В.Е. ГМУРМАН

Теория вероятностей и математическая статистика

Издание девятое, стереотипное

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов вузов

Москва
«Высшая школа» 2003

УДК 519.2
ББК 22.171
Г 55

Гмурман, В. Е.

Г 55 Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов/В. Е. Гмурман. — 9-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2003. — 479 с.: ил.

ISBN 5-06-004214-6

Книга (8-е изд. 2002г.) содержит в основном весь материал программы по теории вероятностей и математической статистике. Большое внимание уделено статистическим методам обработки экспериментальных данных. В конце каждой главы помещены задачи с ответами.

Предназначается для студентов вузов и лиц, использующих вероятностные и статистические методы при решении практических задач.

УДК 519.2
ББК 22.171

ISBN 5-06-004214-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО. ЦЕПИ МАРКОВА

ЧАСТЬ ПЯТАЯ

СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Предмет теории вероятностей. Наблюдаемые нами события (явления) можно подразделить на следующие три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S. Например, если в сосуде содержится вода при нормальном атмосферном давлении и температуре 20°, то событие «вода в сосуде находится в жидком состоянии» есть достоверное. В этом примере заданные атмосферное давление и температура воды составляют совокупность условий S.

Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий S. Например, событие «вода в сосуде находится в твердом состоянии» заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий предыдущего примера.

Случайным называют событие, которое при осуществлении совокупности условий S может либо произойти, либо не произойти. Например, если брошена монета, то она может упасть так, что сверху будет либо герб, либо надпись. Поэтому событие «при бросании монеты выпал «герб»—случайное. Каждое случайное событие, в частности выпадение «герба», есть следствие действия очень многих случайных причин (в нашем примере: сила, с которой брошена монета, форма монеты и многие другие). Невозможно учесть влияние на результат всех этих причин, поскольку число их очень велико и законы их действия неизвестны. Поэтому теория вероятностей не ставит перед собой задачу предсказать, произойдет единичное событие или нет,—она просто не в силах это сделать.

По-иному обстоит дело, если рассматриваются случайные события, которые могут многократно наблюдаться при осуществлении одних и тех же условий S, т. е. если речь идет о массовых однородных случайных событиях. Оказывается, что достаточно большое число однородных случайных событий независимо от их конкретной природы подчиняется определенным закономерностям, а именно вероятностным закономерностям. Установлением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

Итак, *предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.*

Знание закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут протекать. Например, хотя, как было уже сказано, нельзя наперед определить результат одного бросания монеты, но можно предсказать, причем с небольшой погрешностью, число появлений «герба», если монета будет брошена достаточно большое число раз. При этом предполагается, конечно, что монету бросают в одних и тех же условиях.

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории надежности, теории массового обслуживания, в теоретической физике, геодезии, астрономии, теории стрельбы, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управления, общей теории связи и во многих других теоретических и прикладных науках. Теория вероятностей служит также для обоснования математической и прикладной статистики, которая в свою очередь используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов, предупредительном и приемочном контроле качества продукции и для многих других целей.

В последние годы методы теории вероятностей все шире и шире проникают в различные области науки и техники, способствуя их прогрессу.

Краткая историческая справка. Первые работы, в которых зарождались основные понятия теории вероятностей, представляли собой попытки создания теории азартных игр (Кардано, Гюйгенс, Паскаль, Ферма и другие в XVI—XVII вв.).

Следующий этап развития теории вероятностей связан с именем Якоба Бернулли (1654—1705). Доказанная им теорема, получившая впоследствии название «Закона больших чисел», была первым теоретическим обоснованием накопленных ранее фактов.

Дальнейшими успехами теория вероятностей обязана Муавру, Лапласу, Гауссу, Пуассону и др.

Новый, наиболее плодотворный период связан с именами П. Л. Чебышева (1821—1894) и его учеников А. А. Маркова (1856—1922) и А. М. Ляпуиова (1857—1918). В этот период теория вероятностей становится стройной математической наукой. Ее последующее развитие обязано в первую очередь русским и советским математикам (С. Н. Бериштейн, В. И. Романовский, А. Н. Колмогоров, А. Я. Хинчин, Б. В. Гнеденко, Н. В. Смирнов и др.). В настоящее время ведущая роль в создании новых ветвей теории вероятностей также принадлежит советским математикам.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Глава первая

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Испытания и события

Выше событие названо случайным, если при осуществлении определенной совокупности условий S оно может либо произойти, либо не произойти. В дальнейшем, вместо того чтобы говорить «совокупность условий S осуществлена», будем говорить кратко: «произведено испытание». Таким образом, событие будет рассматриваться как результат испытания.

Пример 1. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Выстрел — это испытание. Попадание в определенную область мишени — событие.

Пример 2. В урне имеются цветные шары. Из урны наудачу берут один шар. Извлечение шара из урны есть испытание. Появление шара определенного цвета — событие.

§ 2. Виды случайных событий

События называют *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пример 1. Из ящика с деталями наудачу извлечена деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» — несовместные.

Пример 2. Брошена монета. Появление «герба» исключает появление надписи. События «появился герб» и «появилась надпись» — несовместные.

Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания появится хотя бы одно из них. Другими словами, появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие. В частности, *если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий.* Этот частный случай представляет для нас наибольший интерес, поскольку используется далее.

Пример 3. Приобретены два билета денежно-вещевой лотереи. Обязательно произойдет одно и только одно из следующих событий: «выигрыш выпал на первый билет и не выпал на второй», «выигрыш не выпал на первый билет и выпал на второй», «выигрыш выпал на оба билета», «на оба билета выигрыш не выпал». Эти события образуют полную группу попарно несовместных событий.

Пример 4. Стрелок произвел выстрел по цели. Обязательно произойдет одно из следующих двух событий: попадание, промах. Эти два несовместных события образуют полную группу.

События называют *равновозможными*, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Пример 5. Появление «герба» и появление надписи при бросании монеты — равновозможные события. Действительно, предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму и наличие чеканки не оказывает влияния на выпадение той или иной стороны монеты.

Пример 6. Появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости — равновозможные события. Действительно, предполагается, что игральная кость изготовлена из однородного материала, имеет форму правильного многогранника и наличие очков не оказывает влияния на выпадение любой грани.

§ 3. Классическое определение вероятности

Вероятность — одно из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений этого понятия. Приведем определение, которое называют классическим. Далее укажем слабые стороны этого определения и приведем другие определения, позволяющие преодолеть недостатки классического определения.

Рассмотрим пример. Пусть в урне содержится 6 одинаковых, тщательно перемешанных шаров, причем 2 из них — красные, 3 — синие и 1 — белый. Очевидно, возможность вынуть наудачу из урны цветной (т. е. красный или синий) шар больше, чем возможность извлечь белый шар. Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Оказывается, можно. Это число и называют вероятностью события (появления цветного шара). Таким образом, вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события.

Поставим перед собой задачу дать количественную оценку возможности того, что взятый наудачу шар цветной. Появление цветного шара будем рассматривать в качестве события A. Каждый из возможных результатов испытания (испытание состоит в извлечении шара из урны) назовем *элементарным исходом* (*элементарным событием*). Элементарные исходы обозначим через ω_1, ω_2, ω_3 и т. д. В нашем примере возможны следующие 6 элементарных исходов: ω_1 — появился белый шар; ω_2, ω_3 — появился красный шар; ω_4, ω_5, ω_6 — появился синий шар. Легко видеть, что эти исходы образуют полную группу попарно несовместных событий (обязательно появится только один шар) и они равновозможны (шар вынимают наудачу, шары одинаковы и тщательно перемешаны).

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, назовем *благоприятствующими* этому событию. В нашем примере благоприятствуют событию A (появлению цветного шара) следующие 5 исходов: ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6.

Таким образом, событие A наблюдается, если в испытании наступает один, безразлично какой, из элементарных исходов, благоприятствующих A; в нашем примере A наблюдается, если наступит ω_2, или ω_3, или ω_4, или ω_5, или ω_6. В этом смысле событие A подразделяется на несколько элементарных событий (ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6); элементарное же событие не подразделяется на другие события. В этом состоит различие между событием A и элементарным событием (элементарным исходом).

Отношение числа благоприятствующих событию A элементарных исходов к их общему числу называют вероятностью события A и обозначают через $P(A)$. В рассматриваемом примере всего элементарных исходов 6; из них 5 благоприятствуют событию A. Следовательно, вероятность того, что взятый шар окажется цветным, равна $P(A) = 5/6$. Это число и дает ту количественную оценку степени возможности появления цветного шара, которую мы хотели найти. Дадим теперь определение вероятности.

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Итак, вероятность события A определяется формулой

$$P(A) = m/n,$$

где m — число элементарных исходов, благоприятствующих A; n — число всех возможных элементарных исходов испытания.

Здесь предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

Свойство 1. *Вероятность достоверного события равна единице.*

Действительно, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию. В этом случае $m = n$, следовательно,

$$P(A) = m/n = n/n = 1.$$

Свойство 2. *Вероятность невозможного события равна нулю.*

Действительно, если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае $m = 0$, следовательно,

$$P(A) = m/n = 0/n = 0.$$

Свойство 3. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.*

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания. В этом случае $0 < m < n$, значит, $0 < m/n < 1$, следовательно,

$$0 < P(A) < 1.$$

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

Далее приведены теоремы, которые позволяют по известным вероятностям одних событий находить вероятности других событий.

Замечание. Современные строгие курсы теории вероятностей построены на теоретико-множественной основе. Ограничимся изложением на языке теории множеств тех понятий, которые рассмотрены выше.

Пусть в результате испытания наступает одно и только одно из событий ω_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). События ω_i называют *элементарными событиями* (*элементарными исходами*). Уже отсюда следует, что элементарные события попарно несовместны. Множество всех элементарных событий, которые могут появиться в испытании, называют *пространством элементарных событий* Ω, а сами элементарные события — *точками пространства* Ω.

Событие A отождествляют с подмножеством (пространства Ω), элементы которого есть элементарные исходы, благоприятствующие A; событие B есть подмножество Ω, элементы которого есть исходы, благоприятствующие B, и т. д. Таким образом, множество всех событий, которые могут наступить в испытании, есть множество всех подмножеств Ω. Само Ω наступает при любом исходе испытания, поэтому Ω — достоверное событие; пустое подмножество пространства Ω — невозможное событие (оно не наступает ни при каком исходе испытания).

Заметим, что элементарные события выделяются из числа всех событий тем, что каждое из них содержит только один элемент Ω.

Каждому элементарному исходу ω_i ставят в соответствие положительное число p_i — вероятность этого исхода, причем $\sum\limits_i p_i = 1$. По определению, вероятность $P(A)$ события A равна сумме вероятностей элементарных исходов, благоприятствующих A. Отсюда легко получить, что вероятность события достоверного равна единице, невозможного — нулю, произвольного — заключена между нулем и единицей.

Рассмотрим важный частный случай, когда все исходы равновозможны. Число исходов равно n, сумма вероятностей всех исходов равна единице; следовательно, вероятность каждого исхода равна $1/n$. Пусть событию A благоприятствует m исходов. Вероятность события A равна сумме вероятностей исходов, благоприятствующих A:

$$P(A) = 1/n + 1/n + \ldots + 1/n.$$

Учитывая, что число слагаемых равно m, имеем

$$P(A) = m/n.$$

Получено классическое определение вероятности.

Построение логически полноценной теории вероятностей основано на аксиоматическом определении случайного события и его вероятности. В системе аксиом, предложенной А. Н. Колмогоровым *), неопределяемыми понятиями являются элементарное событие и вероятность. Приведем аксиомы, определяющие вероятность:

1. Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное действительное число $P(A)$. Это число называется вероятностью события A.

2. Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(\Omega) = 1.$$

3. Вероятность наступления хотя бы одного из попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Исходя из этих аксиом, свойства вероятностей и зависимости между ними выводят в качестве теорем.

---

*) Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М., «Наука», 1974.

§ 4. Основные формулы комбинаторики

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества. При непосредственном вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики. Приведем наиболее употребительные из них.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n!,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$.

Заметим, что удобно рассматривать $0!$, полагая, по определению, $0! = 1$.

Пример 1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Решение. Искомое число трехзначных чисел

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-m+1).$$

Пример 2. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение. Искомое число сигналов

$$A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30.$$

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$C_n^m = n!/(m!\,(n-m)!).$$

Пример 3. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение. Искомое число способов

$$C_{10}^2 = 10!/(2!\,8!) = 45.$$

Подчеркнем, что числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством

$$A_n^m = P_m C_n^m.$$

З а м е ч а н и е. Выше предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае *комбинации с повторениями* вычисляют по другим формулам. Например, если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т. д., то число перестановок с повторениями

$$P_n(n_1, n_2, \ldots) = n!/(n_1!\, n_2! \ldots),$$

где $n_1 + n_2 + \ldots = n$.

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

П р а в и л о с у м м ы. Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m+n$ способами.

П р а в и л о п р о и з в е д е н и я. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана mn способами.

§ 5. Примеры непосредственного вычисления вероятностей

Пример 1. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Р е ш е н и е. Обозначим через A событие — набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию A лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = 1/10.$$

Пример 2. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Р е ш е н и е. Обозначим через B событие — набраны две нужные цифры. Всего можно набрать столько различных цифр, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две, т. е. $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$. Таким образом, общее число возможных элементарных исходов равно 90. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию B лишь один исход. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(B) = 1/90.$$

Пример 3. Указать ошибку «решения» задачи: «Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 4 (событие A)».

Решение. Всего возможны 2 исхода испытания: сумма выпавших очков равна 4, сумма выпавших очков не равна 4. Событию A благоприятствует один исход; общее число исходов равно двум. Следовательно, искомая вероятность

$$P(A) = 1/2.$$

Ошибка этого решения состоит в том, что рассматриваемые исходы не являются равновозможными.

Правильное решение. Общее число равновозможных исходов испытания равно $6 \cdot 6 = 36$ (каждое число выпавших очков на одной кости может сочетаться со всеми числами очков другой кости). Среди этих исходов благоприятствуют событию A только 3 исхода: (1; 3), (3; 1), (2; 2) (в скобках указаны числа выпавших очков). Следовательно, искомая вероятность

$$P(A) = 3/36 = 1/12.$$

Пример 4. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т. е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов (C_{10}^6).

Определим число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию A (среди шести взятых деталей 4 стандартных). Четыре стандартные детали можно взять из семи стандартных деталей C_7^4 способами; при этом остальные $6-4=2$ детали должны быть нестандартными; взять же 2 нестандартные детали из $10-7=3$ нестандартных деталей можно C_3^2 способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_7^4 \cdot C_3^2$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = (C_7^4 \cdot C_3^2)/C_{10}^6 = 1/2.$$

§ 6. Относительная частота. Устойчивость относительной частоты

Относительная частота наряду с вероятностью принадлежит к основным понятиям теории вероятностей.

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний. Таким образом, относительная частота события A определяется формулой

$$W(A) = m/n,$$

где m — число появлений события, n — общее число испытаний.

Сопоставляя определения вероятности и относительной частоты, заключаем: определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности; определение же относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически. Другими словами, *вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту—после опыта.*

Пример 1. Отдел технического контроля обнаружил 3 нестандартных детали в партии из 80 случайно отобранных деталей. Относительная частота появления нестандартных деталей

$$W(A) = 3/80.$$

Пример 2. По цели произвели 24 выстрела, причем было зарегистрировано 19 попаданий. Относительная частота поражения цели

$$W(A) = 19/24.$$

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производят опыты, в каждом из которых число испытаний достаточно велико, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости. Это свойство состоит в том, *что в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа.* Оказалось, что это постоянное число есть вероятность появления события.

Таким образом, если опытным путем установлена относительная частота, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности.

Подробнее и точнее связь между относительной частотой и вероятностью будет изложена далее. Теперь же проиллюстрируем свойство устойчивости на примерах.

