МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. Р.Е.Алексеева»

Кафедра «Прикладная математика»

ПРАКТИКУМ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ В СРЕДЕ MATHCAD К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО КУРСУ «ИНФОРМАТИКА»

Методическая разработка
для студентов дневной, вечерней и заочной форм обучения
для всех специальностей

Нижний Новгород 2012

Составители: Т.В. Моругина, С.П. Никитенкова, О.И. Чайкина

УДК 651.3.06

Практикум по численным методам в среде MathCAD к лабораторным работам по курсу « Информатика» : метод. разработка для студентов дневной, вечерней и заочной форм обучения для всех специальностей/ НГТУ; сост.: Т.В. Моругина, С.П. Никитенкова, О.И. Чайкина. Н.Новгород, 2012. 28 с.

Изложены примеры решения задач по численным методам в среде MathCAD к лабораторным работам по курсу «Информатика». Приведены типовые задачи.

[illegible]0 x 84[1]/16.
[illegible]еч. л. 1,75.
[illegible]з 3.

[illegible]итет им. Р. Е. Алексеева.
[illegible] ул. Минина, 24.

[illegible]сударственный технический
[illegible]Е. Алексеева, 2012

Лабораторная работа №1
Решение нелинейного уравнения с одной неизвестной. Методы отделения и уточнения корней

Постановка задачи. Для данного нелинейного уравнения $y(x)=0$ с одной неизвестной величиной на промежутке $[a,b]$ отделить корни с шагом h (Шаговым методом) и уточнить корень с точностью ε :

- методом половинного деления;
- методом Ньютона;
- методом простой итерации.

Идея метода

Название метода	*Выбор начального значения*	*Итерационная формула*	*Окончание процесса вычисле - ния*
Шаговый метод	*x=a*	*y=f(x) – значение функции в точке x,* *x1=x+h – следующее значение переменной x,* *y1=f(x1) - значение функции в точке x1,* *y*y1<0 - признак интервала изоляции*	*x1<=b*
Метод половинного деления	*[a,b] – интервал изоляции*	*x=(a+b)/2 – середина интервала,* *f(a) –значение функции в точке a,* *f(x) –значение функции в точке x,* *если f(a)*f(x)<0, то выбираем [a,x],* *если f(a)*f(x)>0, то выбираем [x,b]*	$\lvert f(x)\rvert<\varepsilon$
Метод Ньютона	$x_0 = a$ *или* $x_0 = b$, *f2(x)–вторая производная функции f(x),* $f(x_0)*f2(x_0)>0$	*f1(x) – первая производная функции f(x)* $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f1(x_i)$	$\lvert f(x_i)\rvert<\varepsilon$
Метод простой итерации (1-й способ)	*привести уравнение к виду* $x= \varphi(x)$, $x_0 = a$ *или* $x_0 = b$ $\lvert\varphi(a)\rvert<1$, $\lvert\varphi(b)\rvert<1$, *если* $\lvert\varphi(a)\rvert > \lvert\varphi(b)\rvert$, *то* $x_0=a$, *если* $\lvert\varphi(a)\rvert < \lvert\varphi(b)\rvert$, *то* $x_0=b$	$x_{i+1}= \varphi(x_i)$	$\lvert f(x_i)\rvert<\varepsilon$
Метод простой итерации (2-й способ)	*f[illegible] произ-водн[illegible]и f(x);* *если* |f[illegible](b)|, *то* $x_0=a$, *если* $\lvert f1(a)\rvert < \lvert f1(b)\rvert$, *то* $x_0=b$	$c=1/\max(\lvert f1(a)\rvert;\lvert f1(b)\rvert)$ $x_{i+1} = x_i - c*f(x_i)$	$\lvert f(x_i)\rvert<\varepsilon$

Шаговый метод.

Постановка задачи: шаговым методом найти интервал изоляции корня нелинейного уравнения $\arccos(\mathbf{x}) - \sqrt{1 - 0.3 \cdot \mathbf{x}^3} = 0$ на интервале [0; 1], шаг h = 0,1.

Документ MathCad:

Шаговый метод

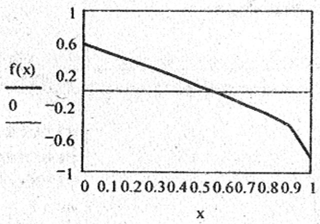
$x := 0, 0.1 .. 1$ Задаем диапазон изменения x

$f(x) := \mathrm{acos}(x) - \sqrt{1 - 0.3 \cdot x^3}$ Задаем функцию пользователя y(x)=f(x)

Вычисляем таблицу значений x и f(x)

x =	f(x) =
0	0.5708
0.1	0.4708
0.2	0.3706
0.3	0.2702
0.4	0.1689
0.5	0.0661
0.6	-0.0398
0.7	-0.1518
0.8	-0.2765
0.9	-0.4329
1	-0.8367

График функции f(x)



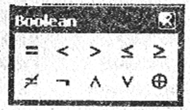
Из анализа полученной таблицы следует, что функция меняет знак на интервале [0.5; 0.6], поэтому найден интервал, содержащий корень

Определение корня с машинной точностью на интервале [0.5; 0.6] с использованием функции **Find .**

Документ MathCad:

$x := 0.5$ Начальное приближение корня

Given Задание начала блока решения уравнения



$\mathrm{acos}(x) - \sqrt{1 - 0.3 \cdot x^3} = 0$ Исходное уравнение

$xroot := \mathrm{Find}(x)$ Вызов решающей функции **Find(x)** - найти решение

$xroot = 0.562926$ Решение

Проверка равенства нулю в уравнении для корня **xroot**

$f(x) := \mathrm{acos}(x) - \sqrt{1 - 0.3 \cdot x^3}$

$f(xroot) = 0$

Определение корня с заданной точностью на интервале [0.5; 0.6] с использованием функции **root(f(x),x)**

Документ MathCad:

$x0 := 0.6$ Начальное приближение

$f(x) := \mathrm{acos}(x) - \sqrt{1 - 0.3 \cdot x^3}$ Исходное уравнение

$xk := \mathrm{root}(f(x0), x0)$ Вызов функции **root** для решения уравнения

$xk = 0.5633$ Решение

Проверка

$f(xk) = -3.696 \times 10^{-4}$

Метод половинного деления

Постановка задачи: найти корень нелинейного уравнения $\arccos(\mathbf{x}) - \sqrt{1 - 0.3 \cdot \mathbf{x}^3} = 0$ методом половинного деления на интервале изоляции корня [0.5; 0.6] с точностью eps=0.001.

