, z = 16$.
- 20.30. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{144} = 1, z = 6, z = 0$.
- 20.31. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{196} = 1, z = 7, z = 0$.

Задача 21. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В вариантах 1 — 16 ось вращения Ox , в вариантах 17 — 31 ось вращения Oy .

- 21.1. $y = -x^2 + 5x - 6, y = 0$.
- 21.2. $2x - x^2 - y = 0, 2x^2 - 4x + y = 0$.
- 21.3. $y = 3 \sin x, y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$.
- 21.4. $y = 5 \cos x, y = \cos x, x = 0, x \geq 0$.
- 21.5. $y = \sin^2 x, x = \pi/2, y = 0$.
- 21.6. $x = \sqrt[3]{y-2}, x = 1, y = 1$.
- 21.7. $y = xe^x, y = 0, x = 1$.
- 21.8. $y = 2x - x^2, y = -x + 2, x = 0$.
- 21.9. $y = 2x - x^2, y = -x + 2$.
- 21.10. $y = e^{1-x}, y = 0, x = 0, x = 1$.
- 21.11. $y = x^2, y^2 - x = 0$.
- 21.12. $x^2 + (y-2)^2 = 1$.
- 21.13. $y = 1 - x^2, x = 0, x = \sqrt{y-2}, x = 1$.
- 21.14. $y = x^2, y = 1, x = 2$.
- 21.15. $y = x^2, y = \sqrt{x}$.
- 21.16. $y = \sin(\pi x/2), y = x^2$.
- 21.17. $y = \arccos(x/3), y = \arccos x, y = 0$.
- 21.18. $y = \arcsin(x/5), y = \arcsin x, y = \pi/2$.
- 21.19. $y = x^2, x = 2, y = 0$.
- 21.20. $y = x^2 + 1, y = x, x = 0, x = 1$.
- 21.21. $y = \sqrt{x-1}, y = 0, y = 1, x = 0,5$.
- 21.22. $y = \ln x, x = 2, y = 0$.
- 21.23. $y = (x-1)^2, y = 1$.
- 21.24. $y^2 = x - 2, y = 0, y = x^3, y = 1$.
- 21.25. $y = x^3, y = x^2$.
- 21.26. $y = \arccos \frac{x}{5}, y = \arccos \frac{x}{3}, y = 0$.

21.27. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

21.29. $y = x^3$, $y = x$.

21.31. $y = (x-1)^2$, $x=0$, $x=2$, $y=0$.

21.28. $y = x^2 - 2x + 1$, $x=2$, $y=0$.

21.30. $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $x=0$.

Задача 22

Варианты 1 — 10

Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции (рис. 2). Плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, ускорение свободного падения g положить равным 10 м/с^2 .

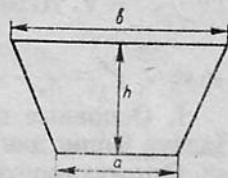


Рис. 2

Указание. Давление на глубине x равно $\rho g x$.

22.1. $a = 4,5 \text{ м}$, $b = 6,6 \text{ м}$, $h = 3,0 \text{ м}$.

22.3. $a = 5,1 \text{ м}$, $b = 7,8 \text{ м}$, $h = 3,0 \text{ м}$.

22.5. $a = 5,7 \text{ м}$, $b = 9,0 \text{ м}$, $h = 4,0 \text{ м}$.

22.7. $a = 6,3 \text{ м}$, $b = 10,2 \text{ м}$, $h = 4,0 \text{ м}$.

22.9. $a = 6,9 \text{ м}$, $b = 11,4 \text{ м}$, $h = 5,0 \text{ м}$.

22.2. $a = 4,8 \text{ м}$, $b = 7,2 \text{ м}$, $h = 3,0 \text{ м}$.

22.4. $a = 5,4 \text{ м}$, $b = 8,4 \text{ м}$, $h = 3,0 \text{ м}$.

22.6. $a = 6,0 \text{ м}$, $b = 9,6 \text{ м}$, $h = 4,0 \text{ м}$.

22.8. $a = 6,6 \text{ м}$, $b = 10,8 \text{ м}$, $h = 4,0 \text{ м}$.

22.10. $a = 7,2 \text{ м}$, $b = 12,0 \text{ м}$, $h = 5,0 \text{ м}$.

Варианты 11 — 20

Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту H км. Масса спутника равна m т, радиус Земли $R_z = 6380$ км. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли положить равным 10 м/с^2 .

22.11. $m = 7,0 \text{ т}$, $H = 200 \text{ км}$.

22.13. $m = 6,0 \text{ т}$, $H = 300 \text{ км}$.

22.15. $m = 5,0 \text{ т}$, $H = 400 \text{ км}$.

22.17. $m = 4,0 \text{ т}$, $H = 500 \text{ км}$.

22.19. $m = 3,0 \text{ т}$, $H = 600 \text{ км}$.

22.12. $m = 7,0 \text{ т}$, $H = 250 \text{ км}$.

22.14. $m = 6,0 \text{ т}$, $H = 350 \text{ км}$.

22.16. $m = 5,0 \text{ т}$, $H = 450 \text{ км}$.

22.18. $m = 4,0 \text{ т}$, $H = 550 \text{ км}$.

22.20. $m = 3,0 \text{ т}$, $H = 650 \text{ км}$.

Варианты 21 — 31

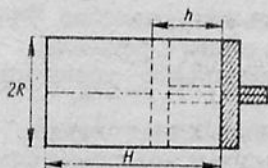


Рис. 3

Цилиндр наполнен газом под атмосферным давлением $103,3 \text{ кПа}$. Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изотермическом сжатии газа поршнем, переместившимся внутрь цилиндра на h м (рис. 3).

Указание. Уравнение состояния газа $pV = \text{const}$, где p — давление, V — объем.

$$16.11. y'' + 6y' + 8y = 4e^{-2x}/(2 + e^{2x}), y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$16.12. y'' + 9y = 9/\sin 3x, y(\pi/6) = 4, y'(\pi/6) = 3\pi/2.$$

$$16.13. y'' + 9y = 9/\cos 3x, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

$$16.14. y'' - y' = e^{-x}/(2 + e^{-x}), y(0) = \ln 27, y'(0) = \ln 9 - 1.$$

$$16.15. y'' + 4y = 4 \operatorname{ctg} 2x, y(\pi/4) = 3, y'(\pi/4) = 2.$$

$$16.16. y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3 + e^{-x}}, y(0) = 1 + 8 \ln 2, y'(0) = 14 \ln 2.$$

$$16.17. y'' - 6y' + 8y = 4e^{2x}/(1 + e^{-2x}), y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$16.18. y'' + 16y = 16/\sin 4x, y(\pi/8) = 3, y'(\pi/8) = 2\pi.$$

$$16.19. y'' + 16y = 16/\cos 4x, y(0) = 3, y'(0) = 0.$$

$$16.20. y'' - 2y' = 4e^{-2x}/(1 + e^{-2x}), y(0) = \ln 4, y'(0) = \ln 4 - 2.$$

$$16.21. y'' + \frac{y}{4} = \frac{1}{4} \operatorname{ctg}(x/2), y(\pi) = 2, y'(\pi) = 1/2.$$

$$16.22. y'' - 3y' + 2y = 1/(2 + e^{-x}), y(0) = 1 + 3 \ln 3, y'(0) = 5 \ln 3.$$

$$16.23. y'' + 3y' + 2y = e^{-x}/(2 + e^x), y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$16.24. y'' + 4y = 4/\sin 2x, y(\pi/4) = 2, y'(\pi/4) = \pi.$$

$$16.25. y'' + 4y = 4/\cos 2x, y(0) = 2, y'(0) = 0.$$

$$16.26. y'' + y' = e^x/(2 + e^x), y(0) = \ln 27, y'(0) = 1 - \ln 9.$$

$$16.27. y'' + y = 2 \operatorname{ctg} x, y(\pi/2) = 1, y'(\pi/2) = 2.$$

$$16.28. y'' - 3y' + 2y = 1/(1 + e^{-x}), y(0) = 1 + 2 \ln 2, y'(0) = 3 \ln 2.$$

$$16.29. y'' - 3y' + 2y = e^x/(1 + e^{-x}), y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$16.30. y'' + y = 1/\sin x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'(\pi/2) = \pi/2.$$

$$16.31. y'' + y = 1/\cos x, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

VI. РЯДЫ

Теоретические вопросы

1. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости ряда.
2. Теоремы сравнения.
3. Признаки Даламбера и Коши.
4. Интегральный признак сходимости ряда.
5. Теорема Лейбница. Оценка остатка знакопередающегося ряда.
6. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
7. Понятие равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса.
8. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда.
9. Теоремы о почленном интегрировании и почленном дифференцировании функционального ряда.
10. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.

11. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы ряда.

12. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

13. Разложение функции в степенной ряд. Ряд Тейлора.

14. Разложение по степеням x бинома $(1+x)^m$.

15. Условия разложимости функции в ряд Тейлора.

16. Разложение по степеням x функций e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$.

Теоретические упражнения

1. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, если $a_n \leq c_n \leq b_n$.

Указание. Рассмотреть неравенства $0 \leq c_n - a_n \leq b_n - a_n$.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0$) сходится. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ тоже сходится. Показать, что обратное утверждение неверно.

3. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |b_n|$ тоже сходится.

Указание. Доказать и использовать неравенство $|ab| \leq a^2 + b^2$.

4. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ тоже сходится.

5. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Можно ли утверждать, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$?

Рассмотреть пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right]$.

6. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$.

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ также сходится равномерно на этом отрезке.

7. Может ли функциональный ряд на отрезке:

а) сходиться равномерно и не сходиться абсолютно,

б) сходиться абсолютно и не сходиться равномерно?

Рассмотреть примеры:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$, отрезок $[a, b]$ произвольный;

6) $\sum_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n$, отрезок $[0, 1]$.

8. Показать, что функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{10^n}$ всюду непрерывна.

9. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$ сходится равномерно в интервале $(-\infty, +\infty)$. Можно ли его почленно дифференцировать в этом интервале?

10. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-nx}$ сходится в точке x_0 , то он сходится абсолютно $\forall x > x_0$.

Расчетные задания

Задача 1. Найти сумму ряда.

1.1. $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 14n + 48}$

1.3. $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{4}{n^2 - 12n + 35}$

1.5. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{6}{n^2 - 10n + 24}$

1.7. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{8}{n^2 - 8n + 15}$

1.9. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{10}{n^2 - 6n + 8}$

1.11. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{12}{n^2 - 4n + 3}$

1.13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{n^2 + 4n + 3}$

1.15. $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{30}{n^2 - 14n + 48}$

1.17. $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{36}{n^2 - 12n + 35}$

1.19. $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{12}{n^2 - 10n + 24}$

1.21. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{60}{n^2 - 8n + 15}$

1.23. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{48}{n^2 - 6n + 8}$

1.25. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{6}{n^2 - 4n + 3}$

1.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{n^2 + 4n + 3}$

1.2. $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{18}{n^2 - 13n + 40}$

1.4. $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{36}{n^2 - 11n + 28}$

1.6. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{54}{n^2 - 9n + 18}$

1.8. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{72}{n^2 - 7n + 10}$

1.10. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{90}{n^2 - 5n + 4}$

1.12. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{18}{n^2 - n - 2}$

1.14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{36}{n^2 + 7n + 10}$

1.16. $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{54}{n^2 - 11n + 28}$

1.18. $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{72}{n^2 - 9n + 18}$

1.20. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{18}{n^2 - 7n + 10}$

1.22. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{36}{n^2 - 5n + 4}$

1.24. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{54}{n^2 + n - 2}$

1.26. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{18}{n^2 - n - 2}$

1.28. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{36}{n^2 + n - 2}$

$$1.29. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{72}{n^2 + 6n + 8}$$

$$1.31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{72}{n^2 + 5n + 4}$$

$$1.30. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{54}{n^2 + 5n + 4}$$

Задача 2. Исследовать на сходимость ряд.

$$2.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n \sqrt{n}}{n \sqrt{n}}$$

$$2.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n^2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$2.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \sin n}{n - \ln n}$$

$$2.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2 + \cos n\pi)}{2n^2 - 1}$$

$$2.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1}$$

$$2.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{n^2 + 2}$$

$$2.13. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \ln n}{n^2 - 3}$$

$$2.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \cos n}{\sqrt[4]{n^3}}$$

$$2.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$$

$$2.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + \cos n\pi) \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7 + 5}}$$

$$2.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2^n}{n^2}$$

$$2.23. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n + \sqrt[3]{\ln^2 n}}$$

$$2.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 n}{n(n+1)}$$

$$2.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin n}{n(n+2)}$$

$$2.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n(2+n^2)}}$$

$$2.31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 2}}{n^2(2 + \sin n)}$$

$$2.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 n}{n^3}$$

$$2.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$$

$$2.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n}{n^3 + 2}$$

$$2.8. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 + \sin n}{\sqrt[3]{n^3 - n}}$$

$$2.10. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \sqrt{n^2 + 3n}}{\sqrt{n^2 - n}}$$

$$2.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 n}{n^3 + 5}$$

$$2.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^3(2 + \cos n\pi)}$$

$$2.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3 + n + 1}$$

$$2.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^3 n}{n^4 + 3}$$

$$2.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \sin n}{(n+1)(n+2)}$$

$$2.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^5 + n}}$$

$$2.24. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 - \cos n}{\sqrt{n^2 - n}}$$

$$2.26. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 + \cos n}{\sqrt[4]{n^6 - 1}}$$

$$2.28. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 - \sin n}{\sqrt[3]{n^3 - 1}}$$

$$2.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2}{n^3 + n}$$

Задача 3. Исследовать на сходимость ряд.

$$3.1. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(1 - \cos \frac{1}{n+1}\right).$$

$$3.3. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+5}{n^2+4}.$$

$$3.5. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}.$$

$$3.7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{n-1}}{n^3}} - 1 \right).$$

$$3.9. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{\frac{1}{n^3}} - 1 \right).$$

$$3.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4\sqrt[n]{n}}.$$

$$3.13. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+5}} \sin \frac{1}{n-1}.$$

$$3.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+3}} \left(e^{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} - 1 \right).$$

$$3.17. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^3}.$$

$$3.19. \sum_{n=3}^{\infty} n^3 \operatorname{tg}^5 \frac{\pi}{n}.$$

$$3.21. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right).$$

$$3.23. \sum_{n=2}^{\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^3-1}} - 1 \right).$$

$$3.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \sin \frac{2\pi}{2n+1}.$$

$$3.27. \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{\sqrt[n]{n^4}}.$$

$$3.29. \sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{(n-1)\sqrt[n]{n^2+1}}.$$

$$3.31. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n}{(n^2+3)^{5/2}}.$$

$$3.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

$$3.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+4}} \sin \frac{1}{n+1}.$$

$$3.6. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n^2+3}{n^2-n}.$$

$$3.8. \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n} \arcsin \frac{n+1}{n^3-2}.$$

$$3.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \sin \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

$$3.12. \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[n]{n} \operatorname{tg} \frac{n-1}{n^3-n}.$$

$$3.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+2}} \operatorname{arctg} \frac{n+3}{n^2+5}.$$

$$3.16. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2-n+2}.$$

$$3.18. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3+2}{n^3+1}.$$

$$3.20. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(\sqrt[n]{n}-1)(n\sqrt[n]{n^3}-1)}.$$

$$3.22. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n^3+2}}.$$

$$3.24. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

$$3.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+7n}{5^n+n}.$$

$$3.28. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)^2.$$

$$3.30. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2\sqrt[n]{n+5}}.$$

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд.

$$4.1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n-1)!}.$$

$$4.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n!)^2}.$$

- 4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$
- 4.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^3 n!}{(2n)!}$
- 4.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{2^n(3n+5)}$
- 4.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \sin \frac{2}{3^n}$
- 4.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \operatorname{arctg} \frac{5}{n}$
- 4.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$
- 4.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n}$
- 4.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n^2-1)}{n!}$
- 4.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n^2}{(n+2)!}$
- 4.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$
- 4.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$
- 4.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{(3n)!}$
- 4.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^{n(n+1)!}$
- 4.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}}$
- 4.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$
- 4.18. $\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n}$
- 4.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$
- 4.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$
- 4.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$
- 4.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$
- 4.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)! 4^n}$
- 4.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}$
- 4.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5)}$
- 4.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n+3}$
- 4.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n n^2}$
- 4.28. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^{n-1} \sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$
- 4.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \sqrt[3]{n}}{3^n+2}$
- 4.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$
- 4.31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} n!}$

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд.

- 5.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2}$
- 5.2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^n$
- 5.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1} \right)^{n^2}$
- 5.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}$
- 5.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2} \right)^{n^2}$
- 5.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1} \right)^n n^3$
- 5.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1} \right)^{n^2}$
- 5.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5} \right)^{n^2}$
- 5.9. $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{arcsin}^n \frac{\pi}{4n}$
- 5.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^{n^2}$

$$5.11. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \frac{n}{5^n}$$

$$5.13. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^n$$

$$5.15. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$$

$$5.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$$

$$5.19. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln n)^n}$$

$$5.21. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{3n}$$

$$5.23. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} e^{-n}$$

$$5.25. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$$

$$5.27. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$$

$$5.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 3^{n+2}}{5^n}$$

$$5.31. \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \operatorname{arctg}^{2n} \frac{\pi}{4n}$$

$$5.12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$$

$$5.14. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$$

$$5.16. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$5.18. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}$$

$$5.20. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^2}$$

$$5.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^3}{(2n+1)^n}$$

$$5.24. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$$

$$5.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n^2+1)^{n/2}}$$

$$5.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

$$5.30. \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n} \left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$$

Задача 6. Исследовать на сходимость ряд.

$$6.1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 (3n+1)}$$

$$6.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2 (2n+1)}$$

$$6.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4) \ln^2 (5n+2)}$$

$$6.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\sqrt{2}+1) \ln^2 (n\sqrt{3}+1)}$$

$$6.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \ln (2n)}$$

$$6.11. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \ln n}$$

$$6.13. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-3) \ln (3n+1)}$$

$$6.15. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \ln^2 (2n)}$$

$$6.17. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln (n-1)}$$

$$6.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 (2n+1)}$$

$$6.4. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5) \ln^2 (4n-7)}$$

$$6.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln^2 (n\sqrt{5}+2)}$$

$$6.8. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2) \ln (n-3)}$$

$$6.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln (2n)}$$

$$6.12. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \ln (n+1)}$$

$$6.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln^2 n}$$

$$6.16. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2 (n+1)}$$

$$6.18. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n \sqrt{\ln(3n-1)}}$$

$$6.19. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}$$

$$6.21. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+5) \ln^2(n+1)}$$

$$6.23. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1) \ln n}$$

$$6.25. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3) \ln^2(n/2)}$$

$$6.27. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(2n^2+3) \ln n}$$

$$6.29. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{(3n^2+2) \ln(n/2)}$$

$$6.31. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n^2-2) \ln(2n)}$$

$$6.20. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}$$

$$6.22. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \ln^2(n+7)}$$

$$6.24. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n^2-3) \ln^2 n}$$

$$6.26. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2+5) \ln n}$$

$$6.28. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n+1}{(5n^2-9) \ln(n-2)}$$

$$6.30. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1) \ln n}$$

Задача 7. Исследовать на сходимость ряд.

$$7.1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$7.3. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$$

$$7.5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2}{n^4 - n^2 + 1}$$

$$7.7. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}$$

$$7.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}} \sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$$

$$7.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}$$

$$7.13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$$

$$7.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}(n+1)}$$

$$7.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3/2)^n(n+1)}$$

$$7.19. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+3)!}{2^n}$$

$$7.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{5n-1}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}$$

$$7.23. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$$

$$7.2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

$$7.4. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n (\ln \ln n)}$$

$$7.6. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \ln n}$$

$$7.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4 \sqrt{2n+3}}$$

$$7.10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n-1}{n} \right)^n$$

$$7.12. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(2n)}$$

$$7.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$$

$$7.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{3n} \cos(\pi/3n)}$$

$$7.18. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n}$$

$$7.20. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$$

$$7.22. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(2n+1)}$$

$$7.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos(2/\sqrt{n+4})}$$

7.25.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{2^n}$$

7.27.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 3^n}{3^n}$$

7.29.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n}$$

7.31.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{(n+1)!}$$

7.26.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^n \frac{\pi}{2^n}$$

7.28.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

7.30.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Задача 8. Вычислить сумму ряда с точностью α .

8.1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n^2}, \alpha=0,01.$$

8.3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}, \alpha=0,001.$$

8.5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^3(n+1)}, \alpha=0,01.$$

8.7.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}, \alpha=0,1.$$

8.9.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}, \alpha=0,001.$$

8.11.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}, \alpha=0,001.$$

8.13.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{7^n}, \alpha=0,0001.$$

8.15.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}, \alpha=0,001.$$

8.17.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!2^n}, \alpha=0,00001.$$

8.19.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}, \alpha=0,001.$$

8.21.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!n!}, \alpha=0,00001.$$

8.23.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}, \alpha=0,001.$$

8.25.
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(n+1)^n}, \alpha=0,001.$$

8.27.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}, \alpha=0,01.$$

8.29.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^3+1)^2}, \alpha=0,001.$$

8.31.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(1+n^3)^2}, \alpha=0,001.$$

8.2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \alpha=0,01.$$

8.4.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}, \alpha=0,001.$$

8.6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \alpha=0,0001.$$

8.8.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3^n}, \alpha=0,1.$$

8.10.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \alpha=0,0001.$$

8.12.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5} \right)^n, \alpha=0,01.$$

8.14.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3} \right)^n, \alpha=0,1.$$

8.16.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n!}, \alpha=0,01.$$

8.18.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!n!}, \alpha=0,001.$$

8.20.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!}, \alpha=0,0001.$$

8.22.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(n+1)}, \alpha=0,001.$$

8.24.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}, \alpha=0,01.$$

8.26.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^n}, \alpha=0,001.$$

8.28.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2(n+3)}, \alpha=0,01.$$

8.30.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2+n^3}, \alpha=0,01.$$

Задача 9. Найти область сходимости ряда.

$$9.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^n + 1}.$$

$$9.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt{n} + \sqrt[3]{n+1})^{x+2}}.$$

$$9.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{x^2 + n^2}.$$

$$9.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^{3x-x^2}}.$$

$$9.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

$$9.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^{x^2+1} + 4}.$$

$$9.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nx} + 1}.$$

$$9.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + e^{-nx}}.$$

$$9.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+x^n}{1-x^n}.$$

$$9.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\sqrt{n^3} + n)^{x+1}}.$$

$$9.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+e^n)}.$$

$$9.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 + 3x - x^2}.$$

$$9.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n + |x|^{-n}}{2}.$$

$$9.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n^{x^2+2} + 3}.$$

$$9.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+e^n)(n^2+1)}.$$

$$9.31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n^2 + \sqrt{n+1})^{x+1}}.$$

$$9.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x)}}.$$

$$9.4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n e^{n(x^2-4) + x\sqrt{n}}.$$

$$9.6. \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2 \sin \frac{x^2+1}{n}}.$$

$$9.8. \sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin 3^{-nx}.$$

$$9.10. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{arctg} 2^{nx}.$$

$$9.12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n 4^{\frac{n^2}{x}}.$$

$$9.14. \sum_{n=1}^{\infty} n e^{n(x^2-4x+3) + x\sqrt{n}}.$$

$$9.16. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \sin \frac{x^2+1}{n}}.$$

$$9.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x^2)}}.$$

$$9.20. \sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin 3^{nx}.$$

$$9.22. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{arctg} 2^{-nx}.$$

$$9.24. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n e^{-\frac{n}{1+x^2} + x\sqrt{n}}.$$

$$9.26. \sum_{n=1}^{\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right)^n 4^{-\frac{n^2}{x}}.$$

$$9.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln|x|}}.$$

$$9.30. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(x\sqrt{n}-1)^2}.$$

Задача 10. Найти область сходимости ряда.

$$10.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3}{2n+3} (x+3)^{2n}.$$

$$10.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}.$$

$$10.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} (x-2)^{2n}.$$

$$10.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)5^n} (x-3)^n.$$

$$10.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(n+3)^2 2^{n-1}} (x+7)^n.$$

$$10.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}.$$

$$10.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3) \ln(n+3)} (x+6)^n.$$

$$10.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{(2n-1)4^n}.$$

$$10.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}.$$

$$10.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3^n}.$$

$$10.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)3^n} (x+6)^n.$$

$$10.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+3)2^n}.$$

$$10.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)2^{2n}} (x-3)^n.$$

$$10.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)3^n} (x+4)^n.$$

$$10.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-1)2^n} (x+3)^n.$$

$$10.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+3)!} (x+4)^{2n+1}.$$

$$10.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-1)^3} (x-4)^{3n}.$$

$$10.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}.$$

$$10.31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} x^{2n}.$$

$$10.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+2)3^n}.$$

$$10.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}.$$

$$10.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(5n-8)^3} (x-2)^{3n}.$$

$$10.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} (x-2)^n.$$

$$10.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(3n+1)^3} (x-4)^{2n}.$$

$$10.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!} (x+5)^{2n+1}.$$

$$10.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4) \ln(n+4)}.$$

$$10.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!} (x+1)^{2n-1}.$$

$$10.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(3n+1)^3} (x-1)^{3n}.$$

$$10.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n-1)2^n} (x+2)^n.$$

$$10.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2) \ln(n+2)} (x+1)^n.$$

$$10.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^4+1)^2} (x-3)^n.$$

Задача 11. Найти область сходимости ряда.

$$11.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(x^2-6x+13)^n}.$$

$$11.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n 3^{\frac{n}{x-1}}.$$

$$11.5. \sum_{n=1}^{\infty} 8^n n^2 \sin^{3n} x.$$

$$11.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n(x^2-5x+10)^n}.$$

$$11.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(x+e)}{n+e}.$$

$$11.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \operatorname{tg}^{2n} x.$$

$$11.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2(x^2+2)^n}.$$

$$11.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n^2} \sin^{3n} x.$$

$$11.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} (x^2-4x+6)^n.$$

$$11.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} 2^{\frac{n}{x-3}}.$$

$$11.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \sin^{2n}(2x).$$

$$11.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-6x+12)^n}{4^n(n^2+1)}.$$

$$11.12. \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{n}{\sin x}}.$$

$$11.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} \sin^4(3x).$$

- 11.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 4^{\frac{n}{x-2}}$.
- 11.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2} \sin^{2n} x$.
- 11.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(x^2-2x+3)^n}$.
- 11.21. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n \sin x}$.
- 11.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{tg}^n x$.
- 11.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2(x^2-4x+5)^n}$.
- 11.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(x-e)}{n-e}$.
- 11.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n/2}}{\sqrt{n}} \operatorname{tg}^n(2x)$.
- 11.31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3(x^2-4x+7)^n}$.
- 11.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-5x+11)^n}{5^n(n^2+5)}$.
- 11.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{2^n n^2}$.
- 11.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{tg}^n(2x)$.
- 11.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2+1)^n}{2^n(n+1)}$.
- 11.24. $\sum_{n=1}^{\infty} n 5^{\frac{n}{x-2}}$.
- 11.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^{n/2}} \operatorname{tg}^n x$.
- 11.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-2x+2)^n}{2^n(n^2+2)}$.
- 11.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{n \sin x}$.

Задача 12. Найти сумму ряда.

- 12.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n(n-1)}$.
- 12.3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n+1}$.
- 12.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n x^{4n-4}}$.
- 12.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.
- 12.9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^4)^n}{n+1}$.
- 12.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{n x^{n-1}}$.
- 12.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)}$.
- 12.15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n+1}$.
- 12.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n x^{3n-3}}$.
- 12.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n(n+1)}$.
- 12.21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^3)^n}{n+1}$.
- 12.2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)x^n}$.
- 12.4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$.
- 12.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^3)^{n-1}}{n}$.
- 12.8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)x^{3n}}$.
- 12.10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.
- 12.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^{n-1}}{n}$.
- 12.14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)x^{5n}}$.
- 12.16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \frac{1}{x^{n+3}}$.
- 12.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^4)^{n-1}}{n}$.
- 12.20. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)x^{2n}}$.
- 12.22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \frac{1}{x^{n+4}}$.

$$12.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^{5n-5}}$$

$$12.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+5}}{n(n+1)}$$

$$12.27. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^5)^n}{n+1}$$

$$12.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{nx^{2n-2}}$$

$$12.31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{n-1} x}{n}$$

$$12.24. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n+1}$$

$$12.26. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)x^{4n}}$$

$$12.28. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+6}}{(n+1)(n+2)}$$

$$12.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^3)^{n-1}}{n}$$

Задача 13. Найти сумму ряда.

$$13.1. \sum_{n=1}^{\infty} (n+5)x^{n-1}$$

$$13.3. \sum_{n=1}^{\infty} (n+4)x^{n-1}$$

$$13.5. \sum_{n=1}^{\infty} (n+3)x^{n-1}$$

$$13.7. \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n-1}$$

$$13.9. \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^{n-1}$$

$$13.11. \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-2}$$

$$13.13. \sum_{n=2}^{\infty} (n+4)x^{n-2}$$

$$13.15. \sum_{n=2}^{\infty} (n+3)x^{n-2}$$

$$13.17. \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)x^{n-2}$$

$$13.19. \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)x^{n-2}$$

$$13.21. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{2n}$$

$$13.23. \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{3n}$$

$$13.25. \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{4n}$$

$$13.27. \sum_{n=0}^{\infty} (n+4)x^{5n}$$

$$13.2. \sum_{n=0}^{\infty} (n+5)x^{2n}$$

$$13.4. \sum_{n=0}^{\infty} (n+4)x^{3n}$$

$$13.6. \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{4n}$$

$$13.8. \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{5n}$$

$$13.10. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{6n}$$

$$13.12. \sum_{n=1}^{\infty} nx^{6n}$$

$$13.14. \sum_{n=1}^{\infty} nx^{5n}$$

$$13.16. \sum_{n=1}^{\infty} nx^{4n}$$

$$13.18. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{3n+3}$$

$$13.20. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{2n+2}$$

$$13.22. \sum_{n=3}^{\infty} (n+1)x^{n-3}$$

$$13.24. \sum_{n=3}^{\infty} (n+2)x^{n-3}$$

$$13.26. \sum_{n=3}^{\infty} (n+3)x^{n-3}$$

$$13.28. \sum_{n=3}^{\infty} (n+4)x^{n-3}$$

13.29. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+5)x^{6n}$.

13.30. $\sum_{n=3}^{\infty} (n+5)x^{n-3}$.

13.31. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+6)x^{7n}$.

Задача 14. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x .

14.1. $9/(20-x-x^2)$.

14.2. $x^2/\sqrt{4-5x}$.

14.3. $\ln(1-x-6x^2)$.

14.4. $2x \cos^2(x/2) - x$.

14.5. $(\operatorname{sh} 2x)/x - 2$.

14.6. $7/(12+x-x^2)$.

14.7. $x\sqrt[3]{27-2x}$.

14.8. $\ln(1+x-6x^2)$.

14.9. $(x-1) \sin 5x$.

14.10. $(\operatorname{ch} 3x - 1)/x^2$.

14.11. $6/(8+2x-x^2)$.

14.12. $1/\sqrt{16-3x}$.

14.13. $\ln(1-x-12x^2)$.

14.14. $(3+e^{-x})^2$.

14.15. $(\operatorname{arcsin} x)/x - 1$.

14.16. $7/(12-x-x^2)$.

14.17. $x^2\sqrt{4-3x}$.

14.18. $\ln(1+2x-8x^2)$.

14.19. $2x \sin^2(x/2) - x$.

14.20. $(x-1) \operatorname{sh} x$.

14.21. $5/(6+x-x^2)$.

14.22. $x\sqrt[3]{27-2x}$.

14.23. $\ln(1+x-12x^2)$.

14.24. $(\sin 3x)/x - \cos 3x$.

14.25. $(\operatorname{arctg} x)/x$.

14.26. $5/(6-x-x^2)$.

14.27. $\sqrt[4]{16-5x}$.

14.28. $\ln(1-x-20x^2)$.

14.29. $(2-e^x)^2$.

14.30. $(x-1) \operatorname{ch} x$.

14.31. $\frac{3}{2-x-x^2}$.

Задача 15. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

15.1. $\int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx$.

15.2. $\int_0^{0,1} \sin(100x^2) dx$.

15.3. $\int_0^1 \cos x^2 dx$.

15.4. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

15.5. $\int_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx$.

15.6. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x/5)}{x} dx$.

15.7. $\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$.

15.8. $\int_0^{0,2} e^{-3x^2} dx$.

15.9. $\int_0^{0,2} \sin(25x^2) dx$.

15.10. $\int_0^{0,5} \cos(4x^2) dx$.

- 15.11. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$
- 15.13. $\int_0^{0,4} \frac{\ln(1+x/2)}{x} dx.$
- 15.15. $\int_0^{0,2} e^{-2x^2} dx.$
- 15.17. $\int_0^{0,4} \cos(25x^2) dx.$
- 15.19. $\int_0^{2,5} \frac{1-e^{-x/2}}{x} dx.$
- 15.21. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$
- 15.23. $\int_0^2 \sin(4x^2) dx.$
- 15.25. $\int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$
- 15.27. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$
- 15.29. $\int_0^{0,1} e^{-3x^2/25} dx.$
- 15.31. $\int_0^1 \cos(100x^2) dx.$
- 15.12. $\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx.$
- 15.14. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$
- 15.16. $\int_0^{0,4} \sin(5x/2)^2 dx.$
- 15.18. $\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$
- 15.20. $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx.$
- 15.22. $\int_0^{0,4} e^{-3x^{3/4}} dx.$
- 15.24. $\int_0^{0,5} \cos(5x/2)^2 dx.$
- 15.26. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$
- 15.28. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$
- 15.30. $\int_0^1 \sin x^2 dx.$

VII. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Теоретические вопросы

1. Определения двойного и тройного интегралов. Их геометрический и физический смысл.

2. Основные свойства двойных и тройных интегралов.
3. Теорема о среднем для двойного и тройного интегралов.
4. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (случай прямоугольной области).
5. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (общий случай).
6. Замена переменных в двойном интеграле.
7. Якобиан, его геометрический смысл.
8. Двойной интеграл в полярных координатах.
9. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.
10. Тройной интеграл в сферических координатах.

Теоретические упражнения

1. Пользуясь определением двойного интеграла, доказать, что $\iint_{x^2+y^2 < R^2} x^m y^n dx dy = 0$, если m и n — натуральные числа и, по меньшей мере, одно из них нечетно.
2. С помощью теоремы о среднем найти

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{\pi R^2} \iint_{x^2+y^2 < R^2} f(x, y) dx dy,$$

где $f(x, y)$ — непрерывная функция.

3. Оценить интеграл

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 < R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}, \quad x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > R^2,$$

т. е. указать, между какими значениями заключена его величина.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$, если область D — прямоугольник $\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, а $f(x, y) = F_{xy}''(x, y)$.
5. Доказать равенство $\iint_D f(x)g(y) dx dy = \int_a^b f(x) dx \int_c^d g(y) dy$, если область D — прямоугольник $\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.
6. Доказать формулу Дирихле

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx, \quad a > 0.$$

7. Пользуясь формулой Дирихле, доказать равенство

$$\int_0^a dy \int_0^y f(x) dx = \int_0^a (a-x)f(x) dx.$$

8. Какой из интегралов больше

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y, z) dz \text{ или } \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz,$$

если $f(x, y, z) > 0$?