Пример 3. По данным шведской статистики, относительная частота рождения девочек за 1935 г. по месяцам характеризуется следующими числами (числа расположены в порядке следования месяцев, начиная с января): 0,486; 0,489; 0,490; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,473

Относительная частота колеблется около числа 0,482, которое можно принять за приближенное значение вероятности рождения девочек.

Заметим, что статистические данные различных стран дают примерно то же значение относительной частоты.

Пример 4. Многократно проводились опыты бросания монеты, в которых подсчитывали число появления «герба». Результаты нескольких опытов приведены в табл. 1.

Здесь относительные частоты незначительно отклоняются от числа 0,5, причем тем меньше, чем больше число испытаний. Например, при 4040 испытаниях отклонение равно 0, 0069, а при 24 000

Таблица 1

Число бросаний	Число появлений «герба»	Относительная частота
4 040	2 048	0,5069
12 000	6 019	0,5016
24 000	12 012	0,5005

испытаний — лишь 0,0005. Приняв во внимание, что вероятность появления «герба» при бросании монеты равна 0,5, мы вновь убеждаемся, что относительная частота колеблется около вероятности.

§ 7. Ограниченность классического определения вероятности. Статистическая вероятность

Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов испытания конечно. На практике же весьма часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно. В таких случаях классическое определение неприменимо. Уже это обстоятельство указывает на ограниченность классического определения. Отмеченный недостаток может быть преодолен, в частности, введением геометрических вероятностей (см. § 8) и, конечно, использованием аксиоматической вероятности (см. § 3, замечание).

Наиболее слабая сторона классического определения состоит в том, что очень часто невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий. Еще труднее указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными. Обычно о равновозможности элементарных исходов испытания говорят из соображений симметрии. Так, например, предполагают, что игральная кость имеет форму правильного многогранника (куба) и изготовлена из однородного материала. Однако задачи, в которых можно исходить из соображений симметрии, на практике встречаются весьма редко. По этой причине наряду с классическим определением вероятности используют и другие определения, в частности статистическое определение: *в качестве статистической вероятности события принимают относительную частоту или число, близкое к ней.* Например, если в результате достаточно большого числа испытаний оказалось, что относительная частота весьма близка к числу 0,4, то это число можно принять за статистическую вероятность события.

Легко проверить, что свойства вероятности, вытекающие из классического определения (см. § 3), сохраняются и при статистическом определении вероятности. Действительно, если событие достоверно, то $m=n$ и относительная частота

$$m/n = n/n = 1,$$

т. е. статистическая вероятность достоверного события (так же как и в случае классического определения) равна единице.

Если событие невозможно, то $m=0$ и, следовательно, относительная частота

$$0/n = 0,$$

т. е. статистическая вероятность невозможного события равна нулю.

Для любого события $0 \leqslant m \leqslant n$ и, следовательно, относительная частота

$$0 \leqslant m/n \leqslant 1,$$

т. е. статистическая вероятность любого события заключена между нулем и единицей.

Для существования статистической вероятности события A требуется:

а) возможность, хотя бы принципиально, производить неограниченное число испытаний, в каждом из которых событие A наступает или не наступает;

б) устойчивость относительных частот появления A в различных сериях достаточно большого числа испытаний.

Недостатком статистического определения является неоднозначность статистической вероятности; так, в приведенном примере в качестве вероятности события можно принять не только 0,4, но и 0,39; 0,41 и т. д.

§ 8. Геометрические вероятности

Чтобы преодолеть недостаток классического определения вероятности, состоящий в том, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов, вводят *геометрические вероятности* — вероятности попадания точки в область (отрезок, часть плоскости и т. д.).

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Это означает выполнение следующих предположений: поставленная точка может оказаться в любой точке отрезка L, вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L. В этих предположениях вероятность попадания точки на отрезок l определяется равенством

$$P = \text{Длина}\, l/\text{Длина}\, L.$$

Пример 1. На отрезок OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, бóльшую $L/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

Решение. Разобьем отрезок OA точками C и D на 3 равные части. Требование задачи будет выполнено, если точка $B(x)$ попадет на отрезок CD длины $L/3$. Искомая вероятность

$$P = (L/3)/L = 1/3.$$

Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу брошена точка. Это означает выполнение следующих предположений: брошенная точка может оказаться в любой точке фигуры G, вероятность попадания брошенной точки на фигуру g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно G, ни от формы g. В этих предположениях вероятность попадания точки в фигуру g определяется равенством

$$P = \text{Площадь}\, g/\text{Площадь}\, G.$$

Пример 2. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения относительно большого круга.

Решение. Площадь кольца (фигуры g)

$$S_g = \pi(10^2 - 5^2) = 75\pi.$$

Площадь большого круга (фигуры G)

$$S_G = \pi 10^2 = 100\pi.$$

Искомая вероятность

$$P = 75\pi/(100\pi) = 0{,}75.$$

Пример 3. В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью T. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше

t ($t < T$). Найти вероятность того, что сигнализатор сработает за время T, если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

Решение. Обозначим моменты поступления сигналов первого и второго устройств соответственно через x и y. В силу условия задачи должны выполняться двойные неравенства: $0 \leqslant x \leqslant T$, $0 \leqslant y \leqslant T$. Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат xOy. В этой системе двойным неравенствам удовлетворяют координаты любой точки квадрата $OTAT$ (рис. 1). Таким образом, этот квадрат можно рассматривать как фигуру G, координаты точек которой представляют все возможные значения моментов поступления сигналов.

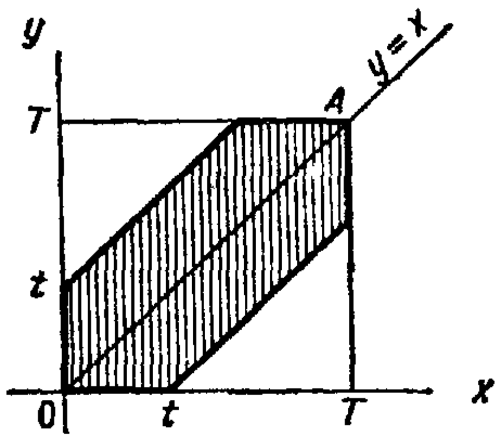

Рис. 1

Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше t, т. е. если $y-x < t$ при $y > x$ и $x-y < t$ при $x > y$, или, что то же,

$$y < x+t \quad \text{при} \quad y > x, \tag{*}$$

$$y > x-t \quad \text{при} \quad y < x. \tag{**}$$

Неравенство (*) выполняется для тех точек фигуры G, которые лежат выше прямой $y=x$ и ниже прямой $y=x+t$, неравенство (**) имеет место для точек, расположенных ниже прямой $y=x$ и выше прямой $y=x-t$.

Как видно из рис. 1, все точки, координаты которых удовлетворяют неравенствам (*) и (**), принадлежат заштрихованному шестиугольнику. Таким образом, этот шестиугольник можно рассматривать как фигуру g, координаты точек которой являются благоприятствующими моментами времени x и y.

Искомая вероятность

$$P = \text{Пл. } g/\text{Пл. } G = (T^2-(T-t)^2)/T^2 = (t\,(2T-t))/T^2.$$

Замечание 1. Приведенные определения являются частными случаями общего определения геометрической вероятности. Если обозначить меру (длину, площадь, объем) области через mes, то вероятность попадания точки, брошенной наудачу (в указанном выше смысле) в область g — часть области G, равна

$$P = \text{mes } g/\text{mes } G.$$

Замечание 2. В случае классического определения вероятность достоверного (невозможного) события равна единице (нулю); справедливы и обратные утверждения (например, если вероятность события равна нулю, то событие невозможно). В случае геометрического определения вероятности обратные утверждения не имеют места. Например, вероятность попадания брошенной точки в одну определенную точку области G равна нулю, однако это событие может произойти, и, следовательно, не является невозможным.

1. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.

Отв. $p=0,1$.

2. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное число очков.

Отв. $p=0,5$.

3. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

Отв. $p=0,81$.

4. В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных «в одну линию» кубиков можно будет прочесть слово «спорт».

Отв. $p=1/120$.

5. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, т, м, р, с, о. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех, вынутых по одной и расположенных «в одну линию» карточках можно будет прочесть слово «трос».

Отв. $p=1/A_6^4=1/360$.

6. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

Отв. а) 0,384; б) 0,096; в) 0,008.

7. Из тщательно перемешанного полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую наудачу извлеченную кость можно приставить к первой, если первая кость: а) оказалась дублем; б) не есть дубль.

Отв. а) 2/9; б) 4/9.

8. В замке на общей оси пять дисков. Каждый диск разделен на шесть секторов, на которых написаны различные буквы. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть.

Отв. $p=1/6^5$.

9. Восемь различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

Отв. $p=7\cdot 2!\cdot 6!/8!=1/4$.

10. Библиотечка состоит из десяти различных книг, причем пять книг стоят по 4 рубля каждая, три книги — по одному рублю и две книги — по 3 рубля. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 5 рублей.

Отв. $p=C_5^1\cdot C_3^1/C_{10}^2=1/3$.

11. В партии из 100 деталей отдел технического контроля обнаружил 5 нестандартных деталей. Чему равна относительная частота появления нестандартных деталей?

Отв. $w=0,05$.

12. При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов.

Отв. 102 попадания.

13. На отрезок OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, меньшую, чем $L/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

Отв. $p=2/3$.

14. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в квадрат пропорциональна площади квадрата и не зависит от его расположения относительно круга.

Отв. $p=2/\pi$.

15. Задача о встрече. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 1/4 часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).

Указание. Ввести в рассмотрение прямоугольную систему координат xOy и принять для простоты, что встреча должна состояться между 0 и 1 часами.

Отв. Возможные значения координат: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$; благоприятствующие встрече значения координат: $|y-x| \leqslant 1/4$; $P=7/16$.

Глава вторая

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Суммой $A+B$ *двух событий* A и B называют событие, состоящее в появлении события A, или события B, или обоих этих событий. Например, если из орудия произведены два выстрела и A — попадание при первом выстреле, B — попадание при втором выстреле, то $A+B$ — попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах.

В частности, если два события A и B — несовместные, то $A+B$ — событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

Суммой нескольких событий называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий. Например, событие $A+B+C$ состоит в появлении одного из следующих событий: A, B, C, A и B, A и C, B и C, A и B и C.

Пусть события A и B — несовместные, причем вероятности этих событий известны. Как найти вероятность того, что наступит либо событие A, либо событие B? Ответ на этот вопрос дает теорема сложения.

Теорема. *Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Доказательство. Введем обозначения: n — общее число возможных элементарных исходов испытания; m_1 — число исходов, благоприятствующих событию A; m_2 — число исходов, благоприятствующих событию B.

Число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению либо события A, либо события B, равно m_1+m_2. Следовательно,

$$P(A+B)=(m_1+m_2)/n=m_1/n+m_2/n.$$

Приняв во внимание, что $m_1/n=P(A)$ и $m_2/n=P(B)$, окончательно получим

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Следствие. *Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Доказательство. Рассмотрим три события: A, B и C. Так как рассматриваемые события попарно несовместны, то появление одного из трех событий, A, B и C, равносильно наступлению одного из двух событий, $A+B$ и C, поэтому в силу указанной теоремы

$$P(A+B+C)=P[(A+B)+C]=P(A+B)+P(C)=$$
$$=P(A)+P(B)+P(C).$$

Для произвольного числа попарно несовместных событий доказательство проводится методом математической индукции.

Пример 1. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара (событие A)

$$P(A)=10/30=1/3.$$

Вероятность появления синего шара (событие B)

$$P(B)=5/30=1/6.$$

События A и B несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=1/3+1/6=1/2.$$

Пример 2. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую — 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую, либо во вторую область.

Решение. События A — «стрелок попал в первую область» и B — «стрелок попал во вторую область» — несовместны (попадание в одну область исключает попадание в другую), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}45+0{,}35=0{,}80.$$

§ 2. Полная группа событий

Теорема. *Сумма вероятностей событий A_1, A_2, ..., A_n, образующих полную группу, равна единице:*

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Доказательство. Так как появление одного из событий полной группы достоверно, а вероятность достоверного события равна единице, то

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1. \qquad (*)$$

Любые два события полной группы несовместны, поэтому можно применить теорему сложения:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n). \qquad (**)$$

Сравнивая (*) и (**), получим

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Пример. Консультационный пункт института получает пакеты с контрольными работами из городов A, B и C. Вероятность получения пакета из города A равна 0,7, из города B — 0,2. Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города C.

Решение. События «пакет получен из города A», «пакет получен из города B», «пакет получен из города C» образуют полную группу, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$0,7+0,2+p=1.$$

Отсюда искомая вероятность

$$p=1-0,9=0,1.$$

§ 3. Противоположные события

Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через A, то другое принято обозначать $\overline{A}$.

Пример 1. Попадание и промах при выстреле по цели — противоположные события. Если A — попадание, то $\overline{A}$ — промах.

Пример 2. Из ящика наудачу взята деталь. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» — противоположные.

Теорема. *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:*

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Доказательство. Противоположные события образуют полную группу, а сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице (см. § 2).

Замечание 1. Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через p, то вероятность другого события обозначают через q. Таким образом, в силу предыдущей теоремы

$$p+q=1.$$

Пример 3. Вероятность того, что день будет дождливым, $p=0,7$. Найти вероятность того, что день будет ясным.

Решение. События «день дождливый» и «день ясный» — противоположные, поэтому искомая вероятность

$$q=1-p=1-0,7=0,3.$$

Замечание 2. При решении задач на отыскание вероятности события A часто выгодно сначала вычислить вероятность события $\overline{A}$, а затем найти искомую вероятность по формуле

$$P(A)=1-P(\overline{A}).$$

Пример 4. В ящике имеется n деталей, из которых m стандартных. Найти вероятность того, что среди k наудачу извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная.

Решение. События «среди извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная» и «среди извлеченных деталей нет ни одной стандартной» — противоположные. Обозначим первое событие через A, а второе — через $\overline{A}$.

Очевидно,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Найдем $P(\overline{A})$. Общее число способов, которыми можно извлечь k деталей из n деталей, равно C_n^k. Число нестандартных деталей равно $n-m$; из этого числа деталей можно C_{n-m}^k способами извлечь k нестандартных деталей. Поэтому вероятность того, что среди извлеченных k деталей нет ни одной стандартной, равна $P(\overline{A}) = C_{n-m}^k / C_n^k$.

Искомая вероятность

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - C_{n-m}^k / C_n^k.$$

§ 4. Принцип практической невозможности маловероятных событий

При решении многих практических задач приходится иметь дело с событиями, вероятность которых весьма мала, т. е. близка к нулю. Можно ли считать, что маловероятное событие A в единичном испытании не произойдет? Такого заключения сделать нельзя, так как не исключено, хотя и мало вероятно, что событие A наступит.

Казалось бы, появление или непоявление маловероятного события в единичном испытании предсказать невозможно. Однако длительный опыт показывает, что маловероятное событие в единичном испытании в подавляющем большинстве случаев не наступает. На основании этого факта принимают следующий «принцип практической невозможности маловероятных событий»: *если случайное событие имеет очень малую вероятность, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие не наступит.*

Естественно возникает вопрос: насколько малой должна быть вероятность события, чтобы можно было считать невозможным его появление в одном испытании? На этот вопрос нельзя ответить однозначно. Для задач, различных по существу, ответы разные. Например, если вероятность того, что парашют при прыжке не раскроется, равна 0,01, то было бы недопустимым применять такие парашюты. Если же вероятность того, что поезд дальнего следования прибудет с опозданием, равна 0,01, то можно практически быть уверенным, что поезд прибудет вовремя.

