ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
им. Р.Е. Алексеева

**Р.В. Бударагин, И.А. Вдовиченко., Н.И. Кузикова,
А.В. Назаров, Г.Д. Павлова,
Т.О. Прончатова-Рубцова, Г.И. Шишков**

ФИЗИКА

КОМПЛЕКС УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Часть 1

Рекомендовано Ученым советом
Нижегородского государственного технического
университета им. Р.Е. Алексеева в качестве учебно-
методического пособия для студентов всех технических
специальностей заочной и дистанционной
форм обучения

Нижний Новгород, 2008

УДК 53.076

Бударагин Р.В., Вдовиченко И.А., Кузикова Н.И., Назаров А.В., Павлова Г.Д., Прончатова-Рубцова Т.О., Шишков Г.И. Физика. Ч. 1: комплекс учебно-методических материалов / Р.В. Бударагин, И.А. Вдовиченко., Н.И. Кузикова, А.В. Назаров, Г.Д. Павлова, Т.О. Прончатова-Рубцова, Г.И. Шишков; Нижегород. гос. техн. ун.-т им. Р.Е. Алексеева. Н. Новгород, 2008.- 71 с.

Изложен опорный конспект лекций, соответствующий рабочей программе по первой части курса физики, приведены описания лабораторных работ и примеры решения типовых задач. Рекомендуется для студентов всех технических специальностей заочной и дистанционной форм обучения.

Рецензент А.А. Радионов, заведующий кафедрой «Общая и прикладная физика», профессор

Научный редактор Г.И. Шишков

Редактор Э.Б. Абросимова

Подп. к печ. 05.05.08. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Печ.л. 4,5. Уч.-изд. л. 3,5. Тираж 300 экз. Заказ

Нижегородский государственный технический университет
им. Р.Е. Алексеева.
Типография НГТУ. 603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий комплекс учебно–методических материалов содержит краткий теоретический материал по кинематике и динамике поступательного и вращательного движений, законам сохранения. Рассмотрены основные положения молекулярно – кинетической теории идеальных газов. В большинстве разделов теоретического материала приведены примеры решения задач.

По основным разделам первой части курса физики приведены описания трех лабораторных работ: «Механический удар», «Определение момента инерции твердых тел методом трифилярного подвеса», «Изучение основного закона динамики вращательного движения твердого тела». Студентам заочной формы обучения, как правило, предлагаются к выполнению две из них. В каждой работе подробно рассматриваются физические процессы и методика выполнения эксперимента, в Приложениях к работам приведены подробные решения типовых задач.

За основу указанных лабораторных работ взяты работы, ранее составленные сотрудниками кафедры «Физика и техника оптической связи» НГТУ им. Р.Е. Алексеева.

ГЛАВА 1
Кинематика поступательного движения

Кинематика – это раздел физики, который изучает движение тел, не вскрывая причин, вызывающих это движение.

1.1. Способы описания движения тел

Существуют различные способы описания движения тел: координатный и векторный. При координатном способе задания положения тела в декартовой (прямоугольной) системе координат движение материальной точки определяется тремя функциями, выражающими зависимость координат от времени (рис.1.1):

$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$

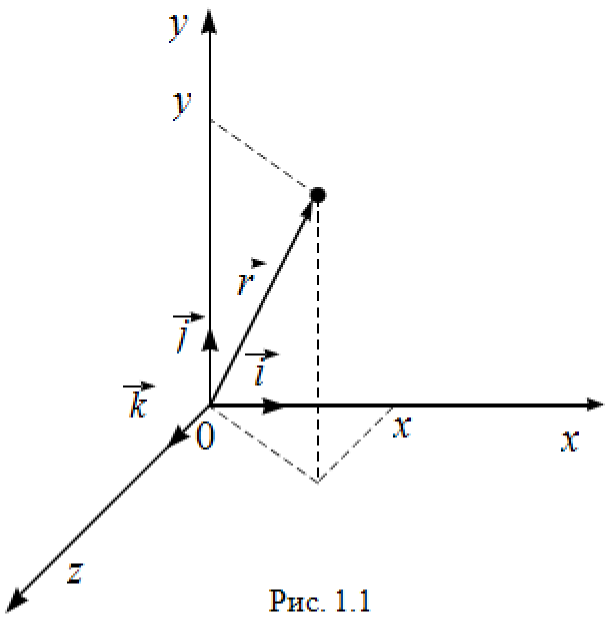

Рис. 1.1

Зависимость координат от времени называется законом движения (или уравнением движения).

При векторном способе положение точки в пространстве определяется в любой момент времени радиусом–вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$, проведенным из начала координат в точку наблюдения (рис. 1.1):

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные орты координатных осей; x, y, z – проекции вектора $\vec{r}$ на соответствующие оси системы координат $x=r_x$, $y=r_y$, $z=r_z$. Модуль радиус-вектора определяется как $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

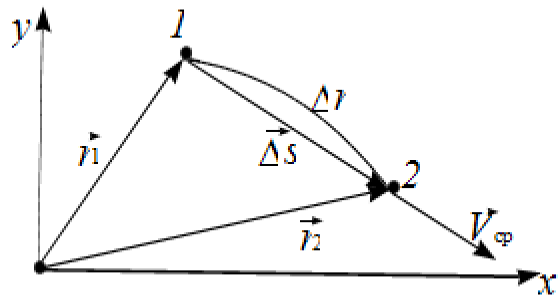

Рис. 1.2

Кривая 1-2 (рис.1.2), вдоль которой движется материальная точка, называется *траекторией* движения этой точки. Длина участка траектории, пройденного точкой при ее движении, называется *пройденным путем* ΔS и является скалярной функцией времени $\Delta S = \Delta S(t)$.

Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени, называется *перемещением*. При прямолинейном движении в одном направлении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и тогда $|\Delta\vec{r}| = \Delta S$.

1.2. Скорость. Ускорение. Виды ускорений

Для характеристики движения материальной точки вводится векторная величина $\vec{V}$ – скорость, которая определяет как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.

Вектором средней скорости $\langle\vec{V}\rangle$ называется отношение приращения радиус-вектора $\Delta\vec{r}$ точки к промежутку времени $\Delta t = t_2 - t_1$, за который это приращение произошло:

$$\langle\vec{V}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

При этом направление вектора средней скорости $\langle\vec{V}\rangle$ совпадает с направлением вектора $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.2).

При неограниченном уменьшении интервал времени Δt стремится к бесконечно малой величине dt, перемещение $\Delta\vec{r}$ – к $d\vec{r}$, а средняя скорость $\langle\vec{V}\rangle$ – к своему предельному значению, которое называется мгновенной скоростью $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Мгновенная скорость $\vec{V}$, таким образом, есть векторная величина, равная первой производной радиуса-вектора движущейся точки по времени. Вектор $\vec{V}$ направлен по касательной к траектории в сторону движения.

По мере уменьшения Δt путь ΔS все больше будет приближаться к $|\Delta\vec{r}|$, поэтому модуль мгновенной скорости

$$V = |\vec{V}| = \frac{dS}{dt}.$$

Тогда $dS = Vdt$ и путь, пройденный точкой за интервал времени Δt=t_1-t_2, равен $S = \int\limits_1^2 Vdt$. Графически пройденный путь можно найти как площадь под кривой АВ на графике зависимости модуля скорости от времени (рис. 1.3).

В прямоугольной системе координат

$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$, где $V_x = \dfrac{dx}{dt}, V_y = \dfrac{dy}{dt}, V_z = \dfrac{dz}{dt}$.

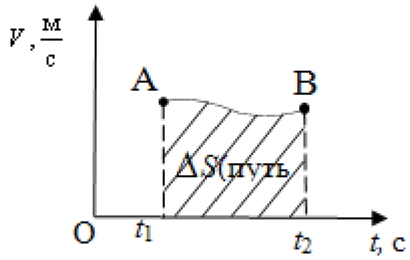

Рис. 1.3

Модуль скорости вычисляется как

$|\vec{V}| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$.

Средней путевой скоростью называют отношение всего пройденного пути S к промежутку времени Δt, за который этот путь был пройден:

$$V_{\text{ср}} = \frac{S}{\Delta t}.$$

Единицей измерения скорости в системе СИ является метр в секунду $\left(\dfrac{\text{м}}{\text{с}}\right)$.

Ускорение − физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости и по модулю и по направлению.

Средним ускорением $\langle\vec{a}\rangle$ называется векторная величина, равная отношению изменения вектора скорости $\Delta\vec{V}$ к интервалу времени Δt, за который это изменение произошло:

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}.$$

Мгновенное ускорение есть векторная величина, равная первой производной вектора скорости по времени

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

Вектор ускорения $\vec{a}$ при криволинейном движении тела обычно представляют в виде суммы двух составляющих (рис. 1.4):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где $\vec{a}_\tau$ − тангенциальное ускорение, направленное по касательной к траектории движения; $\vec{a}_n$ − нормальное ускорение, направленное по нормали к траектории (перпендикулярно касательной) к центру её кривизны.

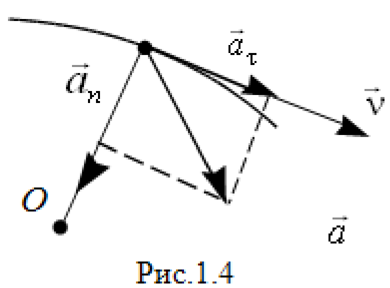

Рис.1.4

Из рисунка видно, что модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения только модуля скорости, следовательно,

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}.$$

Нормальное ускорение $\vec{a}_n$ определяет быстроту изменения направления скорости и численно определяется как

$$a_n = \frac{V^2}{R},$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке.

Единицей измерения ускорения в системе СИ является метр на секунду в квадрате $\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$.

1.3. Виды движений

В зависимости от значений тангенциальной и нормальной составляющих ускорения движение можно классифицировать следующим образом:

1) $\vec{a}_\tau = 0, \vec{a}_n = 0$ – равномерное прямолинейное движение;
2) $\vec{a}_\tau = \text{const}, \vec{a}_n = 0$ – равнопеременное прямолинейное движение;
3) $\vec{a}_\tau = 0, \vec{a}_n = \text{const}$ – равномерное движение по окружности;
4) $\vec{a}_\tau = 0, \vec{a}_n \neq 0$ – равномерное криволинейное движение.

Равномерное прямолинейное движение.

Движение, при котором материальная точка за любые равные промежутки времени совершает равные перемещения, называется равномерным прямолинейным движением.

В этом случае величина и направление мгновенной скорости постоянны, а радиус-вектор и пройденный путь линейно зависят от времени:

$$\vec{V} = \text{const},$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t,$$

$$S = |\vec{r} - \vec{r}_0| = V\,t.$$

Равнопеременное прямолинейное движение.

Движение, при котором скорость материальн ой точки за любые равные промежутки времени изменяется на одинаковую величину, называется равнопеременным прямолинейным движением. В этом случае

$$\vec{a} = \text{const},$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a}t,$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2},$$

где $\vec{V}_0 = \vec{V}(t = 0)$.

Если направления – начальная скорость точки векторов скорости $\vec{V}$ и ускорения $\vec{a}$ - совпадают $(\vec{V} \uparrow\uparrow \vec{a})$, то движение называют равноускоренным. В противном случае $(\vec{V} \uparrow\downarrow \vec{a})$ – равнозамедленным.

ГЛАВА 2
Кинематика вращательного движения

Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси (рис. 2.1). Все точки тела при вращении описывают окружности разных радиусов R, центры которых лежат на оси вращения. За время одного полного оборота T любая точка проходит путь равный $2\pi R$. Следовательно, различные точки тела за время одного оборота проходят разные пути и двигаются с разными линейными скоростями:

$$V = \frac{2\pi R}{T}.$$

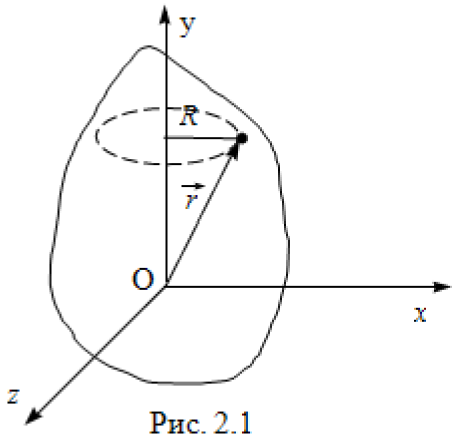

Рис. 2.1

Введем характеристики, описывающие вращательное движение твердого тела как единого целого: вектор углового элементарного перемещения $\vec{\varphi}$, угловую скорость $\vec{\omega}$, угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$. Пусть некоторая точка движется по окружности радиуса R (рис. 2.2). Ее положение через промежуток времени Δt зададим углом $\Delta\varphi$. Элементарные (бесконечно малые) углы поворота рассматривают как векторы. Модуль вектора $d\vec{\varphi}$ равен углу поворота, а его направление совпадает с направлением поступательного движения острия винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности, т.е. подчиняется правилу правого винта.

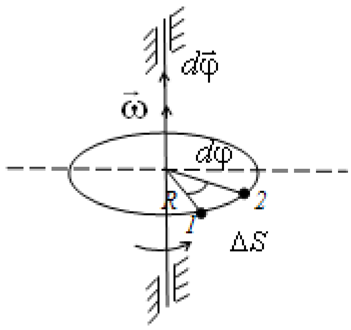

Рис. 2.2

2.1. Угловая скорость

Угловой скоростью $\vec{\omega}$ называется векторная величина, численно равная первой производной угла поворота по времени, совпадающая с направлением вектора $d\vec{\varphi}$:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Единицей измерения угловой скорости в системе СИ является радиан в секунду $\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right)$. Модуль угловой скорости $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

Вращение с постоянной угловой скоростью $\left(\vec{\omega} = \text{const}\right)$ называется равномерным, тогда

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

где $\Delta\varphi$ − угол поворота за время Δt.

Равномерное вращение можно характеризовать периодом обращения T, под которым понимают время, за которое тело делает один оборот, т.е. поворачивается на угол 2π. В этом случае

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

отсюда

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Число оборотов в единицу времени ν равно

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Следовательно,

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Угол поворота

$$\Delta\varphi = 2\pi N,$$

где N – число оборотов твердого тела.

2.2. Угловое ускорение

Вектор $\vec{\omega}$ может изменяться с течением времени как за счет изменения величины скорости вращения тела вокруг оси, так и за счет изменения направления вращения. Угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$ называется векторная величина, равная первой производной вектора угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

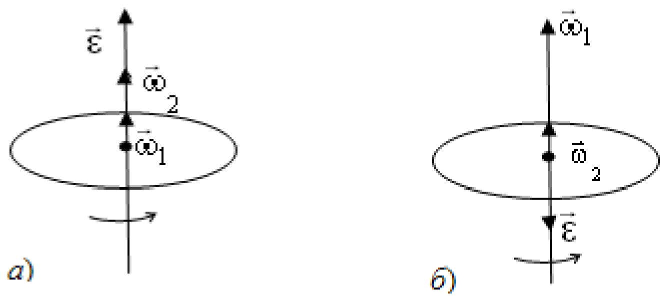

Рис. 2.3

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости $\Delta\vec{\omega}$. При ускоренном движении $\Delta\vec{\omega} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$ и вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен с вектором $\vec{\omega}$ ($\vec{\omega} \uparrow\uparrow \vec{\varepsilon}$), при замедленном движении $\Delta\vec{\omega} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$ и вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен противоположно $\vec{\omega}$ ($\vec{\omega} \uparrow\downarrow \vec{\varepsilon}$) (рис.2.3). Единицей измерения углового ускорения в системе СИ является радиан на секунду в квадрате $\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}\right)$.

Равнопеременное вращение можно описать системой уравнений:

$$\vec{\varepsilon} = \text{const},$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}t,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\vec{\varepsilon}t^2}{2}.$$

где $\vec{\omega}_0 = \vec{\omega}(t=0)$ - начальная угловая скорость; $\varphi_0 = \varphi(t=0)$ - начальный угол поворота.

2.3. Связь линейных и угловых характеристик

Установим связь между модулями линейной и угловой скоростей:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} R \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega .$$

Таким образом,

$$V = \omega R .$$

В векторной форме это соотношение записывается в виде векторного произведения $\vec{V} = [\vec{\omega}\vec{r}]$, где $\vec{r}$ − радиус-вектор, проведенный из лежащей на оси вращения точки О начала координат (рис.2.4).

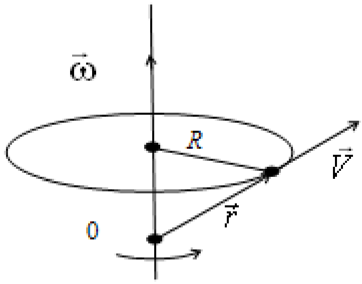

Рис. 2.4

Модуль нормального ускорения точки вращающегося тела равен

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R ,$$

где R − расстояние от рассматриваемой точки до оси вращения.

Модуль тангенциального ускорения равен $a_\tau = \frac{dV}{dt}$, тогда

$$a_\tau = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon ,$$

где ε − модуль углового ускорения. В результате $a_\tau = \varepsilon R$.

Таким образом, линейная скорость $\vec{V}$, нормальное $\vec{a}_n$ и тангенциальное $\vec{a}_\tau$ ускорения растут линейно с увеличением расстояния от точки до оси вращения, а все вращательные характеристики: угол поворота $\Delta\varphi$, угловая скорость $\vec{\omega}$, угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ одинаковы для всех точек твердого тела.

2.4. Примеры решения задач

1. Уравнение движения материальной точки по прямой имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где A = 4м, B = 2м/с, C = 0,2м/с^3. Найти: 1) положение точки в моменты времени t_1 = 2с, t_2 = 5с; 2) среднюю путевую скорость $V_{ср}$ за время, протекшее между этими моментами; 3) мгновенные скорости V_1 и V_2 в указанные моменты времени;4) среднее ускорение $a_{ср}$ за указанный промежуток времени; 5) мгновенные ускорения a_1 и a_2 в указанные моменты времени.