Расчетные задания

Задача 1. Изменить порядок интегрирования.

$$1.1. \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f dx.$$

$$1.2. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx.$$

$$1.3. \int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$$

$$1.4. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f dx.$$

$$1.5. \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f dy + \int_{-1}^0 dx \int_x^0 f dy.$$

$$1.6. \int_0^{1/\sqrt{2}} dy \int_0^{\arcsin y} f dx + \int_{1/\sqrt{2}}^1 dy \int_0^{\arccos y} f dx.$$

$$1.7. \int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y}} f dx.$$

$$1.8. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f dx.$$

$$1.9. \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{x^2} f dy.$$

$$1.10. \int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f dy.$$

$$1.11. \int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f dy.$$

$$1.12. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dx.$$

$$1.13. \int_0^{\pi/4} dy \int_0^{\sin y} f dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int_0^{\cos y} f dx.$$

$$1.14. \int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^0 f dy + \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt{x}}^0 f dy.$$

$$1.15. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f dx.$$

$$1.16. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f dx.$$

$$1.17. \int_0^1 dy \int_{-y}^0 f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx.$$

$$1.18. \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dx.$$

$$1.19. \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f dy.$$

$$1.20. \int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^0 f dx.$$

$$1.21. \int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f dx.$$

$$1.22. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy.$$

$$1.23. \int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\sin x} f dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} f dy.$$

$$1.24. \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_y^0 f dx.$$

$$1.25. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f dy.$$

$$1.26. \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f dy.$$

$$1.27. \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^0 f dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^0 f dy.$$

$$1.28. \int_0^1 dx \int_0^x f dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy.$$

$$1.29. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$$

$$1.30. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f dy.$$

$$1.31. \int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f dy.$$

Задача 2. Вычислить.

$$2.1. \iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

$$2.3. \iint_D (36x^2y^2 - 96x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3.$$

$$2.2. \iint_D (9x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$$

$$2.4. \iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$2.5. \iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x} (x \geq 0).$$

$$2.6. \iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2 (x \geq 0).$$

$$2.7. \iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$$

$$2.8. \iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3.$$

$$2.9. \iint_D (4xy + 3x^2y^2) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

$$2.10. \iint_D (12xy + 9x^2y^2) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$$

$$2.11. \iint_D (8xy + 9x^2y^2) dx dy,$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3.$$

$$2.12. \iint_D (24xy + 18x^2y^2) dx dy,$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$2.13. \iint_D (12xy + 27x^2y^2) dx dy.$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x} (x \geq 0).$$

$$2.14. \iint_D (8xy + 18x^2y^2) dx dy,$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2 (x \geq 0).$$

$$2.15. \iint_D \left(\frac{4}{5} xy + \frac{9}{11} x^2y^2 \right) dx dy,$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$$

$$2.16. \iint_D \left(\frac{4}{5} xy + 9x^2y^2 \right) dx dy,$$

$$D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3.$$

$$2.17. \iint_D (24xy - 48x^3y^3) dx dy.$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

$$2.18. \iint_D (6xy + 24x^3y^3) dx dy,$$

$$D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$$

$$2.19. \iint_D (4xy + 16x^3y^3) dx dy.$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3.$$

$$2.20. \iint_D (4xy + 16x^3y^3) dx dy,$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$2.21. \iint_D (44xy + 16x^3y^3) dx dy.$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x} (x \geq 0).$$

$$2.22. \iint_D (4xy + 176x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3 (x \geq 0).$$

$$2.23. \iint_D (xy - 4x^3y^3) dx dy.$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$$

$$2.25. \iint_D \left(6x^2y^2 + \frac{25}{3}x^4y^4\right) dx dy,$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

$$2.27. \iint_D \left(3x^2y^2 + \frac{50}{3}x^4y^4\right) dx dy.$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3.$$

$$2.29. \iint_D (54x^2y^2 + 150x^4y^4) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x} (x \geq 0).$$

$$2.31. \iint_D (54x^2y^2 + 150x^4y^4) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$$

$$2.24. \iint_D (4xy + 176x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3.$$

$$2.26. \iint_D (9x^2y^2 + 25x^4y^4) dx dy.$$

$$D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$$

$$2.28. \iint_D (9x^2y^2 + 25x^4y^4) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$2.30. \iint_D (xy - 9x^5y^5) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2 (x \geq 0).$$

Задача 3. Вычислить.

$$3.1. \iint_D ye^{xy/2} dx dy;$$

$$D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=2, x=4.$$

$$3.3. \iint_D y \cos xy dx dy;$$

$$D: y=\pi/2, y=\pi, x=1, x=2.$$

$$3.5. \iint_D y \sin xy dx dy;$$

$$D: y=\pi/2, y=\pi, x=1, x=2.$$

$$3.7. \iint_D 4ye^{2xy} dx dy;$$

$$D: y=\ln 3, y=\ln 4, x=1/2, x=1.$$

$$3.2. \iint_D y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy;$$

$$D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=\frac{x}{2}.$$

$$3.4. \iint_D y^2 e^{-xy/4} dx dy;$$

$$D: x=0, y=2, y=x.$$

$$3.6. \iint_D y^2 \cos \frac{xy}{2} dx dy;$$

$$D: x=0, y=\sqrt{\pi/2}, y=x/2.$$

$$3.8. \iint_D 4y^2 \sin xy dx dy;$$

$$D: x=0, y=\sqrt{\pi/2}, y=x.$$

$$3.9. \iint_D y \cos 2xy \, dx \, dy;$$

$$D: y = \frac{\pi}{2}, y = \pi, x = \frac{1}{2}, x = 1.$$

$$3.10. \iint_D y^2 e^{-xy/8} \, dx \, dy;$$

$$D: x = 0, y = 2, y = \frac{x}{2}.$$

$$3.11. \iint_D 12y \sin 2xy \, dx \, dy;$$

$$D: y = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\pi}{2}, x = 2, x = 3.$$

$$3.12. \iint_D y^2 \cos xy \, dx \, dy;$$

$$D: x = 0, y = \sqrt{\pi}, y = x.$$

$$3.13. \iint_D y e^{xy/4} \, dx \, dy;$$

$$D: y = \ln 2, y = \ln 3, x = 4, x = 8.$$

$$3.14. \iint_D 4y^2 \sin 2xy \, dx \, dy;$$

$$D: x = 0, y = \sqrt{2\pi}, y = 2x.$$

$$3.15. \iint_D 2y \cos 2xy \, dx \, dy;$$

$$D: y = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\pi}{2}, x = 1, x = 2.$$

$$3.16. \iint_D y^2 e^{-xy/2} \, dx \, dy;$$

$$D: x = 0, y = \sqrt{2}, y = x.$$

$$3.17. \iint_D y \sin xy \, dx \, dy;$$

$$D: y = \pi, y = 2\pi, x = \frac{1}{2}, x = 1.$$

$$3.18. \iint_D y^2 \cos 2xy \, dx \, dy;$$

$$D: x = 0, y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, y = \frac{x}{2}.$$

$$3.19. \iint_D 8ye^{4xy} \, dx \, dy;$$

$$D: y = \ln 3, y = \ln 4, x = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}.$$

$$3.20. \iint_D 3y^2 \sin \frac{xy}{2} \, dx \, dy;$$

$$D: x = 0, y = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}, y = \frac{2}{3}x.$$

$$3.21. \iint_D y \cos xy \, dx \, dy;$$

$$D: y = \pi, y = 3\pi, x = 1/2, x = 1.$$

$$3.22. \iint_D y^2 e^{-xy/2} \, dx \, dy;$$

$$D: x = 0, y = 1, y = \frac{x}{2}.$$

$$3.23. \iint_D y \sin 2xy \, dx \, dy;$$

$$D: y = \pi/2, y = 3\pi/2, x = 1/2, x = 3.$$

$$3.24. \iint_D y^2 \cos xy \, dx \, dy;$$

$$D: x = 0, y = \sqrt{\pi}, y = 2x.$$

$$3.25. \iint_D 6ye^{xy/3} dx dy;$$

$$D: y = \ln 2, y = \ln 3, x = 3, x = 6.$$

$$3.26. \iint_D y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy;$$

$$D: x = 0, y = \sqrt{\pi}, y = x.$$

$$3.27. \iint_D y \cos 2xy dx dy;$$

$$D: y = \pi/2, y = 3\pi/2, x = 1/2, x = 2.$$

$$3.28. \iint_D y^2 e^{-xy/8} dx dy;$$

$$D: x = 0, y = 4, y = 2x.$$

$$3.29. \iint_D 3y \sin xy dx dy;$$

$$D: y = \pi/2, y = 3\pi, x = 1, x = 3.$$

$$3.30. \iint_D y^2 \cos \frac{xy}{2} dx dy;$$

$$D: x = 0, y = \sqrt{2\pi}, y = 2x.$$

$$3.31. \iint_D 12ye^{6xy} dx dy;$$

$$D: y = \ln 3, y = \ln 4, x = 1/6, x = 1/3.$$

Задача 4. Вычислить.

$$4.1. \iiint_V 2y^2 e^{xy} dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=0, y=1, y=x, \\ z=0, z=1. \end{cases}$$

$$4.2. \iiint_V x^2 z \sin(xyz) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=2, y=\pi, z=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$$

$$4.3. \iiint_V y^2 \operatorname{ch}(2xy) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=0, y=-2, y=4x, \\ z=0, z=2. \end{cases}$$

$$4.4. \iiint_V 8y^2 z e^{2xyz} dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=-1, y=2, z=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$$

$$4.5. \iiint_V x^2 \operatorname{sh}(3xy) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=1, y=2x, y=0, \\ z=0, z=36. \end{cases}$$

$$4.6. \iiint_V y^2 z \cos xyz dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=1, y=\pi, z=2, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$$

$$4.7. \iiint_V y^2 \cos\left(\frac{\pi}{4} xy\right) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=0, y=-1, y=x/2, \\ z=0, z=-\pi^2. \end{cases}$$

$$4.8. \iiint_V x^2 z \sin \frac{xyz}{4} dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=1, y=2\pi, z=4, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$$

- 4.9. $\iiint_V y^2 e^{-xy} dx dy dz;$
 $V \begin{cases} x=0, y=-2, y=4x, \\ z=0, z=1. \end{cases}$
- 4.10. $\iiint_V 2y^2 z e^{xyz} dx dy dz;$
 $V \begin{cases} x=1, y=1, z=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$
- 4.11. $\iiint_V y^2 \operatorname{ch}(2xy) dx dy dz;$
 $V \begin{cases} x=0, y=1, y=x, \\ z=0, z=8. \end{cases}$
- 4.12. $\iiint_V x^2 z \operatorname{sh}(xyz) dx dy dz;$
 $V \begin{cases} x=2, y=1, z=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$
- 4.13. $\iiint_V y^2 e^{xy/2} dx dy dz.$
 $V \begin{cases} x=0, y=2, y=2x, \\ z=0, z=-1. \end{cases}$
- 4.14. $\iiint_V y^2 z \cos \frac{xyz}{3} dx dy dz;$
 $V \begin{cases} x=3, y=1, z=2\pi, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$
- 4.15. $\iiint_V y^2 \cos \left(\frac{\pi xy}{2} \right) dx dy dz;$
 $V \begin{cases} x=0, y=-1, y=x, \\ z=0, z=2\pi^2. \end{cases}$
- 4.16. $\iiint_V 2x^2 z \operatorname{sh}(xyz) dx dy dz;$
 $V \begin{cases} x=1, y=-1, z=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$
- 4.17. $\iiint_V y^2 \cos(\pi xy) dx dy dz;$
 $V \begin{cases} x=0, y=1, y=2x, \\ z=0, z=\pi^2. \end{cases}$
- 4.18. $\iiint_V 2x^2 z \operatorname{sh}(2xyz) dx dy dz;$
 $V \begin{cases} x=2, y=1/2, z=1/2, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$
- 4.19. $\iiint_V x^2 \operatorname{sh}(2xy) dx dy dz;$
 $V \begin{cases} x=-1, y=x, y=0, \\ z=0, z=8. \end{cases}$
- 4.20. $\iiint_V x^2 z \sin \frac{xyz}{2} dx dy dz;$
 $V \begin{cases} x=1, y=4, z=\pi, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$
- 4.21. $\iiint_V y^2 \operatorname{ch}(xy) dx dy dz;$
 $V \begin{cases} x=0, y=-1, y=x, \\ z=0, z=2. \end{cases}$
- 4.22. $\iiint_V y^2 z \operatorname{ch}(xyz) dx dy dz;$
 $V \begin{cases} x=1, y=1, z=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$
- 4.23. $\iiint_V x^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} xy \right) dx dy dz;$
- 4.24. $\iiint_V y^2 z \cos \frac{xyz}{9} dx dy dz;$

$$V \begin{cases} x=2, y=x, y=0, \\ z=0, z=\pi. \end{cases}$$

$$4.25. \iiint_V x^2 \sin(\pi xy) dx dy dz;$$

$$V: x=1, y=2x, y=0, \\ z=0, z=4\pi.$$

$$4.27. \iiint_V y^2 \operatorname{ch}(3xy) dx dy dz;$$

$$V: x=0, y=2, y=6x, \\ z=0, z=-3.$$

$$4.29. \iiint_V x^2 \sin(4\pi xy) dx dy dz;$$

$$V: x=1, y=x/2, y=0, \\ z=0, z=8\pi.$$

$$4.31. \iiint_V x^2 \operatorname{sh}(xy) dx dy dz;$$

$$V: x=2, y=x/2, y=0, z=0, z=1.$$

$$V \begin{cases} x=9, y=1, z=2\pi, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$$

$$4.26. \iiint_V y^2 z \operatorname{ch}\left(\frac{xyz}{2}\right) dx dy dz;$$

$$V: x=2, y=-1, z=2, \\ x=0, y=0, z=0.$$

$$4.28. \iiint_V 2y^2 z \operatorname{ch}(2xyz) dx dy dz;$$

$$V: x=\frac{1}{2}, y=2, z=-1, \\ x=0, y=0, z=0.$$

$$4.30. \iiint_V 8y^2 z e^{-xyz} dx dy dz;$$

$$V: x=2, y=-1, z=2, \\ x=0, y=0, z=0.$$

Задача 5. Вычислить.

$$5.1. \iiint_V x dx dy dz;$$

$$V: y=10x, y=0, x=1, \\ z=xy, z=0.$$

$$5.3. \iiint_V 15(y^2+z^2) dx dy dz;$$

$$V: z=x+y, x+y=1, \\ x=0, y=0, z=0.$$

$$5.5. \iiint_V (1+2x^3) dx dy dz;$$

$$V: y=9x, y=0, x=1, \\ z=\sqrt{xy}, z=0.$$

$$5.2. \iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}\right)^4};$$

$$V: \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1, \\ x=0, y=0, z=0.$$

$$5.4. \iiint_V (3x+4y) dx dy dz;$$

$$V: y=x, y=0, x=1, \\ z=5(x^2+y^2), z=0.$$

$$5.6. \iiint_V (27+54y^3) dx dy dz;$$

$$V: y=x, y=0, x=1, \\ z=\sqrt{xy}, z=0.$$

- 5.7. $\iiint_V y \, dx \, dy \, dz;$
 $V: y=15x, y=0, x=1,$
 $z=xy, z=0.$
- 5.8. $\iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{\left(1 + \frac{x}{16} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3}\right)^5};$
 $V: \frac{x}{16} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3} = 1,$
 $x=0, y=0, z=0.$
- 5.9. $\iiint_V (3x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz;$
 $V: z=10y, x+y=1,$
 $x=0, y=0, z=0.$
- 5.10. $\iiint_V (15x + 30z) \, dx \, dy \, dz;$
 $V: z=x^2 + 3y^2, z=0,$
 $y=x, y=0, x=1.$
- 5.11. $\iiint_V (4 + 8z^3) \, dx \, dy \, dz;$
 $V: y=x, y=0, x=1,$
 $z=\sqrt{xy}, z=0.$
- 5.12. $\iiint_V (1 + 2x^3) \, dx \, dy \, dz;$
 $V: y=36x, y=0, x=1,$
 $z=\sqrt{xy}, z=0.$
- 5.13. $\iiint_V 21xz \, dx \, dy \, dz;$
 $V: y=x, y=0, x=2,$
 $z=xy, z=0.$
- 5.14. $\iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{\left(1 + \frac{x}{10} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3}\right)^6};$
 $V: x/10 + y/8 + z/3 = 1,$
 $x=0, y=0, z=0.$
- 5.15. $\iiint_V (x^2 + 3y^2) \, dx \, dy \, dz;$
 $V: z=10x, x+y=1,$
 $x=0, y=0, z=0.$
- 5.16. $\iiint_V (60y + 90z) \, dx \, dy \, dz;$
 $V: y=x, y=0, x=1,$
 $z=x^2 + y^2, z=0.$
- 5.17. $\iiint_V \left(\frac{10}{3}x + \frac{5}{3}\right) \, dx \, dy \, dz;$
 $V: y=9x, y=0, x=1,$
 $z=\sqrt{xy}, z=0.$
- 5.18. $\iiint_V (9 + 18z) \, dx \, dy \, dz;$
 $V: y=4x, y=0, x=1,$
 $z=\sqrt{xy}, z=0.$
- 5.19. $\iiint_V 3y^2 \, dx \, dy \, dz;$
 $V: y=2x, y=0, x=2,$
 $z=xy, z=0.$
- 5.20. $\iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6}\right)^4};$
 $V: x/2 + y/4 + z/6 = 1,$
 $x=0, y=0, z=0.$
- 5.21. $\iiint_V x^2 \, dx \, dy \, dz;$
- 5.22. $\iiint_V (8y + 12z) \, dx \, dy \, dz;$

$$V: z=10(x+3y), x+y=1, \\ x=0, y=0, z=0.$$

$$V: y=x, y=0, x=1, \\ z=3x^2+2y^2, z=0.$$

$$5.23. \iiint_V 63(1+2\sqrt{y}) dx dy dz;$$

$$V: y=x, y=0, x=1, \\ z=\sqrt{xy}, z=0.$$

$$5.24. \iiint_V (x+y) dx dy dz;$$

$$V: y=x, y=0, x=1, \\ z=30x^2+60y^2, z=0.$$

$$5.25. \iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}\right)^5};$$

$$V: x/6+y/4+z/16=1, \\ x=0, y=0, z=0.$$

$$5.26. \iiint_V xyz dx dy dz;$$

$$V: y=x, y=0, x=2, \\ z=xy, z=0.$$

$$5.27. \iiint_V y^2 dx dy dz;$$

$$V: z=10(3x+y), x+y=1, \\ x=0, y=0, z=0.$$

$$5.28. \iiint_V \left(5x+\frac{3z}{2}\right) dx dy dz;$$

$$V: y=x, y=0, x=1, \\ z=x^2+15y^2, z=0.$$

$$5.29. \iiint_V (x^2+4y^2) dx dy dz;$$

$$V: z=20(2x+y), x+y=1, \\ x=0, y=0, z=0.$$

$$5.30. \iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1+\frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}\right)^6};$$

$$V: x/8+y/3+z/5=1, \\ x=0, y=0, z=0.$$

$$5.31. \iiint_V x^2z dx dy dz;$$

$$V: y=3x, y=0, x=2, \\ z=xy, z=0.$$

Задача 6. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$6.1. y=3/x, y=4e^x, y=3, y=4.$$

$$6.2. x=\sqrt{36-y^2}, x=6-\sqrt{36-y^2}.$$

$$6.3. x^2+y^2=72, 6y=-x^2 (y \leq 0).$$

$$6.4. x=8-y^2, x=-2y.$$

$$6.5. y=\frac{3}{x}, y=8e^x, y=3, y=8.$$

$$6.6. y=\frac{\sqrt{x}}{2}, y=\frac{1}{2x}, x=16.$$

$$6.7. x=5-y^2, x=-4y.$$

$$6.8. x^2+y^2=12, -\sqrt{6}y=x^2 (y \leq 0).$$

$$6.9. y=\sqrt{12-x^2}, y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2}, x=0 (x \geq 0).$$

$$6.10. y=\frac{3}{2}\sqrt{x}, y=\frac{3}{2x}, x=9.$$

$$6.11. y=\sqrt{24-x^2}, 2\sqrt{3}y=x^2, x=0 (x \geq 0).$$

6.12. $y = \sin x, y = \cos x, x = 0 (x \geq 0)$.

6.13. $y = 20 - x^2, y = -8x$.

6.14. $y = \sqrt{18 - x^2}, y = 3\sqrt{2} - \sqrt{18 - x^2}$.

6.15. $y = 32 - x^2, y = -4x$.

6.17. $x^2 + y^2 = 36, 3\sqrt{2}y = x^2 (y \geq 0)$.

6.19. $y = 6 - \sqrt{36 - x^2}, y = \sqrt{36 - x^2}, x = 0 (x \geq 0)$.

6.20. $y = 25/4 - x^2, y = x - 5/2$.

6.21. $y = \sqrt{x}, y = 1/x, x = 16$.

6.23. $x = 27 - y^2, x = -6y$.

6.24. $x = \sqrt{72 - y^2}, 6x = y^2, y = 0 (y \geq 0)$.

6.25. $y = \sqrt{6 - x^2}, y = \sqrt{6 - \sqrt{6 - x^2}}$.

6.27. $y = \sin x, y = \cos x, x = 0 (x \leq 0)$.

6.29. $y = 3\sqrt{x}, y = 3/x, x = 9$.

6.31. $x^2 + y^2 = 12, x\sqrt{6} = y^2 (x \geq 0)$.

6.16. $y = 2/x, y = 5e^x, y = 2, y = 5$.

6.18. $y = 3\sqrt{x}, y = 3/x, x = 4$.

6.22. $y = 2/x, y = 7e^x, y = 2, y = 7$.

6.26. $y = \frac{3}{2}\sqrt{x}, y = \frac{3}{2x}, x = 4$.

6.28. $y = \frac{1}{x}, y = 6e^x, y = 1, y = 6$.

6.30. $y = 11 - x^2, y = -10x$.

Задача 7. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

7.1. $y^2 - 2y + x^2 = 0,$
 $y^2 - 4y + x^2 = 0,$
 $y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$

7.3. $y^2 - 6y + x^2 = 0,$
 $y^2 - 8y + x^2 = 0,$
 $y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$

7.5. $y^2 - 8y + x^2 = 0,$
 $y^2 - 10y + x^2 = 0,$
 $y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x.$

7.7. $y^2 - 4y + x^2 = 0,$
 $y^2 - 6y + x^2 = 0,$
 $y = x, x = 0.$

7.9. $y^2 - 6y + x^2 = 0,$
 $y^2 - 10y + x^2 = 0,$
 $y = x, x = 0.$

7.11. $y^2 - 2y + x^2 = 0,$
 $y^2 - 4y + x^2 = 0,$
 $y = \sqrt{3}x, x = 0.$

7.13. $y^2 - 4y + x^2 = 0,$
 $y^2 - 6y + x^2 = 0,$
 $y = \sqrt{3}x, x = 0.$

7.2. $x^2 - 4x + y^2 = 0,$
 $x^2 - 8x + y^2 = 0,$
 $y = 0, y = x/\sqrt{3}.$

7.4. $x^2 - 2x + y^2 = 0,$
 $x^2 - 4x + y^2 = 0,$
 $y = 0, y = x.$

7.6. $x^2 - 4x + y^2 = 0,$
 $x^2 - 8x + y^2 = 0,$
 $y = 0, y = x.$

7.8. $x^2 - 2x + y^2 = 0,$
 $x^2 - 10x + y^2 = 0,$
 $y = 0, y = \sqrt{3}x.$

7.10. $x^2 - 2x + y^2 = 0,$
 $x^2 - 4x + y^2 = 0,$
 $y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$

7.12. $x^2 - 2x + y^2 = 0,$
 $x^2 - 6x + y^2 = 0,$
 $y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$

7.14. $x^2 - 2x + y^2 = 0,$
 $x^2 - 8x + y^2 = 0,$
 $y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$

7.15. $y^2 - 2y + x^2 = 0,$

$y^2 - 6y + x^2 = 0,$

$y = x/\sqrt{3}, x = 0.$

7.17. $y^2 - 2y + x^2 = 0,$

$y^2 - 10y + x^2 = 0,$

$y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$

7.19. $y^2 - 4y + x^2 = 0,$

$y^2 - 10y + x^2 = 0,$

$y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$

7.21. $y^2 - 2y + x^2 = 0,$

$y^2 - 4y + x^2 = 0,$

$y = x, x = 0.$

7.23. $y^2 - 6y + x^2 = 0,$

$y^2 - 8y + x^2 = 0,$

$y = x, x = 0.$

7.25. $y^2 - 4y + x^2 = 0,$

$y^2 - 8y + x^2 = 0,$

$y = x, x = 0.$

7.27. $y^2 - 4y + x^2 = 0,$

$y^2 - 8y + x^2 = 0,$

$y = \sqrt{3}x, x = 0.$

7.29. $y^2 - 2y + x^2 = 0,$

$y^2 - 10y + x^2 = 0,$

$y = x/\sqrt{3}, x = 0.$

7.31. $y^2 - 4y + x^2 = 0,$

$y^2 - 8y + x^2 = 0,$

$y = x/\sqrt{3}, x = 0.$

7.16. $x^2 - 2x + y^2 = 0,$

$x^2 - 4x + y^2 = 0,$

$y = 0, y = x/\sqrt{3}.$

7.18. $x^2 - 2x + y^2 = 0,$

$x^2 - 6x + y^2 = 0,$

$y = 0, y = x/\sqrt{3}.$

7.20. $x^2 - 2x + y^2 = 0,$

$x^2 - 6x + y^2 = 0,$

$y = 0, y = x.$

7.22. $x^2 - 2x + y^2 = 0,$

$x^2 - 4x + y^2 = 0,$

$y = 0, y = \sqrt{3}x.$

7.24. $x^2 - 4x + y^2 = 0,$

$x^2 - 8x + y^2 = 0,$

$y = 0, y = \sqrt{3}x.$

7.26. $x^2 - 4x + y^2 = 0,$

$x^2 - 8x + y^2 = 0,$

$y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$

7.28. $x^2 - 4x + y^2 = 0,$

$x^2 - 6x + y^2 = 0,$

$y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$

7.30. $x^2 - 6x + y^2 = 0,$

$x^2 - 10x + y^2 = 0,$

$y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$

Задача 8. Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми, μ — поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

8.1. $D: x=1, y=0, y^2=4x (y \geq 0);$

$\mu = 7x^2 + y.$

8.3. $D: x=1, y=0, y^2=4x (y \geq 0);$

$\mu = 7x^2/2 + 5y.$

8.5. $D: x=2, y=0, y^2=2x (y \geq 0);$

$\mu = 7x^2/8 + 2y.$

8.7. $D: x=2, y=0, y^2=x/2 (y \geq 0);$

$\mu = 7x^2/2 + 6y.$

8.9. $D: x=1, y=0, y^2=4x (y \geq 0);$

$\mu = x + 3y^2.$

8.2. $D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4,$

$x=0, y=0 (x \geq 0, y \geq 0);$

$\mu = (x+y)/(x^2+y^2).$

8.4. $D: x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 16,$

$x=0, y=0 (x \geq 0, y \geq 0);$

$\mu = (2x+5y)/(x^2+y^2).$

8.6. $D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 16,$

$x=0, y=0 (x \geq 0, y \geq 0);$

$\mu = (x+y)/(x^2+y^2).$

8.8. $D: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 25,$

$x=0, y=0 (x \geq 0, y \leq 0);$

$\mu = (2x-3y)/(x^2+y^2).$

8.10. $D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 9,$

$x=0, y=0 (x \geq 0, y \leq 0);$

$\mu = (x-y)/(x^2+y^2).$

$$8.11. D: x=1, y=0, y^2=x (y \geq 0); \\ \mu=3x+6y^2.$$

$$8.13. D: x=2, y=0, y^2=x/2 (y \geq 0); \\ \mu=2x+3y^2.$$

$$8.15. D: x=\frac{1}{2}, y=0, y^2=8x (y \geq 0), \\ \mu=7x+3y^2.$$

$$8.17. D: x=1, y=0, y^2=4x (y \geq 0); \\ \mu=7x^2+2y.$$

$$8.19. D: x=2, y^2=2x, y=0 (y \geq 0); \\ \mu=7x^2/4+y/2.$$

$$8.21. D: x=2, y=0, y^2=2x (y \geq 0); \\ \mu=7x^2/4+y.$$

$$8.23. D: x=2, y=0, y^2=x/2 (y \geq 0); \\ \mu=7x^2/2+8y.$$

$$8.25. D: x=1, y=0, y^2=4x (y \geq 0); \\ \mu=6x+3y^2.$$

$$8.27. D: x=2, y=0, y^2=x/2 (y \geq 0); \\ \mu=4x+6y^2.$$

$$8.29. D: x=1/2, y=0, y^2=2x (y \geq 0); \\ \mu=4x+9y^2.$$

$$8.31. D: x=1/4, y=0, y^2=16x (y \geq 0); \\ \mu=16x+9y^2/2.$$

$$8.12. D: x^2+y^2=9, x^2+y^2=25, \\ x=0, y=0 (x \leq 0, y \geq 0); \\ \mu=(2y-x)/(x^2+y^2).$$

$$8.14. D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=16, \\ x=0, y=0 (x \leq 0, y \geq 0); \\ \mu=(2y-3x)/(x^2+y^2).$$

$$8.16. D: x^2+y^2=9, x^2+y^2=16, \\ x=0, y=0 (x \leq 0, y \geq 0); \\ \mu=(2y-5x)/(x^2+y^2).$$

$$8.18. D: x^2+y^2=1, x^2+y^2=16, \\ x=0, y=0 (x \geq 0, y \geq 0); \\ \mu=(x+3y)/(x^2+y^2).$$

$$8.20. D: x^2+y^2=1, x^2+y^2=4, \\ x=0, y=0 (x \geq 0, y \geq 0); \\ \mu=(x+2y)/(x^2+y^2).$$

$$8.22. D: x^2+y^2=1, x^2+y^2=9, \\ x=0, y=0 (x \geq 0, y \leq 0); \\ \mu=(2x-y)/(x^2+y^2).$$

$$8.24. D: x^2+y^2=1, x^2+y^2=25, \\ x=0, y=0 (x \geq 0, y \leq 0); \\ \mu=(x-4y)/(x^2+y^2).$$

$$8.26. D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=16, \\ x=0, y=0 (x \geq 0, y \leq 0); \\ \mu=(3x-y)/(x^2+y^2).$$

$$8.28. D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=9, \\ x=0, y=0 (x \leq 0, y \geq 0); \\ \mu=(y-4x)/(x^2+y^2).$$

$$8.30. D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=9, \\ x=0, y=0 (x \leq 0, y \geq 0); \\ \mu=(y-2x)/(x^2+y^2).$$

Задача 9. Пластинка D задана неравенствами, μ — поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

$$9.1. D: x^2+y^2/4 \leq 1; \\ \mu=y^2.$$

$$9.3. D: x^2/9+y^2/25 \leq 1, \\ y \geq 0; \\ \mu=x^2y.$$

$$9.5. D: 1 \leq x^2/4+y^2 \leq 4, \\ y \geq 0, y \leq x/2; \\ \mu=8y/x^3.$$

$$9.7. D: x^2/4+y^2 \leq 1; \\ \mu=4y^2.$$

$$9.9. D: 1 \leq x^2/16+y^2/4 \leq 4, \\ x \geq 0, y \geq x/2, \\ \mu=x/y.$$

$$9.2. D: 1 \leq x^2/9+y^2/4 \leq 2, \\ y \geq 0, y \leq (2/3)x; \\ \mu=y/x.$$

$$9.4. D: x^2/9+y^2/25 \leq 1, y \geq 0; \\ \mu=7x^2y/18.$$

$$9.6. D: x^2/9+y^2 \leq 1, x \geq 0; \\ \mu=7xy^6.$$

$$9.8. D: 1 \leq x^2/4+y^2/9 \leq 4, \\ x \geq 0, y \geq 3x/2; \\ \mu=x/y.$$

$$9.10. D: x^2/4+y^2/9 \leq 1, \\ x \geq 0, y \geq 0; \\ \mu=x^3y.$$

- 9.11. $D: x^2/4 + y^2 \leq 1,$
 $x \geq 0, y \geq 0;$
 $\mu = 6x^3y^3.$
- 9.13. $D: x^2/9 + y^2/4 \leq 1;$
 $\mu = x^2y^2.$
- 9.15. $D: x^2/4 + y^2 \leq 1,$
 $x \geq 0, y \geq 0;$
 $\mu = 30x^3y^7.$
- 9.17. $D: x^2 + y^2/25 \leq 1, y \geq 0;$
 $\mu = 7x^4y.$
- 9.19. $D: x^2/4 + y^2/9 \leq 1;$
 $\mu = x^2.$
- 9.21. $D: x^2/9 + y^2 \leq 1, x \geq 0;$
 $\mu = 11xy^8.$
- 9.23. $D: 1 \leq x^2/9 + y^2/4 \leq 5,$
 $x \geq 0, y \geq 2x/3;$
 $\mu = x/y.$
- 9.25. $D: x^2/4 + y^2/25 \leq 1;$
 $\mu = x^2.$
- 9.27. $D: 1 \leq x^2/4 + y^2/9 \leq 36,$
 $x \geq 0, y \geq \frac{3}{2}x;$
 $\mu = 9x/y^3.$
- 9.29. $D: x^2/16 + y^2 \leq 1,$
 $x \geq 0, y \geq 0;$
 $\mu = 105x^3y^9.$
- 9.31. $D: 1 \leq x^2/16 + y^2 \leq 3,$
 $x \geq 0, y \geq x/4;$
 $\mu = x/y^5.$
- 9.12. $D: 1 \leq x^2/4 + y^2 \leq 25,$
 $x \geq 0, y \geq x/2;$
 $\mu = x/y^3.$
- 9.14. $D: x^2/16 + y^2 \leq 1,$
 $x \geq 0, y \geq 0;$
 $\mu = 5xy^7.$
- 9.16. $D: 1 \leq x^2/9 + y^2/4 \leq 3,$
 $y \geq 0, y \leq \frac{2}{3}x;$
 $\mu = y/x.$
- 9.18. $D: x^2 + y^2/9 \leq 1, y \geq 0;$
 $\mu = 35x^4y^3.$
- 9.20. $D: 1 \leq x^2 + y^2/16 \leq 9,$
 $y \geq 0, y \leq 4x;$
 $\mu = y/x^3.$
- 9.22. $D: 1 \leq x^2/4 + y^2/16 \leq 5,$
 $x \geq 0, y \geq 2x;$
 $\mu = x/y.$
- 9.24. $D: x^2/4 + y^2/9 \leq 1,$
 $x \geq 0, y \geq 0;$
 $\mu = x^2y.$
- 9.26. $D: x^2 + y^2/4 \leq 1,$
 $x \geq 0, y \geq 0;$
 $\mu = 15x^5y^3.$
- 9.28. $D: x^2/100 + y^2 \leq 1,$
 $x \geq 0, y \geq 0,$
 $\mu = 6xy^9.$
- 9.30. $D: 1 \leq x^2/9 + y^2/16 \leq 2,$
 $y \geq 0, y \leq \frac{4}{3}x;$
 $\mu = 27y/x^3.$

Задача 10. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

- 10.1. $y = 16\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x},$
 $z = 0, x + z = 2.$
- 10.3. $x^2 + y^2 = 2, y = \sqrt{x}, y = 0,$
 $z = 0, z = 15x.$
- 10.5. $x = 20\sqrt{2y}, x = 5\sqrt{2y},$
 $z = 0, z + y = 1/2.$
- 10.7. $x^2 + y^2 = 2, x = \sqrt{y}, x = 0,$
 $z = 0, z = 30y.$
- 10.2. $y = 5\sqrt{x}, y = 5x/3,$
 $z = 0, z = 5 + 5\sqrt{x}/3.$
- 10.4. $x + y = 2, y = \sqrt{x},$
 $z = 12y, z = 0.$
- 10.6. $x = 5\sqrt{y}/2, x = 5y/6,$
 $z = 0, z = \frac{5}{6}(3 + \sqrt{y}).$
- 10.8. $x + y = 2, x = \sqrt{y},$
 $z = 12x/5, z = 0.$

$$10.9. y = 17\sqrt{2x}, y = 2\sqrt{2x}, \\ z = 0, x + z = 1/2.$$

$$10.11. x^2 + y^2 = 8, y = \sqrt{2x}, y = 0, \\ z = 0, z = 15x/11.$$

$$10.13. x = \frac{5}{6}\sqrt{y}, x = \frac{5}{18}y, \\ z = 0, z = \frac{5}{18}(3 + \sqrt{y}).$$

$$10.15. x^2 + y^2 = 8, x = \sqrt{2y}, x = 0, \\ z = 30y/11, z = 0.$$

$$10.17. y = 6\sqrt{3x}, y = \sqrt{3x}, \\ z = 0, x + z = 3.$$

$$10.19. x^2 + y^2 = 18, y = \sqrt{3x}, y = 0, \\ z = 0, z = 5x/11.$$

$$10.21. x = 7\sqrt{3y}, x = 2\sqrt{3y}, \\ z = 0, z + y = 3.$$

$$10.23. x^2 + y^2 = 18, x = \sqrt{3y}, \\ x = 0, z = 0, z = 10y/11.$$

$$10.25. y = \sqrt{15x}, y = \sqrt{15x}, \\ z = 0, z = \sqrt{15}(1 + \sqrt{x}).$$

$$10.27. x + y = 8, y = \sqrt{4x}, \\ z = 3y, z = 0.$$

$$10.29. x = 15\sqrt{y}, x = 15y, \\ z = 0, z = 15(1 + \sqrt{y}).$$

$$10.31. x = 17\sqrt{2y}, x = 2\sqrt{2y}, \\ z = 0, z + y = 1/2.$$

$$10.10. y = 5\sqrt{x/3}, y = 5x/9, \\ z = 0, z = 5(3 + \sqrt{x})/9.$$

$$10.12. x + y = 4, y = \sqrt{2x}, \\ z = 3y, z = 0.$$

$$10.14. x = 19\sqrt{2y}, x = 4\sqrt{2y}, \\ z = 0, z + y = 2.$$

$$10.16. x + y = 4, x = \sqrt{2y}, \\ z = 3x/5, z = 0.$$

$$10.18. y = \frac{5}{6}\sqrt{x}, y = \frac{5}{18}x, \\ z = 0, z = \frac{5}{18}(3 + \sqrt{x}).$$

$$10.20. x + y = 6, y = \sqrt{3x}, \\ z = 4y, z = 0.$$

$$10.22. x = 5\sqrt{y/3}, x = 5y/9, \\ z = 0, z = 5(3 + \sqrt{y})/9.$$

$$10.24. x + y = 6, x = \sqrt{3y}, \\ z = 4x/5, z = 0.$$

$$10.26. x^2 + y^2 = 50, y = \sqrt{5x}, \\ y = 0, z = 0, z = 3x/11.$$

$$10.28. x = 16\sqrt{2y}, x = \sqrt{2y}, \\ z + y = 2, z = 0.$$

$$10.30. x^2 + y^2 = 50, x = \sqrt{5y}, \\ x = 0, z = 0, z = 6y/11.$$

Задача 11. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

$$11.1. x^2 + y^2 = 2y, \\ z = 5/4 - x^2, z = 0.$$

$$11.3. x^2 + y^2 = 8\sqrt{2x}, \\ z = x^2 + y^2 - 64, \\ z = 0 (z \geq 0).$$

$$11.2. x^2 + y^2 = y, x^2 + y^2 = 4y, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0.$$

$$11.4. x^2 + y^2 + 4x = 0, \\ z = 8 - y^2, z = 0.$$

- 11.5. $x^2 + y^2 = 6x$, $x^2 + y^2 = 9x$,
 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$,
 $y = 0$ ($y \leq 0$).
- 11.7. $x^2 + y^2 = 2y$,
 $z = \frac{9}{4} - x^2$, $z = 0$.
- 11.9. $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}y = 0$,
 $z = x^2 + y^2 - 4$,
 $z = 0$ ($z \geq 0$).
- 11.11. $x^2 + y^2 = 7x$, $x^2 + y^2 = 10x$,
 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$,
 $y = 0$ ($y \leq 0$).
- 11.13. $x^2 + y^2 = 2y$,
 $z = \frac{13}{4} - x^2$, $z = 0$.
- 11.15. $x^2 + y^2 = 6\sqrt{2}x$,
 $z = x^2 + y^2 - 36$,
 $z = 0$ ($z \geq 0$).
- 11.17. $x^2 + y^2 = 4x$,
 $z = 12 - y^2$, $z = 0$.
- 11.19. $x^2 + y^2 = 4\sqrt{2}x$,
 $z = x^2 + y^2 - 16$,
 $z = 0$ ($z \geq 0$).
- 11.21. $x^2 + y^2 = 4y$, $x^2 + y^2 = 7y$,
 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$.
- 11.23. $x^2 + y^2 + 2x = 0$,
 $z = 17/4 - y^2$, $z = 0$,
- 11.25. $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x = 0$,
 $z = x^2 + y^2 - 4$,
 $z = 0$ ($z \geq 0$).
- 11.27. $x^2 + y^2 = 10x$, $x^2 + y^2 = 13x$,
 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$,
 $y = 0$ ($y \geq 0$).
- 11.6. $x^2 + y^2 = 6\sqrt{2}y$,
 $z = x^2 + y^2 - 36$,
 $z = 0$ ($z \geq 0$).
- 11.8. $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 5y$,
 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$.
- 11.10. $x^2 + y^2 = 4x$,
 $z = 10 - y^2$, $z = 0$.
- 11.12. $x^2 + y^2 = 8\sqrt{2}y$,
 $z = x^2 + y^2 - 64$,
 $z = 0$ ($z \geq 0$).
- 11.14. $x^2 + y^2 = 3y$, $x^2 + y^2 = 6y$,
 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$.
- 11.16. $x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}y$,
 $z = x^2 + y^2 - 4$,
 $z = 0$ ($z \geq 0$).
- 11.18. $x^2 + y^2 = 8x$, $x^2 + y^2 = 11x$,
 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$,
 $y = 0$ ($y \leq 0$).
- 11.20. $x^2 + y^2 = 4y$,
 $z = 4 - x^2$, $z = 0$.
- 11.22. $x^2 + y^2 = 4\sqrt{2}y$,
 $z = x^2 + y^2 - 16$,
 $z = 0$ ($z \geq 0$).
- 11.24. $x^2 + y^2 = 9x$, $x^2 + y^2 = 12x$,
 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$,
 $y = 0$ ($y \geq 0$).
- 11.26. $x^2 + y^2 = 4y$,
 $z = 6 - x^2$, $z = 0$.
- 11.28. $x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}x$,
 $z = x^2 + y^2 - 4$,
 $z = 0$ ($z \geq 0$).