Достаточно малую вероятность, при которой (в данной определенной задаче) событие можно считать практически невозможным, называют *уровнем значимости*. На практике обычно принимают уровни значимости, заключенные между 0,01 и 0,05. Уровень значимости, равный 0,01, называют однопроцентным; уровень значимости, равный 0,02, называют двухпроцентным, и т. д.

Подчеркнем, что рассмотренный здесь принцип позволяет делать предсказания не только о событиях, имеющих малую вероятность, но и о событиях, вероятность которых близка к единице. Действительно, если событие A имеет вероятность, близкую к нулю, то вероятность противоположного события $\overline{A}$ близка к единице. С другой стороны, непоявление события A означает наступление противоположного события $\overline{A}$. Таким образом, из принципа невозможности маловероятных событий вытекает следующее важное для приложений следствие: *если случайное событие имеет вероятность, очень близкую к единице, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие наступит*. Разумеется, и здесь ответ на вопрос о том, какую вероятность считать близкой к единице, зависит от существа задачи.

Задачи

1. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10 000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша, безразлично денежного или вещевого, для владельца одного лотерейного билета?

Отв. $p=0{,}02$.

2. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; вероятность выбить 9 очков равна 0,3; вероятность выбить 8 или меньше очков равна 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.

Отв. $p=0{,}4$.

3. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 2 деталей есть хотя бы одна стандартная.

Отв. $p=44/45$.

4. В ящике 10 деталей, среди которых 2 нестандартных. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных 6 деталях окажется не более одной нестандартной детали.

Отв. $p=2/3$.

Указание. Если A — нет ни одной нестандартной детали, B — есть одна нестандартная деталь, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=C_8^6/C_{10}^6+C_2^1\cdot C_8^5/C_{10}^6.$$

5. События A, B, C и D образуют полную группу. Вероятности событий таковы: $P(A)=0{,}1$; $P(B)=0{,}4$; $P(C)=0{,}3$. Чему равна вероятность события D?

Отв. $P(D)=0{,}2$.

6. По статистическим данным ремонтной мастерской, в среднем на 20 остановок токарного станка приходится: 10—для смены резца; 3—из-за неисправности привода; 2—из-за несвоевременной подачи заготовок. Остальные остановки происходят по другим причинам. Найти вероятность остановки станка по другим причинам.

Отв. $p=0{,}25$.

Глава третья

ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Произведение событий

Произведением двух событий A и B называют событие AB, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий. Например, если A—деталь годная, B—деталь окрашенная, то AB—деталь годна и окрашена.

Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. Например, если A, B, C—появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросаниях монеты, то ABC — выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

§ 2. Условная вероятность

Во введении случайное событие определено как событие, которое при осуществлении совокупности условий S может произойти или не произойти. Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме условий S, не налагается, то такую вероятность называют *безусловной*; если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность события называют *условной*. Например, часто вычисляют вероятность события B при дополнительном условии, что произошло событие A. Заметим, что и безусловная вероятность, строго говоря, является условной, поскольку предполагается осуществление условий S.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Пример. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие A).

Решение. После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомая условная вероятность

$$P_A(B) = 3/5.$$

Этот же результат можно получить по формуле

$$P_A(B) = P(AB)/P(A) \qquad (P(A) > 0). \qquad (*)$$

Действительно, вероятность появления белого шара при первом испытании

$$P(A) = 3/6 = 1/2.$$

Найдем вероятность $P(AB)$ того, что в первом испытании появится черный шар, а во втором — белый. Общее число исходов — совместного появления двух шаров, безразлично какого цвета, равно числу размещений $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$. Из этого числа исходов событию AB благоприятствуют $3 \cdot 3 = 9$ исходов. Следовательно,

$$P(AB) = 9/30 = 3/10.$$

Искомая условная вероятность

$$P_A(B) = P(AB)/P(A) = (3/10)/(1/2) = 3/5.$$

Как видим, получен прежний результат.

Исходя из классического определения вероятности, формулу (*) можно доказать. Это обстоятельство и служит основанием для следующего общего (применимого не только для классической вероятности) определения.

Условная вероятность события B при условии, что событие A уже наступило, по определению, равна

$$P_A(B) = P(AB)/P(A) \qquad (P(A) > 0).$$

§ 3. Теорема умножения вероятностей

Рассмотрим два события: A и B; пусть вероятности $P(A)$ и $P_A(B)$ известны. Как найти вероятность совмещения этих событий, т. е. вероятность того, что появится и событие A и событие B? Ответ на этот вопрос дает теорема умножения.

Теорема. *Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB) = P(A)\,P_A(B).$$

Доказательство. По определению условной вероятности,

$$P_A(B) = P(AB)/P(A).$$

Отсюда

$$P(AB)=P(A)\,P_A(B). \qquad (*)$$

Замечание. Применив формулу (*) к событию BA, получим

$$P(BA)=P(B)\,P_B(A),$$

или, поскольку событие BA не отличается от события AB,

$$P(AB)=P(B)\,P_B(A). \qquad (**)$$

Сравнивая формулы (*) и (**), заключаем о справедливости равенства

$$P(A)\,P_A(B)=P(B)\,P_B(A). \qquad (***)$$

Следствие. *Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:*

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n)=P(A_1)\,P_{A_1}(A_2)\,P_{A_1A_2}(A_3)\ldots$$
$$\ldots P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n),$$

где $P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$ — вероятность события A_n, вычисленная в предположении, что события $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ наступили. В частности, для трех событий

$$P(ABC)=P(A)\,P_A(B)\,P_{AB}(C).$$

Заметим, что порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым, т. е. безразлично какое событие считать первым, вторым и т. д.

Пример 1. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков — конусный, а второй — эллиптический.

Решение. Вероятность того, что первый валик окажется конусным (событие A),

$$P(A)=3/10.$$

Вероятность того, что второй валик окажется эллиптическим (событие B), вычисленная в предположении, что первый валик — конусный, т. е. условная вероятность

$$P_A(B)=7/9.$$

По теореме умножения, искомая вероятность

$$P(AB)=P(A)\,P_A(B)=(3/10)\cdot(7/9)=7/30.$$

Заметим, что, сохранив обозначения, легко найдем: $P(B)=7/10$, $P_B(A)=3/9$, $P(B)\,P_B(A)=7/30$, что наглядно иллюстрирует справедливость равенства (***).

Пример 2. В урне 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие A), при втором — черный (событие B) и при третьем — синий (событие C).

Решение. Вероятность появления белого шара в первом испытании

$$P(A) = 5/12.$$

Вероятность появления черного шара во втором испытании, вычисленная в предположении, что в первом испытании появился белый шар, т. е. условная вероятность

$$P_A(B) = 4/11.$$

Вероятность появления синего шара в третьем испытании, вычисленная в предположении, что в первом испытании появился белый шар, а во втором — черный, т. е. условная вероятность

$$P_{AB}(C) = 3/10.$$

Искомая вероятность

$$P(ABC) = P(A)\,P_A(B)\,P_{AB}(C) = (5/12)\cdot(4/11)\cdot(3/10) = 1/22.$$

§ 4. Независимые события. Теорема умножения для независимых событий

Пусть вероятность события B не зависит от появления события A.

Событие B называют независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятности события B, т. е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности:

$$P_A(B) = P(B). \qquad (*)$$

Подставив (*) в соотношение (***) предыдущего параграфа, получим

$$P(A)\,P(B) = P(B)\,P_B(A).$$

Отсюда

$$P_B(A) = P(A),$$

т. е. условная вероятность события A в предположении, что наступило событие B, равна его безусловной вероятности. Другими словами, событие A не зависит от события B.

Итак, если событие B не зависит от события A, то и событие A не зависит от события B; это означает, что свойство независимости событий взаимно.

Для независимых событий теорема умножения $P(AB)=P(A)\,P_A(B)$ имеет вид

$$P(AB)=P(A)\,P(B), \qquad (**)$$

т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Равенство (**) принимают в качестве определения независимых событий.

Два события называют независимыми, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют *зависимыми*.

На практике о независимости событий заключают по смыслу задачи. Например, вероятности поражения цели каждым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события «первое орудие поразило цель» и «второе орудие поразило цель» независимы.

Пример 1. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие A) равна 0,8, а вторым (событие B) — 0,7.

Решение. События A и B независимые, поэтому, по теореме умножения, искомая вероятность

$$P(AB)=P(A)\,P(B)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56.$$

Замечание 1. Если события A и B независимы, то независимы также события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Действительно,

$$A=A\overline{B}+AB.$$

Следовательно,

$$P(A)=P(A\overline{B})+P(AB), \text{ или } P(A)=P(A\overline{B})+P(A)\,P(B).$$

Отсюда

$$P(A\overline{B})=P(A)\,[1-P(B)], \text{ или } P(A\overline{B})=P(A)\,P(\overline{B}),$$

т. е. события A и B независимы.

Независимость событий $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — следствие доказанного утверждения.

Несколько событий называют попарно независимыми, если каждые два из них независимы. Например, события A, B, C попарно независимы, если независимы события A и B, A и C, B и C.

Для того чтобы обобщить теорему умножения на несколько событий, введем понятие независимости событий в совокупности.

Несколько событий называют независимыми в совокупности (или просто *независимыми*), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных. Например, если события A_1, A_2, A_3 независимы в совокупности, то независимы события A_1 и A_2, A_1 и A_3, A_2 и A_3; A_1 и A_2A_3, A_2 и A_1A_3, A_3 и A_1A_2. Из сказанного следует, что если события независимы в совокупности, то условная вероятность появления любого события из них, вычисленная в предположении, что наступили какие-либо другие события из числа остальных, равна его безусловной вероятности.

Подчеркнем, что если несколько событий независимы попарно, то отсюда еще не следует их независимость в совокупности. В этом смысле требование независимости событий в совокупности сильнее требования их попарной независимости.

Поясним сказанное на примере. Пусть в урне имеется 4 шара, окрашенные: один — в красный цвет (A), один — в синий цвет (B), один — в черный цвет (C) и один — во все эти три цвета (ABC). Чему равна вероятность того, что извлеченный из урны шар имеет красный цвет?

Так как из четырех шаров два имеют красный цвет, то $P(A) = 2/4 = 1/2$. Рассуждая аналогично, найдем $P(B) = 1/2$, $P(C) = 1/2$. Допустим теперь, что взятый шар имеет синий цвет, т. е. событие B уже произошло. Изменится ли вероятность того, что извлеченный шар имеет красный цвет, т. е. изменится ли вероятность события A? Из двух шаров, имеющих синий цвет, один шар имеет и красный цвет, поэтому вероятность события A по-прежнему равна 1/2. Другими словами, условная вероятность события A, вычисленная в предположении, что наступило событие B, равна его безусловной вероятности. Следовательно, события A и B независимы. Аналогично придем к выводу, что события A и C, B и C независимы. Итак, события A, B и C попарно независимы.

Независимы ли эти события в совокупности? Оказывается, нет. Действительно, пусть извлеченный шар имеет два цвета, например синий и черный. Чему равна вероятность того, что этот шар имеет и красный цвет? Лишь один шар окрашен во все три цвета, поэтому взятый шар имеет и красный цвет. Таким образом, допустив, что события B и C произошли, приходим к выводу, что событие A обязательно наступит. Следовательно, это событие достоверное и вероятность его равна единице. Другими словами, условная вероятность $P_{BC}(A)=1$ события A не равна его безусловной вероятности $P(A)=1/2$. Итак, попарно независимые события A, B, C не являются независимыми в совокупности.

Приведем теперь следствие из теоремы умножения.

Следствие. *Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(A_1A_2\dots A_n)=P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n).$$

Доказательство. Рассмотрим три события: A, B и C. Совмещение событий A, B и C равносильно совмещению событий AB и C, поэтому

$$P(ABC)=P(AB\cdot C).$$

Так как события A, B и C независимы в совокупности, то независимы, в частности, события AB и C, а также A и B. По теореме умножения для двух независимых событий имеем:

$$P(AB\cdot C)=P(AB)P(C) \text{ и } P(AB)=P(A)P(B).$$

Итак, окончательно получим

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

Для произвольного n доказательство проводится методом математической индукции.

Замечание. Если события A_1, A_2, ..., A_n независимы в совокупности, то и противоположные им события $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, ..., $\bar{A}_n$ также независимы в совокупности.

Пример 2. Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

Решение. Вероятность появления герба первой монеты (событие A)

$$P(A)=1/2.$$

Вероятность появления герба второй монеты (событие B)

$$P(B)=1/2.$$

События A и B независимые, поэтому искомая вероятность по теореме умножения равна

$$P(AB)=P(A)P(B)=1/2\cdot 1/2=1/4.$$

Пример 3. Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение. Вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие A),

$$P(A)=8/10=0{,}8.$$

Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие B),

$$P(B)=7/10=0{,}7.$$

Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие C),

$$P(C)=9/10=0{,}9.$$

Так как события A, B и C независимые в совокупности, то искомая вероятность (по теореме умножения) равна

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}504.$$

Приведем пример совместного применения теорем сложения и умножения.

Пример 4. Вероятности появления каждого из трех независимых событий A_1, A_2, A_3 соответственно равны p_1, p_2, p_3. Найти вероятность появления только одного из этих событий.

Решение. Заметим, что, например, появление только первого события A_1 равносильно появлению события $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ (появилось первое и не появились второе и третье события). Введем обозначения:

B_1 — появилось только событие A_1, т. е. $B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$;

B_2 — появилось только событие A_2, т. е. $B_2=A_2\overline{A}_1\overline{A}_3$;

B_3 — появилось только событие A_3, т. е. $B_3=A_3\overline{A}_1\overline{A}_2$.

Таким образом, чтобы найти вероятность появления только одного из событий A_1, A_2, A_3, будем искать вероятность $P(B_1+B_2+B_3)$ появления одного, безразлично какого из событий B_1, B_2, B_3.

Так как события B_1, B_2, B_3 несовместны, то применима теорема сложения

$$P(B_1+B_2+B_3)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3). \qquad (*)$$

Остается найти вероятности каждого из событий B_1, B_2, B_3.

События A_1, A_2, A_3 независимы, следовательно, независимы события A_1, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, поэтому к ним применима теорема умножения

$$P(B_1)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=p_1q_2q_3.$$

Аналогично,

$$P(B_2)=P(A_2\overline{A}_1\overline{A}_3)=P(A_2)P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_3)=p_2q_1q_3;$$

$$P(B_3)=P(A_3\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(A_3)P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)=p_3q_1q_2.$$

Подставив эти вероятности в (*), найдем искомую вероятность появления только одного из событий A_1, A_2, A_3:

$$P(B_1+B_2+B_3)=p_1q_2q_3+p_2q_1q_3+p_3q_1q_2.$$

§ 5. Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть в результате испытания могут появиться n событий, независимых в совокупности, либо некоторые из них (в частности, только одно или ни одного), причем вероятности появления каждого из событий известны. Как найти вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий? Например, если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из этих событий означает наступление либо одного, либо двух, либо трех событий. Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из событий A_1, A_2, ..., A_n, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ..., $\overline{A}_n$:*

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n. \qquad (*)$$

Доказательство. Обозначим через A событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A_1, A_2, ..., A_n. События A и $\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n$ (ни одно из событий не наступило) противоположны, следовательно, сумма их вероятностей равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n) = 1.$$

Отсюда, пользуясь теоремой умножения, получим

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n) = 1 - P(\overline{A}_1)\,P(\overline{A}_2) \ldots P(\overline{A}_n),$$

или

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n.$$

Частный случай. *Если события A_1, A_2, ..., A_n имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий*

$$P(A) = 1 - q^n. \qquad (**)$$

Пример 1. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: $p_1 = 0,8$; $p_2 = 0,7$; $p_3 = 0,9$. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие A) при одном залпе из всех орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1 (попадание первого орудия), A_2 (попадание второго орудия) и A_3 (попадание третьего орудия) независимы в совокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2 и A_3 (т. е. вероятности промахов), соответственно равны:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,8 = 0,2; \quad q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,7 = 0,3;$$
$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0,9 = 0,1.$$

Искомая вероятность

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,994.$$

Пример 2. В типографии имеется 4 плоскопечатных машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина (событие A).

