МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. Р.Е.Алексеева»

Кафедра «Прикладная математика»

ПРАКТИКУМ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДСТВ ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СРЕДЕ MATHCAD К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО КУРСУ «ИНФОРМАТИКА»

Методическая разработка
для студентов всех форм обучения
для всех специальностей

Нижний Новгород 2012

Составители: Т.В. Моругина, С.П. Никитенкова, О.И. Чайкина

УДК 651.3.06

Практикум по численным методам с использованием средств программирования в среде MathCAD к лабораторным работам по курсу «Информатика»: метод. разработка для студентов всех форм обучения для всех специальностей/ НГТУ; сост.: Т.В. Моругина, С.П. Никитенкова, О.И. Чайкина. Н.Новгород, 2012. 40 с.

Изложены примеры решения задач по численным методам в среде MathCAD к лабораторным работам по курсу «Информатика». Приведены типовые задачи.

...¹/16. Бумага газетная.
...). Тираж 100 экз. Заказ 8.

...верситет им. Р. Е. Алексеева.
...ород, ул. Минина, 24.

...кегородский государственный
...нический университет
...Р. Е. Алексеева, 2012

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

Решение нелинейного уравнения с одной неизвестной. Методы отделения и уточнения корней

Постановка задачи. Для данного нелинейного уравнения **y(x)=0** с одной неизвестной величиной на промежутке **[a,b]** отделить корни с шагом **h** (Шаговым методом) и уточнить корень с точностью **ε**:

- методом половинного деления;
- методом Ньютона;
- методом простой итерации.

Идея метода

Название метода	Выбор начального значения	Итерационная формула	Окончание процесса вычисления
Шаговый метод	*x=a – левый конец промежутка [a,b]*	*y=f(x) – значение функции в точке x* *x1=x+h – следующее значение переменной* *y1=f(x1) - значение функция в точке x1* *y*y1<0 - признак интервала изоляции*	*x1<=b*
Метод половинного деления	*[a,b] – интервал изоляции*	*x=(a+b)/2 – середина интервала* *f(a) –значение функции в точке a* *f(x) –значение функции в точке x* *если f(a)*f(x)<0, то выбираем [a,x]* *если f(a)*f(x)>0, то выбираем [x,b]*	$\lvert f(x)\rvert<\varepsilon$
Метод Ньютона	$x_0 = a$ *или* $x_0 = b$ *f2(x)-вторая производная функции f(x)* $f(x_0)*f2(x_0)>0$	*f1(x) – первая производная функции f(x)* $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f1(x_i)$	$\lvert f(x_i)\rvert<\varepsilon$
Метод простой итерации (1-й способ)	*привести уравнение к виду* $x=\varphi(x)$ $x_0 = a$ *или* $x_0 = b$ $\lvert\varphi(a)\rvert<1$ *и* $\lvert\varphi(b)\rvert<1$	$x_{i+1}=\varphi(x_i)$	$\lvert f(x_i)\rvert<\varepsilon$
Метод простой итерации (2-й способ)	*f1(x) – первая производная функции f(x)* *если* $\lvert f1(a)\rvert > \lvert f1(b)\rvert$ *,то* $x_0=a$ *если* $\lvert f1(a)\rvert < \lvert f1(b)\rvert$ *,то* $x_0=b$	$c=1/max(\lvert f1(a)\rvert;\lvert f1(b)\rvert)$ $x_{i+1} = x_i - c*f(x_i)$	$\lvert f(x_i)\rvert<\varepsilon$

Постановка задачи:

*1. **Шаговым методом** найти интервал изоляции корня нелинейного уравнения*

$\arccos(x)-\sqrt{1-0.3\cdot x^3}=0$ *интервале [0; 1], шаг h = 0,1.*

Ручной счет

$\arccos(x)-\sqrt{1-0.3\cdot x^3}=0$

$x_0=0$	$F(x_0)=\arccos(0)-\sqrt{1}=0.5708$
$x_1=0+0.1=0.1$	$F(x_1)=\arccos(0.1)-\sqrt{1-0.1^3}=0.4708$
$x_2=0.1+0.1=0.2$	$F(x_2)=\arccos(0.2)-\sqrt{1-0.2^3}=0.3706$
$x_3=0.2+0.1=0.3$	$F(x_3)=\arccos(0.3)-\sqrt{1-0.3^3}=0.2702$
$x_4=0.3+0.1=0.4$	$F(x_4)=\arccos(0.4)-\sqrt{1-0.4^3}=0.1689$
$x_5=0.4+0.1=0.5$	$F(x_5)=\arccos(0.5)-\sqrt{1-0.5^3}=0.0661$
$x_6=0.5+0.1=0.6$	$F(x_6)=\arccos(0.6)-\sqrt{1-0.6^3}=-0.3998$

Вывод: в точке x=0.5 $F(x_5)>0$, в точке x=0.6 $F(x_6)<0$, то есть функция меняет знак на отрезке [0.5; 0.6]. Следовательно, найден интервал, содержащий корень.

*2. **Методом Ньютона** найти корень с точностью ε=0,01 на интервале [0.5;0.6]*

Ручной счет

Проверка условия сходимости $f(x_0)f''(x_0)>0$, где

x_0 – начальное приближение,

$f(x_0)$ – значение функции в точке x_0,

$f''(x_0)$ – значение второй производной функции в точке x_0.

$f'(x)=\dfrac{0{,}9\cdot x^2}{2\cdot\sqrt{1-0{,}3\cdot x^3}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ – первая производная функции $f(x)$

$f''(x)=\dfrac{0{,}9\cdot x}{\sqrt{1-0{,}3\cdot x^3}}+\dfrac{0{,}81\cdot x^4}{4\cdot\sqrt{(1-0{,}3\cdot x^3)^3}}-\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ – вторая производная функции $f(x)$

Проверяем условие сходимости в крайних точках интервала [0.5; 0.6]:

x_0=0,5 $f(x_0)$=0,0661 $f''(x_0)$ $f(x_0)f''(x_0)<0$ условие сходимости не выполняется,

x_0=0,6 $f(x_0)$= –0,3998 $f''(x_0)$= –0,584 $f(x_0)f''(x_0)>0$ условие сходимости выполняется.

За начальное приближение выбираем x_0=0,6.

Итерационная формула метода $x_{i+1}=x_i-\dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.

Вычислим первое приближение к корню:

$f(x_0)=\arccos(0{,}6)-\sqrt{1-0.3\cdot 0{,}6^3}=-0{,}3998$

$f'(x_0)=\dfrac{0{,}9\cdot 0{,}6^2}{2\cdot\sqrt{1-0{,}3\cdot 0{,}6^3}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}6^2}}=-1{,}0824$

$x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}=0{,}6-\dfrac{(-0{,}3998)}{(-1{,}0824)}=0{,}5633$

Находим значение функции $f(x)$ в полученной точке

$f(x_1)=\arccos(0{,}5633)-\sqrt{1-0.3\cdot 0{,}5633^3}=-3{,}66\cdot 10^{-4}$.

$|f(x_1)|=0{,}000366<0{,}01$, следовательно, корень найден на первой итерации x=0,5633.

Документ Mcad

```
NUTEN(x0,f,eps) := | for n ∈ 1..10
                   |   | xn ← x0 − f(x0) / (d/dx0 f(x0))
                   |   | break if |xn − x0| < eps
                   |   | x0 ← xn
                   | xn
```

описание программы-функции реализующей метод Ньютона

$f(x):=\mathrm{acos}(x)-\sqrt{1-0.3\cdot x^3}$ левая часть уравнения

eps := 0.001 точность

x0 := 0.5 одна из границ интервала изоляции

x := NUTEN(x0, f, eps) обращение к функции

x = 0.563 ответ $f(x)=-9.786717\times 10^{-8}$

*3. **Методом половинного деления** найти корень с точностью ε=0,01 на интервале* [0.5; 0.6]

Ручной счет

Делим интервал изоляции корня пополам, т.е. находим среднюю точку xc

$xc=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{0{,}5+0{,}6}{2}=0{,}55$.

Вычислим значение функции в левом конце

$f(0{,}5)=\arccos(0{,}5)-\sqrt{1-0.3\cdot 0{,}5^3}=0{,}066$.

Вычислим значение функции в средней точке *xc*

$f(0{,}55) = \arccos(0{,}55) - \sqrt{1 - 0.3 \cdot 0{,}55^3} = 0{,}014$,

находим их произведение

$f(0{,}6) f(0{,}55) = 0{,}066 \cdot 0{,}014 = 9{,}24 \cdot 10^{-4} > 0$.

Произведение положительное, следовательно, на левом отрезке корня нет, корень находится на правом отрезке [0.55; 0.6].

Модуль значения функции точке *xc*=0,55 больше заданной точности, т.е. $|f(0{,}55)| = 0{,}014 > 0{,}01$, поэтому делаем следующий шаг.

На интервале [0.55; 0.6] находим среднюю точку *xc*

$$xc = \frac{a+b}{2} = \frac{0{,}55 + 0{,}6}{2} = 0{,}575.$$

Вычислим значение функции в левом конце

$f(0{,}55) = \arccos(0{,}55) - \sqrt{1 - 0.3 \cdot 0{,}55^3} = 0{,}014$.

Вычислим значение функции в средней точке xc

$f(0{,}575) = \arccos(0{,}575) - \sqrt{1 - 0.3 \cdot 0{,}575^3} = -0{,}0129$,

находим их произведение

$f(0{,}55) f(0{,}575) = 0{,}014 \cdot (-0{,}0129) = -1{,}806 \cdot 10^{-4} < 0$.

Произведение отрицательное, следовательно, корень находится на левом отрезке [0.55;0.575].

Модуль значения функции точке *xc*=0,575 больше заданной точности, т.е. $|f(0{,}55)| = 0{,}0129 > 0{,}01$, поэтому делаем следующий шаг.

На интервале [0.55;0.575] находим среднюю точку xc

$$xc = \frac{a+b}{2} = \frac{0{,}55 + 0{,}575}{2} = 0{,}5625.$$

Вычислим значение функции в левом конце

$f(0{,}55) = \arccos(0{,}55) - \sqrt{1 - 0.3 \cdot 0{,}55^3} = 0{,}014$.

Вычислим значение функции в средней точке *xc*

$f(0{,}5625) = \arccos(0{,}5625) - \sqrt{1 - 0.3 \cdot 0{,}5625^3} = -0{,}00045$,

находим их произведение

$f(0{,}55) f(0{,}5625) = 0{,}014 \cdot 0{,}00045 = 6{,}3 \cdot 10^{-6} > 0$.

Произведение положительное, следовательно, корень находится на правом отрезке [0.5625;0.575].

Модуль значения функции точке *xc*=0,5625 меньше заданной точности, т.е. $|f(0{,}5625)| = 0{,}00045 < 0{,}01$, поэтому итерационный процесс закончен, корень найден на третьем шаге *x*=0,5625.

Документ Mcad

```
PDEL(a, b, f, eps) := | xc ← (a + b)/2
                      | for n ∈ 1..10
                      |   | break if |b − a| < eps
                      |   | otherwise
                      |   |   | xc ← (a + b)/2
                      |   |   | b ← xc if f(a)·f(xc) < 0
                      |   |   | a ← xc otherwise
                      | xc
```

описание программы-функции реализующей метод половинного деления

$f(x) := \mathrm{acos}(x) - \sqrt{1 - 0.3 \cdot x^3}$ левая часть уравнения

$a := 0.5 \quad b := 0.6$ интервал изоляции

$eps := 0.001$ точность

$x := \mathrm{PDEL}(a, b, f, eps)$ обращение к функции

$x = 0.563$ ответ $\quad f(x) = -3.778 \times 10^{-4}$

*4. **Методом простой итерации** найти корень с точностью* ε=0,001 *на интервале* [0.5; 0.6]

Ручной счет

Заменим исходное уравнение $\arccos(x) - \sqrt{1 - 0.3 \cdot x^3} = 0$ (1)

эквивалентным $x = \cos(\sqrt{1 - 0.3 \cdot x^3})$ (2)

Обозначим правую часть уравнения (2) как функцию $\phi(x) = \cos(\sqrt{1 - 0.3 \cdot x^3})$.

Проверим условия сходимости в крайних точках интервала [0.5; 0.6].

Должны выполняться условия: $|\phi'(0{,}5)| < 1$ и $|\phi'(0{,}6)| < 1$.

Находим первую производную функции $\phi(x)$

$\phi'(x) = \dfrac{0.45 \cdot x^2 \cdot \sin\sqrt{1 - 0.3 \cdot x^3}}{\sqrt{1 - 0.3 \cdot x^3}}$. Вычислим модули значений первой производной функции $\phi(x)$ точках *x*=0,5 и *x*=0,6: $|\phi'(0{,}5)| = 0{,}095 < 1$, $|\phi'(0{,}6)| = 0{,}138 < 1$.

Условие сходимости выполняется, поэтому за начальное приближение можно взять любой конец интервала. Пусть начальное приближение $x_0 = 0{,}5$.

Итерационная формула метода: $x_{i+1} = \phi(x_i)$ (3)

Находим первое приближение к корню: x_0=0,5 $\quad x_1 = \cos(\sqrt{1 - 0.3 \cdot 0{,}5^3}) = 0{,}5561$.