$$11.29. \quad x^2 + y^2 = 2x, \\ z = 21/4 - y^2, \quad z = 0,$$

$$11.31. \quad x^2 + y^2 + 2x = 0, \\ z = 25/4 - y^2, \quad z = 0.$$

$$11.30. \quad x^2 + y^2 = 5y, \quad x^2 + y^2 = 8y, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0.$$

Задача 12. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

$$12.1. \quad y = 5x^2 + 2, \quad y = 7, \\ z = 3y^2 - 7x^2 - 2, \\ z = 3y^2 - 7x^2 - 5.$$

$$12.3. \quad x = -5y^2 + 2, \quad x = -3, \\ z = 3x^2 + y^2 + 1, \\ z = 3x^2 + y^2 - 5.$$

$$12.5. \quad y = -6x^2 + 8, \quad y = 2, \\ z = x - x^2 - y^2 - 1, \\ z = x - x^2 - y^2 - 5.$$

$$12.7. \quad x = 5y^2 - 9, \quad x = -4, \\ z = x^2 + 4x - y^2 - 4, \\ z = x^2 + 4x - y^2 + 2.$$

$$12.9. \quad x = 5y^2 - 1, \quad x = -3y^2 + 1, \\ z = 2 - \sqrt{x^2 + 6y^2}, \\ z = -1 - \sqrt{x^2 + 6y^2}.$$

$$12.11. \quad y = -5x^2 + 3, \quad y = -2, \\ y = 2x^2 - 3y - 6y^2 - 1, \\ z = 2x^2 - 3y - 6y^2 + 2.$$

$$12.13. \quad x = 3y^2 - 5, \quad x = -2, \\ z = 2 - \sqrt{x^2 + 16y^2}, \\ z = 8 - \sqrt{x^2 + 16y^2}.$$

$$12.15. \quad y = 2x^2 - 1, \quad y = 1, \\ z = x^2 - 5y^2 - 3, \\ z = x^2 - 5y^2 - 6.$$

$$12.17. \quad x = -4y^2 + 1, \quad x = -3, \\ z = x^2 - 7y^2 - 1, \\ z = x^2 - 7y^2 + 2.$$

$$12.19. \quad y = 1 - 2x^2, \quad y = -1, \\ z = x^2 + 2y + y^2 - 2, \\ z = x^2 + 2y + y^2 + 1.$$

$$12.2. \quad y = 5x^2 - 2, \quad y = -4x^2 + 7, \\ z = 4 + 9x^2 + 5y^2, \\ z = -1 + 9x^2 + 5y^2.$$

$$12.4. \quad x = 2y^2 - 3, \quad x = -7y^2 + 6, \\ z = 1 + \sqrt{x^2 + 16y^2}, \\ z = -3 + \sqrt{x^2 + 16y^2}.$$

$$12.6. \quad y = 5x^2 - 1, \quad y = -3x^2 + 1, \\ z = -2 + \sqrt{3x^2 + y^2}, \\ z = -5 + \sqrt{3x^2 + y^2}.$$

$$12.8. \quad y = 6x^2 - 1, \quad y = 5, \\ z = 2x^2 + x - y^2, \\ z = 2x^2 + x - y^2 + 4.$$

$$12.10. \quad x = -3y^2 + 7, \quad x = 4, \\ z = 2 + \sqrt{6x^2 + y^2}, \\ z = 3 + \sqrt{6x^2 + y^2}.$$

$$12.12. \quad y = x^2 - 5, \quad y = -x^2 + 3, \\ z = 4 + \sqrt{5x^2 + 8y^2}, \\ z = 1 + \sqrt{5x^2 + 8y^2}.$$

$$12.14. \quad x = y^2 - 2, \quad x = -4y^2 + 3, \\ z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} + 2, \\ z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} - 1.$$

$$12.16. \quad y = x^2 - 2, \quad y = -4x^2 + 3, \\ z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$12.18. \quad x = 7y^2 - 6, \quad x = -2y^2 + 3, \\ z = 3 + 5x^2 - 8y^2, \\ z = -2 + 5x^2 - 8y^2.$$

$$12.20. \quad y = x^2 - 7, \quad y = -8x^2 + 2, \\ z = 3 - 12y^2 + 5x^2, \\ z = -2 - 12y^2 + 5x^2.$$

12.21. $x=2y^2+3, x=5,$

$$z=1+\sqrt{9x^2+4y^2},$$

$$z=4+\sqrt{9x^2+4y^2}.$$

12.23. $x=5y^2-2, x=-4y^2+7,$

$$z=4-\sqrt{2x^2+3y^2},$$

$$z=-1-\sqrt{2x^2+3y^2}.$$

12.25. $y=-3x^2+5, y=2,$

$$x=3+\sqrt{5x^2+y^2},$$

$$z=-1+\sqrt{5x^2+y^2},$$

12.27. $x=4y^2+2, x=6,$

$$z=x^2+4y^2+y+1,$$

$$z=x^2+4y^2+y+4.$$

12.29. $y=2x^2-5, y=-3,$

$$z=2+\sqrt{x^2+4y^2},$$

$$z=-1+\sqrt{x^2+4y^2},$$

12.31. $y=-2x^2+7, y=5,$

$$z=1-2x^2+3y^2,$$

$$z=4-2x^2+3y^2.$$

12.22. $y=3x^2+4, y=7,$

$$z=5-\sqrt{2x^2+3y^2},$$

$$z=1-\sqrt{2x^2+3y^2}.$$

12.24. $x=-2y^2+5, x=3,$

$$z=5-\sqrt{x^2+25y^2},$$

$$z=2-\sqrt{x^2+25y^2}.$$

12.26. $y=3x^2-5, y=-6x^2+4,$

$$z=2+10x^2-y^2,$$

$$z=-2+10x^2-y^2.$$

12.28. $x=3y^2-2, x=-4y^2+5,$

$$z=4-7x^2-9y^2,$$

$$z=1-7x^2-9y^2.$$

12.30. $y=2x^2-3, y=-7x^2+6,$

$$z=1-5x^2-6y^2,$$

$$z=-3-5x^2-6y^2.$$

Задача 13. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

13.1. $z=\sqrt{9-x^2-y^2},$

$$9z/2=x^2+y^2,$$

13.3. $z=\sqrt{4-x^2-y^2},$

$$z=\sqrt{(x^2+y^2)/255}.$$

13.5. $z=\sqrt{\frac{16}{9}-x^2-y^2},$

$$2z=x^2+y^2.$$

13.7. $z=\sqrt{25-x^2-y^2},$

$$z=\sqrt{(x^2+y^2)/99}.$$

13.9. $z=21\sqrt{x^2+y^2}/2,$

$$z=23/2-x^2-y^2.$$

13.11. $z=\sqrt{9-x^2-y^2},$

$$z=\sqrt{(x^2+y^2)/80}.$$

13.2. $z=15\sqrt{x^2+y^2}/2,$

$$z=17/2-x^2-y^2.$$

13.4. $z=\sqrt{64-x^2-y^2}, z=1,$

$$x^2+y^2=60$$

(внутри цилиндра).

13.6. $z=3\sqrt{x^2+y^2},$

$$z=10-x^2-y^2.$$

13.8. $z=\sqrt{100-x^2-y^2}, z=6,$

$$x^2+y^2=51$$

(внутри цилиндра).

13.10. $z=\sqrt{16-x^2-y^2},$

$$6z=x^2+y^2.$$

13.12. $z=\sqrt{81-x^2-y^2}, z=5,$

$$x^2+y^2=45$$

(внутри цилиндра).

$$13.13. z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \\ 3z/2 = x^2 + y^2.$$

$$13.15. z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \\ z = \sqrt{(x^2 + y^2)/63}.$$

$$13.17. z = \sqrt{144 - x^2 - y^2}, \\ 18z = x^2 + y^2.$$

$$13.19. z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \\ z = \sqrt{(x^2 + y^2)/35}.$$

$$13.21. z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \\ 9z = x^2 + y^2.$$

$$13.23. z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, \\ z = \sqrt{(x^2 + y^2)/15}.$$

$$13.25. z = \sqrt{4/9 - x^2 - y^2}, \\ z = x^2 + y^2.$$

$$13.27. z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \\ z = \sqrt{(x^2 + y^2)/8}.$$

$$13.29. z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, \\ 12z = x^2 + y^2.$$

$$13.31. z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \\ z = \sqrt{(x^2 + y^2)/3}.$$

$$13.14. x = 6\sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = 16 - x^2 - y^2.$$

$$13.16. z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, z = 4, \\ x^2 + y^2 = 39 \text{ (внутри цилиндра)}.$$

$$13.18. z = 3\sqrt{x^2 + y^2}/2, \\ z = 5/2 - x^2 - y^2.$$

$$13.20. z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}, z = 3, \\ x^2 + y^2 = 33 \text{ (внутри цилиндра)}.$$

$$13.22. z = 9\sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = 22 - x^2 - y^2.$$

$$13.24. z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, z = 2, \\ x^2 + y^2 = 27 \text{ (внутри цилиндра)}.$$

$$13.26. z = 12\sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = 28 - x^2 - y^2.$$

$$13.28. z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, z = 1, \\ x^2 + y^2 = 21 \text{ (внутри цилиндра)}.$$

$$13.30. z = 9\sqrt{x^2 + y^2}/2, \\ z = 11/2 - x^2 - y^2.$$

Задача 14. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

$$14.1. z = 2 - 12(x^2 + y^2), \\ z = 24x + 2.$$

$$14.3. z = 8(x^2 + y^2) + 3, \\ z = 16x + 3.$$

$$14.5. z = 4 - 14(x^2 + y^2), \\ z = 4 - 28x.$$

$$14.7. z = 32(x^2 + y^2) + 3, \\ z = 3 - 64x.$$

$$14.9. z = 2 - 4(x^2 + y^2), \\ z = 8x + 2.$$

$$14.11. z = 24(x^2 + y^2) + 1, \\ z = 48x + 1.$$

$$14.13. z = -16(x^2 + y^2) - 1, \\ z = -32x - 1.$$

$$14.2. z = 10[(x-1)^2 + y^2] + 1, \\ z = 21 - 20x.$$

$$14.4. z = 2 - 20[(x+1)^2 + y^2], \\ z = -40x - 38.$$

$$14.6. z = 28[(x+1)^2 + y^2] + 3, \\ z = 56x + 59.$$

$$14.8. z = 4 - 6[(x-1)^2 + y^2], \\ z = 12x - 8.$$

$$14.10. z = 22[(x-1)^2 + y^2] + 3, \\ z = 47 - 44x.$$

$$14.12. z = 2 - 18[(x+1)^2 + y^2], \\ z = -36x - 34.$$

$$14.14. z = 30[(x+1)^2 + y^2] + 1, \\ z = 60x + 61.$$

$$14.15. \begin{cases} z = 26(x^2 + y^2) - 2, \\ z = -52x - 2. \end{cases}$$

$$14.17. \begin{cases} z = -2(x^2 + y^2) - 1, \\ z = 4y - 1. \end{cases}$$

$$14.19. \begin{cases} z = 30(x^2 + y^2) + 1, \\ z = 60y + 1. \end{cases}$$

$$14.21. \begin{cases} z = 2 - 18(x^2 + y^2), \\ z = 2 - 36y. \end{cases}$$

$$14.23. \begin{cases} z = 22(x^2 + y^2) + 3, \\ z = 3 - 44y. \end{cases}$$

$$14.25. \begin{cases} z = 4 - 6(x^2 + y^2), \\ z = 12y + 4. \end{cases}$$

$$14.27. \begin{cases} z = 28(x^2 + y^2) + 3, \\ z = 56y + 3. \end{cases}$$

$$14.29. \begin{cases} z = 2 - 20(x^2 + y^2), \\ z = 2 - 40y. \end{cases}$$

$$14.31. \begin{cases} z = 10(x^2 + y^2) + 1, \\ z = 1 - 20y. \end{cases}$$

$$14.16. \begin{cases} z = -2[(x-1)^2 + y^2] - 1, \\ z = 4x - 5. \end{cases}$$

$$14.18. \begin{cases} z = 26[(x-1)^2 + y^2] - 2, \\ z = 50 - 52x. \end{cases}$$

$$14.20. \begin{cases} z = -16[(x+1)^2 + y^2] - 1, \\ z = -32x - 33. \end{cases}$$

$$14.22. \begin{cases} x = 24[(x+1)^2 + y^2] + 1, \\ z = 48x + 49. \end{cases}$$

$$14.24. \begin{cases} z = 2 - 4[(x-1)^2 + y^2], \\ z = 8x - 6. \end{cases}$$

$$14.26. \begin{cases} z = 32[(x-1)^2 + y^2] + 3, \\ z = 67 - 64x. \end{cases}$$

$$14.28. \begin{cases} z = 4 - 14[(x+1)^2 + y^2], \\ z = -28x - 24. \end{cases}$$

$$14.30. \begin{cases} z = 8[(x+1)^2 + y^2] + 3, \\ z = 16x + 19. \end{cases}$$

Задача 15. Найти объем тела, заданного неравенствами.

$$15.1. \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49, \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, \\ -x \leq y \leq 0. \end{cases}$$

$$15.3. \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64, \\ z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, \quad -x/\sqrt{3} \leq y \leq 0. \end{cases}$$

$$15.5. \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, \\ z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}}, \quad -\sqrt{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x. \end{cases}$$

$$15.6. \begin{cases} 25 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100, \\ z \leq -\sqrt{(x^2 + y^2)/99}, \quad \sqrt{3}x \leq y \leq -\sqrt{3}x. \end{cases}$$

$$15.7. \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49, \\ 0 \leq z \leq \sqrt{(x^2 + y^2)/24}, \\ y \leq -x/\sqrt{3}, \quad y \leq -\sqrt{3}x. \end{cases}$$

$$15.9. \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64, \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, \\ x \leq y \leq 0. \end{cases}$$

$$15.2. \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64, \\ \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, \\ -\sqrt{3}x \leq y \leq 0. \end{cases}$$

$$15.4. \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, \\ z \geq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{63}}, \quad 0 \leq y \leq x/\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$15.8. \begin{cases} 25 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 121, \\ -\sqrt{(x^2 + y^2)/24} \leq z \leq 0, \\ y \geq -x/\sqrt{3}, \quad y \geq -\sqrt{3}x. \end{cases}$$

$$15.10. \begin{cases} 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100, \\ \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, \\ \sqrt{3}x \leq y \leq 0. \end{cases}$$

$$15.11. 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100,$$

$$z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, -\sqrt{3}x \leq y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

$$15.12. 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64,$$

$$z \geq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{63}}, -\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq -\sqrt{3}x.$$

$$15.13. 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49,$$

$$z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}}, y \leq 0, y \leq \sqrt{3}x.$$

$$15.14. 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 121,$$

$$z \leq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}}, y \geq \sqrt{3}x, y \geq 0.$$

$$15.15. 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64,$$

$$0 \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}},$$

$$y \leq \sqrt{3}x, y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

$$15.16. 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144,$$

$$-\sqrt{(x^2 + y^2)/24} \leq z \leq 0,$$

$$y \geq \sqrt{3}x, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

$$15.17. 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81,$$

$$-\sqrt{(x^2 + y^2)/3} \leq z \leq \sqrt{(x^2 + y^2)/35},$$

$$0 \leq y \leq -x.$$

$$15.18. 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144,$$

$$-\sqrt{(x^2 + y^2)/3} \leq z \leq -\sqrt{(x^2 + y^2)/15},$$

$$0 \leq y \leq -\sqrt{3}x.$$

$$15.19. 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144,$$

$$z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, \sqrt{3}x \leq y \leq x/\sqrt{3}.$$

$$15.20. 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100,$$

$$z \geq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{63}}, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x.$$

$$15.21. 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64,$$

$$z \geq \sqrt{(x^2 + y^2)/99}, y \leq x/\sqrt{3}, y \leq -x/\sqrt{3}.$$

$$15.22. 49 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144,$$

$$z \leq -\sqrt{(x^2 + y^2)/99}, y \geq x/\sqrt{3}, y \geq -x/\sqrt{3}.$$

$$15.23. 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81,$$

$$0 \leq z \leq \sqrt{(x^2 + y^2)/24},$$

$$y \leq 0, y \leq x/\sqrt{3}.$$

$$15.24. 49 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 169,$$

$$-\sqrt{(x^2 + y^2)/24} \leq z \leq 0,$$

$$y \geq 0, y \geq x/\sqrt{3}.$$

- 15.25. $16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$,
 $-\sqrt{(x^2 + y^2)/3} \leq z \leq \sqrt{(x^2 + y^2)/35}$,
 $0 \leq y \leq x$.
- 15.26. $64 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 196$,
 $-\sqrt{(x^2 + y^2)/3} \leq z \leq -\sqrt{(x^2 + y^2)/15}$,
 $0 \leq y \leq \sqrt{3}x$.
- 15.27. $64 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 196$,
 $z \leq \sqrt{(x^2 + y^2)/3}$, $x/\sqrt{3} \leq y \leq 0$.
- 15.28. $64 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144$,
 $z \geq -\sqrt{(x^2 + y^2)/63}$, $0 \leq y \leq x/\sqrt{3}$.
- 15.29. $16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81$,
 $z \geq \sqrt{(x^2 + y^2)/99}$, $y \leq 0$, $y \leq -\sqrt{3}x$.
- 15.30. $64 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 169$,
 $z \leq -\sqrt{(x^2 + y^2)/99}$, $y \geq 0$, $y \geq -\sqrt{3}x$.
- 15.31. $16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$,
 $0 \leq z \leq \sqrt{(x^2 + y^2)/24}$,
 $y \leq 0$, $y \leq -x/\sqrt{3}$.

Задача 16. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ — плотность. Найти массу тела.

- 16.1. $64(x^2 + y^2) = z^2$, $x^2 + y^2 = 4$,
 $y = 0$, $z = 0$ ($y \geq 0$, $z \geq 0$),
 $\mu = 5(x^2 + y^2)/4$.
- 16.2. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$,
 $(x^2 + y^2 \leq 1)$, $x = 0$ ($x \geq 0$);
 $\mu = 4|z|$.
- 16.3. $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2z$,
 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$);
 $\mu = 10x$.
- 16.4. $x^2 + y^2 = \frac{16}{49}z^2$, $x^2 + y^2 = \frac{4}{7}z$,
 $x = 0$, $y = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$);
 $\mu = 80yz$.
- 16.5. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4z^2$,
 $x = 0$, $y = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$);
 $\mu = 20z$.
- 16.6. $36(x^2 + y^2) = z^2$, $x^2 + y^2 = 1$,
 $x = 0$, $z = 0$ ($x \geq 0$, $z \geq 0$);
 $\mu = \frac{5}{6}(x^2 + y^2)$.
- 16.7. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 4$,
 $(x^2 + y^2 \leq 4)$;
 $\mu = 2|z|$.
- 16.8. $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 8z$,
 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$);
 $\mu = 5x$.
- 16.9. $x^2 + y^2 = \frac{4}{25}z^2$, $x^2 + y^2 = \frac{2}{5}z$,
 $x = 0$, $y = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$);
 $\mu = 28xz$.
- 16.10. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = z^2$,
 $x = 0$, $y = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$);
 $\mu = 6z$.

- 16.11. $25(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=4$,
 $x=0$, $y=0$, $z=0$,
 $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$;
 $\mu=2(x^2+y^2)$.
- 16.12. $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+y^2=4$,
 $(x^2+y^2 \leq 4)$, $y=0$ ($y \geq 0$);
 $\mu=|z|$.
- 16.13. $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=6z$,
 $x=0$, $y=0$, $z=0$ ($x \geq 0, y \geq 0$);
 $\mu=90y$.
- 16.14. $x^2+y^2=z^2/25$, $x^2+y^2=z/5$,
 $x=0$, $y=0$ ($x \geq 0, y \geq 0$);
 $\mu=14yz$.
- 16.15. $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=9z^2$,
 $x=0$, $y=0$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$);
 $\mu=10z$.
- 16.16. $9(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=4$,
 $x=0$, $y=0$, $z=0$,
 $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$;
 $\mu=5(x^2+y^2)/3$.
- 16.17. $x^2+y^2+z^2=4$,
 $x^2+y^2=1$, $(x^2+y^2 \leq 1)$;
 $\mu=6|z|$.
- 16.18. $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=z$,
 $x=0$, $y=0$, $z=0$,
 $(x \geq 0, y \geq 0)$;
 $\mu=10y$.
- 16.19. $x^2+y^2=z^2/49$, $x^2+y^2=z/7$,
 $x=0$, $y=0$ ($x \geq 0, y \geq 0$);
 $\mu=10xz$.
- 16.20. $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=4z^2$,
 $x=0$, $y=0$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$);
 $\mu=10z$.
- 16.21. $16(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=1$,
 $x=0$, $y=0$, $z=0$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$);
 $\mu=5(x^2+y^2)$.
- 16.22. $x^2+y^2+z^2=16$,
 $x^2+y^2=4$ ($x^2+y^2 \leq 4$);
 $\mu=|z|$.
- 16.23. $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=4z$,
 $x=0$, $y=0$, $z=0$ ($x \geq 0, y \geq 0$);
 $\mu=5y$.
- 16.24. $x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2=z$,
 $x=0$, $y=0$ ($x \geq 0, y \geq 0$);
 $\mu=35yz$.
- 16.25. $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=z^2$,
 $x=0$, $y=0$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$);
 $\mu=32z$.
- 16.26. $x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2=4$,
 $x=0$, $y=0$, $z=0$
 $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$;
 $\mu=5(x^2+y^2)/2$.
- 16.27. $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+y^2=4$,
 $(x^2+y^2 \leq 4)$, $z=0$ ($z \geq 0$);
 $\mu=2z$.
- 16.28. $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=3z$,
 $x=0$, $y=0$, $z=0$,
 $(x \geq 0, y \geq 0)$,
 $\mu=15x$.
- 16.29. $x^2+y^2=4z^2/49$, $x^2+y^2=2z/7$,
 $x=0$, $y=0$ ($x \geq 0, y \geq 0$);
 $\mu=20xz$.
- 16.30. $x^2+y^2+z^2=16$,
 $x^2+y^2=9z^2$,
 $x=0$, $y=0$,
 $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$;
 $\mu=5z$.
- 16.31. $4(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=1$,
 $y=0$, $z=0$ ($y \geq 0, z \geq 0$);
 $\mu=10(x^2+y^2)$.

Теоретические вопросы

1. Скалярное поле. Производная по направлению.
2. Градиент, его свойства. Инвариантное определение градиента.
3. Векторное поле. Поток векторного поля через поверхность, его физический смысл.
4. Формула Остроградского.
5. Дивергенция векторного поля, ее физический смысл. Инвариантное определение дивергенции. Свойства дивергенции.
6. Соленоидальное поле, его основные свойства.
7. Линейный интеграл в векторном поле, его свойства и физический смысл.
8. Циркуляция векторного поля, ее гидродинамический смысл.
9. Формула Стокса.
10. Ротор векторного поля, его свойства. Инвариантное определение ротора.
11. Условия независимости линейного интеграла от формы пути интегрирования.
12. Потенциальное поле. Условия потенциальности.

Теоретические упражнения

1. Найти производную скалярного поля $u = u(x, y, z)$ по направлению градиента скалярного поля $v = v(x, y, z)$.
2. Найти градиент скалярного поля $u = Cr$, где C — постоянный вектор, а r — радиус-вектор. Каковы поверхности уровня этого поля и как они расположены по отношению к вектору C ?
3. Доказать, что если S — замкнутая кусочно-гладкая поверхность и C — ненулевой постоянный вектор, то

$$\oiint_S \cos(\mathbf{n}, \mathbf{C}) dS = 0,$$

где \mathbf{n} — вектор, нормальный к поверхности S .

4. Доказать формулу

$$\oiint_S \varphi \mathbf{a} \mathbf{n}^\circ dS = \iiint_V (\varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi) dV,$$

где $\varphi = \varphi(x, y, z)$; S — поверхность, ограничивающая объем V ; \mathbf{n}° — орт внешней нормали к поверхности S . Установить условия применимости формулы.

5. Доказать, что если функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \text{ то } \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0,$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по направлению нормали к кусочно-гладкой замкнутой поверхности S .

6. Доказать, что если функция $u(x, y, z)$ является многочленом второй степени и S — кусочно-гладкая замкнутая поверхность, то интеграл $\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS$ пропорционален объему, ограниченному поверхностью S .

7. Пусть $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, где P, Q, R — линейные функции от x, y, z , и пусть Γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая, расположенная в некоторой плоскости. Доказать, что если циркуляция $\oint \mathbf{a} d\mathbf{r}$ отлична от нуля, то она пропорциональна площади фигуры, ограниченной контуром Γ .

8. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси, проходящей через начало координат. Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$. Определить ротор и дивергенцию поля линейных скоростей $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]$ точек тела (здесь \mathbf{r} — радиус-вектор).

Расчетные задания

Задача 1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению проходящей через эту точку нормали к поверхности S , образующей острый угол с положительным направлением оси Oz .

1.1. $u = 4 \ln(3 + x^2) - 8xyz$, $S: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$, $M(1, 1, 1)$.

1.2. $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$, $S: 4z + 2x^2 - y^2 = 8$, $M(2, 4, 4)$.

1.3. $u = -2 \ln(x^2 - 5) - 4xyz$, $S: x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1$, $M(1, 1, 1)$.

1.4. $u = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}$, $S: z^2 = x^2 + 4y^2 - 4$, $M\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$.

1.5. $u = xz^2 - \sqrt{x^3y}$, $S: x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0$, $M(2, 2, 4)$.

1.6. $u = x\sqrt{y} - yz^2$, $S: x^2 + y^2 = 4z + 9$, $M(2, 1, -1)$.

1.7. $u = 7 \ln(1/13 + x^2) - 4xyz$, $S: 7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7$, $M(1, 1, 1)$.

1.8. $u = \arctg(y/x) + xz$, $S: x^2 + y^2 - 2z = 10$, $M(2, 2, -1)$.

1.9. $u = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z}$, $S: 4x^2 - y^2 + z^2 = 16$, $M(1, -2, 4)$.

1.10. $u = \sqrt{x^2 + y^2} - z$, $S: x^2 + y^2 = 24z + 1$, $M(3, 4, 1)$.

- 1.11. $u = x\sqrt{y} - (z+y)\sqrt{x}$, $S: x^2 - y^2 + z^2 = 4$, $M(1, 1, -2)$.
 1.12. $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}$, $S: z = x^2 - y^2$, $M(1, 1, 0)$.
 1.13. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$, $S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 7 = 0$, $M(0, -3, 4)$.
 1.14. $u = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2}$, $S: x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 = 4z + 23$, $M(3, 0, -4)$.

Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению вектора \mathbf{I} .

- 1.15. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$,
 $\mathbf{I} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$,
 $M(1, 1, 1)$.
- 1.16. $u = x + \ln(z^2 + y^2)$,
 $\mathbf{I} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$,
 $M(2, 1, 1)$.
- 1.17. $u = x^2y - \sqrt{xy + z^2}$,
 $\mathbf{I} = 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$,
 $M(1, 5, -2)$.
- 1.18. $u = y \ln(1 + x^2) - \arctg z$,
 $\mathbf{I} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$,
 $M(0, 1, 1)$.
- 1.19. $u = x(\ln y - \arctg z)$,
 $\mathbf{I} = 8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$,
 $M(-2, 1, -1)$.
- 1.20. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2z$,
 $\mathbf{I} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$,
 $M(1, 3, 2)$.
- 1.21. $u = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz}$,
 $\mathbf{I} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$,
 $M(\pi/2, 3\pi/2, 3)$.
- 1.22. $u = x^2y^2z - \ln(z - 1)$,
 $\mathbf{I} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\sqrt{5}\mathbf{k}$,
 $M(1, 1, 2)$.
- 1.23. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$,
 $\mathbf{I} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$,
 $M(1, -3, 4)$.
- 1.24. $u = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x + \sqrt{y}}$,
 $\mathbf{I} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$,
 $M(4, 1, -2)$.
- 1.25. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}$,
 $\mathbf{I} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$,
 $M(1, 1, 0)$.
- 1.26. $u = 2\sqrt{x + y} + y \arctg z$,
 $\mathbf{I} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$,
 $M(3, -2, 1)$.
- 1.27. $u = z^2 + 2 \arctg(x - y)$,
 $\mathbf{I} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$,
 $M(1, 2, -1)$.
- 1.28. $u = \ln(x^2 + y^2) + xyz$,
 $\mathbf{I} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$,
 $M(1, -1, 2)$.
- 1.29. $u = xy - \frac{x}{z}$,
 $\mathbf{I} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$,
 $M(-4, 3, -1)$.
- 1.30. $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$,
 $\mathbf{I} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$,
 $M(1, -3, 4)$.
- 1.31. $u = x^2 - \arctg(y + z)$,
 $\mathbf{I} = 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$,
 $M(2, 1, 1)$.

Задача 2. Найти угол между градиентами скалярных полей $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ в точке M .

2.1. $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$, $u = \frac{yz^2}{x^2}$, $M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

- 2.2. $v = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z}$, $u = x^2yz^3$, $M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.
- 2.3. $v = 9\sqrt{2x^3} - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}$, $u = \frac{z^3}{xy^2}$, $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.
- 2.4. $v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6z}}$, $u = \frac{z}{x^3y^2}$, $M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
- 2.5. $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6z^3}$, $u = \frac{x^2}{yz^2}$, $M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
- 2.6. $v = 3\sqrt{2x^2} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2z^2}$, $u = \frac{z^2}{xy^2}$, $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.
- 2.7. $v = 6\sqrt{6x^3} - 6\sqrt{6y^3} + 2z^3$, $u = \frac{xz^2}{y}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1\right)$.
- 2.8. $v = \frac{\sqrt{6}}{2x} - \frac{\sqrt{6}}{2y} + \frac{2}{3z}$, $u = \frac{yz^2}{x}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
- 2.9. $v = 3\sqrt{2x^2} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2z^2}$, $u = \frac{xy^2}{z^2}$, $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.
- 2.10. $v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6z}}$, $u = \frac{x^3y^3}{z}$, $M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
- 2.11. $v = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3z}}$, $u = \frac{1}{x^2yz}$, $M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
- 2.12. $v = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2z}}$, $u = \frac{x^2}{y^2z^3}$, $M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- 2.13. $v = x^2 + 9y^2 + 6z^2$, $u = xyz$, $M\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
- 2.14. $v = \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt{6}}{4z}$, $u = \frac{y^3}{x^2z}$, $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right)$.
- 2.15. $v = \sqrt{2x^2} - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2z^2}$, $u = xy^2z$, $M\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
- 2.16. $v = -\frac{\sqrt{6}}{2x} + \frac{\sqrt{6}}{2y} - \frac{2}{3z}$, $u = \frac{x}{yz^2}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
- 2.17. $v = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2z}}$, $u = \frac{y^2z^3}{x^2}$, $M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

- 2.18. $v = \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{2\sqrt{2}}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2z}$, $u = \frac{y^2z^3}{x}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- 2.19. $v = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3$, $u = \frac{y}{xz^2}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1\right)$.
- 2.20. $v = x^2 - y^2 - 3z^2$, $u = \frac{yz^2}{x}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
- 2.21. $v = \frac{3x^2}{\sqrt{2}} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z^2$, $u = \frac{z^2}{x^2y^2}$, $M\left(\frac{2}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.
- 2.22. $v = \frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{2}} - \frac{8z^3}{\sqrt{3}}$, $u = \frac{x^2}{y^2z^3}$, $M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- 2.23. $v = \frac{3}{2}x^2 + 3y^2 - 2z^2$, $u = x^2yz^3$, $M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.
- 2.24. $v = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}$, $u = \frac{xy^2}{z^3}$, $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.
- 2.25. $v = \sqrt{2}x^2 - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2$, $u = \frac{1}{xy^2z}$, $M\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
- 2.26. $v = x^2 + 9y^2 + 6z^2$, $u = \frac{1}{xyz}$, $M\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
- 2.27. $v = \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{2\sqrt{2}}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2z}$, $u = \frac{x}{y^2z^3}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- 2.28. $v = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3z}}$, $u = x^2yz$, $M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
- 2.29. $v = \frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{2}} - \frac{8z^3}{\sqrt{3}}$, $u = \frac{y^2z^3}{x^2}$, $M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- 2.30. $v = -\frac{3x^3}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}y^3}{3} + 8\sqrt{3}z^3$, $u = \frac{x^2z}{y^3}$, $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right)$.
- 2.31. $v = x^2 - y^2 - 3z^2$, $u = \frac{x}{yz^2}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Задача 3. Найти векторные линии в векторном поле \mathbf{a} .

- 3.1. $\mathbf{a} = 4y\mathbf{i} - 9x\mathbf{j}$.
 3.3. $\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$.
 3.5. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$.
 3.7. $\mathbf{a} = 4z\mathbf{i} - 9x\mathbf{k}$.

- 3.2. $\mathbf{a} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$.
 3.4. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$.
 3.6. $\mathbf{a} = 3x\mathbf{i} + 6z\mathbf{k}$.
 3.8. $\mathbf{a} = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{k}$.

3.9. $a=4yj+8zk$.

3.11. $a=2xi+8zk$.

3.13. $a=4zj-9yk$.

3.15. $a=5xi+10yj$.

3.17. $a=yj+4zk$.

3.19. $a=9yi-4xj$.

3.21. $a=6xi+12zk$.

3.23. $a=4xi+yj$.

3.25. $a=xi+zk$.

3.27. $a=7yj+14zk$.

3.29. $a=4xi+zk$.

3.31. $a=9zj-4yk$.

3.10. $a=yj+3zk$.

3.12. $a=xi+3zk$.

3.14. $a=2zj+3yk$.

3.16. $a=2xi+6yj$.

3.18. $a=xi+yj$.

3.20. $a=5yi+7xj$.

3.22. $a=2yj+6zk$.

3.24. $a=9zi-4xk$.

3.26. $a=5zi+7xk$.

3.28. $a=2xi+6zk$.

3.30. $a=5zj+7yk$.

Задача 4. Найти поток векторного поля a через часть поверхности S , вырезаемую плоскостями P_1 , P_2 (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

4.1. $a=xi+yj+zk$,

$S: x^2+y^2=1$,

$P_1: z=0, P_2: z=2$.

4.3. $a=xi+yj+2zk$,

$S: x^2+y^2=1$,

$P_1: z=0, P_2: z=3$.

4.5. $a=xi+yj+xyzk$,

$S: x^2+y^2=1$,

$P_1: z=0, P_2: z=5$.

4.7. $a=(x+y)i-(x-y)j+xyzk$,

$S: x^2+y^2=1$,

$P_1: z=0, P_2: z=4$.

4.9. $a=xi+yj+\sin zk$,

$S: x^2+y^2=1$,

$P_1: z=0, P_2: z=5$.

4.2. $a=xi+yj-zk$,

$S: x^2+y^2=1$,

$P_1: z=0, P_2: z=4$.

4.4. $a=xi+yj+z^3k$,

$S: x^2+y^2=1$,

$P_1: z=0, P_2: z=1$.

4.6. $a=(x-y)i+(x+y)j+z^2k$,

$S: x^2+y^2=1$,

$P_1: z=0, P_2: z=2$.

4.8. $a(x^3+xy^2)i+(y^3+x^2y)j+z^2k$,

$S: x^2+y^2=1$,

$P_1: z=0, P_2: z=3$.

4.10. $a=xi+yj+k$,

$S: x^2+y^2=1$,

$P_1: z=0, P_2: z=1$.

Найти поток векторного поля a через часть поверхности S , вырезаемую плоскостью P (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

4.11. $a=(x+xy^2)i+(y-yx^2)j+(z-3)k, S: x^2+y^2=z^2 (z \geq 0), P: z=1$.