Дано

$A = 4$м, $B = 2$м/с;
$C = 0{,}2$м/с^3;
$t_1 = 2$с, $t_2 = 5$с.
$x = A + Bt + Ct^3$

---

1) $x_1 = ?$, $x_2 = ?$
2) $V_{ср} = ?$
3) $V_1 = ?$, $V_2 = ?$
4) $a_{ср} = ?$
5) $a_1 = ?$; $a_2 = ?$

Решение:

Положение точки в заданные моменты времени найдем, подставив в уравнения движения числовые значения коэффициентов *A, B, C* и моментов времени t_1 и t_2:

$$x(t_1) = 4 + 2\cdot 2 + 0{,}2\cdot 2^3 = 9{,}6\ (\text{м}),$$

$$x(t_2) = 4 + 2\cdot 5 + 0{,}2\cdot 5^3 = 39\ (\text{м}).$$

Средняя путевая скорость определяется как путь, пройденный точкой деленный на время ее движения:

$$V_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1},$$

$$V_{ср} = \frac{39 - 9{,}6}{5 - 2} = 9{,}8\ (\text{м/с}).$$

Мгновенная скорость относительно оси *x* есть первая производная от координаты по времени:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2.$$

Подставив числовые значения коэффициентов *B, C* и моментов времени t_1 и t_2, получим

$$V_1 = V(t_1) = 2+3\cdot 0{,}2\cdot 2^2 = 4{,}4(\text{м/с}),$$
$$V_2 = V(t_2) = 2+3\cdot 0{,}2\cdot 5^2 = 17(\text{м/с}).$$

Среднее ускорение определяется как отношение изменения скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло

$$a_{ср} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1},$$

$$a_{ср} = \frac{17 - 4{,}4}{5 - 2} = 4{,}2\ (\text{м/с}^2).$$

Ускорение точки найдем как первую производную скорости по времени:

$$a_x = \frac{dV}{dt} = 6Ct.$$

В заданные моменты времени
$a_1 = 6\cdot 0{,}2\cdot 2 = 2{,}4(\text{м/с}^2)$, $a_2 = 6\cdot 0{,}2\cdot 5 = 6(\text{м/с}^2)$.

2. Точка движется по кривой с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 0{,}5$м/с^2. Определить полное ускорение точки на участке кривой с радиусом кривизны $R = 3$м, если точка движется на этом участке со скоростью $V = 2$м/с.

Дано

$a_\tau = 0{,}5$м/с^2;
$R = 3$м
$V = 2$м/с.

$a = ?$

Решение:

Полное ускорение $\vec{a}$ точки, движущейся по кривой, может быть найдено как геометрическая сумма тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$, направленного по касательной к траектории, и нормального $\vec{a}_n$, направленного к центру кривизны траектории (рис. 2.5)

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n .$$

Так как векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ взаимно перпендикулярны, то модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} .$$

Модуль нормального ускорения a_n точки выражается формулой $a_n = \dfrac{V^2}{R} = \dfrac{2^2}{3} \approx 1{,}33$ (м/с^2).

Подставляя числовые значения, получим $a = \sqrt{0{,}5^2 + 1{,}33^2} \approx 1{,}42$ (м/с^2).

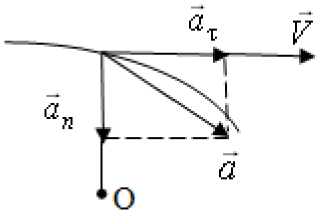

Рис.2.5

3. Велосипедист проехал первую половину пути со скоростью V_1 = 16км/ч, а на второй половине его скорость была V_2 = =12км/ч. Определить среднюю путевую скорость $V_{\text{ср}}$ за все время движения.

Дано	Решение:
V_1 = 16км/ч; V_2 = 12км/ч; $S_1 = S_2 = \dfrac{S}{2}$	Средняя путевая скорость определяется как путь S, пройденный точкой, деленный на время ее движения Δt: $V_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$,
$V_{\text{ср}}$-?	где $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$, а Δt_1 и Δt_2 − время прохождения велосипедистом соответственно первой и второй половин пути:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta S_1}{V_1} = \frac{\Delta S}{2V_1}, \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta S_2}{V_2} = \frac{\Delta S}{2V_2}.$$

Тогда $\Delta t = \dfrac{\Delta S}{2V_1} + \dfrac{\Delta S}{2V_2} = \dfrac{\Delta S}{2}\dfrac{V_1 + V_2}{V_1 V_2}$.

В результате получим $V_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{2V_1 V_2}{V_1 + V_2} = \dfrac{2 \cdot 16 \cdot 12}{16 + 12} \approx 13{,}7$ (км/ч).

ГЛАВА 3
Динамика поступательного движения

3.1. Законы Ньютона

Динамика изучает движения тел в связи с теми причинами, которые обусловливают тот или иной характер движения.

В основе так называемой классической или ньютоновской механики лежат три закона, сформулированные И. Ньютоном в 1687 г. Законы Ньютона возникли в результате обобщения большого количества опытных фактов. Классическая механика является механикой тел больших (по сравнению с массой атомов) масс, движущихся с малыми (по сравнению со скоростью света) скоростями.

Опыт показывает, что в природе:
1) нет самопроизвольных изменений скоростей;
2) отсутствуют мгновенные изменения скоростей.

Тело изменяет свою скорость, когда на него действуют другие тела. Если воздействия со стороны других тел отсутствуют, то скорость тела остается неизменной $\vec{V} = \text{const}$.

Дадим формулировку первого закона Ньютона: *всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние*.

Системы отсчета, в которых выполняется первый закон Ньютона, называются *инерциальными*. Инерциальной системой отсчета является такая система, которая либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно относительно другой инерциальной системы. Первый закон Ньютона называют иногда *законом инерции*.

Стремление тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется *инертностью* тела. Мерой инертности тел является *масса*. *Масса тела* − физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные (инертная масса) и гравитационные (гравитационная масса) свойства. Инертная и гравитационная массы равны друг другу с точностью, не меньшей 10^{-12} их значения.

Чтобы описать воздействия, упоминаемые в первом законе Ньютона, введем понятие *силы*. *Сила* − это векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму или размеры.

Второй закон Ньютона устанавливает связь между мерой взаимодействия (силой $\vec{F}$), мерой инертности тел (массой m) и ускорением $\vec{a}$. Подчеркнем, что закон является экспериментальным и в рамках классической механики ($V \ll C =$ $=3\cdot10^8$м/с) его можно записать как

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

где $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ − векторная сумма всех сил, действующих на тело.

Единица силы в системе СИ − *ньютон* (Н): 1 Н − сила, которая телу массой в 1 кг сообщает ускорение в 1 м/с^2 в направлении действия силы:

$$1\ \text{Н} = 1\ \text{кг}\cdot\text{м/с}^2.$$

Второй закон Ньютона называют также основным законом динамики поступательного движения.

Учитывая, что в классической механике масса материальной точки (тела) есть величина постоянная, то второй закон Ньютона можно записать в виде

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Векторная величина $\vec{p} = m\vec{V}$, численно равная произведению массы тела на его скорость и имеющая направление скорости, называется *импульсом (количеством движения)* этого тела. Выражение

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

является более общей формулировкой второго закона Ньютона:
скорость изменения импульса тела равна действующей на тело силе.

Взаимодействие между телами определяется третьим законом Ньютона: *силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению* (рис.3.1).

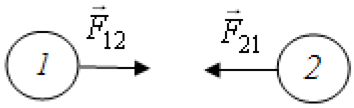

Рис. 3.1

На рис. 3.1 показано взаимодействие двух тел *1* и *2*, $\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на первое тело со стороны второго, $\vec{F}_{21}$ – сила, действующая на второе тело со стороны первого. Эти силы равны по величине и противоположны по направлению $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Из третьего закона Ньютона вытекает:

1) силы в природе возникают попарно;
2) силы взаимодействия не могут компенсировать друг друга, так как приложены к разным телам.

Третий закон Ньютона бывает справедлив не всегда. Вполне строго он выполняется в случае контактных взаимодействий, а также при взаимодействии находящихся на некотором расстоянии друг от друга покоящихся тел.

3.2. Силы в природе

В современной физике различают четыре вида взаимодействий:

1) гравитационное (или взаимодействие, обусловленное всемирным тяготением);
2) электромагнитное (осуществляемое через электрические и магнитные поля);
3) сильное или ядерное (обеспечивающее связь частиц в атомном ядре);
4) слабое (ответственное за многие распады элементарных частиц).

В рамках классической механики имеют дело с гравитационными и электромагнитными силами, которые являются фундаментальными, т. е. их нельзя свести к другим, более простым, силам, а также с упругими силами и силами трения, которые определяются характером взаимодействия между молекулами вещества. Для этих сил можно получить лишь приближенные эмпирические формулы.

3.2.1. Упругие силы

Под действием приложенных к нему сил всякое реальное тело деформируется, т. е. изменяет свою форму и размеры. Если после прекращения действия сил тело принимает первоначальные размеры и форму, деформация называется упругой.

Пусть закрепленная одним концом пружина длины l_0 лежит свободно на гладком горизонтальном столе: при этом деформация отсутствует. К другому концу пружины приложим внешнюю силу $\vec{F}$, направленную горизонтально (рис.3.2). Под действием внешней силы $\vec{F}$ пружина получает удлинение Δl, в результате чего в пружине возникает упругая сила $\vec{F}_{\text{упр}}$, уравновешивающая внешнюю, т.е. $\vec{F} = -\vec{F}_{\text{упр}}$. Опыт показывает, что при небольших деформациях удлинение пружины Δl оказывается пропорциональным действующей внешней силе $\Delta l \sim F$. Это утверждение носит название *закона Гука*:

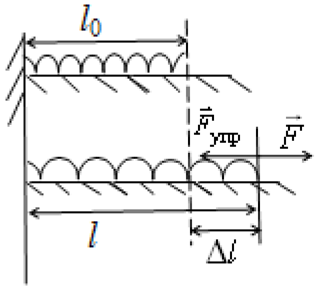

Рис. 3.2

$$F_{\text{упр}} = -k\Delta l\,,$$

где k − коэффициент жесткости пружины, зависящий от материала и конфигурации пружины; $\Delta l = l - l_0$ - абсолютное удлинение, l_0– длина пружины в недеформированном состоянии, l − конечная длина пружины.

Силы упругости, возникающие в пружине, стремятся вернуть пружину в исходное (недеформированное) состояние.

3.2.2. Силы трения

Силы трения появляются при перемещении соприкасающихся тел или частей тела друг относительно друга. Трение, возникающее при относительном перемещении двух соприкасающихся тел, называется *внешним*; трение между частями одного и того же сплошного тела носит название *внутреннего трения.* Трение между поверхностями двух твердых тел называют *сухим трением.* В случае сухого трения сила трения возникает не только при скольжении одной поверхности по другой, но также и при попытке вызвать такое скольжение. В последнем случае она называется *силой трения покоя.*

Законы сухого трения:

1) максимальная сила трения покоя, а также сила трения скольжения не зависят от площади соприкосновения трущихся тел;

2) силы оказываются приблизительно пропорциональными величине силы нормального давления, прижимающей трущиеся поверхности друг к другу:

$$F_{\text{тр}} = \mu\, F_N.$$

Безразмерный коэффициент пропорциональности μ называется коэффициентом трения. Он зависит от природы и от состояния трущихся поверхностей. В случае скольжения коэффициент трения является функцией скорости;

3) при небольших скоростях сила трения скольжения растет линейно со скоростью:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -k\vec{V}$$

(знак минус «–» означает, что сила трения направлена в сторону противоположную скорости).

3.2.3. Сила тяжести и вес тела

Под действием силы притяжения к Земле все тела падают с одинаковым относительно поверхности Земли ускорением, которое принято обозначать буквой $\vec{g}$. Это означает, что в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело массы *m* действует сила, называемая *силой тяжести*:

$$\vec{F}_{тяж} = m\vec{g}.$$

Когда тело покоится относительно поверхности Земли, сила тяжести уравновешивается силой реакции опоры или подвеса (рис.3.3).

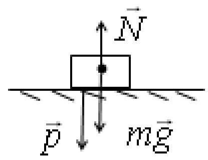

Рис. 3.3

Сила $\vec{P}$, с которой тело действует на опору или подвес, называется *весом тела.* Эта сила численно равна *mg* лишь в том случае, если тело и опора (подвес) неподвижны относительно Земли.

Рассмотрим пример: подвес в виде укрепленной на рамке пружины движется вместе с телом с ускорением $\vec{a}$ (рис.3.4). Уравнение движения тела имеет вид

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}.$$

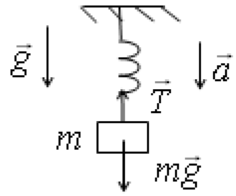

Рис. 3.4

По третьему закону Ньютона тело действует на пружину с силой $\vec{P} = -\vec{T}$, которая по определению представляет собой вес тела. Тогда вес тела в общем случае

$$P=T=m(g \pm a).$$

Если: 1) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{g}$, то $P = m(g + a)$, что больше силы тяжести mg;

2) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{g}$, то $P = m(g - a)$, что меньше силы тяжести mg;

3) $\vec{a} = 0$, то $P = mg$;

4) $\vec{a} = \vec{g}$,то $P = 0$ и наступает состояние невесомости.

Следует помнить, что сила тяжести и вес приложены к разным телам: сила тяжести к самому телу, а вес тела к опоре или подвесу. Кроме того, сила тяжести всегда равна *mg*, а вес тела зависит от ускорения, с которым движется тело.

3.3. Закон всемирного тяготения

Все тела в природе взаимно притягивают друг друга. Закон, которому подчиняется это притяжение, был установлен и Ньютоном и называется законом всемирного тяготения. Согласно этому закону *сила, с которой две материальные точки притягивают друг друга, пропорциональна произведению масс этих точек и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:*

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Здесь $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ – коэффициент пропорциональности, называемый гравитационной постоянной. Направлена сила вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие материальные точки (рис 3.5).

$$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_{12},$$

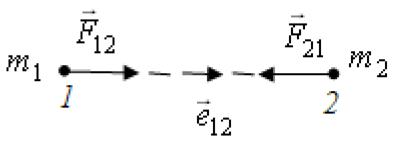

Рис. 3.5

где $\vec{e}_{12}$ – единичный вектор, направленный от первой точки ко второй, то есть от точки *1* к точке *2*.

Для определения силы взаимодействия протяженных тел их нужно разбить на точечные (элементарные) массы Δm, каждую из которых можно было бы принять за материальную точку. Рассчитать силу притяжения между попарно взятыми элементарными массами тел, а затем геометрически сложить все силы. Если тела однородны и имеют правильную геометрическую форму, вычисления значительно упрощаются.

Гравитационное поле. Гравитационное взаимодействие осуществляется через гравитационное поле. Всякое тело изменяет свойства окружающего его пространства, т.е. создает в нем гравитационное поле. Это поле проявляет себя в том, что на всякое помещенное в него тело действует гравитационная сила. Введем понятие напряженности гравитационного поля $\vec{G}$, по которой можно судить об «интенсивности» поля:

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m},$$

где $\vec{F}$ – гравитационная сила, действующая на материальную точку массы m в данной точке поля. Размерность $\vec{G}$ совпадает с размерностью ускорения. Вблизи поверхности Земли $\vec{G} = \vec{g}$, где $\vec{g}$ – ускорение свободного падения.

$\vec{G} = -\gamma \frac{m}{r^2} \vec{e}_r$ – напряженность поля, создаваемого материальной точкой массы m, $\vec{e}_r$ – орт радиуса-вектора, проведенного из материальной точки в данную точку поля, r – модуль этого радиуса-вектора.

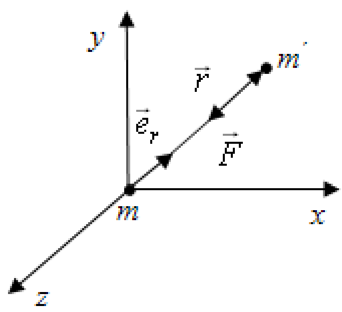

Рис. 3.6

Пусть гравитационное поле создается закрепленной в начале координат материальной точкой массы m. Тогда на материальную точку массы m', находящуюся в точке с радиусом–вектором $\vec{r}$, будет действовать сила $\vec{F}$ (рис.3.6):

$$\vec{F} = \vec{G} m' = -\gamma \frac{m m'}{r^2} \vec{e}_r.$$

3.4. Примеры решения задач

1. На гладком столе стоит тележка массой m_1 = 4кг. К тележке привязали один конец шнура, перекинутого через невесомый блок (рис.3.7). С каким ускорением будет двигаться тележка, если к другому концу шнура привязать гирю массой m_2 = 1кг?

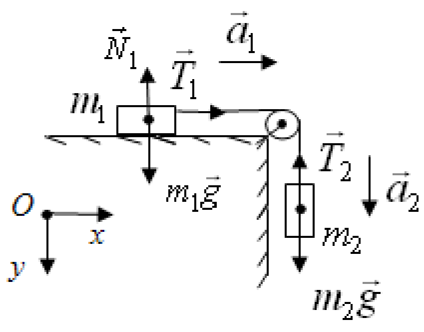

Рис. 3.7

Дано	Решение:
m_1= 4 кг; m_2= 1 кг. g = 9,8 м/с^2.	Так как шнур невесомый и нерастяжимый, то
a=?	

$$\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_2\right| = T, \quad \left|\vec{a}_1\right| = \left|\vec{a}_2\right| = a\,.$$

По условию задачи поверхность стола гладкая, следова тельно, силой трения тела массой m_1 о поверхность можно- пренебречь.Запишем второй закон Ньютона для каждого тела:

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1, \qquad (1)$$

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2\,. \qquad (2)$$

Спроектировав их на выбранные оси, получим

ox: $$m_1 a_1 = T_1,$$

oy: $$0 = m_1 g - N_1 \text{ и } m_2 a_2 = m_2 g - T_2\,.$$

С учетом приведенных выше соотношений уравнения примут вид

$$m_1 a = T\,,$$

$$m_2 a = m_2 g - T\,.$$

Решив систему, получим $a = g\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$. После подстановки числовых значений a = 1,96 м/с^2.