Документ MathCad:

Метод половинного деления

$eps := 0.001$ Точность вычислений

$f(x) := \mathrm{acos}(x) - \sqrt{1 - 0.3 \cdot x^3}$ Вводим исходное уравнение в виде функции

$a := 0.5 \quad b := 0.6$ Начало и конец интервала

$xc(a, b) := \frac{(a + b)}{2}$ Функция пользователя для вычисления средней точка интервала

Задаем вектор-функцию **int** для вычисления нужной половины интервала

$$int(a, b) := if\left[f(a) \cdot f(xc(a, b)) < 0, \begin{pmatrix} a \\ xc(a, b) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xc(a, b) \\ b \end{pmatrix}\right]$$

Организуем итерационный процесс нахождения корня

$a_0 := 0.5 \quad b_0 := 0.6$ Начальный интервал

$i := 0 .. 7$ Количество итераций

$\begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix} := int(a_i, b_i)$ Итерационная формула

Решение

i =	a_i =	b_i =	$f(a_i)$ =	$f(b_i)$ =
0	0.5	0.6	0.066	-0.04
1	0.55	0.6	0.014	-0.04
2	0.55	0.575	0.014	-0.013
3	0.5625	0.575	$4.529 \cdot 10^{-4}$	-0.013
4	0.5625	0.56875	$4.529 \cdot 10^{-4}$	$-6.201 \cdot 10^{-3}$
5	0.5625	0.56563	$4.529 \cdot 10^{-4}$	$-2.872 \cdot 10^{-3}$
6	0.5625	0.56406	$4.529 \cdot 10^{-4}$	$-1.209 \cdot 10^{-3}$
7	0.5625	0.56328	$4.529 \cdot 10^{-4}$	$-3.778 \cdot 10^{-4}$

Корень наден на седьмой итерации x=0,56328, т.к. f(0,56328)<0,001

Метод Ньютона

Постановка задачи: найти корень нелинейного уравнения $\arccos(x) - \sqrt{1 - 0.3 \cdot x^3} = 0$ на интервале изоляции **[0.5; 0.6]** методом Ньютона с точностью **eps= 0,001**.

Документ MathCad:

Метод Ньютона

$n1 := 5$ Количество итераций

$i := 0..n1$ Диапазон изменения номера итераций

$eps := 0.001$ Точность расчета .

$f(x) := acos(x) - \sqrt{1 - 0.3 \cdot x^3}$ Функция по левой части уравнения f(x)=0

$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$ Первая производная функции f(x)

$f2(x) := \frac{d}{dx} f1(x)$ Вторая производная функции f(x)

$x_0 := 0.5$ Задаем начальное приближение к корню - левый конец интервала

Проверяем условие сходимости:

$f(x_0) \cdot f2(x_0) = -0.02$ Условие сходимости для точки x=0.5 не выполняется

Проверяем условие сходимости для x=0.6:

$x_0 := 0.6$

$f(x_0) \cdot f2(x_0) = 0.023$ Условие сходимости для точки 0.6 выполняется, поэтому за начальное приближение берем x=0.6

$x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)}{f1(x_i)}$ Итерационная формула для вычисления массива приближений к корню

Решение

i =	x_i =	$f(x_i)$ =
0	0.6	-0.04
1	0.56327	$-3.633 \cdot 10^{-4}$
2	0.56293	$-2.654 \cdot 10^{-8}$
3	0.56293	0
4	0.56293	0
5	0.56293	0

Корень найден на первой итерации x = 0.56327, т.к. модуль значения функции f(0.56327) меньше заданной точности eps= 0.001

Метод простой итерации

Постановка задачи: найти корень нелинейного уравнения $\arccos(x) - \sqrt{1 - 0.3 \cdot x^3} = 0$ методом простой итерации на интервале изоляции корня **[0.5; 0.6]** с точностью **eps=0.001** .

Документ MathCad:

Метод простой итерации

$eps := 0.001$ Точность вычислений

$i := 0..5$ Количество итераций

$f(x) := acos(x) - \sqrt{1 - 0.3 \cdot x^3}$ Вводим исходное уравнение в виде функции

$\phi(x) := \cos\left(\sqrt{1 - 0.3 \cdot x^3}\right)$ Приведенное уравнение

$\phi1(x) := \frac{d}{dx}\phi(x)$ Вычислим первую производную от приведенной функции

$\phi1(0.5) = 0.095$

$\phi1(0.6) = 0.138$

Производная функции $\phi(x)$ в крайних точках отрезка [0,5; 0.6] по модулю меньше 1, значит выполняется условие сходимости

$x_0 := 0.6$ Задаем начальное приближение

$x_{i+1} := \phi(x_i)$ Итерационная формула метода

Решение

i =	x_i =	$f(x_i)$ =
0	0.6	-0.04
1	0.56772	$-5.108 \cdot 10^{-3}$
2	0.56351	$-6.236 \cdot 10^{-4}$
3	0.563	$-7.561 \cdot 10^{-5}$
4	0.56293	$-9.161 \cdot 10^{-6}$
5	0.56293	$-1.11 \cdot 10^{-6}$

Корень наден на второй итерации x=0,56351, т.к. f(0,56351) по модулю меньше eps=0,001

Лабораторная работа №2

Решение систем линейных уравнений. Прямые и итерационные методы.

Постановка задачи: Дана система линейных уравнений

$A_{11} \cdot x1 + A_{12} \cdot x2 + A_{13} \cdot x3 + A_{14} \cdot x4 = B_1$

$A_{21} \cdot x1 + A_{22} \cdot x2 + A_{23} \cdot x3 + A_{24} \cdot x4 = B_2$

$A_{31} \cdot x1 + A_{32} \cdot x2 + A_{33} \cdot x3 + A_{34} \cdot x4 = B_3$

$A_{41} \cdot x1 + A_{42} \cdot x2 + A_{43} \cdot x3 + A_{44} \cdot x4 = B_4$

- найти точное решение методом Гаусса,
- найти приближённое решение методом простой итерации с точностью ε,
- найти приближённое решение методом Зейделя с точностью ε.

Таблица

Название метода	*Начальное приближение*	*Итерационная формула*	*Остановка процесса вычисления*
Метод Гаусса	***Определитель матрицы не равен нулю***	***Прямой ход – приведение матрицы к треугольному виду.*** ***Обратный ход – вычисление неизвест-ных, начиная с последнего уравнения***	***Получение значений всех неизвестных***

Окончание таблицы

Название метода	*Начальное приближение*	*Итерационная формула*	*Остановка процесса вычисления*
Метод простой итерации	*Проверка условия сходимости* $\lvert A_{11}\rvert>\lvert A_{12}\rvert+\lvert A_{13}\rvert+\lvert A_{14}\rvert$ $\lvert A_{22}\rvert>\lvert A_{21}\rvert+\lvert A_{23}\rvert+\lvert A_{24}\rvert$ $\lvert A_{33}\rvert>\lvert A_{31}\rvert+\lvert A_{32}\rvert+\lvert A_{34}\rvert$ $\lvert A_{44}\rvert>\lvert A_{41}\rvert+\lvert A_{42}\rvert+\lvert A_{43}\rvert$ *Выбор начального приближения* $x1^0=0\ \ x2^0=0$ $x3^0=0\ \ x4^0=0$	$x1^{i+1}=(B_1-(A_{12}\cdot x2^i+A_{13}\cdot x3^i+A_{14}\cdot x4^i))/A_{11}$ $x2^{i+1}=(B_2-(A_{21}\cdot x1^i+A_{23}\cdot x3^i+A_{24}\cdot x4^i))/A_{22}$ $x3^{i+1}=(B_3-(A_{31}\cdot x1^i+A_{32}\cdot x2^i+A_{34}\cdot x4^i))/A_{33}$ $x4^{i+1}=(B_4-(A_{41}\cdot x1^i+A_{42}\cdot x2^i+A_{43}\cdot x3^i))/A_{44}$	$\lvert x1^{i+1}-x1^i\rvert<\varepsilon$ $\lvert x2^{i+1}-x2^i\rvert<\varepsilon$ $\lvert x3^{i+1}-x3^i\rvert<\varepsilon$ $\lvert x4^{i+1}-x4^i\rvert<\varepsilon$
Метод Зейделя	*Проверка условия сходимости* $\lvert A_{11}\rvert>\lvert A_{12}\rvert+\lvert A_{13}\rvert+\lvert A_{14}\rvert$ $\lvert A_{22}\rvert>\lvert A_{21}\rvert+\lvert A_{23}\rvert+\lvert A_{24}\rvert$ $\lvert A_{33}\rvert>\lvert A_{31}\rvert+\lvert A_{32}\rvert+\lvert A_{34}\rvert$ $\lvert A_{44}\rvert>\lvert A_{41}\rvert+\lvert A_{42}\rvert+\lvert A_{43}\rvert$ *Выбор начального приближения* $x1^0=0\ \ x2^0=0$ $x3^0=0\ \ x4^0=0$	$x1^{i+1}=(B_1-(A_{12}\cdot x2^i+A_{13}\cdot x3^i+A_{14}\cdot x4^i))/A_{11}$ $x2^{i+1}=(B_2-(A_{21}\cdot x1^{i+1}+A_{23}\cdot x3^i+A_{24}\cdot x4^i))/A_{22}$ $x3^{i+1}=(B_3-(A_{31}\cdot x1^{i+1}+A_{32}\cdot x2^{i+1}+A_{34}\cdot x4^i))/A_{33}$ $x4^{i+1}=(B_4-(A_{41}\cdot x1^{i+1}+A_{42}\cdot x2^{i+1}+A_{43}\cdot x3^{i+1}))/A_{44}$	$\lvert x1^{i+1}-x1^i\rvert<\varepsilon$ $\lvert x2^{i+1}-x2^i\rvert<\varepsilon$ $\lvert x3^{i+1}-x3^i\rvert<\varepsilon$ $\lvert x4^{i+1}-x4^i\rvert<\varepsilon$