4.12. $a=yi-xj+k, S: x^2+y^2=z^2 (z \geq 0), P: z=4$.

4.13. $a=xyi-x^2j+3k, S: x^2+y^2=z^2 (z \geq 0), P: z=1$.

4.14. $a=xxzi+yzi+(z^2-1)k, S: x^2+y^2=z^2 (z \geq 0), P: z=4$.

4.15. $a=y^2xi-yx^2j+k, S: x^2+y^2=z^2 (z \geq 0), P: z=5$.

4.16. $a=(xz+y)i+(yz-x)j+(z^2-2)k, S: x^2+y^2=z^2 (z \geq 0), P: z=3$.

4.17. $a=xyzj-x^2zj+3k, S: x^2+y^2=z^2 (z \geq 0), P: z=2$.

4.18. $a=(x+xy)i+(y-x^2)j+(z-1)k, S: x^2+y^2=z^2 (z \geq 0), P: z=3$.

4.19. $a=(x+y)i+(y-x)j+(z-2)k, S: x^2+y^2=z^2 (z \geq 0), P: z=2$.

4.20. $a=xi+yj+(z-2)k, S: x^2+y^2=z^2 (z \geq 0), P: z=1$.

4.21. $a=(x+xz)i+yj+(z-x^2)k, S: x^2+y^2+z^2=4 (z \geq 0), P: z=0$.

4.22. $a=xi+(y+yz^2)j+(z-zy^2)k, S: x^2+y^2+z^2=4, P: z=0 (z \geq 0)$.

- 4.23. $\mathbf{a} = (x+z)\mathbf{i} + (y+z)\mathbf{j} + (z-x-y)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $P: z=0$ ($z \geq 0$).
- 4.24. $\mathbf{a} = (x+xy)\mathbf{i} + (y-x^2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $P: z=0$ ($z \geq 0$).
- 4.25. $\mathbf{a} = (x+z)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z-x)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $P: z=0$ ($z \geq 0$).
- 4.26. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + (y+yz)\mathbf{j} + (z-y^2)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $P: z=0$ ($z \geq 0$).
- 4.27. $\mathbf{a} = (x-y)\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $P: z=0$ ($z \geq 0$).
- 4.28. $\mathbf{a} = (x+xz^2)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z-zx^2)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $P: z=0$ ($z \geq 0$).
- 4.29. $\mathbf{a} = (x+y)\mathbf{i} + (y-x)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $P: z=0$ ($z \geq 0$).
- 4.30. $\mathbf{a} = (x+xy^2)\mathbf{i} + (y-yx^2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $P: z=0$ ($z \geq 0$).
- 4.31. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + (y+z)\mathbf{j} + (z-y)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $P: z=0$ ($z \geq 0$).

Задача 5. Найти поток векторного поля \mathbf{a} через часть плоскости P , расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

5.1. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,
 $P: x+y+z=1$.

5.3. $\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,
 $P: x+y+z=1$.

5.5. $\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$,
 $P: x+y+z=1$.

5.7. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,
 $P: x/2 + y + z = 1$.

5.9. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,
 $P: x + y/2 + z/3 = 1$.

5.11. $\mathbf{a} = 3x\mathbf{i} + 2z\mathbf{k}$,
 $P: x + y/2 + z/3 = 1$.

5.13. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$,
 $P: x/3 + y + z/2 = 1$.

5.15. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 6z\mathbf{k}$,
 $P: x/2 + y/3 + z = 1$.

5.17. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,
 $P: 2x + y/2 + z = 1$.

5.19. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$,
 $P: 2x + y/2 + z = 1$.

5.21. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 8z\mathbf{k}$,
 $P: x + 2y + z/2 = 1$.

5.23. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 5z\mathbf{k}$,
 $P: x + 2y + \frac{z}{2} = 1$.

5.25. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,
 $P: 2x + 3y + z = 1$.

5.27. $\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,
 $P: 2x + 3y + z = 1$.

5.29. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 9y\mathbf{j} + 8z\mathbf{k}$,
 $P: x + 2y + 3z = 1$.

5.31. $\mathbf{a} = -x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,
 $P: x + 2y + 3z = 1$.

5.2. $\mathbf{a} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,
 $P: x + y + z = 1$.

5.4. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$,
 $P: x + y + z = 1$.

5.6. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,
 $P: x/2 + y + z = 1$.

5.8. $\mathbf{a} = y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$,
 $P: x/2 + y + z = 1$.

5.10. $\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,
 $P: x + y/2 + z/3 = 1$.

5.12. $\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,
 $P: x/3 + y + z/2 = 1$.

5.14. $\mathbf{a} = -2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$,
 $P: x/3 + y + z/2 = 1$.

5.16. $\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + 5y\mathbf{j} + 5z\mathbf{k}$,
 $P: x/2 + y/3 + z = 1$.

5.18. $\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$,
 $P: 2x + y/2 + z = 1$.

5.20. $\mathbf{a} = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 12z\mathbf{k}$,
 $P: 2x + y/2 + z = 1$.

5.22. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 6z\mathbf{k}$,
 $P: x + 2y + z/2 = 1$.

5.24. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 5z\mathbf{k}$,
 $P: x + 2y + \frac{z}{2} = 1$.

5.26. $\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,
 $P: 2x + 3y + z = 1$.

5.28. $\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$,
 $P: 2x + 3y + z = 1$.

5.30. $\mathbf{a} = 8x\mathbf{i} + 11y\mathbf{j} + 17z\mathbf{k}$,
 $P: x + 2y + 3z = 1$.

Задача 6. Найти поток векторного поля \mathbf{a} через часть плоскости P , расположенную в I октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

6.1. $\mathbf{a} = 7x\mathbf{i} + (5y+2)\mathbf{j} + 4\pi z\mathbf{k}$,

$P: x+y/2+4z=1$.

6.3. $\mathbf{a} = 9\pi x\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$,

$P: x/3+y+z=1$.

6.5. $\mathbf{a} = 7x\mathbf{i} + 9\pi y\mathbf{j} + \mathbf{k}$,

$P: x+y/3+z=1$.

6.7. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + (\pi z - 1)\mathbf{k}$,

$P: 2x+y/2+z/3=1$.

6.9. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - y\mathbf{j} + \frac{3\pi}{2}z\mathbf{k}$,

$P: x/3+y+z/4=1$.

6.11. $\mathbf{a} = 7\pi x\mathbf{i} + 2\pi y\mathbf{j} + (7z+2)\mathbf{k}$,

$P: x+y+z/2=1$.

6.13. $\mathbf{a} = (3\pi - 1)x\mathbf{i} + (9\pi y + 1)\mathbf{j} + 6\pi z\mathbf{k}$,

$P: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{9} = 1$.

6.15. $\mathbf{a} = (5y+3)\mathbf{j} + 11\pi z\mathbf{k}$,

$P: x+y/3+4z=1$.

6.17. $\mathbf{a} = \pi y\mathbf{j} + (1-2z)\mathbf{k}$,

$P: x/4+y/3+z=1$.

6.18. $\mathbf{a} = (27\pi - 1)x\mathbf{i} + (34\pi y + 3)\mathbf{j} + 20\pi z\mathbf{k}$,

$P: 3x + \frac{y}{9} + z = 1$.

6.19. $\mathbf{a} = \pi x\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\pi z\mathbf{k}$,

$P: x/2+y/3+z=1$.

6.20. $\mathbf{a} = 4\pi x\mathbf{i} + 7\pi y\mathbf{j} + (2z+1)\mathbf{k}$,

$P: 2x+y/3+2z=1$.

6.21. $\mathbf{a} = 3\pi x\mathbf{i} + 6\pi y\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$,

$P: 2x+y+z/3=1$.

6.23. $\mathbf{a} = (21\pi - 1)x\mathbf{i} + 62\pi y\mathbf{j} + (1 - 2\pi z)\mathbf{k}$,

$P: 8x+y/2+z/3=1$.

6.24. $\mathbf{a} = \pi x\mathbf{i} + 2\pi y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,

$P: x/2+y/4+z/3=1$.

6.26. $\mathbf{a} = 7\pi x\mathbf{i} + (4y+1)\mathbf{j} + 2\pi z\mathbf{k}$,

$P: x/3+2y+z=1$.

6.27. $\mathbf{a} = 6\pi x\mathbf{i} + 3\pi y\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$,

$P: 2x+y/2+z/3=1$.

6.28. $\mathbf{a} = (\pi - 1)x\mathbf{i} + 2\pi y\mathbf{j} + (1 - \pi z)\mathbf{k}$,

$P: \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

6.2. $\mathbf{a} = 2\pi x\mathbf{i} + (7y+2)\mathbf{j} + 7\pi z\mathbf{k}$,

$P: x+y/2+z/3=1$.

6.4. $\mathbf{a} = (2x+1)\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 3\pi z\mathbf{k}$,

$P: x/3+y+2z=1$.

6.6. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 5y\mathbf{j} + 11\pi z\mathbf{k}$,

$P: x+y+z/3=1$.

6.8. $\mathbf{a} = 5\pi x\mathbf{i} + (9y+1) + 4\pi z\mathbf{k}$,

$P: x/2+y/3+z/2=1$.

6.10. $\mathbf{a} = 9\pi x\mathbf{i} + (5y+1)\mathbf{j} + 2\pi z\mathbf{k}$,

$P: 3x+y+z/9=1$.

6.12. $\mathbf{a} = \pi y\mathbf{j} + (4-2z)\mathbf{k}$,

$P: 2x+y/3+z/4=1$.

6.14. $\mathbf{a} = \pi x\mathbf{i} + \frac{\pi}{2}y\mathbf{j} + (4-2z)\mathbf{k}$,

$P: x + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$.

6.16. $\mathbf{a} = 9\pi y\mathbf{j} + (7z+1)\mathbf{k}$,

$P: x+y+z=1$.

6.22. $\mathbf{a} = \pi x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$,

$P: 2x+y/6+z=1$.

6.25. $\mathbf{a} = 9\pi x\mathbf{i} + 2\pi y\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$,

$P: 2x+8y+z/3=1$.

$$6.29. \mathbf{a} = \frac{\pi}{2}x\mathbf{i} + \pi y\mathbf{j} + (4-2z)\mathbf{k},$$

$$P: x + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1.$$

$$6.30. \mathbf{a} = 7\pi x\mathbf{i} + 4\pi y\mathbf{j} + 2(z+1)\mathbf{k},$$

$$P: x/3 + y/4 + z = 1.$$

$$6.31. \mathbf{a} = 5\pi x\mathbf{i} + (1-2y)\mathbf{j} + 4\pi z\mathbf{k},$$

$$P: x/2 + 4y + z/3 = 1.$$

Задача 7. Найти поток векторного поля \mathbf{a} через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя).

$$7.1. \mathbf{a} = (e^x + 2x)\mathbf{i} + e^x\mathbf{j} + e^x\mathbf{k}, S: x + y + z = 1, x=0, y=0, z=0.$$

$$7.2. \mathbf{a} = (3z^2 + x)\mathbf{i} + (e^x - 2y)\mathbf{j} + (2z - xy)\mathbf{k}, S: x^2 + y^2 = z^2, z=1, z=4.$$

$$7.3. \mathbf{a} = (\ln y + 7x)\mathbf{i} + (\sin z - 2y)\mathbf{j} + (e^z - 2z)\mathbf{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + 2z - 2.$$

$$7.4. \mathbf{a} = (\cos z + 3x)\mathbf{i} + (x - 2y)\mathbf{j} + (3z + y^2)\mathbf{k}, S: z^2 = 36(x^2 + y^2), z=6.$$

$$7.5. \mathbf{a} = (e^{-x} - x)\mathbf{i} + (xz + 3y)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}, S: 2x + y + z = 2, x=0, y=0, z=0.$$

$$7.6. \mathbf{a} = (6x - \cos y)\mathbf{i} - (e^x + z)\mathbf{j} - (2y + 3z)\mathbf{k}, S: x^2 + y^2 = z^2, z=1, z=2.$$

$$7.7. \mathbf{a} = (4x - 2y^2)\mathbf{i} + (\ln z - 4y)\mathbf{j} + (x + 3z/4)\mathbf{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 3.$$

$$7.8. \mathbf{a} = (1 + \sqrt{z})\mathbf{i} + (4y - \sqrt{x})\mathbf{j} + xy\mathbf{k}, S: z^2 = 4(x^2 + y^2), z=3.$$

$$7.9. \mathbf{a} = (\sqrt{z-x})\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j} + (y^2 - z)\mathbf{k}, S: 3x - 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0.$$

$$7.10. \mathbf{a} = (yz + x)\mathbf{i} + (x^2 + y)\mathbf{j} + (xy^2 + z)\mathbf{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 2z.$$

$$7.11. \mathbf{a} = (e^{2y} + x)\mathbf{i} + (x - 2y)\mathbf{j} + (y^2 + 3z)\mathbf{k}, S: x - y + z = 1, x=0, y=0, z=0.$$

$$7.12. \mathbf{a} = (\sqrt{z-2x})\mathbf{i} + (e^x + 3y)\mathbf{j} + \sqrt{y+x}\mathbf{k}, S: x^2 + y^2 = z^2, z=2, z=5.$$

$$7.13. \mathbf{a} = (e^x + x/4)\mathbf{i} + (\ln x + y/4)\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y - 2z - 2.$$

$$7.14. \mathbf{a} = (3x - 2z)\mathbf{i} + (z - 2y)\mathbf{j} + (1 + 2z)\mathbf{k}, S: z^2 = 4(x^2 + y^2), z=2.$$

$$7.15. \mathbf{a} = (e^z + 2x)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j} + (2z - 1)\mathbf{k}, S: x + 2y + z = 2, x=0, y=0, z=0.$$

$$7.16. \mathbf{a} = (x + y^2)\mathbf{i} + (xz + y)\mathbf{j} + (\sqrt{x^2 + 1} + z)\mathbf{k}, S: x^2 + y^2 = z^2, z=2, z=3.$$

$$7.17. \mathbf{a} = (e^z + 2x)\mathbf{i} + (xz - y)\mathbf{j} + (1/4)(e^{xy} - z)\mathbf{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 2y + 3.$$

$$7.18. \mathbf{a} = (\sqrt{z+y})\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + (3z + 5x)\mathbf{k}, S: z^2 = 8(x^2 + y^2), z=2.$$

$$7.19. \mathbf{a} = (8yz - x)\mathbf{i} + (x^2 - 1)\mathbf{j} + (xy - 2z)\mathbf{k}, S: 2x + 3y - z = 6, x=0, y=0, z=0.$$

$$7.20. \mathbf{a} = (y + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + 3y)\mathbf{j} + xy\mathbf{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 2x.$$

$$7.21. \mathbf{a} = (2yz - x)\mathbf{i} + (xz + 2y)\mathbf{j} + (x^2 + z)\mathbf{k}, S: y - x + z = 1, x=0, y=0, z=0.$$

$$7.22. \mathbf{a} = (\sin z + 2x)\mathbf{i} + (\sin x - 3y)\mathbf{j} + (\sin y + 2z)\mathbf{k}, S: x^2 + y^2 = z^2, z=3, z=6.$$

$$7.23. \mathbf{a} = (\cos z + x/4)\mathbf{i} + (e^x + y/4)\mathbf{j} + \left(\frac{z}{4} - 1\right)\mathbf{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 2z + 3.$$

$$7.24. \mathbf{a} = (\sqrt{z+1} + x)\mathbf{i} + (2x + y)\mathbf{j} + (\sin x + z)\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$7.25. \mathbf{a} = (5x - 6y)\mathbf{i} + (11x^2 + 2y)\mathbf{j} + (x^2 - 4z)\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x + y + 2z = 2, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$$

$$7.26. \mathbf{a} = (y^2 + z^2 + 6x)\mathbf{i} + (e^x - 2y + x)\mathbf{j} + (x + y - z)\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 1, z = 3. \end{cases}$$

$$7.27. \mathbf{a} = \frac{1}{2}(x+z)\mathbf{i} + \frac{1}{4}(x \cdot z - y)\mathbf{j} + (xy - 2)\mathbf{k},$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y + 4z - 8.$$

$$7.28. \mathbf{a} = (3yz - x)\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j} + (6z - 1)\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} z^2 = 9(x^2 + y^2), \\ z = 3. \end{cases}$$

$$7.29. \mathbf{a} = (yz - 2x)\mathbf{i} + (\sin x + y)\mathbf{j} + (x - 2z)\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x + 2y - 3z = 6, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$$

$$7.30. \mathbf{a} = (8x + 1)\mathbf{i} + (zx - 4y)\mathbf{j} + (e^x - z)\mathbf{k},$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 2y.$$

$$7.31. \mathbf{a} = (2y - 5x)\mathbf{i} + (x - 1)\mathbf{j} + (2\sqrt{xy} + 2z)\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} 2x + 2y - z = 4, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$$

Задача 8. Найти поток векторного поля \mathbf{a} через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя).

$$8.1. \mathbf{a} = (x+z)\mathbf{i} + (z+y)\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = x, z = 0 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$8.3. \mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} y = x^2, y = 4x^2, y = 1 \quad (x \geq 0), \\ z = y, z = 0. \end{cases}$$

$$8.5. \mathbf{a} = (z+y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} - x\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + z^2 = 2y, \\ y = 2. \end{cases}$$

$$8.7. \mathbf{a} = 2(z-y)\mathbf{i} + (x-z)\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} z = x^2 + 3y^2 + 1, z = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$8.9. \mathbf{a} = z\mathbf{i} - 4y\mathbf{j} + 2x\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$8.11. \mathbf{a} = 8x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + x\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x + y = 1, x = 0, y = 0, \\ z = x^2 + y^2, z = 0. \end{cases}$$

$$8.13. \mathbf{a} = 6x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - z\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} z = 3 - 2(x^2 + y^2), \\ z^2 = x^2 + y^2 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$8.15. \mathbf{a} = (y + 2z)\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 3x\mathbf{k},$$

$$8.2. \mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + z\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} z = 3x^2 + 2y^2 + 1, \\ x^2 + y^2 = 4, z = 0. \end{cases}$$

$$8.4. \mathbf{a} = 3x\mathbf{i} - z\mathbf{j},$$

$$S: \begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2, \\ z^2 = x^2 + y^2 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$8.6. \mathbf{a} = x\mathbf{i} - (x + 2y)\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, z = 0, \\ x + 2y + 3z = 6. \end{cases}$$

$$8.8. \mathbf{a} = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} - y\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} z = 4 - 2(x^2 + y^2), \\ z = 2(x^2 + y^2). \end{cases}$$

$$8.10. \mathbf{a} = 4x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - z\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} 3x + 2y = 12, 3x + y = 6, y = 0, \\ x + y + z = 6, z = 0. \end{cases}$$

$$8.12. \mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} 4z = x^2 + y^2, \\ z = 4. \end{cases}$$

$$8.14. \mathbf{a} = (z + y)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4, \\ 3x + 4y + z = 12, z = 1. \end{cases}$$

$$8.16. \mathbf{a} = (y + 6x)\mathbf{i} + 5(x + z)\mathbf{j} + 4y\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} 3z = 27 - 2(x^2 + y^2), \\ z^2 = x^2 + y^2 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$8.17. \mathbf{a} = y\mathbf{i} + 5y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = x, \quad z = 0 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$8.19. \mathbf{a} = y\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j} + x\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ z = x^2 + y^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$8.21. \mathbf{a} = 7x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + (x - y + 5z)\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = x^2 + 2y^2, \\ y = x, \quad y = 2x, \quad x = 1. \end{cases}$$

$$8.23. \mathbf{a} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 2x. \end{cases}$$

$$8.25. \mathbf{a} = (2y - 3z)\mathbf{i} + (3x + 2z)\mathbf{j} + (x + y + z)\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 4 - x - y, \quad z = 0. \end{cases}$$

$$8.27. \mathbf{a} = (2y - 15x)\mathbf{i} + (z - y)\mathbf{j} - (x - 3y)\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} z = 3x^2 + y^2 + 1, \quad z = 0, \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$8.29. \mathbf{a} = (3x - y - z)\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k},$$

$$S: z = x^2 + y^2, \quad z = 2y.$$

$$8.30. \mathbf{a} = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (z + x)\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} y = 2x, \quad y = 4x, \quad x = 1, \\ z = y^2, \quad z = 0. \end{cases}$$

$$8.31. \mathbf{a} = (x + z)\mathbf{i} + y\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} z = 8 - x^2 - y^2, \\ z = x^2 + y^2. \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} y = x, \quad y = 2x, \quad y = 2, \\ z = x^2 + y^2, \quad z = 0. \end{cases}$$

$$8.18. \mathbf{a} = z\mathbf{i} + (3y - x)\mathbf{j} - z\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = x^2 + y^2 + 2, \quad z = 0. \end{cases}$$

$$8.20. \mathbf{a} = (x + y + z)\mathbf{i} + (2y - x)\mathbf{j} + (3z + y)\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} y = x, \quad y = 2x, \quad x = 1, \\ z = x^2 + y^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$8.22. \mathbf{a} = 17x\mathbf{i} + 7y\mathbf{j} + 11z\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 2(x^2 + y^2), \\ y = x^2, \quad y = x. \end{cases}$$

$$8.24. \mathbf{a} = (2x + y)\mathbf{j} + (y + 2z)\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} z = 2 - 4(x^2 + y^2), \\ z = 4(x^2 + y^2). \end{cases}$$

$$8.26. \mathbf{a} = -2x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ z = x^2 + y^2, \quad z = 0. \end{cases}$$

$$8.28. \mathbf{a} = (y + z)\mathbf{i} + (x - 2y + z)\mathbf{j} + x\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = x^2 + y^2, \quad z = 0. \end{cases}$$

Задача 9. Найти поток векторного поля \mathbf{a} через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя).

$$9.1. \mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xz\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \quad z = 1, \\ x = 0, \quad y = 0 \quad (\text{первый октант}). \end{cases}$$

$$9.2. \mathbf{a} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 + x^2)\mathbf{j} + (y^2 + z^2)\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \quad z = 1. \end{cases}$$

$$9.3. \mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$9.5. \mathbf{a} = xz\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - z, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$9.7. \mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ z = 0 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$9.9. \mathbf{a} = (zx + y)\mathbf{i} + (zy - x)\mathbf{j} - (x^2 + y^2)\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$9.10. \mathbf{a} = y^2x\mathbf{i} + z^2y\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k},$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

$$9.11. \mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0, y = 0, z = 0 \\ \text{(первый октант)}. \end{cases}$$

$$9.13. \mathbf{a} = (zx + y)\mathbf{i} + (xy - z)\mathbf{j} + (x^2 + yz)\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$$

$$9.14. \mathbf{a} = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1, \\ x = 0, y = 0 \\ \text{(первый октант)}. \end{cases}$$

$$9.15. \mathbf{a} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$9.17. \mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 2z\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, \\ z = 0, z = 2. \end{cases}$$

$$9.19. \mathbf{a} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0, y = 0, z = 0 \\ \text{(первый октант)}. \end{cases}$$

$$9.21. \mathbf{a} = (zx + y)\mathbf{i} - (2y - x)\mathbf{j} - (x^2 + y^2)\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$9.22. \mathbf{a} = (x^2 + xy)\mathbf{i} + (y^2 + yz)\mathbf{j} + (z^2 + xz)\mathbf{k},$$

$$9.4. \mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$9.6. \mathbf{a} = 3xz\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x + y + z = 2, x = 1, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$$

$$9.8. \mathbf{a} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k},$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

$$9.12. \mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + 3z\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 4. \end{cases}$$

$$9.16. \mathbf{a} = 3x^2\mathbf{i} - 2x^2y\mathbf{j} + (2x - 1)z\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$$

$$9.18. \mathbf{a} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$$

$$9.20. \mathbf{a} = z\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - xy\mathbf{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

9.23. $\mathbf{a} = 3x^2\mathbf{i} - 2x^2y\mathbf{j} + (1 - 2x)\mathbf{k}$,

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \quad z = 1. \end{cases}$$

9.25. $\mathbf{a} = (y^2 + xz)\mathbf{i} + (yx - z)\mathbf{j} + (yz + x)\mathbf{k}$,

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \quad z = \sqrt{2}. \end{cases}$$

9.26. $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$,

$$S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \quad z = 1, \\ x = 0, \quad y = 0 \\ \text{(первый октант)}. \end{cases}$$

9.27. $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + 2x^2\mathbf{k}$,

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - z, \\ z = 0. \end{cases}$$

9.29. $\mathbf{a} = y^2x\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}/3$,

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

9.31. $\mathbf{a} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (xy + y^2)\mathbf{j} + (xz + z)\mathbf{k}$,

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \quad z = 1. \end{cases}$$

9.24. $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i}$,

$$S: \begin{cases} z = 1 - x - y, \\ x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0. \end{cases}$$

9.28. $\mathbf{a} = 2xy\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$,

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{2}, \\ z = 0 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

9.30. $\mathbf{a} = -x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$,

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 4. \end{cases}$$

Задача 10. Найти работу силы \mathbf{F} при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N .

10.1. $\mathbf{F} = (x^2 - 2y)\mathbf{i} + (y^2 - 2x)\mathbf{j}$,

L : отрезок MN ,

$M(-4, 0)$, $N(0, 2)$.

10.3. $\mathbf{F} = (x^2 + 2y)\mathbf{i} + (y^2 + 2x)\mathbf{j}$,

$L: 2 - \frac{x^2}{8} = y$.

$M(-4, 0)$, $N(0, 2)$.

10.5. $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} - y^3\mathbf{j}$,

$L: x^2 + y^2 = 4 \quad (x \geq 0, y \geq 0)$,

$M(2, 0)$, $N(0, 2)$.

10.7. $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} - y\mathbf{j}$,

L : отрезок MN ,

$M(-1, 0)$, $N(0, 1)$.

10.9. $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j}$,

$L: x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0)$,

$M(1, 0)$, $N(0, 3)$.

10.11. $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j}$,

10.2. $\mathbf{F} = (x^2 + 2y)\mathbf{i} + (y^2 + 2x)\mathbf{j}$,

L : отрезок MN ,

$M(-4, 0)$, $N(0, 2)$.

10.4. $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$,

$L: x^2 + y^2 = 4 \quad (y \geq 0)$,

$M(2, 0)$, $N(-2, 0)$.

10.6. $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j}$,

$L: y = x^2$,

$M(-1, 1)$, $N(1, 1)$.

10.8. $\mathbf{F} = (2xy - y)\mathbf{i} + (x^2 + x)\mathbf{j}$,

$L: x^2 + y^2 = 9 \quad (y \geq 0)$,

$M(3, 0)$, $N(-3, 0)$.

10.10. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$,

$L: x^2 + y^2 = 1 \quad (y \geq 0)$,

$M(1, 0)$, $N(-1, 0)$.

10.12. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$,

$$L: y = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2; \end{cases}$$

$$M(2, 0), N(0, 0).$$

$$10.13. F = xy\mathbf{i} + 2y\mathbf{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0),$$

$$M(1, 0), N(0, 1),$$

$$10.15. F = (x^2 + y^2)(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}),$$

$$L: x^2 + y^2 = R^2 \quad (y \geq 0),$$

$$M(R, 0), N(-R, 0).$$

$$10.16. F = (x + y\sqrt{x^2 + y^2})\mathbf{i} + (y - x\sqrt{x^2 + y^2})\mathbf{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 1 \quad (y \geq 0),$$

$$M(1, 0), N(-1, 0).$$

$$10.17. F = x^2y\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 4 \quad (x \geq 0, y \geq 0),$$

$$M(2, 0), N(0, 2).$$

$$10.18. F = (x + y\sqrt{x^2 + y^2})\mathbf{i} + (y - \sqrt{x^2 + y^2})\mathbf{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 16 \quad (x \geq 0, y \geq 0),$$

$$M(4, 0), N(0, 4).$$

$$10.19. F = y^2\mathbf{i} - x^2\mathbf{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 9 \quad (x \geq 0, y \geq 0),$$

$$M(3, 0), N(0, 3).$$

$$10.21. F = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j},$$

$$L: \text{отрезок } MN,$$

$$M(2, 0), N(0, 2).$$

$$10.23. F = (y^2 - y)\mathbf{i} + (2xy + x)\mathbf{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 9 \quad (y \geq 0),$$

$$M(3, 0), N(-3, 0).$$

$$10.25. F = (xy - y^2)\mathbf{i} + x\mathbf{j},$$

$$L: y = 2x^2,$$

$$M(0, 0), N(1, 2).$$

$$10.27. F = (xy - x)\mathbf{i} + \frac{x^2}{2}\mathbf{j},$$

$$L: y = 2\sqrt{x},$$

$$M(0, 0), N(1, 2).$$

$$10.29. F = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j},$$

$$L: y = x^3,$$

$$M(0, 0), N(2, 8).$$

$$10.31. F = (x - y)\mathbf{i} + \mathbf{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 4 \quad (y \geq 0),$$

$$M(2, 0), N(-2, 0).$$

$$L: x^2 + y^2 = 2 \quad (y \geq 0),$$

$$M(\sqrt{2}, 0), N(-\sqrt{2}, 0).$$

$$10.14. F = y\mathbf{i} - x\mathbf{j},$$

$$L: 2x^2 + y^2 = 1 \quad (y \geq 0),$$

$$M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), N\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

$$10.20. F = (x + y)^2\mathbf{i} - (x^2 + y^2)\mathbf{j},$$

$$L: \text{отрезок } MN,$$

$$M(1, 0), N(0, 1).$$

$$10.22. F = x^2\mathbf{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 9 \quad (x \geq 0, y \geq 0),$$

$$M(3, 0), N(0, 3).$$

$$10.24. F = xy\mathbf{i},$$

$$L: y = \sin x,$$

$$M(\pi, 0), N(0, 0).$$

$$10.26. F = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

$$L: \text{отрезок } MN,$$

$$M(1, 0), N(0, 3).$$

$$10.28. F = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

$$L: x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0),$$

$$M(1, 0), N(0, 3).$$

$$10.30. F = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j},$$

$$L: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (y \geq 0),$$

$$M(3, 0), N(-3, 0).$$

Задача 11. Найти циркуляцию векторного поля \mathbf{a} вдоль контура Γ (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t).

11.1. $\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, & y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, \\ z = \sin t. \end{cases}$$

11.3. $\mathbf{a} = (y-z)\mathbf{i} + (z-x)\mathbf{j} + (x-y)\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, & y = \sin t, \\ z = 2(1 - \cos t). \end{cases}$$

11.5. $\mathbf{a} = (y-z)\mathbf{i} + (z-x)\mathbf{j} + (x-y)\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = 4 \cos t, & y = 4 \sin t, \\ z = 1 - \cos t. \end{cases}$$

11.7. $\mathbf{a} = 2z\mathbf{i} - x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = 2 \cos t, & y = 2 \sin t, \\ z = 1. \end{cases}$$

11.9. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + y\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, & y = 2 \sin t, \\ z = 2 \cos t - 2 \sin t - 1. \end{cases}$$

11.11. $\mathbf{a} = -x^2y^3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, & y = \sqrt{2} \sin t, \\ z = 1. \end{cases}$$

11.13. $\mathbf{a} = z\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - x\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, & y = 2 \sin t, \\ z = \sqrt{2} \cos t. \end{cases}$$

11.15. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} - \frac{1}{3}z^2\mathbf{j} + y\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = (\cos t)/2, & y = (\sin t)/3, \\ z = \cos t - (\sin t)/3 - 1/4. \end{cases}$$

11.17. $\mathbf{a} = -z\mathbf{i} - x\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = 5 \cos t, & y = 5 \sin t, \\ z = 4. \end{cases}$$

11.19. $\mathbf{a} = (y-z)\mathbf{i} + (z-x)\mathbf{j} + (x-y)\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = 3 \cos t, & y = 3 \sin t, \\ z = 2(1 - \cos t). \end{cases}$$

11.21. $\mathbf{a} = xz\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, & y = \sin t, \\ z = \sin t. \end{cases}$$

11.23. $\mathbf{a} = 7z\mathbf{i} - x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$,

11.2. $\mathbf{a} = -x^2y^3\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \sqrt[3]{4} \cos t, & y = \sqrt[3]{4} \sin t, \\ z = 3. \end{cases}$$

11.4. $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, & y = (\sqrt{2} \sin t)/2, \\ z = (\sqrt{2} \cos t)/2. \end{cases}$$

11.6. $\mathbf{a} = 2y\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} + x\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = 2 \cos t, & y = 2 \sin t, \\ z = 2 - 2 \cos t - 2 \sin t. \end{cases}$$

11.8. $\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, & y = \sin t, \\ z = 3. \end{cases}$$

11.10. $\mathbf{a} = 3y\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} + x\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = 3 \cos t, & y = 3 \sin t, \\ z = 3 - 3 \cos t - 3 \sin t. \end{cases}$$

11.12. $\mathbf{a} = 6z\mathbf{i} - x\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = 3 \cos t, & y = 3 \sin t, \\ z = 3. \end{cases}$$

11.14. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 2z^2\mathbf{j} + y\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, & y = 3 \sin t, \\ z = 2 \cos t - 3 \sin t - 2. \end{cases}$$

11.16. $\mathbf{a} = 4y\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} + x\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = 4 \cos t, & y = 4 \sin t, \\ z = 4 - 4 \cos t - 4 \sin t. \end{cases}$$

11.18. $\mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = 2 \cos t, & y = 2 \sin t, \\ z = 0. \end{cases}$$

11.20. $\mathbf{a} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, & y = \sin t, \\ z = 4 - \cos t - \sin t. \end{cases}$$

11.22. $\mathbf{a} = -x^2y^3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + y\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, & y = \sin t, \\ z = 5. \end{cases}$$

11.24. $\mathbf{a} = xy\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x=6 \cos t, y=6 \sin t, \\ z=1/3. \end{cases}$$

$$11.25. \mathbf{a} = x\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x=2 \cos t, y=3 \sin t, \\ z=4 \cos t - 3 \sin t - 3. \end{cases}$$

$$11.26. \mathbf{a} = (y-z)\mathbf{i} + (z-x)\mathbf{j} + (x-y)\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x=2 \cos t, y=2 \sin t, \\ y=3(1-\cos t). \end{cases}$$

$$11.27. \mathbf{a} = -2z\mathbf{i} - x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x=(\cos t)/3, y=(\sin t)/3, \\ z=8. \end{cases}$$

$$11.28. \mathbf{a} = x\mathbf{i} - 3z^2\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x=\cos t, y=4 \sin t, \\ z=2 \cos t - 4 \sin t + 3. \end{cases}$$

$$11.29. \mathbf{a} = x\mathbf{i} - 2z^2\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x=3 \cos t, y=4 \sin t, \\ z=6 \cos t - 4 \sin t + 1. \end{cases}$$

$$11.31. \mathbf{a} = y\mathbf{i}/3 - 3x\mathbf{j} + x\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x=2 \cos t, y=2 \sin t, \\ z=1 - 2 \cos t - 2 \sin t. \end{cases}$$

$$\Gamma: \begin{cases} x=\cos t, y=\sin t, \\ z=\sin t. \end{cases}$$

$$11.30. \mathbf{a} = -x^2y^3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + x\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x=2 \cos t, y=2 \sin t, \\ z=4. \end{cases}$$

Задача 12. Найти модуль циркуляции векторного поля \mathbf{a} вдоль контура Γ .

$$12.1. \mathbf{a} = (x^2 - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$12.3. \mathbf{a} = yz\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 9 \quad (z > 0). \end{cases}$$

$$12.5. \mathbf{a} = (x-y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 5. \end{cases}$$

$$12.7. \mathbf{a} = yz\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 16 \quad (z > 0). \end{cases}$$

$$12.9. \mathbf{a} = y\mathbf{i} + (1-x)\mathbf{j} - z\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 1 \quad (z > 0). \end{cases}$$

$$12.11. \mathbf{a} = 4x\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - xy\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} z = 2(x^2 + y^2) + 1, \\ z = 7. \end{cases}$$

$$12.2. \mathbf{a} = xz\mathbf{i} - \mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} z = 5(x^2 + y^2) - 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

$$12.4. \mathbf{a} = x\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - xz\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

$$12.6. \mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} z = 3(x^2 + y^2) + 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

$$12.8. \mathbf{a} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

$$12.10. \mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

$$12.12. \mathbf{a} = 2y\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$12.13. \mathbf{a} = -3z\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 2y\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - 3y - 2z = 1. \end{cases}$$

$$12.15. \mathbf{a} = 2y\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2yz\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 2. \end{cases}$$

$$12.17. \mathbf{a} = xz\mathbf{i} - \mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$12.19. \mathbf{a} = 4x\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + x\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

$$12.21. \mathbf{a} = y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} z = x^2 + y^2 - 1, \\ z = 3. \end{cases}$$

$$12.23. \mathbf{a} = (2 - xy)\mathbf{i} - yz\mathbf{j} - xz\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

$$12.25. \mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0, \\ z = 2. \end{cases}$$

$$12.27. \mathbf{a} = y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} z = 4(x^2 + y^2) + 2, \\ z = 6. \end{cases}$$

$$12.29. \mathbf{a} = (x + y)\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 6\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 2. \end{cases}$$

$$12.31. \mathbf{a} = yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

$$12.14. \mathbf{a} = 2y\mathbf{i} + 5z\mathbf{j} + 3x\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 1, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

$$12.16. \mathbf{a} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - 4z^2 = 0, \\ z = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$12.18. \mathbf{a} = 2yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 9 (z > 0). \end{cases}$$

$$12.20. \mathbf{a} = -y\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$12.22. \mathbf{a} = 2yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 16 (z > 0). \end{cases}$$

$$12.24. \mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 1 (z > 0). \end{cases}$$

$$12.26. \mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + 2z\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ z = 4. \end{cases}$$

$$12.28. \mathbf{a} = 3z\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 2y\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ 2x - 3y - 2z = 1. \end{cases}$$

$$12.30. \mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 3. \end{cases}$$

IX. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Теоретические вопросы

1. Векторы. Линейные операции над векторами.
2. Скалярное произведение, его свойства. Длина вектора. Угол между двумя векторами.
3. Определители, их свойства.