2. По наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол β = 30^0, начинает соскальзывать тело (рис.3.8). Найти скорость тела в конце второй секун ды движения, если коэффициент трения тела о плоскость равен μ = 0,2.

Дано	Решение:
β = 30^0; V_0 = 0; μ = 0.2; g = 9,8 м/с^2; t = 2 с	Запишем уравнение движения тела:
V=?	

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}\,.$$

Спроектировав их на выбранные оси, получим

ox: $$ma = mg\sin\beta - F_{\text{тр}},$$

oy: $$0 = N - mg\cos\beta\,.$$

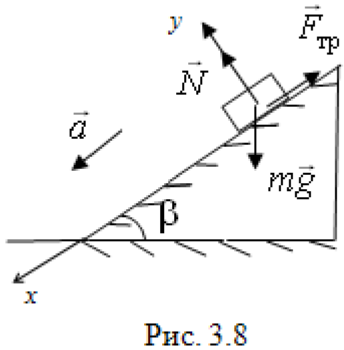

Рис. 3.8

При скольжении $F_{тр} = \mu N$. Тогда получаем

$$ma = mg\sin\beta - \mu mg\cos\beta.$$

Откуда $a = g(\sin\beta - \mu\cos\beta)$.

Движение тела по наклонной плоскости равноускоренное $(\vec{a} = \mathrm{const})$, тогда $V = at$. В итоге имеем $V = gt(\sin\beta - \mu\cos\beta)$. С учетом числовых значений $V = 9{,}8\cdot 2\cdot(0{,}5 – 0{,}2\cdot 0{,}866) \approx 6{,}4$ (м/с).

ГЛАВА 4
Законы сохранения

4.1. Механическая система тел

Совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое, называется *механической системой*. Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называются *внутренними*. Силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела, называются *внешними*. Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется *замкнутой* или *изолированной*.

Для замкнутых систем оказываются неизменными (сохраняются) три физические величины: импульс, энергия и момент импульса. В соответствии с этим имеют место три закона сохранения − *закон сохранения импульса, закон сохранения энергии и закон сохранения момента импульса*.

Вывод законов сохранения осуществляется на основании законов Ньютона. Все эти законы сохранения являются точными законами, строго выполняющимися и в релятивистской области.

4.2. Закон сохранения импульса

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N тел, массы и скорости которых соответственно равны $m_1, m_2, \ldots m_N$ и $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots \vec{V}_N$. Пусть $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots. \vec{f}_N$ − равнодействующие всех внутренних сил, действующих на каждое из этих тел, а $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_N$ − равнодействующие всех внешних сил. Запишем второй закон Ньютона для каждого из N тел механической системы:

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{V}_1\right) = \vec{f}_1 + \vec{F}_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_2\vec{V}_2\right) = \vec{f}_2 + \vec{F}_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_N\vec{V}_N\right) = \vec{f}_N + \vec{F}_N.$$

Сложим почленно все эти уравнения. Учитывая, что геометрическая сумма всех внутренних сил по третьему закону Ньютона равна нулю, получим

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + \ldots + m_N\vec{V}_N\right) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N \text{ или}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{V}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i ,$$

где $m_i\vec{V}_i = \vec{P}_i$ – импульс i – й материальной точки. Тогда

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{P}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i .$$

Сумма импульсов частиц, образующих механическую систему, называется импульсом системы $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N}\vec{P}_i$. Окончательно запишем

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i ,$$

т.е. скорость изменения импульса механической системы равна геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему. При отсутствии внешних сил $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$. Следовательно, для замкнутой системы импульс $\vec{P}$ постоянен, т.е. $\vec{P} = \text{const}$. Это утверждение составляет содержание закона сохранения импульса, который формулируется так*: импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным.*

Для незамкнутой системы импульс остается постоянным при условиях:

1) внешние силы в сумме дают нуль, т.е. $\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = 0$;
2) сумма внешних сил не равна нулю, но проекция этой суммы на некоторое направление есть нуль, тогда сохраняется составляющая импульса в этом направлении, т.е. если $\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{xi} = 0$, то $P_x = \text{const}$;
3) внешние силы малы по сравнению с внутренними силами.

4.3. Энергия, работа, мощность

Энергия − универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. Энергия не возникает из ничего и не исчезает бесследно. Она может только переходить из одной формы в другую. С различными формами движения материи связаны различные виды энергии: механическая, тепловая, электромагнитная, ядерная и др.

Рассмотрим механическую энергию. Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Для количественной характеристики процесса обмена энергией между взаимодействующими телами в механике вводится понятие работы силы. Таким образом, работу A можно определить как меру изменения энергии ΔE тела или системы тел:

$$\grave{A} = \Delta\mathring{A} = \mathring{A}_2 - \mathring{A}_1,$$

где E_1 и E_2 − энергии тела соответственно в начальном и конечном состояниях.

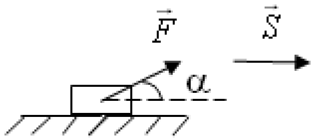

Рис. 4.1

Пусть тело движется прямолинейно и на него действует постоянная сила $\vec{F}$, направление которой составляет угол α с вектором перемещения $\vec{S}$ (рис. 4.1). Работа этой силы A равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения:

$$A = \left(\vec{F} \cdot \vec{S}\right) = FS\cos\alpha .$$

В общем случае сила может меняться как по величине, так и по направлению. Если рассмотреть элементарное перемещение $d\vec{r}$, то силу $\vec{F}$ можно считать постоянной, а движение точки ее приложения – прямолинейным. Элементарной работой силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ называется скалярная величина:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = Fdr\cos\alpha = F_r dr,$$

где F_r – проекция вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$ (рис. 4.2).

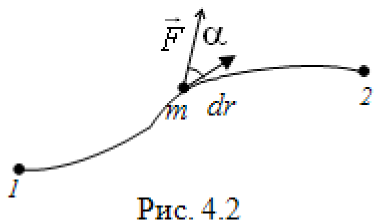

Рис. 4.2

Работа силы на участке траектории при движении от точки *1* до точки *2* равна алгебраической сумме работ на отдельных бесконечно малых участках пути. Эта сумма приводится к интегралу:

$$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 Fdr\cos\alpha = \int_1^2 F_r dr .$$

Единицей работы в системе СИ является *джоуль* (Дж). 1 Дж − это работа, совершаемая силой в 1Н при перемещении на 1м вдоль действия силы (1Дж = =1Н·1м).

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, введем понятие мощности N. Различают среднюю $N_{ср}$ и мгновенную N мощности:

$$N_{ср} = \frac{A}{t}, \quad N = \frac{dA}{dt},$$

где A – работа, совершенная за время Δt.

За время dt сила $\vec{F}$ совершает работу $\vec{F}d\vec{r}$. Тогда мощность, развиваемая этой силой в данный момент времени,

$$N = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{V},$$

т.е. равна скалярному произведению вектора силы $\vec{F}$ на вектор скорости $\vec{V}$, с которой движется точка приложения этой силы.

N − скалярная величина. Единица мощности − ватт (Вт). 1Вт − мощность, при которой за время 1с совершается работа в 1Дж (1Вт = 1Дж/с).

4.4. Кинетическая и потенциальная энергии

Кинетическая энергия механической системы − это энергия механического движения этой системы.

Пусть на тело действует сила $\vec{F}$, которая, совершая работу, вызывает движение этого тела. Энергия движущегося тела возрастает на величину совершенной работы.

Тело массой *m*, движущееся со скоростью $\vec{V}$, обладает кинетической энергией *T*, равной

$$T = \frac{mV^2}{2}.$$

Из формулы видно, что кинетическая энергия зависит от массы и скорости тела, т.е. является функцией состояния его движения. При выводе формулы движение тела рассматривалось в инерциальной системе отсчета. В разных инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, скорость тела будет различна. Следовательно, кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета.

Изменение кинетической энергии системы (тела) равно работе всех сил, действующих в системе:

$$A_{\text{всех сил}} = \Delta T = T_2 - T_1 = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2}.$$

Потенциальная энергия − часть общей механической энергии системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними. Взаимодействие между телами осуществляется, как правило, посредством силовых полей (например, поля гравитационных сил, поля упругих сил). Поле, не меняющееся во времени, называется стационарным. Для стационарного поля может оказаться, что работа, совершаемая над частицей силами поля, не зависит от формы траектории, а зависит только от начальной и конечной точек пути. Такие поля называются *потенциальными*, а силы, действующие в них, − *консервативными*.

Для консервативных сил справедливо выражение $\oint_L \vec{F} d\vec{r} = 0$. К ним относятся гравитационные, упругие, кулоновские силы.

Таким образом, консервативные силы можно определить двумя способами:

1) как силы, работа которых не зависит от пути, по которому тело переходит из одного положения в другое;
2) как силы, работа которых на любом замкнутом пути равна нулю.

Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории, по которой тело перемещается из одной точки в другую, то такие силы называются *неконсервативными* (к ним относятся, в частности, диссипативные силы - сила трения, сила сопротивления).

Тело, находясь в потенциальном поле, обладает потенциальной энергией П.

Работа консервативных сил равна приращению потенциальной энергии, взятому со знаком минус, т.е. она совершается за счет убыли потенциальной энергии

$$A_{\text{конс.сил}} = -\Delta\Pi .$$

Абсолютное значение потенциальной энергии зависит от выбора начала отсчета, т.е. выбора положения тела, где значение его потенциальной энергии тела можно принять равным нулю (нулевой уровень отсчета).

Конкретный вид функции П зависит от характера силового поля. Например:

1) потенциальная энергия тела массой m, находящегося в однородном поле гравитационных сил (в поле силы тяжести) и поднятого на высоту h над поверхностью Земли, равна

$$\Pi = mgh,$$

где высота h отсчитывается от нулевого уровня, для которого $\Pi_0 = 0$. Начало отсчета выбирается произвольно, поэтому потенциальная энергия может принимать и отрицательное значение (*кинетическая энергия всегда положительна*);

2) потенциальная энергия упруго деформированного тела (пружины) равна

$$\Pi = \frac{kx^2}{2},$$

где k − коэффициент упругости (для пружины − жесткость), x − величина деформации.

Полная механическая энергия системы − энергия механического движения и взаимодействия, равная

$$E = T + \Pi.$$

сумме кинетической и потенциальной энергий.

4.5. Закон сохранения энергии

Закон сохранения энергии − результат обобщения многих экспериментальных фактов. Идея закона принадлежит Ломоносову, а количественная формулировка закона дана немецкими учеными Майером и Гельмгольцем.

Итак, *в замкнутой системе тел, в которой действуют только консервативные силы, полная механическая энергия системы сохраняется во времени:*

$$E = T + \Pi = \text{const}.$$

Такие системы называются замкнутыми консервативными. Внутри системы могут происходить превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно, но полная (суммарная) энергия остается неизменной.

В замкнутых системах, в которых действуют неконсервативные силы (сила трения, сила сопротивления), полная механическая энергия системы не сохраняется:

$$E \neq \text{const}.$$

Изменение полной механической энергии системы равно работе неконсервативных сил:

$$A_{\text{неконс.сил}} = \Delta E\,.$$

В этих случаях закон сохранения механической энергии не справедлив. Но при «исчезновении» механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида. *Энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой.* В этом и заключается *физическая сущность закона сохранения и превращения энергии* − сущность неуничтожимости материи и ее движения.

4.6. Соударения тел

Рассмотрим примеры применения законов сохранения импульса и энергии на примере соударения тел. Ограничимся рассмотрением центрального удара двух однородных шаров.

Удар − изменение состояния движения тела вследствие кратковременного взаимодействия его с другим телом. Удар называется центральным, если шары до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры. Из соображений симметрии ясно, что после удара шары будут двигаться вдоль той же прямой. Предполагаем, что шары движутся поступательно, т.е не вращаясь.

Основные признаки удара:

1) кратковременность,
2) внутренние силы, возникающие при ударе, существенно больше внешних сил, следовательно, внешними силами можно пренебречь (по сравнению с внутренними) и считать систему замкнутой;
3) при ударе происходит изменение относительных скоростей тел.

Различают два предельных вида удара:

− абсолютно упругий удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие немеханические виды;

− абсолютно неупругий удар, при котором механическая энергия частично или полностью переходит в другие виды энергии, например в тепловую.

Обозначим массы шаров m_1 и m_2, скорости шаров до удара $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$, скорости шаров после удара $\vec{V}_1'$ и $\vec{V}_2'$.

Абсолютно упругий центральный удар. Абсолютно упругим называется такой удар, при котором полная механическая энергия тел сохраняется. Сначала кинетическая энергия тел частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга, и потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую энергию тел.

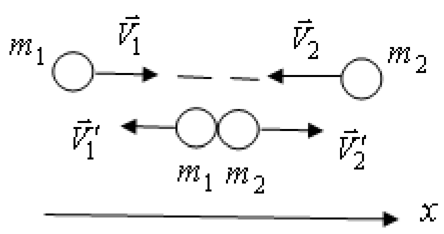

Рис. 4.3

Запишем уравнения сохранения импульса и энергии (рис. 4.3):

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}_1' + m_2\vec{V}_2'\,,$$

$$\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} = \frac{m_1V_1'^2}{2} + \frac{m_2V_2'^2}{2}\,.$$

Преобразовав эти выражения, найдем скорости шаров после удара:

$$\vec{V}_1' = \frac{(m_1 - m_2)\vec{V}_1 + 2m_2\vec{V}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{V}_2' = \frac{(m_2 - m_1)\vec{V}_2 + 2m_1\vec{V}_1}{m_1 + m_2}.$$

Для численных расчетов нужно спроектировать все вектора на ось x , вдоль которой двигаются шары.

Особый интерес представляет случай, когда массы шаров одинаковы $m_1 = m_2$. При этом условии получается, что $\vec{V}_1' = \vec{V}_2$ и $\vec{V}_2' = \vec{V}_1$, т.е. происходит обмен скоростями. В частности, если один из шаров до соударения покоился, то после удара он движется с такой же скоростью, какую имел первоначально другой шар, который после удара окажется неподвижным. Происходит «обмен» скоростями.

Абсолютно неупругий центральный удар. Абсолютно неупругим называется удар, при котором потенциальная энергия упругой деформации не возникает, а кинетическая энергия тел частично или полностью переходит во внутреннюю. Тела соединяются и продолжают двигаться дальше как единое целое или останавливаются. Скорость совместного движения находится из закона сохранения импульса (рис. 4.4):

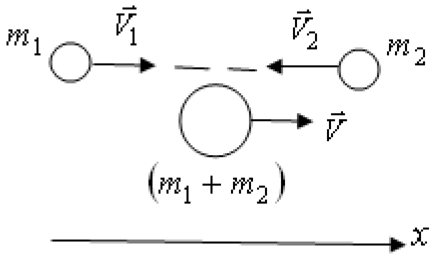

Рис. 4.4

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V},$$

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{m_1 + m_2}.$$

Механическая энергия системы тел при абсолютно неупругом ударе не сохраняется. Часть механической энергии ΔE тел переходит в немеханические виды (например, выделяется в виде тепла):

$$\Delta E = \left(\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2} = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(V_1 + V_2)^2.$$

ГЛАВА 5
Динамика вращательного движения. Закон сохранения момента импульса

5.1. Момент инерции

При изучении вращения твердого тела пользуются понятием момента инерции. Физически момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.

Скалярная величина $J = mr^2$ называется моментом инерции материальной точки m относительно оси вращения z (r − кратчайшее расстояние от точки до оси вращения). Единицей измерения момента инерции в системе СИ является *килограмм - метр в квадрате* (кг·м^2).

Моментом инерции J системы (тела) относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведений масс m_i материальных точек системы на квадраты их расстояний r_i^2 до рассматриваемой оси:

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 .$$

В случае непрерывного распределения масс сумма сводится к интегралу:

$$J = \int_m r^2 dm ,$$

где интегрирование производится по всей массе тела (по всему объему).

Момент инерции сложного тела $J_Т$ равен сумме моментов инерции его составных частей (рис. 5.1).

$$J_Т = J_1 + J_2 + J_3$$

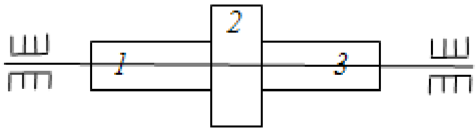

Рис. 5.1

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно другой параллельной оси определяется *теоремой Штейнера*: *момент инерции тела $J_Т$ относительно любой оси вращения равен моменту его инерции J_C относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C тела, сложенному с произведением массы m на квадрат расстояния a между осями* (рис. 5.2):

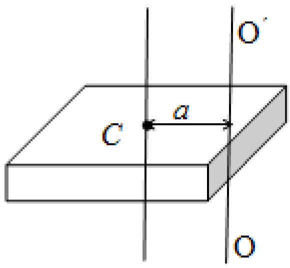

Рис. 5.2

$$J_Т = J_C + ma^2.$$

Величина момента инерции тела зависит от массы тела и её распределения относительно оси вращения.

Приведем значения моментов инерции некоторых однородных тел (табл. 1).

Таблица 1

Твердое тело	Положение оси вращения	Момент инерции
1. Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{ml^2}{12}$
2. Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его край	$\frac{ml^2}{3}$
3. Кольцо (цилиндр) с радиусами R_1 (внутренний) и R_2 (внешний)	Ось симметрии	$\frac{m(R_1^2 + R_2^2)}{2}$
4. Сплошной цилиндр или диск радиусом R ($R_1 = 0$, $R_2 = R$)	Ось симметрии	$\frac{mR^2}{2}$
5. Полый тонкостенный цилиндр радиусом R, обруч ($R_1 \approx R_2 = R$)	Ось симметрии	mR^2

Твердое тело	Положение оси вращения	Момент инерции
6. Тонкое кольцо радиусом R	Ось совпадает с диаметром	$\frac{mR^2}{2}$
7. Сплошной шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2mR^2}{5}$
8. Сплошной конус с радиусом основания R	Ось симметрии	$\frac{3mR^2}{10}$

Примеры расчетов моментов инерции ряда тел приведены в приложении к описанию лабораторной работы №1-3.