В полученной точке находим значение функции $f(x)=\arccos(x)-\sqrt{1-0.3\cdot x^3}$, которая является левой частью уравнения (1)

$f(0{,}5561)=\arccos(0{,}5561)-\sqrt{1-0.3\cdot 0{,}5561^3}=0{,}0072$.

Модуль значения функции точке x_1=0,5561 больше заданной точности, т.е. $|f(0{,}5561)|=0{,}0072>0{,}001$, поэтому делаем следующий шаг.

За начальное приближение берем точку $x_1=0{,}5561$.
Находим второе приближение к корню:

x_1=0,5561 $x_2=\cos(\sqrt{1-0.3\cdot 0{,}5561^3})=0{,}5621$.

В полученной точке находим значение функции *f(x)*:

$f(0{,}5621)=\arccos(0{,}5621)-\sqrt{1-0.3\cdot 0{,}5621^3}=0{,}0008$.

Модуль значения функции точке *xc*=0,5561 меньше заданной точности, т.е. $|f(5621)|=0{,}0008<0{,}001$, поэтому итерационный процесс закончен, корень найден на втором шаге *x*=0,5621.

Документ Mcad

```
PROST_ITER(x0, fi, eps) := | for n ∈ 1..10
                           |   | xn ← fi(x0)
                           |   | break if |xn − x0| < eps
                           |   | x0 ← xn
                           | xn
```

описание программы-функции реализующей метод простой итерации

$f(x) := \mathrm{acos}(x)-\sqrt{1-0.3\cdot x^3}$ левая часть уравнения

$f1(x) := \frac{d}{dx}f(x)$ производная

точность

$eps := 0.001$

$c := \frac{1}{\max(f1(a), f1(b))}$

$fi(x) := x - c\cdot f(x)$ функция для итерационной формулы

$x0 := 0.5$

$x := PROST\_ITER(x0, fi, eps)$

ответ

$x = 0.563$ $f(x) = 1.572\times10^{-5}$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

Решение систем линейных уравнений. Прямые и итерационные методы

Название метода	Начальное приближение	Итерационная формула	Остановка процесса вычисления
Метод Гаусса	*Определитель матрицы не равен нулю*	*Прямой ход – приведение матрицы к треугольному виду Обратный ход – вычисление неизвестных, начиная с последнего уравнения*	*Получение значений всех неизвестных*
Метод простой итерации	*Проверка условия сходимости* $\lvert A_{11}\rvert>\lvert A_{12}\rvert+\lvert A_{13}\rvert+\lvert A_{14}\rvert$ $\lvert A_{22}\rvert>\lvert A_{21}\rvert+\lvert A_{23}\rvert+\lvert A_{24}\rvert$ $\lvert A_{33}\rvert>\lvert A_{31}\rvert+\lvert A_{32}\rvert+\lvert A_{34}\rvert$ $\lvert A_{44}\rvert>\lvert A_{41}\rvert+\lvert A_{42}\rvert+\lvert A_{43}\rvert$ *Выбор начального приближения* $x_1^0=0$ $x_2^0=0$ $x_3^0=0$ $x_4^0=0$	$x_1^{i+1}=\frac{B_1-(A_{12}x2^i+A_{13}x3^i+A_{14}x4^i)}{A_{11}}$ $x_2^{i+1}=\frac{B_2-(A_{21}x_1^i+A_{23}x_3^i+A_{24}x_4^i)}{A_{22}}$ $x_3^{i+1}=\frac{B_3-(A_{31}x_1^i+A_{32}x_2^i+A_{34}x_4^i)}{A_{33}}$ $x_4^{i+1}=\frac{B_4-(A_{41}x_1^i+A_{42}x_2^i+A_{43}x_3^i)}{A_{44}}$	$\lvert x_1^{i+1}-x_1^i\rvert<\varepsilon$ $\lvert x_2^{i+1}-x_2^i\rvert<\varepsilon$ $\lvert x_3^{i+1}-x_3^i\rvert<\varepsilon$ $\lvert x_4^{i+1}-x_4^i\rvert<\varepsilon$
Метод Зейделя	*Проверка условия сходимости* $\lvert A_{11}\rvert>\lvert A_{12}\rvert+\lvert A_{13}\rvert+\lvert A_{14}\rvert$ $\lvert A_{22}\rvert>\lvert A_{21}\rvert+\lvert A_{23}\rvert+\lvert A_{24}\rvert$ $\lvert A_{33}\rvert>\lvert A_{31}\rvert+\lvert A_{32}\rvert+\lvert A_{34}\rvert$ $\lvert A_{44}\rvert>\lvert A_{41}\rvert+\lvert A_{42}\rvert+\lvert A_{43}\rvert$ *Выбор начального приближения* $x_1^0=0$ $x_2^0=0$ $x_3^0=0$ $x_4^0=0$	$x_1^{i+1}=\frac{B_1-(A_{12}x2^i+A_{13}x3^i+A_{14}x4^i)}{A_{11}}$ $x_2^{i+1}=\frac{B_2-(A_{21}x_1^{i+1}+A_{23}x_3^i+A_{24}x_4^i)}{A_{22}}$ $x_3^{i+1}=\frac{B_3-(A_{31}x_1^{i+1}+A_{32}x_2^{i+1}+A_{34}x_4^i)}{A_{33}}$ $x_4^{i+1}=\frac{B_4-(A_{41}x_1^{i+1}+A_{42}x_2^{i+1}+A_{43}x_3^{i+1})}{A_{44}}$	$\lvert x_1^{i+1}-x_1^i\rvert<\varepsilon$ $\lvert x_2^{i+1}-x_2^i\rvert<\varepsilon$ $\lvert x_3^{i+1}-x_3^i\rvert<\varepsilon$ $\lvert x_4^{i+1}-x_4^i\rvert<\varepsilon$

Постановка задачи: решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 7\cdot x_1+2\cdot x_2-x_3+x_4=2\\ 3\cdot x_1-9\cdot x_2+x_3+2\cdot x_4=7\\ x_1-2\cdot x_2+11\cdot x_3+x_4=1\\ 3\cdot x_2-2\cdot x_3+13\cdot x_4=-3 \end{cases} \quad (1)$$

Ручной счет

1 Метод Гаусса

Идея метода: последовательно исключаем переменные *x*1, *x*2, *x*3, пока в последней строке не будет однозначно определена переменная *x*4.

Запишем систему в виде:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 3 & -9 & 1 & 2 & 7\\ 1 & -2 & 11 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -2 & 13 & -3 \end{array}\right)$$

Разделим 1-ю строку на (7). Разделим 2-ю строку на (3):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,286 & -0,143 & 0,143 & 0,286 \\ 1 & -3 & 0,333 & 0,667 & 2,333 \\ 1 & -2 & 11 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 13 & -3 \end{array}\right)$$

Исключаем из 2-й и 3-й строк переменную x_1, для этого вычитаем 2-ю строку из 1-й и вычитаем 3-ю строку из 1-й:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,286 & -0,143 & 0,143 & 0,286 \\ 0 & 3,286 & -0,476 & -0,524 & -2,048 \\ 0 & 2,286 & -11,143 & -0,857 & -0,714 \\ 0 & 3 & -2 & 13 & -3 \end{array}\right)$$

Разделим 2-ю строку на (3,286). Разделим 3-ю строку на (2,286). Разделим 4-ю строку на (3):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,286 & -0,143 & 0,143 & 0,286 \\ 0 & 1 & -0,145 & -0,159 & -0,623 \\ 0 & 1 & -4,875 & -0,375 & -0,313 \\ 0 & 1 & -0,667 & 4,333 & -1 \end{array}\right)$$

Исключаем из 3-й и 4-й строк переменную x_2, для этого вычитаем 3-ю строку из 2-й и вычитаем 4-ю строку из 2-й:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,286 & -0,143 & 0,143 & 0,286 \\ 0 & 1 & -0,145 & -0,159 & -0,623 \\ 0 & 0 & 4,730 & 0,216 & -0,311 \\ 0 & 0 & 0,522 & -4,493 & 0,377 \end{array}\right)$$

Разделим 3-ю строку на (4,73). Разделим 4-ю строку на (0,522):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,286 & -0,143 & 0,143 & 0,286 \\ 0 & 1 & -0,145 & -0,159 & -0,623 \\ 0 & 0 & 1 & 0,046 & -0,066 \\ 0 & 0 & 1 & -8,611 & 0,722 \end{array}\right)$$

Исключаем из 4-й строки переменную x_3, для этого вычитаем 4-ю строку из 3-й:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,286 & -0,143 & 0,143 & 0,286 \\ 0 & 1 & -0,145 & -0,159 & -0,623 \\ 0 & 0 & 1 & 0,046 & -0,066 \\ 0 & 0 & 0 & 8,657 & -0,788 \end{array}\right)$$

Разделим 4-ю строку на (8,657):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,286 & -0,143 & 0,143 & 0,286 \\ 0 & 1 & -0,145 & -0,159 & -0,623 \\ 0 & 0 & 1 & 0,046 & -0,066 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,091 \end{array}\right)$$

Из 4-й строки выражаем x_4: x_4= -0,091 .

Из 3-й строки выражаем x_3: $x_3+0,046\cdot x_4= -0,066$, откуда находим x_3= -0,0615.

Из 2-й строки выражаем x_2:

$x_2-0,145\cdot x_3-0,159\cdot x_4= -0,623$, откуда находим x_2= -0,646.

Из 1-й строки выражаем x_1:

$x_1+0,286\cdot x_2-0,143\cdot x_3+0,143\cdot x_4= 0,286$, откуда находим x_1= 0,474.

Решение:

x_1= 0,474, x_2= -0,646, x_3= -0,0615, x_4= -0,091.

Метод простой итерации

Постановка задачи: ***методом простой итерации найти корни системы линейных уравнений*** **(1)** ***с точностью*** **eps=0,1**

Проверка условия сходимости.

Для сходимости метода необходимо и достаточно, чтобы в матрице A абсолютные значения всех диагональных элементов были больше суммы $|a_{ii}| > \sum\limits_{i=1, i\neq j} |a_{ij}|$ модулей всех остальных элементов в соответствующей строке,

$|7| > |2| + |-1| + |1|,\quad |-9| > |3| + |1| + |2|,\quad |11| > |1| + |-2| + |1|,\quad |13| > |0| + |3| + |-2|$

Условие сходимости выполнено

Если условие сходимости выполнено, то на следующем этапе необходимо задать начальное приближение вектора неизвестных, в качестве которого обычно выбирается нулевой вектор:

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = 0 \qquad (2)$$

Заметим, что здесь и в дальнейшем нижний индекс обозначает соответствующую компоненту вектора неизвестных, а верхний индекс – номер итерации (приближения).

В результате каждой итерации получается новое значение вектора неизвестных. Для организации итерационного процесса запишем систему (1) в приведенном виде. Приведенная система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{[b_1 - (a_{12}\cdot x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}\cdot x_n^{(k)})]}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{[b_2 - (a_{21}\cdot x_1^{(k)} + \ldots + a_{2n}\cdot x_n^{(k)})]}{a_{22}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{[b_n - (a_{n1}\cdot x_1^{(k)} + \ldots + a_{n,n-1}\cdot x_{n-1}^{(k)})]}{a_{nn}} \end{cases} \qquad (3)$$

Итерационный процесс заканчивается, если для каждой i-й компоненты вектора неизвестных будет выполнено условие достижения точности: $\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right|$<eps

Для системы (1) приведенная система имеет вид:

$$\begin{array}{ll} x_1 = \dfrac{2 - 2x_2 + x_3 - x_4)}{7} & x_1^{(1)} = \dfrac{2}{7} = 0,2857 \\ x_2 = \dfrac{-7 + 3x_1 + x_3 + 2x_4}{9} & x_2^{(1)} = \dfrac{-7}{9} = -0,7778 \\ x_3 = \dfrac{1 - x_1 - 2x_2 - x_4}{11} & x_3^{(1)} = \dfrac{1}{11} = 0,0909 \\ x_4 = \dfrac{-3 - 3x_2 - 2x_3}{13} & x_4^{(1)} = \dfrac{-3}{13} = -0,2308 \end{array} \qquad (4)$$

Проверка на точность: $\left|x_1^{(1)}-x_1^{(0)}\right| = 0{,}2857 > 0{,}1$, делаем следующий шаг.

Вторая итерация: подставляем значения корней, полученные на первой итерации в систему (4)

$$x_1^{(2)} = \frac{2-2(-0{,}7778)+0{,}0909-(-0{,}2308)}{7} = 0{,}5539$$

$$x_2^{(2)} = \frac{-7+3\cdot 0{,}2857+0{,}0909+2(-0{,}23080)}{9} = -0{,}7237$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1-0{,}2857-2(-0{,}7778)-(-0{,}2308)}{11} = -0{,}0555$$

$$x_4^{(2)} = \frac{-3-3(-0{,}7778)-2\cdot 0{,}0909}{13} = -0{,}0373$$

Проверка на точность:
$\left|x_1^{(2)}-x_{1i}^{(1)}\right| = |0{,}5539-0{,}2857| = 0{,}2682 > 0{,}1$, делаем следующий шаг.