Метод Гаусса

Постановка задачи: Дана система линейных уравнений

7•x1+2•x2-x3+x4=2
3•x1-9•x2+x3+2•x4=7
x1-2•x2+11•x3+x4=1
3*x2-2•x3+13•x4=-3
найти точное решение методом Гаусса.

Запись системы в матричном виде

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -9 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 11 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 13 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Документ MathCad:

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -9 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 11 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 13 \end{pmatrix}$$ Матрица коэффициентов при неизвестных

$$B := \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$ Вектор-столбец свободных элементов

$X := A^{-1}\cdot B$ Запись системы в матричной форме

$$X = \begin{pmatrix} 0.4747 \\ -0.6466 \\ -0.0615 \\ -0.091 \end{pmatrix}$$ Вектор решений

Проверка $B1 := A\cdot X$ $$B1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Метод простой итерации.

Постановка задачи: Дана система линейных уравнений

7•x1+2•x2-x3+x4=2
3•x1-9•x2+x3+2•x4=7
x1-2•x2+11•x3+x4=1
3*x2-2•x3+13•x4=-3

Найти приближённое решение с точностью eps=0,001.

Документ MathCad:

$$a := \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -9 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 11 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 13 \end{pmatrix}$$ Матрица коэффициентов при неизвестных

$$b := \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$ Вектор - столбец правых частей уравнений

$k := 1..10$ Задаем число итераций

$x1_1 := 0 \quad x2_1 := 0 \quad x3_1 := 0 \quad x4_1 := 0$ Начальные приближения

$$f1(x2,x3,x4) := \frac{\left[b_1-\left(a_{1,2}\cdot x2+a_{1,3}\cdot x3+a_{1,4}\cdot x4\right)\right]}{a_{1,1}}$$

$$f2(x1,x3,x4) := \frac{\left[b_2-\left(a_{2,1}\cdot x1+a_{2,3}\cdot x3+a_{2,4}\cdot x4\right)\right]}{a_{2,2}}$$

Приведенная система

$$f3(x1,x2,x4) := \frac{\left[b_3-\left(a_{3,1}\cdot x1+a_{3,2}\cdot x2+a_{3,4}\cdot x4\right)\right]}{a_{3,3}}$$

$$f4(x1,x2,x3) := \frac{\left[b_4-\left(a_{4,1}\cdot x1+a_{4,2}\cdot x2+a_{4,3}\cdot x3\right)\right]}{a_{4,4}}$$

$$\begin{pmatrix} x1_{k+1} \\ x2_{k+1} \\ x3_{k+1} \\ x4_{k+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f1\left(x2_k, x3_k, x4_k\right) \\ f2\left(x1_k, x3_k, x4_k\right) \\ f3\left(x1_k, x2_k, x4_k\right) \\ f4\left(x1_k, x2_k, x3_k\right) \end{pmatrix}$$ Итерационная формула метода

Таблицы решений

k =	$x1_k$ =	$x2_k$ =	$x3_k$ =	$x4_k$ =
1				
2	0.285	-0.777	0.090	-0.230
3	0.553	-0.723	-0.055	-0.037
4	0.489	-0.607	-0.087	-0.072
5	0.457	-0.640	-0.057	-0.10
6	0.475	-0.654	-0.057	-0.091
7	0.477	-0.646	-0.06	-0.088
8	0.47	-0.645	-0.06	-0.091
9	0.474	-0.64	-0.061	-0.091
10	0.474	-0.646	-0.061	-0.090

Документ MathCad:

Проверка на точность

k =	$\lvert x1_{k+1} - x1_k \rvert$ =	$\lvert x2_{k+1} - x2_k \rvert$ =	$\lvert x3_{k+1} - x3_k \rvert$ =	$\lvert x4_{k+1} - x4_k \rvert$ =
1	0.28571	0.778	0.091	0.231
2	0.26818	0.054	0.146	0.193
3	0.064	0.116	0.032	0.035
4	0.03277	0.033	0.03	0.032
5	0.01817	0.015	$7.767\cdot10^{-5}$	0.012
6	$2.42981\cdot10^{-3}$	$8.755\cdot10^{-3}$	$5.419\cdot10^{-3}$	$3.364\cdot10^{-3}$
7	$3.75614\cdot10^{-3}$	$9.554\cdot10^{-4}$	$1.065\cdot10^{-3}$	$2.854\cdot10^{-3}$
8	$2.86883\cdot10^{-4}$	$1.768\cdot10^{-3}$	$7.746\cdot10^{-4}$	$5.664\cdot10^{-5}$
9	$6.23879\cdot10^{-4}$	$1.691\cdot10^{-4}$	$3.424\cdot10^{-4}$	$5.272\cdot10^{-4}$
10	$1.72538\cdot10^{-4}$	$2.871\cdot10^{-4}$	$7.389\cdot10^{-5}$	$9.17\cdot10^{-5}$

Выводы: точность eps=0.001 для всех корней выполняется на 9-й итерации,
корни x1=0,4743, x2=-0,647, x3=-0,0612 x4==0,0914

Метод Зейделя.
Постановка задачи: Дана система линейных уравнений
7•x1+2•x2-x3+x4=2
3•x1-9•x2+x3+2•x4=7
x1-2•x2+11•x3+x4=1
3*x2-2•x3+13•x4=-3

Найти приближённое решение с точностью eps=0,001.