5.2. Момент силы

Рассмотрим тело, которое может вращаться в горизонтальной плоскости относительно оси, проходящей через точку О (рис. 5.3). В точке А к телу приложена горизонтальная сила $\vec{F}$. Проведем из точки О в точку А вектор $\vec{r}$ и разложим силу $\vec{F}$ на две составляющих: силу $\vec{F}_1$, направленную вдоль вектора $\vec{r}$, и силу $\vec{F}_2$, направленную перпендикулярно этому вектору. Из опыта известно, что сила $\vec{F}_1$ не будет вызывать вращательное движение. Вращение тела является результатом действия силы $\vec{F}_2$. Характеристики вращательного движения (угловые скорость и ускорение) определяются не только величиной силы $\vec{F}_2$, но и расстоянием от оси вращения до точки приложения этой силы.

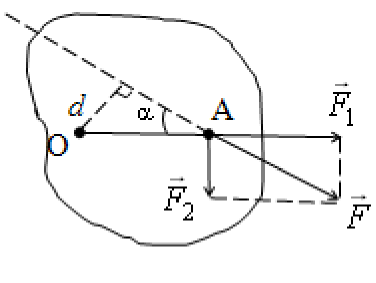

Рис. 5.3

Введем понятие момента силы. Моментом силы $\vec{F}$ относительно неподвижной точки О называется физическая величина $\vec{M}$, определяемая векторным произведением вектора $\vec{r}$ на силу $\vec{F}$:

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}].$$

Вектор $\vec{M}$ лежит в плоскости перпендикулярной плоскости векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$, а его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращение от $\vec{r}$ к $\vec{F}$ (рис. 5.4). Модуль момента силы равен

$$M = rF\sin\alpha,$$

где α − угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$, произведение $r\sin\alpha = d$ называется *плечом силы* $\vec{F}$ относительно точки О, т.е. плечо силы − это кратчайшее рас-

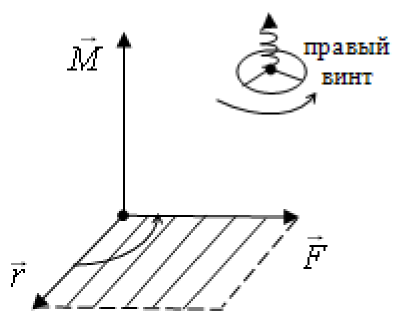

Рис. 5.4

стояние точки О до линии действия силы. Тогда модуль момента силы можно представить как произведение силы на плечо:

$$M = Fd\,.$$

Единицей момента силы в системе СИ является *ньютон - метр* (Н·м).

Моментом силы $\vec{F}$ относительно неподвижной оси z называется скалярная величина M_z, равная проекции на эту ось вектора $\vec{M}$ момента силы, определенного относительно произвольной точки О данной оси. Значение момента не зависит от выбора положения точки О на оси z.

5.3. Момент импульса

Моментом импульса (количества движения) $\vec{L}$ материальной точки A относительно неподвижной точки О называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{P}] = [\vec{r}, m\vec{V}]\,,$$

где $\vec{r}$ − вектор, проведенный из точки О в точку A; $\vec{P} = m\vec{V}$ − импульс материальной точки. Направление вектора $\vec{L}$ совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{p}$. Модуль момента импульса равен

$$L = rP\sin\alpha = rmV\sin\alpha = Pl\,,$$

где α − угол между $\vec{r}$ и $\vec{p}$, произведение $r\sin\alpha = l$ называется плечом вектора $\vec{P}$ относительно точки О.

Моментом импульса относительно неподвижной оси z называется скалярная величина L_z, равная проекции на эту ось вектора момента импульса $\vec{L}$, определенного относительно произвольной точки О данной оси. Значение момента импульса L_z не зависит от выбора положения точки О на оси z.

При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси z, образующей правый винт с направлением его вращения, каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса r_i, с некоторой скоростью V_i. Скорость частицы перпендикулярна этому радиусу, т.е. $\alpha_i = 90^\circ$ и $\sin\alpha_i = 1$. Тогда момент импульса отдельной частицы относительно оси z можно представить в виде

$$L_{iz} = m_i V_i r_i$$

Момент импульса твердого тела относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i V_i r_i\,.$$

Учитывая, что $V_i = \omega r_i$, получим

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = J_z \omega\,,$$

где J_z– момент инерции тела относительно оси z.

Таким образом, момент импульса твердого тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость.

Для однородного тела, симметричного относительно оси вращения, момент импульса относительно любой точки этой оси определяется по формуле:

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \tag{5.1}$$

5.4. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Наиболее общая форма записи основного уравнения динамики вращательного движения твердого тела имеет вид

$$\frac{dL}{dt} = \vec{M}, \tag{5.2}$$

где $\vec{L}$ - момент импульса тела относительно неподвижной точки О; $\vec{M}$ - суммарный момент всех сил, действующих на тело, определенный относительно той же точки О.

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси z, то основное уравнение динамики вращательного движения можно записать как

$$J\varepsilon_z = M_z, \tag{5.3}$$

где J – момент инерции тела относительно оси z; ε_z - проекция углового ускорения на ось z; M_z - суммарный момент всех сил, действующих на тело, относительно оси z.

5.5. Закон сохранения момента импульса

Согласно уравнению (5.2), момент импульса системы материальных точек (тела) может изменяться под действием момента всех внешних сил. Отсюда следует важный вывод – закон сохранения момента импульса: *момент импульса замкнутой системы частиц относительно неподвижной точки О остается постоянным во времени.*

Таким образом, если $\vec{M} = 0$, то

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \text{ и } \vec{L} = \text{const}.$$

Примеры, демонстрирующие применение уравнения динамики вращательного движения твердого тела и закона сохранения момента импульса, приведены в приложении к описанию лабораторной работы № 1-8.

Кинетическая энергия вращательного движения определяется по формуле

$$T_{\text{вр}} = \frac{J\omega^2}{2},$$

где J – момент инерции твердого тела относительно оси вращения, ω - угловая скорость вращения.

ГЛАВА 6
Молекулярно – кинетическая теория идеальных газов

Молекулярная физика – раздел курса общей физики, в котором изучаются строение и свойства вещества, исходя из молекулярно-кинетических представлений, основывающихся на том, что все тела состоят из молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении.

6.1. Опытные законы идеального газа

Газ, находящийся в некотором замкнутом объеме, можно считать *идеальным*, если он удовлетворяет следующим условиям:

· собственный объем молекул газа много меньше объема сосуда;

· между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;

· столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие.

Многие реальные газы (например, водород, гелий, неон, азот, кислород, воздух и др.) в условиях близких к нормальным близки по своим свойствам к идеальному газу. За нормальные условия принято считать давление P=1,013·10^5Па, что соответствует 1 атм или 762 мм ртутного столба, и температуру окружающей среды t=0^0С. Кроме того, если внести поправки на объем молекул и молекулярные силы, от теории идеального газа можно перейти к теории реального газа.

Опытным путем до создания молекулярно-кинетической теории был открыт целый ряд законов, которым удовлетворяет идеальный газ.

Закон Гей-Люссака: объем данной массы газа ($m = \text{const}$) при постоянном давлении ($P = \text{const}$) изменяется линейно с температурой t, измеряемой в градусах Цельсия:

$$V = V_0(1 + \alpha t),$$

где V_0– объем газа при нулевой температуре ($t = 0^0\,\text{C}$), а $\alpha = \dfrac{1}{273{,}15}\,\dfrac{1}{{}^0C}$.

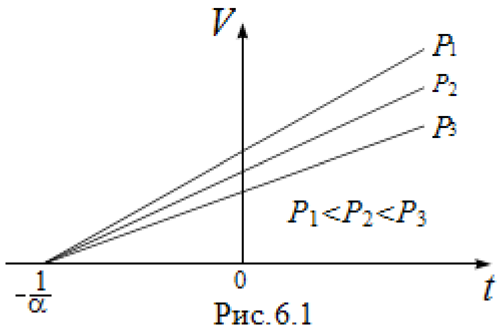

Рис.6.1

Процесс, протекающий при постоянном давлении, называется *изобарическим* (изобарным). На диаграмме в координатах (V, t) (рис.6.1) этот процесс изображается прямой, называемой *изобарой*.

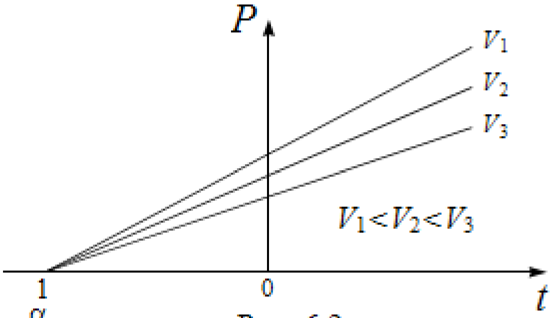

Рис.6.2

Закон Шарля: давление данной массы газа ($m = \text{const}$) при постоянном объеме ($V = \text{const}$) изменяется линейно с температурой:

$$P = P_0(1 + \alpha t),$$

где P_0 – объем при $t = 0^0$ C.

Процесс, протекающий при постоянном объеме, называется *изохорическим* (изохорным). На диаграмме в координатах (P, t) (рис.6.2) он изображается прямой, называемой *изохорой*.

С введением термодинамической температуры T, выраженной в кельвинах (К):

$$T = t + \frac{1}{\alpha},$$

законы Гей-Люссака и Шарля можно переписать в виде

$$V = V_0 \alpha T \text{ при } P = \text{const},\ m = \text{const}$$

и

$$P = P_0 \alpha T \text{ при } V = \text{const},\ m = \text{const},$$

или

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}\ (P = \text{const},\ m = \text{const}),$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2}\ (V = \text{const},\ m = \text{const}).$$

Закон Бойля – Мариотта: для данной массы газа ($m = \text{const}$) при постоянной температуре ($T = \text{const}$) произведение давления газа на его объем есть величина постоянная:

$$PV = \text{const}.$$

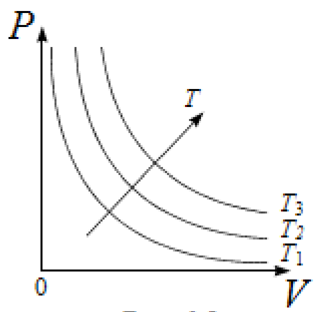

Рис.6.3

Процесс, протекающий при постоянной температуре, называется *изотермическим*. Кривая, изображающая зависимость $P(V)$ при изотермическом процессе, называется *изотермой*. Изотермы представляют собой гиперболы (рис.6.3), удаляющиеся от координатных осей с увеличением температуры, при которой происходит процесс.

Закон Авогадро: моли любых газов при одинаковой температуре и давлении занимают одинаковые объемы. При нормальных условиях ($P = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па, $T = 273{,}15$ К) этот объем составляет $V_m = 22{,}41 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль $= 22{,}41$ л/моль.

Моль – единица количества вещества в СИ. В одном моле содержится столько атомов (молекул, ионов), сколько атомов содержится в 12 г изотопа углерода с атомным весом 12.

Из сказанного выше следует, что в одном моле различных веществ содержится одно и то же число молекул, которое называется *числом Авогадро*: $N_А = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Таким образом, суть закона Авогадро заключается в том, что одинаковое число молекул различных газов при одинаковых условиях занимает один и тот же объем.

Закон Дальтона: давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений входящих в нее газов:

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i .$$

Парциальное давление (P_i) – давление, которое производил бы i-й газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал объем, равный объему смеси при той же температуре.

6.2. Уравнение Менделеева – Клапейрона. Основное уравнение молекулярно – кинетической теории идеальных газов

Поскольку состояние с фиксированной массой газа определяется тремя параметрами (P, V, T), можно составить уравнение, устанавливающее связь между этими параметрами.

Для некоторой массы идеального газа, используя законы Гей – Люссака и Шарля, можно получить уравнение:

$$\frac{PV}{T} = \text{const} = B . \tag{6.1}$$

Уравнение (6.1) называется *уравнением Клапейрона*, где B – газовая постоянная, различная для различных газов.

Поскольку при одинаковых P и T моли различных газов занимают один и тот же объем V_m, уравнение (6.1) можно переписать в виде

$$\frac{PV_m}{T} = R , \tag{6.2}$$

где $R = 8{,}31 \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – одинаковая для всех газов величина, называемая *универсальной газовой постоянной*.

Уравнение (6.2) является уравнением состояния идеального газа, называемым также *уравнением Менделеева – Клапейрона*.

Если при некоторых P и T моль газа занимает объем V_m, то при тех же условиях масса газа m займет объем

$$V = \frac{m}{M} V_m ,$$

где M – масса моля газа (*молярная масса*). Тогда уравнение (6.2) запишется в виде

$$PV = \frac{m}{M} RT = \nu RT , \tag{6.3}$$

где величина $\nu = \dfrac{m}{M}$ называется *количеством вещества* (число молей). Размерность количества вещества: $[\nu]$ = моль. Величину ν можно представить:

$$\nu = \frac{N}{N_A},$$

где N – число молекул, содержащихся в массе газа m, N_A - число Авогадро.

Иногда (6.3) записывают в виде

$$P = RT/V_m = kN_A T/V_m = nkT\ , \qquad (6.4)$$

где $k = \dfrac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – *постоянная Больцмана*, $n = \dfrac{N_A}{V_m} = \dfrac{N}{V}$ – *концентрация* молекул (число молекул в единице объема).

Из (6.4) следует, что давление идеального газа при фиксированной температуре пропорционально концентрации его молекул.

Основное уравнение молекулярно – кинетической теории идеальных газов связывает параметры состояния газа (*P, V, T*) с характеристиками движения его молекул.

Рассматривая модель одноатомного идеального газа, находящегося в объеме V и содержащего N молекул, каждая из которых массой m_0 движется хаотически со скоростью V_i, получим уравнение

$$PV = \frac{2}{3}E\ , \qquad (6.5)$$

где $E = \dfrac{1}{2}Nm_0\overline{V}_{\text{кв}}^{\,2}$ – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул идеального газа.

Уравнение (6.5) представляет собой основное уравнение молекулярно – кинетической теории идеальных газов.

Теоретически было установлено, что средняя квадратичная скорость молекул

$$\overline{V}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3\kappa T}{m_0}}\ .$$

Тогда средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа вычислится как

$$\overline{E}_0 = \frac{m_0\overline{V}_{\text{кв}}^{\,2}}{2} = \frac{3}{2}kT\ . \qquad (6.6)$$

Из формулы (6.6) следует, что средняя кинетическая энергия одной молекулы идеального газа прямо пропорциональна термодинамической температуре и определяется только ей. При $T = 0$ прекращается поступательное движение молекул ($\overline{E}_0 = 0$). Следовательно, при $T = 0$ молекулы перестают действовать на стенки сосуда и $P = 0$. Таким образом, термодинамическая температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа.

6.3. Термодинамика. Число степеней свободы молекул. Внутренняя энергия

Термодинамика занимается рассмотрением соотношений между различными характеристиками вещества, не углубляясь в изучение внутреннего его строения.

Термодинамика ведет свое начало от работ инженера Сади Карно, который занимался тепловыми машинами. Поглощая тепло, они превращают его в работу (в паровой машине тепло идет на образование пара, который, толкая поршень, совершает работу). Процессы, происходящие в тепловых машинах, описываются законами термодинамики.

Будем рассматривать макроскопические системы, которые находятся в состоянии равновесия и описываются некоторым числом измеряемых макроскопических величин, называемых параметрами состояния. Ими могут быть объем V, давление P, термодинамическая температура T, плотность ρ и т.д.

Состояние термодинамической системы называют *стационарным*, если оно не изменяется во времени. Стационарное состояние называется *равновесным*, если неизменность системы во времени не обусловлена внешним воздействием.

Термодинамическое равновесие двух систем (или двух частей одной системы) характеризуется тем, что обе системы (части системы) имеют одинаковую температуру.

Равновесное состояние термодинамической системы описывается уравнением, связывающим параметры состояния. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – параметры состояния, тогда уравнение $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ будет описывать равновесное состояние системы. Примером такого уравнения является уравнение Менделеева – Клапейрона: $PV - \nu RT = 0$.

Число независимых координат, полностью определяющих положение молекулы в пространстве, называется числом *степеней свободы молекулы*.

В ряде задач молекулу одноатомного газа (рис.6.4, *а*) рассматривают как материальную точку, которой приписывают три степени свободы поступательного движения (молекула может двигаться произвольно по трем пространственным координатам).

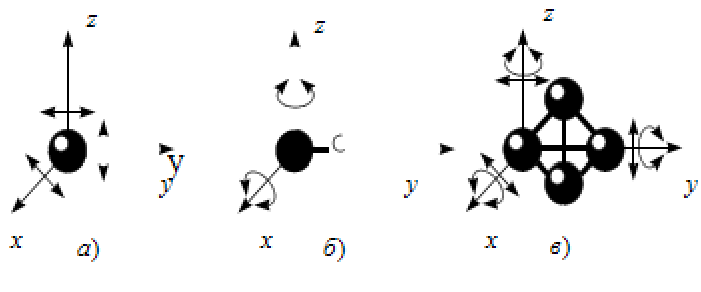

Рис. 6.4

В классической механике молекула двухатомного газа в первом приближении рассматривается как совокупность двух материальных точек, жестко связанных недеформируемой связью (рис.6.4, *б*). Эта система, кроме трех степеней свободы поступательного движения, имеет еще две степени свободы вращательного движения (вокруг осей *x* и *z*). Таким образом, двухатомный газ обладает пятью степенями свободы. Трехатомная (рис.6.4,*в*) и многоатомная молекулы с жесткой связью между атомами имеют шесть степеней свободы: три поступательных и три вращательных (при этом предполагается, что атомы в молекуле не лежат на одной прямой).