Третья итерация: подставляем значения корней, полученные на второй итерации в систему (4)

$$x_1^{(3)} = \frac{2-2(-0{,}7237)+(-0{,}0555)-(-0{,}0373)}{7} = 0{,}4899$$

$$x_2^{(3)} = \frac{-7+3\cdot 0{,}5539+(-0{,}0555)+2(-0{,}0373)}{9} = -0{,}6076$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1-0{,}5539-2(-0{,}7237)-(-0{,}0373)}{11} = -0{,}0876$$

$$x_4^{(3)} = \frac{-3-3(-0{,}7237)-2(-0{,}0555)}{13} = -0{,}0723$$

Проверка на точность: $\left|x_1^{(3)}-x_1^{(2)}\right| = |0{,}4899-0{,}5539| = 0{,}064 < 0{,}1$,

$\left|x_2^{(3)}-x_2^{(2)}\right| = |-0{,}6033-(-0{,}5539)| = 0{,}116 > 0{,}1$, делаем следующий шаг.

Четвертая итерация: подставляем значения корней, полученные на третьей итерации в систему (4):

$$x_1^{(4)} = \frac{2-2(-0{,}6076)+(-0{,}0876)-(-0{,}0723)}{7} = 0{,}4571$$

$$x_2^{(4)} = \frac{-7+3\cdot 0{,}4899+(-0{,}0876)+2(-0{,}0723)}{9} = -0{,}6403$$

$$x_3^{(4)} = \frac{1-0{,}4899-2(-0{,}6076)-(-0{,}0723)}{11} = -0{,}0575$$

$$x_4^{(4)} = \frac{-3-3(-0{,}6076)-2(-0{,}0723)}{13} = -0{,}104$$

Проверка на точность: $\left|x_1^{(4)}-x_1^{(3)}\right| = |0{,}4571-0{,}4899| = 0{,}0328 < 0{,}1$,

$\left|x_2^{(4)}-x_2^{(3)}\right| = |-0{,}6403-(-0{,}6076)| = 0{,}033 < 0{,}1$, $\left|x_3^{(4)}-x_3^{(3)}\right| = |-0{,}0575-(-0{,}0876)| = 0{,}03 < 0{,}1$

$\left|x_4^{(4)}-x_4^{(3)}\right| = |-0{,}104-(-0{,}0723)| = 0{,}032 < 0{,}1$, точность выполнена для всех корней, следовательно, корни найдены на четвертой итерации с точностью 0,1, x_1=0,4571, x_2=-0,6403, x_3=-0,0575, x_4=-0,104.

$\left|x_4^{(4)}-x_4^{(3)}\right| = |-0{,}104-(-0{,}0723)| = 0{,}032 < 0{,}1$, точность выполнена для всех корней, следовательно, корни найдены на четвертой итерации с точностью 0,1, x_1=0,4571, x_2=-0,6403, x_3=-0,0575, x_4=-0,104.

Документ Mcad:

Метод простой итерации

```
Prost_iteraz(f1, f2, f3, f4, n, eps) := | x1_0 ← 0
                                        | x2_0 ← 0
                                        | x3_0 ← 0
                                        | x4_0 ← 0
                                        | for i ∈ 0..n − 1
                                        |   | x1_(i+1) ← f1(x2_i, x3_i, x4_i)
                                        |   | x2_(i+1) ← f2(x1_i, x3_i, x4_i)
                                        |   | x3_(i+1) ← f3(x1_i, x2_i, x4_i)
                                        |   | x4_(i+1) ← f4(x1_i, x2_i, x3_i)
                                        |   | e1_(i+1) ← |x1_(i+1) − x1_i|
                                        |   | e2_(i+1) ← |x2_(i+1) − x2_i|
                                        |   | e3_(i+1) ← |x3_(i+1) − x3_i|
                                        |   | e4_(i+1) ← |x4_(i+1) − x4_i|
                                        |   | break if (max(e1_(i+1), e2_(i+1), e3_(i+1), e4_(i+1)) < eps)
                                        |   | continue
                                        | augment(x1, x2, x3, x4)
```

$f1(x2,x3,x4) := \dfrac{(2-2x2+x3-x4)}{7}$ $\qquad f2(x1,x3,x4) := \dfrac{7-3\cdot x1-x3-2\cdot x4}{-9}$

$f3(x1,x2,x4) := \dfrac{1-x1+2\cdot x2-x4}{11}$ $\qquad f4(x1,x2,x3) := \dfrac{-3-3\cdot x2+2\cdot x3}{13}$

$eps := 0.01 \qquad n := 100$

$x1 := Prost\_iteraz(f1,f2,f3,f4,n,eps)^{\langle 0\rangle} \qquad x2 := Prost\_iteraz(f1,f2,f3,f4,n,eps)^{\langle 1\rangle}$

$x3 := Prost\_iteraz(f1,f2,f3,f4,n,eps)^{\langle 2\rangle} \qquad x4 := Prost\_iteraz(f1,f2,f3,f4,n,eps)^{\langle 3\rangle}$

$$x1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.286 \\ 0.554 \\ 0.49 \\ 0.457 \\ 0.475 \\ 0.478 \end{pmatrix} \quad x2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.778 \\ -0.724 \\ -0.608 \\ -0.64 \\ -0.655 \\ -0.646 \end{pmatrix} \quad x3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.091 \\ -0.056 \\ -0.088 \\ -0.058 \\ -0.058 \\ -0.063 \end{pmatrix} \quad x4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.231 \\ -0.037 \\ -0.072 \\ -0.104 \\ -0.092 \\ -0.088 \end{pmatrix}$$

Метод Зейделя

Постановка задачи: *методом Зейделя найти корни системы линейных уравнений* (1) *с точностью* eps=0,1

По аналогии с методом простой итерации выполняется проверка условия сходимости и выбирается нулевой вектор. Итерационные формулы метода:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{[b_1 - (a_{12} \cdot x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n} \cdot x_n^{(k)})]}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{[b_2 - (a_{21} \cdot x_1^{(k+1)} + \ldots + a_{2n} \cdot x_n^{(k)})]}{a_{22}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{[b_n - (a_{n1} \cdot x_1^{(k+1)} + \ldots + a_{n,n-1} \cdot x_{n-1}^{(k+1)})]}{a_{nn}} \end{cases} \qquad (5)$$

Для системы (1) приведенная система имеет вид (4).

Вычислим первое приближение по итерационным формулам (5) при k=0:

$$x_1^{(1)} = \frac{2}{7} = 0{,}2857$$

$$x_2^{(1)} = \frac{-7 + 3 \cdot 0{,}2857}{9} = -0{,}6825$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1 - 0{,}2857 - 2(-0{,}6825)}{11} = -0{,}0765$$

$$x_4^{(1)} = \frac{-3 - 3(-0{,}6825) - 2(-0{,}0765)}{13} = -0{,}0373$$

Проверка на точность: $\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = 0{,}2857 > 0{,}1$, делаем следующий шаг.

Вычислим второе приближение по итерационным формулам (5) при k=1:

$$x_1^{(2)} = \frac{2 - 2(-0{,}6825) + (-0{,}0765) - (-0{,}0373)}{7} = 0{,}4751$$

$$x_2^{(2)} = \frac{-7 + 3 \cdot 0{,}4751 + (-0{,}0765) + 2(-0{,}0373}{9} = -0{,}6362$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1 - 0{,}4751 - 2(-0{,}6362) - (0{,}0373)}{11} = -0{,}076$$

$$x_4^{(2)} = \frac{-3 - 3(-0{,}6362) - 2(-0{,}076)}{13} = -0{,}078$$

Проверка на точность: $\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = \left|0{,}4751 - 0{,}2857\right| = 0{,}1894 > 0{,}1$.

Вычислим третье приближение по итерационным формулам (5) при k=2:

$$x_1^{(3)} = \frac{2 - 2(-0{,}6362) + (-0{,}076) - (-0{,}078)}{7} = 0{,}4678$$

$$x_2^{(3)} = \frac{-7 + 3 \cdot 0{,}4678 + (-0{,}076) + 2(-0{,}078)}{9} = -0{,}6476$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1 - 0{,}4678 - 2(-0{,}6476) - (0{,}078)}{11} = -0{,}0618$$

$$x_4^{(3)} = \frac{-3 - 3(-0{,}6476) - 2(-0{,}0618)}{13} = -0{,}0912$$

Проверка на точность: $\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = \left|0{,}4678 - 0{,}4751\right| = 0{,}007 < 0{,}1$,

$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = \left|-0{,}6476 - (-0{,}6362)\right| = 0{,}011 < 0{,}1$,

$\left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = \left|-0{,}0618 - (-0{,}6362)\right| = 0{,}014 < 0{,}1$,

$\left|x_4^{(3)} - x_4^{(2)}\right| = \left|-0{,}0912 - (-0{,}078)\right| = 0{,}013 < 0{,}1$, точность выполнена для всех корней, следовательно, корни найдены на третьей итерации с точностью 0,1, x_1=0,4678, x_2=-0,6476, x_3=-0,0618, x_4=-0,0912.

Документ Mcad:

Метод Зейделя

```
Zeidel(f1,f2,f3,f4,n,eps) := | x1_0 ← 0
                             | x2_0 ← 0
                             | x3_0 ← 0
                             | x4_0 ← 0
                             | for i ∈ 0..n − 1
                             |   | x1_(i+1) ← f1(x2_i, x3_i, x4_i)
                             |   | x2_(i+1) ← f2(x1_(i+1), x3_i, x4_i)
                             |   | x3_(i+1) ← f3(x1_(i+1), x2_(i+1), x4_i)
                             |   | x4_(i+1) ← f4(x1_(i+1), x2_(i+1), x3_(i+1))
                             |   | e1_(i+1) ← |x1_(i+1) − x1_i|
                             |   | e2_(i+1) ← |x2_(i+1) − x2_i|
                             |   | e3_(i+1) ← |x3_(i+1) − x3_i|
                             |   | e4_(i+1) ← |x4_(i+1) − x4_i|
                             |   | break if (max(e1_(i+1), e2_(i+1), e3_(i+1), e4_(i+1)) < eps)
                             |   | continue
                             | augment(x1, x2, x3, x4)
```

$$f1(x2,x3,x4) := \frac{(2 - 2x2 + x3 - x4)}{7} \qquad f2(x1,x3,x4) := \frac{7 - 3 \cdot x1 - x3 - 2 \cdot x4}{-9}$$

$$f3(x1,x2,x4) := \frac{1 - x1 + 2 \cdot x2 - x4}{11} \qquad f4(x1,x2,x3) := \frac{-3 - 3 \cdot x2 + 2 \cdot x3}{13}$$

$eps := 0.01 \qquad n := 100$

$x1 := Zeidel(f1,f2,f3,f4,n,eps)^{\langle 0 \rangle} \qquad x2 := Zeidel(f1,f2,f3,f4,n,eps)^{\langle 1 \rangle}$

$x3 := Zeidel(f1,f2,f3,f4,n,eps)^{\langle 2 \rangle} \qquad x4 := Zeidel(f1,f2,f3,f4,n,eps)^{\langle 3 \rangle}$

$$x1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.286 \\ 0.484 \\ 0.473 \\ 0.475 \end{pmatrix} \quad x2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.683 \\ -0.641 \\ -0.647 \\ -0.646 \end{pmatrix} \quad x3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.059 \\ -0.062 \\ -0.061 \\ -0.062 \end{pmatrix} \quad x4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.082 \\ -0.092 \\ -0.091 \\ -0.091 \end{pmatrix}$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3
Аппроксимация и интерполяция

Постановка задачи: *Дана таблица координат точек* $\{x_i, y_i\}$

i	0	1	2	3	4
x	0,2	0,4	0,7	0,85	1
y	0,1	0,5	0,6	0,9	0,7

- Аппроксимировать точки полиномом 1-й и 2-й степени;
- Интерполировать точки (методом неопределённых коэффициентов) полиномом 1-й и 2-й степени;
- Интерполировать точки (методом Ньютона) полиномом 1-й и 2-й степени.

Ручной счет

Аппроксимация полиномом 1-й степени

Общий вид полинома 1-й степени $P1(x)=a_0+a_1x$. Для нахождения коэффициентов полинома необходимо решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} n\cdot a_0 + a_1\sum_i x_i \cdot = \sum_i y_i \\ \sum_i x_i\cdot a_0 + a_1\sum_i x_i^2 = \sum_i x_i\cdot y_i \end{cases} \qquad (1)$$

Вычислим значения $\sum_i x_i \cdot, \sum_i x_i^2, \sum_i y_i, \sum_i x_i\cdot y_i$.

$$\sum_i x_i = x_0+x_1+x_2+x_3+x_4 = 0,2+0,4+0,7+0,85+1=3,15.$$

$$\sum_i x_i^2 = x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 0,2^2+0,4^2+0,7^2+0,85^2+1^2=2,4125.$$

$$\sum_i y_i = y_0+y_1+y_2+y_3+y_4 = 0,1+0,5+0,6+0,9+0,7=2,8.$$

$$\sum_i x_iy_i = x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4 = 0,2\cdot0,1+0,4\cdot0,5+0,7\cdot0,6+0,85\cdot0,9+1\cdot0,7=2,105$$

Подставляем в систему (1) и получаем:

$$\begin{cases} 5a_0+3,15a_1=2,8 \\ 3,15\cdot a_0+2,4125a_1=2,105 \end{cases} \qquad (2)$$

Запишем систему (2) в матричном виде.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3,15 \\ 3,15 & 2,4125 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2,8 \\ 2,105 \end{bmatrix}$$

Решаем методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3,15 & 2,8 \\ 3,15 & 2,4125 & 2,105 \end{array}\right)$$

Разделим 1-е уравнение на (5), 2-е уравнение на (3,15).