Документ MathCad:

$$a := \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -9 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 11 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 13 \end{pmatrix}$$ Матрица коэффициентов при неизвестных

$$b := \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$ Вектор - столбец правых частей уравнений

$k := 1..10$ Задаем число итераций

$x1_1 := 0$ $x2_1 := 0$ $x3_1 := 0$ $x4_1 := 0$ Начальные приближения

$$f1(x2,x3,x4) := \frac{\left[b_1 - \left(a_{1,2}\cdot x2 + a_{1,3}\cdot x3 + a_{1,4}\cdot x4\right)\right]}{a_{1,1}}$$

$$f2(x1,x3,x4) := \frac{\left[b_2 - \left(a_{2,1}\cdot x1 + a_{2,3}\cdot x3 + a_{2,4}\cdot x4\right)\right]}{a_{2,2}}$$

Приведенная система

$$f3(x1,x2,x4) := \frac{\left[b_3 - \left(a_{3,1}\cdot x1 + a_{3,2}\cdot x2 + a_{3,4}\cdot x4\right)\right]}{a_{3,3}}$$

$$f4(x1,x2,x3) := \frac{\left[b_4 - \left(a_{4,1}\cdot x1 + a_{4,2}\cdot x2 + a_{4,3}\cdot x3\right)\right]}{a_{4,4}}$$

$k := 1..8$ Количество итераций

Итерационная формула метода

$$\begin{pmatrix} x1_{k+1} \\ x2_{k+1} \\ x3_{k+1} \\ x4_{k+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f1(x2_k, x3_k, x4_k) \\ f2(f1(x2_k, x3_k, x4_k), x3_k, x4_k) \\ f3(f1(x2_k, x3_k, x4_k), f2(f1(x2_k, x3_k, x4_k), x3_k, x4_k), x4_k) \\ f4(f1(x2_k, x3_k, x4_k), f2(f1(x2_k, x3_k, x4_k), x3_k, x4_k), f3(f1(x2_k, x3_k, x4_k), f2(f1(x2_k, x3_k, x4_k), x3_k, x4_k), x4_k)) \end{pmatrix}$$

Таблицы решений

k =	$x1_k$ =	$x2_k$ =	$x3_k$ =	$x4_k$ =
1	0	0	0	0
2	0.2857	-0.6825	-0.0592	-0.08236
3	0.484	-0.6413	-0.0622	-0.09235
4	0.4733	-0.6475	-0.0614	-0.09081
5	0.4749	-0.6465	-0.0616	-0.09105
6	0.4746	-0.6466	-0.0615	-0.09101
7	0.4747	-0.6466	-0.0615	-0.09102
8	0.4747	-0.6466	-0.0615	-0.09102

Проверка на точность

k =	$\lvert x1_{k+1} - x1_k \rvert$ =	$\lvert x2_{k+1} - x2_k \rvert$ =	$\lvert x3_{k+1} - x3_k \rvert$ =	$\lvert x4_{k+1} - x4_k \rvert$ =
1	0.285714	0.68254	0.059163	0.082362
2	0.198325	0.041232	0.003045	0.009984
3	0.010789	0.006153	0.00077	0.001538
4	0.001648	0.000977	0.000112	0.000243
5	0.00026	0.000153	0.000018	0.000038
6	0.000041	0.000024	$2.801985\cdot10^{-6}$	$5.988382\cdot10^{-6}$
7	$6.425276\cdot10^{-6}$	$3.783842\cdot10^{-6}$	$4.405431\cdot10^{-7}$	$9.409701\cdot10^{-7}$
8	$1.009608\cdot10^{-6}$	$5.945897\cdot10^{-7}$	$6.921807\cdot10^{-8}$	$1.478619\cdot10^{-7}$

Выводы: точность eps=0.001 для всех корней выполняется на 5-й итерации,
корни x1=0,4749, x2=-0,6465, x3=-0,0616 x4==-0,09105

Лабораторная работа №3

Аппроксимация и Интерполяция

Постановка задачи: Дана таблица координат точек $\{x_i, y_i\}$

i	0	1	2	3	4
x	0,2	0,4	0,7	0,85	1
y	0,1	0,5	0,6	0,9	0,7

- аппроксимировать точки полиномом 1-й и 2-й степени;
- интерполировать точки (методом неопределённых коэффициентов) полиномом 1-й и 2-й степени;
- интерполировать точки (методом Ньютона) полиномом 1-й и 2-й степени;

Таблица

Название метода	*Система для нахождения коэффициентов полинома*	*Ответ*
Метод наименьших квадратов (аппроксимация)	полином 1-й степени $\begin{cases} na_0 + \sum_i x_i a_1 = \sum_i y_i \\ \sum_i x_i a_0 + \sum_i x_i^2 = \sum_i x_i y_i \end{cases}$	$P1(x)=a_0+a_1*x$

Название метода	Система для нахождения коэффициентов полинома	Ответ
Метод наименьших квадратов (аппроксимация)	полином 2-й степени $\begin{cases} na_0 + \sum\limits_i x_i a_1 + \sum\limits_i x_i^2 a_2 = \sum\limits_i y_i \\ \sum\limits_i x_i a_0 + \sum\limits_i x_i^2 a_1 + \sum\limits_i x_i^3 a_2 = \sum\limits_i x_i y_i \\ \sum\limits_i x_i^2 a_0 + \sum\limits_i x_i^3 a_1 + \sum\limits_i x_i^4 a_2 = \sum\limits_i x_i^2 y_i \end{cases}$	$P2(x)=a_0+a_1*x+a_2*x^2$

Документ MathCad:

Метод наименьших квадратов (полином 1- й степени P1(x)=a0 + a1 x)

$$x := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.7 \\ 0.85 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.9 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$ Исходные данные

$i := 0..4$ Количество точек

$$C := \begin{bmatrix} 5 & \sum\limits_i x_i \\ \sum\limits_i x_i & \sum\limits_i (x_i)^2 \end{bmatrix} \qquad D := \begin{pmatrix} \sum\limits_i y_i \\ \sum\limits_i x_i \cdot y_i \end{pmatrix}$$ Вычисление коэффициентов матрицы

$a := C^{-1} \cdot D$ Вычисление коэффициентов полинома

$$a = \begin{pmatrix} 0.058 \\ 0.797 \end{pmatrix}$$ Коэффициенты полинома

$P1(x) := a_0 + a_1 \cdot x$ Искомый полином

$O_i := P1(x_i) - y_i$ Вычисление ошибок аппроксимации

$$O = \begin{pmatrix} 0.117 \\ -0.123 \\ 0.016 \\ -0.165 \\ 0.155 \end{pmatrix}$$

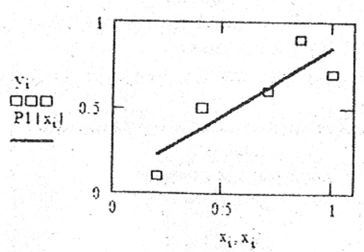


График исходных точек и полученного полинома

Документ MathCad:

Метод наименьших квадратов (полином 2- й степени P1(x)=a0 + a1 x +a2 x^2)

$$x := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.7 \\ 0.85 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.9 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$ Исходные данные

$i := 0..4$ Количество точек

$$C := \begin{bmatrix} 5 & \sum\limits_i x_i & \sum\limits_i (x_i)^2 \\ \sum\limits_i x_i & \sum\limits_i (x_i)^2 & \sum\limits_i (x_i)^3 \\ \sum\limits_i (x_i)^2 & \sum\limits_i (x_i)^3 & \sum\limits_i (x_i)^4 \end{bmatrix} \qquad D := \begin{bmatrix} \sum\limits_i y_i \\ \sum\limits_i x_i \cdot y_i \\ \sum\limits_i (x_i)^2 \cdot y_i \end{bmatrix}$$ Вычисление коэффициентов матрицы

$a := C^{-1} \cdot D$ Вычисление коэффициентов полинома

$$a = \begin{pmatrix} -0.335 \\ 2.548 \\ -1.472 \end{pmatrix}$$ Коэффициенты полинома

$P2(x) := a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$ Искомый полином

$O_i := P2(x_i) - y_i$ Вычисление ошибок аппроксимации

$t := 0, 0.1..1$

$$O = \begin{pmatrix} 0.016 \\ -0.051 \\ 0.127 \\ -0.133 \\ 0.041 \end{pmatrix}$$