Решение. События «машина работает» и «машина не работает» (в данный момент) — противоположные, поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$$p+q=1.$$

Отсюда вероятность того, что машина в данный момент не работает, равна

$$q=1-p=1-0,9=0,1.$$

Искомая вероятность

$$P(A)=1-q^4=1-0,1^4=0,9999.$$

Так как полученная вероятность весьма близка к единице, то на основании следствия из принципа практической невозможности маловероятных событий мы вправе заключить, что в данный момент работает хотя бы одна из машин.

Пример 3. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в цель, равна 0,4. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,9 он попал в цель хотя бы один раз?

Решение. Обозначим через A событие «при n выстрелах стрелок попадает в цель хотя бы один раз». События, состоящие в попадании в цель при первом, втором выстрелах и т. д., независимы в совокупности, поэтому применима формула (**)

$$P(A)=1-q^n.$$

Приняв во внимание, что, по условию, $P(A)\geqslant 0,9$, $p=0,4$ (следовательно, $q=1-0,4=0,6$), получим

$$1-0,6^n\geqslant 0,9; \text{ отсюда } 0,6^n\leqslant 0,1.$$

Прологарифмируем это неравенство по основанию 10:

$$n\lg 0,6\leqslant \lg 0,1.$$

Отсюда, учитывая, что $\lg 0,6<0$, имеем

$$n\geqslant \lg 0,1/\lg 0,6=-1/\bar{1},7782=-1/(-0,22\bar{1}8)=4,5.$$

Итак, $n\geqslant 5$, т. е. стрелок должен произвести не менее 5 выстрелов.

Пример 4. Вероятность того, что событие появится хотя бы один раз в трех независимых в совокупности испытаниях, равна 0,936. Найти вероятность появления события в одном испытании (предполагается, что во всех испытаниях вероятность появления события одна и та же).

Решение. Так как рассматриваемые события независимы в совокупности, то применима формула (**)

$$P(A)=1-q^n.$$

По условию, $P(A)=0{,}936$; $n=3$. Следовательно,

$$0{,}936=1-q^3, \text{ или } q^3=1-0{,}936=0{,}064.$$

Отсюда $q=\sqrt[3]{0{,}064}=0{,}4$.

Искомая вероятность

$$p=1-q=1-0{,}4=0{,}6.$$

Задачи

1. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает в мишень, равна $p=0{,}9$. Стрелок произвел 3 выстрела. Найти вероятность того, что все 3 выстрела дали попадание.

Отв. 0,729.

2. Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения событий: «появился «герб», «появилось 6 очков».

Отв. 1/12.

3. В двух ящиках находятся детали: в первом — 10 (из них 3 стандартных), во втором — 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Отв. 0,12.

4. В студии телевидения 3 телевизионных камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна $p=0{,}6$. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера (событие А).

Отв. 0,936.

5. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей (событие A)?

Отв. 91/216.

6. Предприятие изготовляет 95% изделий стандартных, причем из них 86% — первого сорта. Найти вероятность того, что взятое наудачу изделие, изготовленное на этом предприятии, окажется первого сорта.

Отв. 0,817.

7. Монета бросается до тех пор, пока 2 раза подряд она не выпадет одной и той же стороной. Найти вероятности следующих событий: а) опыт окончится до шестого бросания; б) потребуется четное число бросаний.

Отв. а) 15/16; б) 2/3.

8. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сначала выбирается одна, а затем из оставшихся четырех — вторая цифра. Предполагается, что все 20 возможных исходов равновероятны. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: а) в первый раз; б) во второй раз; в) в оба раза.

Отв. а) 3/5; б) 3/5; в) 3/10.

9. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет в десятку, равна 0,6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,8 он попал в десятку хотя бы один раз?

Отв. $n\geqslant 2$.

10. Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, если напряжение в сети превысит номинальное, равна 0,6. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет.

Отв. 0,936.

11. Вероятность того, что событие A появится хотя бы один раз при двух независимых испытаниях, равна 0,75. Найти вероятность появления события в одном испытании (предполагается, что вероятность появления события в обоих испытаниях одна и та же).

Отв. 0,5.

12. Три команды A_1, A_2, A_3 спортивного общества A состязаются соответственно с тремя командами общества B. Вероятности того, что команды общества A выиграют матчи у команд общества B, таковы: при встрече A_1 с B_1 — 0,8; A_2 с B_2 — 0,4; A_3 с B_3 — 0,4. Для победы необходимо выиграть не менее двух матчей из трех (ничьи во внимание не принимаются). Победа какого из обществ вероятнее?

Отв. Общества A ($P_A = 0{,}544 > 1/2$).

13. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, а вторым стрелком — 0,6. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком.

Отв. 0,44.

14. Из последовательности чисел 1, 2, ..., n наудачу одно за другим выбираются два числа. Найти вероятность того, что одно из них меньше целого положительного числа k, а другое больше k, где $1 < k < n$.

Отв. $[2[k-1)(n-k)]/[n(n-1)]$.

Указание. Сделать допущения: а) первое число $<k$, а второе $> k$; б) первое число $> k$, а второе $< k$.

15. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,1. Найти вероятность того, что: а) из трех проверенных изделий только одно окажется нестандартным; б) нестандартным окажется только четвертое по порядку проверенное изделие.

Отв. а) 0,243; б) 0,0729.

Глава четвертая

СЛЕДСТВИЯ ТЕОРЕМ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

§ 1. Теорема сложения вероятностей совместных событий

Была рассмотрена теорема сложения для несовместных событий. Здесь будет изложена теорема сложения для совместных событий.

Два события называют *совместными*, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Пример 1. A — появление четырех очков при бросании игральной кости; B — появление четного числа очков. События A и B — совместные.

Пусть события A и B совместны, причем даны вероятности этих событий и вероятность их совместного появления. Как найти вероятность события $A+B$, состоящего в том, что появится хотя бы одно из событий A и B? Ответ на этот вопрос дает теорема сложения вероятностей совместных событий.

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Доказательство. Поскольку события A и B, по условию, совместны, то событие $A+B$ наступит, если наступит одно из следующих трех несовместных событий: $A\overline{B}$, $\overline{A}B$ или AB. По теореме сложения вероятностей несовместных событий,

$$P(A+B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB). \qquad (*)$$

Событие A произойдет, если наступит одно из двух несовместных событий: $A\overline{B}$ или AB. По теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем

$$P(A)=P(A\overline{B})+P(AB).$$

Отсюда

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB). \qquad (**)$$

Аналогично имеем

$$P(B)=P(\overline{A}B)+P(AB).$$

Отсюда

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB). \qquad (***)$$

Подставив (**) и (***) в (*), окончательно получим

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (****)$$

Замечание 1. При использовании полученной формулы следует иметь в виду, что события A и B могут быть как независимыми, так и зависимыми.

Для независимых событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B);$$

для зависимых событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P_A(B).$$

Замечание 2. Если события A и B несовместны, то их совмещение есть невозможное событие и, следовательно, $P(AB)=0$. Формула (****) для несовместных событий принимает вид

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Мы вновь получили теорему сложения для несовместных событий. Таким образом, формула (****) справедлива как для совместных, так и для несовместных событий.

Пример 2. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: $p_1=0{,}7$; $p_2=0{,}8$. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результата стрельбы из другого орудия, поэтому события A (попадание первого орудия) и B (попадание второго орудия) независимы.

Вероятность события AB (оба орудия дали попадание)

$$P(AB)=P(A)\,P(B)=0,7\cdot 0,8=0,56.$$

Искомая вероятность

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,7+0,8-0,56=0,94.$$

Замечание 3. Так как в настоящем примере события A и B независимые, то можно было воспользоваться формулой $P=1-q_1q_2$ (см. гл. III, § 5). В самом деле, вероятности событий, противоположных событиям A и B, т. е. вероятности промахов, таковы:

$$q_1=1-p_1=1-0,7=0,3;\quad q_2=1-p_2=1-0,8=0,2.$$

Искомая вероятность того, что при одном залпе хотя бы одно орудие даст попадание, равна

$$P=1-q_1q_2=1-0,3\cdot 0.2=0,94.$$

Как и следовало ожидать, получен тот же результат.

§ 2. Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности $P_{B_1}(A)$, $P_{B_2}(A)$, ..., $P_{B_n}(A)$ события A. Как найти вероятность события A? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:*

$$P(A)=P(B_1)\,P_{B_1}(A)+P(B_2)\,P_{B_2}(A)+\ldots$$
$$\ldots+P(B_n)\,P_{B_n}(A).$$

Эту формулу называют «формулой полной вероятности».

Доказательство. По условию, событие A может наступить, если наступит одно из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Другими словами, появление события A означает осуществление одного, безразлично какого, из несовместных событий B_1A, B_2A, ..., B_nA. Пользуясь для вычисления вероятности события A теоремой сложения, получим

$$P(A)=P(B_1A)+P(B_2A)+\ldots+P(B_nA). \qquad (*)$$

Остается вычислить каждое из слагаемых. По теореме умножения вероятностей зависимых событий имеем

$$P(B_1A)=P(B_1)P_{B_1}(A);\ P(B_2A)=P(B_2)P_{B_2}(A);\ \ldots;\ P(B_nA)=P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Подставив правые части этих равенств в соотношение (*), получим формулу полной вероятности

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Пример 1. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго — 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) — стандартная.

Решение. Обозначим через A событие «извлеченная деталь стандартна».

Деталь может быть извлечена либо из первого набора (событие B_1), либо из второго (событие B_2).

Вероятность того, что деталь вынута из первого набора, $P(B_1)=1/2$.

Вероятность того, что деталь вынута из второго набора, $P(B_2)=1/2$.

Условная вероятность того, что из первого набора будет извлечена стандартная деталь, $P_{B_1}(A)=0,8$.

Условная вероятность того, что из второго набора будет извлечена стандартная деталь, $P_{B_2}(A)=0,9$.

Искомая вероятность того, что извлеченная наудачу деталь — стандартная, по формуле полной вероятности равна

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)=$$
$$=0,5\cdot 0,8+0,5\cdot 0,9=0,85.$$

Пример 2. В первой коробке содержится 20 радиоламп, из них 18 стандартных; во второй коробке — 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.

Решение. Обозначим через A событие «из первой коробки извлечена стандартная лампа».

Из второй коробки могла быть извлечена либо стандартная лампа (событие B_1), либо нестандартная (событие B_2).

Вероятность того, что из второй коробки извлечена стандартная лампа, $P(B_1)=9/10$.

Вероятность того, что из второй коробки извлечена нестандартная лампа, $P(B_2)=1/10$.

Условиая вероятность того, что из первой коробки извлечеиа стандартная лампа, при условии, что из второй коробки в первую была переложена стандартная лампа, равна $P_{B_1}(A)=19/21$.

Условная вероятность того, что из первой коробки извлечеиа стандартиая лампа, при условии, что из второй коробки в первую была переложена нестандартная лампа, равна $P_{B_2}(A)=18/21$.

Искомая вероятность того, что из первой коробки будет извлечена стандартиая лампа, по формуле полной вероятности равна

$$P(A)=P(B_1)\,P_{B_1}(A)+P(B_2)\,P_{B_2}(A)=(9/10)\cdot(19/21)+$$
$$+(1/10)\cdot(18/21)=0{,}9.$$

§ 3. Вероятность гипотез. Формулы Бейеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу. Поскольку заранее не известно, какое из этих событий наступит, их называют *гипотезами*. Вероятность появления события A определяется по формуле полной вероятности (см. § 2):

$$P(A)=P(B_1)\,P_{B_1}(A)+P(B_2)\,P_{B_2}(A)+\ldots$$
$$\ldots+P(B_n)\,P_{B_n}(A). \qquad (*)$$

Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие A. Поставим своей задачей определить, как изменились (в связи с тем, что событие A уже наступило) вероятности гипотез. Другими словами, будем искать условные вероятности

$$P_A(B_1),\ P_A(B_2),\ \ldots,\ P_A(B_n).$$

Найдем сначала условную вероятность $P_A(B_1)$. По теореме умножения имеем

$$P(AB_1)=P(A)\,P_A(B_1)=P(B_1)\,P_{B_1}(A).$$

Отсюда

$$P_A'(B_1)=\frac{P(B_1)\,P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

Заменив здесь $P(A)$ по формуле (*), получим

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\,P_{B_1}(A)}{P(B_1)\,P_{B_1}(A)+P(B_2)\,P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)\,P_{H_n}(A)}.$$

Аналогично выводятся формулы, определяющие условные вероятности остальных гипотез, т. е. условная вероятность любой гипотезы B_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ может быть вычислена по формуле

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\,P_{B_i}(A)}{P(B_1)\,P_{B_1}(A)+P(B_2)\,P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)\,P_{B_n}(A)}.$$

Полученные формулы называют *формулами Бейеса* (по имени английского математика, который их вывел; опубликованы в 1764 г.). *Формулы Бейеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A.*

Пример. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму — 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым — 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что годная деталь признана стандартной. Можно сделать два предположения:

1) деталь проверил первый контролер (гипотеза B_1);

2) деталь проверил второй контролер (гипотеза B_2).

Искомую вероятность того, что деталь проверил первый контролер, найдем по формуле Бейеса:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\,P_{B_1}(A)}{P(B_1)\,P_{B_1}(A)+P(B_2)\,P_{B_2}(A)}.$$

По условию задачи имеем:

$P(B_1)=0{,}6$ (вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру);

$P(B_2)=0{,}4$ (вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру);

$P_{B_1}(A)=0{,}94$ (вероятность того, что годная деталь будет признана первым контролером стандартной);

$P_{B_2}(A)=0{,}98$ (вероятность того, что годная деталь будет признана вторым контролером стандартной).

Искомая вероятность

$$P_A(B_1)=(0{,}6\cdot 0{,}94)/(0{,}6\cdot 0{,}94+0{,}4\cdot 0{,}98)\approx 0{,}59.$$

Как видно, до испытания вероятность гипотезы B_1 равнялась 0,6, а после того, как стал известен результат испытания, вероятность этой гипотезы (точнее, условная вероятность) изменилась и стала равной 0,59. Таким образом, использование формулы Бейеса позволило переоценить вероятность рассматриваемой гипотезы.

Задачи

1. Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,7, а вторым — 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попал в мишень.

Отв. 0,88.

2. У сборщика имеется 16 деталей, изготовленных заводом № 1, и 4 детали завода № 2. Наудачу взяты 2 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется изготовленной заводом № 1.

Отв. 92/95.

3. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника — 0,9, для велосипедиста — 0,8 и для бегуна — 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму.

Отв. 0,86.

4. Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных заводом № 1, и 2 коробки деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартна, равна 0,8, а завода № 2 — 0,9. Сборщик наудачу извлек деталь из наудачу взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь.

Отв. 0,84.

5. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором — 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем — 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика — стандартная.

Отв. 43/60.

6. В телевизионном ателье имеется 4 кинескопа. Вероятности того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, соответственно равны 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что взятый наудачу кинескоп выдержит гарантийный срок службы.

Отв. 0,875.

7. В двух ящиках имеются радиолампы. В первом ящике содержится 12 ламп, из них 1 нестандартная; во втором 10 ламп, из них 1 нестандартная. Из первого ящика наудачу взята лампа и переложена во второй. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная из второго ящика лампа будет нестандартной.

Отв. 13/132.

8. Из полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую извлеченную наудачу кость можно приставить к первой.

Отв. 7/18.

9. Студент знает не все экзаменационные билеты. В каком случае вероятность вытащить неизвестный билет будет для него наименьшей: когда он берет билет первым или последним?

Отв. Вероятности одинаковы в обоих случаях.