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0,63 & 0,56 \\ 1 & 0,765873 & 0,668254 \end{array}\right).$$

Перепишем 1- е уравнение без изменений, из 2-го уравнения вычтем 1-е уравнение и результат запишем на место второго.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0,63 & 0,56 \\ 0 & 0,135873 & 0,108254 \end{array}\right).$$

Разделим 2-е уравнение на (0,135873)

$$\begin{cases} a_0+0,63a_1=0,56 \\ a_1=0,796729 \end{cases}$$

Из 2-го уравнения найдём $a_1=0,796729$. Из 1-го уравнения найдём $a_0=0,56-0,63\cdot a_1$ $a_0=0,56-0,63\cdot0,796729$ $a_0=0,058061$. Запишем найденное уравнение $P1(x)=0,58061+0,796729x$.

Найдём отклонения полученного полинома $P1(x)$ от заданных точек y.

В 0-ой точке

$O_0=P1(x_0)-y_0$ $P1(x_0)=0,58061+0,796729x_0$ $P1(0,2)=0,217407$.

$O_0=0,217407-0,1=0,117407$.

В 1-й точке

$O_1=P1(x_1)-y_1$ $P1(x_1)=0,58061+0,796729\cdot x_1$ $P1(0,4)=0,376752$.

$O_1=0,376752-0,5=-0,12325$.

Во 2-й точке

$O_2=P1(x_2)-y_2$ $P1(x_2)=0,58061+0,796729\cdot x_2$ $P1(0,7)=0,615771$.

$O_2=0,615771-0,6=0,015771$.

В 3-й точке

$O_3=P1(x_3)-y_3$ $P1(x_3)=0,58061+0,796729\cdot x_3$ $P1(0,85)=0,73528$.

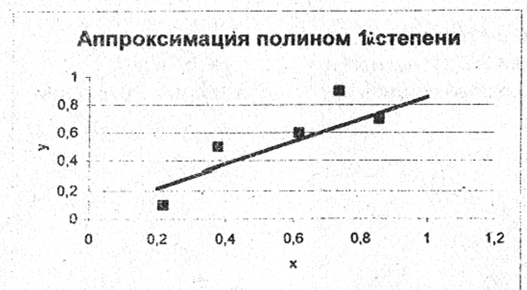
$O_3=0,73528-0,9=-0,16472$.

В 4-й точке

$O_4=P1(x_4)-y_4$ $P1(x_4)=0,58061+0,796729\cdot x_4$ $P1(1)=0,85479$.

$O_4=0,85479-0,7=0,15479$.

Построим график функции $P1(x)$ и отметим исходные точки



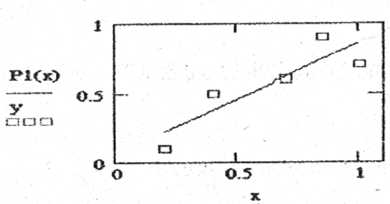
Документ Mcad:

$$\text{MNKVADRAT1}(x,y,n) := \begin{array}{|l} C_{0,0} \leftarrow n \\ C_{0,1} \leftarrow \sum_{i=0}^{n-1} x_i \\ C_{1,0} \leftarrow \sum_{i=0}^{n-1} (x_i) \\ C_{1,1} \leftarrow \sum_{i=0}^{n-1} (x_i)^2 \\ D_0 \leftarrow \sum_{i=0}^{n-1} y_i \\ D_1 \leftarrow \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot y_i \\ a \leftarrow \text{lsolve}(C,D) \\ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$x := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.7 \\ 0.85 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.9 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

$a := \text{MNKVADRAT1}(x,y,5)$

$a_0 = 0.058 \qquad a_1 = 0.797 \qquad P1(x) := a_0 + a_1 \cdot x$



Ручной счет

Аппроксимация полиномом 2-й степени

Общий вид полинома 2-й степени $P2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$. Для нахождения коэффициентов полинома необходимо решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} n\cdot a_0+\sum_i x_i\cdot a_1+\sum_i x_i^2\cdot a_2=\sum_i y_i \\ \sum_i x_i\cdot a_0+\sum_i x_i^2\cdot a_1+\sum_i x_i^3\cdot a_2=\sum_i x_i\cdot y_i \\ \sum_i x_i^2\cdot a_0+\sum_i x_i^3\cdot a_1+\sum_i x_i^4\cdot a_2=\sum_i x_i^2\cdot y_i \end{cases} \qquad (3)$$

Вычислим значения $\sum_i x_i$, $\sum_i x_i^2$, $\sum_i x_i^3$, $\sum_i x_i^4$, $\sum_i y_i$, $\sum_i x_i y_i$, $\sum_i x_i^2 y_i$.

$\sum_i x_i = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,2+0,4+0,7+0,85+1 = 3,15$.

$\sum_i x_i^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,2^2+0,4^2+0,7^2+0,85^2+1^2 = 2,4125$.

$\sum_i x_i^3 = 0,2^3+0,4^3+0,7^3+0,85^3+1^3 = 2,029125$.

$\sum_i x_i^4 = 0,2^4+0,4^4+0,7^4+0,85^4+1^4 = 1,789306$.

$\sum_i y_i = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0,1+0,5+0,6+0,9+0,7 = 2,8$.

$\sum_i x_i y_i = x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 = 0,2\cdot 0,1+0,4\cdot 0,5+0,7\cdot 0,6+0,85\cdot 0,9+1\cdot 0,7 = 2,105$

$\sum_i x_i^2 y_i = 0,2^2\cdot 0,1+0,4^2\cdot 0,5+0,7^2\cdot 0,6+0,85^2\cdot 0,9+1^2\cdot 0,7 = 1,72825$.

Подставляем в систему (3) и получаем следующую систему:

$$\begin{cases} 5a_0 + 3,15a_1 + 2,4125a_2 = 2,8 \\ 3,15a_0 + 2,4125a_1 + 2,029125a_2 = 2,105 \\ 2,4125a_0 + 2,029125a_1 + 1,789306a_2 = 1,72825 \end{cases} \qquad (4)$$

Запишем систему (4) в матричном виде.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3,15 & 2,4125 \\ 3,15 & 2,4125 & 2,09125 \\ 2,4125 & 2,09125 & 1,789306 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,8 \\ 2,105 \\ 1,72825 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Решим систему (5) методом Гаусса.

Разделим 1-е уравнение на (5), 2-е уравнение на (3,15), 3-е уравнение на (2,4125).

В результате получаем систему.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,63 & 0,4825 & 0,56 \\ 1 & 0,765873 & 0,644167 & 0,668254 \\ 1 & 0,841088 & 0,741681 & 0,716373 \end{array}\right).$$

Перепишем 1- е уравнение без изменений, из 2-го уравнения вычтем 1-е уравнение и результат запишем на место 2-го уравнения, из 3-го уравнения вычтем 1-е и результат запишем на место третьего уравнения.

Получим систему.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,63 & 0,4825 & 0,56 \\ 0 & 0,135873 & 0,161667 & 0,108254 \\ 0 & 0,211088 & 0,259181 & 0,156373 \end{array}\right).$$

Разделим 2-е уравнение на (0,135873), 3-е уравнение на (0,211088).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,63 & 0,4825 & 0,56 \\ 0 & 1 & 1,189836 & 0,796729 \\ 0 & 1 & 1,227835 & 0,740795 \end{array}\right).$$

Перепишем 1-е и 2- е уравнение без изменений, из 3-го уравнения вычтем 2-е уравнение и результат запишем на место 3-го уравнения.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,63 & 0,4825 & 0,56 \\ 0 & 1 & 1,189836 & 0,796729 \\ 0 & 0 & 0,037999 & -0,05593 \end{array}\right).$$

Разделим 3-е уравнение на (0,037999), и запишем полученные данные в виде системы:
$$\begin{cases} a_0 + 0,63a_1 + 0,4825a_2 = 0,56 \\ a_1 + 1,189836a_2 = 0,796729 \\ a_2 = -1,47199 \end{cases}.$$

Из 3-го уравнения $a_2 = -1,47199$. Из 2-го уравнения найдём

$a_1 = 0,706729 - 1,189836a_2$ $a_1 = 0,706729 - 1,189836 \cdot (-1,47199)$ $a_1 = 2,54816$.

Из 1-го уравнения найдём $a_0 = 0,56 - 0,63a_1 - 0,4825a_2$,

$a_0 = 0,56 - 0,63 \cdot 2,54816 - 0,4825(-1,47199)$ $a_0 = -0,3351$.

Запишем найденное уравнение $P2(x) = -0,3351 + 2,5486x - 1,47199 \cdot x^2$.

Найдём отклонения полученного полинома $P2(x)$ от заданных точек y.

В 0-й точке

$O_0 = P2(x_0) - y_0$ $P2(x_0) = -0,3351 + 2,5486 \cdot x_0 - 1,47199 \cdot x_0^{\ 2}$.

$P2(0,2) = 0,11564$ $O_0 = 0,115648 - 0,1 = 0,015648$.

В 1-й точке

$O_1 = P2(x_1) - y_1$ $P2(x_1) = -0,3351 + 2,5486x_1 - 1,47199x_1^{\ 2}$ $P2(0,4) = 0,448641$.

$O_1 = 0,448641 - 0,5 = -0,05136$.

Во 2-й точке

$O_2 = P2(x_2) - y_2$ $P2(x_2) = -0,3351 + 2,5486x_2 - 1,47199x_2^{\ 2}$ $P2(0,7) = 0,727331$.

$O_2 = 0,727331 - 0,6 = 0,127331$.

В 3-й точке

$O_3 = P2(x_3) - y_3$ $P2(x_3) = -0,3351 + 2,5486x_3 - 1,47199x_3^{\ 2}$ $P2(0,85) = 0,767317$.

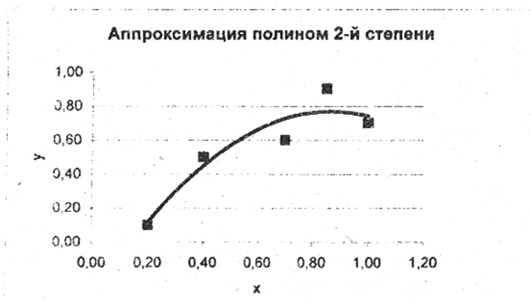
$O_3 = 0,767317 - 0,9 = -0,113268$.

В 4-й точке

$O_4 = P2(x_4) - y_4$ $P2(x_4) = -0,3351 + 2,5486x_4 - 1,47199x_4^{\ 2}$ $P2(1) = 0,741063$.

$O_4 = 0,741063 - 0,7 = 0,041063$.

Построим график функции $P2(x)$ и отметим исходные точки.



Интерполяция

Постановка задачи: *Дана таблица координат точек* $\{x_i, y_i\}$

i	0	1	2	3	4
x	0,2	0,4	0,7	0,85	1
y	0,1	0,5	0,6	0,9	0,7

Интерполировать точки (методом неопределённых коэффициентов) полиномом 1-й и 2-й степени.

Название метода	Система для нахождения коэффициентов полинома	Ответ
Метод неопределённых коэффициентов (интерполяция)	полином 1-й степени $\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot x_0 = y_0 \\ a_0 + a_1 \cdot x_1 = y_1 \end{cases}$ полином 2-й степени $\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot x_0 + a_2 \cdot x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 \cdot x_2 + a_2 \cdot x_2^2 = y_2 \end{cases}$	$P1(x) = a_0 + a_1 x$ $P2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Интерполяция полином 1-й степени

Общий вид полинома 1-й степени $P1(x) = a_0 + a_1 x$. Выберем для построения 0-ю точку и 3-ю точку. Для нахождения коэффициентов полинома необходимо решить систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot x_0 = y_0 \\ a_0 + a_1 \cdot x_1 = y_1 \end{cases}. \tag{6}$$

Подставим в систему (6) значения x_0, x_1, y_0, y_1 и получаем систему:

$$\begin{cases} a_0 + 0.2 \cdot a_1 = 0.1 \\ a_0 + 0.85 \cdot a_1 = 0.9 \end{cases}. \tag{7}$$

Запишем систему (7) в матричном виде.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,2 \\ 1 & 0,85 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,9 \end{bmatrix}.$$

Решим систему методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0,2 & 0,1 \\ 1 & 0,85 & 0,9 \end{array}\right).$$

В результате получим систему $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 1 & 1,230769 \end{array}\right)$.

Запишем полученные данные в виде системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + 0,2a_1 = 0,1 \\ a_1 = 1,230769 \end{cases}.$$

Из 2-го уравнения $a_1 = 1{,}230769$. Из 1-го уравнения найдём $a_0 = 0{,}1 - 0{,}2 \cdot a_1$.

$a_0 = 0{,}1 - 0{,}2 \cdot 1{,}230769 \quad a_0 = -0{,}14615$.

Запишем найденное уравнение $P1(x) = -0{,}14615 + 1{,}230769 \cdot x$.

Найдём отклонения полученного полинома $P1(x)$ от заданных точек y.

В 0-й точке

$O_0 = P1(x_0) - y_0 \quad P1(x_0) = -0{,}14615 + 1{,}230769 \cdot x_0 \quad P1(0{,}2) = 0{,}1 \quad O_0 = 0{,}1 - 0{,}1 = 0$.