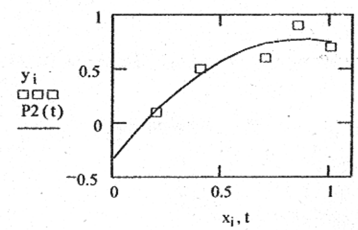


График исходных точек и полученного полинома

Таблица

Название метода	Система для нахождения коэффициентов полинома	Ответ
Метод неопределённых коэффициентов (интерполяция)	полином 1-й степени $\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot x_0 = y_0 \\ a_0 + a_1 \cdot x_1 = y_1 \end{cases}$ полином 2-й степени $\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \end{cases}$	$P1(x)=a_0+a_1*x$ $P2(x)=a_0+a_1*x+a_2*x^2$

Документ MathCad:

Метод неопределённых коэффициентов (полином 1- й степени $P1(x)=a0 + a1\ x$)

$$x := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.7 \\ 0.85 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.9 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

Исходные данные

$i := 0..4$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} \qquad D := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Матрицы C и D для системы линейных уравнений

$a := C^{-1} \cdot D$

Решение системы линейных уравнений нахождение коэффициентов a0 и a1

$$a = \begin{pmatrix} -0.146 \\ 1.231 \end{pmatrix}$$

$P1(x) := a_0 + a_1 \cdot x$

Интерполирующая функция

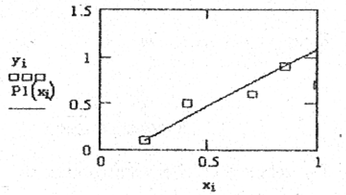
Вычисление ошибки интерполяции

$O_i := P1(x_i) - y_i$

$O_i =$

0
-0.154
0.115
0
0.385

График найденного полинома и исходных точек



Документ MathCad:

Метод неопределённых коэффициентов (полином 2- й степени $P1(x)=a0 + a1\ x + a2\ x^2$)

$$x := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.7 \\ 0.85 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.9 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

Исходные данные

$i := 0..4$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 \\ 1 & x_4 & (x_4)^2 \end{bmatrix} \qquad D := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Матрицы C и D для системы линейных уравнений

$a := C^{-1} \cdot D$

Решение системы линейных уравнений нахождение коэффициентов a0 , a1 и a2

$$a = \begin{pmatrix} -0.4667 \\ 3.25 \\ -2.0833 \end{pmatrix}$$

$P2(x) := a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$

Интерполирующая функция

Вычисление ошибки интерполяции

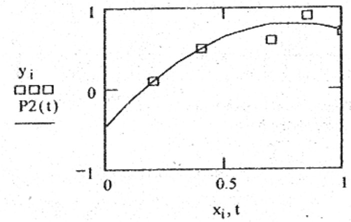
$t := 0, 0.1 .. 1$

$O_i := P2(x_i) - y_i$

$O_i =$

0
0
0.187
-0.109
0

График найденного полинома и исходных точек



Метод Ньютона

полином 1 й степени (построенный на точках $\{y_n, x_n\}$ и $\{y_m, x_m\}$)

$$N1(t) = y_n + \frac{(y_m - y_n)}{(x_m - x_n)}(t - x_n)$$

полином 2 й степени (построенный на точках $\{y_n, x_n\}, \{y_m, x_m\}, \{y_p, x_p\}$)

$$N2(t) = y_n + \frac{(y_m - y_n)}{(x_m - x_n)}(t - x_n) + \frac{\dfrac{(y_p - y_n)}{(x_p - x_n)} - \dfrac{(y_m - y_n)}{(x_m - x_n)}}{(x_p - x_m)}(t - x_n)(t - x_m)$$

Документ MathCad:

Метод Ньютона (полином 1- й степени)

$$x := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.7 \\ 0.85 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.9 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

Исходные данные

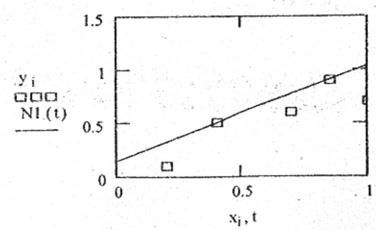
$i := 0..4$

$$N1(t) := y_1 + \frac{(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_1)} \cdot (t - x_1)$$

Интерполирующая функция 1-й степени построенная на 1-й и 3-й точках

$t := 0, 0.1 .. 1$

График найденного полинома и исходных точек



Вычисление ошибки интерполяции

$N1(x_i) - y_i =$

0.222
0
0.167
0
0.333

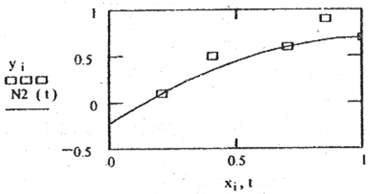
Метод Ньютона (полином 2-й степени)

Интерполирующая функция 2-й степени построенная на 0-й ,2-й и 4-й точках

$$N2(t) := y_0 + \frac{(y_2 - y_0)}{(x_2 - x_0)}\cdot(t - x_0) + \frac{\left[\frac{(y_4 - y_0)}{(x_4 - x_0)} - \frac{(y_2 - y_0)}{(x_2 - x_0)}\right]}{(x_4 - x_2)}\cdot(t - x_0)\cdot(t - x_2)$$

$t := 0, 0.1 .. 1$

График найденного полинома и исходных точек



Вычисление ошибки интерполяции

$N2(x_i) - y_i =$

0
-0.15
0
-0.231
0

Кусочно-линейная интерполяция (Метод неопределённых коэффициентов)

Система для нахождения коэффициентов полинома на каждом участке	*Ответ*
1-й участок $\begin{cases} a1_0 + a1_1 \cdot x_0 = y_0 \\ a1_0 + a1_1 \cdot x_1 = y_1 \end{cases}$ *2-й участок* $\begin{cases} a2_0 + a2_1 \cdot x_1 = y_1 \\ a2_0 + a2_1 \cdot x_2 = y_2 \end{cases}$ *3-й участок* $\begin{cases} a3_0 + a3_1 \cdot x_2 = y_2 \\ a3_0 + a3_1 \cdot x_3 = y_3 \end{cases}$ *4-й участок* $\begin{cases} a4_0 + a4_1 \cdot x_3 = y_3 \\ a4_0 + a4_1 \cdot x_4 = y_4 \end{cases}$	$P1(x) = \begin{cases} a1_0 + a1_1 \cdot x, & \text{если } x_0 \le x \le x_1 \\ a2_0 + a2_1 \cdot x, & \text{если } x_1 \le x \le x_2 \\ a3_0 + a3_1 \cdot x, & \text{если } x_2 \le x \le x_3 \\ a4_0 + a4_1 \cdot x, & \text{если } x_3 \le x \le x_4 \end{cases}$

Документ MathCad:

Метод неопределённых коэффициентов (кусочно-линейная интерполяция)

$x := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.7 \\ 0.85 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad y := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.9 \\ 0.7 \end{pmatrix}$

Исходные данные

$i := 0..4$

1-й участок

$C1 := \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix}$ $\quad D1 := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$

Матрицы C1 и D1 для системы линейных уравнений

$a1 := C1^{-1}\cdot D1$

Решение системы линейных уравнений нахождение коэффициентов а10 и а11

$a1 = \begin{pmatrix} -0.3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$P11(x) := a1_0 + a1_1\cdot x$

Интерполирующая функция 1-го участка

2-й участок

$C2 := \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix}$ $\quad D2 := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Матрицы C2 и D2 для системы линейных уравнений