10. В ящик, содержащий 3 одинаковых детали, брошена стандартная деталь, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь, если равновероятны все возможные предположения о числе стандартных деталей, первоначально находящихся в ящике.

Отв. 0,625.

11. При отклонении от нормального режима работы автомата срабатывает сигнализатор С-I с вероятностью 0,8, а сигнализатор С-II срабатывает с вероятностью 1. Вероятности того, что автомат снабжен сигнализатором С-I или С-II, соответственно равны 0,6 и 0,4. Получен сигнал о разделке автомата. Что вероятнее: автомат снабжен сигнализатором С-I или С-II?

Отв. Вероятность того, что автомат снабжен сигнализатором С-I, равна 6/11, а С-II — 5/11.

12. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы курса 4, из второй — 6, из третьей группы — 5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей группы попадает в сборную института, соответственно равны 0,9; 0,7 и 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот студент?

Отв. Вероятности того, что выбран студент первой, второй, третьей групп, соответственно равны: 18/59, 21/59, 20/59.

13. Вероятность для изделий некоторого производства удовлетворять стандарту равна 0,96. Предлагается упрощенная система проверки на стандартность, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, а для изделий, которые не удовлетворяют стандарту, — с вероятностью 0,05. Найти вероятность того, что изделие, признанное при проверке стандартным, действительно удовлетворяет стандарту.

Отв. 0,998.

Глава пятая

ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ

§ 1. Формула Бернулли

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события A*.

В разных независимых испытаниях событие A может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие A имеет одну и ту же вероятность.

Ниже воспользуемся понятием *сложного события*, понимая под ним совмещение нескольких отдельных событий, которые называют *простыми*.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Условимся считать, что вероятность события A в каждом испытании одна и та же, а именно равна p. Следовательно, вероятность ненаступления события A в каждом испытании также постоянна и равна $q=1-p$.

Поставим перед собой задачу вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз и, следовательно, не осуществится $n-k$ раз. Важно подчеркнуть, что не требуется, чтобы событие A повторилось ровно k раз в определенной последовательности. Например, если речь идет о появлении события A три раза в четырех испытаниях, то возможны следующие сложные события: $AAA\bar{A}$, $AA\bar{A}A$, $A\bar{A}AA$, $\bar{A}AAA$. Запись

[illegible]

$AAA\bar{A}$ означает, что в первом, втором и третьем испы-

[illegible]

§ 2. Локальная теорема Лапласа

Выше была выведена формула Бернулли, позволяющая вычислить вероятность того, что событие появится в n испытаниях ровно k раз. При выводе мы предполагали, что вероятность появления события в каждом испытании постоянна. Легко видеть, что пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над громадными числами. Например, если $n=50$, $k=30$, $p=0{,}1$, то для отыскания вероятности $P_{50}(30)$ надо вычислить выражение $P_{50}(30)=50!/(30!20!)\cdot(0{,}1)^{30}\cdot(0{,}9)^{20}$, где $50!=30\,414\,093\cdot10^{57}$, $30!=26\,525\,286\cdot10^{25}$, $20!=$ $=24\,329\,020\cdot10^{11}$. Правда, можно несколько упростить вычисления, пользуясь специальными таблицами логарифмов факториалов. Однако и этот путь остается громоздким и к тому же имеет существенный недостаток: таблицы содержат приближенные значения логарифмов, поэтому в процессе вычислений накапливаются погрешности; в итоге окончательный результат может значительно отличаться от истинного.

Естественно возникает вопрос: нельзя ли вычислить интересующую нас вероятность, не прибегая к формуле Бернулли? Оказывается, можно. Локальная теорема Лапласа и дает асимптотическую*) формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно k раз в n испытаниях, если число испытаний достаточно велико.

Заметим, что для частного случая, а именно для $p=1/2$, асимптотическая формула была найдена в 1730 г. Муавром; в 1783 г. Лаплас обобщил формулу Муавра для произвольного p, отличного от 0 и 1. Поэтому теорему, о которой здесь идет речь, иногда называют *теоремой Муавра—Лапласа.*

Доказательство локальной теоремы Лапласа довольно сложно, поэтому мы приведем лишь формулировку теоремы и примеры, иллюстрирующие ее использование.

Локальная теорема Лапласа. *Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того,*

---

*) Функцию $\varphi(x)$ называют асимптотическим приближением функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=1$.

что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции

$$y=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x)$$

при $x=(k-np)/\sqrt{npq}$.

Имеются таблицы, в которых помещены значения функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, соответствующие положительным значениям аргумента x (см. приложение 1). Для отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, так как функция $\varphi(x)$ четна, т. е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Итак, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),$$

где $x=(k-np)/\sqrt{npq}$.

Пример 1. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение. По условию, $n=400$; $k=80$; $p=0,2$; $q=0,8$. Воспользуемся асимптотической формулой Лапласа:

$$P_{400}(80)\approx\frac{1}{\sqrt{400\cdot0,2\cdot0,8}}\cdot\varphi(x)=\frac{1}{8}\cdot\varphi(x).$$

Вычислим определяемое данными задачи значение x:

$$x=(k-np)/\sqrt{npq}=(80-400\cdot0,2)/8=0.$$

По таблице приложения 1 находим $\varphi(0)=0,3989$.

Искомая вероятность

$$P_{400}(80)=(1/8)\cdot0,3989=0,04986.$$

Формула Бернулли приводит примерно к такому же результату (выкладки ввиду их громоздкости опущены):

$$P_{400}(80)=0,0498.$$

Пример 2. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле $p=0,75$. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах стрелок поразит мишень 8 раз.

Решение. По условию, $n=10$; $k=8$; $p=0,75$; $q=0,25$. Воспользуемся асимптотической формулой Лапласа:

$$P_{10}(8)\simeq\frac{1}{\sqrt{10\cdot0,75\cdot0,25}}\cdot\varphi(x)=0,7301\cdot\varphi(x).$$

Вычислим определяемое данными задачи значение x:

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{8-10\cdot 0{,}75}{\sqrt{10\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}}\simeq 0{,}36.$$

По таблице приложения 1 находим $\varphi(0{,}36)=0{,}3739$.

Искомая вероятность

$$P_{10}(8)=0{,}7301\cdot 0{,}3739=0{,}273.$$

Формула Бернулли приводит к иному результату, а именно $P_{10}(8)=0{,}282$. Столь значительное расхождение ответов объясняется тем, что в настоящем примере n имеет малое значение (формула Лапласа дает достаточно хорошие приближения лишь при достаточно больших значениях n).

§ 3. Интегральная теорема Лапласа

Вновь предположим, что производится n испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p $(0<p<1)$. Как вычислить вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз (для краткости будем говорить «от k_1 до k_2 раз»)? На этот вопрос отвечает интегральная теорема Лапласа, которую мы приводим ниже, опустив доказательство.

Теорема. *Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна определенному интегралу*

$$P_n(k_1,\ k_2)\simeq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x'}^{x''}e^{-z^2/2}\,dz, \qquad (*)$$

где $x'=(k_1-np)/\sqrt{npq}$ и $x''=(k_2-np)/\sqrt{npq}$.

При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальными таблицами, так как неопределенный интеграл $\int e^{-z^2/2}dz$ не выражается через элементарные функции. Таблица для интеграла $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-z^2/2}\,dz$ приведена в конце книги (см. приложение 2). В таблице даны значения функции $\Phi(x)$ для положительных значений x и для $x=0$; для $x<0$ пользуются той же таблицей [функция $\Phi(x)$ не-четна, т. е. $\Phi(-x)=-\Phi(x)$]. В таблице приведены значения интеграла лишь до $x=5$, так как для $x>5$ можно принять $\Phi(x)=0,5$. Функцию $\Phi(x)$ часто называют *функцией Лапласа*.

Для того чтобы можно было пользоваться таблицей функции Лапласа, преобразуем соотношение (*) так:

$$P_n(k_1,\ k_2)\simeq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x'}^{0}e^{-z^2/2}\,dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x''}e^{-z^2/2}\,dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x''}e^{-z^2/2}\,dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x'}e^{-z^2/2}\,dz=\Phi(x'')-\Phi(x').$$

Итак, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз,

$$P_n(k_1,\ k_2)\simeq\Phi(x'')-\Phi(x'),$$

где $x'=(k_1-np)/\sqrt{npq}$ и $x''=(k_2-np)/\sqrt{npq}$.

Приведем примеры, иллюстрирующие применение интегральной теоремы Лапласа.

Пример. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна $p=0,2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Решение. По условию, $p=0,2$; $q=0,8$; $n=400$; $k_1=70$; $k_2=100$. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_{400}(70,\ 100)\approx\Phi(x'')-\Phi(x').$$

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования:

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}=-1,25;$$

$$x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{100-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}=2,5.$$

Таким образом, имеем

$$P_{400}(70,\ 100)=\Phi(2,5)-\Phi(-1,25)=\Phi(2,5)+\Phi(1,25).$$

По таблице приложения 2 находим:

$$\Phi(2,5)=0,4938;\quad \Phi(1,25)=0,3944.$$

Искомая вероятность

$$P_{400}(70,\ 100)=0,4938+0,3944=0,8882.$$

Замечание. Обозначим через m число появлений события A при n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события A постоянна и равна p. Если число m изменяется от k_1 до k_2, то дробь $(m-np)/\sqrt{npq}$ изменяется от $(k_1-np)/\sqrt{npq}=x'$ до $(k_2-np)/\sqrt{npq}=x''$. Следовательно, интегральную теорему Лапласа можно записать и так:

$$P\left(x' \leqslant \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leqslant x''\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-z^2/2}\,dz.$$

Эта форма записи используется ниже.

§ 4. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

Вновь будем считать, что производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p $(0 < p < 1)$. Поставим перед собой задачу найти вероятность того, что отклонение относительной частоты m/n от постоянной вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа $\varepsilon > 0$. Другими словами, найдем вероятность осуществления неравенства

$$|m/n - p| \leqslant \varepsilon. \qquad (*)$$

Эту вероятность будем обозначать так: $P(|m/n-p| \leqslant \varepsilon)$. Заменим неравенство (*) ему равносильными:

$$-\varepsilon \leqslant m/n - p \leqslant \varepsilon \quad \text{или} \quad -\varepsilon \leqslant (m-np)/n \leqslant \varepsilon.$$

Умножая эти неравенства на положительный множитель $\sqrt{n/(pq)}$, получим неравенства, равносильные исходному:

$$-\varepsilon\sqrt{n/(pq)} \leqslant (m-np)/\sqrt{npq} \leqslant \varepsilon\sqrt{n/(pq)}.$$

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа в форме, указанной в замечании (см. § 3). Положив $x' = -\varepsilon\sqrt{n/(pq)}$ и $x'' = \varepsilon\sqrt{n/(pq)}$, имеем

$$P\left(-\varepsilon\sqrt{n/(pq)} \leqslant (m-np)/\sqrt{npq} \leqslant \varepsilon\sqrt{n/(nq)}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon\sqrt{n/(pq)}}^{\varepsilon\sqrt{n/(pq)}} e^{-z^2/2}\,dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\varepsilon\sqrt{n/(pq)}} e^{-z^2/2}\,dz =$$

$$= 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/(pq)}\right).$$

Наконец, заменив неравенства, заключенные в скобках, равносильным им исходным неравенством, окончательно получим

$$P(|m/n - p| \leqslant \varepsilon) \simeq 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/(pq)}\right).$$

Итак, вероятность осуществления неравенства $|m/n-p| \leq \varepsilon$ приближенно равна значению удвоенной функции Лапласа $2\Phi(x)$ при $x=\varepsilon\sqrt{n/(pq)}$.

Пример 1. Вероятность того, что деталь не стандартна, $p=0,1$. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности $p=0,1$ по абсолютной величине не более чем на 0,03.

Решение. По условию, $n=400$; $p=0,1$; $q=0,9$; $\varepsilon=0,03$. Требуется найти вероятность $P(|m/400-0,1| \leq 0,03)$. Пользуясь формулой $P(|m/n-p| \leq \varepsilon) \approx 2\Phi(\varepsilon\sqrt{n/(pq)})$, имеем

$$P(|m/400-0,1| \leq 0,03) \approx 2\Phi(0,03\sqrt{400/(0,1\cdot 0,9)})=2\Phi(2).$$

По таблице приложения 2 находим $\Phi(2)=0,4772$. Следовательно, $2\Phi(2)=0,9544$.

Итак, искомая вероятность приближенно равна 0,9544.

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей в каждой, то примерно в 95,44% этих проб отклонение относительной частоты от постоянной вероятности $p=0,1$ по абсолютной величине не превысит 0,03.

Пример 2. Вероятность того, что деталь не стандартна, $p=0,1$. Найти, сколько деталей надо отобрать, чтобы с вероятностью, равной 0,9544, можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей (среди отобранных) отклонится от постоянной вероятности p по абсолютной величине не более чем на 0,03.

Решение. По условию, $p=0,1$; $q=0,9$; $\varepsilon=0,03$; $P(|m/n-0,1| \leq 0,03)=0,9544$. Требуется найти n.

Воспользуемся формулой

$$P(|m/n-p| \leq \varepsilon) \approx 2\Phi(\varepsilon\sqrt{n/(pq)}).$$

В силу условия

$$2\Phi(0,03\sqrt{n/(0,1\cdot 0,9)})=2\Phi(0,1\sqrt{n})=0,9544.$$

Следовательно, $\Phi(0,1\sqrt{n})=0,4772$.

По таблице приложения 2 находим $\Phi(2)=0,4772$.

Для отыскания числа n получаем уравнение $0,1\sqrt{n}=2$. Отсюда искомое число деталей $n=400$.

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей, то в 95,44% этих проб относительная частота появления нестандартных деталей будет отличаться от постоянной вероятности $p=0,1$ по абсолютной величине не более чем на 0,03, т. е. относительная частота заключена в границах от 0,07 $(0,1-0,03=0,07)$ до 0,13 $(0,1+0,03=0,13)$. Другими словами, число нестандартных деталей в 95,44% проб будет заключено между 28 (7% от 400) и 52 (13% от 400).

Если взять лишь одну пробу из 400 деталей, то с большой уверенностью можно ожидать, что в этой пробе будет нестандартных деталей не менее 28 и не более 52. Возможно, хотя и маловероятно, что нестандартных деталей окажется меньше 28 либо больше 52.

Задачи

1. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включено 4 мотора; б) включены все моторы; в) выключены все моторы.

Отв. а) $P_6(4)=0{,}246$; б) $P_6(6)=0{,}26$; в) $P_6(0)=0{,}000064$.

2. Найти вероятность того, что событие A появится в пяти независимых испытаниях не менее двух раз, если в каждом испытании вероятность появления события A равна 0,3.

Отв. $P=1-[P_5(0)+P_5(1)]=0{,}472$.

3. Событие B появится в случае, если событие A появится не менее двух раз. Найти вероятность того, что наступит событие B, если будет произведено 6 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,4.

Отв. $P=1-[P_6(0)+P_6(1)]=0{,}767$.

4. Произведено 8 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,1. Найти вероятность того, что событие A появится хотя бы 2 раза.

Отв. $P=1-[P_8(0)+P_8(1)]=0{,}19$.

5. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз.

Отв. а) $P=P_6(0)+P_6(1)=7/64$; б) $Q=1-[P_6(0)+P_6(1)]=57/64$.

6. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия $p=0{,}9$. Вероятность поражения цели при k попаданиях $(k\geqslant 1)$ равна $1-q^k$. Найти вероятность того, что цель будет поражена, если сделано два выстрела.

Указание. Воспользоваться формулами Бернулли и полной вероятности.

Отв. 0,9639.

7. Найти приближенно вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.

Отв. $P_{400}(104)=0{,}0006$.

8. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена: а) не менее 70 и не более 80 раз; б) не более 70 раз.