В 1-й точке

$O_1 = P1(x_1) - y_1 \quad P1(x_1) = -0{,}14615 + 1{,}230769 \cdot x_1 \quad P1(0{,}4) = 0{,}346154$.

$O_1 = 0{,}346154 - 0{,}5 = -0{,}15385$.

В 2-й точке

$O_2 = P1(x_2) - y_2 \quad P1(x_2) = -0{,}14615 + 1{,}230769 \cdot x_2 \quad P1(0{,}7) = 0{,}715385$.

$O_2 = 0{,}715385 - 0{,}6 = 0{,}115385$.

В 3-й точке

$O_3 = P1(x_3) - y_3 \quad P1(x_3) = -0{,}14615 + 1{,}230769 \cdot x_3 \quad P1(0{,}85) = 0{,}9 \quad O_3 = 0{,}9 - 0{,}9 = 0$.

В 4-й точке

$O_4 = P1(x_4) - y_4 \quad P1(x_4) = -0{,}14615 + 1{,}230769 \cdot x_4 \quad P1(1) = 1{,}084615$.

$O_4 = 1{,}08615 - 0{,}7 = 0{,}384615$.

Документ Mcad:

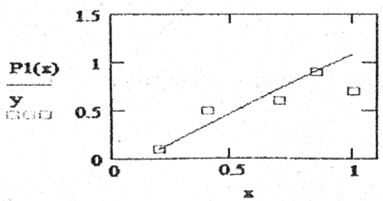
$$\mathbf{MNKOEFF1}(x,y,n) := \left| \begin{array}{l} C_{0,0} \leftarrow 1 \\ C_{0,1} \leftarrow x_0 \\ C_{1,0} \leftarrow 1 \\ C_{1,1} \leftarrow x_3 \\ D_0 \leftarrow y_0 \\ D_1 \leftarrow y_3 \\ a \leftarrow \mathrm{lsolve}(C,D) \\ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$x := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.7 \\ 0.85 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.9 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

$a := \mathbf{MNKOEFF1}(x,y,5)$

$P1(x) := a_0 + a_1 \cdot x$

$a_0 = -0.146 \qquad a_1 = 1.231$



Интерполяция полиномом 2-й степени

Зададим общий вид полинома 2-й степени $P2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Для нахождения коэффициентов полинома необходимо решить систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot x_0 + a_2 \cdot x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 \cdot x_4 + a_2 \cdot x_4^2 = y_4 \end{cases}. \qquad (8)$$

Получаем систему: $\begin{cases} a_0 + 0{,}2 \cdot a_1 + 0{,}2^2 \cdot a_2 = 0{,}1 \\ a_0 + 0{,}4 \cdot a_1 + 0{,}4^2 \cdot a_2 = 0{,}5 \\ a_0 + 1 \cdot a_1 + 1^2 \cdot a_2 = 0{,}7 \end{cases}$. (9)

Запишем систему в матричном виде. $\begin{bmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}04 \\ 1 & 0{,}4 & 0{,}16 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}5 \\ 0{,}7 \end{bmatrix}$.

Решим систему методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}2 & 0{,}04 & 0{,}1 \\ 1 & 0{,}4 & 0{,}16 & 0{,}5 \\ 1 & 1 & 1 & 0{,}7 \end{array} \right).$$

В результате получаем систему.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}2 & 0{,}04 & 0{,}1 \\ 0 & 1 & 0{,}6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2{,}0833 \end{array} \right).$$

Запишем полученные данные в виде системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + 0{,}2 a_1 + 0{,}04 \cdot a_2 = 0{,}1 \\ a_1 + 0{,}6 \cdot a_2 = 2 \\ a_2 = -2{,}0833 \end{cases}.$$

Из 3-го уравнения $a_2 = -2{,}0833$. Из 2-го уравнения найдём $a_1 = 2 - 0{,}6 \cdot a_2$.

$a_1 = 2 - 0{,}6(-2{,}0833) \quad a_1 = 3{,}25$. Из 1-го уравнения найдём

$a_0 = 0{,}1 - 0{,}2 \cdot a_1 - 0{,}04 \cdot a_2 \quad a_0 = 0{,}1 - 0{,}2 \cdot 3{,}25 - 0{,}04 \cdot (-2{,}0833) \quad a_0 = -0{,}4667$.

Запишем найденное уравнение $P2(x) = -0{,}4667 + 3{,}25 \cdot x - 2{,}083 \cdot x^2$. Найдём отклонения полученного полинома $P2(x)$ от заданных точек y.

$O_0 = P2(x_0) - y_0 \quad P2(x_0) = -0{,}4667 + 3{,}25 \cdot x_0 - 2{,}083 \cdot x_0^2 \quad P2(0{,}2) = 0{,}1$.

$O_0 = 0{,}1 - 0{,}1 = 0$.

$O_1 = P2(x_1) - y_1 \quad P2(x_1) = -0{,}4667 + 3{,}25 \cdot x_1 - 2{,}083 \cdot x_1^2 \quad P2(0{,}4) = 0{,}5$.

$O_1 = 0{,}5 - 0{,}5 = 0$.

$O_2 = P2(x_2) - y_2 \quad P2(x_2) = -0{,}4667 + 3{,}25 \cdot x_2 - 2{,}083 \cdot x_2^2 \quad P2(0{,}7) = 0{,}79$.

$O_2 = 0{,}79 - 0{,}6 = 0{,}19$.

$O_3 = P2(x_3) - y_3 \quad P2(x_3) = -0{,}4667 + 3{,}25 \cdot x_3 - 2{,}083 \cdot x_3^2 \quad P2(0{,}85) = 0{,}79$.

$O_3 = 0{,}79 - 0{,}9 = -0{,}11$.

$O_4 = P2(x_4) - y_4 \quad P2(x_4) = -0{,}4667 + 3{,}25 \cdot x_4 - 2{,}083 \cdot x_4^2 \quad P2(1) = 0{,}7$.
$O_4 = 0{,}7 - 0{,}7 = 0$.

Метод Ньютона

полином 1-й степени (построенный на точках $\{y_n, x_n\}$ и $\{y_m, x_m\}$) $$N1(t) = y_n + \frac{(y_m - y_n)}{(x_m - x_n)}(t - x_n)$$ полином 2-й степени (построенный на точках $\{y_n, x_n\}, \{y_m, x_m\}, \{y_p, x_p\}$) $$N2(t) = y_n + \frac{(y_m - y_n)}{(x_m - x_n)}(t - x_n) + \frac{\frac{(y_p - y_n)}{(x_p - x_n)} - \frac{(y_m - y_n)}{(x_m - x_n)}}{(x_p - x_m)}(t - x_n)(t - x_m)$$

Интерполирующая функция 1-й степени построенная на 1-й и 3-й точках.

$$N1(t) = y_1 + \frac{(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_1)}(t - x_1).$$

Подставим значения x_1, x_3, y_1, y_3.

$N1(t) = 0{,}5 + \frac{(0{,}9 - 0{,}5)}{(0{,}85 - 0{,}4)}(t - 0{,}4)$. Сгруппируем коэффициенты у неизвестных.

Получим уравнение. $N1(t) = 0{,}144 + 0{,}889 \cdot t$.

Найдём отклонения найденного уравнения от заданных точек.

$N1(x_0) = 0{,}144 + 0{,}889 \cdot x_0 \quad N1(0{,}2) = 0{,}144 + 0{,}889 \cdot 0{,}2 \quad O_0 = N1(0{,}2) - y_0 \quad O_0 = 0{,}222$.
$N1(x_1) = 0{,}144 + 0{,}889 \cdot x_1 \quad N1(0{,}4) = 0{,}144 + 0{,}889 \cdot 0{,}4 \quad O_1 = N1(0{,}4) - y_0 \quad O_1 = 0$.
$N1(x_2) = 0{,}144 + 0{,}889 \cdot x_2 \quad N1(0{,}7) = 0{,}144 + 0{,}889 \cdot 0{,}7 \quad O_2 = N1(0{,}7) - y_2 \quad O_2 = 0{,}166$.
$N1(x_3) = 0{,}144 + 0{,}889 \cdot x_3 \quad N1(0{,}85) = 0{,}144 + 0{,}889 \cdot 0{,}85 \quad O_3 = N1(0{,}85) - y_3 \quad O_3 = 0$.
$N1(x_4) = 0{,}144 + 0{,}889 \cdot x_4 \quad N1(1) = 0{,}144 + 0{,}889 \cdot 1 \quad O_4 = N1(1) - y_4 \quad O_4 = 0{,}333$.

Интерполирующая функция 2-й степени построенная на 0-й и 2-й и 4-й точках.

$$N1(t) = y_0 + \frac{(y_2 - y_0)}{(x_2 - x_0)}(t - x_0) + \frac{\left[\frac{(y_4 - y_0)}{(x_4 - x_0)} - \frac{(y_2 - y_0)}{(x_2 - x_0)}\right]}{(x_4 - x_2)}(t - x_0)(t - x_2)$$

Подставим значения $x_0, x_2, x_4, y_0, y_2, y_4$.

$$N2(t) = 0{,}1 + \frac{(0{,}6 - 0{,}1)}{(0{,}7 - 0{,}2)}(t - 0{,}2) + \frac{\frac{(0{,}7 - 0{,}1)}{(1 - 0{,}2)} - \frac{(0{,}6 - 0{,}1)}{(0{,}7 - 0{,}2)}}{(1 - 0{,}7)}(t - 0{,}2)(t - 0{,}7).$$

Получим $N2(t) = -0{,}8333 \cdot t^2 + 1{,}75 \cdot t - 0{,}21662$.

Найдём отклонения найденного уравнения от заданных точек.

$N2(x_0) = -0{,}8333 \cdot x_0^2 + 1{,}75 \cdot x_0 - 0{,}21662$.
$N2(0{,}2) = -0{,}8333 \cdot 0{,}2^2 + 1{,}75 \cdot 0{,}2 - 0{,}21662 \quad O_0 = N2(0{,}2) - y_0 \quad O_0 = 0$.

$N2(x_1) = -0{,}8333 \cdot x_1^2 + 1{,}75 \cdot x_1 - 0{,}21662$.
$N2(0{,}4) = -0{,}8333 \cdot 0{,}4^2 + 1{,}75 \cdot 0{,}4 - 0{,}21662 \quad O_1 = N2(0{,}4) - y_1 \quad O_1 = -0{,}14995$.
$N2(x_2) = -0{,}8333 \cdot x_2^2 + 1{,}75 \cdot x_2 - 0{,}21662$.
$N2(0{,}7) = -0{,}8333 \cdot 0{,}7^2 + 1{,}75 \cdot 0{,}7 - 0{,}21662 \quad O_2 = N2(0{,}7) - y_2 \quad O_2 = 0$.
$N2(x_3) = -0{,}8333 \cdot x_3^2 + 1{,}75 \cdot x_3 - 0{,}21662$.
$N2(0{,}85) = -0{,}8333 \cdot 0{,}85^2 + 1{,}75 \cdot 0{,}85 - 0{,}21662 \quad O_3 = N2(0{,}85) - y_3 \quad O_3 = -0{,}23120$.
$N2(x_4) = -0{,}8333 \cdot x_4^2 + 1{,}75 \cdot x_4 - 0{,}21662$.
$N2(01) = -0{,}8333 \cdot 1^2 + 1{,}75 \cdot 1 - 0{,}21662 \quad O_4 = N2(1) - y_4 \quad O_4 = 0$.

Кусочно-линейная интерполяция (Метод неопределённых коэффициентов)

На интервале от 0,2 до 1 задано 5 точек, получаем 4 отрезка. Интерполируем (метод Неопределенных коэффициентов) полиномом 1-й степени каждый отрезок. После нахождения каждого полинома запишем результат.

Системы для нахождения уравнений отрезков ломаной:			
1-й отрезок (x_0, x_1) $\begin{cases} a1_0 + a1_1 \cdot x_0 = y_0 \\ a1_0 + a1_1 \cdot x_1 = y_1 \end{cases}$	2-й отрезок (x_1, x_2) $\begin{cases} a2_0 + a2_1 \cdot x_1 = y_1 \\ a2_0 + a2_1 \cdot x_2 = y_2 \end{cases}$	3-й отрезок (x_2, x_3) $\begin{cases} a3_0 + a3_1 \cdot x_2 = y_2 \\ a3_0 + a3_1 \cdot x_3 = y_3 \end{cases}$	4-й отрезок (x_3, x_4) $\begin{cases} a4_0 + a4_1 \cdot x_3 = y_3 \\ a4_0 + a4_1 \cdot x_4 = y_4 \end{cases}$
Ответ: $P1(x) = \begin{cases} a1_0 + a1_1 x, & \text{при } x_0 \le x \le x_1 \\ a2_0 + a2_1 x, & \text{при } x_1 \le x \le x_2 \\ a3_0 + a3_1 x, & \text{при } x_2 \le x \le x_3 \\ a4_0 + a4_1 x, & \text{при } x_3 \le x \le x_4 \end{cases}$			

1-й отрезок (точки x_0, x_1)

i	0	1
x	0,2	0,4
y	0,1	0,5

Полином $P11(x) = a1_0 + a1_1 \cdot x$. По условию интерполяции полином должен проходить через точки, которые выбраны для построения, т.е.