$a2 := C2^{-1}\cdot D2$

Решение системы линейных уравнений нахождение коэффициентов а20 и а21

$a2 = \begin{pmatrix} 0.367 \\ 0.333 \end{pmatrix}$

$P12(x) := a2_0 + a2_1\cdot x$

Интерполирующая функция 2-го участка

3-й участок

$C3 := \begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix}$ $\quad D3 := \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Матрицы C3 и D3 для системы линейных уравнений

$a3 := C3^{-1}\cdot D3$

Решение системы линейных уравнений нахождение коэффициентов а30 и а31

$a3 = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 2 \end{pmatrix}$

$P13(x) := a3_0 + a3_1\cdot x$

Интерполирующая функция 3-го участка

4-й участок

$C4 := \begin{pmatrix} 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{pmatrix}$ $\quad D4 := \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$

Матрицы C4 и D4 для системы линейных уравнений

$a4 := C4^{-1}\cdot D4$

Решение системы линейных уравнений нахождение коэффициентов а40 и а41

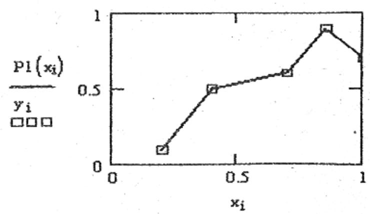
$a4 = \begin{pmatrix} 2.033 \\ -1.333 \end{pmatrix}$

$P14(x) := a4_0 + a4_1\cdot x$

Интерполирующая функция 4-го участка

$P1(t) := \mathrm{if}\left(t \le x_1, P11(t), \mathrm{if}\left(t \le x_2, P12(t), \mathrm{if}\left(t \le x_3, P13(t), P14(t)\right)\right)\right)$

Ответ



Кусочно-параболическая интерполяция (Метод неопределённых коэффициентов)

Система для нахождения коэффициентов полинома на каждом участке	Ответ
1-й участок $\begin{cases} a1_0 + a1_1 \cdot x_0 + a1_2 \cdot x_0^2 = y_0 \\ a1_0 + a1_1 \cdot x_1 + a1_2 \cdot x_1^2 = y_1 \\ a1_0 + a1_1 \cdot x_2 + a1_2 \cdot x_2^2 = y_2 \end{cases}$ 2-й участок $\begin{cases} a2_0 + a2_1 \cdot x_2 + a2_2 \cdot x_2^2 = y_2 \\ a2_0 + a2_1 \cdot x_3 + a2_2 \cdot x_3^2 = y_3 \\ a2_0 + a2_1 \cdot x_4 + a2_2 \cdot x_4^2 = y_4 \end{cases}$	$P2(x) = \begin{cases} a1_0 - a1_1 \cdot x - a1_2 \cdot x^2, \text{если} \quad x_0 \le x \le x_2 \\ a2_0 - a2_1 \cdot x - a2_2 \cdot x^2, \text{если} \quad x_2 \le x \le x_4 \end{cases}$

Документ MathCad:

Метод неопределённых коэффициентов (кусочно-параболическая интерполяция)

$x := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.7 \\ 0.85 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.9 \\ 0.7 \end{pmatrix}$ Исходные данные $i := 0 .. 4$

1-й участок

$C1 := \begin{bmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 \end{bmatrix} \quad D1 := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ Матрицы C1 и D1 для системы линейных уравнений

$a1 := C1^{-1} \cdot D1$ Решение системы линейных уравнений нахождение коэффициентов a10 , a11 и a12

$a1 = \begin{pmatrix} -0.5667 \\ 4 \\ -3.3333 \end{pmatrix}$

$P21(x) := a1_0 + a1_1 \cdot x + a1_2 \cdot x^2$ Интерполирующая функция 1-й участок

2-й участок

$C2 := \begin{bmatrix} 1 & x_2 & (x_2)^2 \\ 1 & x_3 & (x_3)^2 \\ 1 & x_4 & (x_4)^2 \end{bmatrix} \quad D2 := \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ Матрицы C2 и D2 для системы линейных уравнений

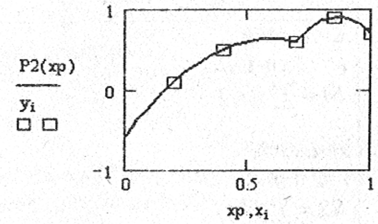
$a2 := C2^{-1} \cdot D2$ Решение системы линейных уравнений нахождение коэффициентов a20 , a21 и a22

$a2 = \begin{pmatrix} -7.4111 \\ 19.2222 \\ -11.1111 \end{pmatrix}$

$P22(x) := a2_0 + a2_1 \cdot x + a2_2 \cdot x^2$ Интерполирующая функция 2-й участок

$P2(t) := \text{if}\left(t \le x_2, P21(t), P22(t)\right)$ Ответ

$xp := 0, 0.05 .. 1$ точки для построения полинома



Лабораторная работа №4

Вычисление определённого интеграла

Постановка задачи: Вычислить определённый интеграл $I = \int_a^b f(x)$

hx=(b-a)/n- шаг разбиения, n - количество разбиений.

Для вычисления использовать методы:

- метод левых прямоугольников;
- метод правых прямоугольников;
- метод центральных прямоугольников;
- метод трапеций;
- метод Симпсона;

Таблица

Название метода	*Итерационная формула*
Метод левых прямоугольников	$x_i = a + i * hx$ $i = 0..n-1$ $I = hx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$
Метод правых прямоугольников	$x_i = a + i * hx$ $i = 1..n$ $I = hx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

Окончание таблицы

Название метода	***Итерационная формула***
Метод центральных прямоугольников	$x_i=a+(i\text{-}0{,}5)*hx$ $i=1..n$ $I = hx\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$
Метод трапеций	$x_i=a+i*hx$ $i=1..n\text{-}1$ $I = hx(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i))$
Метод Симпсона	$x_i=a+i*hx$ $i=1,3..n\text{-}1$ $S1 = \sum_i f(x_i)$ $x_i=a+i*hx$ $i=2,4..n\text{-}2$ $S2 = \sum_i f(x_i)$ $I = \frac{hx}{3}(f(a)+2\cdot S1+4\cdot S2+f(b))$

Документ MathCad:

Вычисление неопределенного интеграла

$$\int \sin(x)\,dx \rightarrow -\cos(x)$$

Вычисление определенного интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = 1$$

$f(x) := \sin(x)$ подинтегральная функция

$a := 0$ $b := \frac{\pi}{2}$ пределы интегрирования

$n := 100$ число разбиений отрезка [a b]

$h := \frac{b-a}{n}$ шаг интегрирования

Метод центральных прямоугольников

$$Pr := h\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left[a+h\cdot\left(i-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$Pr = 1.00001028091191$

Метод трапеций

$$Tr := h\cdot\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+h\cdot i)\right)$$

$Tr = 0.99997943823961$

Метод парабол (Симпсона)

$$Simp := \frac{h}{6}\cdot\left[f(a)+f(b)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(a+h\cdot i)+4\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left[a+h\cdot\left(i-\frac{1}{2}\right)\right]\right]$$

$Simp = 1.000000000002114$

Лабораторная работа №5

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Численное решение задач с начальными условиями Коши

Постановка задачи:

Дано дифференциальное уравнение второго порядка y''+B y'+K y =A , где A, B, K - данные параметры д.у.,[a,b] - интервал интегрирования д.у. , h=(b-a)/n - шаг интегрирования д.у. , n - выбранное число разбиений [a,b] на частичные интервалы с шагом hx, $y(a) = y_0$, $y'(a) = y'_0$ - начальные условия для д.у.. Требуется определить на промежутке [a,b] с шагом hx приближенные значения функций y(x), y'(x), удовлетворяющие д.у. и начальным условиям в табличной форме.