Отв. а) $P_{100}(70,80)=2\Phi(1{,}15)=0{,}7498$;
б) $P_{100}(0;\ 70)=-\Phi(1{,}15)+0{,}5=0{,}1251$.

9. Вероятность появления события в каждом из 10 000 независимых испытаний $p=0{,}75$. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,001.

Отв. $P=2\Phi(0{,}23)=0{,}182$.

10. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти, какое отклонение относительной частоты появления события от его вероятности можно ожидать с вероятностью 0,9128 при 5000 испытаниях.

Отв. $\varepsilon=0{,}00967$.

11. Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью 0,6 можно было ожидать, что отклонение относительной частоты появлений герба от вероятности $p=0{,}5$ окажется по абсолютной величине не более 0,01?

Отв. $n=1764$.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Глава шестая

ВИДЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ЗАДАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 1. Случайная величина

Уже в первой части приводились события, состоящие в появлении того или иного числа. Например, при бросании игральной кости могли появиться числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Наперед определить число выпавших очков невозможно, поскольку оно зависит от многих случайных причин, которые полностью не могут быть учтены. В этом смысле число очков есть величина случайная; числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6 есть *возможные значения* этой величины.

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Пример 1. Число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, ..., 100.

Пример 2. Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия, есть случайная величина. Действительно, расстояние зависит не только от установки прицела, но и от многих других причин (силы и направления ветра, температуры и т. д.), которые не могут быть полностью учтены. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку (a, b).

Будем далее обозначать случайные величины прописными буквами X, Y, Z, а их возможные значения — соответствующими строчными буквами x, y, z. Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены так: x_1, x_2, x_3.

§ 2. Дискретные и непрерывные случайные величины

Вернемся к примерам, приведенным выше. В первом из них случайная величина X могла принять одно из следующих возможных значений: 0, 1, 2, ..., 100. Эти значения отделены одно от другого промежутками, в которых нет возможных значений X. Таким образом, в этом примере случайная величина принимает отдельные, изолированные возможные значения. Во втором примере случайная величина могла принять любое из значений промежутка (a, b). Здесь нельзя отделить одно возможное значение от другого промежутком, не содержащим возможных значений случайной величины.

Уже из сказанного можно заключить о целесообразности различать случайные величины, принимающие лишь отдельные, изолированные значения, и случайные величины, возможные значения которых сплошь заполняют некоторый промежуток.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Замечание. Настоящее определение непрерывной случайной величины не является точным. Более строгое определение будет дано позднее.

§ 3. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины

На первый взгляд может показаться, что для задания дискретной случайной величины достаточно перечислить все ее возможные значения. В действительности это не так: случайные величины могут иметь одинаковые перечни возможных значеиий, а вероятности их — различные. Поэтому для задания дискретной случайной величины недостаточно перечислить все возможные ее значения, нужно еще указать их вероятности.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая — их вероятности:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Приняв во внимание, что в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, заключаем, что события $X=x_1$, $X=x_2$, $\ldots$, $X=x_n$ образуют полную группу; следовательно, сумма вероятностей этих событий, т. е. сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице:

$$p_1+p_2+\ldots+p_n=1.$$

Если множество возможных значений X бесконечно (счетно), то ряд $p_1+p_2+\ldots$ сходится и его сумма равна единице.

Пример. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 руб. и десять выигрышей по 1 руб. Найти закон распределения случайной величины X — стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение. Напишем возможные значения X: $x_1=50$, $x_2=1$, $x_3=0$. Вероятности этих возможных значений таковы: $p_1=0{,}01$, $p_2=0{,}01$, $p_3=1-(p_1+p_2)=0{,}89$.

Напишем искомый закон распределения:

X	50	10	0
p	0,01	0,1	0,89

Контроль: $0{,}01+0{,}1+0{,}89=1$.

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить и графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки (x_i, p_i), а затем соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют *многоугольником распределения*.

§ 4. Биномиальное распределение

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Вероятность наступления события во всех испытаниях постоянна и равна p (следовательно, вероятность непоявления $q=1-p$). Рассмотрим в качестве дискретной случайной величины X число появлений события A в этих испытаниях.

Поставим перед собой задачу: найти закон распределения величины X. Для ее решения требуется определить возможные значения X и их вероятности. Очевидно, событие A в n испытаниях может либо не появиться, либо появиться 1 раз, либо 2 раза, ..., либо n раз. Таким образом, возможные значения X таковы: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, ..., $x_{n+1}=n$. Остается найти вероятности этих возможных значений, для чего достаточно воспользоваться формулой Бернулли:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad (*)$$

где $k=0, 1, 2, \ldots, n$.

Формула (*) и является аналитическим выражением искомого закона распределения.

Биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли. Закон назван «биномиальным» потому, что правую часть равенства (*) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n.$$

Таким образом, первый член разложения p^n определяет вероятность наступления рассматриваемого события n раз в n независимых испытаниях; второй член $np^{n-1}q$ определяет вероятность наступления события $n-1$ раз; ...; последний член q^n определяет вероятность того, что событие не появится ни разу.

Напишем биномиальный закон в виде таблицы:

X	n	$n-1$	...	k	...	0
P	p^n	$np^{n-1}q$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	q^n

Пример. Монета брошена 2 раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X — числа выпадений «герба».

Решение. Вероятность появления «герба» в каждом бросании монеты $p=1/2$, следовательно, вероятность непоявления «герба» $q=1-1/2=1/2$.

При двух бросаниях монеты «герб» может появиться либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения X таковы: $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=0$. Найдем вероятности этих возможных значений по формуле Бернулли:

$$P_2(2)=C_2^2p^2=(1/2)^2=0{,}25,$$
$$P_2(1)=C_2^1pq=2\cdot(1/2)\cdot(1/2)=0{,}5,$$
$$P_2(0)=C_2^0q^2=(1/2)^2=0{,}25.$$

Напишем искомый закон распределения:

X	2	1	0
p	0,25	0,5	0,25

Контроль: $0{,}25+0{,}5+0{,}25=1$.

§ 5. Распределение Пуассона

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Для определения вероятности k появлений события в этих испытаниях используют формулу Бернулли. Если же n велико, то пользуются асимптотической формулой Лапласа. Однако эта формула непригодна, если вероятность события мала ($p\leqslant 0{,}1$). В этих случаях (n велико, p мало) прибегают к асимптотической формуле Пуассона.

Итак, поставим перед собой задачу найти вероятность того, что при очень большом числе испытаний, в каждом из которых вероятность события очень мала, событие наступит ровно k раз. Сделаем важное допущение: произведение np сохраняет постоянное значение, а именно $np=\lambda$. Как будет следовать из дальнейшего (см. гл. VII, § 5), это означает, что среднее число появлений события в различных сериях испытаний, т. е. при различных значениях n, остается неизменным.

Воспользуемся формулой Бернулли для вычисления интересующей нас вероятности:

$$P_n(k)=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!}\,p^k(1-p)^{n-k}.$$

Так как $pn=\lambda$, то $p=\lambda/n$. Следовательно,

$$P_n(k)=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Приняв во внимание, что n имеет очень большое значение, вместо $P_n(k)$ найдем $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(k)$. При этом будет найдено лишь приближенное значение отыскиваемой вероятности: n хотя и велико, но конечно, а при отыскании предела мы устремим n к бесконечности. Заметим, что поскольку произведение np сохраняет постоянное значение, то при $n \to \infty$ вероятность $p \to 0$.

Итак,

$$P_n(k) \simeq \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty}\left[1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right] =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}\cdot 1.$$

Таким образом (для простоты записи знак приближенного равенства опущен),

$$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$$

Эта формула выражает закон распределения Пуассона вероятностей массовых (n велико) и редких (p мало) событий.

Замечание. Имеются специальные таблицы, пользуясь которыми можно найти $P_n(k)$, зная k и λ.

Пример. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия.

Решение. По условию, $n=5000$, $p=0{,}0002$, $k=3$. Найдем λ:

$$\lambda = np = 5000\cdot 0{,}0002 = 1.$$

По формуле Пуассона искомая вероятность приближенно равна

$$P_{5000}(3) = \lambda^k e^{-\lambda}/k! = e^{-1}/3! = 1/6e \simeq 0{,}06.$$

§ 6. Простейший поток событий

Рассмотрим события, которые наступают в случайные моменты времени.

Потоком событий называют последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени. Примерами потоков служат: поступление вызовов на АТС, на пункт неотложной медицинской помощи, прибытие самолетов в аэропорт, клиентов на предприятие бытового обслуживания, последовательность отказов элементов и многие другие.

Среди свойств, которыми могут обладать потоки, выделим свойства стационарности, отсутствия последействия и ординарности.

Свойство стационарности характеризуется тем, что вероятность появления k событий на любом промежутке времени зависит только от числа k и от длительности t промежутка и не зависит от начала его отсчета; при этом различные промежутки времени предполагаются непересекающимися. Например, вероятности появления k событий на промежутках времени (1; 7), (10; 16), (T; $T+6$) одинаковой длительности $t=6$ ед. времени равны между собой.

Итак, *если поток обладает свойством стационарности, то вероятность появления k событий за промежуток времени длительности t есть функция, зависящая только от k и t.*

Свойство отсутствия последействия характеризуется тем, что вероятность появления k событий на любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка. Другими словами, условная вероятность появления k событий на любом промежутке времени, вычисленная при любых предположениях о том, чтó происходило до начала рассматриваемого промежутка (сколько событий появилось, в какой последовательности), равна безусловной вероятности. Таким образом, предыстория потока не сказывается на вероятности появления событий в ближайшем будущем.

Итак, *если поток обладает свойством отсутствия последействия, то имеет место взаимная независимость появлений того или иного числа событий в непересекающиеся промежутки времени.*

Свойство ординарности характеризуется тем, что появление двух и более событий за малый промежуток времени практически невозможно. Другими словами, вероятность появления более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления только одного события.

Итак, *если поток обладает свойством ординарности, то за бесконечно малый промежуток времени может появиться не более одного события.*

Простейшим (пуассоновским) называют поток событий, который обладает свойствами стационарности, отсутствия последействия и ординарности.

Замечание. Часто на практике трудно установить, обладает ли поток перечисленными выше свойствами. Поэтому были найдены и другие условия, при соблюдении которых поток можно считать простейшим или близким к простейшему. В частности, установлено, *что если поток представляет собой сумму очень большого числа неза-*

висимых стационарных потоков, влияние каждого из которых на всю сумму (суммарный поток) ничтожно мало, то суммарный поток (при условии его ординарности) близок к простейшему.

Интенсивностью потока λ называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Можно доказать, что если постоянная интенсивность потока известна, то вероятность появления k событий простейшего потока за время длительностью t определяется формулой Пуассона

$$P_t(k) = (\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}/k!.$$

Эта формула отражает все свойства простейшего потока.

Действительно, из формулы видно, что вероятность появления k событий за время t, при заданной интенсивности является функцией k и t, что характеризует свойство стационарности.

Формула не использует информации о появлении событий до начала рассматриваемого промежутка, что характеризует свойство отсутствия последействия.

Убедимся, что формула отражает свойство ординарности. Положив $k=0$ и $k=1$, найдем соответственно вероятности непоявления событий и появления одного события:

$$P_t(0) = e^{-\lambda t}, \quad P_t(1) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Следовательно, вероятность появления более одного события

$$P_t(k > 1) = 1 - [P_t(0) + P_t(1)] = 1 - [e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t}].$$

Пользуясь разложением

$$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + (\lambda t)^2/2! - \ldots,$$

после элементарных преобразований получим

$$P_t(k > 1) = (\lambda t)^2/2 + \ldots .$$

Сравнивая $P_t(1)$ и $P_t(k > 1)$, заключаем, что при малых значениях t вероятность появления более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью наступления одного события, что характеризует свойство ординарности.

Итак, формулу Пуассона можно считать математической моделью простейшего потока событий.

Пример. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятности того, что за 5 мин поступит: а) 2 вызова; б) менее двух вызовов; в) не менее двух вызовов. Поток вызовов предполагается простейшим.

Решение. По условию, $\lambda=2$, $t=5$, $k=2$. Воспользуемся формулой Пуассона

$$P_t(k)=(\lambda t)^k\cdot e^{-\lambda t}/k!$$

а) Искомая вероятность того, что за 5 мин поступит 2 вызова,

$$P_5(2)=10^2\cdot e^{-10}/2!=100\cdot 0{,}000045/2=0{,}00225.$$

Это событие практически невозможно.

б) События «не поступило ни одного вызова» и «поступил один вызов» несовместны, поэтому по теореме сложения искомая вероятность того, что за 5 мин поступит менее двух вызовов, равна

$$P_5(k<2)=P_5(0)+P_5(1)=e^{-10}+(10\cdot e^{-10})/1!=0{,}000495.$$

Это событие практически невозможно.

в) События «поступило менее двух вызовов» и «поступило не менее двух вызовов» противоположны, поэтому искомая вероятность того, что за 5 мин поступит не менее двух вызовов,

$$P_5(k\geqslant 2)=1-P_5(k<2)=1-0{,}000495=0{,}999505.$$

Это событие практически достоверно.

§ 7. Геометрическое распределение

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна p $(0<p<1)$ и, следовательно, вероятность его непоявления $q=1-p$. Испытания заканчиваются, как только появится событие A. Таким образом, если событие A появилось в k-м испытании, то в предшествующих $k-1$ испытаниях оно не появлялось.

Обозначим через X дискретную случайную величину — число испытаний, которые нужно провести до первого появления события A. Очевидно, возможными значениями X являются натуральные числа: $x_1=1$, $x_2=2$, ...

Пусть в первых $k-1$ испытаниях событие A не наступило, а в k-м испытании появилось. Вероятность этого «сложного события», по теореме умножения вероятностей независимых событий,

$$P(X=k)=q^{k-1}p. \qquad (*)$$

Полагая $k=1, 2, \ldots$ в формуле (*), получим геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q $(0<q<1)$:

$$p,\ qp,\ q^2p,\ \ldots,\ q^{k-1}p,\ \ldots \qquad (**)$$

По этой причине распределение (*) называют *геометрическим*.

Легко убедиться, что ряд (**) сходится и сумма его равна единице. Действительно, сумма ряда (**)

$$p/(1-q)=p/p=1.$$

Пример. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p=0,6$. Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

Решение. По условию, $p=0,6$, $q=0,4$, $k=3$. Искомая вероятность по формуле (*)

$$P=q^{k-1}\cdot p=0,4^2\cdot 0,6=0,096.$$

§ 8. Гипергеометрическое распределение

Прежде чем дать определение гипергеометрического распределения, рассмотрим задачу. Пусть в партии из N изделий имеется M стандартных ($M<N$). Из партии случайно отбирают n изделий (каждое изделие может быть извлечено с одинаковой вероятностью), причем отобранное изделие перед отбором следующего не возвращается в партию (поэтому формула Бернулли здесь неприменима). Обозначим через X случайную величину — число m стандартных изделий среди n отобранных. Очевидно, возможные значения X таковы: 0, 1, 2, ..., $\min(M, n)$.

Найдем вероятность того, что $X=m$, т. е. что среди n отобранных изделий ровно m стандартных. Используем для этого классическое определение вероятности.

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь n изделий из N изделий, т. е. числу сочетаний C_N^n.

Найдем число исходов, благоприятствующих событию $X=m$ (среди взятых n изделий ровно m стандартных); m стандартных изделий можно извлечь из M стандартных изделий C_M^m способами; при этом остальные $n-m$ изделий должны быть нестандартными; взять же $n-m$ нестандартных изделий из $N-m$ нестандартных изделий можно C_{N-M}^{n-m} способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$ (см. гл. I, § 4, правило умножения).

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию $X=m$, к числу всех элементарных исходов

$$P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \qquad (*)$$

Формула (*) определяет распределение вероятностей, которое называют *гипергеометрическим*.