$\begin{cases} P11(x_0) = y_0; \\ P11(x_1) = y_1. \end{cases}$ Следовательно $\begin{cases} a1_0 + a1_1 x_0 = y_0; \\ a1_0 + a1_1 x_1 = y_1. \end{cases}$

Подставим значения x_0, x_1, y_0, y_1. В результате получаем $\begin{cases} a1_0 + a1_1 \cdot 0{,}2 = 0{,}1; \\ a1_0 + a1_1 \cdot 0{,}4 = 0{,}5. \end{cases}$

Неизвестными в системе являются $a1_0, a1_1$. Решим систему методом Гаусса.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 1 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{array}\right)$. Получаем $\begin{cases} a1_0 + a1_1 \cdot 0{,}2 = 0{,}1 \\ a1_1 \cdot 0{,}2 = 0{,}4 \end{cases}$.

Из 2-го уравнения найдем $a1_1 = 0{,}4/0{,}2 = 2$.

Из 1-го уравнения найдем $a1_0 = 0{,}1 - 0{,}2 \cdot a1_1 = 0{,}1 - 0{,}2 \cdot 2 = -0{,}3$.

Запишем найденное уравнение $P11(x) = -0{,}3 + 2x$.

Проверка. Значения в точках $P11(x_0 = 0{,}2) = -0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}1 = y_0$;

$P11(x_1 = 0{,}4) = -0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}5 = y_1$.

Следовательно, прямая проходит через точки $\{x_0, y_0\}, \{x_1, y_1\}$.

2-й отрезок (точки x_1,x_2)

i	1	2
x	0,4	0,7
y	0,5	0,6

Полином $P12(x) = a2_0 + a2_1 \cdot x$. По условию интерполяции полином должен проходить через точки, которые выбраны для построения, т.е.

$\begin{cases} P12(x_1) = y_1; \\ P12(x_2) = y_2. \end{cases}$ Следовательно $\begin{cases} a2_0 + a2_1 x_1 = y_1; \\ a2_0 + a2_1 x_2 = y_2. \end{cases}$

Подставим значения x_1, x_2, y_1, y_2. В результате получаем $\begin{cases} a2_0 + a2_1 \cdot 0{,}4 = 0{,}5; \\ a2_0 + a2_1 \cdot 0{,}7 = 0{,}6. \end{cases}$

Неизвестными в системе являются $a2_0, a2_1$.

Решим систему методом Гаусса. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 1 & 0{,}7 & 0{,}6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{array}\right)$.

Запишем матрицу в виде системы $\begin{cases} a2_0 + a2_1 \cdot 0{,}4 = 0{,}5; \\ a2_1 \cdot 0{,}3 = 0{,}1. \end{cases}$

Из 2-го уравнения найдем $a2_1 = 0{,}1/0{,}3 = 0{,}333$.

Из 1-го уравнения найдем $a2_0 = 0{,}5 - 0{,}4 \cdot a2_1 = 0{,}5 - 0{,}4 * 0{,}333 = 0{,}3668$.

Запишем найденное уравнение $P12(x) = 0{,}3668 + 0{,}333x$.

Проверка. Найденное уравнение должно проходить через точки $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}$.

$P12(x_1 = 0{,}4) = 0{,}3668 + 0{,}333 \cdot 0{,}4 = 0{,}5 = y_1$,

$P12(x_2 = 0{,}7) = 0{,}3668 + 0{,}333 \cdot 0{,}7 = 0{,}6 = y_2$.

Следовательно, найденная прямая проходит через 1-ю и 2-ю точки.

3-й отрезок (точки x_2,x_3)

i	2	3
x	0,7	0,85
y	0,6	0,9

Полином $P13(x) = a3_0 + a3_1 \cdot x$. По условию интерполяции полином должен проходить через точки, которые выбраны для построения, т.е.

$\begin{cases} P13(x_2) = y_2; \\ P13(x_3) = y_3. \end{cases}$ Следовательно $\begin{cases} a3_0 + a3_1 x_2 = y_2; \\ a3_0 + a3_1 x_3 = y_3. \end{cases}$

Подставим значения x_2, x_3, y_2, y_3. В результате $\begin{cases} a3_0 + a3_1 \cdot 0{,}7 = 0{,}6; \\ a3_0 + a3_1 \cdot 0{,}85 = 0{,}9. \end{cases}$

Неизвестными в системе являются $a3_0, a3_1$.

Решим систему методом Гаусса. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0{,}7 & 0{,}6 \\ 1 & 0{,}85 & 0{,}9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}3 \end{array}\right)$.

Запишем матрицу в виде системы. $\begin{cases} a3_0 + a3_1 \cdot 0{,}7 = 0{,}6; \\ a3_1 \cdot 0{,}15 = 0{,}3. \end{cases}$

Из 2-го уравнения найдем $a3_1 = 0{,}3/0{,}15 = 2$.

Из 1-го уравнения найдем $a3_0 = 0{,}6 - 0{,}7 \cdot a3_1 = 0{,}6 - 0{,}7 \cdot 2 = -0{,}8$.

Запишем найденное уравнение $P13(x) = -0{,}8 + 2x$.

Проверка. Найденное прямая должна пройти через точки $\{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}$.

$P13(x_2 = 0{,}7) = -0{,}8 + 2 \cdot x_2 = -0{,}8 + 2 \cdot 0{,}7 = 0{,}6 = y_2$.

$P13(x_3 - 0{,}85) = -0{,}8 + 2 \cdot x_3 = -0{,}8 + 2 \cdot 0{,}85 = 0{,}9 = y_3$.

Следовательно, найденная прямая проходит через 2-ю и 3-ю точки.

4-й отрезок (точки x_3,x_4)

i	3	4
x	0,85	1
y	0,9	0,7

Полином $P14(x) = a4_0 + a4_1 x$. По условию интерполяции полином должен проходить через точки, которые выбраны для построения, т.е.

$\begin{cases} P14(x_3) = y_3; \\ P14(x_4) = y_4. \end{cases}$ Следовательно $\begin{cases} a4_0 + a4_1 x_3 = y_3; \\ a4_0 + a4_1 x_4 = y_4. \end{cases}$

Подставим значения x_3, x_4, y_3, y_4. В результате получаем $\begin{cases} a4_0 + a4_1 \cdot 0{,}85 = 0{,}9; \\ a4_0 + a4_1 \cdot 1 = 0{,}7. \end{cases}$

Неизвестными в системе являются $a4_0, a4_1$. Решим систему методом Гаусса.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0{,}85 & 0{,}9 \\ 1 & 1 & 0{,}7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0{,}85 & 0{,}9 \\ 0 & 0{,}15 & -0{,}2 \end{array}\right)$.

Запишем матрицу в виде системы $\begin{cases} a4_0 + a4_1 \cdot 0{,}85 = 0{,}9; \\ a4_1 \cdot 0{,}15 = -0{,}2. \end{cases}$

Из 2-го уравнения найдем $a4_1 = -0{,}2/0{,}15 = -1{,}333$.

Из 1-го уравнения найдем $a4_0 = 0{,}9 - 0{,}85 \cdot a4_1 = 0{,}9 - 0{,}85 \cdot (-1{,}333) = 2{,}033$.

Запишем найденное уравнение $P14(x) = 2{,}033 - 1{,}333x$.

Проверка. Найденное уравнение должно проходить через точки $\{x_3, y_3\}, \{x_4, y_4\}$.

$P14(x_3 = 0{,}85) = 2{,}033 - 1{,}333 \cdot x_3 = 2{,}033 - 1{,}333 \cdot 0{,}85 = 0{,}9 = y_3$.

$P14(x_4 = 1) = 2{,}033 - 1{,}333 \cdot x_4 = 2{,}033 - 1{,}333 \cdot 1 = 0{,}7 = y_4$.

Следовательно, прямая проходит через 3-ю и 4-ю точки.

Запишем ответ $P1(x) = \begin{cases} -0{,}3 + 2x, & \text{если } 0{,}2 \le x \le 0{,}4; \\ 0{,}3668 + 0{,}333x, & \text{если } 0{,}4 \le x \le 0{,}7; \\ -0{,}8 + 2x, & \text{если } 0{,}7 \le x \le 0{,}85; \\ 2{,}033 - 1{,}333x, & \text{если } 0{,}85 \le x \le 1. \end{cases}$

Кусочно-параболическая интерполяция

Системы для нахождения коэффициентов полинома: .	
1-й отрезок (точки x_0, x_1, x_2)	2-й отрезок (точки x_2, x_3, x_4)
$\begin{cases} a1_0+a1_1x_0+a1_2x_0^2=y_0;\\ a1_0+a1_1x_1+a1_2x_1^2=y_1;\\ a1_0+a1_1x_2+a1_2x_2^2=y_2. \end{cases}$	$\begin{cases} a2_0+a2_1x_2+a2_2x_2^2=y_2;\\ a2_0+a2_1x_3+a2_2x_3^2=y_3;\\ a2_0+a2_1x_4+a2_2x_4^2=y_4. \end{cases}$
Ответ: $P2(x)=\begin{cases} a1_0+a1_1x+a1_2x^2, \text{при } x_0\le x\le x_2\\ a2_0+a2_1x+a2_2x^2, \text{при } x_2\le x\le x_4 \end{cases}$	

На интервале от 0,2 до 1 задано 5 точек. Разобьём его на два отрезка $x_0 \le x \le x_2$ и $x_2 \le x \le x_4$. Интерполируем (методом неопределенных коэффициентов) полиномом 2-й степени каждый отрезок.

1-й отрезок (точки x_0, x_1, x_2)

i	0	1	2
x	0,2	0,4	0,7
y	0,1	0,5	0,6

Полином $P21(x)=a1_0+a1_1x+a_2x^2$. По условию интерполяции полином должен проходить через точки, которые выбраны для построения, т.е.
$\begin{cases} P21(x_0)=y_0;\\ P21(x_1)=y_1;\\ P21(x_2)=y_2. \end{cases}$ Следовательно $\begin{cases} a1_0+a1_1x_0+a1_2x_0^{\,2}=y_0;\\ a1_0+a1_1x_1+a1_2x_1^{\,2}=y_1;\\ a1_0+a1_1x_2+a1_2x_2^{\,2}=y_2. \end{cases}$

Подставим значения $x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2$.

В результате получаем $\begin{cases} a1_0+a1_1\cdot 0{,}2+a1_2\cdot 0{,}2^2=0{,}1;\\ a1_0+a1_1\cdot 0{,}4+a1_2\cdot 0{,}4^2=0{,}5;\\ a1_0+a1_1\cdot 0{,}7+a1_2\cdot 0{,}7^2=0{,}6. \end{cases}$

Неизвестными в системе являются $a1_0, a1_1, a1_2$.

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}2 & 0{,}2^2 & 0{,}1\\ 1 & 0{,}4 & 0{,}4^2 & 0{,}5\\ 1 & 0{,}7 & 0{,}7^2 & 0{,}6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}2 & 0{,}04 & 0{,}1\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}12 & 0{,}4\\ 0 & 0{,}5 & 0{,}45 & 0{,}5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}2 & 0{,}04 & 0{,}1\\ 0 & 1 & 0{,}6 & 2\\ 0 & 1 & 0{,}9 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}2 & 0{,}04 & 0{,}1\\ 0 & 1 & 0{,}6 & 2\\ 0 & 0 & 0{,}3 & -1 \end{array}\right).$$

Запишем полученную матрицу в виде системы $\begin{cases} a1_0+a1_1\cdot 0{,}2+a1_2\cdot 0{,}04=0{,}1;\\ a1_1+a1_2\cdot 0{,}6=2;\\ a1_2\cdot 0{,}3=-1. \end{cases}$

Из 3-го уравнения найдем $a1_2=-1/0{,}3=-3{,}333$.

Из 2-го уравнения найдем $a1_1=2-0{,}6\cdot a1_2=2-0{,}6\cdot(-3{,}333)=4$.

Из 1-го $a1_0=0{,}1-0{,}2\cdot a1_1-0{,}04\cdot a1_2=0{,}1-0{,}2\cdot 4-0{,}04\cdot(-3{,}333)=-0{,}567$.

Запишем найденное уравнение $P21(x)=-0{,}567+4x-3{,}333x^2$.

Проверка. Найденное уравнение должно удовлетворять условию интерполяции для системы точек $\{x_0,y_0\},\{x_1,y_1\},\{x_2,y_2\}$.

$P21(x_0=0{,}2)=-0{,}567+4\cdot x_0-3{,}333\cdot x_0^{\,2}=-0{,}567+4\cdot 0{,}2-3{,}333\cdot 0{,}2^2=0{,}1=y_0$

$P21(x_1=0{,}4)=-0{,}567+4\cdot x_1-3{,}333\cdot x_1^{\,2}=-0{,}567+4\cdot 0{,}4-3{,}333\cdot 0{,}4^2=0{,}5=y_1$

$P21(x_2=0{,}7)=-0{,}567+4\cdot x_2-3{,}333\cdot x_2^{\,2}=-0{,}567+4\cdot 0{,}7-3{,}333\cdot 0{,}7^2=0{,}6=y_2$

Следовательно, полученный полином проходит через 0- ю, 1-ю и 2-ю точки.