Если связь между атомами в молекуле не жесткая, то атомы могут совершать колебательное движение. При этом необходимо учитывать также степени свободы колебательного движения.

В классической статистической физике выводится *закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул*: для статистической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую поступательную и вращательную степени свободы приходится в среднем кинетическая энергия, равная $kT/2$, а на каждую колебательную степень свободы – в среднем энергия, равная kT.

Таким образом, средняя кинетическая энергия одной молекулы

$$\overline{E}_{\text{молек}} = \frac{i}{2}kT,$$

где i – сумма числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы:

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}.$$

К внутренней энергии не относятся кинетическая энергия движения системы как целого и потенциальная энергия системы во внешнем поле.

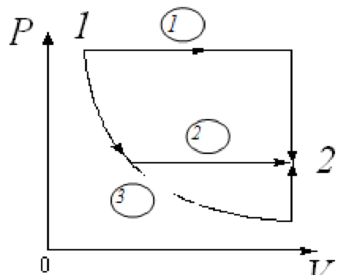

Рис. 6.5

Внутренняя энергия – это однозначная функция термодинамического состояния системы, т.е. значение внутренней энергии в любом состоянии не зависит от того, с помощью какого процесса система перешла в данное состояние. Так, например, из состояния *1* с параметрами P_1, V_1, T_1 (рис.6.5) в состояние *2* с параметрами P_2, V_2, T_2 термодинамическая система может перейти различными способами. В первом состоянии внутренняя энергия системы

$$U_1 = \frac{i}{2}\nu RT_1,$$

во втором состоянии

$$U_2 = \frac{i}{2}\nu RT_2.$$

Внутренняя энергия системы при переходе из состояния *1* в состояние *2* изменилась на величину

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}\nu R\Delta T, \qquad (6.7)$$

и это изменение, очевидно, не зависит от способа перехода системы из первого состояния во второе.

6.4. Теплота и работа. Первое начало термодинамики. Изопроцессы

Обмен энергией между термодинамической системой и внешними телами может происходить двумя путями:

1) при совершении работы;
2) с помощью теплообмена.

Количество энергии, переданное системе внешними телами при силовом взаимодействии между ними, называется *работой*, совершенной над системой.

Количество энергии, переданное системе внешними телами путем теплообмена, называется *количеством теплоты*, сообщенной системе.

В отсутствии внешних силовых полей обмен энергией между неподвижной системой и внешней средой с помощью совершения работы может происходить лишь при изменении объема и формы системы. Работой расширения называется работа, которую система производит против внешнего давления:

$$\delta A = P_{\text{внеш}} dV, \tag{6.8}$$

где $P_{\text{внеш}}$ – равномерно распределенное внешнее давление на систему. Если процесс расширения является равновесным (квазистатическим), то $P_{\text{внеш}} = P$, где P – давление в системе.

Полную работу A, совершаемую газом при изменении его объема от V_1 до V_2, можно найти по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV. \tag{6.9}$$

В зависимости от вида взаимодействия термодинамической системы с внешней средой выделяют следующие типы термодинамических систем.

Открытой системой называется термодинамическая система, которая может взаимодействовать с внешней средой.

Изолированной системой называется термодинамическая система, которая не может обмениваться с внешней средой ни энергией, ни веществом.

Замкнутой системой называется термодинамическая система, не способная к обмену энергией с внешней средой путем совершения работы.

Термодинамическая система называется *адиабатической*, если не происходит теплообмена между системой и внешней средой. При этом система может совершать работу против внешних сил или внешние силы могут совершать работу над ней.

Первое начало термодинамики представляет собой по сути обобщенный закон сохранения энергии для тепловых процессов. Оно формулируется следующим образом: количество теплоты, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы и на совершение системой работы против внешних сил,

$$Q = \Delta U + A. \tag{6.10}$$

В (6.10) ΔU – изменение внутренней энергии системы, Q – подводимое к системе тепло, A – работа, совершаемая системой против внешних сил. Если $A > 0$, то работу совершает система, если $A < 0$, то работа совершается над системой.

В дифференциальной форме записи первое начало термодинамики имеет вид

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

где dU – элементарное (бесконечно малое) изменение внутренней энергии системы, δQ – элементарное подводимое к системе тепло (бесконечно малое количество теплоты), δA – элементарная работа, совершаемая системой.

Из первого начала термодинамики следует, что если $\Delta U = 0$, то

$$Q = A,$$

т.е. все количество теплоты, передаваемое системе, идет на совершение ею работы против внешних сил. Отсюда следует невозможность реализации вечного двигателя первого рода, который совершал бы работу бо́льшую, чем сообщенная ему извне энергия.

Термодинамический процесс называется *равновесным* (квазистатическим), если система бесконечно медленно проходит непрерывный ряд бесконечно близких (термодинамически) равновесных состояний.

Изопроцессы – это равновесные процессы, идущие в системе с постоянной массой при каком-либо одном постоянном параметре состояния.

Изотермический процесс: $T = \text{const}$.

Исходя из формулы (6.7), мы приходим к тому, что изменение внутренней энергии при изотермическом процессе $\Delta U = 0$ и согласно (6.10)

$$Q = A.$$

Таким образом, все тепло, подводимое к системе, идет на совершение этой системой работы против внешних сил.

Изохорный процесс: $V = \text{const}$.

Исходя из формулы (6.8) мы имеем то, что работа газа при изохорном процессе $A = 0$ и согласно (6.10)

$$Q = \Delta U,$$

т.е. все тепло, подводимое к системе, идет на изменение ее внутренней энергии.

Изобарный процесс: $P = \text{const}$.

Первое начало термодинамики при изобарном процессе имеет вид

$$Q = \Delta U + A,$$

где $A = \int\limits_{V_1}^{V_2} PdV = P(V_2 - V_1)$.

6.5. Теплоемкость. Адиабатический процесс

Одним из основных тепловых параметров тел в термодинамике является теплоемкость. *Теплоемкостью* какого-либо тела называется величина, равная количеству теплоты, которое необходимо сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один кельвин:

$$C^* = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Удельная теплоемкость – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К:

$$c = \frac{\delta Q}{m\,dT}. \qquad (6.11)$$

Размерность удельной теплоемкости: $[c] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$.

Молярная теплоемкость – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 моля вещества на 1 К:

$$C = \frac{\delta Q}{\nu\,dT}, \qquad (6.12)$$

Размерность молярной теплоемкости: $[C] = \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$.

Согласно (6.11) и (6.12), удельная теплоемкость c связана с молярной C соотношением

$$C = cM,$$

где M – молярная масса вещества.

Между молярными теплоемкостями газа при изобарном процессе C_P и изохорном процессе C_V существует зависимость:

$$C_P = C_V + R. \qquad (6.13)$$

Выражение (6.13) называется *уравнением Майера*.

Теплоемкость газа при изохорном процессе $C_V = \frac{i}{2}R$, при изобарном процессе $C_P = C_V + R = \frac{i+2}{2}R$.

Адиабатическим называется – процесс, происходящий без теплообмена с внешней средой ($\delta Q = 0$). К адиабатическим можно отнести все быстропротекающие процессы.

Этот процесс описывается уравнением

$$PV^{\gamma} = \text{const}, \qquad (6.14)$$

которое называется *уравнением Пуассона*.

Фигурирующая в уравнении Пуассона безразмерная величина

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}$$

называется показателем адиабаты.

Работу, совершаемую газом при адиабатическом процессе, можно вычислить двумя способами:

1) исходя из определения работы:

$$A=\int_{V_1}^{V_2}PdV=\int_{V_1}^{V_2}\frac{P_1V_1^{\gamma}}{V^{\gamma}}dV=\frac{P_1V_1}{\gamma-1}\left(1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right);$$

2) исходя из первого начала термодинамики, для адиабатического процесса $\delta A=-dU$:

$$A=-\int dU=-\int_{T_1}^{T_2}\frac{m}{M}C_VdT=\frac{m}{M}C_V(T_1-T_2).$$

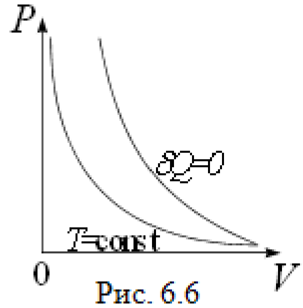

Рис. 6.6

Линия, изображающая адиабатный процесс, называется *адиабатой*. На рис.6.6 в координатах (P, V) приведены для сравнения адиабата и изотерма. Для любого идеального газа $\gamma=\frac{C_P}{C_V}=\frac{i+2}{2}=1+\frac{i}{2}>1$, поэтому в координатах (P, V) адиабата идет круче изотермы.

6.6. Примеры решения задач

1. Кислород массой $m=64$ г расширяется изотермически при $T=300$К от объема $V_1=10$л до $V_2=40$л. Найти работу A, совершенную газом в этом процессе, и тепло Q, переданное газу.

Дано:
Кислород, m=64г
T=300 К
V_1=10л, V_2=40л

A=? Q=?

Решение

Работа, совершенная газом, определяется выражением $A=\int_{V_1}^{V_2}PdV$. Из уравнения Менделеева – Клайперона (уравнения состояния идеального газа) находим $P=\frac{mRT}{MV}$.

Тогда работа запишется в виде

$$A=\frac{mRT}{M}\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}=\frac{mRT}{M}\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Подставив численные значения (молярная масса кислорода M=32·10^{-3} кг/моль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$), получаем значение A= =6,9 кДж.

В соответствии с первым началом термодинамики количество тепла, поданное газу, равно $Q=\Delta U+A$, где изменение внутренней энергии $\Delta U=\frac{i}{2}\frac{m}{M}R\Delta T=0$, так как процесс изотермический ($\Delta T=0$).

Тогда $Q=A$. Численно $Q=6{,}9$кДж.

2. Азот N_2 в количестве m=280г расширяется в результате изобарного процесса при давлении P=1,0МПа; при этом было затрачено $Q=5$кДж теплоты. Найти: а) работу расширения A; б) конечный объем газа V_2. Начальная температура азота T_1=290К.

Дано:

Азот, m=280г

T_1=290 К

P=1,0МПа Q=5кДж

А=? V_2=?

Решение

а) Элементарная работа газа при изобарном процессе $\delta A = PdV$ или полная работа $A = P(V_2 - V_1)$. С учетом уравнения состояния идеального газа $PV = \frac{m}{M}RT$ работа определяется в виде: $A = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1)$, где величину $(T_2 - T_1)$ находим из уравнения $Q = \Delta U + A$, или из уравнения $Q = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R(T_2 - T_1) + \frac{m}{M}R(T_2 - T_1)$.В итоге $A = \frac{2Q}{i+2}$, где $i = 5$(молекула двухатомная). Численно A = 1,43 кДж.

б) Конечный объем газа $V_2 = \frac{m}{M}RT_2\frac{1}{P}$, где $T_2 = T_1 + \Delta T$. Тогда $V_2 = \frac{m}{M}R(T_1 + \Delta T)\frac{1}{P}$, или $V_2 = \frac{1}{P}\left[\frac{m}{M}RT_1 + \frac{m}{M}R(T_2 - T_1)\right] = \frac{1}{P}\left(\frac{m}{M}RT_1 + A\right)$. Численно V_2= 26·10^{-3} м^3, V_2= 26л.

3. Один моль некоторого идеального газа изобарически нагрели на $\Delta T = 72$К, сообщив ему количество тепла $Q = 1{,}6$ кДж. Найти: а) приращение его внутренней энергии ΔU; б) величину адиабатической постоянной $\gamma = C_p / C_V$.

Дано:

1 моль газа,

ΔT=72 К

Q=1,6 кДж

ΔU=? γ=?

Решение

а) Из уравнения Менделеева - Клапейрона для двух состояний одного моля идеального газа $PV_1 = RT_1$ и $PV_2 = RT_2$ получаем соотношение $P(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1)$, где левая часть есть работа газа $A = P(V_2 - V_1)$, или запишем $A = R\Delta T$.

Из соотношения $Q = \Delta U + A$ находим искомое $\Delta U = Q - A$, или $\Delta U = Q - R\Delta T$.

Численно $\Delta U \approx 1$кДж.

б) Показатель $\gamma = C_p / C_V$ адиабаты находим из соотношения $\gamma = \frac{\frac{i+2}{2}R}{\frac{i}{2}R} = \frac{i+2}{i}$, где величина степеней свободы i не определена.

Значение i находим из соотношения (для одного моля газа) $\Delta U = \frac{i}{2} R\Delta T$,

$i = \frac{2\Delta U}{R\Delta T}$.

Тогда $\gamma = 1 + \frac{2}{i} = 1 + \frac{R\Delta T}{\Delta U}$. Численно $\gamma = 1{,}6$.

4. В баллоне объемом V=15 л при температуре T=300К находится смесь газов: $\nu_1 = 0{,}1$моль кислорода, $\nu_2 = 0{,}2$моль азота и $\nu_3 = 0{,}3$моль углекислого газа. Считая газы идеальными, найти: а) давление смеси; б) среднюю молекулярную массу данной смеси, которая входит в уравнение состояния газа (уравнение Менделеева – Клапейрона).

Дано:
кислород
$\nu_1 = 0{,}1$моль,
азот $\nu_2 = 0{,}2$моль
углекислый газ
$\nu_3 = 0{,}3$моль
V =15л, T=300К

$P = ?$ $M = ?$

Решение

а) Давление смеси идеальных газов в соответствии с законом Дальтона равно сумме парциальных давлений входящих в неё газов

$$P = P_1 + P_2 + P_3, \qquad (1)$$

где парциальные давления указанных газов находим из уравнений состояния каждого из них:

$$P_1 = \frac{\nu_1 RT}{V},\ P_2 = \frac{\nu_2 RT}{V},\ P_3 = \frac{\nu_3 RT}{V}.$$

Укажем, что $\nu_1 = \frac{m_1}{M_1}$, $\nu_2 = \frac{m_2}{M_2}$, $\nu_3 = \frac{m_3}{M_3}$, где m_i и M_i - массы и соответственно молярные массы данных газов.

Подставив значения P_1, P_2, P_3 в соотношение (1), получаем

$$P = \frac{RT}{V}\left(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3\right). \qquad (2)$$

Используя численные условия задачи и значение универсальной газовой постоянной $R = 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$, получаем $P = 1{,}0 \cdot 10^5\,\text{Па}$. Здесь учтено, что 1л=$1 \cdot 10^{-3}$ м^3.

б) Среднюю молярную массу M смеси газов находим из уравнения состояния

$$PV = \frac{m}{M} RT, \qquad (3)$$

где $m = m_1 + m_2 + m_3$ - масса газов. Входящие в это соотношение массы отдельных газов равны: $m_1 = \nu_1 M_1$, $m_2 = \nu_2 M_2$, $m_3 = \nu_3 M_3$.

Из уравнения (3) получаем

$$M = \frac{\left(\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2 + \nu_3 M_3\right) RT}{PV}, \qquad (4)$$

где значение PV находим из (2).

В итоге искомое выражение для молярной массы смеси идеальных газов принимает вид

$$M = \frac{\left(\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2 + \nu_3 M_3\right)}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} \qquad (5)$$

Зная величины молярных масс кислорода (M_1=32·10^{-3} кг/моль), азота (M_2=28·10^{-3} кг/моль), углекислого газа (M_3=44·10^{-3} кг/моль), численные значения ν_1, ν_2, ν_3, получаем M=36,7·10^{-3} кг/моль.

Лабораторная работа № 1 – 21
Механический удар

Введение

Цель работы: ознакомиться с элементами теории механического удара и экспериментально определить время удара τ, среднюю силу удара F, коэффициент восстановления ε.

Практическая ценность работы. В работе студенты изучают основные характеристики удара.

1. Теоретическая часть

Ударом называется изменение состояния движения тела вследствие кратковременного взаимодействия его с другим телом. Во время удара оба тела претерпевают изменение формы (деформацию).

Сущность упругого удара заключается в том, что кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел за короткое время преобразуется в энергию упругой деформации. В процессе удара происходит перераспределение энергии между соударяющимися телами.

Процесс удара, начинающийся с момента соприкосновения соударяющихся поверхностей, можно разделить на две фазы. В течение первой фазы происходит сближение соударяющихся тел. При этом кинетическая энергия системы тел уменьшается, а относительная скорость убывает до нуля. Вслед за этим наступает вторая фаза удара: тела начинают удаляться друг от друга, частично или полностью восстанавливая свою форму, а кинетическая энергия и относительная скорость их возрастает. Когда площадь поверхности соприкосновения тел обращается в нуль, тела прекращают контакт, процесс удара заканчивается.

Наблюдения показывают, что относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего численного значения. Это объясняется тем, что на практике мы никогда не имеем дело с идеально упругими деформациями тел.

Пусть на плоскую поверхность массивной пластины падает шар с некоторой скоростью $\vec{V}_1$ и отскакивает от неё со скоростью $\vec{V}_2$ (рис. 1).

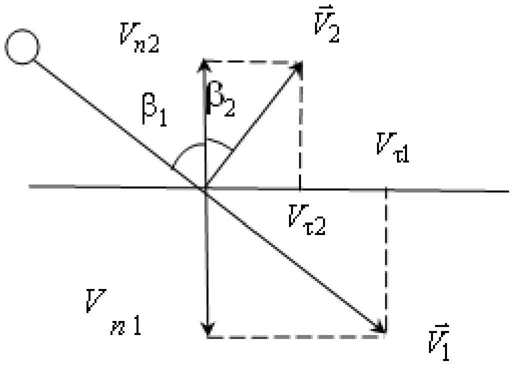

Рис. 1

Обозначим: V_{n1}, $V_{\tau 1}$, V_{n2},$V_{\tau 2}$ - нормальные и тангенциальные составляющие скоростей $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$, а β_1 и β_2 - соответственно углы падения и отражения.