Метод Эйлера	
Ввести обозначения $y'=z$ $z'+B\,z+K\,y=A$ $\begin{cases} y' = z \\ z' = -B\;z - K\;y + A \end{cases}$ $\begin{cases} y' = fy(x,y,z) \\ z' = fz(x,y,z) \end{cases}$	$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + hx \\ y_{i+1} = y_i + hx*fy(x_i,y_i,z_i) \\ z_{i+1} = z_i + hx*fz(x_i,y_i,z_i) \end{cases}$

Решение задачи Коши
y''=f(x,y,y') при условиях y(x0)=y0, y'(x0)=z0

Найти решение задачи Коши
y''+y=0 при условиях y(0)=1, y'(0)=0

Решение
Обозначим y'=z, тогда $f(x, y, z) := -y$

Задаем начальные условия

$x_0 := 0$ $y_0 := 1$ $z_0 := 0$

Документ MathCad:

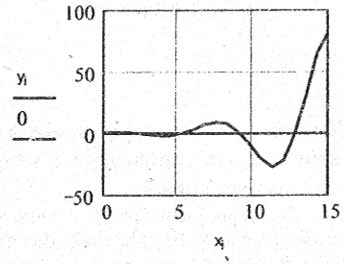
Задаем шаг $h := 0.75$

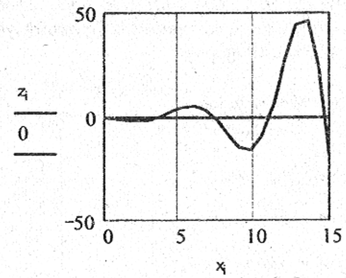
Задаем число шагов $i := 0 .. 20$

Метод Эйлера

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_i + h \\ y_i + h \cdot z_i \\ z_i + h \cdot f(x_i, y_i, z_i) \end{pmatrix}$$

$x_i =$	$y_i =$	$z_i =$
0	1	0
0.75	1	-0.75
1.5	0.438	-1.5
2.25	-0.688	-1.828
3	-2.059	-1.313
3.75	-3.043	0.231
4.5	-2.869	2.514
5.25	-0.984	4.666
6	2.515	5.404
6.75	6.568	3.517
7.5	9.206	-1.409
8.25	8.15	-8.313
9	1.915	-14.425
9.75	-8.904	-15.862
10.5	-20.8	-9.183
11.25	-27.688	6.417
12	-22.875	27.183
12.75	-2.488	44.339
13.5	30.766	46.205
14.25	65.42	23.13
15	82.768	-25.935





Из графика видно нарастание вычислительной погрешности

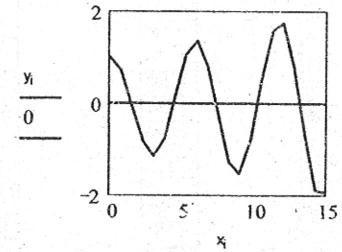
Модифицированный метод Эйлера-с центрированием

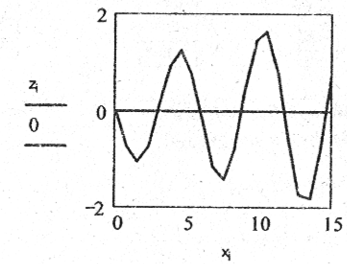
Ввести обозначения $y'=z$ $z'+B\,z+K\,y=A$ $\begin{cases} y' = z \\ z' = -B\ z - K\ y + A \end{cases}$ $\begin{cases} y' = fy(x,y,z) \\ z' = fz(x,y,z) \end{cases}$	$\begin{cases} x_{i+1/2} = x_i + hx/2 \\ y_{i+1/2} = y_i + \frac{hx}{2} * fy(x_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1/2} = z_i + \frac{hx}{2} * fz(x_i, y_i, z_i) \end{cases}$ $\begin{cases} x_{i+1} = x_i + hx \\ y_{i+1} = y_i + hx * fy(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}, z_{i+1/2}) \\ z_{i+1} = z_i + hx * fz(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}, z_{i+1/2}) \end{cases}$

Документ MathCad:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} x_i + h \\ y_i + h \cdot \left(z_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i, z_i)\right) \\ z_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot z_i, z_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i, z_i)\right) \end{bmatrix}$$

$x_i =$	$y_i =$	$z_i =$
0	1	0
0.75	0.719	-0.75
1.5	-0.046	-1.078
2.25	-0.842	-0.74
3	-1.16	0.099
3.75	-0.76	0.941
4.5	0.16	1.246
5.25	1.05	0.776
6	1.336	-0.23
6.75	0.788	-1.167
7.5	-0.309	-1.43
8.25	-1.295	-0.796
9	-1.528	0.399
9.75	-0.799	1.432
10.5	0.5	1.629
11.25	1.581	0.796
12	1.733	-0.614
12.75	0.785	-1.741
13.5	-0.741	-1.84
14.25	-1.913	-0.767
15	-1.95	0.884





Модифицированный метод Эйлера-с усреднением

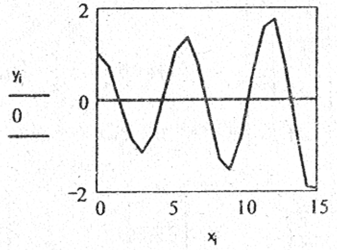
Ввести обозначения $y'=z$ $z'+B\,z+K\,y=A$ $\begin{cases} y' = z \\ z' = -B\ z - K\ y + A \end{cases}$ $\begin{cases} y' = fy(x,y,z) \\ z' = fz(x,y,z) \end{cases}$	$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + hx \\ y1_{i+1} = y_i + hx * fy(x_i, y_i, z_i) \\ z1_{i+1} = z_i + hx * fz(x_i, y_i, z_i) \end{cases}$ $\begin{cases} x_{i+1} = x_i + hx \\ y_{i+1} = y_i + hx * (fy(x_i, y_i, z_i) + fy(x1_i, y1_i, z1_i))/2 \\ z_{i+1} = z_i + hx * (fz(x_i, y_i, z_i) + fz(x_i, y1_i, z1_i))/2 \end{cases}$

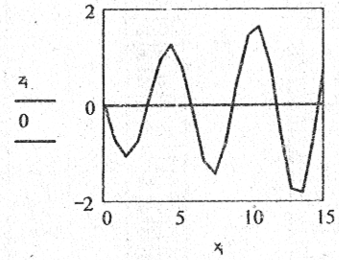
Документ MathCad:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} x_i + h \\ y_i + h \cdot \frac{\left[z_i + \left(z_i + h \cdot f(x_i, y_i, z_i)\right)\right]}{2} \\ z_i + h \cdot \frac{\left(f(x_i, y_i, z_i) + f\left(x_i + h, y_i + h \cdot z_i, z_i + h \cdot f(x_i, y_i, z_i)\right)\right)}{2} \end{bmatrix}$$

Документ MathCad:

$x_i =$	$y_i =$	$z_i =$
0	1	0
0.75	0.719	-0.75
1.5	-0.046	-1.078
2.25	-0.842	-0.74
3	-1.16	0.099
3.75	-0.76	0.941
4.5	0.16	1.246
5.25	1.05	0.776
6	1.336	-0.23
6.75	0.788	-1.167
7.5	-0.309	-1.43
8.25	-1.295	-0.796
9	-1.528	0.399
9.75	-0.799	1.432
10.5	0.5	1.629
11.25	1.581	0.796
12	1.733	-0.614
12.75	0.785	-1.741
13.5	-0.741	-1.84
14.25	-1.913	-0.767
15	-1.95	0.884