2 отрезок (точки x_0, x_1, x_2)

i	2	3	4
x	0,7	0,85	1
y	0,6	0,9	0,7

Полином $P22(x)=a2_0+a2_1x+a2_2x^2$. По условию интерполяции полином должен проходить через точки, которые выбраны для построения, т.е.
$\begin{cases} P21(x_2)=y_2;\\ P21(x_3)=y_3;\\ P21(x_4)=y_4. \end{cases}$ Следовательно $\begin{cases} a2_0+a2_1x_2+a2_2x_2^{\,2}=y_2;\\ a2_0+a2_1x_3+a2_2x_3^{\,2}=y_3;\\ a2_0+a2_1x_4+a2_2x_4^{\,2}=y_4. \end{cases}$

Подставим значения $x_2, x_3, x_4, y_2, y_3, y_4$.

В результате получаем $\begin{cases} a2_0+a2_1\cdot 0{,}7+a2_2\cdot 0{,}7^2=0{,}6;\\ a2_0+a2_1\cdot 0{,}85+a2_2\cdot 0{,}85^2=0{,}9;\\ a2_0+a2_1\cdot 1+a2_2\cdot 1^2=0{,}7. \end{cases}$

Неизвестными в системе являются $a2_0, a2_1, a2_2$.

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}7 & 0{,}7^2 & 0{,}6\\ 1 & 0{,}85 & 0{,}85^2 & 0{,}9\\ 1 & 1 & 1^2 & 0{,}7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}7 & 0{,}49 & 0{,}6\\ 0 & 0{,}15 & 0{,}23 & 0{,}3\\ 0 & 0{,}3 & 0{,}51 & 0{,}1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}7 & 0{,}49 & 0{,}6\\ 0 & 1 & 1{,}55 & 2\\ 0 & 1 & 1{,}7 & 0{,}33 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}7 & 0{,}49 & 0{,}6\\ 0 & 1 & 1{,}55 & 2\\ 0 & 0 & 0{,}15 & -1{,}67 \end{array}\right)$$

Запишем матрицу в виде системы: $\begin{cases} a2_0+a2_1\cdot 0{,}7+a2_2\cdot 0{,}49=0{,}6;\\ a2_1+a2_2\cdot 1{,}55=2;\\ a2_2\cdot 0{,}15=-1{,}667. \end{cases}$

Из 3-го уравнения найдем $a2_2=-1{,}667/0{,}15=-11{,}11$.

Из 2-го уравнения найдем $a2_1=2-1{,}55\cdot a2_2=2-1{,}55\cdot -11{,}11=19{,}22$.

Из 1-го $a2_0=0{,}6-0{,}7a2_1-0{,}49a2_2=0{,}6-0{,}7\cdot 19{,}22+0{,}49\cdot(-11{,}11)=-7{,}41$.

Запишем найденное уравнение $P21(x)=-7{,}41+19{,}22\cdot x-11{,}11\cdot x^2$. Проверка.

Найденное уравнение должно удовлетворять условию интерполяции для системы точек $\{x_2,y_2\},\{x_3,y_3\},\{x_4,y_4\}$.

$P21(x_2=0{,}7)=-7{,}41+19{,}22\cdot x_2-11{,}11\cdot x_2^{\,2}=-7{,}41+19{,}22\cdot 0{,}7-11{,}11\cdot 0{,}7^2=0{,}6=y_2$.

$P21(x_3=0{,}85)=-7{,}41+19{,}22\cdot x_3-11{,}11\cdot x_3^{\,2}=-7{,}41+19{,}22\cdot 0{,}85-11{,}11\cdot 0{,}85^2=0{,}9=y_3$.

$P21(x_4=1)=-7{,}41+19{,}22\cdot x_4-11{,}11\cdot x_4^{\,2}=-7{,}41+19{,}22\cdot 1-11{,}11\cdot 1^2=0{,}7=y_4$.

Следовательно, полученный полином проходит через 2- ю, 3-ю и 4-ю точки.

Запишем ответ $P2(x)=\begin{cases}-0{,}567+4x-3{,}333x^2, & \text{если } 0{,}2\le x\le 0{,}7\\ -7{,}41+19{,}22x-11{,}11x^2, & \text{если } 0{,}7\le x\le 1\end{cases}$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4
Вычисление определённого интеграла

Постановка задачи:
Вычислить определённый интеграл $I=\int\limits_a^b f(x)dx$ с шагом $h=(b-a)/n$,
где n - количество разбиений $[a,b]$.

Название метода	Итерационная формула
Метод центральных прямоугольников	$I=h\sum\limits_{i=0}^{n-1} f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)$, где $x_{i+\frac{1}{2}}=a+h\left(i+\frac{1}{2}\right)$
Метод трапеций	$I=hx\cdot\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum\limits_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$, где $x_i=a+hi$
Метод Симпсона	$S1=\sum\limits_{i=1}^{n-1} f(x_i)$, где $x_i=a+hi$ $S2=\sum\limits_{i=0}^{n-1} f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)$, где $x_{i+\frac{1}{2}}=a+h\left(i+\frac{1}{2}\right)$ $I=\frac{h}{6}\cdot(f(a)+2\cdot S1+4\cdot S2+f(b))$

Вычислить интеграл $\int\limits_0^5 x^2dx$

Подынтегральная функция $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=5$, $n=5$, $h=(b-a)/n=(5-0)/5=1$

номер точки	значение x_i	значение $x_{i+1/2}$ в центре $[x_i\ x_{i+1}]$	значение $f(x_i)$	значение $f(x_{i+1/2})$
$i=0$	$x=0$	$x=0{,}5$	$f(x=0)=0^2=0$	$f(x=0{,}5)=0{,}5^2=0{,}25$
$i=1$	$x=1$	$x=1{,}5$	$f(x=1)=1^2=1$	$f(x=1{,}5)=1{,}5^2=2{,}25$
$i=2$	$x=2$	$x=2{,}5$	$f(x=2)=2^2=4$	$f(x=2{,}5)=2{,}5^2=6{,}25$
$i=3$	$x=3$	$x=3{,}5$	$f(x=3)=3^2=9$	$f(x=3{,}5)=3{,}5^2=12{,}25$
$i=4$	$x=4$	$x=4{,}5$	$f(x=4)=4^2=16$	$f(x=4{,}5)=4{,}5^2=20{,}25$
$i=5$	$x=5$		$f(x=5)=5^2=25$	

Метод центральных прямоугольников:

$$I_{\text{цп}}=h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)=h(f(0{,}5)+f(1{,}5)+f(2{,}5)+f(3{,}5)+f(4{,}5))=$$
$$=1(0{,}25+2{,}25+6{,}25+12{,}25+20{,}25)=41{,}25$$

Метод трапеций:

$$I_{\text{тр}}=h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]=h\left[\frac{f(0)+f(5)}{2}+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)\right]=$$
$$=1\left[\frac{0+25}{2}+1+4+9+16\right]=42{,}5$$

Метод Симпсона:

$$I_{\text{simp}}=\frac{h}{6}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+4\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)\right]=$$
$$=\frac{h}{6}[f(0)+f(5)+2(f(1)+f(2)+f(3)+f(4))+4(f(0{,}5)+f(1{,}5)+f(2{,}5)+f(3{,}5)+f(4{,}5))]=$$
$$=\frac{1}{6}[0+25+2(1+4+9+16)+4(0{,}25+2{,}25+6{,}25+12{,}25+20{,}25)]=41{,}677$$

Метод левых прямоугольников:

$$I_{\text{лп}}=h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)=h(f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4))==1(0+1+4+9+16)=30$$

Метод правых прямоугольников:

$$I_{\text{пп}}=h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)=h(f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5))==1(1+4+9+16+25)=55$$

Документ Mcad:

```
LEVPR(f,a,b,N) := | h ← (b − a)/N
                  | S ← 0
                  | for i ∈ 0..N − 1
                  |   S ← S + f(a + i·h)
                  | S ← S·h
                  | S
```

описание программы-функции реализующей метод

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = 1$

исходные данные

$f(x) := \sin(x)$ $a := 0$ $b := \frac{\pi}{2}$

$N := 10$

LEVPR(f, a, b, N) = 0.919 ответ

```
PRAVPR(f,a,b,N) := | h ← (b − a)/N
                   | S ← 0
                   | for i ∈ 1..N
                   |   S ← S + f(a + i·h)
                   | S ← S·h
                   | S
```

описание программы-функции реализующей метод

исходные данные

f(x) := sin(x)   a := 0   b := π/2
N := 10

PRAVPR(f,a,b,N) = 1.076   ответ

```
ZENTRPR(f,a,b,N) := | h ← (b − a)/N
                    | S ← 0
                    | for i ∈ 1..N
                    |   S ← S + f[a + (i − 0.5)·h]
                    | S ← S·h
                    | S
```

описание программы-функции реализующей метод

исходные данные

f(x) := sin(x)   a := 0   b := π/2
N := 10

ZENTRPR(f,a,b,N) = 1.001   ответ

```
TRAPEZIA(f,a,b,N) := | h ← (b − a)/N
                     | S ← (f(a) + f(b))/2
                     | for i ∈ 1..N − 1
                     |   S ← S + f(a + i·h)
                     | S ← S·h
                     | S
```

описание программы-функции реализующей метод

исходные данные

f(x) := sin(x)   a := 0   b := π/2

N := 10

TRAPEZIA(f,a,b,N) = 0.998   ответ


```
SIMPSON(f,a,b,N) := | h ← (b − a)/N
                    | S1 ← 0
                    | for i ∈ 1,3..N − 1
                    |   S1 ← S1 + f(a + i·h)
                    | S2 ← 0
                    | for i ∈ 2,4..N − 1
                    |   S2 ← S2 + f(a + i·h)
                    | S ← h/3·(f(a) + 4·S1 + 2·S2 + f(b))
                    | S
```

описание программы-функции реализующей метод

исходные данные

f(x) := sin(x)   a := 0   b := π/2
N := 10

SIMPSON(f,a,b,N) = 1   ответ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5
Обыкновенные дифференциальные уравнения. Численное решение задач с начальными условиями Коши

Постановка задачи:

Дано дифференциальное уравнение $y''+B(x,y)\ y'+K(x,y)=0$, $[a,b]$ - интервал интегрирования д.у. , $h=(b-a)/n$ - шаг интегрирования д.у. , где n - выбранное число разбиений $[a,b]$, $y(a) = y_0$, $y'(a) = y'_0$ - начальные условия для д.у.. Требуется определить приближенные значения функций $y(x)$, $y'(x)$, удовлетворяющие д.у. и начальным условиям.

Приведем исходное уравнение к системе д.у. первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=z,$$
$$\frac{dz}{dx}=-B(x,y)z-K(x,y)=f(x,y,z)$$
$$y(x_0)=y_0, z(x_0)=y_0'$$

Название метода	Итерационная формула
Метод Эйлера	$x_{i+1}=x_i+h,$ $y_{i+1}=y_i+hz_i,$ $z_{i+1}=z_i+hf(x_i,y_i,z_i),$

Название метода	Итерационная формула
Метод Эйлера с центрированием	$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$ $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} z_i,$ $z_{i+\frac{1}{2}} = z_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i, z_i)$ $x_{i+1} = x_i + h$ $y_{i+1} = y_i + hz_{i+\frac{1}{2}},$ $z_i = z_i + hf\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}, z_{i+\frac{1}{2}}\right)$
Метод Эйлера с усреднением	$x_{i+1} = x_i + h$ $\widetilde{y}_{i+1} = y_i + hz_i,$ $\widetilde{z}_{i+1} = z_i + hf(x_i, y_i, z_i)$ $y_{i+1} = y_i + h\frac{z_i + \widetilde{z}_{i+1}}{2},$ $z_i = z_i + h\frac{f(x_i, y_i, z_i) + f(x_{i+1}, \widetilde{y}_{i+1}, \widetilde{z}_{i+1})}{2},$

Рассмотрим конкретный пример:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y(x) = x, y(0) = 1, y'(0) = 0$$ на отрезке [0,1].

Решим задачу явным методом Эйлера.