В идеальном случае при абсолютно упругом ударе нормальные составляющие скоростей падения и отражения и их касательные составляющие были бы равны $V_{n1}=V_{n2}$; $V_{\tau 1}=V_{\tau 2}$. Это означало бы, что скорость шара до удара равна его скорости после удара $V_1=V_2$, а также угол падения равен углу отражения $\beta_1 = \beta_2$. В условиях реального удара всегда происходит частичная потеря механической энергии, вследствие чего как нормальные, так и тангенциальные составляющие скорости после удара уменьшаются $V_{n2}<V_{n1}$; $V_{\tau 2}<V_{\tau 1}$. Отношение величины нормальной составляющей относительной скорости после удара к ее величине до удара есть физическая характеристика, зависящая от природы сталкивающихся тел,

$$\varepsilon = \frac{V_{n2}}{V_{n1}}. \qquad (1)$$

Эту характеристику называют коэффициентом восстановления. Числовое значение его лежит между 0 и 1.

2. Экспериментальная часть

2.1. Определение средней силы удара, начальной и конечной скоростей шарика при ударе

Экспериментальная установка состоит из стального шарика А, подвешенного на проводящих нитях, и неподвижного тела В большой массы, с которым шарик соударяется (см. рис. 2). Угол отклонения подвеса α измеряется по шкале. В момент удара на шар массой m действует сила тяжести со стороны Земли $m\vec{g}$, сила реакции со стороны нити $\vec{N}$ и сила удара $\vec{F}$ со стороны тела В. На основании II закона Ньютона

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}, \qquad (2)$$

получаем

$$m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \langle(m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}\rangle\tau, \qquad (3)$$

где $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ - векторы скоростей шара до и после удара, τ - длительность удара; $\langle(m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}\rangle$ - среднее значение равнодействующей сил за время τ.

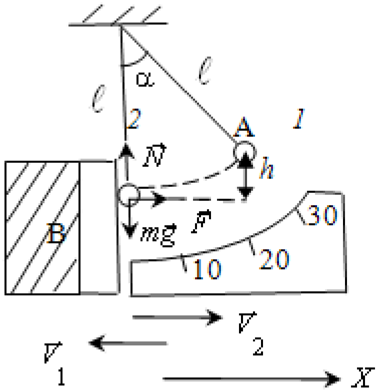

Рис. 2

После проектирования уравнения (3) на горизонтальную ось определим среднюю силу удара

$$\langle F\rangle = \frac{m(V_2 + V_1)}{\tau}. \qquad (4)$$

Скорости шарика V_1 и V_2 определяются на основании закона сохранения механической энергии. Изменение механической энергии шарика при его движении из положения (*1*) (рис.2) в положение (*2*) в поле тяготения Земли определяется суммарной работой всех действующих на него неконсервативных сил. Поскольку внешняя сила $\vec{N}$ перпендикулярна перемещению и нить нерастяжима, то эта сила работы не совершает, сила $m\vec{g}$ является консервативной. Поэтому для шарика можно записать закон сохранения механической энергии

$$mgh = \frac{mV^2}{2}. \qquad (5)$$

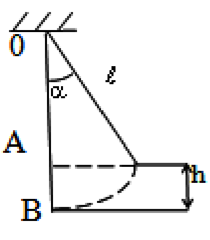

Рис.3

Из чертежа (рис. 3.) следует, что

$$h = AB = OB - OA = l - l\cos\alpha = 2l\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (6)$$

Тогда из уравнения (5) получим значения скоростей шарика до удара V_1 и после удара V_2:

$$V_{1,2} = 2\sin\frac{\alpha_{1,2}}{2}\sqrt{gl}\,, \qquad (7)$$

где $\alpha_{1,2}$ - углы отклонения шарика А до и после соударения.

В данной работе длительность удара шарика о плиту определяется частотомером Ч3 – 54 и измеряется в микросекундах.

2.2. Порядок выполнения работы

1. Включить шнур питания частотомера Ч3 – 54 в сеть переменного напряжения 220В.

2. Нажать кнопку ПУСК, при этом показания частотомера устанавливаются в нулевое положение.

3. Соблюдая осторожность в обращении с шариком и нитями подвеса, отвести нить с шариком на заданный угол α_1.

4. Отпустить шарик и отметить угол максимального отклонения нити α_2 после удара. При этом рукой следует поймать шарик, чтобы исключить возможность повторного удара его о тело В.

5. Для каждого из пяти значений α_1 $(20^0, 30^0, 40^0, 50^0, 60^0)$ проделать опыт по 10 раз, результаты занести в табл. 1.

Таблица 1

№ опыта	20^0		30^0		40^0		50^0		60^0	
	τ_i	α_{2i}	τ_i	α_{2i}	τ_i	α_{2i}	τ_i	α_{2i}	τ_i	α_{2i}

Примечание: буквой τ_i обозначено время удара в i - м опыте.

6. Рассчитать для каждого значения α_1:

а) скорости шарика до удара V_1 и после удара V_2,

б) среднее значение силы удара $\langle F\rangle$,

в) среднюю длительность удара $\langle\tau\rangle = \sum_{i=1}^{N}\frac{\tau_i}{N}$, где N - число опытов,

г) коэффициент восстановления ε.

7. Результаты расчетов занести в табл. 2.

Таблица 2

α_1	$\langle F \rangle$	$\langle \tau \rangle$	V_1	V_2	ε
20^0					
60^0					

8. По полученным результатам построить графики зависимостей $\langle F \rangle$; $\langle \tau \rangle$; ε от V_1.

Контрольные вопросы

1. Две формулировки 2 – го закона Ньютона.
2. Замкнутая система тел.
3. Формулировка закона сохранения импульса.
4. Условия, при которых выполняется закон сохранения механической энергии.
5. Какие законы сохранения выполняются при абсолютно неупругом и абсолютно упругом соударении?
6. Обозначьте, куда направлены мгновенные значения угловой скорости ϖ, углового ускорения $\vec{\varepsilon}$, линейной скорости $\vec{V}$ шарика в положении (1) рис. 2.
7. Чему равна работа силы натяжения $\vec{N}$ при элементарном перемещении шарика по дуге окружности?

Примеры решения задач

21-1. Два тела массой m_1 и m_2 подвешены на гибких, нерастяжимых и невесомых нитях длиной l каждая, как показано на рис.4. Тело m_1 отклонили на угол α и отпустили. Считая соударение тел абсолютно неупругим, а время соударения пренебрежимо малым, определить высоту h, на которую поднимутся тела после удара.

Дано:
m_1, m_2,
l, α;
удар неупругий

h =?

Решение

На уровне линии АВ, проходящей через центры масс тел в первоначальном состоянии, полагаем значение потенциальной энергии П равной нулю. После неупругого взаимодействия оба тела поднимутся на высоту h.

Считаем систему тел (m_1, m_2, Земля) замкнутой (например, отсутствуют силы трения о воздух, в подвеске и др.). После удара в системе действуют: силы тяжести, являющиеся консервативными, и сила натяжения нитей, которые работы по перемещению тел не совершают.

$$(m_1 + m_2)gh = (m_1 + m_2)\frac{V^2}{2}, \qquad (1)$$

где V - скорость, приобретенная телами за период кратковременного взаимодействия.

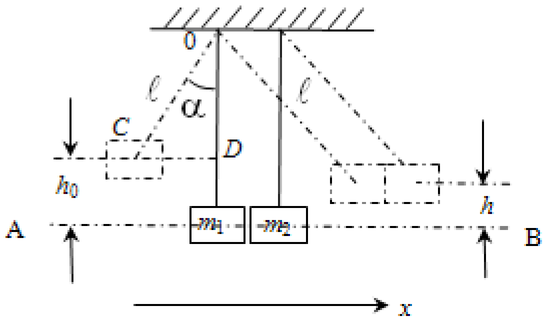

Рис. 4

Отсюда

$$h = \frac{V^2}{2g}.$$

Скорость $\vec{V}$ находится из закона сохранения импульса:

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}, \qquad (2)$$

где $\vec{V}_2 = 0$ (тело m_2 до удара покоилось).

Тогда в проекции на ось x

$$m_1V_1 = (m_1 + m_2)V,$$

Откуда

$$V = \frac{m_1V_1}{m_1 + m_2}.$$

Неизвестная величина скорости V_1 (скорость подлета тела m_1 к телу m_2) находится из закона сохранения механической энергии:

$$m_1gh_0 = m_1\frac{V_1^2}{2}, \quad V_1^2 = 2gh_0.$$

Величина h_0 находится из прямоугольного треугольника COD:

$$h_0 = l - l\cos\alpha = 2l\sin^2\alpha/2.$$

Искомая величина $h = \dfrac{V^2}{2g} = \dfrac{m_1^2V_1^2}{2g(m_1 + m_2)^2} = 2l\dfrac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\sin^2\alpha/2$.

При $m_1 = m_2 = m$ высота подъема тел $h = \dfrac{l}{2}\sin^2\alpha/2$.

21-2. Допустим, что в предыдущей задаче происходит абсолютно упругое соударение. Чему в этом случае равна скорость второго тела сразу после удара и высота h, на которую оно поднимется?

Дано:	Решение
m_1, m_2, l, α; удар упругий	Обозначим искомую скорость V_2'. При абсолютно упругом соударении выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии. Используя из предыдущей задачи обозначение скорости подлета первого тела ко второму V_1, запишем указанные законы:
h =? V_2'=?	

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}_1' + m_2\vec{V}_2'$$

$$\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2},$$

где $\vec{V}_2 = 0$; $\vec{V}_1', \vec{V}_2'$ - скорости тел после соударения.

В проекции на ось x:

$$m_1V_1 = m_1V_1' + m_2V_2',$$

$$m_1V_1^2 = m_1V_1'^2 + m_2V_2'^2.$$

После преобразования система уравнений принимает вид

$$m_1(V_1 - V_1') = m_2V_2', \qquad (1)$$

$$m_1(V_1^2 - V_1'^2) = m_2V_2'^2. \qquad (2)$$

Разложив разность квадратов в уравнении (2), с учетом (1) получаем соотношение:

$$V_1' = V_2' - V_1. \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (1) и (3), получаем

$$V_2' = \frac{2m_1V_1}{m_1 + m_2}.$$

Значение V_1 берем из решения предыдущей задачи:

$$V_1 = \sqrt{2gh_0},$$

где $h_0 = 2l\sin^2\alpha/2$.

В итоге искомая величина скорости второго тела после удара

$$V_2' = \frac{4m_1\sqrt{gl}}{m_1 + m_2}\sin\alpha/2.$$

Высота h, на которую поднимется тело m_2 после абсолютно упругого соударения, определяется из закона сохранения энергии:

$$m_2gh = m_2\frac{V_2'^2}{2},$$

откуда $h = \dfrac{V_2'^2}{2g}$.

Окончательно имеем $h = \dfrac{8m_1^2 l}{(m_1+m_2)^2}\sin^2\alpha/2$.

При $m_1 = m_2 = m \qquad h = 2l\sin^2\alpha/2$.

Лабораторная работа № 1 – 3
Определение момента инерции твердых тел методом трифилярного подвеса

Введение

В природе и технике весьма распространенным является вращательное движение, которое описывается в физике основным законом вращательного движения. Этот закон в случае неподвижной оси вращения можно рассматривать как аналог II закона Ньютона, в котором роль меры инертности играет момент инерции абсолютно твердого тела. Расчет момента инерции твердого тела относительно произвольной оси является в общем случае сложной математической задачей. В данной лабораторной работе приводятся методы решения таких задач экспериментальным путем и расчетным относительно главных (свободных) осей вращения твердых тел. Расчеты приведены в Приложении к работе.

Цель работы. Экспериментальное определение момента инерции диска, цилиндра, кольца и параллелепипеда относительно главных (свободных) осей инерции этих твердых тел; исследование зависимости момента инерции от распределения массы тела относительно оси вращения.

Практическая ценность. В работе изучается используемый в практике метод измерения момента инерции твердых тел. В процессе работы студенты получают навыки измерения момента инерции твердых тел методом крутильных колебаний трифилярного подвеса и умение рассчитывать момент инерции относительно осей симметрии тела.

1. Теоретическая часть

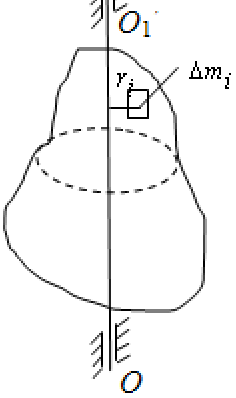

Рис.1

Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться около оси OO_1. Разобьем его на большое число (n) малых объемов ΔV_i с массами Δm_i и будем рассматривать каждый такой элемент в виде материальной точки. Через r_i обозначим соответствующее расстояние от материальной точки до оси OO_1 (рис.1). Величина $\Delta m_i r_i^2$ называется моментом инерции данной материальной точки относительно оси вращения OO_1. Момент инерции всего тела относительно OO_1

будет равен сумме моментов инерции всех материальных точек, на которые мы разбили твердое тело:

$$J = \Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \ldots + \Delta m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 .$$

Следует заметить, что величина момента инерции твердого тела зависит не только от величины массы тела, но также от распределения массы тела относительно оси вращения. Если вещество в теле распределено непрерывно, то сумма заменяется интегралом и момент инерции тела относительно OO_1 запишется:

$$J = \int_m r^2 dm , \qquad (1)$$

где r - расстояние от элементарной массы dm до оси вращения.

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс J_0, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется теоремой Штейнера:

$$J = J_0 + ma^2 , \qquad (2)$$

где J_0 - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс; m – масса тела, a – расстояние между осями.

2. Экспериментальная часть

2.1. Выбор методики эксперимента:

В данной работе момент инерции тела определяется при помощи трифилярного подвеса (рис. 2). Трифилярный подвес представляет собой круглую платформу, подвешенную на трех симметрично расположенных проволоках, укрепленных у краев платформы. Наверху эти проволоки также симметрично прикреплены к трем точкам треноги, расположенным по окружности меньшего радиуса. Платформа может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси, перпендикулярной к ее плоскости и проходящей через ее середину: центр тяжести платформы при этом перемещается по оси вращения. Период колебаний определяется моментом инерции платформы. Он будет другим, если платформу нагрузить каким - либо телом. Этим и пользуются в настоящей работе.

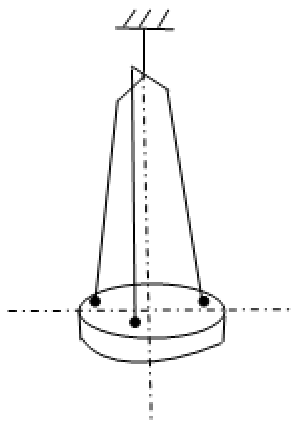

Рис. 2

Если платформа массой m, вращаясь в одном направлении, поднялась на высоту h, то потенциальная энергия в крайнем верхнем положении

$$\Pi = mgh\,,$$

где g – ускорение свободного падения тела.

Вращаясь в другом направлении, платформа придет в положение равновесия с кинетической энергией, равной

$$T = {J\omega_0^2}/{2}\,,$$

где J – момент инерции платформы, ω_0 - угловая скорость в момент достижения ею положения равновесия.

Пренебрегая работой сил трения, на основании закона сохранения механической энергии имеем

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 = mgh\,. \tag{3}$$

Считая, что платформа совершает гармонические колебания, можно написать зависимость угла поворота платформы от времени:

$$\alpha = \alpha_0 \sin\frac{2\pi}{T}t\,,$$

где α – мгновенное значение угла поворота платформы; α_0 - амплитудное значение угла поворота, T – период полного колебания; t- время.

Угловая скорость ω является первой производной от угла поворота α по времени:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi}{T}\alpha_0 \cos\frac{2\pi}{T}t\,.$$

В момент прохождения через положение равновесия абсолютное значение угловой скорости будет максимальным:

$$\omega_0 = \frac{2\pi\alpha_0}{T}\,. \tag{4}$$

Подставляя это значение в уравнение (3), получим

$$mgh = \frac{1}{2}J\left(\frac{2\pi\alpha_0}{T}\right)^2. \tag{5}$$

Учитывая, что при малых углах поворота

$$h = \frac{Rr\alpha_0^2}{2l},$$

где R – расстояние от оси платформы до точек закрепления проволок на платформе; r – расстояние от оси платформы до точек закрепления проволоки на треноге; ℓ – длина каждой проволоки подвеса, окончательно получаем

$$J = \frac{mgRr}{4\pi^2 l} T^2. \tag{6}$$

По этой формуле может быть определен момент инерции платформы и тела, положенного на нее, так как все величины в правой части могут быть непосредственно измерены. В случае нагруженной платформы массу m берут равной сумме масс платформы и тела. Вычисленный момент инерции системы $J_{\text{сист}}$ складывается из момента инерции пустой платформы и тела:

$$J_{\text{сист}} = J_0 + J_T, \tag{7}$$

где J_0 - момент инерции платформы; J_T - момент инерции тела.

Из соотношения (7) определяется момент инерции тела

$$J_T = J_{\text{сист}} - J_0. \tag{8}$$

2.2. Работа на экспериментальной установке

Платформа в нерабочем положении арретирована, т.е. покоится на столике, который можно опускать и поднимать, закрепляя на нужной высоте с помощью специального винта на штативе. Вращательный импульс, необходимый для начала крутильных колебаний, сообщается платформе путем поворота треноги вокруг ее оси с помощью шнура, приводящего в движение рычажок, связанный с треногой. Этим достигается почти полное отсутствие других, некрутильных колебаний, затрудняющих измерения.

Задание 1. Определение момента инерции ненагруженной платформы

1. Разарретировав платформу (опустив столик под платформой), плавным натяжением шнура сообщают ей вращательный импульс, в результате чего платформа придет в колебательное движение.

2. Секундомером измеряют время t двадцати полных колебаний ($n = 20$). Измерения повторяют 3 раза.

3. Усредняют результат измерения времени:

$$\langle t\rangle = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}(t_i) \tag{9}$$

и находят период колебаний $\langle T\rangle$ ненагруженной платформы по формуле

$$\langle T\rangle = \frac{\langle t\rangle}{20}. \tag{10}$$

4. По формуле (6) рассчитывают момент инерции пустой платформы J_0.

Задание 2. Определение моментов инерции конкретных тел опытным путем.