4. Векторное произведение. Свойства. Геометрический смысл.
5. Смешанное произведение, его свойства. Геометрический смысл. Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов.
6. Плоскость. Уравнение плоскости.
7. Расстояние от точки до плоскости.
8. Уравнения прямой в пространстве. Нахождение точки пересечения прямой и плоскости.

Теоретические упражнения

1. Пусть векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны и $\vec{AB} = \alpha\vec{a}/2$, $\vec{BC} = 4(\beta\vec{a} - \vec{b})$, $\vec{CD} = -4\beta\vec{b}$, $\vec{DA} = \vec{a} + \alpha\vec{b}$. Найти α и β и доказать коллинеарность векторов \vec{BC} и \vec{DA} .
2. Разложить вектор $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по трем некопланарным векторам $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{p} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$.
3. Найти угол между единичными векторами \vec{e}_1 и \vec{e}_2 , если известно, что векторы $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ и $\vec{b} = 5\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ взаимно перпендикулярны.
4. Доказать компланарность векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , зная, что

$$[\vec{a}\vec{b}] + [\vec{b}\vec{c}] + [\vec{c}\vec{a}] = 0.$$

5. Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

6. Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через пересекающиеся прямые

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2},$$

можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Доказать, что уравнения прямой, проходящей через точку (x_1, y_1, z_1) параллельно плоскостям $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, можно записать в виде

$$\frac{x-x_1}{\begin{vmatrix} B_1C_1 \\ B_2C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_1}{\begin{vmatrix} A_1C_1 \\ A_2C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_1}{\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix}}.$$

8. Доказать, что необходимым и достаточным условием принадлежности двух прямых

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

одной плоскости является выполнение равенства

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Доказать, что расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и имеющей направляющий вектор S , определяется формулой $d = \frac{||[S, \vec{AB}]||}{|S|}$.

10. Даны две скрещивающиеся прямые, проходящие соответственно через точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Их направляющие векторы S_1 и S_2 известны. Доказать, что расстояние между ними определяется формулой $d = \frac{|S_1 S_2 AB|}{|[S_1 S_2]|}$.

Расчетные задания

Задача 1. Написать разложение вектора x по векторам p, q, r .

- 1.1. $x = \{-2, 4, 7\}$, $p = \{0, 1, 2\}$, $q = \{1, 0, 1\}$, $r = \{-1, 2, 4\}$.
- 1.2. $x = \{6, 12, -1\}$, $p = \{1, 3, 0\}$, $q = \{2, -1, 1\}$, $r = \{0, -1, 2\}$.
- 1.3. $x = \{1, -4, 4\}$, $p = \{2, 1, -1\}$, $q = \{0, 3, 2\}$, $r = \{1, -1, 1\}$.
- 1.4. $x = \{-9, 5, 5\}$, $p = \{4, 1, 1\}$, $q = \{2, 0, -3\}$, $r = \{-1, 2, 1\}$.
- 1.5. $x = \{-5, -5, 5\}$, $p = \{-2, 0, 1\}$, $q = \{1, 3, -1\}$, $r = \{0, 4, 1\}$.
- 1.6. $x = \{13, 2, 7\}$, $p = \{5, 1, 0\}$, $q = \{2, -1, 3\}$, $r = \{1, 0, -1\}$.
- 1.7. $x = \{-19, -1, 7\}$, $p = \{0, 1, 1\}$, $q = \{-2, 0, 1\}$, $r = \{3, 1, 0\}$.
- 1.8. $x = \{3, -3, 4\}$, $p = \{1, 0, 2\}$, $q = \{0, 1, 1\}$, $r = \{2, -1, 4\}$.
- 1.9. $x = \{3, 3, -1\}$, $p = \{3, 1, 0\}$, $q = \{-1, 2, 1\}$, $r = \{-1, 0, 2\}$.
- 1.10. $x = \{-1, 7, -4\}$, $p = \{-1, 2, 1\}$, $q = \{2, 0, 3\}$, $r = \{1, 1, -1\}$.
- 1.11. $x = \{6, 5, -14\}$, $p = \{1, 1, 4\}$, $q = \{0, -3, 2\}$, $r = \{2, 1, -1\}$.
- 1.12. $x = \{6, -1, 7\}$, $p = \{1, -2, 0\}$, $q = \{-1, 1, 3\}$, $r = \{1, 0, 4\}$.
- 1.13. $x = \{5, 15, 0\}$, $p = \{1, 0, 5\}$, $q = \{-1, 3, 2\}$, $r = \{0, -1, 1\}$.
- 1.14. $x = \{2, -1, 11\}$, $p = \{1, 1, 0\}$, $q = \{0, 1, -2\}$, $r = \{1, 0, 3\}$.
- 1.15. $x = \{11, 5, -3\}$, $p = \{1, 0, 2\}$, $q = \{-1, 0, 1\}$, $r = \{2, 5, -3\}$.
- 1.16. $x = \{8, 0, 5\}$, $p = \{2, 0, 1\}$, $q = \{1, 1, 0\}$, $r = \{4, 1, 2\}$.
- 1.17. $x = \{3, 1, 8\}$, $p = \{0, 1, 3\}$, $q = \{1, 2, -1\}$, $r = \{2, 0, -1\}$.
- 1.18. $x = \{8, 1, 12\}$, $p = \{1, 2, -1\}$, $q = \{3, 0, 2\}$, $r = \{-1, 1, 1\}$.
- 1.19. $x = \{-9, -8, -3\}$, $p = \{1, 4, 1\}$, $q = \{-3, 2, 0\}$, $r = \{1, -1, 2\}$.
- 1.20. $x = \{-5, 9, -13\}$, $p = \{0, 1, -2\}$, $q = \{3, -1, 1\}$, $r = \{4, 1, 0\}$.
- 1.21. $x = \{-15, 5, 6\}$, $p = \{0, 5, 1\}$, $q = \{3, 2, -1\}$, $r = \{-1, 1, 0\}$.
- 1.22. $x = \{8, 9, 4\}$, $p = \{1, 0, 1\}$, $q = \{0, -2, 1\}$, $r = \{1, 3, 0\}$.
- 1.23. $x = \{23, -14, -30\}$, $p = \{2, 1, 0\}$, $q = \{1, -1, 0\}$, $r = \{-3, 2, 5\}$.
- 1.24. $x = \{3, 1, 3\}$, $p = \{2, 1, 0\}$, $q = \{1, 0, 1\}$, $r = \{4, 2, 1\}$.

- 1.25. $x = \{-1, 7, 0\}$, $p = \{0, 3, 1\}$, $q = \{1, -1, 2\}$, $r = \{2, -1, 0\}$.
 1.26. $x = \{11, -1, 4\}$, $p = \{1, -1, 2\}$, $q = \{3, 2, 0\}$, $r = \{-1, 1, 1\}$.
 1.27. $x = \{-13, 2, 18\}$, $p = \{1, 1, 4\}$, $q = \{-3, 0, 2\}$, $r = \{1, 2, -1\}$.
 1.28. $x = \{0, -8, 9\}$, $p = \{0, -2, 1\}$, $q = \{3, 1, -1\}$, $r = \{4, 0, 1\}$.
 1.29. $x = \{8, -7, -13\}$, $p = \{0, 1, 5\}$, $q = \{3, -1, 2\}$, $r = \{-1, 0, 1\}$.
 1.30. $x = \{2, 7, 5\}$, $p = \{1, 0, 1\}$, $q = \{1, -2, 0\}$, $r = \{0, 3, 1\}$.
 1.31. $x = \{15, -20, -1\}$, $p = \{0, 2, 1\}$, $q = \{0, 1, -1\}$, $r = \{5, -3, 2\}$.

Задача 2. Коллинеарны ли векторы c_1 и c_2 , построенные по векторам a и b ?

- 2.1. $a = \{1, -2, 3\}$, $b = \{3, 0, -1\}$, $c_1 = 2a + 4b$, $c_2 = 3b - a$.
 2.2. $a = \{1, 0, 1\}$, $b = \{-2, 3, 5\}$, $c_1 = a + 2b$, $c_2 = 3a - b$.
 2.3. $a = \{-2, 4, 1\}$, $b = \{1, -2, 7\}$, $c_1 = 5a + 3b$, $c_2 = 2a - b$.
 2.4. $a = \{1, 2, -3\}$, $b = \{2, -1, -1\}$, $c_1 = 4a + 3b$, $c_2 = 8a - b$.
 2.5. $a = \{3, 5, 4\}$, $b = \{5, 9, 7\}$, $c_1 = -2a + b$, $c_2 = 3a - 2b$.
 2.6. $a = \{1, 4, -2\}$, $b = \{1, 1, -1\}$, $c_1 = a + b$, $c_2 = 4a + 2b$.
 2.7. $a = \{1, -2, 5\}$, $b = \{3, -1, 0\}$, $c_1 = 4a - 2b$, $c_2 = b - 2a$.
 2.8. $a = \{3, 4, -1\}$, $b = \{2, -1, 1\}$, $c_1 = 6a - 3b$, $c_2 = b - 2a$.
 2.9. $a = \{-2, -3, -2\}$, $b = \{1, 0, 5\}$, $c_1 = 3a + 9b$, $c_2 = -a - 3b$.
 2.10. $a = \{-1, 4, 2\}$, $b = \{3, -2, 6\}$, $c_1 = 2a - b$, $c_2 = 3b - 6a$.
 2.11. $a = \{5, 0, -1\}$, $b = \{7, 2, 3\}$, $c_1 = 2a - b$, $c_2 = 3b - 6a$.
 2.12. $a = \{0, 3, -2\}$, $b = \{1, -2, 1\}$, $c_1 = 5a - 2b$, $c_2 = 3a + 5b$.
 2.13. $a = \{-2, 7, -1\}$, $b = \{-3, 5, 2\}$, $c_1 = 2a + 3b$, $c_2 = 3a + 2b$.
 2.14. $a = \{3, 7, 0\}$, $b = \{1, -3, 4\}$, $c_1 = 4a - 2b$, $c_2 = b - 2a$.
 2.15. $a = \{-1, 2, -1\}$, $b = \{2, -7, 1\}$, $c_1 = 6a - 2b$, $c_2 = b - 3a$.
 2.16. $a = \{7, 9, -2\}$, $b = \{5, 4, 3\}$, $c_1 = 4a - b$, $c_2 = 4b - a$.
 2.17. $a = \{5, 0, -2\}$, $b = \{6, 4, 3\}$, $c_1 = 5a - 3b$, $c_2 = 6b - 10a$.
 2.18. $a = \{8, 3, -1\}$, $b = \{4, 1, 3\}$, $c_1 = 2a - b$, $c_2 = 2b - 4a$.
 2.19. $a = \{3, -1, 6\}$, $b = \{5, 7, 10\}$, $c_1 = 4a - 2b$, $c_2 = b - 2a$.
 2.20. $a = \{1, -2, 4\}$, $b = \{7, 3, 5\}$, $c_1 = 6a - 3b$, $c_2 = b - 2a$.
 2.21. $a = \{3, 7, 0\}$, $b = \{4, 6, -1\}$, $c_1 = 3a + 2b$, $c_2 = 5a - 7b$.
 2.22. $a = \{2, -1, 4\}$, $b = \{3, -7, -6\}$, $c_1 = 2a - 3b$, $c_2 = 3a - 2b$.
 2.23. $a = \{5, -1, -2\}$, $b = \{6, 0, 7\}$, $c_1 = 3a - 2b$, $c_2 = 4b - 6a$.
 2.24. $a = \{-9, 5, 3\}$, $b = \{7, 1, -2\}$, $c_1 = 2a - b$, $c_2 = 3a + 5b$.
 2.25. $a = \{4, 2, 9\}$, $b = \{0, -1, 3\}$, $c_1 = 4b - 3a$, $c_2 = 4a - 3b$.
 2.26. $a = \{2, -1, 6\}$, $b = \{-1, 3, 8\}$, $c_1 = 5a - 2b$, $c_2 = 2a - 5b$.
 2.27. $a = \{5, 0, 8\}$, $b = \{-3, 1, 7\}$, $c_1 = 3a - 4b$, $c_2 = 12b - 9a$.
 2.28. $a = \{-1, 3, 4\}$, $b = \{2, -1, 0\}$, $c_1 = 6a - 2b$, $c_2 = b - 3a$.
 2.29. $a = \{4, 2, -7\}$, $b = \{5, 0, -3\}$, $c_1 = a - 3b$, $c_2 = 6b - 2a$.
 2.30. $a = \{2, 0, -5\}$, $b = \{1, -3, 4\}$, $c_1 = 2a - 5b$, $c_2 = 5a - 2b$.
 2.31. $a = \{-1, 2, 8\}$, $b = \{3, 7, -1\}$, $c_1 = 4a - 3b$, $c_2 = 9b - 12a$.

Задача 3. Найти косинус угла между векторами \vec{AB} и \vec{AC}

- 3.1. $A(1, -2, 3)$, $B(0, -1, 2)$, $C(3, -4, 5)$.
 3.2. $A(0, -3, 6)$, $B(-12, -3, -3)$, $C(-9, -3, -6)$.
 3.3. $A(3, 3, -1)$, $B(5, 5, -2)$, $C(4, 1, 1)$.
 3.4. $A(-1, 2, -3)$, $B(3, 4, -6)$, $C(1, 1, -1)$.

- 3.5. $A(-4, -2, 0)$, $B(-1, -2, 4)$, $C(3, -2, 1)$.
 3.6. $A(5, 3, -1)$, $B(5, 2, 0)$, $C(6, 4, -1)$.
 3.7. $A(-3, -7, -5)$, $B(0, -1, -2)$, $C(2, 3, 0)$.
 3.8. $A(2, -4, 6)$, $B(0, -2, 4)$, $C(6, -8, 10)$.
 3.9. $A(0, 1, -2)$, $B(3, 1, 2)$, $C(4, 1, 1)$.
 3.10. $A(3, 3, -1)$, $B(1, 5, -2)$, $C(4, 1, 1)$.
 3.11. $A(2, 1, -1)$, $B(6, -1, -4)$, $C(4, 2, 1)$.
 3.12. $A(-1, -2, 1)$, $B(-4, -2, 5)$, $C(-8, -2, 2)$.
 3.13. $A(6, 2, -3)$, $B(6, 3, -2)$, $C(7, 3, -3)$.
 3.14. $A(0, 0, 4)$, $B(-3, -6, 1)$, $C(-5, -10, -1)$.
 3.15. $A(2, -8, -1)$, $B(4, -6, 0)$, $C(-2, -5, -1)$.
 3.16. $A(3, -6, 9)$, $B(0, -3, 6)$, $C(9, -12, 15)$.
 3.17. $A(0, 2, -4)$, $B(8, 2, 2)$, $C(6, 2, 4)$.
 3.18. $A(3, 3, -1)$, $B(5, 1, -2)$, $C(4, 1, 1)$.
 3.19. $A(-4, 3, 0)$, $B(0, 1, 3)$, $C(-2, 4, -2)$.
 3.20. $A(1, -1, 0)$, $B(-2, -1, 4)$, $C(8, -1, -1)$.
 3.21. $A(7, 0, 2)$, $B(7, 1, 3)$, $C(8, -1, 2)$.
 3.22. $A(2, 3, 2)$, $B(-1, -3, -1)$, $C(-3, -7, -3)$.
 3.23. $A(2, 2, 7)$, $B(0, 0, 6)$, $C(-2, 5, 7)$.
 3.24. $A(-1, 2, -3)$, $B(0, 1, -2)$, $C(-3, 4, -5)$.
 3.25. $A(0, 3, -6)$, $B(9, 3, 6)$, $C(12, 3, 3)$.
 3.26. $A(3, 3, -1)$, $B(5, 1, -2)$, $C(4, 1, -3)$.
 3.27. $A(-2, 1, 1)$, $B(2, 3, -2)$, $C(0, 0, 3)$.
 3.28. $A(1, 4, -1)$, $B(-2, 4, -5)$, $C(8, 4, 0)$.
 3.29. $A(0, 1, 0)$, $B(0, 2, 1)$, $C(1, 2, 0)$.
 3.30. $A(-4, 0, 4)$, $B(-1, 6, 7)$, $C(1, 10, 9)$.
 3.31. $A(-2, 4, -6)$, $B(0, 2, -4)$, $C(-6, 8, -10)$.

Задача 4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} .

- 4.1. $\mathbf{a} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{p} - \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 1$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \pi/6$.
 4.2. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 4$, $|\mathbf{q}| = 1$, $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \pi/4$.
 4.3. $\mathbf{a} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 1/5$, $|\mathbf{q}| = 1$, $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \pi/2$.
 4.4. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 5\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 4$, $|\mathbf{q}| = 1/2$, $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 5\pi/6$.
 4.5. $\mathbf{a} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{p} + \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 2$, $|\mathbf{q}| = 3$, $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 3\pi/4$.
 4.6. $\mathbf{a} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 2$, $|\mathbf{q}| = 3$, $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \pi/3$.
 4.7. $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 3$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \pi/2$.
 4.8. $\mathbf{a} = 4\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 7$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \pi/4$.
 4.9. $\mathbf{a} = \mathbf{p} - 4\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{p} + \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 1$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \pi/6$.
 4.10. $\mathbf{a} = \mathbf{p} + 4\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{p} - \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 7$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \pi/3$.
 4.11. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + 2\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 10$, $|\mathbf{q}| = 1$, $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \pi/2$.

- 4.12. $a=4p-q$, $b=p+2q$; $|p|=5$, $|q|=4$, $(pq)^\wedge = \pi/4$.
- 4.13. $a=2p+3q$, $b=p-2q$; $|p|=6$, $|q|=7$, $(pq)^\wedge = \pi/3$.
- 4.14. $a=3p-q$, $b=p+2q$; $|p|=3$, $|q|=4$, $(pq)^\wedge = \pi/3$.
- 4.15. $a=2p+3q$, $b=p-2q$; $|p|=2$, $|q|=3$, $(pq)^\wedge = \pi/4$.
- 4.16. $a=2p-3q$, $b=3p+q$; $|p|=4$, $|q|=1$, $(pq)^\wedge = \pi/6$.
- 4.17. $a=5p+q$, $b=p-3q$; $|p|=1$, $|q|=2$, $(pq)^\wedge = \pi/3$.
- 4.18. $a=7p-2q$, $b=p+3q$; $|p|=1/2$, $|q|=2$, $(pq)^\wedge = \pi/2$.
- 4.19. $a=6p-q$, $b=p+q$; $|p|=3$, $|q|=4$, $(pq)^\wedge = \pi/4$.
- 4.20. $a=10p+q$, $b=3p-2q$; $|p|=4$, $|q|=1$, $(pq)^\wedge = \pi/6$.
- 4.21. $a=6p-q$, $b=p+2q$; $|p|=8$, $|q|=1/2$, $(pq)^\wedge = \pi/3$.
- 4.22. $a=3p+4q$, $b=q-p$; $|p|=2,5$, $|q|=2$, $(pq)^\wedge = \pi/2$.
- 4.23. $a=7p+q$, $b=p-3q$; $|p|=3$, $|q|=1$, $(pq)^\wedge = 3\pi/4$.
- 4.24. $a=p+3q$, $b=3p-q$; $|p|=3$, $|q|=5$, $(pq)^\wedge = 2\pi/3$.
- 4.25. $a=3p+q$, $b=p-3q$; $|p|=7$, $|q|=2$, $(pq)^\wedge = \pi/4$.
- 4.26. $a=5p-q$, $b=p+q$; $|p|=5$, $|q|=3$, $(pq)^\wedge = 5\pi/6$.
- 4.27. $a=3p-4q$, $b=p+3q$; $|p|=2$, $|q|=3$, $(pq)^\wedge = \pi/4$.
- 4.28. $a=6p-q$, $b=5q+p$; $|p|=1/2$, $|q|=4$, $(pq)^\wedge = 5\pi/6$.
- 4.29. $a=2p+3q$, $b=p-2q$; $|p|=2$, $|q|=1$, $(pq)^\wedge = \pi/3$.
- 4.30. $a=2p-3q$, $b=5p+q$; $|p|=2$, $|q|=3$, $(pq)^\wedge = \pi/2$.
- 4.31. $a=3p+2q$, $b=2p-q$; $|p|=4$, $|q|=3$, $(pq)^\wedge = 3\pi/4$.

Задача 5. Компланарны ли векторы a , b и c ?

- 5.1. $a=\{2, 3, 1\}$, $b=\{-1, 0, -1\}$, $c=\{2, 2, 2\}$.
- 5.2. $a=\{3, 2, 1\}$, $b=\{2, 3, 4\}$, $c=\{3, 1, -1\}$.
- 5.3. $a=\{1, 5, 2\}$, $b=\{-1, 1, -1\}$, $c=\{1, 1, 1\}$.
- 5.4. $a=\{1, -1, -3\}$, $b=\{3, 2, 1\}$, $c=\{2, 3, 4\}$.
- 5.5. $a=\{3, 3, 1\}$, $b=\{1, -2, 1\}$, $c=\{1, 1, 1\}$.
- 5.6. $a=\{3, 1, -1\}$, $b=\{-2, -1, 0\}$, $c=\{5, 2, -1\}$.
- 5.7. $a=\{4, 3, 1\}$, $b=\{1, -2, 1\}$, $c=\{2, 2, 2\}$.
- 5.8. $a=\{4, 3, 1\}$, $b=\{6, 7, 4\}$, $c=\{2, 0, -1\}$.
- 5.9. $a=\{3, 2, 1\}$, $b=\{1, -3, -7\}$, $c=\{1, 2, 3\}$.
- 5.10. $a=\{3, 7, 2\}$, $b=\{-2, 0, -1\}$, $c=\{2, 2, 1\}$.
- 5.11. $a=\{1, -2, 6\}$, $b=\{1, 0, 1\}$, $c=\{2, -6, 17\}$.
- 5.12. $a=\{6, 3, 4\}$, $b=\{-1, -2, -1\}$, $c=\{2, 1, 2\}$.
- 5.13. $a=\{7, 3, 4\}$, $b=\{-1, -2, -1\}$, $c=\{4, 2, 4\}$.
- 5.14. $a=\{2, 3, 2\}$, $b=\{4, 7, 5\}$, $c=\{2, 0, -1\}$.

- 5.15. $a = \{5, 3, 4\}$, $b = \{-1, 0, -1\}$, $c = \{4, 2, 4\}$.
 5.16. $a = \{3, 10, 5\}$, $b = \{-2, -2, -3\}$, $c = \{2, 4, 3\}$.
 5.17. $a = \{-2, -4, -3\}$, $b = \{4, 3, 1\}$, $c = \{6, 7, 4\}$.
 5.18. $a = \{3, 1, -1\}$, $b = \{1, 0, -1\}$, $c = \{8, 3, -2\}$.
 5.19. $a = \{4, 2, 2\}$, $b = \{-3, -3, -3\}$, $c = \{2, 1, 2\}$.
 5.20. $a = \{4, 1, 2\}$, $b = \{9, 2, 5\}$, $c = \{1, 1, -1\}$.
 5.21. $a = \{5, 3, 4\}$, $b = \{4, 3, 3\}$, $c = \{9, 5, 8\}$.
 5.22. $a = \{3, 4, 2\}$, $b = \{1, 1, 0\}$, $c = \{8, 11, 6\}$.
 5.23. $a = \{4, -1, -6\}$, $b = \{1, -3, -7\}$, $c = \{2, -1, -4\}$.
 5.24. $a = \{3, 1, 0\}$, $b = \{-5, -4, -5\}$, $c = \{4, 2, 4\}$.
 5.25. $a = \{3, 0, 3\}$, $b = \{8, 1, 6\}$, $c = \{1, 1, -1\}$.
 5.26. $a = \{1, -1, 4\}$, $b = \{1, 0, 3\}$, $c = \{1, -3, 8\}$.
 5.27. $a = \{6, 3, 4\}$, $b = \{-1, -2, -1\}$, $c = \{2, 1, 2\}$.
 5.28. $a = \{4, 1, 1\}$, $b = \{-9, -4, -9\}$, $c = \{6, 2, 6\}$.
 5.29. $a = \{-3, 3, 3\}$, $b = \{-4, 7, 6\}$, $c = \{3, 0, -1\}$.
 5.30. $a = \{-7, 10, -5\}$, $b = \{0, -2, -1\}$, $c = \{-2, 4, -1\}$.
 5.31. $a = \{7, 4, 6\}$, $b = \{2, 1, 1\}$, $c = \{19, 11, 17\}$.

Задача 6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

- 6.1. $A_1(1, 3, 6)$, $A_2(2, 2, 1)$, $A_3(-1, 0, 1)$, $A_4(-4, 6, -3)$.
 6.2. $A_1(-4, 2, 6)$, $A_2(2, -3, 0)$, $A_3(-10, 5, 8)$, $A_4(-5, 2, -4)$.
 6.3. $A_1(7, 2, 4)$, $A_2(7, -1, -2)$, $A_3(3, 3, 1)$, $A_4(-4, 2, 1)$.
 6.4. $A_1(2, 1, 4)$, $A_2(-1, 5, -2)$, $A_3(-7, -3, 2)$, $A_4(-6, -3, 6)$.
 6.5. $A_1(-1, -5, 2)$, $A_2(-6, 0, -3)$, $A_3(3, 6, -3)$, $A_4(-10, 6, 7)$.
 6.6. $A_1(0, -1, -1)$, $A_2(-2, 3, 5)$, $A_3(1, -5, -9)$, $A_4(-1, -6, 3)$.
 6.7. $A_1(5, 2, 0)$, $A_2(2, 5, 0)$, $A_3(1, 2, 4)$, $A_4(-1, 1, 1)$.
 6.8. $A_1(2, -1, -2)$, $A_2(1, 2, 1)$, $A_3(5, 0, -6)$, $A_4(-10, 9, -7)$.
 6.9. $A_1(-2, 0, -4)$, $A_2(-1, 7, 1)$, $A_3(4, -8, -4)$, $A_4(1, -4, 6)$.
 6.10. $A_1(14, 4, 5)$, $A_2(-5, -3, 2)$, $A_3(-2, -6, -3)$, $A_4(-2, 2, -1)$.
 6.11. $A_1(1, 2, 0)$, $A_2(3, 0, -3)$, $A_3(5, 2, 6)$, $A_4(8, 4, -9)$.
 6.12. $A_1(2, -1, 2)$, $A_2(1, 2, -1)$, $A_3(3, 2, 1)$, $A_4(-4, 2, 5)$.
 6.13. $A_1(1, 1, 2)$, $A_2(-1, 1, 3)$, $A_3(2, -2, 4)$, $A_4(-1, 0, -2)$.
 6.14. $A_1(2, 3, 1)$, $A_2(4, 1, -2)$, $A_3(6, 3, 7)$, $A_4(7, 5, -3)$.
 6.15. $A_1(1, 1, -1)$, $A_2(2, 3, 1)$, $A_3(3, 2, 1)$, $A_4(5, 9, -8)$.
 6.16. $A_1(1, 5, -7)$, $A_2(-3, 6, 3)$, $A_3(-2, 7, 3)$, $A_4(-4, 8, -12)$.
 6.17. $A_1(-3, 4, -7)$, $A_2(1, 5, -4)$, $A_3(-5, -2, 0)$, $A_4(2, 5, 4)$.
 6.18. $A_1(-1, 2, -3)$, $A_2(4, -1, 0)$, $A_3(2, 1, -2)$, $A_4(3, 4, 5)$.
 6.19. $A_1(4, -1, 3)$, $A_2(-2, 1, 0)$, $A_3(0, -5, 1)$, $A_4(3, 2, -6)$.
 6.20. $A_1(1, -1, 1)$, $A_2(-2, 0, 3)$, $A_3(2, 1, -1)$, $A_4(2, -2, -4)$.
 6.21. $A_1(1, 2, 0)$, $A_2(1, -1, 2)$, $A_3(0, 1, -1)$, $A_4(-3, 0, 1)$.
 6.22. $A_1(1, 0, 2)$, $A_2(1, 2, -1)$, $A_3(2, -2, 1)$, $A_4(2, 1, 0)$.
 6.23. $A_1(1, 2, -3)$, $A_2(1, 0, 1)$, $A_3(-2, -1, 6)$, $A_4(0, -5, -4)$.
 6.24. $A_1(3, 10, -1)$, $A_2(-2, 3, -5)$, $A_3(-6, 0, -3)$, $A_4(1, -1, 2)$.
 6.25. $A_1(-1, 2, 4)$, $A_2(-1, -2, -4)$, $A_3(3, 0, -1)$, $A_4(7, -3, 1)$.
 6.26. $A_1(0, -3, 1)$, $A_2(-4, 1, 2)$, $A_3(2, -1, 5)$, $A_4(3, 1, -4)$.

- 6.27. $A_1(1, 3, 0), A_2(4, -1, 2), A_3(3, 0, 1), A_4(-4, 3, 5)$.
 6.28. $A_1(-2, -1, -1), A_2(0, 3, 2), A_3(3, 1, -4), A_4(-4, 7, 3)$.
 6.29. $A_1(-3, -5, 6), A_2(2, 1, -4), A_3(0, -3, -1), A_4(-5, 2, -8)$.
 6.30. $A_1(2, -4, -3), A_2(5, -6, 0), A_3(-1, 3, -3), A_4(-10, -8, 7)$.
 6.31. $A_1(1, -1, 2), A_2(2, 1, 2), A_3(1, 1, 4), A_4(6, -3, 8)$.

Задача 7. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3 .

- 7.1. $M_1(-3, 4, -7), M_2(1, 5, -4), M_3(-5, -2, 0), M_0(-12, 7, -1)$.
 7.2. $M_1(-1, 2, -3), M_2(4, -1, 0), M_3(2, 1, -2), M_0(1, -6, -5)$.
 7.3. $M_1(-3, -1, 1), M_2(-9, 1, -2), M_3(3, -5, 4), M_0(-7, 0, -1)$.
 7.4. $M_1(1, -1, 1), M_2(-2, 0, 3), M_3(2, 1, -1), M_0(-2, 4, 2)$.
 7.5. $M_1(1, 2, 0), M_2(1, -1, 2), M_3(0, 1, -1), M_0(2, -1, 4)$.
 7.6. $M_1(1, 0, 2), M_2(1, 2, -1), M_3(2, -2, 1), M_0(-5, -9, 1)$.
 7.7. $M_1(1, 2, -3), M_2(1, 0, 1), M_3(-2, -1, 6), M_0(3, -2, -9)$.
 7.8. $M_1(3, 10, -1), M_2(-2, 3, -5), M_3(-6, 0, -3), M_0(-6, 7, -10)$.
 7.9. $M_1(-1, 2, 4), M_2(-1, -2, -4), M_3(3, 0, -1), M_0(-2, 3, 5)$.
 7.10. $M_1(0, -3, 1), M_2(-4, 1, 2), M_3(2, -1, 5), M_0(-3, 4, -5)$.
 7.11. $M_1(1, 3, 0), M_2(4, -1, 2), M_3(3, 0, 1), M_0(4, 3, 0)$.
 7.12. $M_1(-2, -1, -1), M_2(0, 3, 2), M_3(3, 1, -4), M_0(-21, 20, -16)$.
 7.13. $M_1(-3, -5, 6), M_2(2, 1, -4), M_3(0, -3, -1), M_0(3, 6, 68)$.
 7.14. $M_1(2, -4, -3), M_2(5, -6, 0), M_3(-1, 3, -3), M_0(2, -10, 8)$.
 7.15. $M_1(1, -1, 2), M_2(2, 1, 2), M_3(1, 1, 4), M_0(-3, 2, 7)$.
 7.16. $M_1(1, 3, 6), M_2(2, 2, 1), M_3(-1, 0, 1), M_0(5, -4, 5)$.
 7.17. $M_1(-4, 2, 6), M_2(2, -3, 0), M_3(-10, 5, 8), M_0(-12, 1, 8)$.
 7.18. $M_1(7, 2, 4), M_2(7, -1, -2), M_3(-5, -2, -1), M_0(10, 1, 8)$.
 7.19. $M_1(2, 1, 4), M_2(3, 5, -2), M_3(-7, -3, 2), M_0(-3, 1, 8)$.
 7.20. $M_1(-1, -5, 2), M_2(-6, 0, -3), M_3(3, 6, -3), M_0(10, -8, -7)$.
 7.21. $M_1(0, -1, -1), M_2(-2, 3, 5), M_3(1, -5, -9), M_0(-4, -13, 6)$.
 7.22. $M_1(5, 2, 0), M_2(2, 5, 0), M_3(1, 2, 4), M_0(-3, -6, -8)$.
 7.23. $M_1(2, -1, -2), M_2(1, 2, 1), M_3(5, 0, -6), M_0(14, -3, 7)$.
 7.24. $M_1(-2, 0, -4), M_2(-1, 7, 1), M_3(4, -8, -4), M_0(-6, 5, 5)$.
 7.25. $M_1(14, 4, 5), M_2(-5, -3, 2), M_3(-2, -6, -3), M_0(-1, -8, 7)$.
 7.26. $M_1(1, 2, 0), M_2(3, 0, -3), M_3(5, 2, 6), M_0(-13, -8, 16)$.
 7.27. $M_1(2, -1, 2), M_2(1, 2, -1), M_3(3, 2, 1), M_0(-5, 3, 7)$.
 7.28. $M_1(1, 1, 2), M_2(-1, 1, 3), M_3(2, -2, 4), M_0(2, 3, 8)$.
 7.29. $M_1(2, 3, 1), M_2(4, 1, -2), M_3(6, 3, 7), M_0(-5, -4, 8)$.
 7.30. $M_1(1, 1, -1), M_2(2, 3, 1), M_3(3, 2, 1), M_0(-3, -7, 6)$.
 7.31. $M_1(1, 5, -7), M_2(-3, 6, 3), M_3(-2, 7, 3), M_0(1, -1, 2)$.

Задача 8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} .

- 8.1. $A(1, 0, -2), B(2, -1, 3), C(0, -3, 2)$.
 8.2. $A(-1, 3, 4), B(-1, 5, 0), C(2, 6, 1)$.
 8.3. $A(4, -2, 0), B(1, -1, -5), C(-2, 1, -3)$.
 8.4. $A(-8, 0, 7), B(-3, 2, 4), C(-1, 4, 5)$.
 8.5. $A(7, -5, 1), B(5, -1, -3), C(3, 0, -4)$.

- 8.6. $A(-3, 5, -2)$, $B(-4, 0, 3)$, $C(-3, 2, 5)$.
 8.7. $A(1, -1, 8)$, $B(-4, -3, 10)$, $C(-1, -1, 7)$.
 8.8. $A(-2, 0, -5)$, $B(2, 7, -3)$, $C(1, 10, -1)$.
 8.9. $A(1, 9, -4)$, $B(5, 7, 1)$, $C(3, 5, 0)$.
 8.10. $A(-7, 0, 3)$, $B(1, -5, -4)$, $C(2, -3, 0)$.
 8.11. $A(0, -3, 5)$, $B(-7, 2, 6)$, $C(-3, 2, 4)$.
 8.12. $A(5, -1, 2)$, $B(2, -4, 3)$, $C(4, -1, 3)$.
 8.13. $A(-3, 7, 2)$, $B(3, 5, 1)$, $C(4, 5, 3)$.
 8.14. $A(0, -2, 8)$, $B(4, 3, 2)$, $C(1, 4, 3)$.
 8.15. $A(1, -1, 5)$, $B(0, 7, 8)$, $C(-1, 3, 8)$.
 8.16. $A(-10, 0, 9)$, $B(12, 4, 11)$, $C(8, 5, 15)$.
 8.17. $A(3, -3, -6)$, $B(1, 9, -5)$, $C(6, 6, -4)$.
 8.18. $A(2, 1, 7)$, $B(9, 0, 2)$, $C(9, 2, 3)$.
 8.19. $A(-7, 1, -4)$, $B(8, 11, -3)$, $C(9, 9, -1)$.
 8.20. $A(1, 0, -6)$, $B(-7, 2, 1)$, $C(-9, 6, 1)$.
 8.21. $A(-3, 1, 0)$, $B(6, 3, 3)$, $C(9, 4, -2)$.
 8.22. $A(-4, -2, 5)$, $B(3, -3, -7)$, $C(9, 3, -7)$.
 8.23. $A(0, -8, 10)$, $B(-5, 5, 7)$, $C(-8, 0, 4)$.
 8.24. $A(1, -5, -2)$, $B(6, -2, 1)$, $C(2, -2, -2)$.
 8.25. $A(0, 7, -9)$, $B(-1, 8, -11)$, $C(-4, 3, -12)$.
 8.26. $A(-3, -1, 7)$, $B(0, 2, -6)$, $C(2, 3, -5)$.
 8.27. $A(5, 3, -1)$, $B(0, 0, -3)$, $C(5, -1, 0)$.
 8.28. $A(-1, 2, -2)$, $B(13, 14, 1)$, $C(14, 15, 2)$.
 8.29. $A(7, -5, 0)$, $B(8, 3, -1)$, $C(8, 5, 1)$.
 8.30. $A(-3, 6, 4)$, $B(8, -3, 5)$, $C(0, -3, 7)$.
 8.31. $A(2, 5, -3)$, $B(7, 8, -1)$, $C(9, 7, 4)$.

Задача 9. Найти угол между плоскостями.