Учитывая, что m — случайная величина, заключаем, что гипергеометрическое распределение определяется тремя параметрами: N, M, n. Иногда в качестве параметров этого распределения рассматривают N, n и $p=M/N$, где p — вероятность того, что первое извлеченное изделие стандартное.

Заметим, что если n значительно меньше N (практически если $n < 0,1N$), то гипергеометрическое распределение дает вероятности, близкие к вероятностям, найденным по биномиальному закону.

Пример. Среди 50 изделий 20 окрашенных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 5 изделий окажется ровно 3 окрашенных.

Решение. По условию, $N=50$, $M=20$, $n=5$, $m=3$. Искомая вероятность

$$P(X=3)=C_{20}^{3}C_{30}^{2}/C_{50}^{5}=0,234.$$

Задачи

1. Возможные значения случайной величины таковы: $x_1=2$, $x_2=5$, $x_3=8$. Известны вероятности первых двух возможных значений: $p_1=0,4$, $p_2=0,15$. Найти вероятность x_3.

Отв. $p_3=0,45$.

2. Игральная кость брошена 3 раза. Написать закон распределения числа появлений шестерки.

Отв.

X	3	2	1	0
p	1/216	15/216	75/216	125/216

3. Составить закон распределения вероятностей числа появлений события A в трех независимых испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна 0,6.

Отв.

k	0	1	2	3
p	0,064	0,288	0,432	0,216

4. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет на пяти веретенах.

Отв. $P_{1000}(5)=0,1562$.

5. Найти среднее число опечаток на странице рукописи, если вероятность того, что страница рукописи содержит хотя бы одну опечатку, равна 0,95. Предполагается, что число опечаток распределено по закону Пуассона.

Указание. Задача сводится к отысканию параметра λ из уравнения $e^{-\lambda}=0,05$.

Отв. 3.

6. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение 1 мин абонент позвонит на коммутатор, равна 0,02. Какое из двух событий вероятнее: в течение 1 мин позвонят 3 абонента; позвонят 4 абонента?

Отв. $P_{100}(3)=0,18$; $P_{100}(4)=0,09$.

7. Рукопись объемом в 1000 страниц машинописного текста содержит 1000 опечаток. Найти вероятность того, что наудачу взятая страница содержит: а) хотя бы одну опечатку; б) ровно 2 опечатки; в) не менее двух опечаток. Предполагается, что число опечаток распределено по закону Пуассона.

Отв. а) $P=1-e^{-1}=0{,}6321$; б) $P_{1000}(2)=0{,}18395$; в) $P=0{,}2642$.

8. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в 1 мин, равно 5. Найти вероятность того, что за 2 мин поступит: а) два вызова; б) менее двух вызовов; в) не менее двух вызовов.

Указание. $e^{-10}=0{,}000045$.

Отв. а) 0,00225; б) 0,000495; в) 0,999505.

9. Производится бросание игральной кости до первого выпадения шести очков. Найти вероятность того, что первое выпадение «шестерки» произойдет при втором бросании игральной кости.

Отв. $P(X=2)=5/36$.

10. В партии из 12 деталей имеется 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди 5 взятых наудачу деталей окажется 3 стандартных.

Отв. $P(X=3)=14/33$.

Глава седьмая

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 1. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Как уже известно, закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако часто закон распределения неизвестен и приходится ограничиваться меньшими сведениями. Иногда даже выгоднее пользоваться числами, которые описывают случайную величину суммарно; такие числа называют *числовыми характеристиками случайной величины*. К числу важных числовых характеристик относится математическое ожидание.

Математическое ожидание, как будет показано далее, приближенно равно среднему значению случайной величины. Для решения многих задач достаточно знать математическое ожидание. Например, если известно, что математическое ожидание числа выбиваемых очков у первого стрелка больше, чем у второго, то первый стрелок в среднем выбивает больше очков, чем второй, и, следовательно, стреляет лучше второго. Хотя математическое ожидание дает о случайной величине значительно меньше сведений, чем закон ее распределения, но для решения задач, подобных приведенной и многих других, знание математического ожидания оказывается достаточным.

§ 2. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина X может принимать только значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда математическое ожидание $M(X)$ случайной величины X определяется равенством

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

Если дискретная случайная величина X принимает счетное множество возможных значений, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i,$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

З а м е ч а н и е. Из определения следует, что математическое ожидание дискретной случайной величины есть н е с л у ч а й н а я (постоянная) величина. Рекомендуем запомнить это утверждение, так как далее оно используется многократно. В дальнейшем будет показано, что математическое ожидание непрерывной случайной величины также есть постоянная величина.

Пример 1. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	3	5	2
p	0,1	0,6	0,3

Р е ш е н и е. Искомое математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности:

$$M(X) = 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3 = 3{,}9.$$

Пример 2. Найти математическое ожидание числа появлений события A в одном испытании, если вероятность события A равна p.

Р е ш е н и е. Случайная величина X — число появлений события A в одном испытании — может принимать только два значения: $x_1 = 1$ (событие A наступило) с вероятностью p и $x_2 = 0$ (событие A не наступило) с вероятностью $q = 1 - p$. Искомое математическое ожидание

$$M(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p.$$

Итак, *математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности этого события*. Этот результат будет использован ниже.

§ 3. Вероятностный смысл математического ожидания

Пусть произведено n испытаний, в которых случайная величина X приняла m_1 раз значение x_1, m_2 раз значение x_2, ..., m_k раз значение x_k, причем $m_1+m_2+\ldots$ $\ldots+m_k=n$. Тогда сумма всех значений, принятых X, равна

$$x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_km_k.$$

Найдем среднее арифметическое $\overline{X}$ всех значений, принятых случайной величиной, для чего разделим найденную сумму на общее число испытаний:

$$\overline{X}=(x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_km_k)/n,$$

или

$$\overline{X}=x_1(m_1/n)+x_2(m_2/n)+\ldots+x_k(m_k/n). \qquad (*)$$

Заметив, что отношение m_1/n — относительная частота W_1 значения x_1, m_2/n — относительная частота W_2 значения x_2 и т. д., запишем соотношение (*) так:

$$\overline{X}=x_1W_1+x_2W_2+\ldots+x_kW_k. \qquad (**)$$

Допустим, что число испытаний достаточно велико. Тогда относительная частота приближенно равна вероятности появления события (это будет доказано в гл. IX, § 6):

$$W_1\simeq p_1,\ W_2\simeq p_2,\ \ldots,\ W_k\simeq p_k.$$

Заменив в соотношении (**) относительные частоты соответствующими вероятностями, получим

$$\overline{X}\simeq x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_kp_k.$$

Правая часть этого приближенного равенства есть $M(X)$. Итак,

$$\overline{X}\simeq M(X).$$

Вероятностный смысл полученного результата таков: *математическое ожидание приближенно равно* (тем точнее, чем больше число испытаний) *среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.*

Замечание 1. Легко сообразить, что математическое ожидание больше наименьшего и меньше наибольшего возможных значений. Другими словами, на числовой оси возможные значения расположены слева и справа от математического ожидания. В этом смысле математическое ожидание характеризует расположение распределения и поэтому его часто называют *центром распределения.*

Этот термин заимствован из механики: если массы $p_1, p_2, \ldots, p_n$ расположены в точках с абсциссами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем $\sum p_i = 1$, то абсцисса центра тяжести

$$x_c = \left(\sum x_i p_i\right) / \sum p_i.$$

Учитывая, что $\sum x_i p_i = M(X)$ и $\sum p_i = 1$, получим $M(X) = x_c$.

Итак, математическое ожидание есть абсцисса центра тяжести системы материальных точек, абсциссы которых равны возможным значениям случайной величины, а массы — их вероятностям.

Замечание 2. Происхождение термина «математическое ожидание» связано с начальным периодом возникновения теории вероятностей (XVI—XVII вв.), когда область ее применения ограничивалась азартными играми. Игрока интересовало среднее значение ожидаемого выигрыша, или, иными словами, математическое ожидание выигрыша.

§ 4. Свойства математического ожидания

Свойство 1. *Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:*

$$M(C) = C.$$

Доказательство. Будем рассматривать постоянную C как дискретную случайную величину, которая имеет одно возможное значение C и принимает его с вероятностью $p = 1$. Следовательно,

$$M(C) = C \cdot 1 = C.$$

Замечание 1. Определим *произведение постоянной величины C на дискретную случайную величину X* как дискретную случайную CX, возможные значения которой равны произведениям постоянной C на возможные значения X; вероятности возможных значений CX равны вероятностям соответствующих возможных значений X. Например, если вероятность возможного значения x_1 равна p_1, то вероятность того, что величина CX примет значение Cx_1, также равна p_1.

Свойство 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:*

$$M(CX) = CM(X).$$

Доказательство. Пусть случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

$$\begin{array}{lllll} X & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array}$$

Учитывая замечание 1, напишем закон распределения случайной величины CX:

$$\begin{array}{lllll} CX & Cx_1 & Cx_2 & \dots & Cx_n \\ p & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array}$$

Математическое ожидание случайной величины CX:

$$M(CX) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \dots + Cx_np_n =$$
$$= C(x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n) = CM(X).$$

Итак,

$$M(CX) = CM(X).$$

Замечание 2. Прежде чем перейти к следующему свойству, укажем, что две случайные величины называют *независимыми*, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины *зависимы*. Несколько случайных величин называют *взаимно независимыми*, если законы распределения любого числа из них не зависят от того, какие возможные значения приняли остальные величины.

Замечание 3. Определим *произведение независимых случайных величин* X и Y как случайную величину XY, возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения X на каждое возможное значение Y; вероятности возможных значений произведения XY равны произведениям вероятностей возможных значений сомножителей. Например, если вероятность возможного значения x_1 равна p_1, вероятность возможного значения y_1 равна g_1, то вероятность возможного значения x_1y_1 равна p_1g_1.

Заметим, что некоторые произведения x_iy_j могут оказаться равными между собой. В этом случае вероятность возможного значения произведения равна сумме соответствующих вероятностей. Например, если $x_1y_2 = x_3y_5$, то вероятность x_1y_2 (или, что то же, x_3y_5) равна $p_1g_2 + p_3g_5$.

Свойство 3. *Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:*

$$M(XY) = M(X)\,M(Y).$$

Доказательство. Пусть независимые случайные величины X и Y заданы своими законами распределения вероятностей *):

$$\begin{array}{llll} X & x_1 x_2 & Y & y_1 y_2 \\ P & p_1 p_2 & g & g_1 g_2 \end{array}$$

Составим все значения, которые может принимать случайная величина XY. Для этого перемножим все возможные значения X на каждое возможное значение Y; в итоге получим x_1y_1, x_2y_1, x_1y_2 и x_2y_2. Учитывая замечание 3, напишем закон распределения XY, предполагая для простоты, что все возможные значения произведения различны (если это не так, то доказательство проводится аналогично):

$$\begin{array}{lllll} XY & x_1y_1 & x_2y_1 & x_1y_2 & x_2y_2 \\ p & p_1g_1 & p_2g_1 & p_1g_2 & p_2g_2 \end{array}$$

Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений на их вероятности:

$$M(XY) = x_1y_1 \cdot p_1g_1 + x_2y_1 \cdot p_2g_1 + x_1y_2 \cdot p_1g_2 + x_2y_2 \cdot p_2g_2,$$

или

$$M(XY) = y_1g_1(x_1p_1 + x_2p_2) + y_2g_2(x_1p_1 + x_2p_2) =$$
$$= (x_1p_1 + x_2p_2)(y_1g_1 + y_2g_2) = M(X) \cdot M(Y).$$

Итак, $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

Следствие. *Математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.*

Например, для трех случайных величин имеем:

$$M(XYZ) = M(XY \cdot Z) = M(XY)\,M(Z) = M(X)\,M(Y)\,M(Z).$$

Для произвольного числа случайных величин доказательство проводится методом математической индукции.

Пример 1. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

$$\begin{array}{llllllll} X & 5 & 2 & 4 & \quad & Y & 7 & 9 \\ p & 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 & \quad & p & 0{,}8 & 0{,}2 \end{array}$$

Найти математическое ожидание случайной величины XY.

Решение. Найдем математические ожидания каждой из данных величин:

$$M(X) = 5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}3 = 4{,}4;$$
$$M(Y) = 7 \cdot 0{,}8 + 9 \cdot 0{,}9 = 7{,}4.$$

*) Для упрощения выкладок мы ограничились малым числом возможных значений. В общем случае доказательство аналогичное.

Случайные величины X и Y независимые, поэтому искомое математическое ожидание

$$M(XY) = M(X)\,M(Y) = 4{,}4 \cdot 7{,}4 = 32{,}56.$$

Замечание 4. Определим *сумму случайных величин* X и Y как случайную величину $X+Y$, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X с каждым возможным значением Y; вероятности возможных значений $X+Y$ для независимых величин X и Y равны произведениям вероятностей слагаемых; для зависимых величин — произведениям вероятности одного слагаемого на условную вероятность второго.

Заметим, что некоторые суммы $x+y$ могут оказаться равными между собой. В этом случае вероятность возможного значения суммы равна сумме соответствующих вероятностей. Например, если $x_1+y_2 = x_3+y_5$ и вероятности этих возможных значений соответственно равны p_{12} и p_{35}, то вероятность x_1+x_2 (или, что то же, x_3+y_5) равна $p_{12}+p_{35}$.

Следующее ниже свойство справедливо как для независимых, так и для зависимых случайных величин.

Свойство 4. *Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:*

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

Доказательство. Пусть случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения *):

X	x_1	x_2		Y	y_1	y_2
p	p_1	p_2		g	g_1	g_2

Составим все возможные значения величины $X+Y$. Для этого к каждому возможному значению X прибавим каждое возможное значение Y; получим x_1+y_1, x_1+y_2, x_2+y_1 и x_2+y_2. Предположим для простоты, что эти возможные значения различны (если это не так, то доказательство проводится аналогично), и обозначим их вероятности соответственно через p_{11}, p_{12}, p_{21} и p_{22}.

Математическое ожидание величины $X+Y$ равно сумме произведений возможных значений на их вероятности:

$$M(X+Y) = (x_1+y_1)\,p_{11} + (x_1+y_2)\,p_{12} + (x_2+y_1)\,p_{21} + (x_2+y_2)\,p_{22},$$

*) Чтобы упростить вывод, мы ограничились лишь двумя возможными значениями каждой из величин. В общем случае доказательство аналогичное.

или

$$M(X+Y)=x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})+y_1(p_{11}+p_{21})+ \\ +y_2(p_{12}+p_{22}). \qquad (*)$$

Докажем, что $p_{11}+p_{12}=p_1$. Событие, состоящее в том, что X примет значение x_1 (вероятность этого события равна p_1), влечет за собой событие, которое состоит в том, что $X+Y$ примет значение x_1+y_1 или x_1+y_2 (вероятность этого события по теореме сложения равна $p_{11}+p_{12}$), и обратно. Отсюда и следует, что $p_{11}+p_{12}=p_1$. Аналогично доказываются равенства

$$p_{21}+p_{22}=p_2,\ \ p_{11}+p_{21}=g_1 \ \text{ и } \ p_{12}+p_{22}=g_2.$$

Подставляя правые части этих равенств в соотношение (*), получим

$$M(X+Y)=(x_1p_1+x_2p_2)+(y_1g_1+y_2g_2),$$

или окончательно

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

Следствие. *Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.*

Например, для трех слагаемых величин имеем

$$M(X+Y+Z)=M[(X+Y)+Z]= \\ =M(X+Y)+M(Z)=M(X)+M(Y)+M(Z).$$

Для произвольного числа слагаемых величин доказательство проводится методом математической индукции.