1. Нагружают платформу таким образом, чтобы конкретное тело (диск, цилиндр, кольцо или параллелепипед выбирается по указанию преподавателя) вписалось в соответствующие контуры, изображенные на платформе трифилярного подвеса.

2. Нагруженную платформу разарретируют и измеряют время 20 полных колебаний. Измерение повторяют 3 раза.

3. Аналогично из соотношений (9,10) определяют средний период колебаний нагруженной платформы.

4. Рассчитывают момент инерции нагруженной платформы $J_{\text{сист}}$ по формуле (6).

5. По формуле (8) находят момент инерции конкретного тела J_T.

Задание 3. Определение моментов инерции конкретных тел теоретическим путем.

1. Измеряют штангенциркулем все необходимые размеры предложенных тел (диска, цилиндра, кольца, параллелепипеда, пустой платформы).

2. Моменты инерции конкретного тела $J_T^{\text{теор}}$ и пустой платформы $J_0^{\text{теор}}$ теоретически рассчитывают по формулам, указанным в Приложении.

3. Результаты расчетов для анализа сводят в следующую таблицу.

Конкретное тело	J_T	$J_T^{\text{теор}}$	$\frac{J_T - J_T^{\text{теор}}}{J_T}100\%$
пустая платформа			
диск			

Конкретное тело	J_T	$J_T^{\text{теор}}$	$\frac{J_T - J_T^{\text{теор}}}{J_T} 100\%$
кольцо			
параллелепипед			

Измерения и расчет момента инерции параллелепипеда производится в трех плоскостях.

Последняя графа дает возможность оценить относительное расхождение теоретических и экспериментальных результатов. Проанализируйте и объясните полученные результаты.

Контрольные вопросы

1. Что называется моментом инерции абсолютно твердого тела относительно оси вращения? От чего он зависит? Теорема Штейнера (на примере решения задачи 3-2).
2. Как теоретически подсчитать момент инерции тела (параллелепипеда, цилиндра, стержня, шара, конуса) относительно главных осей?
3. Угловая скорость и угловое ускорение. Направление и модуль каждой из этих величин (на примере данной работы).
4. Основной закон динамики вращательного движения (в векторном виде) для твердого тела, ось вращения которого закреплена в подшипнике. Как он запишется для крутильных колебаний платформы?
5. Направление углового ускорения и угловой скорости при подъеме и спуске платформы?
6. В чем сущность закона сохранения механической энергии? При каких условиях справедлив закон сохранения механической энергии? В какой форме он записывается в данной работе?
7. Метод определения момента инерции тела, помещенного на платформу.

Примеры решения задач

3-1. Вычислить момент инерции тонкого однородного стержня длины l и массы m относительно оси вращения, проходящей через центр массы (середину стержня).

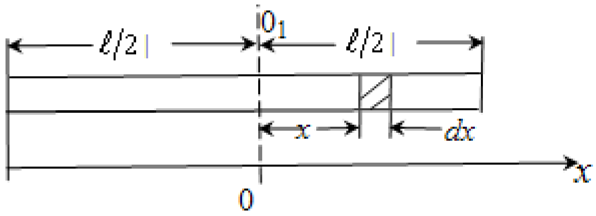

Рис. 3

Дано:

l, m

$J_{OO_1}=?$

Решение

Обозначим ρ - объемную плотность материала стержня, $\rho=\frac{m}{V}$, V - объем, S – площадь поперечного сечения стержня.

Момент инерции рассчитываем по формуле $J=\int\limits_m r^2 dm$.

В соответствии с рисунком элементарная масса $dm=\rho dV=\rho S dx$, расстояние массы dm от оси вращения $r=x$. В силу симметрии

$$J_{OO_1}=2\int\limits_0^{l/2} x^2 \rho S dx=\frac{2}{3}\rho S\left(\frac{l}{2}\right)^3=\frac{\rho S l l^2}{12}=\frac{ml^2}{12}.$$

3-2. Вычислить момент инерции тонкого однородного стержня длины l и массы m относительно оси вращения, проходящей через его торец.

Дано:

l, m

$J=?$

Решение

Первый способ. Аналогично предыдущей задаче

$$J=\int\limits_0^l x^2 \rho S dx=\rho S\frac{l^3}{3}=\frac{ml^2}{3}.$$

Второй способ. Зная величину момента инерции стержня относительно оси вращения, проходящей через его центр масс $J_C=\frac{ml^2}{12}$, воспользуемся теоремой Штейнера:

$$J=J_C+m\left(\frac{l}{2}\right)^2;$$

$$J=\frac{ml^2}{12}+\frac{ml^2}{4}=\frac{ml^2}{3}.$$

3-3. Вычислить момент инерции однородного прямоугольного параллелепипеда со сторонами a, b, c и массой m относительно оси z, проходящей через его центр массы.

Дано:
a, b, c
m

J_z=?

Решение

Найдем момент инерции прямоугольного параллелепипеда относительно его геометрической оси, которая проходит через центр основания с длиной сторон a и b (на рисунке эта ось z перпендикулярна плоскости рисунка). Пусть две другие координатные оси x и y проходят через центр основания и параллельны его сторонам.

В силу симметрии момент инерции параллелепипеда $J_z = 4J_0$, где J_0 - момент инерции 1/4 части этого параллелепипеда относительно той же оси z. Вычисления проводятся по формуле

$$J_0 = \int_m r^2 dm,$$

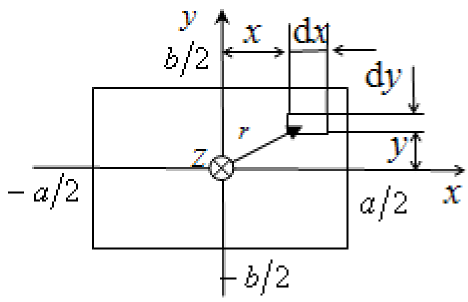

Рис. 4

где по теореме Пифагора $r^2 = x^2 + y^2$, $dm = \rho dV = \rho c dx dy$ (c - толщина параллелепипеда, $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m}{abc}$ - плотность вещества).

$$J_0 = \int_0^{a/2}\int_0^{b/2}\left(x^2 + y^2\right)\rho c dx dy, \qquad \text{или}$$

$$J_0 = \rho c \int_0^{a/2}\int_0^{b/2}\left(x^2 + y^2\right)dx dy.$$

Вычисляем интеграл:

$$\int_0^{b/2}(x^2 + y^2)dy = x^2 y\Big|_0^{b/2} + \frac{y^3}{3}\Big|_0^{b/2} = \frac{b}{2}x^2 + \frac{b^3}{24}.$$

Вычисляем интеграл:

$$\int_0^{a/2}\left(\frac{bx^2}{2} + \frac{b^3}{24}\right)dx = \frac{b}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{a/2} + \frac{b^3}{24}x\Big|_0^{a/2} = \frac{ba^3}{48} + \frac{ab^3}{48}.$$

В итоге $J_0 = \rho c\dfrac{ab(a^2 + b^2)}{48}$, $\qquad J_z = 4\rho c\dfrac{ab(a^2 + b^2)}{48}$.

Подставив значение ρ, получаем

$$J_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}.$$

3-4. Вычислить момент инерции однородного тела массой m с осевой симметрией относительно этой оси, например, момент инерции цилиндра высотой h с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2 относительно оси z.

Дано:
R, m

J =?

Решение

В качестве малого элемента (исходя из осевой симметрии) удобно выбрать цилиндр с размерами r, dr, h. Масса этого кольца $dm = \rho dV = \rho h dS = \rho h 2\pi r dr$. Тогда момент инерции цилиндра

$$J_z = \int\limits_{R_1}^{R_2} r^2 dm = 2\pi\rho h \int\limits_{R_1}^{R_2} r^3 dr .$$

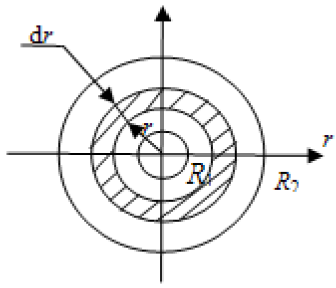

Рис. 5

Вычислив интеграл и учтя, что $m = \rho h \pi (R_2^2 - R_1^2)$, получим окончательно

$$J_z = \frac{m(R_1^2 + R_2^2)}{2} .$$

Из этой формулы легко получить момент инерции диска ($R_1 \to 0$) и бесконечно тонкого кольца ($R_1 \to R_2, R_1 \approx R_2$).

3-5. Вычислить момент инерции однородного конуса массой m и основанием радиуса R относительно оси симметрии.

Дано: R_1, R_2, h, m

J_z=?

Решение

Вводим дополнительно параметры: ρ- объемная плотность материала, h- высота конуса. Разбиваем конус на «элементарные» диски с радиусами $y(x) = \frac{R}{h} x$ и толщиной dx.

Момент инерции «элементарного» диска относительно оси x запишем в виде

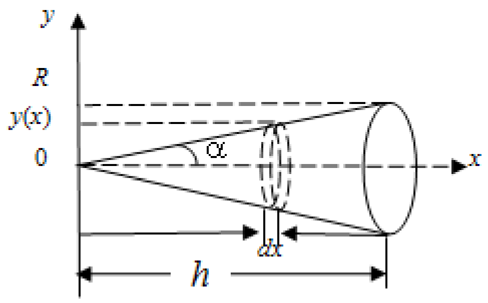

Рис. 6

$$dJ = \frac{dmy^2}{2},$$

где dm- масса «элементарного» диска.

$$dJ = \frac{1}{2}\rho dV y^2 = \frac{1}{2}\rho\pi y^2 dx y^2 = \frac{\pi\rho y^4}{2} dx = \frac{\pi\rho}{2}\left(\frac{Rx}{h}\right)^4 dx.$$

Момент инерции всего конуса

$J = \frac{\pi\rho R^4}{2h^4}\int\limits_0^h x^4 dx = \frac{\pi\rho h R^4}{10}$. С учетом того, что объем конуса $V = 1/3\pi R^2 h$, получим $J = \frac{3}{10} mR^2$.

3-6. Вычислить момент инерции сплошного однородного шара массы m и радиуса R относительно его оси вращения OO_1.

Дано: R, m

J =?

Решение

«Разбиваем» шар на «элементарные» диски с радиусами r и толщиной dy. Момент инерции однородного «элементарного» диска относительно оси вращения OO_1 $dJ = \frac{dmr^2}{2}$.

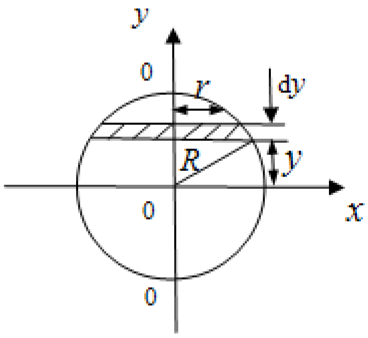

Рис. 7

В силу симметрии рассматриваем одну половину ра, момент инерции которой

$$J_{1/2}=\int_0^R \frac{dmr^2}{2},$$

где $r^2=R^2-y^2$ (см. рис. 7),

$$dm=\rho dV_{\text{диска}}=\frac{m}{V_{\text{шар}}}dV_{\text{диска}}=\frac{m}{4/3\pi R^3}\pi r^2 dy=\frac{3m}{4R^3}r^2 dy.$$

Подставив значения dm, r^2 и произведя вычисления, получаем $J_{1/2}=\frac{mR^2}{5}$. Тогда момент инерции шара $J=2J_{1/2}$,

$$J=\frac{2mR^2}{5}.$$

3-7. Вычислить момент инерции тонкого сферического слоя массы m и радиуса R относительно оси, проходящей через его центр.

Дано:	Решение
R, m	
J =?	

Выразим момент инерции однородного шара массы m и радиуса R относительно его диаметральной оси через плотность материала:

$$J=\frac{2mR^2}{5}=\frac{2}{5}\rho\frac{4}{3}\pi R^3R^2=\frac{8}{15}\pi\rho R^5.$$

Дифференцируя это соотношение, получим величину момента инерции тонкого слоя толщиной dR $dJ=\frac{8}{3}\pi\rho R^4 dR$, где $4\pi R^2 dR$ - объем сферического слоя толщиной dR, $\rho 4\pi R^2 dR$ - масса этого слоя.

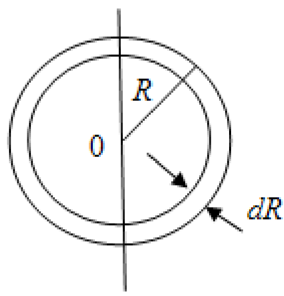

Рис.8

В итоге момент инерции тонкого сферического слоя относительно оси, проходящей через его центр

$$J=\frac{2mR^2}{3}.$$

Лабораторная работа № 1 – 8
Изучение основного закона динамики вращательного движения твердого тела

Введение

Вращение – одна из распространенных форм движения в природе и технике. Вращаются колеса автомобилей, оси различных движущихся агрегатов, вращаются планеты вокруг своих осей и вокруг Солнца, вращаются звезды и целые галактики. Знать хорошо механику полезно и с той точки зрения, что часто механические модели используются для объяснения более сложных физических явлений в молекулярной физике, электродинамике, атомной физике и т. д. Таким образом, для дальнейшего успешного изучения физики и других дисциплин, в том числе и специальных, необходимо прочно усвоить фундаментальные законы механики и, конечно, основной закон динамики вращательного движения твердого тела.

Цель работы: изучение основного закона динамики вращательного движения твердого тела на примере маятника Обербека.

1. Теоретическая часть

Абсолютно твердым телом называется такое тело, расстояния между частицами которого не меняются во время движения.

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси все его точки описывают окружности определенных радиусов $\vec{r}$. Центры этих окружностей лежат на оси вращения (рис.1,*а*).

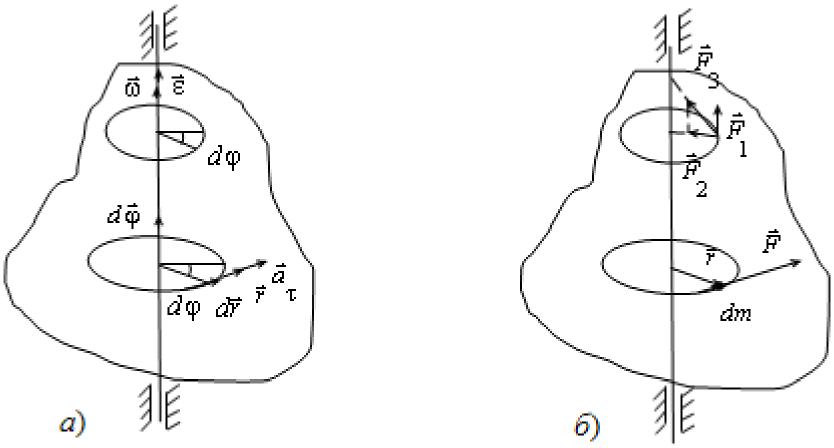

Рис. 1

Мерой действия, вызывающего вращение твердого тела, является момент силы:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right], \text{ или} \tag{1}$$

$$M = rF\sin\alpha,$$

где $\vec{r}$ - радиус–вектор точки приложения силы; $\vec{F}$ - сила, приложенная к телу; α – угол между направлениями векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$.

Следует помнить, что одна масса не является мерой инертности при вращательном движении твердого тела, так как при одной и той же массе инертность вращающихся тел может быть разной из-за различного ее распределения относительно оси вращения.

Мерой инертности при вращательном движении твердого тела является момент инерции J - скаляр, определяемый как

$$J = \sum_{i=1}^{N} r_i^2 \Delta m_i \ ,$$

или для однородных тел

$$J = \int_m r^2 dm \ , \qquad (2)$$

где Δm_i, dm - масса малого или элементарного объема твердого тела; r – расстояние от этого объема до оси вращения.

Основной закон динамики вращательного движения твердого тела: геометрическая сумма моментов внешних сил $\vec{M} = \sum_{j=1}^{k} \vec{M}_j$, действующих на тело, равна скорости изменения момента импульса этого тела:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \ , \qquad (3)$$

где в случае тела, симметричного относительно неподвижной оси вращения

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} \ , \qquad (4)$$

есть момент импульса твердого тела, совпадающий по направлению с вектором угловой скорости $\vec{\omega}$.

При $J = \text{const}$ с учетом (4) закон (3) имеет вид

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M} \ , \qquad (5)$$

где угловое ускорение $\vec{\varepsilon}(t) = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$.

Экспериментальная проверка выполнения закона (5) состоит в том, чтобы показать:

1) пропорциональность углового ускорения ε моменту силы *M*, т.е. $\varepsilon \sim M$;

2) обратную пропорциональность углового ускорения ε моменту инерции *J*, т. е. $\varepsilon \sim 1/J$.

Первое проверяется при неизменном моменте инерции $J = \text{const}$ для двух разных моментов сил M_1 и M_2:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ . \qquad (6)$$

Второе проверяется при неизменном моменте силы $M = \text{const}$ для двух разных моментов инерции J_1 и J_2:

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ . \qquad (7)$$

3) При $\vec{M} = \sum_{j=1}^{k} \vec{M}_j = \mathrm{const}$ в течение времени Δt формула (3) преобразуется в формулу $\Delta L = M\Delta t$. Тогда для двух разных опытов можно проверить справедливость отношения

$$\frac{\Delta L_1}{\Delta L_2} = \frac{M_1 \Delta t_1}{M_2 \Delta t_2},$$

или

$$\frac{\Delta L_1}{\Delta L_2} = \frac{M_1 t_1}{M_2 t_2}, \qquad (8)$$

если отсчет времени производится от $t = 0$.

Величины $\Delta L_1 = J_1 \omega_1$ и $\Delta L_2 = J_2 \omega_2$ - соответствующие изменения моментов импульсов твердого тела при начальной угловой скорости $\omega_0 = 0$.

2. Описание экспериментальной установки и вывод рабочих формул

2.1. Экспериментальная установка (маятник Обербека) состоит из блока А радиусом r и жестко связанной с ним крестовины (рис.2), на которую насажены четыре одинаковых груза массой m_0. На блок намотана нить, к концу которой привязан груз массой m. Полагаем, что нить невесома, нерастяжима и не проскальзывает по блоку. Груз, опускаясь, разматывает нить и приводит во вращательное движение блок А с крестовиной.