Метод Рунге-Кутта

Ввести обозначения

$y'=z$

$z'+B\,z+K\,y=A$

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -B\ z - K\ y + A \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = fy(x, y, z) \\ z' = fz(x, y, z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + hx \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{hx}{6} * (k0 + 2 \cdot k1 + 2 \cdot k2 + k3) \\ z_{i+1} = z_i + \dfrac{hx}{6} * (l0 + 2 \cdot l1 + 2 \cdot l2 + l3) \\ k0 = fy(x_i, y_i, z_i) \quad l0 = fz(x_i, y_i, z_i) \\ k1 = fy(x_i + hx/2, y_i + k0/2, z_i + l0/2) \\ l1 = fz(x_i + hx/2, y_i + k0/2, z_i + l0/2) \\ k2 = fy(x_i + hx/2, y_i + k1/2, z_i + l1/2) \\ l2 = fz(x_i + hx/2, y_i + k1/2, z_i + l1/2) \\ k3 = fy(x_i + hx, y_i + k2, z_i + l2) \\ l3 = fz(x_i + hx, y_i + k2, z_i + l2) \end{cases}$$

Документ MathCad:

Решим ту задачу, используя метод
Рунге-Кутта с фиксированным шагом

$y''(x) = -y(x)$

$y(0) = 1$ $\qquad$ $y'(0) = 0$

Определяем начальные условия

$y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $D(x, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_0 \end{pmatrix}$ Первая производная
Вторая производная

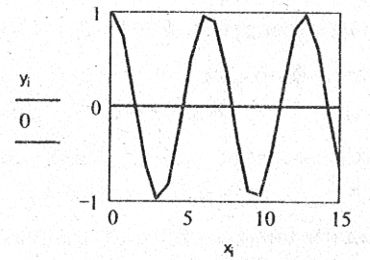
Документ MathCad:

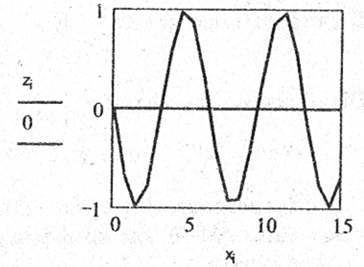
Вычисляем при x от 0 до 15, используя 20 разбиений,
т.е. с шагом 0.75

$S := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 15, 20, D)$

$x := S^{\langle 0 \rangle}$ $\qquad$ $y := S^{\langle 1 \rangle}$ $\qquad$ $z := S^{\langle 2 \rangle}$

$x_i =$	$y_i =$	$z_i =$
0	1	0
0.75	0.732	-0.68
1.5	0.074	-0.995
2.25	-0.622	-0.778
3	-0.985	-0.147
3.75	-0.82	0.562
4.5	-0.219	0.969
5.25	0.498	0.858
6	0.948	0.289
6.75	0.89	-0.433
7.5	0.357	-0.922
8.25	-0.365	-0.918
9	-0.891	-0.424
9.75	-0.94	0.295
10.5	-0.487	0.855
11.25	0.225	0.957
12	0.815	0.548
12.75	0.969	-0.153
13.5	0.605	-0.77
14.25	-0.081	-0.975
15	-0.722	-0.659





Решение задачи Коши с помощью вычислительного блока Given-Odesolve.

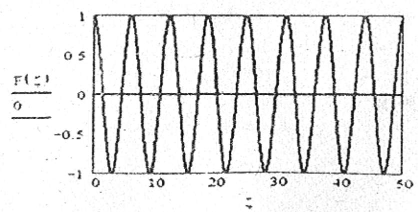
Решим ту задачу, используя
вычислительный блок Given-Odesolve
(метод Рунге-Кутта с адаптивным шагом)

Given

$F''(\zeta) + F(\zeta) = 0$

$F(0) = 1$ $\qquad$ $F'(0) = 0$

$F := \mathrm{Odesolve}(\zeta, 50, 500)$ $\qquad$ Кликнуть правой кнопкой и выбрать Адаптивный



Решение краевой задачи
Постановка задачи:
$U''+q(x)U'-e(x)U=z(x)$,
краевые условия: $U(a)=\phi$ $U(b)=\psi$
Метод конечных разностей

Документ MathCad:

Решить уравнение $U''+U=0$, $U(0)=4$ $U(25)=4$

Задаем функции

$q(x) := 0$ $\quad e(x) := -1$ $\quad z(x) := 0$

Задаем отрезок [a,b] Задаем краевые условия

$a := 0$ $\quad b := 25$ $\quad \phi := 4$ $\quad \psi := 4$

Задаем число разбиений отрезка [a,b]

$n := 20$

Вычисляем шаг сетки $h := \dfrac{(b-a)}{n}$

Вычисляем узлы сетки $i := 1 .. n-1$

$x_i := a + i \cdot h$ $\quad x_0 := a$ $\quad x_n := b$

Для определения Ui в узлах сетки решим систему линейных уравнений AU=B, где коэффициенты матриц A и B определяются по формулам:

$A_{0,0} := 1$ $\qquad B_0 := \phi$

$$A_{i,i-1} := \frac{\left(2 - q(x_i) \cdot h\right)}{2 \cdot h^2} \qquad B_i := z(x_i)$$

$$A_{i,i} := \frac{-\left(4 + 2 \cdot h^2 \cdot e(x_i)\right)}{2 \cdot h^2} \qquad B_n := \psi$$

$$A_{i,i+1} := \frac{\left(2 + q(x_i) \cdot h\right)}{2 \cdot h^2} \qquad A_{n,n} := 1$$

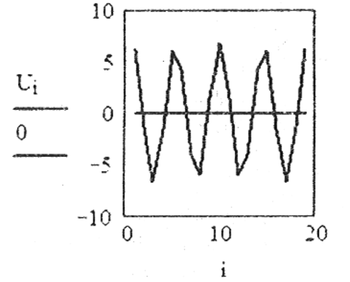
Решаем систему уравнений $U := A^{-1} \cdot B$

x =

	0
0	0
1	1.25
2	2.5
3	3.75
4	5
5	6.25
6	7.5
7	8.75
8	10
9	11.25
10	12.5
11	13.75
12	15
13	16.25
14	17.5
15	18.75

U =

	0
0	4
1	6.178
2	-1.297
3	-6.745
4	-1.654
5	6.022
6	4.288
7	-4.146
8	-6.102
9	1.476
10	5.748
11	1.476
12	-6.102
13	-4.146
14	4.288
15	6.022



Список литературы

1. Макаров Е. Г. Mathcad: учебный курс /Е. Г. Макаров Изд.- во «Питер», 2009 - 384с.

2. Солодов А.П. Mathcad. Дифференциальные модели /А.П. Солодов, В.Ф. Очков Изд - во МЭИ, 2002- 239с.

3. Глушаков С.В. Математическое моделирование Mathcad 2000, Matlab 5.3./С.В. Глушаков, И.А. Жакин, Т.С. Хачиров. Изд - во Фолио, 2001- 524с.

4. Воскобойников Ю.Е. Программирование и решение задач в пакете Mathcad Руководство программиста /Ю.Е. Воскобойников, В.Ф. Очков. Изд – во НГАСУ, 2002 – 138с.

5. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD /В.А. Охорзин. Изд - во Лань, СПб, 2008 - 352с.

Содержание