- 9.1. $x-3y+5=0$, $2x-y+5z-16=0$. 9.2. $x-3y+z-1=0$, $x+z-1=0$.
 9.3. $4x-5y+3z-1=0$, $x-4y-z+9=0$.
 9.4. $3x-y+2z+15=0$, $5x+9y-3z-1=0$.
 9.5. $6x+2y-4z+17=0$, $9x+3y-6z-4=0$.
 9.6. $x-y\sqrt{2}+z-1=0$, $x+y\sqrt{2}-z+3=0$.
 9.7. $3y-z=0$, $2y+z=0$.
 9.8. $6x+3y-2z=0$, $x+2y+6z-12=0$.
 9.9. $x+2y+2z-3=0$, $16x+12y-15z-1=0$.
 9.10. $2x-y+5z+16=0$, $x+2y+3z+8=0$.
 9.11. $2x+2y+z-1=0$, $x+z-1=0$.
 9.12. $3x+y+z-4=0$, $y+z+5=0$.
 9.13. $3x-2y-2z-16=0$, $x+y-3z-7=0$.
 9.14. $2x+2y+z+9=0$, $x-y+3z-1=0$.
 9.15. $x+2y+2z-3=0$, $2x-y+2z+5=0$.
 9.16. $3x+2y-3z-1=0$, $x+y+z-7=0$.
 9.17. $x-3y-2z-8=0$, $x+y-z+3=0$.
 9.18. $3x-2y+3z+23=0$, $y+z+5=0$.
 9.19. $x+y+3z-7=0$, $y+z-1=0$.

- 9.20. $x-2y+2z+17=0$, $x-2y-1=0$.
 9.21. $x+2y-1=0$, $x+y+6=0$.
 9.22. $2x-z+5=0$, $2x+3y-7=0$.
 9.23. $5x+3y+z-18=0$, $2y+z-9=0$.
 9.24. $4x+3z-2=0$, $x+2y+2z+5=0$.
 9.25. $x+4y-z+1=0$, $2x+y+4z-3=0$.
 9.26. $2y+z-9=0$, $x-y+2z-1=0$.
 9.27. $2x-6y+14z-1=0$, $5x-15y+35z-3=0$.
 9.28. $x-y+7z-1=0$, $2x-2y-5=0$.
 9.29. $3x-y-5=0$, $2x+y-3=0$.
 9.30. $x+y+z\sqrt{2}-3=0$, $x-y+z\sqrt{2}-1=0$.
 9.31. $x+2y-2z-7=0$, $x+y-3z=0$.

Задача 10. Найти координаты точки A , равноудаленной от точек B и C .

- | | |
|---|-------------------|
| 10.1. $A(0, 0, z)$, $B(5, 1, 0)$, | $C(0, 2, 3)$. |
| 10.2. $A(0, 0, z)$, $B(3, 3, 1)$, | $C(4, 1, 2)$. |
| 10.3. $A(0, 0, z)$, $B(3, 1, 3)$, | $C(1, 4, 2)$. |
| 10.4. $A(0, 0, z)$, $B(-1, -1, -6)$, | $C(2, 3, 5)$. |
| 10.5. $A(0, 0, z)$, $B(-13, 4, 6)$, | $C(10, -9, 5)$. |
| 10.6. $A(0, 0, z)$, $B(-5, -5, 6)$, | $C(-7, 6, 2)$. |
| 10.7. $A(0, 0, z)$, $B(-18, 1, 0)$, | $C(15, -10, 2)$. |
| 10.8. $A(0, 0, z)$, $B(10, 0, -2)$, | $C(9, -2, 1)$. |
| 10.9. $A(0, 0, z)$, $B(-6, 7, 5)$, | $C(8, -4, 3)$. |
| 10.10. $A(0, 0, z)$, $B(6, -7, 1)$, | $C(-1, 2, 5)$. |
| 10.11. $A(0, 0, z)$, $B(7, 0, -15)$, | $C(2, 10, -12)$. |
| 10.12. $A(0, y, 0)$, $B(3, 0, 3)$, | $C(0, 2, 4)$. |
| 10.13. $A(0, y, 0)$, $B(1, 6, 4)$, | $C(5, 7, 1)$. |
| 10.14. $A(0, y, 0)$, $B(-2, 8, 10)$, | $C(6, 11, -2)$. |
| 10.15. $A(0, y, 0)$, $B(-2, -4, 6)$, | $C(7, 2, 5)$. |
| 10.16. $A(0, y, 0)$, $B(2, 2, 4)$, | $C(0, 4, 2)$. |
| 10.17. $A(0, y, 0)$, $B(0, -4, 1)$, | $C(1, -3, 5)$. |
| 10.18. $A(0, y, 0)$, $B(0, 5, -9)$, | $C(-1, 0, 5)$. |
| 10.19. $A(0, y, 0)$, $B(-2, 4, -6)$, | $C(8, 5, 1)$. |
| 10.20. $A(0, y, 0)$, $B(7, 3, -4)$, | $C(1, 5, 7)$. |
| 10.21. $A(0, y, 0)$, $B(0, -2, 4)$, | $C(-4, 0, 4)$. |
| 10.22. $A(x, 0, 0)$, $B(0, 1, 3)$, | $C(2, 0, 4)$. |
| 10.23. $A(x, 0, 0)$, $B(4, 0, 5)$, | $C(5, 4, 2)$. |
| 10.24. $A(x, 0, 0)$, $B(8, 1, -7)$, | $C(10, -2, 1)$. |
| 10.25. $A(x, 0, 0)$, $B(3, 5, 6)$, | $C(1, 2, 3)$. |
| 10.26. $A(x, 0, 0)$, $B(4, 5, -2)$, | $C(2, 3, 4)$. |
| 10.27. $A(x, 0, 0)$, $B(-2, 0, 6)$, | $C(0, -2, -4)$. |
| 10.28. $A(x, 0, 0)$, $B(1, 5, 9)$, | $C(3, 7, 11)$. |
| 10.29. $A(x, 0, 0)$, $B(4, 6, 8)$, | $C(2, 4, 6)$. |
| 10.30. $A(x, 0, 0)$, $B(1, 2, 3)$, | $C(2, 6, 10)$. |
| 10.31. $A(x, 0, 0)$, $B(-2, -4, -6)$, | $C(-1, -2, -3)$. |

Задача 11. Пусть k — коэффициент гомотетии с центром в начале координат. Верно ли, что точка A принадлежит образу плоскости α ?

- | | |
|---------------------------|---|
| 11.1. $A(1, 2, -1)$, | $\alpha: 2x + 3y + z - 1 = 0, k = 2.$ |
| 11.2. $A(2, 1, 2)$, | $\alpha: x - 2y + z + 1 = 0, k = -2.$ |
| 11.3. $A(-1, 1, 1)$, | $\alpha: 3x - y + 2z + 4 = 0, k = 1/2.$ |
| 11.4. $A(-2, 4, 1)$, | $\alpha: 3x + y + 2z + 2 = 0, k = 3.$ |
| 11.5. $A(1, 1/3, -2)$, | $\alpha: x - 3y + z + 6 = 0, k = 1/3.$ |
| 11.6. $A(1/2, 1/3, 1)$, | $\alpha: 2x - 3y + 3z - 2 = 0, k = 1, 5.$ |
| 11.7. $A(2, 0, -1)$, | $\alpha: x - 3y + 5z - 1 = 0, k = -1.$ |
| 11.8. $A(1, -2, 1)$, | $\alpha: 5x + y - z + 6 = 0, k = 2/3.$ |
| 11.9. $A(2, -5, 4)$, | $\alpha: 5x + 2y - z + 3 = 0, k = 4/3.$ |
| 11.10. $A(2, -3, 1)$, | $\alpha: x + y - 2z + 2 = 0, k = 5/2.$ |
| 11.11. $A(-2, 3, -3)$, | $\alpha: 3x + 2y - z - 2 = 0, k = 3/2.$ |
| 11.12. $A(1/4, 1/3, 1)$, | $\alpha: 4x - 3y + 5z - 10 = 0, k = 1/2.$ |
| 11.13. $A(0, 1, -1)$, | $\alpha: 6x - 5y + 3z - 4 = 0, k = -3/4.$ |
| 11.14. $A(2, 3, -2)$, | $\alpha: 3x - 2y + 4z - 6 = 0, k = -4/3.$ |
| 11.15. $A(-2, -1, 1)$, | $\alpha: x - 2y + 6z - 10 = 0, k = 3/5.$ |
| 11.16. $A(5, 0, -1)$, | $\alpha: 2x - y + 3z - 1 = 0, k = 3.$ |
| 11.17. $A(1, 1, 1)$, | $\alpha: 7x - 6y + z - 5 = 0, k = -2.$ |
| 11.18. $A(1/3, 1, 1)$, | $\alpha: 3x - y + 5z - 6 = 0, k = 5/6.$ |
| 11.19. $A(2, 5, 1)$, | $\alpha: 5x - 2y + z - 3 = 0, k = 1/3.$ |
| 11.20. $A(-1, 2, 3)$, | $\alpha: x - 3y + z + 2 = 0, k = 2, 5.$ |
| 11.21. $A(4, 3, 1)$, | $\alpha: 3x - 4y + 5z - 6 = 0, k = 5/6.$ |
| 11.22. $A(3, 5, 2)$, | $\alpha: 5x - 3y + z - 4 = 0, k = 1/2.$ |
| 11.23. $A(4, 0, -3)$, | $\alpha: 7x - y + 3z - 1 = 0, k = 3.$ |
| 11.24. $A(-1, 1, -2)$, | $\alpha: 4x - y + 3z - 6 = 0, k = -5/3.$ |
| 11.25. $A(2, -5, -1)$, | $\alpha: 5x + 2y - 3z - 9 = 0, k = 1/3.$ |
| 11.26. $A(-3, -2, 4)$, | $\alpha: 2x - 3y + z - 5 = 0, k = -4/5.$ |
| 11.27. $A(5, 0, -6)$, | $\alpha: 6x - y - z + 7 = 0, k = 2/7.$ |
| 11.28. $A(1, 2, 2)$, | $\alpha: 3x - z + 5 = 0, k = -1/5.$ |
| 11.29. $A(3, 2, 4)$, | $\alpha: 2x - 3y + z - 6 = 0, k = 2/3.$ |
| 11.30. $A(7, 0, -1)$, | $\alpha: x - y - z - 1 = 0, k = 4.$ |
| 11.31. $A(0, 3, -1)$, | $\alpha: 2x - y + 3z - 1 = 0, k = 2.$ |

Задача 12. Написать канонические уравнения прямой.

- 12.1. $2x + y + z - 2 = 0, 2x - y - 3z + 6 = 0.$
- 12.2. $x - 3y + 2z + 2 = 0, x + 3y + z + 14 = 0.$
- 12.3. $x - 2y + z - 4 = 0, 2x + 2y - z - 8 = 0.$
- 12.4. $x + y + z - 2 = 0, x - y - 2z + 2 = 0.$
- 12.5. $2x + 3y + z + 6 = 0, x - 3y - 2z + 3 = 0.$
- 12.6. $3x + y - z - 6 = 0, 3x - y + 2z = 0.$
- 12.7. $x + 5y + 2z + 11 = 0, x - y - z - 1 = 0.$
- 12.8. $3x + 4y - 2z + 1 = 0, 2x - 4y + 3z + 4 = 0.$
- 12.9. $5x + y - 3z + 4 = 0, x - y + 2z + 2 = 0.$
- 12.10. $x - y - z - 2 = 0, x - 2y + z + 4 = 0.$

- 12.11. $4x+y-3z+2=0$, $2x-y+z-8=0$
 12.12. $3x+3y-2z-1=0$, $2x-3y+z+6=0$
 12.13. $6x-7y-4z-2=0$, $x+7y-z-5=0$
 12.14. $8x-y-3z-1=0$, $x+y+z+10=0$
 12.15. $6x-5y-4z+8=0$, $6x+5y+3z+4=0$
 12.16. $x+5y-z-5=0$, $2x-5y+2z+5=0$
 12.17. $2x-3y+z+6=0$, $x-3y-2z+3=0$
 12.18. $5x+y+2z+4=0$, $x-y-3z+2=0$
 12.19. $4x+y+z+2=0$, $2x-y-3z-8=0$
 12.20. $2x+y-3z-2=0$, $2x-y+z+6=0$
 12.21. $x+y-2z-2=0$, $x-y+z+2=0$
 12.22. $x+5y-z+11=0$, $x-y+2z-1=0$
 12.23. $x-y+z-2=0$, $x-2y-z+4=0$
 12.24. $6x-7y-z-2=0$, $x+7y-4z-5=0$
 12.25. $x+5y+2z-5=0$, $2x-5y-z+5=0$
 12.26. $x-3y+z+2=0$, $x+3y+2z+14=0$
 12.27. $2x+3y-2z+6=0$, $x-3y+z+3=0$
 12.28. $3x+4y+3z+1=0$, $2x-4y-2z+4=0$
 12.29. $3x+3y+z-1=0$, $2x-3y-2z+6=0$
 12.30. $6x-5y+3z+8=0$, $6x+5y-4z+4=0$
 12.31. $2x-3y-2z+6=0$, $x-3y+z+3=-0$

Задача 13. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

- 13.1. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$, $x+2y+3z-14=0$
 13.2. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}$, $x+2y-5z+20=0$
 13.3. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}$, $x-3y+7z-24=0$
 13.4. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}$, $2x-y+4z=0$
 13.5. $\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}$, $3x+y-5z-12=0$
 13.6. $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}$, $x+3y-5z+9=0$
 13.7. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$, $x-2y+5z+17=0$
 13.8. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1}$, $x-2y+4z-19=0$
 13.9. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1}$, $2x-y+3z+23=0$
 13.10. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0}$, $2x-3y-5z-7=0$

- 13.11. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}$, $4x+2y-z-11=0$.
- 13.12. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}$, $3x-2y-4z-8=0$.
- 13.13. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$, $x+2y-z-2=0$.
- 13.14. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3}$, $5x-y+4z+3=0$.
- 13.15. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$, $x+3y+5z-42=0$.
- 13.16. $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{2}$, $7x+y+4z-47=0$.
- 13.17. $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}$, $2x+3y+7z-52=0$.
- 13.18. $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}$, $3x+4y+7z-16=0$.
- 13.19. $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1}$, $2x-5y+4z+24=0$.
- 13.20. $\frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12}$, $x-2y-3z+18=0$.
- 13.21. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}$, $x+7y+3z+11=0$.
- 13.22. $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}$, $3x+7y-5z-11=0$.
- 13.23. $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}$, $4x+y-6z-5=0$.
- 13.24. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0}$, $5x+9y+4z-25=0$.
- 13.25. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}$, $x+4y+13z-23=0$.
- 13.26. $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}$, $3x-2y+5z-3=0$.
- 13.27. $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{-2}$, $3x-y+4z=0$.
- 13.28. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{-2}$, $x+2y-5z+16=0$.
- 13.29. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{-2}$, $3x-7y-2z+7=0$.

$$13.30. \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+5}{11}, 5x+7y+9z-32=0.$$

$$13.31. \frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}, 2x+y+7z-3=0.$$

Задача 14. Найти точку M' , симметричную точке M относительно прямой (для вариантов 1 — 15) или плоскости (для вариантов 16 — 31).

$$14.1. M(0, -3, -2), \frac{x-1}{1} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z}{1}.$$

$$14.2. M(2, -1, 1), \frac{x-4,5}{1} = \frac{y+3}{-0,5} = \frac{z-2}{1}.$$

$$14.3. M(1, 1, 1), \frac{x-2}{1} = \frac{y+1,5}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

$$14.4. M(1, 2, 3), \frac{x-0,5}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z-1,5}{1}.$$

$$14.5. M(1, 0, -1), \frac{x-3,5}{2} = \frac{y-1,5}{2} = \frac{z}{0}.$$

$$14.6. M(2, 1, 0), \frac{x-2}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z+0,5}{1}.$$

$$14.7. M(-2, -3, 0), \frac{x+0,5}{1} = \frac{y+1,5}{0} = \frac{z-0,5}{1}.$$

$$14.8. M(-1, 0, -1), \frac{x}{-1} = \frac{y-1,5}{0} = \frac{z-2}{1}.$$

$$14.9. M(0, 2, 1), \frac{x-1,5}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}.$$

$$14.10. M(3, -3, -1), \frac{x-6}{5} = \frac{y-3,5}{4} = \frac{z+0,5}{0}.$$

$$14.11. M(3, 3, 3), \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1,5}{0} = \frac{z-3}{1}.$$

$$14.12. M(-1, 2, 0), \frac{x+0,5}{1} = \frac{y+0,7}{-0,2} = \frac{z-2}{2}.$$

$$14.13. M(2, -2, -3), \frac{x-1}{-1} = \frac{y+0,5}{0} = \frac{z+1,5}{0}.$$

$$14.14. M(-1, 0, 1), \frac{x+0,5}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{2}.$$

$$14.15. M(0, -3, -2), \frac{x-0,5}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z-1,5}{1}.$$

$$14.16. M(1, 0, 1), 4x+6y+4z-25=0.$$

$$14.17. M(-1, 0, -1), 2x+6y-2z+11=0. \quad 14.18. M(0, 2, 1), 2x+4y-3=0.$$

- 14.19. $M(2, 1, 0)$, $y+z+2=0$. 14.20. $M(-1, 2, 0)$, $4x-5y-z-7=0$.
 14.21. $M(2, -1, 1)$, $x-y+2z-2=0$. 14.22. $M(1, 1, 1)$, $x+4y+3z+5=0$.
 14.23. $M(1, 2, 3)$, $2x+10y+10z-1=0$.
 14.24. $M(0, -3, -2)$, $2x+10y+10z-1=0$.
 14.25. $M(1, 0, -1)$, $2y+4z-1=0$.
 14.26. $M(3, -3, -1)$, $2x-4y-4z-13=0$.
 14.27. $M(-2, -3, 0)$, $x+5y+4=0$. 14.28. $M(2, -2, -3)$, $y+z+2=0$.
 14.29. $M(-1, 0, 1)$, $2x+4y-3=0$. 14.30. $M(3, 3, 3)$, $8x+6y+8z-25=0$.
 14.31. $M(-2, 0, 3)$, $2x-2y+10z+1=0$.

Х. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Теоретические вопросы

1. Линейное пространство. Базис. Координаты.
2. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису.
3. Линейный оператор. Матрица оператора.
4. Преобразование матрицы оператора при переходе к новому базису.
5. Действия над линейными операторами.
6. Собственные векторы и собственные значения.
7. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского.
8. Сопряженные и самосопряженные операторы. Их матрицы.
9. Ортогональное преобразование; свойства; матрица.
10. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

Теоретические упражнения

1. Найти какой-нибудь базис и размерность подпространства L пространства R_3 , если L задано уравнением $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.
2. Доказать, что все симметрические матрицы третьего порядка образуют линейное подпространство всех квадратных матриц третьего порядка. Найти базис и размерность этого подпространства.
3. Найти координаты многочлена $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ в базисе $1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3$.
4. Линейный оператор A в базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right\}.$$

Найти матрицу этого же оператора в базисе $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$.

5. Найти ядро и образ оператора дифференцирования в пространстве многочленов, степени которых меньше или равны трем.

6. Пусть x и y — собственные векторы линейного оператора A , относящиеся к различным собственным значениям. Доказать, что вектор $z = \alpha x + \beta y$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ не является собственным вектором оператора A .

7. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3)$. Будет ли оператор A самосопряженным?

8. Доказать, что если матрица оператора A — симметрическая в некотором базисе, то она является симметрической в любом базисе (базисы — ортонормированные).

Расчетные задания

Задача 1. Образует ли линейное пространство заданное множество, в котором определены сумма любых двух элементов a и b и произведение любого элемента a на любое действительное число α ?

1.1. Множество всех векторов трехмерного пространства, координаты которых — целые числа;

сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

1.2. Множество всех векторов, лежащих на одной оси;

сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

1.3. Множество всех векторов на плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей;

сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

1.4. Множество всех векторов трехмерного пространства;

сумма: $[a \cdot b]$, произведение: $\alpha \cdot a$.

1.5. Множество всех векторов, лежащих на одной оси;

сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot |a|$.

1.6. Множество всех векторов, являющихся линейными комбинациями векторов x, y, z ;

сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

1.7. Множество всех функций $a = f(t)$, $b = g(t)$, принимающих положительные значения;

сумма: $f(t) \cdot g(t)$, произведение: $f^n(t)$.

1.8. Множество всех непрерывных функций $a = f(t)$, $b = g(t)$, заданных на отрезке $[0, 1]$;

сумма: $f(t) + g(t)$, произведение: $\alpha \cdot f(t)$.

1.9. Множество всех четных функций $a = f(t)$, $b = g(t)$, заданных на отрезке $[-1, +1]$;

сумма: $f(t) \cdot g(t)$, произведение: $\alpha \cdot f(t)$.

1.10. Множество всех нечетных функций $a=f(t)$, $b=g(t)$, заданных на отрезке $[-1, +1]$;

сумма: $f(t)+g(t)$, произведение: $\alpha \cdot f(t)$.

1.11. Множество всех линейных функций $a=f(x_1, x_2)$, $b=g(x_1, x_2)$;

сумма: $f(x_1, x_2)+g(x_1, x_2)$, произведение: $\alpha f(x_1, x_2)$.

1.12. Множество всех многочленов третьей степени от переменной x ;

сумма: $a+b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

1.13. Множество всех многочленов степени меньшей или равной трем от переменных x, y ;

сумма: $a+b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

1.14. Множество всех упорядоченных наборов из n чисел $a=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $b=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$;

сумма: $\{x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n\}$, произведение: $\{\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n\}$.

1.15. Множество всех упорядоченных наборов из n чисел $a=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $b=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$;

сумма: $\{x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n\}$, произведение: $\{\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n\}$.

1.16. Множество всех сходящихся последовательностей $a=\{u_n\}$, $b=\{v_n\}$;

сумма: $\{u_n+v_n\}$, произведение: $\{\alpha u_n\}$.

1.17. Множество всех многочленов от одной переменной степени меньшей или равной n ;

сумма: $a+b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

1.18. Множество всех многочленов от одной переменной степени n ;

сумма: $a+b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

1.19. Множество всех диагональных матриц

$a=\|a_{ik}\|$, $b=\|b_{ik}\|$, $i, k=1, 2, \dots, n$;

сумма: $\|a_{ik}+b_{ik}\|$, произведение: $\|\alpha a_{ik}\|$.

1.20. Множество всех невырожденных матриц

$a=\|a_{ik}\|$, $b=\|b_{ik}\|$, $i, k=1, 2, \dots, n$;

сумма: $\|a_{ik} \cdot b_{ik}\|$, произведение: $\|\alpha a_{ik}\|$.

1.21. Множество всех квадратных матриц

$a=\|a_{ik}\|$, $b=\|b_{ik}\|$, $i, k=1, 2, \dots, n$;

сумма: $\|a_{ik}+b_{ik}\|$, произведение: $\|\alpha a_{ik}\|$.

1.22. Множество всех диагональных матриц

$a=\|a_{ik}\|$, $b=\|b_{ik}\|$, $i, k=1, 2, \dots, n$;

сумма: $\|a_{ik} \cdot b_{ik}\|$, произведение: $\|\alpha a_{ik}\|$.

1.23. Множество всех прямоугольных матриц

$a=\|a_{ik}\|$, $b=\|b_{ik}\|$, $i=1, 2, \dots, m$; $k=1, 2, \dots, n$;

сумма: $\|a_{ik}+b_{ik}\|$, произведение: $\|\alpha a_{ik}\|$.

1.24. Множество всех симметрических матриц
 $a = \|a_{ik}\|$ ($a_{ki} = a_{ik}$), $b = \|b_{ik}\|$ ($b_{ki} = b_{ik}$), $i, k = 1, 2, \dots, n$;

сумма: $\|a_{ik} + b_{ik}\|$, произведение: $\|aa_{ik}\|$.

1.25. Множество всех целых чисел;

сумма: $a + b$, произведение: aa .

1.26. Множество всех действительных чисел;

сумма: $a + b$, произведение: aa .

1.27. Множество всех положительных чисел;

сумма: $a \cdot b$, произведение: a^a .

1.28. Множество всех отрицательных чисел;

сумма: $-|a| \cdot |b|$, произведение: $-|a|^a$.

1.29. Множество всех действительных чисел;

сумма: $a \cdot b$, произведение: $a \cdot a$.

1.30. Множество всех дифференцируемых функций

$a = f(t)$, $b = g(t)$;

сумма: $f(t) + g(t)$, произведение: $a \cdot f(t)$.

1.31. Множество всех дифференцируемых функций

$a = f(t)$, $b = g(t)$;

сумма: $f(t) \cdot g(t)$, произведение: $a \cdot f(t)$.

Задача 2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов.

2.1. $a = \{1, 4, 6\}$, $b = \{1, -1, 1\}$, $c = \{1, 1, 3\}$.

2.2. $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ на $(-\pi/2, \pi/2)$.

2.3. $a = \{2, -3, 1\}$, $b = \{3, -1, 5\}$, $c = \{1, -4, 3\}$.

2.4. 2 , $\sin x$, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ на $(-\infty, +\infty)$.

2.5. $a = \{5, 4, 3\}$, $b = \{3, 3, 2\}$, $c = \{8, 1, 3\}$.

2.6. 1 , x , $\sin x$ на $(-\infty, +\infty)$.

2.7. $a = \{1, 1, 1\}$, $b = \{0, 1, 1\}$, $c = \{0, 0, 1\}$.

2.8. e^x , e^{2x} , e^{3x} на $(-\infty, +\infty)$.

2.9. $a = \{1, -1, 2\}$, $b = \{-1, 1, -1\}$, $c = \{2, -1, 1\}$.

2.10. x , x^2 , $(1+x)^2$ на $(-\infty, +\infty)$.

2.11. $a = \{1, 2, 3\}$, $b = \{4, 5, 6\}$, $c = \{7, 8, 9\}$.

2.12. 1 , x , x^2 , $(1+x)^2$ на $(-\infty, +\infty)$.

2.13. $a = \{1, 1, 1\}$, $b = \{1, 2, 3\}$, $c = \{1, 3, 6\}$.

2.14. $\cos x$, $\sin x$, $\sin 2x$, на $(-\pi/2, \pi/2)$.

2.15. $a = \{3, 4, -5\}$, $b = \{8, 7, -2\}$, $c = \{2, -1, 8\}$.

2.16. e^x , e^{-x} , e^{2x} на $(-\infty, +\infty)$.

2.17. $a = \{3, 2, -4\}$, $b = \{4, 1, -2\}$, $c = \{5, 2, -3\}$.

2.18. $1+x+x^2$, $1+2x+x^2$, $1+3x+x^2$ на $(-\infty, +\infty)$.

2.19. $a = \{0, 1, 1\}$, $b = \{1, 0, 1\}$, $c = \{1, 1, 0\}$.

2.20. 1 , e^x , $\operatorname{sh} x$ на $(-\infty, +\infty)$.

2.21. $a = \{5, -6, 1\}$, $b = \{3, -5, -2\}$, $c = \{2, -1, 3\}$.

2.22. $1/x$, x , 1 на $(0, 1)$.

2.23. $a = \{7, 1, -3\}$, $b = \{2, 2, -4\}$, $c = \{3, -3, 5\}$.

$$2.24. 1, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x \text{ на } (0, \pi/2).$$

$$2.25. a = \{1, 2, 3\}, b = \{6, 5, 9\}, c = \{7, 8, 9\}.$$

$$2.26. x, 1+x, (1+x)^2 \text{ на } (-\infty, +\infty).$$

$$2.27. a = \{2, 1, 0\}, b = \{-5, 0, 3\}, c = \{3, 4, 3\}.$$

$$2.28. e^x, xe^x, x^2e^x \text{ на } (-\infty, +\infty).$$

$$2.29. a = \{2, 0, 2\}, b = \{1, -1, 0\}, c = \{0, -1, -2\}.$$

$$2.30. e^x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x \text{ на } (-\infty, +\infty).$$

$$2.31. a = \{-2, 1, 5\}, b = \{4, -3, 0\}, c = \{0, -1, 10\}.$$

Задача 3. Найти общее решение для каждой из данных систем и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы).

$$3.1. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

$$3.2. \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4. \end{cases}$$

$$3.3. \begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

$$3.4. \begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_5 = 7, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

$$3.5. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

$$3.6. \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 9x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$3.7. \begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1. \end{cases}$$

$$3.8. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$3.9. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$3.10. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 3. \end{cases}$$

$$3.11. \begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

$$3.12. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$3.13. \begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

$$3.14. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 2. \end{cases}$$

$$3.15. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 1. \end{cases}$$

$$3.16. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_5 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$$

$$3.17. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$$

$$3.18. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$$

$$3.19. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$$

$$3.20. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + x_5 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

$$3.21. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$3.22. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$$

- 3.23.
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0. \end{cases}$$
- 3.24.
$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$
- 3.25.
$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$
- 3.26.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$
- 3.27.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$
- 3.28.
$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$
- 3.29.
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \end{cases}$$
- 3.30.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_5 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 1. \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$$

$$3.31. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

Задача 4. Найти координаты вектора x в базисе (e'_1, e'_2, e'_3) , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3) .

4.1. $x = \{6, -1, 3\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e'_2 = 2e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.3. $x = \{1, 3, 6\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 4e_3, \\ e'_2 = (4/3)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.5. $x = \{6, 3, 1\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + (4/3)e_3, \\ e'_2 = 4e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.7. $x = \{8, 4, 1\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + (5/4)e_3, \\ e'_2 = 5e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.9. $x = \{10, 5, 1\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + (6/5)e_3, \\ e'_2 = 6e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.11. $x = \{-12, 6, 1\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + (7/6)e_3, \\ e'_2 = 7e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.13. $x = \{-3, 2, 4\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - e_3, \\ e'_2 = (1/2)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.15. $x = \{2, 6, -3\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 2e_3, \\ e'_2 = (2/3)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.2. $x = \{1, 2, 4\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 3e_3, \\ e'_2 = (3/2)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.4. $x = \{2, 4, 1\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + (3/2)e_3, \\ e'_2 = 3e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.6. $x = \{1, 4, 8\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 5e_3, \\ e'_2 = (5/4)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.8. $x = \{2, 5, 10\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 6e_3, \\ e'_2 = (6/5)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.10. $x = \{1, 6, 12\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 7e_3, \\ e'_2 = (7/6)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.12. $x = \{-1, 7, 14\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 8e_3, \\ e'_2 = (8/7)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.14. $x = \{2, 4, 3\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + (1/2)e_3, \\ e'_2 = -e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.16. $x = \{12, 3, -1\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + (2/3)e_3, \\ e'_2 = -2e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.17. $x = \{1, -4, 8\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 3e_3, \\ e'_2 = (3/4)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.19. $x = \{7, -5, 10\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 4e_3, \\ e'_2 = (4/5)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.21. $x = \{1, -6, 6\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 5e_3, \\ e'_2 = (5/6)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.23. $x = \{1, 7, -7\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 6e_3, \\ e'_2 = (6/7)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.25. $x = \{3, -8, 8\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 7e_3, \\ e'_2 = (7/8)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.27. $x = \{9, 9, 2\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + (8/9)e_3, \\ e'_2 = -8e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.29. $x = \{10, 10, 7\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + (9/10)e_3, \\ e'_2 = -9e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.31. $x = \{1, 10, 10\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 11e_3, \\ e'_2 = (11/10)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.18. $x = \{1, 4, -8\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 3e_3, \\ e'_2 = (3/4)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.20. $x = \{5, -5, 4\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + (4/5)e_3, \\ e'_2 = -4e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.22. $x = \{6, 6, 2\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + (5/6)e_3, \\ e'_2 = -5e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.24. $x = \{7, 7, 2\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + (6/7)e_3, \\ e'_2 = -6e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.26. $x = \{1, -9, 9\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 8e_3, \\ e'_2 = (8/9)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.28. $x = \{3, -10, 10\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 9e_3, \\ e'_2 = (9/10)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.30. $x = \{1, 9, 18\}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 10e_3, \\ e'_2 = (10/9)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задача 5. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

5.1. $Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, -3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3)$,

$Bx = (6 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2)$,

$Cx = (x_3^4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3)$.

5.2. $Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_2 + 2)$,

$Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 0, x_2^4 + 2x_3)$,

$Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_2 + 2x_3)$.

- 5.3. $Ax = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_1 + 2x_2^4 + 3x_3)$,
 $Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
 $Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_1 + 2x_2 + 3)$.
- 5.4. $Ax = (3x_1 + 2x_2 + x_3, x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$,
 $Bx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 1, 2x_1 - 3x_2 - 4)$,
 $Cx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, x_3, 2x_1^4 - 3x_2 - 4x_3)$.
- 5.5. $Ax = (x_1, x_1 - 2x_2 - 3, 4x_1 - 5x_2 - 6)$,
 $Bx = (x_1, x_1 - 2x_2 - 3x_3, 4x_1^4 - 5x_2 - 6x_3)$,
 $Cx = (x_1, x_1 - 2x_2 - 3x_3, 4x_1 - 5x_2 - 6x_3)$.
- 5.6. $Ax = (2x_1 + x_2, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2^2 - 5x_3)$,
 $Bx = (2x_1 + x_2, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5x_3)$,
 $Cx = (2x_1 + x_2, x_2 - 2, 3x_1 - 4x_2 - 5)$.
- 5.7. $Ax = (x_1, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$,
 $Bx = (x_1, x_1 + 2x_2 + 3, 4x_1 + 5x_2 + 6)$,
 $Cx = (x_1, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1^4 + 5x_2 + 6x_3)$.
- 5.8. $Ax = (3x_1 - 2x_2 - x_3, 1, x_1 + 2x_2 + 3)$,
 $Bx = (3x_1 - 2x_2 - x_3, 0, x_1^3 + 2x_2 + 3x_3)$,
 $Cx = (3x_1 - 2x_2 - x_3, x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.
- 5.9. $Ax = (2x_1 - x_2, x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3^4)$,
 $Bx = (2x_1 - x_2, x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
 $Cx = (2x_1 - x_2, 1, x_1 + 2x_2 + 3)$.
- 5.10. $Ax = (x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3)$,
 $Bx = (x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4, 5x_1 + 6x_2 + 7)$,
 $Cx = (x_3, 0, 5x_1^4 + 6x_2 + 7x_3)$.
- 5.11. $Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, 0)$,
 $Bx = (6x_1 - 5x_2 - 4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, 0)$,
 $Cx = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3^2, 0)$.
- 5.12. $Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3, 2x_1 - x_2, x_3^2)$,
 $Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, 1)$,
 $Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_3)$.
- 5.13. $Ax = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1^2, x_2 + 2x_3)$,
 $Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_2 + 2x_3)$,
 $Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2, x_1, x_2 + 2)$.
- 5.14. $Ax = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 0, x_1 - 2x_2 - 3x_3)$,
 $Bx = (3x_1 + 2x_2 + 1, 0, x_1 - 2x_2 - 3)$,
 $Cx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 0, x_1^2 - 2x_2 - 3x_3)$.
- 5.15. $Ax = (x_1, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5)$,
 $Bx = (x_1, x_2^2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5)$,
 $Cx = (x_1, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5x_3)$.
- 5.16. $Ax = (2x_1 + x_2, x_2^2, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$,
 $Bx = (2x_1 + x_2, x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$,
 $Cx = (2x_1 + x_2, x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4)$.
- 5.17. $Ax = (x_1, x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$,
 $Bx = (x_1, x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5)$,
 $Cx = (x_1, x_2^2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$.
- 5.18. $Ax = (3x_1 - 2x_2 - 1, 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
 $Bx = (3x_1^2 - 2x_2 - x_3, 0, 0)$,
 $Cx = (3x_1 - 2x_2 - x_3, 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.
- 5.19. $Ax = (2x_1^2 - x_2, x_3, 2x_2 + 3x_3)$,
 $Bx = (2x_1 - x_2, x_3, 2x_2 + 3x_3)$,
 $Cx = (2x_1 - x_2, x_3, 2x_2 + 3)$.
- 5.20. $Ax = (0, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$,

- $Bx = (0, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6),$
 $Cx = (0, x_1^2 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3).$
- 5.21.** $Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2),$
 $Bx = (6x_1 - 5x_2 - 4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2),$
 $Cx = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3^2, 3x_1 - 2x_2 - x_3, 0).$
- 5.22.** $Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3, 2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3),$
 $Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3^2, 2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3),$
 $Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3).$
- 5.23.** $Ax = (4x_1 - 3x_2^2 - 2x_3, x_1 + x_3, 0),$
 $Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3),$
 $Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2, x_1 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3).$
- 5.24.** $Ax = (3x_1 + 4x_2 + 5x_3, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3, 9x_1 + x_3),$
 $Bx = (3x_1 + 4x_2 + 5, 6x_1 + 7x_2 + 8, 9x_1 + x_3),$
 $Cx = (3x_1 + 4x_2 + 5x_3^2, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3, 0).$
- 5.25.** $Ax = (2x_1 + 3x_2 + 4, 5x_1 + 6x_2 + 7, 8x_1 + x_3),$
 $Bx = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3^2, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3, 0),$
 $Cx = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3, 8x_1 + x_3).$
- 5.26.** $Ax = (x_1^2 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 0),$
 $Bx = (x_1 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3),$
 $Cx = (x_1 + 1, 2x_1 + 3x_2 + 4, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3).$
- 5.27.** $Ax = (3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3),$
 $Bx = (3x_1 - 2x_2 - 1, x_2 + 2, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3),$
 $Cx = (3x_1 - 2x_2 - x_3^2, x_2 + 2x_3, 0).$
- 5.28.** $Ax = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3),$
 $Bx = (2x_1 - x_2^2, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 0),$
 $Cx = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3).$
- 5.29.** $Ax = (x_1^2 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + 8x_2),$
 $Bx = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + 8x_2),$
 $Cx = (x_1 + 2x_2 + 3, 4x_1 + 5x_2 + 6, 7x_1 + 8x_2).$
- 5.30.** $Ax = (x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3),$
 $Bx = (x_2 + 2, 3x_1 + 4x_2 + 5, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3),$
 $Cx = (x_2^2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3).$
- 5.31.** $Ax = (x_1^2, x_1 - x_2, x_2 + x_3),$
 $Bx = (1, x_1 - x_2, x_2 + x_3),$
 $Cx = (x_1, x_1 - x_2, x_2 + x_3).$

Задача 6. Пусть $x = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Ax = \{x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3\}$,
 $Bx = \{x_2, 2x_3, x_1\}$. Найти:

- | | | |
|-----------------------------|------------------------|-------------------------|
| 6.1. $ABx.$ | 6.2. $A^2x.$ | 6.3. $(A^2 - B)x.$ |
| 6.4. $B^4x.$ | 6.5. $B^2x.$ | 6.6. $(2A + 3B^2)x.$ |
| 6.7. $(A^2 + B^2)x.$ | 6.8. $(B^2 + A)x.$ | 6.9. $BAx.$ |
| 6.10. $B(2A - B)x.$ | 6.11. $A(2B - A)x.$ | 6.12. $2(AB + 2A)x.$ |
| 6.13. $(A - B)^2x.$ | 6.14. $(B - 2A^2)x.$ | 6.15. $BA^2x.$ |
| 6.16. $(3A^2 + B)x.$ | 6.17. $(A^2 + B)x.$ | 6.18. $(A^2 - B^2)x.$ |
| 6.19. $(2B - A^2)x.$ | 6.20. $B^2x.$ | 6.21. $(B^2 - 2A)x.$ |
| 6.22. $(A(B + A))x.$ | 6.23. $(AB^2)x.$ | 6.24. $(A(B - A))x.$ |
| 6.25. $2(B + 2A^2 + B^2)x.$ | 6.26. $(B(A - B))x.$ | 6.27. $(B - A + B^2)x.$ |
| 6.28. $(B(A + B))x.$ | 6.29. $(A + BA - B)x.$ | 6.30. $(3B + 2A^2)x.$ |
| 6.31. $(B(2A + B))x.$ | | |

Задача 7. Найти матрицу линейного оператора в базисе (e'_1, e'_2, e'_3) , где $e'_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $e'_2 = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e'_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе (e_1, e_2, e_3) .