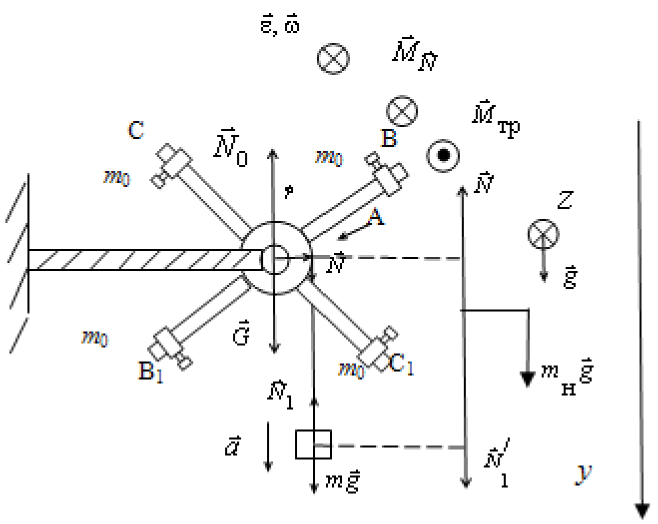

Рис. 2

На рис.2 показаны силы, действующие на различные элементы установки. Так, на груз m действуют: $m\vec{g}$ - сила тяжести; $\vec{N}_1$ - сила реакции нити. На нить: $\vec{N}'$ - сила со стороны блока; $\vec{N}_1'$ - сила со стороны груза m; $m_{н}\vec{g}$ - сила тяжести, если нить весомая. На блок: $\vec{N}$ - сила со стороны нити; $\vec{N}_0$ - сила реакции со стороны оси; $\vec{G}$ - сила тяжести блока, крестовины и четырех грузов массой m_0. Поступательное движение груза m, нити $m_{н}$ и вращательное движение блока А можно описать с помощью второго и третьего законов Ньютона и основного закона динамики вращательного движения твердого тела (5):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1,$$

$$m_{н}\vec{a}_{н} = m_{н}\vec{g} + \vec{N}_1' + \vec{N}',$$

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{тр} + \vec{M}_N + \vec{M}_G + \vec{M}_{N_0}, \qquad (9)$$

$$\vec{N} = -\vec{N}', \; \vec{N}_1 = -\vec{N}_1',$$

где $\vec{M}_{\text{тр}}$ - момент сил трения (тормозящий момент); $\vec{M}_N$, $\vec{M}_G$, $\vec{M}_{N_0}$ - моменты сил $\vec{N}$, $\vec{G}$, $\vec{N}_0$ соответственно; J - момент инерции блока А с крестовиной и грузами m_0 ($J = J_{\text{блока}} + J_{\text{крестовины}} + 4J_{\text{грузов}\, m_0}$); $m_{\text{н}}$, $\vec{a}_{\text{н}}$ - масса и ускорение нити.

Полагаем, что нить нерастяжима, тогда ее ускорение $\vec{a}_{\text{н}}$ равно ускорению $\vec{a}$ груза m. Нить не скользит по блоку. Это означает, что $a_{\text{н}}$ равно тангенциальному ускорению a_τ точек блока на его боковой поверхности: $a = a_{\text{н}} = a_\tau$. При этом условии угловое ускорение ε можно найти из равенства

$$\varepsilon = \frac{a}{r}. \tag{10}$$

При условии невесомости нити $m_{\text{н}} = 0$ из второго и четвертого уравнений (9) следует, что $\left|\vec{N}\right| = \left|\vec{N}_1\right| = N$. Моменты сил $\vec{M}_G$=0 и $\vec{M}_{N_0}$=0, так как силы пересекают ось вращения. Момент силы $\vec{M}_N$ согласно (1) равен $\vec{M}_N = \left[\vec{r}, \vec{N}\right]$, или $M_N = rN\sin\alpha$. Поскольку $\alpha = 90^0$ (см. рис.2),

$$M_N = rN\;. \tag{11}$$

2.2. Вывод рабочих формул без учета $M_{\text{тр}}$.

Полагая в (9) $M_{\text{тр}}$=0 и учитывая (10) и (11), из (9) в проекциях на оси y и z получим

$$\begin{cases} ma = mg - N, \\ J\dfrac{a}{r} = rN. \end{cases} \tag{12}$$

Из (12) найдем момент силы N:

$$M_N = M = mr(g - a) \tag{13}$$

и момент инерции вращающейся части установки:

$$J = \frac{M}{\varepsilon}. \tag{14}$$

Из уравнения (13) видно, что момент силы в рассматриваемой системе тел зависит от массы груза m и радиуса блока. От этих же факторов зависит и ускорение a. Движение груза m можно считать равноускоренным, так как сила N при постоянстве вышеперечисленных факторов не меняется. Тогда ускорение груза m при его начальной скорости $V_0 = 0$ определится по формуле

$$a = \frac{2h}{t^2}, \tag{15}$$

где h - высота, с которой опускается груз; t - время его движения.

Поскольку крестовина с грузами m_0 начинает вращение из состояния покоя, ее угловую скорость в конечный момент движения груза m можно вычислить по формуле

$$\omega = \varepsilon t, \tag{16}$$

а изменение ее момента импульса ΔL за это время

$$\Delta L = J\omega. \tag{17}$$

В результате равенство (8) принимает вид

$$\frac{J_1\omega_1}{J_2\omega_2} = \frac{M_1 t_1}{M_2 t_2}. \tag{18}$$

Измерив высоту движения груза m, время t его движения и радиус r блока, можно по формулам (15), (10), (13), (14), (16) вычислить $a, \varepsilon, M, J, \omega$.

3. Правила техники безопасности при выполнении работы

1. Грузы массой m_0 не снимать с крестовины без специального указания преподавателя.
2. Предохранительные шайбы на концах стержней крестовины снимать строго запрещается.
3. Грузы m_0 прочно и осторожно крепить на крестовине в указанном преподавателем месте.
4. Категорически запрещается останавливать крестовину рукой при ее быстром вращении.

4. Порядок выполнения работы

1. Установить грузики m_0 на крестовине на одинаковых расстояниях R_1. На рис. 3 приведена схема определения R, из которой следует, что $R = {(l+d)}/{2}$.

Проверить, соответствует ли установка грузов m_0 на крестовине состоянию безразличного равновесия системы. Для этого рекомендуется несколько раз привести маятник во вращение, каждый раз давая ему возможность остановиться. Подумайте, зачем это нужно? Как на основании этих опытов можно узнать, хорошо ли сбалансирован маятник (т.е. действительно ли он находится в безразличном равновесии)?

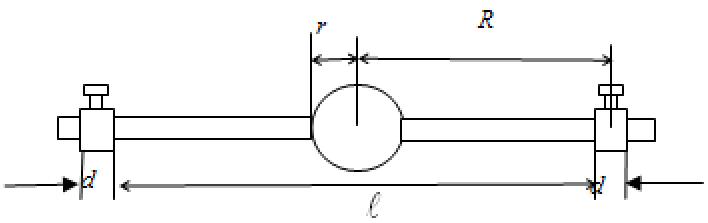

Рис.3

2. Прикрепить к концу нити груз m и, наматывая нить на блок вращением крестовины, установить его на некоторой высоте h, отмечая ее между начальным и конечным положениями груза m. Величины m, h, R и радиус блока r указываются преподавателем.

3. Отпустить груз. Секундомером или другим устройством, предназначенным для измерения времени, измерить время падения груза m_1. Опыт повторить 5 раз.

4. Передвинуть грузы m_0 на другое расстояние R_2 и проделать еще 5 опытов по измерению времени падения того же груза m_1.

5. Повторить те же измерения, прикрепив к концу нити другой груз массой m_2, причем выбранные расстояния между грузами m_0 на крестовине R_1 и R_2 сохранить.

6. Результаты измерений свести в табл. 1.

m, кг	h, м	r, м	R, м	№№ опытов / t, с					$\langle t \rangle$, с

7. Пользуясь формулами (15), (10), (13), (14), (16), найти линейные и угловые ускорения, моменты сил, моменты инерции и угловые скорости для всех опытов.

8. Полученные результаты свести в табл. 2.

№	m, кг	R, м	a, м/с^2	ε, с$^{-2}$	M, Н·м	J, кг·м^2	ω, с$^{-1}$	L, кг·м^2/с
1	$m_1 =$							
2	$m_1 =$							
3	$m_2 =$							
4	$m_2 =$							

9. По полученным данным проверить справедливость равенств (6), (7), и (18).

Контрольные вопросы

1. Показать, что $\left|\vec{N}\right| = \left|\vec{N}_1\right|$.

2. В чем заключается основной закон динамики вращательного движения абсолютно твердого тела?(Запись сделать в векторной форме.)

3. Что такое момент инерции? От чего он зависит? Как рассчитать его для симметричных тел относительно неподвижной оси?

4. Что такое момент силы? Модуль и направление момента силы. Какая сила создает вращающий момент крестовины и как он определяется в данной работе? Выполнение каких условий необходимо, чтобы момент силы был постоянным?

5. Угловое ускорение, его направление, модуль. Найти величину и направление углового ускорения крестовины. Какими правилами при этом следует руководствоваться?

6. Что такое момент импульса материальной точки и тела? От чего он зависит? Как он определяется в данной работе?

7. Метод определения отношений $\frac{M_1}{M_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$; $\frac{\Delta L_1}{\Delta L_2} = \frac{M_1 t_1}{M_2 t_2}$; $\frac{J_1}{J_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$. Какие условия необходимы, чтобы выполнялось каждое из приведенных равенств? Объяснить результаты опытов.

Примеры решения задач

8-1. Маховик в форме сплошного диска, момент инерции которого $J = 1{,}5$êã·ì^2, вращаясь равнозамедленно, за время $t = 1$ ìèí уменьшил частоту своего вращения с $n_0 = 240$ об/мин до $n_1 = 120$ об/мин. Определить: а) угловое ускорение; б) момент M_z сил торможения; в) работу сил торможения A.

Дано:

J, t, n_0, n_1

$\varepsilon = ?$ $M_z = ?$ $A = ?$

Решение

а) Уравнение динамики вращательного движения маховика в скалярном виде $J\varepsilon = M$, где $\varepsilon = \frac{\omega_0 - \omega_1}{t_1 - t_0}$ (так как движение равнозамедленное) или $\varepsilon = \frac{2\pi(n_0 - n_1)}{t}$. Численно $\varepsilon = 0{,}21$ рад/с^2.

б) Момент M_z сил торможения $M_z = J\varepsilon$. Численно (по модулю) $M_z = 0{,}31$ Н·м.

в) Работа сил торможения $A = \Delta T = T_1 - T_0$,

где $T_1 = \frac{J\omega_1^2}{2}$, $T_0 = \frac{J\omega_0^2}{2}$.

Угловые скорости выразим через частоты вращения:

$\omega_1 = 2\pi n_1$ и $\omega_0 = 2\pi n_0$. Окончательно получаем выражения $A = 2\pi^2 J(n_1^2 - n_0^2)$. Необходимо учесть, что $n_0 = 4$ об/с, $n_1 = 2$ об/с.

Численно $A = –355$ Дж.

8-2. Вертикально расположенный однородный стержень массой m_1 и длиной l может без трения вращаться вокруг своего верхнего конца в вертикальной плоскости. В нижний конец стержня попала, застряв, горизонтально летевшая пуля массой $m_2 << m_1$. В результате этого стержень отклонился на угол α. Найти скорость пули перед ударом.

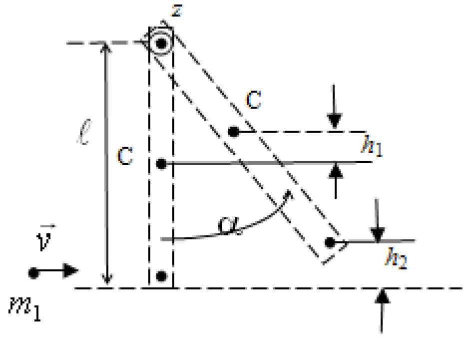

Рис. 4

Дано: Решение

l, m_1, m_2, α

$V = ?$

Введем обозначения: С – центр масс стержня; $h_{1,2}$ - высота подъема соответственно центра масс стержня и пули, застрявшей в его нижнем конце; V - скорость пули на подлете к стержню; ω - угловая скорость вращения системы

Запишем закон сохранения момента импульса системы тел (пуля – «стержень – пуля»):

$$L_{1z} = L_{2z} \text{ или } lm_2V = J\omega. \quad (1)$$

Момент инерции системы «стержень – пуля» относительно оси z подвеса $J = \frac{m_1 l^2}{3} + m_2 l^2$.

Из выражения (1) получаем значение скорости пули:

$$V = \frac{J\omega}{m_2 l}, \quad V = \frac{l}{m_2}\left(\frac{m_1}{3} + m_2\right)\omega, \quad (2)$$

где ω - неизвестная величина.

Запишем закон сохранения механической энергии для стержня с застрявшей в нем пулей:

$$\frac{J\omega^2}{2} = m_1 g h_1 + m_2 g h_2. \quad (3)$$

Из (3) находим

$$\omega^2 = \frac{2g}{J}(m_1 h_1 + m_2 h_2), \quad (4)$$

где $h_1 = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\alpha = \frac{l}{2}(1-\cos\alpha) = l\sin^2\frac{\alpha}{2}, h_2 = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha) = 2l\sin^2\frac{\alpha}{2}$

Подставив h_1 и h_2 в (4), получаем

$$\omega^2 = \frac{2g(m_1 + 2m_2)\sin^2\alpha/2}{l(m_1/3 + m_2)}.$$

Воспользуемся условием $m_2 << m_1$. Тогда

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{l}}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Скорость V подлета пули определена выражением (2). Подставив в (2) значение ω и вновь воспользовавшись условием $m_2 << m_1$, получаем значение

$$V = \frac{m_1}{m_2}\sqrt{\frac{2gl}{3}}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

8-3. С каким ускорением будет опускаться катушка массой m_0, если масса подвешенного к ней груза равна m? Момент инерции катушки относительно ее оси круговой симметрии равен J, все нити намотаны в одну сторону так, что моменты всех сил натяжения относительно оси катушки направлены одинаково. Радиус осевого валика равен r.

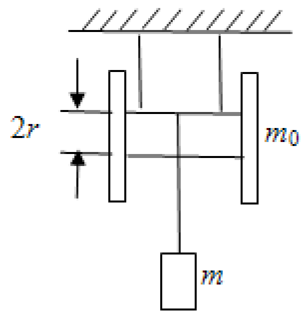

Рис. 5

Дано:
r, m, m_0, J
a =?

Решение

Представим вспомогательный рисунок с расстановкой сил и параметров движения (рис. 6).

Система уравнений движения материальных тел в векторной форме:

$$m_0\vec{a}_0 = m_0\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1,$$
$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T},$$
$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_N + \vec{M}_{T_1},$$

Так как нить невесома, то $|\vec{T}| = |\vec{T}_1| = T$..

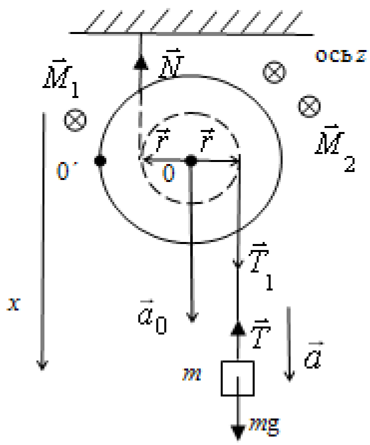

Рис. 6

$a_\tau = a_0$ - тангенциальное ускорение обода вала радиуса r равно ускорению намотанной нити, к которой прикреплен груз m (в силу не проскальзывания нити по валу). Тогда $\varepsilon = \dfrac{a_0}{r}$.

Величина ускорения a нити с грузом m равна удвоенной величине ускорения a_0 центра масс катушки $a = 2a_0$, так как мгновенные расстояния от точки O' составляют r и $2r$.

Полученная система уравнений в проекциях на оси x и z записывается в виде

$$\begin{cases} 2a_0 = mg - T, \\ m_0 a_0 = m_0 g - N + T, \\ J\dfrac{a_0}{r} = rN + rT. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений относительно a_0, получаем:

$$a_0 = \frac{m_0 + 2m}{m_0 + 4m + J/r^2}\, g\,.$$

Краткий список астрономических величин и физических констант

Радиус Земли $R_З$=6,37·10^{6} м

Масса Земли $M_З$=5,98·10^{24} кг

Масса Солнца $M_с$=1,99·10^{30} кг

Масса Луны $M_л$=7,35·10^{22} кг

Среднее расстояние от Земли до Солнца r=1,49·10^{11} м

Средний радиус лунной орбиты r=3,84·10^{8} м

Гравитационная постоянная γ=6,67·10^{-11} Н·м^2/кг^2

Стандартное ускорение свободного падения g=9,81 м/с^2

Постоянная Авогадро $N_А$=6,02·10^{23} моль$^{-1}$

Постоянная Больцмана $k_Б$=1,38·10^{-23} Дж/К

Универсальная газовая постоянная R=8,31 Дж/(моль·К)

Стандартный объем моля газа V_0=22,4 л/моль

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трофимова Т.И. Курс физики /Т.И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 2004.

2. Савельев И.В. Курс общей физики: в 5 кн. Кн. 2: Электричество и магнетизм / И.В. Савельев. – М.: ООО «Издательство Астрель»; ООО «Издательство АСТ», 2002.

3. Детлаф А.А. Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Издательский центр «Академия», 2003.

4. Иродов И.Е. Механика. Основные законы /И.Е. Иродов. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.

5. Иродов И.Е. Физика микросхем. Основные законы /И.Е. Иродов. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.

6. Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики для втузов/Т.И. Трофимова. – М.: ООО «Издательский дом ОНИКС XXI век»: ООО «Издательство «Мир и образование», 2003.