Введем функцию $z(x)=dy/dx$. Тогда получим задачу Коши для системы двух ОДУ первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = z,$$

$$\frac{dz}{dx} = -2z - y + x, y(0) = 1, z(0) = 0.$$

Разобьем отрезок на n=5 равных частей. Тогда шаг $h=(b-a)/n=(1-0)/5=0.2$

Формулы метода Эйлера:

$$x_{i+1} = x_i + h,$$
$$y_{i+1} = y_i + hz_i,$$
$$z_{i+1} = z_i + h(-2z_i - y_i + x_i), \qquad x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 0$$

Вычисление точек (x_1,y_1) и (x_1,z_1):

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0,2 = 0,2,$$
$$y_1 = y_0 + hz_0 = 1 + 0,2 \cdot 1 = 1,$$
$$z_1 = z_0 + h(-2z_0 - y_0 + x_0) = 0 + 0,2((-2) \cdot 0 - 1 + 0) = -0,2.$$

Вычисление точек (x_2,y_2) и (x_2,z_2):

$$x_2 = x_1 + h = 0,2 + 0,2 = 0,4,$$
$$y_2 = y_1 + hz_1 = 1 + 0,2 \cdot (-0,2) = 0,96,$$
$$z_2 = z_1 + h(-2z_1 - y_1 + x_1) = (-0,28) + 0,2((-2) \cdot (-0,28) - 0,96 + 0,4) = -0,28.$$

Формулы метода Эйлера с центрированием:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$$
$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} z_i,$$
$$z_{i+\frac{1}{2}} = z_i + \frac{h}{2}(-2z_i - y_i + x_i)$$
$$x_{i+1} = x_i + h$$
$$y_{i+1} = y_i + hz_{i+\frac{1}{2}},$$
$$z_i = z_i + h(-2z_{i+\frac{1}{2}} - y_{i+\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}),$$

Вычисление точек (x_1,y_1) и (x_1,z_1):

$$x_{\frac{1}{2}} = x_0 + \frac{h}{2} = 0 + \frac{0,2}{2} = 0,1,$$
$$y_{\frac{1}{2}} = y_0 + \frac{h}{2} z_0 = 1 + \frac{0,2}{2} \cdot 0 = 1,$$
$$z_{\frac{1}{2}} = z_0 + \frac{h}{2}(-2z_0 - y_0 + x_0) = 0 + \frac{0,2}{2}(-2 \cdot 0 - 1 + 0) = -0,1.$$
$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0,2 = 0,2,$$
$$y_1 = y_0 + hz_{\frac{1}{2}} = 1 + 0,2(-0,1) = 0,98,$$
$$z_1 = z_0 + h(-2z_{\frac{1}{2}} - y_{\frac{1}{2}} + x_{\frac{1}{2}}) = 0 + 0,2((-2)(-0,1) - 1 + 0,1) = -0,14.$$

Вычисление точек (x_2,y_2) и (x_2,z_2):

$$x_{\frac{3}{2}} = x_1 + \frac{h}{2} = 0,2 + \frac{0,2}{2} = 0,3,$$
$$y_{\frac{3}{2}} = y_1 + \frac{h}{2} z_1 = 0,98 + \frac{0,2}{2}(-0,14) = 0,966,$$

$$z_{\frac{3}{2}} = z_1 + \frac{h}{2}(-2z_1 - y_1 + x_1) = (-0{,}14) + \frac{0{,}2}{2}(-2(-0{,}14) - 0{,}98 + 0{,}2) = -0{,}19,$$

$$x_2 = x_1 + h = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4,$$

$$y_2 = y_1 + hz_{\frac{3}{2}} = 0{,}98 + 0{,}2(-0{,}19) = 0{,}942,$$

$$z_2 = z_1 + h(-2z_{\frac{3}{2}} - y_{\frac{3}{2}} + x_{\frac{3}{2}}) = (-0{,}14) + 0{,}2((-2)(-0{,}19) - 0{,}966 + 0{,}3) = -0{,}197.$$

Формулы метода Эйлера с усреднением:

$$\boxed{\begin{aligned}
&x_{i+1} = x_i + h\\
&\widetilde{y}_{i+1} = y_i + hz_i,\\
&\widetilde{z}_{i+1} = z_i + h(-2z_i - y_i + x_i),\\
&y_{i+1} = y_i + h\frac{z_i + \widetilde{z}_{i+1}}{2},\\
&z_i = z_i + h\frac{(-2z_i - y_i + x_i) + (-2\widetilde{z}_{i+1} - \widetilde{y}_{i+1} + x_{i+1})}{2}.
\end{aligned}}$$

Вычисление точек (x_1, y_1) и (x_1, z_1):

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0{,}2,$$

$$\widetilde{y}_1 = y_0 + hz_0 = 1 + 0{,}2 \cdot 0 = 1,$$

$$\widetilde{z}_1 = z_0 + h(-2z_0 - y_0 + x_0) = 0 + 0{,}2((-2)\ 0 - 1 + 0) = -0{,}2,$$

$$y_1 = y_0 + h\frac{z_0 + \widetilde{z}_1}{2} = 1 + 0{,}2\frac{0 + (-0{,}2)}{2} = 0{,}98,$$

$$z_1 = z_0 + h\frac{(-2z_0 - y_0 + x_0) + (-2\widetilde{z}_1 - \widetilde{y}_1 + x_1)}{2} =$$

$$= 0 + 0{,}2\frac{((-2)\ 0 - 1 + 0)((-2)(-0{,}2) - 1 + 0{,}2)}{2} = -0{,}14$$

Вычисление точек (x_2, y_2) и (x_2, z_2):

$$x_2 = x_1 + h = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4,$$

$$\widetilde{y}_2 = y_1 + hz_1 = 0{,}98 + 0{,}2 \cdot (-0{,}14) = 0{,}952,$$

$$\widetilde{z}_2 = z_1 + h(-2z_1 - y_1 + x_1) = (-0{,}14) + 0{,}2((-2)(-0{,}14) - 0{,}98 + 0{,}2) = -0{,}24,$$

$$y_2 = y_1 + h\frac{z_1 + \widetilde{z}_2}{2} = 1 + 0{,}2\frac{(-0{,}14) + (-0{,}24)}{2} = 0{,}942,$$

$$z_2 = z_1 + h\frac{(-2z_1 - y_1 + x_1) + (-2\widetilde{z}_2 - \widetilde{y}_2 + x_2)}{2} =$$

$$= (-0{,}14) + 0{,}2\frac{((-2) \cdot (-0{,}14) - 0{,}98 + 0{,}2)((-2)(-0{,}24) - 0{,}952 + 0{,}4)}{2} = -0{,}197,$$

Документ Mcad:

Метод Эйлера

$$\mathrm{Euler}(y0, z0, a, b, n, fy, fz) := \left|\begin{array}{l}
x_0 \leftarrow a\\
y_0 \leftarrow y0\\
z_0 \leftarrow z0\\
h \leftarrow \dfrac{b-a}{n}\\
\text{for } i \in 0..n-1\\
\quad \left|\begin{array}{l}
x_{i+1} \leftarrow x_i + h\\
y_{i+1} \leftarrow y_i + h \cdot fy(z_i)\\
z_{i+1} \leftarrow z_i + h \cdot fz(x_i, y_i, z_i)\\
\text{continue}
\end{array}\right.\\
\mathrm{augment}(x, y, z)
\end{array}\right.$$

$a := 0 \qquad b := 15 \qquad y0 := 1 \qquad z0 := 0 \qquad n := 20$

$fy(z) := z \qquad fz(x, y, z) := -y$

$x := \mathrm{Euler}(y0, z0, a, b, n, fy, fz)^{\langle 0 \rangle} \qquad y := \mathrm{Euler}(y0, z0, a, b, n, fy, fz)^{\langle 1 \rangle} \qquad z := \mathrm{Euler}(y0, z0, a, b, n, fy, fz)^{\langle 2 \rangle}$

x =

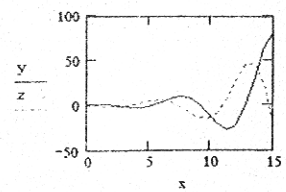
	0
0	0
1	0.75
2	1.5
3	2.25
4	3
5	3.75
6	4.5
7	5.25
8	6
9	6.75
10	7.5
11	8.25
12	9
13	9.75
14	10.5
15	11.25
16	12
17	12.75
18	13.5
19	14.25
20	15

y =

	0
0	1
1	1
2	0.438
3	-0.688
4	-2.059
5	-3.043
6	-2.869
7	-0.984
8	2.515
9	6.568
10	9.206
11	8.15
12	1.915
13	-8.904
14	-20.8
15	-27.688
16	-22.875
17	-2.488
18	30.766
19	65.42
20	82.768

z =

	.0
0	0
1	-0.75
2	-1.5
3	-1.828
4	-1.313
5	0.231
6	2.514
7	4.666
8	5.404
9	3.517
10	-1.409
11	-8.313
12	-14.425
13	-15.862
14	-9.183
15	6.417
16	27.183
17	44.339
18	46.205
19	23.13
20	-25.935



Метод Эйлера -с центрированием

$$Euler(y0,z0,a,b,n,fy,fz) := \left| \begin{array}{l} x_0 \leftarrow a \\ y_0 \leftarrow y0 \\ z_0 \leftarrow z0 \\ h \leftarrow \dfrac{b-a}{n} \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_{i+1} \leftarrow x_i + h \\ y_{i+1} \leftarrow y_i + h \cdot fy\left(z_i + \dfrac{h}{2} \cdot fz(x_i, y_i, z_i)\right) \\ z_{i+1} \leftarrow z_i + h \cdot fz\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2} \cdot fy(z_i), z_i + \dfrac{h}{2} \cdot fz(x_i, y_i, z_i)\right) \\ \text{continue} \end{array} \right. \\ \text{augment}(x,y,z) \end{array} \right.$$

$a := 0 \qquad b := 15 \qquad y0 := 1 \qquad z0 := 0 \qquad n := 20$

$fy(z) := z \qquad fz(x,y,z) := -y$

$x := Euler(y0,z0,a,b,n,fy,fz)^{\langle 0 \rangle} \qquad y := Euler(y0,z0,a,b,n,fy,fz)^{\langle 1 \rangle} \qquad z := Euler(y0,z0,a,b,n,fy,fz)^{\langle 2 \rangle}$

x =

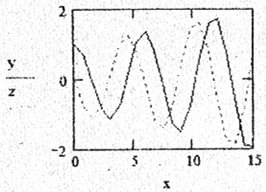
	0
0	0
1	0.75
2	1.5
3	2.25
4	3
5	3.75
6	4.5
7	5.25
8	6
9	6.75
10	7.5
11	8.25
12	9
13	9.75
14	10.5
15	11.25
16	12
17	12.75
18	13.5
19	14.25
20	15

y =

	0
0	1
1	0.719
2	-0.046
3	-0.842
4	-1.16
5	-0.76
6	0.16
7	1.05
8	1.336
9	0.788
10	-0.309
11	-1.295
12	-1.528
13	-0.799
14	0.5
15	1.581
16	1.733
17	0.785
18	-0.741
19	-1.913

z =

	0
0	0
1	-0.75
2	-1.078
3	-0.74
4	0.099
5	0.941
6	1.246
7	0.776
8	-0.23
9	-1.167
10	-1.43
11	-0.796
12	0.399
13	1.432
14	1.629
15	0.796
16	-0.614
17	-1.741
18	-1.84
19	-0.767
20	0.884



$$Euler(y0,z0,a,b,n,fy,fz) := \left| \begin{array}{l} x_0 \leftarrow a \\ y_0 \leftarrow y0 \\ z_0 \leftarrow z0 \\ h \leftarrow \dfrac{b-a}{n} \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_{i+1} \leftarrow x_i + h \\ y_{i+1} \leftarrow y_i + h \cdot \dfrac{\left(fy(z_i) + fy(z_i + h \cdot fz(x_i, y_i, z_i))\right)}{2} \\ z_{i+1} \leftarrow z_i + h \cdot \dfrac{\left(fz(x_i, y_i, z_i) + fz(x_i + h, y_i + h \cdot fy(z_i), z_i + h \cdot fz(x_i, y_i, z_i))\right)}{2} \\ \text{continue} \end{array} \right. \\ \text{augment}(x,y,z) \end{array} \right.$$

$a := 0 \qquad b := 15 \qquad y0 := 1 \qquad z0 := 0 \qquad n := 20$

$fy(z) := z \qquad fz(x,y,z) := -y$

$x := Euler(y0,z0,a,b,n,fy,fz)^{\langle 0 \rangle} \qquad y := Euler(y0,z0,a,b,n,fy,fz)^{\langle 1 \rangle} \qquad z := Euler(y0,z0,a,b,n,fy,fz)^{\langle 2 \rangle}$

x =

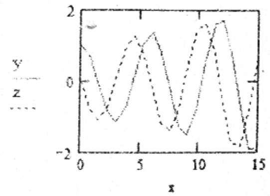
	0
0	0
1	0.75
2	1.5
3	2.25
4	3
5	3.75
6	4.5
7	5.25
8	6
9	6.75
10	7.5
11	8.25
12	9
13	9.75
14	10.5
15	11.25
16	12
17	12.75
18	13.5
19	14.25
20	15

y =

	0
0	1
1	0.719
2	-0.046
3	-0.842
4	-1.16
5	-0.76
6	0.16
7	1.05
8	1.336
9	0.788
10	-0.309
11	-1.295
12	-1.528
13	-0.799
14	0.5
15	1.581
16	1.733
17	0.785
18	-0.741
19	-1.913

z =

	0
0	0
1	-0.75
2	-1.078
3	-0.74
4	0.099
5	0.941
6	1.246
7	0.776
8	-0.23
9	-1.167
10	-1.43
11	-0.796
12	0.399
13	1.432
14	1.629
15	0.796
16	-0.614
17	-1.741
18	-1.84
19	-0.767
20	0.884



Содержание

Список литературы

1. Бахвалов Н.С., Численные методы/ Н.С. Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М. Кобельков. - М.: Бином, 2003.
2. Самарский А.А., Численные методы/ А.А. Самарский, А.В. Гулин. - М.:Наука, 1989.
3. Калиткин Н.Н., Численные методы/ Н.Н. Калиткин.- СПб.: BHV-Санкт-Петербург, 2011.
4. Алексеев Е.Р., Решение задач вычислительной математики в Mathcad/ Е.Р. Алексеев, О.В.Чеснокова. Серия: Самоучитель.- М.: НТ Пресс, 2006.
5. Поршнев С.В., Численные методы на базе MathCad/ С.В. Поршнев, И.В. Беленкова. - СПб.: BHV - Санкт-Петербург, 2005.
6. Турчак Л.И., Основы численных методов /Л.И. Турчак. - М.: Наука,1987.
7. Мэтьюз Джон Г., Численные методы/Джон Г. Мэтьюз.- М.- СПб. - К.: Вильямс, 2001.