7.1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

7.2.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

7.3.
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

7.4.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

7.5.
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

7.6.
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

7.7.
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7.8.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.9.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

7.10.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

7.11.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

7.12.
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

7.13.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7.14.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

7.15.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7.16.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.17.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

7.18.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

7.19.
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7.20.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7.21.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7.22.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7.23.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7.24.
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

7.25.
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

7.26.
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

7.27.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$$7.28. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 7.29. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7.30. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad 7.31. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 8. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе (i, j, k)), образ и ядро оператора:

- 8.1. Проектирования на ось Ox .
- 8.2. Проектирования на плоскость $z=0$.
- 8.3. Проектирования на ось Oz .
- 8.4. Зеркального отражения относительно плоскости Oyz .
- 8.5. Проектирования на ось Oy .
- 8.6. Проектирования на плоскость $y=0$.
- 8.7. Зеркального отражения относительно плоскости $x-y=0$.
- 8.8. Зеркального отражения относительно плоскости $y+z=0$.
- 8.9. Проектирования на плоскость $y-z=0$.
- 8.10. Проектирования на плоскость $y=\sqrt{3}x$.
- 8.11. Проектирования на плоскость Oyz .
- 8.12. Зеркального отражения относительно плоскости $x-z=0$.
- 8.13. Зеркального отражения относительно плоскости Oxy .
- 8.14. Поворота относительно оси Ox на угол $\pi/2$ в положительном направлении.
- 8.15. Проектирования на плоскость $x-y=0$.
- 8.16. Проектирования на плоскость $y+z=0$.
- 8.17. Зеркального отражения относительно плоскости $x+y=0$.
- 8.18. Зеркального отражения относительно плоскости $y-z=0$.
- 8.19. Проектирования на плоскость $x+y=0$.
- 8.20. Проектирования на плоскость $x-z=0$.
- 8.21. Зеркального отражения относительно плоскости $x+z=0$.
- 8.22. Поворота относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\pi/2$.
- 8.23. Проектирования на плоскость $\sqrt{3}y+z=0$.
- 8.24. Зеркального отражения относительно плоскости Oxz .
- 8.25. Поворота в положительном направлении относительно оси Oy на угол $\pi/2$.
- 8.26. Проектирования на плоскость $x+z=0$.
- 8.27. Проектирования на плоскость $y+\sqrt{3}z=0$.
- 8.28. Проектирования на плоскость $\sqrt{3}x+z=0$.
- 8.29. Проектирования на плоскость $\sqrt{3}x+y=0$.
- 8.30. Поворота относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\pi/4$.
- 8.31. Проектирования на плоскость $x-\sqrt{3}z=0$.

Задача 9. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$9.1. \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad 9.2. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 9.3. \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

9.4.
$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

9.5.
$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

9.6.
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

9.7.
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

9.8.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

9.9.
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

9.10.
$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

9.11.
$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

9.12.
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

9.13.
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

9.14.
$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

9.15.
$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

9.16.
$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

9.17.
$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

9.18.
$$\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

9.19.
$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

9.20.
$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

9.21.
$$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -4 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$$

9.22.
$$\begin{pmatrix} 19 & 2 & -2 \\ 6 & 15 & -6 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$$

9.23.
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

9.24.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9.25.
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

9.26.
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

9.27.
$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

9.28.
$$\begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & -13 \end{pmatrix}$$

9.29.
$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

9.30.
$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$9.31. \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 10. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

- 10.1. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2.$
- 10.2. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2.$
- 10.3. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2.$
- 10.4. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2.$
- 10.5. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2.$
- 10.6. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + x_3^2.$
- 10.7. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 2x_3^2.$
- 10.8. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2.$
- 10.9. $x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2.$
- 10.10. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2.$
- 10.11. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 12x_2x_3 + 4x_3^2.$
- 10.12. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2.$
- 10.13. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2.$
- 10.14. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2.$
- 10.15. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2.$
- 10.16. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 16x_2x_3 + 7x_3^2.$
- 10.17. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 10x_2x_3 + 4x_3^2.$
- 10.18. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2.$
- 10.19. $x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2.$
- 10.20. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2.$
- 10.21. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_3^2.$
- 10.22. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 2x_3^2.$
- 10.23. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2.$
- 10.24. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_3^2.$
- 10.25. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2.$
- 10.26. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_3^2.$
- 10.27. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 4x_3^2.$
- 10.28. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2.$
- 10.29. $x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2.$
- 10.30. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_3^2.$
- 10.31. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2.$

Задача 11. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием.

- 11.1. $4x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$
- 11.2. $4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2\sqrt{3}x_2x_3.$
- 11.3. $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3.$
- 11.4. $2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$
- 11.5. $-4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3.$

- 11.6. $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2\sqrt{3}x_2x_3$.
- 11.7. $4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
- 11.8. $3x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - x_1x_3 + \sqrt{3}x_2x_3$.
- 11.9. $-x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3$.
- 11.10. $x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.
- 11.11. $\frac{5\sqrt{2}}{4}x_1^2 + \frac{5\sqrt{2}}{4}x_2^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x_3^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.
- 11.12. $3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.
- 11.13. $x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$.
- 11.14. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{4}{3}x_1x_2 - \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.
- 11.15. $-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$.
- 11.16. $-(1/2)x_1^2 + 5x_2^2 - (1/2)x_3^2 - 4x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3$.
- 11.17. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
- 11.18. $-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.
- 11.19. $2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$.
- 11.20. $-4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
- 11.21. $10x_1^2 + 14x_2^2 + 7x_3^2 - 10x_1x_2 - \sqrt{2}x_1x_3 - 5\sqrt{2}x_2x_3$.
- 11.22. $(3/2)x_1^2 - 5x_2^2 + (3/2)x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 - 4x_2x_3$.
- 11.23. $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$.
- 11.24. $2x_1^2 - 3x_3^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4\sqrt{3}x_2x_3$.
- 11.25. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.
- 11.26. $x_1^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$.
- 11.27. $5x_1^2 + 13x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$.
- 11.28. $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + \frac{2}{3}x_1x_2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.
- 11.29. $5x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2\sqrt{2}x_1x_3 + 4\sqrt{2}x_2x_3$.
- 11.30. $-2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.
- 11.31. $-3x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Задача 12. Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

- 12.1. $-x^2 - y^2 + 4xy + 2x - 4y + 1 = 0$.
- 12.2. $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$.
- 12.3. $4xy + 4x - 4y = 0$.
- 12.4. $-2x^2 - 2y^2 + 2xy - 6x + 6y + 3 = 0$.
- 12.5. $-3x^2 - 3y^2 + 4xy - 6x + 4y + 2 = 0$.
- 12.6. $-2xy - 2x - 2y + 1 = 0$.
- 12.7. $-x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y + 2 = 0$.
- 12.8. $-4x^2 - 4y^2 + 2xy + 10x - 10y + 1 = 0$.

- 12.9. $4xy+4x-4y-2=0$.
 12.10. $x^2+y^2+2xy-8x-8y+1=0$.
 12.11. $x^2+y^2+4xy-8x-4y+1=0$.
 12.12. $x^2+y^2-2xy-2x+2y-7=0$.
 12.13. $2xy+2x+2y-3=0$.
 12.14. $4x^2+4y^2+2xy+12x+12y+1=0$.
 12.15. $3x^2+3y^2+4xy+8x+12y+1=0$.
 12.16. $x^2+y^2-8xy-20x+20y+1=0$.
 12.17. $3x^2+3y^2-2xy-6x+2y+1=0$.
 12.18. $4xy+4x+4y+1=0$.
 12.19. $3x^2+3y^2-4xy+6x-4y-7=0$.
 12.20. $-4xy-4x+4y+6=0$.
 12.21. $5x^2+5y^2-2xy+10x-2y+1=0$.
 12.22. $2x^2+2y^2+4xy+8x+8y+1=0$.
 12.23. $-x^2-y^2+2xy+2x-2y+1=0$.
 12.24. $2x^2+2y^2-4xy-8x+8y+1=0$.
 12.25. $3x^2+3y^2+2xy-12x-4y+1=0$.
 12.26. $-4xy+8x+8y+1=0$.
 12.27. $2x^2+2y^2-2xy+6x-6y-6=0$.
 12.28. $x^2+y^2+4xy+4x+2y-5=0$.
 12.29. $4xy+4x-4y+4=0$.
 12.30. $3x^2+3y^2-4xy+4x+4y+1=0$.
 12.31. $x^2+y^2-4xy+4x-2y+1=0$.

XI. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Теоретические вопросы

1. Основные уравнения. Постановка краевых задач.
2. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности и волнового уравнения с однородными граничными условиями методом Фурье.
3. Сведение смешанной задачи с неоднородными граничными условиями к задаче с однородными граничными условиями.
4. Решение смешанной задачи для неоднородного уравнения.
5. Уравнение Лапласа. Решение краевых задач для уравнения Лапласа в круге и в круговом секторе методом Фурье.

Теоретические упражнения

1. Показать, что функция

$$u(x, y) = \frac{\varphi(x) + \psi(y)}{x-y},$$

где $\varphi(x)$, $\psi(y)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции, является решением уравнения

$$u_{xy} = \frac{u_x - u_y}{x - y}.$$

2. Дан тонкий однородный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью. На его конце $x=0$ поддерживается температура, равная нулю, а на конце $x=l$ температура изменяется по закону $u(l, t) = Ae^{-t}$ (A — постоянная). Начальная температура $u(x, 0) = A \frac{x}{l}$. Найти распределение температуры в стержне при $t > 0$.

3. Решить задачу об остывании тонкого однородного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура $u(x, 0) = \varphi(x)$, один конец теплоизолирован, а другой поддерживается при постоянной температуре.

4. Найти стационарное распределение температуры в кольце, ограниченном двумя концентрическими окружностями, если на каждой из окружностей поддерживается постоянная температура.

5. Найти стационарное распределение температуры в сферическом слое, ограниченном сферами, которые имеют общий центр, если на каждой из сфер поддерживается постоянная температура.

6. Подобрать решение задачи Дирихле

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (0 < x < 1, 0 < y < 1),$$

$$u \Big|_{x=0} = 0, \quad u \Big|_{x=1} = y \quad (0 \leq y \leq 1),$$

$$u \Big|_{y=0} = 0, \quad u \Big|_{y=1} = x \quad (0 \leq x \leq 1).$$

7. Найти гармоническую функцию внутри кругового сектора $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$, удовлетворяющую граничным условиям $u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0$, $u(R, \varphi) = A\varphi$ (A — постоянная).

8. Найти решения волнового уравнения типа плоской волны

$$u = f(t - Ax - By - Cz)$$

и сферической волны

$$u = \frac{f(t - A\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

9. Доказать, что если функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ являются решениями смешанных задач для одного и того же волнового

уравнения с одними и теми же нулевыми граничными условиями и начальными условиями вида соответственно

$$u_1 \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$$

и

$$u_2 \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x),$$

то сумма $u_1(x, t) + u_2(x, t) = u(x, t)$ является решением смешанной задачи для этого волнового уравнения с теми же нулевыми граничными условиями и с начальными условиями вида

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x).$$

Расчетные задания

Задача 1. Решить смешанную задачу.

- 1.1. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x, 0) = \sin 3\pi x$; $u(0, t) = u(8, t) = 0$.
- 1.2. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x, 0) = 2 \sin 2\pi x + 3 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = u(1, t) = 0$.
- 1.3. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x, 0) = 3 \sin 2\pi x$; $u(0, t) = u(7, t) = 0$.
- 1.4. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x, 0) = 4 \sin 3\pi x + 5 \sin 4\pi x$; $u(0, t) = u(2, t) = 0$.
- 1.5. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 5 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = u(6, t) = 0$.
- 1.6. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x, 0) = 6 \sin 2\pi x + 7 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$.
- 1.7. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = 7 \sin 2\pi x$; $u(0, t) = u(5, t) = 0$.
- 1.8. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x, 0) = 8 \sin 3\pi x + 9 \sin 4\pi x$; $u(0, t) = u(4, t) = 0$.
- 1.9. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x, 0) = 9 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = u(4, t) = 0$.
- 1.10. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = 10 \sin 2\pi x + 3 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = u(5, t) = 0$.
- 1.11. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x, 0) = 11 \sin 2\pi x$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$.
- 1.12. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 12 \sin 3\pi x + 5 \sin 4\pi x$; $u(0, t) = u(6, t) = 0$.
- 1.13. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x, 0) = 13 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = u(2, t) = 0$.
- 1.14. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x, 0) = 14 \sin 2\pi x + 7 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = u(7, t) = 0$.
- 1.15. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x, 0) = 15 \sin 2\pi x$; $u(0, t) = u(1, t) = 0$.
- 1.16. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x, 0) = 16 \sin 3\pi x + 9 \sin 4\pi x$; $u(0, t) = u(8, t) = 0$.
- 1.17. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x, 0) = 17 \sin 2\pi x$; $u(0, t) = u(2, t) = 0$.
- 1.18. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x, 0) = 18 \sin 3\pi x + 3 \sin 4\pi x$; $u(0, t) = u(7, t) = 0$.

- 1.19. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x, 0) = 19 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$.
- 1.20. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x, 0) = 20 \sin 2\pi x + 7 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = u(6, t) = 0$.
- 1.21. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 21 \sin 2\pi x$; $u(0, t) = u(4, t) = 0$.
- 1.22. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 22 \sin 3\pi x + 5 \sin 4\pi x$; $u(0, t) = u(5, t) = 0$.
- 1.23. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = 23 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = u(5, t) = 0$.
- 1.24. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x, 0) = 24 \sin 2\pi x + 9 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = u(4, t) = 0$.
- 1.25. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x, 0) = 25 \sin 2\pi x$; $u(0, t) = u(6, t) = 0$.
- 1.26. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = 26 \sin 3\pi x + 3 \sin 4\pi x$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$.
- 1.27. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x, 0) = 27 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = u(7, t) = 0$.
- 1.28. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 28 \sin 2\pi x + 5 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = u(2, t) = 0$.
- 1.29. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x, 0) = 29 \sin 2\pi x$; $u(0, t) = u(8, t) = 0$.
- 1.30. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x, 0) = 30 \sin 3\pi x + 7 \sin 4\pi x$; $u(0, t) = u(1, t) = 0$.
- 1.31. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x, 0) = 31 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = u(9, t) = 0$.

Задача 2. Решить смешанную задачу.

- 2.1. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x, 0) = \cos 3\pi x + 2 \cos 4\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(8, t) = 0$.
- 2.2. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x, 0) = 2 \cos 2\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0$.
- 2.3. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x, 0) = 3 \cos 3\pi x + 4 \cos 4\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(7, t) = 0$.
- 2.4. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x, 0) = 4 \cos 3\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0$.
- 2.5. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x, 0) = 5 \cos 2\pi x + 6 \cos 3\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(6, t) = 0$.
- 2.6. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 6 \cos 2\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(4, t) = 0$.
- 2.7. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 7 \cos 3\pi x + 8 \cos 4\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(5, t) = 0$.
- 2.8. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = 8 \cos 3\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(5, t) = 0$.
- 2.9. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x, 0) = 9 \cos 2\pi x + 10 \cos 3\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(4, t) = 0$.
- 2.10. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x, 0) = 10 \cos 2\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(6, t) = 0$.
- 2.11. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = 11 \cos 3\pi x + 12 \cos 4\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0$.
- 2.12. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x, 0) = 12 \cos 3\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(7, t) = 0$.
- 2.13. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 13 \cos 2\pi x + 14 \cos 3\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0$.
- 2.14. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x, 0) = 14 \cos 2\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(8, t) = 0$.
- 2.15. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x, 0) = 15 \cos 3\pi x + 16 \cos 4\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$.
- 2.16. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x, 0) = 16 \cos 3\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(9, t) = 0$.
- 2.17. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x, 0) = 17 \cos 3\pi x + 18 \cos 4\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0$.
- 2.18. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 18 \cos 3\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(6, t) = 0$.
- 2.19. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x, 0) = 19 \cos 2\pi x + 20 \cos 3\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0$.
- 2.20. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = 20 \cos 2\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(5, t) = 0$.
- 2.21. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x, 0) = 21 \cos 3\pi x + 22 \cos 4\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(4, t) = 0$.
- 2.22. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x, 0) = 22 \cos 3\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(4, t) = 0$.
- 2.23. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = 23 \cos 2\pi x + 24 \cos 3\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(5, t) = 0$.

- 2.24. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x, 0) = 24 \cos 2\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0$.
- 2.25. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 25 \cos 3\pi x + 26 \cos 4\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(6, t) = 0$.
- 2.26. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x, 0) = 26 \cos 3\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0$.
- 2.27. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x, 0) = 27 \cos 2\pi x + 28 \cos 3\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(7, t) = 0$.
- 2.28. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x, 0) = 28 \cos 2\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$.
- 2.29. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x, 0) = 29 \cos 2\pi x + 30 \cos 3\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$.
- 2.30. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x, 0) = 30 \cos 2\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(7, t) = 0$.
- 2.31. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x, 0) = 31 \cos 3\pi x + \cos 4\pi x$; $u_x(0, t) = u_x(6, t) = 0$.

Задача 3. Решить смешанную задачу.

- 3.1. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x, 0) = 19 \sin 5\pi x$; $u(0, t) = 0$, $u_x(0,5; t) = 0$.
- 3.2. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = 8 \cos \pi x$; $u_x(0, t) = 0$, $u(1,5; t) = 0$.
- 3.3. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x, 0) = 17 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = 0$, $u_x(2,5; t) = 0$.
- 3.4. $u_t = u_{xx}$; $u(x, 0) = 6 \cos 9\pi x$; $u_x(0, t) = 0$, $u(3,5; t) = 0$.
- 3.5. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 15 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = 0$, $u_x(4,5; t) = 0$.
- 3.6. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x, 0) = 4 \cos 5\pi x$; $u_x(0, t) = 0$, $u(3,5; t) = 0$.
- 3.7. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x, 0) = 13 \sin 5\pi x$; $u(0, t) = 0$, $u_x(2,5; t) = 0$.
- 3.8. $u_t = u_{xx}$; $u(x, 0) = 2 \cos 7\pi x$; $u_x(0, t) = 0$, $u(1,5; t) = 0$.
- 3.9. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = 19 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = 0$, $u_x(0,5; t) = 0$.
- 3.10. $u_t = u_{xx}$; $u(x, 0) = 8 \cos 5\pi x$; $u_x(0, t) = 0$, $u(1,5; t) = 0$.
- 3.11. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x, 0) = 17 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = 0$, $u_x(2,5; t) = 0$.
- 3.12. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x, 0) = 6 \cos 7\pi x$; $u_x(0, t) = 0$, $u(3,5; t) = 0$.
- 3.13. $u_t = u_{xx}$; $u(x, 0) = 15 \sin 9\pi x$; $u(0, t) = 0$, $u_x(4,5; t) = 0$.
- 3.14. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x, 0) = 4 \cos 5\pi x$; $u_x(0, t) = 0$, $u(3,5; t) = 0$.
- 3.15. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x, 0) = 13 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = 0$, $u_x(2,5; t) = 0$.
- 3.16. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x, 0) = 12 \cos 3\pi x$; $u_x(0, t) = 0$, $u(1,5; t) = 0$.
- 3.17. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x, 0) = 9 \sin 7\pi x$; $u(0, t) = 0$, $u_x(2,5; t) = 0$.
- 3.18. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = 18 \cos \pi x$; $u_x(0, t) = 0$, $u(3,5; t) = 0$.
- 3.19. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x, 0) = 7 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = 0$, $u_x(4,5; t) = 0$.
- 3.20. $u_t = u_{xx}$; $u(x, 0) = 16 \cos 9\pi x$; $u_x(0, t) = 0$, $u(3,5; t) = 0$.
- 3.21. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 5 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = 0$, $u_x(2,5; t) = 0$.
- 3.22. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x, 0) = 14 \cos 5\pi x$; $u_x(0, t) = 0$, $u(1,5; t) = 0$.
- 3.23. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x, 0) = 3 \sin 5\pi x$; $u(0, t) = 0$, $u_x(0,5; t) = 0$.
- 3.24. $u_t = u_{xx}$; $u(x, 0) = 12 \cos 7\pi x$; $u_x(0, t) = 0$, $u(1,5; t) = 0$.
- 3.25. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = 9 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = 0$, $u_x(2,5; t) = 0$.
- 3.26. $u_t = u_{xx}$; $u(x, 0) = 18 \cos 5\pi x$; $u_x(0, t) = 0$, $u(3,5; t) = 0$.
- 3.27. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x, 0) = 7 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = 0$, $u_x(4,5; t) = 0$.
- 3.28. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x, 0) = 16 \cos 7\pi x$; $u_x(0, t) = 0$, $u(3,5; t) = 0$.

3.29. $u_t = u_{xx}$; $u(x, 0) = 5 \sin 9\pi x$; $u(0, t) = 0$, $u_x(2,5; t) = 0$.

3.30. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x, 0) = 14 \cos 5\pi x$; $u_x(0, t) = 0$, $u(1,5; t) = 0$.

3.31. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x, 0) = 3 \sin 3\pi x$; $u(0, t) = 0$, $u_x(0,5; t) = 0$.

Задача 4. Решить смешанную задачу.

4.1. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x, 0) = 5 \sin 2\pi x - 1 + 3x$; $u(0, t) = -1$, $u(2, t) = 5$.

4.2. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x, 0) = 6 \sin 3\pi x + 2 - 3x$; $u(0, t) = 2$, $u(3, t) = -7$.

4.3. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x, 0) = 7 \sin 2\pi x - 3 + 4x$; $u(0, t) = -3$, $u(1, t) = 1$.

4.4. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x, 0) = 8 \sin 4\pi x + 4 - 5x$; $u(0, t) = 4$, $u(2, t) = -6$.

4.5. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = 9 \sin 3\pi x - 5 + 2x$; $u(0, t) = -5$, $u(3, t) = 1$.

4.6. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x, 0) = 8 \sin 3\pi x + 6 - 2x$; $u(0, t) = 6$, $u(4, t) = -2$.

4.7. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x, 0) = 7 \sin 2\pi x - 7 + 3x$; $u(0, t) = -7$, $u(3, t) = 2$.

4.8. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x, 0) = 6 \sin 3\pi x + 8 - 3x$; $u(0, t) = 8$, $u(4, t) = -4$.

4.9. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 5 \sin 4\pi x - 9 + 5x$; $u(0, t) = -9$, $u(2, t) = 1$.

4.10. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x, 0) = 4 \sin 5\pi x + 9 - 4x$; $u(0, t) = 9$, $u(3, t) = -3$.

4.11. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x, 0) = 3 \sin 6\pi x - 8 + 5x$; $u(0, t) = -8$, $u(2, t) = 2$.

4.12. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x, 0) = 2 \sin 4\pi x + 7 - 5x$; $u(0, t) = 7$, $u(1, t) = 2$.

4.13. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = 3 \sin 3\pi x - 6 + 4x$; $u(0, t) = -6$, $u(3, t) = 6$.

4.14. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x, 0) = 4 \sin 4\pi x + 5 - 4x$; $u(0, t) = 5$, $u(2, t) = -3$.

4.15. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x, 0) = 5 \sin 2\pi x - 4 + 3x$; $u(0, t) = -4$, $u(1, t) = -1$.

4.16. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x, 0) = 6 \sin 3\pi x + 3 + 2x$; $u(0, t) = 3$; $u(2, t) = 7$.

4.17. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x, 0) = 7 \sin 4\pi x - 2 + x$; $u(0, t) = -2$, $u(3, t) = 1$.

4.18. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x, 0) = 8 \sin 7\pi x + 1 - x$; $u(0, t) = 1$, $u(2, t) = -1$.

4.19. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 9 \sin 3\pi x - 1 - 2x$; $u(0, t) = -1$, $u(1, t) = -3$.

4.20. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x, 0) = 8 \sin 4\pi x + 3 - 4x$; $u(0, t) = 3$, $u(2, t) = -5$.

4.21. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x, 0) = 7 \sin 3\pi x - 5 + 6x$; $u(0, t) = -5$, $u(1, t) = 1$.

4.22. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x, 0) = 6 \sin 2\pi x + 7 - 5x$; $u(0, t) = 7$, $u(2, t) = -3$.

4.23. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x, 0) = 5 \sin 3\pi x - 9 + 4x$; $u(0, t) = -9$, $u(3, t) = 3$.

4.24. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x, 0) = 4 \sin 3\pi x + 8 - 3x$; $u(0, t) = 8$, $u(2, t) = 2$.

4.25. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x, 0) = 3 \sin 2\pi x - 6 + 2x$; $u(0, t) = -6$, $u(3, t) = 0$.

4.26. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x, 0) = 2 \sin 4\pi x + 4 + x$; $u(0, t) = 4$, $u(4, t) = 8$.

4.27. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = 3 \sin 3\pi x - 2 - x$; $u(0, t) = -2$, $u(3, t) = -5$.

4.28. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x, 0) = 4 \sin 5\pi x + 3 - 2x$; $u(0, t) = 3$, $u(2, t) = -1$.

4.29. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x, 0) = 5 \sin 7\pi x - 1 - 3x$; $u(0, t) = -1$, $u(1, t) = -4$.

4.30. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 6 \sin 4\pi x + 2 - 4x$; $u(0, t) = 2$, $u(2, t) = -6$.

4.31. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = 7 \sin 3\pi x - 4 - 5x$; $u(0, t) = -4$, $u(1, t) = -9$.

Задача 5. Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$$u(x, 0) = 0; u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0.$$

5.1. $u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 5 \sin 2t \sin 3x.$

5.3. $u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 10 \cos 3t \sin 2x.$

5.5. $u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 10 \sin 3t \sin 4x.$

5.7. $u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 2 \cos t \sin 3x.$

5.9. $u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 5 \sin 2t \sin 2x.$

5.11. $u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 10 \cos 3t \sin 4x.$

5.13. $u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 2 \sin t \sin 3x.$

5.15. $u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 10 \cos 3t \sin 3x.$

5.17. $u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 2 \sin t \sin 4x.$

5.19. $u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 5 \cos 2t \sin 3x.$

5.21. $u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 10 \sin 3t \sin 2x.$

5.23. $u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 5 \cos 2t \sin 4x.$

5.25. $u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 10 \sin 3t \sin 3x.$

5.27. $u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 5 \cos 2t \sin 2x.$

5.29. $u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 5 \sin 2t \sin 4x.$

5.31. $u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 2 \cos t \sin 4x.$

5.2. $u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + e^{-2t} \sin 4x.$

5.4. $u_t = 2u_{xx} + 7e^{-18t} \sin 3x.$

5.6. $u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 2e^{-3t} \sin 2x.$

5.8. $u_t = 3u_{xx} + 8e^{-48t} \sin 4x.$

5.10. $u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 3e^{-4t} \sin 3x.$

5.12. $u_t = 5u_{xx} + 6e^{-45t} \sin 3x.$

5.14. $u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 4e^{-3t} \sin 4x.$

5.16. $u_t = 4u_{xx} + 5e^{-64t} \sin 4x.$

5.18. $u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + e^{-2t} \sin 2x.$

5.20. $u_t = 7u_{xx} + 4e^{-63t} \sin 3x.$

5.22. $u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 2e^{-3t} \sin 3x.$

5.24. $u_t = 5u_{xx} + 3e^{-20t} \sin 2x.$

5.26. $u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 3e^{-4t} \sin 4x.$

5.28. $u_t = 6u_{xx} + 2e^{-24t} \sin 2x.$

5.30. $u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 4e^{-5t} \sin 2x.$

Задача 6. Решить смешанную задачу.

6.1. $u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 5 \cos 2t \sin 2x; u(x, 0) = \sin 4x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$

6.2. $u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 5 \sin 2t \sin 3x; u(x, 0) = 2 \sin 9x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$

$$6.3. u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 10 \cos 3t \sin 4x; u(x, 0) = 3 \sin 16x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

$$6.4. u_t = \frac{1}{25} u_{xx} + 10 \sin 3t \sin 5x; u(x, 0) = 4 \sin 10x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

$$6.5. u_t = \frac{1}{36} u_{xx} + 17 \cos 4t \sin 6x; u(x, 0) = 5 \sin 18x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

$$6.6. u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 17 \sin 4t \sin 2x; u(x, 0) = 6 \sin 8x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

$$6.7. u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 26 \cos 5t \sin 3x; u(x, 0) = 7 \sin 6x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

$$6.8. u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 26 \sin 5t \sin 4x; u(x, 0) = 8 \sin 12x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

$$6.9. u_t = \frac{1}{25} u_{xx} + 37 \cos 6t \sin 5x; u(x, 0) = 9 \sin 20x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

$$6.10. u_t = \frac{1}{36} u_{xx} + 37 \sin 6t \sin 6x; u(x, 0) = 10 \sin 12x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

$$6.11. u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 26 \cos 5t \sin 2x; u(x, 0) = 11 \sin 6x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

$$6.12. u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 26 \sin 5t \sin 3x; u(x, 0) = 12 \sin 12x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

$$6.13. u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 17 \cos 4t \sin 4x; u(x, 0) = 13 \sin 8x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

$$6.14. u_t = \frac{1}{25} u_{xx} + 17 \sin 4t \sin 5x; u(x, 0) = 14 \sin 15x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

$$6.15. u_t = \frac{1}{36} u_{xx} + 10 \cos 3t \sin 6x; u(x, 0) = 15 \sin 18x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

$$6.16. u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 10 \sin 3t \sin 2x; u(x, 0) = 16 \sin 4x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

$$6.17. u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 5 \cos 2t \sin 3x; u(x, 0) = 17 \sin 9x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

$$6.18. u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 5 \sin 2t \sin 4x; u(x, 0) = 18 \sin 16x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

$$6.19. u_t = \frac{1}{25} u_{xx} + 10 \cos 3t \sin 5x; u(x, 0) = 19 \sin 10x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

$$6.20. u_t = \frac{1}{36} u_{xx} + 10 \sin 3t \sin 6x; u(x, 0) = 20 \sin 18x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

$$6.21. u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 17 \cos 4t \sin 2x; u(x, 0) = 21 \sin 8x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

- 6.22. $u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 17 \sin 4t \sin 3x; u(x, 0) = 22 \sin 6x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$
- 6.23. $u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 26 \cos 5t \sin 4x; u(x, 0) = 23 \sin 12x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$
- 6.24. $u_t = \frac{1}{25} u_{xx} + 26 \sin 5t \sin 5x; u(x, 0) = 24 \sin 20x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$
- 6.25. $u_t = \frac{1}{36} u_{xx} + 37 \cos 6t \sin 6x; u(x, 0) = 25 \sin 12x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$
- 6.26. $u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 37 \sin 6t \sin 2x; u(x, 0) = 26 \sin 6x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$
- 6.27. $u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 26 \sin 5t \sin 3x; u(x, 0) = 27 \sin 12x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$
- 6.28. $u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 26 \cos 5t \sin 4x; u(x, 0) = 28 \sin 8x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$
- 6.29. $u_t = \frac{1}{25} u_{xx} + 17 \sin 4t \sin 6x; u(x, 0) = 29 \sin 18x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$
- 6.30. $u_t = \frac{1}{36} u_{xx} + 17 \cos 4t \sin 5x; u(x, 0) = 30 \sin 20x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$
- 6.31. $u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 10 \sin 3t \sin 4x; u(x, 0) = 31 \sin 8x; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$

Задача 7. Решить смешанную задачу.

- 7.1. $u_t = \frac{1}{36} u_{xx} + 5 \sin 2t \sin 6x; u(x, 0) = \sin 12x + \pi + 3x; u(0, t) = \pi, u(\pi, t) = 4\pi.$
- 7.2. $u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 5 \cos 2t \sin 2x; u(x, 0) = 2 \sin 6x - \pi + 2x; u(0, t) = -\pi, u(\pi, t) = \pi.$
- 7.3. $u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 10 \sin 3t \sin 3x; u(x, 0) = 3 \sin 12x + 2\pi - x; u(0, t) = 2\pi, u(\pi, t) = \pi.$
- 7.4. $u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 10 \cos 3t \sin 4x; u(x, 0) = 4 \sin 8x - 2\pi + x; u(0, t) = -2\pi, u(\pi, t) = -\pi.$
- 7.5. $u_t = \frac{1}{25} u_{xx} + 17 \sin 4t \sin 5x; u(x, 0) = 5 \sin 15x + 3\pi - 2x; u(0, t) = 3\pi, u(\pi, t) = \pi.$
- 7.6. $u_t = \frac{1}{36} u_{xx} + 17 \cos 4t \sin 6x; u(x, 0) = 6 \sin 24x - 4\pi + 2x; u(0, t) = -4\pi, u(\pi, t) = -2\pi.$
- 7.7. $u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 26 \sin 5t \sin 2x; u(x, 0) = 7 \sin 8x + 4\pi - 3x; u(0, t) = 4\pi, u(\pi, t) = \pi.$
- 7.8. $u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 26 \cos 5t \sin 3x; u(x, 0) = 8 \sin 9x - 3\pi + 3x; u(0, t) = -3\pi, u(\pi, t) = 0.$

- 7.9. $u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 37 \sin 6t \sin 4x$; $u(x, 0) = 9 \sin 8x + 5\pi - 4x$; $u(0, t) = 5\pi$, $u(\pi, t) = \pi$.
- 7.10. $u_t = \frac{1}{25} u_{xx} + 37 \cos 6t \sin 5x$; $u(x, 0) = 10 \sin 10x - 5\pi + 4x$; $u(0, t) = -5\pi$, $u(\pi, t) = -\pi$.
- 7.11. $u_t = \frac{1}{36} u_{xx} + 26 \sin 5t \sin 6x$; $u(x, 0) = 11 \sin 18x + \pi - 2x$; $u(0, t) = \pi$, $u(\pi, t) = -\pi$.
- 7.12. $u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 26 \cos 5t \sin 2x$; $u(x, 0) = 12 \sin 4x + 2\pi - 3x$; $u(0, t) = 2\pi$, $u(\pi, t) = -\pi$.
- 7.13. $u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 17 \sin 4t \sin 3x$; $u(x, 0) = 13 \sin 6x + 3\pi - 4x$; $u(0, t) = 3\pi$, $u(\pi, t) = -\pi$.
- 7.14. $u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 17 \cos 4t \sin 4x$; $u(x, 0) = 14 \sin 8x + 4\pi - 5x$; $u(0, t) = 4\pi$, $u(\pi, t) = -\pi$.
- 7.15. $u_t = \frac{1}{25} u_{xx} + 10 \sin 3t \sin 5x$; $u(x, 0) = 15 \sin 15x + 5\pi - 6x$; $u(0, t) = 5\pi$, $u(\pi, t) = -\pi$.
- 7.16. $u_t = \frac{1}{36} u_{xx} + 10 \cos 3t \sin 3x$; $u(x, 0) = 16 \sin 6x - 5\pi + 6x$; $u(0, t) = -5\pi$, $u(\pi, t) = \pi$.
- 7.17. $u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 5 \sin 2t \sin 2x$; $u(x, 0) = 17 \sin 6x - 4\pi + 5x$; $u(0, t) = -4\pi$, $u(\pi, t) = \pi$.
- 7.18. $u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 5 \cos 2t \sin 3x$; $u(x, 0) = 18 \sin 9x - 3\pi + 4x$; $u(0, t) = -3\pi$, $u(\pi, t) = \pi$.
- 7.19. $u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 10 \sin 3t \sin 4x$; $u(x, 0) = 19 \sin 12x - 2\pi + 3x$; $u(0, t) = -2\pi$, $u(\pi, t) = \pi$.
- 7.20. $u_t = \frac{1}{25} u_{xx} + 10 \cos 3t \sin 5x$; $u(x, 0) = 20 \sin 10x - \pi + 2x$; $u(0, t) = -\pi$, $u(\pi, t) = \pi$.
- 7.21. $u_t = \frac{1}{36} u_{xx} + 17 \sin 4t \sin 6x$; $u(x, 0) = 21 \sin 12x + 5\pi - 3x$; $u(0, t) = 5\pi$, $u(\pi, t) = 2\pi$.
- 7.22. $u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 17 \cos 4t \sin 2x$; $u(x, 0) = 22 \sin 8x - 5\pi + 4x$; $u(0, t) = -5\pi$, $u(\pi, t) = -\pi$.
- 7.23. $u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 26 \sin 5t \sin 3x$; $u(x, 0) = 23 \sin 12x + 4\pi - 4x$; $u(0, t) = 4\pi$, $u(\pi, t) = 0$.
- 7.24. $u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 26 \cos 5t \sin 4x$; $u(x, 0) = 24 \sin 16x - 4\pi + 5x$; $u(0, t) = -4\pi$, $u(\pi, t) = \pi$.
- 7.25. $u_t = \frac{1}{25} u_{xx} + 37 \sin 6t \sin 5x$; $u(x, 0) = 25 \sin 15x + 3\pi - 5x$; $u(0, t) = 3\pi$, $u(\pi, t) = -2\pi$.
- 7.26. $u_t = \frac{1}{36} u_{xx} + 37 \cos 6t \sin 6x$; $u(x, 0) = 26 \sin 18x - 3\pi + 6x$; $u(0, t) = -3\pi$, $u(\pi, t) = 3\pi$.
- 7.27. $u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 26 \sin 5t \sin 2x$; $u(x, 0) = 27 \sin 10x + 2\pi - 6x$; $u(0, t) = 2\pi$, $u(\pi, t) = -4\pi$.

$$7.28. u_t = \frac{1}{9} u_{xx} + 26 \cos 5t \sin 3x; u(x, 0) = 28 \sin 15x - 2\pi + 2x; u(0, t) = -2\pi, u(\pi, t) = 0.$$

$$7.29. u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 17 \sin 4t \sin 4x; u(x, 0) = 29 \sin 20x + \pi - x; u(0, t) = \pi, u(\pi, t) = 0.$$

$$7.30. u_t = \frac{1}{25} u_{xx} + 17 \cos 4t \sin 5x; u(x, 0) = 30 \sin 20x - \pi + x; u(0, t) = -\pi, u(\pi, t) = 0.$$

$$7.31. u_t = \frac{1}{36} u_{xx} + 10 \sin 3t \sin 6x; u(x, 0) = 31 \sin 24x + \pi + x; u(0, t) = \pi, u(\pi, t) = 2\pi.$$

Задача 8. Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (r, φ — полярные координаты, $\alpha < 2\pi$), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ удовлетворяет следующим условиям:

- | | |
|--|---|
| 8.1. $u(1, \varphi) = \sin 6\varphi;$ | $u(r, 0) = u(r, \pi/3) = 0.$ |
| 8.2. $u(1, \varphi) = 2 \cos 2\varphi;$ | $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, \pi) = 0.$ |
| 8.3. $u(1, \varphi) = 3 \cos 15\varphi;$ | $u_\varphi(r, 0) = 0, u(r, \pi/6) = 0.$ |
| 8.4. $u(1, \varphi) = 4 \sin 14\varphi;$ | $u(r, 0) = 0, u_\varphi(r, \pi/4) = 0.$ |
| 8.5. $u(1, \varphi) = 5 \sin 3\varphi;$ | $u(r, 0) = u(r, 2\pi/3) = 0.$ |
| 8.6. $u(1, \varphi) = 6 \cos 6\varphi;$ | $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, 7\pi/6) = 0.$ |
| 8.7. $u(1, \varphi) = 7 \cos 10\varphi;$ | $u_\varphi(r, 0) = 0, u(r, \pi/4) = 0.$ |
| 8.8. $u(1, \varphi) = 8 \sin 7\varphi;$ | $u(r, 0) = 0, u_\varphi(r, \pi/2) = 0.$ |
| 8.9. $u(1, \varphi) = 9 \sin 4\varphi;$ | $u(r, 0) = u(r, 3\pi/4) = 0.$ |
| 8.10. $u(1, \varphi) = 10 \cos 4\varphi;$ | $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, 5\pi/4) = 0.$ |
| 8.11. $u(1, \varphi) = 11 \cos 5\varphi;$ | $u_\varphi(r, 0) = 0, u(r, \pi/2) = 0.$ |
| 8.12. $u(1, \varphi) = 12 \sin 3\varphi;$ | $u(r, 0) = 0, u_\varphi(r, 3\pi/2) = 0.$ |
| 8.13. $u(1, \varphi) = 13 \sin 6\varphi;$ | $u(r, 0) = u(r, 5\pi/6) = 0.$ |
| 8.14. $u(1, \varphi) = 14 \cos 3\varphi;$ | $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, 4\pi/3) = 0.$ |
| 8.15. $u(1, \varphi) = 15 \cos \varphi;$ | $u_\varphi(r, 0) = 0, u(r, 3\pi/2) = 0.$ |
| 8.16. $u(1, \varphi) = 16 \sin 21\varphi;$ | $u(r, 0) = 0, u_\varphi(r, \pi/6) = 0.$ |
| 8.17. $u(1, \varphi) = 17 \sin 9\varphi;$ | $u(r, 0) = u(r, \pi/3) = 0.$ |
| 8.18. $u(1, \varphi) = 18 \cos 4\varphi;$ | $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, \pi) = 0.$ |
| 8.19. $u(1, \varphi) = 19 \cos 21\varphi;$ | $u_\varphi(r, 0) = 0, u(r, \pi/6) = 0.$ |
| 8.20. $u(1, \varphi) = 20 \sin 15\varphi;$ | $u(r, 0) = 0, u_\varphi(r, \pi/6) = 0.$ |
| 8.21. $u(1, \varphi) = 21 \sin 6\varphi;$ | $u(r, 0) = u(r, 2\pi/3) = 0.$ |
| 8.22. $u(1, \varphi) = 22 \cos 12\varphi;$ | $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, \pi/3) = 0.$ |
| 8.23. $u(1, \varphi) = 23 \cos 14\varphi;$ | $u_\varphi(r, 0) = 0, u(r, \pi/4) = 0.$ |
| 8.24. $u(1, \varphi) = 24 \sin 10\varphi;$ | $u(r, 0) = 0, u_\varphi(r, \pi/4) = 0.$ |
| 8.25. $u(1, \varphi) = 25 \sin 3\varphi;$ | $u(r, 0) = u(r, \pi) = 0.$ |
| 8.26. $u(1, \varphi) = 26 \cos 3\varphi;$ | $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, 5\pi/3) = 0.$ |
| 8.27. $u(1, \varphi) = 27 \cos 7\varphi;$ | $u_\varphi(r, 0) = u(r, \pi/2) = 0.$ |
| 8.28. $u(1, \varphi) = 28 \sin 5\varphi;$ | $u(r, 0) = 0, u_\varphi(r, \pi/2) = 0.$ |
| 8.29. $u(1, \varphi) = 29 \sin 3\varphi;$ | $u(r, 0) = u(r, 5\pi/3) = 0.$ |
| 8.30. $u(1, \varphi) = 30 \cos 4\varphi;$ | $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, 7\pi/4) = 0.$ |
| 8.31. $u(1, \varphi) = 31 \cos 3\varphi;$ | $u_\varphi(r, 0) = 0, u(r, 3\pi/2) = 0.$ |

Задача 9. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \leq r < 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ (r, φ — полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ имеет следующие значения:

9.1. $u(1, \varphi) = \cos 9\varphi$.

9.2. $u(1, \varphi) = 2 \sin 8\varphi$.

9.3. $u(1, \varphi) = 3 \cos 7\varphi$.

9.4. $u(1, \varphi) = 4 \sin 6\varphi$.

9.5. $u(1, \varphi) = 5 \cos 5\varphi$.

9.6. $u(1, \varphi) = 6 \sin 4\varphi$.

9.7. $u(1, \varphi) = 7 \cos 3\varphi$.

9.8. $u(1, \varphi) = 8 \sin 2\varphi$.

9.9. $u(1, \varphi) = 9 \cos 2\varphi$.

9.10. $u(1, \varphi) = 10 \sin 3\varphi$.

9.11. $u(1, \varphi) = 11 \cos 4\varphi$.

9.12. $u(1, \varphi) = 12 \sin 5\varphi$.

9.13. $u(1, \varphi) = 13 \cos 6\varphi$.

9.14. $u(1, \varphi) = 14 \sin 7\varphi$.

9.15. $u(1, \varphi) = 15 \cos 8\varphi$.

9.16. $u(1, \varphi) = 16 \sin 9\varphi$.

9.17. $u(1, \varphi) = 17 \cos 9\varphi$.

9.18. $u(1, \varphi) = 18 \sin 8\varphi$.

9.19. $u(1, \varphi) = 19 \cos 7\varphi$.

9.20. $u(1, \varphi) = 20 \sin 6\varphi$.

9.21. $u(1, \varphi) = 21 \cos 5\varphi$.

9.22. $u(1, \varphi) = 22 \sin 4\varphi$.

9.23. $u(1, \varphi) = 23 \cos 3\varphi$.

9.24. $u(1, \varphi) = 24 \sin 2\varphi$.

9.25. $u(1, \varphi) = 25 \cos 2\varphi$.

9.26. $u(1, \varphi) = 26 \sin 3\varphi$.

9.27. $u(1, \varphi) = 27 \cos 4\varphi$.

9.28. $u(1, \varphi) = 28 \sin 5\varphi$.

9.29. $u(1, \varphi) = 29 \cos 6\varphi$.

9.30. $u(1, \varphi) = 30 \sin 7\varphi$.

9.31. $u(1, \varphi) = 31 \cos 8\varphi + 32 \sin 9\varphi$.

Задача 10. Решить смешанную задачу.

10.1. $u_{tt} = 81 u_{xx}$;

$u(x, 0) = \sin \pi x$; $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(5, t) = 0$.

10.2. $u_{tt} = 64 u_{xx}$;

$u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 8\pi \sin \pi x$; $u(0, t) = u(6, t) = 0$.

10.3. $u_{tt} = 49 u_{xx}$;

$u(x, 0) = 3 \sin 2\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(4, t) = 0$.

10.4. $u_{tt} = 36 u_{xx}$;

$u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 12\pi \sin 2\pi x$; $u(0, t) = u(5, t) = 0$.

10.5. $u_{tt} = 25 u_{xx}$;

$u(x, 0) = 5 \sin 3\pi x$; $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$.

10.6. $u_{tt} = 16 u_{xx}$;

$u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 12\pi \sin 3\pi x$; $u(0, t) = u(4, t) = 0$.

10.7. $u_{tt} = 9 u_{xx}$;

$u(x, 0) = 7 \sin 4\pi x$; $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(2, t) = 0$.

10.8. $u_{tt} = 4 u_{xx}$;

$u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 8\pi \sin 4\pi x$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$.

10.9. $u_{tt} = u_{xx}$;

$u(x, 0) = 9 \sin 5\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(1, t) = 0$.

10.10. $u_{tt} = u_{xx}$;

$u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 5\pi \sin 5\pi x$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$.

10.11. $u_{tt} = 4 u_{xx}$;

$u(x, 0) = 11 \sin 6\pi x$; $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(2, t) = 0$.

- 10.12. $u_{tt} = 9u_{xx}$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 18\pi \sin 6\pi x$; $u(0, t) = u(1, t) = 0$.
- 10.13. $u_{tt} = 16u_{xx}$;
 $u(x, 0) = 13 \sin 5\pi x$; $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$.
- 10.14. $u_{tt} = 25u_{xx}$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 25\pi \sin 5\pi x$; $u(0, t) = u(2, t) = 0$.
- 10.15. $u_{tt} = 36u_{xx}$;
 $u(x, 0) = 15 \sin 4\pi x$; $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(4, t) = 0$.
- 10.16. $u_{tt} = 49u_{xx}$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 28\pi \sin 4\pi x$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$.
- 10.17. $u_{tt} = 64u_{xx}$;
 $u(x, 0) = 17 \sin 3\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(5, t) = 0$.
- 10.18. $u_{tt} = 81u_{xx}$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 27\pi \sin 3\pi x$; $u(0, t) = u(4, t) = 0$.
- 10.19. $u_{tt} = u_{xx}$;
 $u(x, 0) = 19 \sin 7\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(2, t) = 0$.
- 10.20. $u_{tt} = 4u_{xx}$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 14\pi \sin 7\pi x$; $u(0, t) = u(1, t) = 0$.
- 10.21. $u_{tt} = 9u_{xx}$;
 $u(x, 0) = 21 \sin 6\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$.
- 10.22. $u_{tt} = 16u_{xx}$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 24\pi \sin 6\pi x$; $u(0, t) = u(2, t) = 0$.
- 10.23. $u_{tt} = 25u_{xx}$;
 $u(x, 0) = 23 \sin 5\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(4, t) = 0$.
- 10.24. $u_{tt} = 36u_{xx}$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 30\pi \sin 5\pi x$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$.
- 10.25. $u_{tt} = 49u_{xx}$;
 $u(x, 0) = 25 \sin 4\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(5, t) = 0$.
- 10.26. $u_{tt} = 64u_{xx}$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 32\pi \sin 4\pi x$; $u(0, t) = u(4, t) = 0$.
- 10.27. $u_{tt} = 81u_{xx}$;
 $u(x, 0) = 27 \sin 3\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(6, t) = 0$.
- 10.28. $u_{tt} = u_{xx}$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 3\pi \sin 3\pi x$; $u(0, t) = u(5, t) = 0$.
- 10.29. $u_{tt} = 4u_{xx}$;
 $u(x, 0) = 29 \sin 2\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(7, t) = 0$.
- 10.30. $u_{tt} = 9u_{xx}$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 6\pi \sin 2\pi x$; $u(0, t) = u(6, t) = 0$.
- 10.31. $u_{tt} = 16u_{xx}$;
 $u(x, 0) = 31 \sin \pi x$, $u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(8, t) = 0$.

Задача 11. Решить смешанную задачу.

- 11.1. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(0, t) = u(5, t) = 0$;
 $u(x, 0) = \sin \pi x$, $u_t(x, 0) = 18\pi \sin 2\pi x$.
- 11.2. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(0, t) = u(6, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 2 \sin \pi x$, $u_t(x, 0) = 8\pi \sin \pi x$.
- 11.3. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(0, t) = u(4, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 3 \sin 2\pi x$, $u_t(x, 0) = 21\pi \sin 3\pi x$.
- 11.4. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(0, t) = u(5, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 4 \sin 2\pi x$, $u_t(x, 0) = 12\pi \sin 2\pi x$.
- 11.5. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 5 \sin 3\pi x$, $u_t(x, 0) = 20\pi \sin 4\pi x$.
- 11.6. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(0, t) = u(4, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 6 \sin 3\pi x$, $u_t(x, 0) = 12\pi \sin 3\pi x$.
- 11.7. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(0, t) = u(2, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 7 \sin 4\pi x$, $u_t(x, 0) = 15\pi \sin 5\pi x$.
- 11.8. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 8 \sin 4\pi x$, $u_t(x, 0) = 8\pi \sin 4\pi x$.
- 11.9. $u_{tt} = u_{xx}$; $u(0, t) = u(1, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 9 \sin 5\pi x$, $u_t(x, 0) = 6\pi \sin 6\pi x$.
- 11.10. $u_{tt} = u_{xx}$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 10 \sin 5\pi x$, $u_t(x, 0) = 5\pi \sin 5\pi x$.
- 11.11. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u(0, t) = u(2, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 11 \sin 6\pi x$, $u_t(x, 0) = 12\pi \sin 6\pi x$.
- 11.12. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(0, t) = u(1, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 12 \sin 6\pi x$, $u_t(x, 0) = 18\pi \sin 6\pi x$.
- 11.13. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 13 \sin 5\pi x$, $u_t(x, 0) = 20\pi \sin 5\pi x$.
- 11.14. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(0, t) = u(2, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 14 \sin 5\pi x$, $u_t(x, 0) = 25\pi \sin 5\pi x$.
- 11.15. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(0, t) = u(4, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 15 \sin 4\pi x$, $u_t(x, 0) = 24\pi \sin 4\pi x$.
- 11.16. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 16 \sin 4\pi x$, $u_t(x, 0) = 28\pi \sin 4\pi x$.
- 11.17. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(0, t) = u(5, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 17 \sin 3\pi x$, $u_t(x, 0) = 24\pi \sin 3\pi x$.
- 11.18. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(0, t) = u(4, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 18 \sin 3\pi x$, $u_t(x, 0) = 27\pi \sin 3\pi x$.
- 11.19. $u_{tt} = u_{xx}$; $u(0, t) = u(2, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 19 \sin 7\pi x$, $u_t(x, 0) = 7\pi \sin 7\pi x$.
- 11.20. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u(0, t) = u(1, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 20 \sin 7\pi x$, $u_t(x, 0) = 14\pi \sin 7\pi x$.

- 11.21. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 21 \sin 6\pi x$, $u_t(x, 0) = 18\pi \sin 6\pi x$.
- 11.22. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(0, t) = u(2, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 22 \sin 6\pi x$, $u_t(x, 0) = 24\pi \sin 6\pi x$.
- 11.23. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(0, t) = u(4, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 23 \sin 5\pi x$, $u_t(x, 0) = 25\pi \sin 5\pi x$.
- 11.24. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(0, t) = u(3, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 24 \sin 5\pi x$, $u_t(x, 0) = 30\pi \sin 5\pi x$.
- 11.25. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(0, t) = u(5, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 25 \sin 4\pi x$, $u_t(x, 0) = 28\pi \sin 4\pi x$.
- 11.26. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(0, t) = u(4, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 26 \sin 4\pi x$, $u_t(x, 0) = 32\pi \sin 4\pi x$.
- 11.27. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(0, t) = u(6, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 27 \sin 3\pi x$, $u_t(x, 0) = 27\pi \sin 3\pi x$.
- 11.28. $u_{tt} = u_{xx}$; $u(0, t) = u(5, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 28 \sin 3\pi x$, $u_t(x, 0) = 3\pi \sin 3\pi x$.
- 11.29. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u(0, t) = u(7, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 29 \sin 2\pi x$, $u_t(x, 0) = 4\pi \sin 2\pi x$.
- 11.30. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(0, t) = u(6, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 30 \sin 2\pi x$, $u_t(x, 0) = 6\pi \sin 2\pi x$.
- 11.31. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(0, t) = u(8, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 31 \sin \pi x$, $u_t(x, 0) = 4\pi \sin \pi x$.

Задача 12. Решить смешанную задачу.

- 12.1. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(6, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 8\pi \cos \pi x$.
- 12.2. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(5, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 2 \cos \pi x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 12.3. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(5, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 12\pi \cos 2\pi x$.
- 12.4. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(4, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 4 \cos 2\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 12.5. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(4, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 12\pi \cos 3\pi x$.
- 12.6. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 6 \cos 3\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 12.7. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 8\pi \cos 4\pi x$.
- 12.8. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 8 \cos 4\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 12.9. $u_{tt} = u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 5\pi \cos 5\pi x$.

- 12.10. $u_{tt} = u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 10 \cos 5\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 12.11. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 18\pi \cos 6\pi x$.
- 12.12. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 12 \cos 6\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 12.13. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 25\pi \cos 5\pi x$.
- 12.14. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 14 \cos 5\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 12.15. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 28\pi \cos 4\pi x$.
- 12.16. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(4, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 16 \cos 4\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 12.17. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(4, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 27\pi \cos 3\pi x$.
- 12.18. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(5, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 18 \cos 3\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 12.19. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 14\pi \cos 7\pi x$.
- 12.20. $u_{tt} = u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 20 \cos 7\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 12.21. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 24\pi \cos 6\pi x$.
- 12.22. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 22 \cos 6\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 12.23. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 30\pi \cos 5\pi x$.
- 12.24. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(4, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 24 \cos 5\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 12.25. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(4, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 32\pi \cos 4\pi x$.
- 12.26. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(5, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 26 \cos 4\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 12.27. $u_{tt} = u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(5, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 3\pi \cos 3\pi x$.
- 12.28. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(6, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 28 \cos 3\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 12.29. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u_x(0, t) = u_x(6, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 6\pi \cos 2\pi x$.

$$12.30. u_{tt} = 4u_{xx}; u_x(0, t) = u_x(7, t) = 0;$$

$$u(x, 0) = 30 \cos 2\pi x, u_t(x, 0) = 0.$$

$$12.31. u_{tt} = 16u_{xx}; u_x(0, t) = u_x(7, t) = 0;$$

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 4\pi \cos \pi x.$$

Задача 13. Решить смешанную задачу.

$$13.1. u_{tt} = 4u_{xx}; u(x, 0) = \sin 9\pi x, u_t(x, 0) = 0;$$

$$u(0, t) = 0, u_x(0,5; t) = 0.$$

$$13.2. u_{tt} = 4u_{xx}; u(x, 0) = 2 \cos 7\pi x, u_t(x, 0) = 0;$$

$$u_x(0, t) = 0, u(0,5; t) = 0.$$

$$13.3. u_{tt} = 4u_{xx}; u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 18\pi \sin 9\pi x;$$

$$u(0, t) = 0, u_x(1,5; t) = 0.$$

$$13.4. u_{tt} = 4u_{xx}; u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 14\pi \cos 7\pi x;$$

$$u_x(0, t) = 0, u(1,5; t) = 0.$$

$$13.5. u_{tt} = 9u_{xx}; u(x, 0) = 5 \sin 5\pi x, u_t(x, 0) = 0;$$

$$u(0, t) = 0, u_x(2,5; t) = 0.$$

$$13.6. u_{tt} = 9u_{xx}; u(x, 0) = 6 \cos 3\pi x, u_t(x, 0) = 0;$$

$$u_x(0, t) = 0, u(2,5; t) = 0.$$

$$13.7. u_{tt} = 9u_{xx}; u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 15\pi \sin 5\pi x;$$

$$u(0, t) = 0, u_x(3,5; t) = 0.$$

$$13.8. u_{tt} = 9u_{xx}; u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 9\pi \cos 3\pi x;$$

$$u_x(0, t) = 0, u(3,5; t) = 0.$$

$$13.9. u_{tt} = 16u_{xx}; u(x, 0) = 9 \sin 9\pi x, u_t(x, 0) = 0;$$

$$u(0, t) = 0, u_x(4,5; t) = 0.$$

$$13.10. u_{tt} = 16u_{xx}; u(x, 0) = 10 \cos 7\pi x, u_t(x, 0) = 0;$$

$$u_x(0, t) = 0, u(4,5; t) = 0.$$

$$13.11. u_{tt} = 16u_{xx}; u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 36\pi \sin 9\pi x;$$

$$u(0, t) = 0, u_x(0,5; t) = 0.$$

$$13.12. u_{tt} = 16u_{xx}; u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 28\pi \cos 7\pi x;$$

$$u_x(0, t) = 0, u(0,5; t) = 0.$$

$$13.13. u_{tt} = 25u_{xx}; u(x, 0) = 13 \sin 5\pi x, u_t(x, 0) = 0;$$

$$u(0, t) = 0, u_x(1,5; t) = 0.$$

$$13.14. u_{tt} = 25u_{xx}; u(x, 0) = 14 \cos 3\pi x, u_t(x, 0) = 0;$$

$$u_x(0, t) = 0, u(1,5; t) = 0.$$

$$13.15. u_{tt} = 25u_{xx}; u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 25\pi \sin 5\pi x;$$

$$u(0, t) = 0, u_x(2,5; t) = 0.$$

$$13.16. u_{tt} = 25u_{xx}; u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 15\pi \sin 3\pi x;$$

$$u_x(0, t) = 0, u(2,5; t) = 0.$$

$$13.17. u_{tt} = 36u_{xx}; u(x, 0) = 17 \sin 9\pi x, u_t(x, 0) = 0;$$

$$u(0, t) = 0, u_x(3,5; t) = 0.$$

- 13.18. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(x, 0) = 18 \cos 7\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$;
 $u_x(0, t) = 0$, $u(3,5; t) = 0$.
- 13.19. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 54\pi \sin 9\pi x$;
 $u(0, t) = 0$, $u_x(4,5; t) = 0$.
- 13.20. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 42\pi \cos 7\pi x$;
 $u_x(0, t) = 0$, $u(4,5; t) = 0$.
- 13.21. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(x, 0) = 21 \sin 9\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$;
 $u(0, t) = 0$, $u_x(1,5; t) = 0$.
- 13.22. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(x, 0) = 22 \cos 7\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$;
 $u_x(0, t) = 0$, $u(1,5; t) = 0$.
- 13.23. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 63\pi \sin 9\pi x$;
 $u(0, t) = 0$, $u_x(2,5; t) = 0$.
- 13.24. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 49\pi \cos 7\pi x$;
 $u_x(0, t) = 0$, $u(2,5; t) = 0$.
- 13.25. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(x, 0) = 25 \sin 5\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$;
 $u(0, t) = 0$, $u_x(3,5; t) = 0$.
- 13.26. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(x, 0) = 26 \cos 3\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$;
 $u_x(0, t) = 0$, $u(3,5; t) = 0$.
- 13.27. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 40\pi \sin 5\pi x$;
 $u(0, t) = 0$, $u_x(4,5; t) = 0$.
- 13.28. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 24\pi \cos 3\pi x$;
 $u_x(0, t) = 0$, $u(4,5; t) = 0$.
- 13.29. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(x, 0) = 29 \sin 7\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$;
 $u(0, t) = 0$, $u_x(0,5; t) = 0$.
- 13.30. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(x, 0) = 30 \cos 5\pi x$, $u_t(x, 0) = 0$;
 $u_x(0, t) = 0$, $u(1,5; t) = 0$.
- 13.31. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 9\pi \sin \pi x$;
 $u(0, t) = 0$, $u_x(2,5; t) = 0$.

Задача 14. Решить смешанную задачу.

- 14.1. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(0, t) = -8$, $u(2, t) = 2$;
 $u(x, 0) = \sin 6\pi x - 8 + 5x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 14.2. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(0, t) = 7$, $u(1, t) = 2$;
 $u(x, 0) = 7 - 5x$, $u_t(x, 0) = 12\pi \sin 4\pi x$.
- 14.3. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(0, t) = -6$, $u(3, t) = 6$;
 $u(x, 0) = 3 \sin 3\pi x - 6 + 4x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 14.4. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(0, t) = 5t$, $u(2, t) = -3t$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 12\pi \sin 4\pi x + 5 - 4x$.
- 14.5. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(0, t) = -4$, $u(1, t) = -1$;
 $u(x, 0) = 5 \sin 2\pi x - 4 + 3x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 14.6. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(0, t) = 3$, $u(2, t) = 7$;
 $u(x, 0) = 3 + 2x$, $u_t(x, 0) = 12\pi \sin 3\pi x$.

- 14.7. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(0, t) = -2$, $u(3, t) = 1$;
 $u(x, 0) = 7 \sin 4\pi x - 2 + x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 14.8. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(0, t) = t$, $u(2, t) = -t$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 28\pi \sin 7\pi x + 1 - x$.
- 14.9. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(0, t) = -1$, $u(1, t) = -3$;
 $u(x, 0) = 9 \sin 3\pi x - 1 - 2x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 14.10. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(0, t) = 3$, $u(2, t) = -5$;
 $u(x, 0) = 3 - 4x$, $u_t(x, 0) = 20\pi \sin 4\pi x$.
- 14.11. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(0, t) = -5$, $u(1, t) = 1$;
 $u(x, 0) = 11 \sin 3\pi x - 5 + 6x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 14.12. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(0, t) = 7t$, $u(2, t) = -3t$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 10\pi \sin 2\pi x + 7 - 5x$.
- 14.13. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(0, t) = -9$, $u(3, t) = 3$;
 $u(x, 0) = 13 \sin 3\pi x - 9 + 4x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 14.14. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(0, t) = 8$, $u(2, t) = 2$;
 $u(x, 0) = 8 - 3x$, $u_t(x, 0) = 18\pi \sin 3\pi x$.
- 14.15. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(0, t) = -6$, $u(3, t) = 0$;
 $u(x, 0) = 15 \sin 2\pi x - 6 + 2x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 14.16. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(0, t) = 4t$, $u(4, t) = 8t$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 24\pi \sin 4\pi x + 4 + x$.
- 14.17. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(0, t) = -2$, $u(3, t) = -5$;
 $u(x, 0) = 17 \sin 3\pi x - 2 - x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 14.18. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(0, t) = 3$, $u(2, t) = -1$;
 $u(x, 0) = 3 - 2x$, $u_t(x, 0) = 35\pi \sin 5\pi x$.
- 14.19. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(0, t) = -1$, $u(1, t) = -4$;
 $u(x, 0) = 19 \sin 7\pi x - 1 - 3x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 14.20. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(0, t) = 2t$, $u(2, t) = -6t$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 28\pi \sin 4\pi x + 2 - 4x$.
- 14.21. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(0, t) = -4$, $u(1, t) = -9$;
 $u(x, 0) = 21 \sin 3\pi x - 4 - 5x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 14.22. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(0, t) = 2$, $u(3, t) = -7$;
 $u(x, 0) = 2 - 3x$, $u_t(x, 0) = 24\pi \sin 3\pi x$.
- 14.23. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(0, t) = -3$, $u(1, t) = 1$;
 $u(x, 0) = 23 \sin 2\pi x - 3 + 4x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 14.24. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(0, t) = 4t$, $u(2, t) = -6t$;
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 32\pi \sin 4\pi x + 4 - 5x$.
- 14.25. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(0, t) = -5$, $u(3, t) = 1$;
 $u(x, 0) = 25 \sin 3\pi x - 5 + 2x$, $u_t(x, 0) = 0$.
- 14.26. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(0, t) = 6$, $u(4, t) = -2$;
 $u(x, 0) = 6 - 2x$, $u_t(x, 0) = 27\pi \sin 3\pi x$.
- 14.27. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(0, t) = -7$, $u(3, t) = 2$;
 $u(x, 0) = 27 \sin 2\pi x - 7 + 3x$, $u_t(x, 0) = 0$.

$$14.28. u_{tt} = 81u_{xx}; u(0, t) = 8t, u(4, t) = -4t;$$

$$u(x, 0), u_t(x, 0) = 27\pi \sin 3\pi x + 8 - 3x.$$

$$14.29. u_{tt} = 4u_{xx}; u(0, t) = -9, u(2, t) = 1;$$

$$u(x, 0) = 29 \sin 4\pi x - 9 + 5x, u_t(x, 0) = 0.$$

$$14.30. u_{tt} = 4u_{xx}; u(0, t) = 9, u(3, t) = -3;$$

$$u(x, 0) = 9 - 4x, u_t(x, 0) = 10\pi \sin 5\pi x.$$

$$14.31. u_{tt} = 4u_{xx}; u(0, t) = -1, u(2, t) = 5;$$

$$u(x, 0) = 31 \sin 2\pi x - 1 + 3x, u_t(x, 0) = 0.$$

Задача 15. Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0; u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

$$15.1. u_{tt} = u_{xx} + 65e^{-8t} \sin x.$$

$$15.2. u_{tt} = \frac{1}{4} u_{xx} + 3 \sin 2t \sin 2x.$$

$$15.3. u_{tt} = u_{xx} + 16 \cos 8t \sin 8x.$$

$$15.4. u_{tt} = \frac{1}{9} u_{xx} + 8 \sin 3t \sin 3x.$$

$$15.5. u_{tt} = \frac{1}{16} u_{xx} + 50e^{-7t} \sin 4x.$$

$$15.6. u_{tt} = \frac{1}{25} u_{xx} + 3 \cos 2t \sin 5x.$$

$$15.7. u_{tt} = 4u_{xx} + 28 \cos 14t \sin 7x.$$

$$15.8. u_{tt} = \frac{1}{36} u_{xx} + 8 \cos 3t \sin 6x.$$

$$15.9. u_{tt} = \frac{1}{49} u_{xx} + 37e^{-6t} \sin 7x.$$

$$15.10. u_{tt} = \frac{1}{64} u_{xx} + 15 \sin 4t \sin 8x.$$

$$15.11. u_{tt} = 9u_{xx} + 36 \cos 18t \sin 6x.$$

$$15.12. u_{tt} = \frac{1}{81} u_{xx} + 15 \cos 4t \sin 9x.$$

$$15.13. u_{tt} = u_{xx} + 26e^{-5t} \sin x.$$

$$15.14. u_{tt} = \frac{1}{4} u_{xx} + 24 \sin 5t \sin 2x.$$

$$15.15. u_{tt} = 16u_{xx} + 40 \cos 20t \sin 5x.$$

$$15.16. u_{tt} = \frac{1}{9} u_{xx} + 24 \cos 5t \sin 3x.$$

$$15.17. u_{tt} = \frac{1}{16} u_{xx} + 17e^{-4t} \sin 4x.$$

$$15.18. u_{tt} = \frac{1}{25} u_{xx} + 35 \sin 6t \sin 5x.$$

$$15.19. u_{tt} = 25u_{xx} + 40 \cos 20t \sin 4x.$$

$$15.20. u_{tt} = \frac{1}{36} u_{xx} + 35 \cos 6t \sin 5x.$$

$$15.21. u_{tt} = \frac{1}{49} u_{xx} + 10e^{-2t} \sin 7x.$$

$$15.22. u_{tt} = \frac{1}{64} u_{xx} + 48 \sin 7t \sin 8x.$$

$$15.23. u_{tt} = 36u_{xx} + 36 \cos 18t \sin 3x.$$

$$15.24. u_{tt} = \frac{1}{81} u_{xx} + 48 \cos 7t \sin 9x.$$

$$15.25. u_{tt} = u_{xx} + 5e^{-2t} \sin x.$$

$$15.26. u_{tt} = \frac{1}{4} u_{xx} + 63 \sin 8t \sin 2x.$$

$$15.27. u_{tt} = 49u_{xx} + 28 \cos 14t \sin 2x.$$

$$15.28. u_{tt} = \frac{1}{9} u_{xx} + 63 \cos 8t \sin 3x.$$

$$15.29. u_{tt} = \frac{1}{16} u_{xx} + 2e^{-t} \sin 4x.$$

$$15.30. u_{tt} = \frac{1}{25} u_{xx} + 80 \sin 9t \sin 5x.$$

$$15.31. u_{tt} = 64u_{xx} + 16 \cos 8t \sin x.$$

Справочный материал

1. Задача Штурма — Лиувилля:

дифференциальное уравнение $X'' + \lambda^2 X = 0$;

граничные условия $X(0) = X(l) = 0$.

Разыскиваются значения параметра $\lambda = \lambda_n$ (собственные числа), при которых существуют ненулевые решения дифференциального уравнения, удовлетворяющие граничным условиям, а также разыскиваются и сами ненулевые решения (собственные функции).

Рассматриваются и задачи Штурма — Лиувилля с граничными условиями вида

$$X'(0) = X'(l) = 0, X(0) = X(l) = 0, X'(0) = X(l) = 0.$$

2. Смешанная задача для волнового уравнения на отрезке $[0, l]$ с однородными граничными условиями:

$$\text{дифференциальное уравнение } u_{tt} = a^2 u_{xx};$$

$$\text{начальные условия } u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x);$$

$$\text{граничные условия } u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Рассматриваются также однородные граничные условия следующих видов:

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, u(0, t) = u_x(l, t) = 0, u_x(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x),$$

где $X_n(x)$ — собственные функции задачи Штурма — Лиувилля с условиями, соответствующими рассматриваемым граничным условиям;

$$T_n(t) = A_n \cos a \lambda_n t + B_n \sin a \lambda_n t;$$

λ_n — собственные числа задачи Штурма — Лиувилля;
 A_n, B_n — коэффициенты, определяемые по начальным условиям.

3. Смешанная задача для неоднородного волнового уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t).$$

Ее решение можно получить в виде разложения по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x),$$

где $u_n(t)$ — решения задач Коши

$$u_n'' + a^2 \lambda_n^2 u_n = f_n(t), u_n(0) = \varphi_n, u_n'(0) = \psi_n;$$

$f_n(t), \varphi_n, \psi_n$ — коэффициенты разложений

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x), \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x), \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x).$$

4. Смешанная задача для уравнения теплопроводности на отрезке $[0, l]$ с однородными граничными условиями:

$$\text{дифференциальное уравнение } u_t = a^2 u_{xx};$$

$$\text{начальное условие } u(x, 0) = \varphi(x);$$

$$\text{граничные условия } u(0, t) = u(l, t) = 0$$

или одно из

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, u(0, t) = u_x(l, t) = 0, u_x(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x),$$

где $X_n(x)$ — собственные функции задачи Штурма — Лиувилля с условиями, соответствующими рассматриваемым граничным условиям;

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t};$$

λ_n — собственные числа задачи Штурма — Лиувилля; C_n — коэффициенты, определяемые по начальным условиям.

5. Смешанная задача для неоднородного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t).$$

Ее решение можно получить в виде разложения по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x),$$

где $u_n(t)$ — решения задач Коши

$$u'_n + a^2 \lambda_n^2 u_n = f_n(t), \quad u_n(0) = \varphi_n;$$

$f_n(t)$, φ_n — коэффициенты разложений

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x), \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x).$$

6. Смешанные задачи для волнового уравнения и уравнения теплопроводности с неоднородными граничными условиями

$$u(0, t) = A(t), \quad u(l, t) = B(t).$$

Каждая из этих задач сводится к задаче с однородными граничными условиями для функции

$$v(x, t) = u(x, t) - w(x, t),$$

где

$$w(x, t) = A(t) + \frac{B(t) - A(t)}{l} x.$$

Решение получается в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t).$$

10. Основные формулы векторного анализа

Если $u = u(x, y, z)$, $\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, то

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k},$$

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix};$$

$$\text{div grad } u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\text{rot grad } u = 0, \text{ div rot } \mathbf{a} = 0;$$

формула Остроградского

$$\iint_S \mathbf{a} \mathbf{n}^\circ dS = \iiint_V \text{div } \mathbf{a} dV,$$

S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V , \mathbf{n}° — орт внешней нормали к поверхности S ;

формула Стокса

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{a} d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{a} \mathbf{n}^\circ dS,$$

Γ — замкнутая линия, являющаяся краем поверхности S , \mathbf{n}° — орт нормали к поверхности S (согласуется с направлением интегрирования по Γ).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
I. ПРЕДЕЛЫ	5
II. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ	25
III. ГРАФИКИ	46
IV. ИНТЕГРАЛЫ	53
V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	78
VI. РЯДЫ	91
VII. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	105
VIII. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ	131
IX. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ	147
X. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА	161
XI. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ	178
XII. ПРИЛОЖЕНИЯ	202