Пример 2. Производится 3 выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1=0{,}4$; $p_2=0{,}3$ и $p_3=0{,}6$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

Решение. Число попаданий при первом выстреле есть случайная величина X_1, которая может принимать только два значения: 1 (попадание) с вероятностью $p_1=0{,}4$ и 0 (промах) с вероятностью $q=1-0{,}4=0{,}6$.

Математическое ожидание числа попаданий при первом выстреле равно вероятности попадания (см. § 2, пример 2), т. е. $M(X_1)=0{,}4$. Аналогично найдем математические ожидания числа попаданий при втором и третьем выстрелах: $M(X_2)=0{,}3$, $M(X_3)=0{,}6$.

Общее число попаданий есть также случайная величина, состоящая из суммы попаданий в каждом из трех выстрелов:

$$X=X_1+X_2+X_3.$$

Искомое математическое ожидание находим по теореме о математическом ожидании суммы:

$$M(X)=M(X_1+X_2+X_3)=M(X_1)+M(X_2)+M(X_3)=$$
$$=0{,}4+0{,}3+0{,}6=1{,}3 \text{ (попаданий).}$$

Пример 3. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

Решение. Обозначим число очков, которое может выпасть на первой кости, через X и на второй — через Y. Возможные значения этих величин одинаковы и равны 1, 2, 3, 4, 5 и 6, причем вероятность каждого из этих значений равна 1/6.

Найдем математическое ожидание числа очков, которые могут выпасть на первой кости:

$$M(X)=1\cdot(1/6)+2\cdot(1/6)+3(1/6)+4\cdot(1/6)+5\cdot(1/6)+6\cdot(1/6)=7/2.$$

Очевидно, что и $M(Y)=7/2$.

Искомое математическое ожидание

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y)=7/2+7/2=7.$$

§ 5. Математическое ожидание числа появлений события в независимых испытаниях

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p. Чему равно среднее число появлений события A в этих испытаниях? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Математическое ожидание $M(X)$ числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании:*

$$M(X)=np.$$

Доказательство. Будем рассматривать в качестве случайной величины X число наступления события A в n независимых испытаниях. Очевидно, общее число X появлений события A в этих испытаниях складывается из чисел появлений события в отдельных испытаниях. Поэтому если X_1 — число появлений события в первом испытании, X_2 — во втором, ..., X_n — в n-м, то общее число появлений события $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$.

По третьему свойству математического ожидания,

$$M(X)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n). \qquad (*)$$

Каждое из слагаемых правой части равенства есть математическое ожидание числа появлений события в одном испытании: $M(X_1)$ — в первом, $M(X_2)$ — во втором и т. д. Так как математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности события (см. § 2, пример 2), то $M(X_1)=M(X_2)=M(X_n)=p$. Подставляя в правую часть равенства (*) вместо каждого слагаемого p, получим

$$M(X)=np. \qquad (**)$$

Замечание. Так как величина X распределена по биномиальному закону, то доказанную теорему можно сформулировать и так: математическое ожидание биномиального распределения с параметрами n и p равно произведению np.

Пример. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия $p=0{,}6$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

Решение. Попадание при каждом выстреле не зависит от исходов других выстрелов, поэтому рассматриваемые события независимы и, следовательно, искомое математическое ожидание

$$M(X)=np=10\cdot 0{,}6=6 \text{ (попаданий).}$$

Задачи

1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, зная закон ее распределения:

X	6	3	1
p	0,2	0,3	0,5

Отв. 2,6.

2. Производится 4 выстрела с вероятностью попадания в цель $p_1=0{,}6$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}5$ и $p_4=0{,}7$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

Отв. 2,2 попадания.

3. Дискретные независимые случайные величины заданы законами распределения:

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7

Найти математическое ожидание произведения XY двумя способами: а) составив закон распределения XY; б) пользуясь свойством 3.

Отв. 1,53.

4. Дискретные случайные величины X и Y заданы законами распределения, указанными в задаче 3. Найти математическое ожидание суммы $X+Y$ двумя способами: а) составив закон распределения $X+Y$; б) пользуясь свойством 4.

Отв. 2,65.

5. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,2. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 10 деталей.

Отв. 2 детали.

6. Найти математическое ожидание произведения числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей.

Отв. 12,25 очка.

7. Найти математическое ожидание числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 20 билетов, причем вероятность выигрыша по одному билету равна 0,3.

Отв. 6 билетов.

Глава восьмая

ДИСПЕРСИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 1. Целесообразность введения числовой характеристики рассеяния случайной величины

Легко указать такие случайные величины, которые имеют одинаковые математические ожидания, но различные возможные значения. Рассмотрим, например, дискретные случайные величины X и Y, заданные следующими законами распределения:

X	$-0{,}01$	$0{,}01$		Y	-100	100
p	$0{,}5$	$0{,}5$		p	$0{,}5$	$0{,}5$

Найдем математические ожидания этих величин:

$$M(X) = -0{,}01 \cdot 0{,}5 + 0{,}01 \cdot 0{,}5 = 0,$$
$$M(Y) = -100 \cdot 0{,}5 + 100 \cdot 0{,}5 = 0.$$

Здесь математические ожидания обеих величин одинаковы, а возможные значения различны, причем X имеет возможные значения, близкие к математическому ожиданию, а Y — далекие от своего математического ожидания. Таким образом, зная лишь математическое ожидание случайной величины, еще нельзя судить ни о том, какие возможные значения она может принимать, ни о том, как они рассеяны вокруг математического ожидания. Другими словами, математическое ожидание полностью случайную величину не характеризует.

По этой причине наряду с математическим ожиданием вводят и другие числовые характеристики. Так, например, для того чтобы оценить, как рассеяны возможные значения случайной величины вокруг ее математического ожидания, пользуются, в частности, числовой характеристикой, которую называют дисперсией.

Прежде чем перейти к определению и свойствам дисперсии, введем понятие отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

§ 2. Отклонение случайной величины от ее математического ожидания

Пусть X — случайная величина и $M(X)$ — ее математическое ожидание. Рассмотрим в качестве новой случайной величины разность $X-M(X)$.

Отклонением называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданиям.

Пусть закон распределения X известен:

$$\begin{array}{cccc} X & x_1 & x_2 \ldots & x_n \\ p & p_1 & p_2 \ldots & p_n \end{array}$$

Напишем закон распределения отклонения. Для того чтобы отклонение приняло значение $x_1-M(X)$, достаточно, чтобы случайная величина приняла значение x_1. Вероятность же этого события равна p_1; следовательно, и вероятность того, что отклонение примет значение $x_1-M(X)$, также равна p_1. Аналогично обстоит дело и для остальных возможных значений отклонения.

Таким образом, отклонение имеет следующий закон распределения:

$$\begin{array}{ccccc} X-M(X) & x_1-M(X) & x_2-M(X) & \ldots & x_n-M(X) \\ p & p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{array}$$

Приведем важное свойство отклонения, которое используется далее.

Теорема. *Математическое ожидание отклонения равно нулю:*

$$M[X-M(X)]=0.$$

Доказательство. Пользуясь свойствами математического ожидания (математическое ожидание разности равно разности математических ожиданий, математическое ожидание постоянной равно самой постоянной) и приняв во внимание, что $M(X)$ — постоянная величина, имеем

$$M[X-M(X)]=M(X)-M[M(X)]=M(X)-M(X)=0.$$

Пример. Задан закон распределения дискретной случайной величины X:

$$\begin{array}{ccc} X & 1 & 2 \\ p & 0,2 & 0,8 \end{array}$$

Убедиться, что математическое ожидание отклонения равно нулю.

Решение. Найдем математическое ожидание X:

$$M(X)=1\cdot 0,2+2\cdot 0,8=1,8.$$

Найдем возможные значения отклонения, для чего из возможных значений X вычтем математическое ожидание $M(X)$: $1-1{,}8=-0{,}8$; $2-1{,}8=0{,}2$.

Напишем закон распределения отклонения:

$$\begin{array}{lcc} X-M(X) & -0{,}8 & 0{,}2 \\ p & 0{,}2 & 0{,}8 \end{array}$$

Найдем математическое ожидание отклонения:

$$M[X-M(X)]=(-0{,}8)\cdot 0{,}2+0{,}2\cdot 0{,}8=0.$$

Итак, математическое ожидание отклонения равно нулю, как и должно быть.

Замечание. Наряду с термином «отклонение» используют термин «центрированная величина». *Центрированной случайной величиной* $\overset{\circ}{X}$ называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием:

$$\overset{\circ}{X}=X-M(X).$$

Название «центрированная величина» связано с тем, что математическое ожидание есть центр распределения (см. гл. VII, § 3, замечание).

§ 3. Дисперсия дискретной случайной величины

На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, в артиллерии важно знать, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена.

На первый взгляд может показаться, что для оценки рассеяния проще всего вычислить все возможные значения отклонения случайной величины и затем найти их среднее значение. Однако такой путь ничего не даст, так как среднее значение отклонения, т. е. $M[X-M(X)]$, для любой случайной величины равно нулю. Это свойство уже было доказано в предыдущем параграфе и объясняется тем, что одни возможные отклонения положительны, а другие — отрицательны; в результате их взаимного погашения среднее значение отклонения равно нулю. Эти соображения говорят о целесообразности заменить возможные отклонения их абсолютными значениями или их квадратами. Так и поступают на деле. Правда, в случае, когда возможные отклонения заменяют их абсолютными значениями, приходится оперировать с абсолютными величинами, что приводит иногда к серьезным затруднениям. Поэтому чаще всего идут по другому пути, т. е. вычисляют среднее значение квадрата отклонения, которое и называют дисперсией.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Пусть случайная величина задана законом распределения

$$\begin{array}{ccccc} X & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p & p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{array}$$

Тогда квадрат отклонения имеет следующий закон распределения:

$$\begin{array}{ccccc} [X - M(X)]^2 & [x_1 - M(X)]^2 & [x_2 - M(X)]^2 & \ldots & [x_n - M(X)]^2 \\ p & p_1 & p_2 & & p_n \end{array}$$

По определению дисперсии,

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 =$$
$$= [x_1 - M(X)]^2 p_1 + [x_2 - M(X)]^2 p_2 + \ldots + [x_n - M(X)]^2 p_n.$$

Таким образом, для того чтобы найти дисперсию, достаточно вычислить сумму произведений возможных значений квадрата отклонения на их вероятности.

Замечание. Из определения следует, что дисперсия дискретной случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина. В дальнейшем читатель узнает, что дисперсия непрерывной случайной величины также есть постоянная величина.

Пример. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

$$\begin{array}{cccc} X & 1 & 2 & 5 \\ p & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{array}$$

Решение. Найдем математическое ожидание:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}2 = 2{,}3.$$

Найдем все возможные значения квадрата отклонения:

$$[x_1 - M(X)]^2 = (1 - 2{,}3)^2 = 1{,}69;$$
$$[x_2 - M(X)]^2 = (2 - 2{,}3)^2 = 0{,}09;$$
$$[x_3 - M(X)]^2 = (5 - 2{,}3)^2 = 7{,}29.$$

Напишем закон распределения квадрата отклонения:

$$\begin{array}{cccc} [X - M(X)]^2 & 1{,}69 & 0{,}09 & 7{,}29 \\ p & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{array}$$

По определению,

$$D(X) = 1{,}69 \cdot 0{,}3 + 0{,}09 \cdot 0{,}5 + 7{,}29 \cdot 0{,}2 = 2{,}01.$$

Вычисление, основанное на определении дисперсии, оказалось относительно громоздким. Далее будет указана формула, которая приводит к цели значительно быстрее.

§ 4. Формула для вычисления дисперсии

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться следующей теоремой.

Теорема. *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Доказательство. Математическое ожидание $M(X)$ есть постоянная величина, следовательно, $2M(X)$ и $M^2(X)$ есть также постоянные величины. Приняв это во внимание и пользуясь свойствами математического ожидания (постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания, математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых), упростим формулу, выражающую определение дисперсии:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] =$$
$$= M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X) =$$
$$= M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Итак,

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Квадратная скобка введена в запись формулы для удобства ее запоминания.

Пример 1. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Решение. Найдем математическое ожидание $M(X)$:

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3 = 3{,}5.$$

Напишем закон распределения случайной величины X^2:

X^2	4	9	25
p	0,1	0,6	0,3

Найдем математические ожидания $M(X^2)$:

$$M(X^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}3 = 13{,}3.$$

Искомая дисперсия

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05.$$

Замечание. Казалось бы, если X и Y имеют одинаковые возможные значения и одно и то же математическое ожидание, то и дисперсии этих величин равны (ведь возможные значения обеих величин одинаково рассеяны вокруг своих математических ожиданий!). Однако в общем случае это не так. Дело в том, что одинаковые возможные значения рассматриваемых величин имеют, вообще говоря, различные вероятности, *а величина дисперсии определяется не только самими возможными значениями, но и их вероятностями*. Например, если вероятности «далеких» от математического ожидания возможных значений X больше, чем вероятности этих же значений Y, и вероятности «близких» значений X меньше, чем вероятности тех же значений Y, то, очевидно, дисперсия X больше дисперсии Y.

Приведем иллюстрирующий пример.

Пример 2. Сравнить дисперсии случайных величин, заданных законами распределения:

X	-1	1	2	3
p	0,48	0,01	0,09	0,42

Y	-1	1	2	3
p	0,19	0,51	0,25	0,05

Решение. Легко убедиться, что

$$M(X)=M(Y)=0{,}97; \quad D(X)\simeq 3{,}69, \; D(Y)\simeq 1{,}21.$$

Таким образом, возможные значения и математические ожидания X и Y одинаковы, а дисперсии различны, причем $D(X) > D(Y)$. Этот результат можно было предвидеть без вычислений, глядя лишь на законы распределений.

§ 5. Свойства дисперсии

Свойство 1. *Дисперсия постоянной величины C равна нулю:*

$$D(C)=0.$$

Доказательство. По определению дисперсии,

$$D(C)=M\{[C-M(C)]^2\}.$$

Пользуясь первым свойством математического ожидания (математическое ожидание постоянной равно самой постоянной), получим

$$D(C)=M[(C-C)^2]=M(0)=0.$$

Итак,

$$D(C)=0.$$

Свойство становится ясным, если учесть, что постоянная величина сохраняет одно и то же значение и рассеяния, конечно, не имеет.

Свойство 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:*

$$D(CX)=C^2D(X).$$

Доказательство. По определению дисперсии имеем

$$D(CX)=M\{[CX-M(CX)]^2\}.$$

Пользуясь вторым свойством математического ожидания (постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания), получим

$$D(CX)=M\{[CX-CM(X)]^2\}=M\{C^2[X-M(X)]^2\}=$$
$$=C^2M\{[X-M(X)]^2\}=C^2D(X).$$

Итак,

$$D(CX)=C^2D(X).$$

Свойство становится ясным, если принять во внимание, что при $|C|>1$ величина CX имеет возможные значения (по абсолютной величине), бо́льшие, чем величина X. Отсюда следует, что эти значения рассеяны вокруг математического ожидания $M(CX)$ больше, чем возможные значения X вокруг $M(X)$, т. е. $D(CX)>D(X)$. Напротив, если $0<|C|<1$, то $D(CX)<D(X)$.

Свойство 3. *Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:*

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Доказательство. По формуле для вычисления дисперсии имеем

$$D(X+Y)=M[(X+Y)^2]-[M(X+Y)]^2.$$

Раскрыв скобки и пользуясь свойствами математического ожидания суммы нескольких величин и произведения двух независимых случайных величин, получим

$$D(X+Y)=M[X^2+2XY+Y^2]-[M(X)+M(Y)]^2=$$
$$=M(X^2)+2M(X)\cdot M(Y)+M(Y^2)-M^2(X)-$$
$$-2M(X)\cdot M(Y)-M^2(Y)=\{M(X^2)-[M(X)]^2\}+$$
$$+\{M(Y^2)-[M(Y)]^2\}=D(X)+D(Y).$$

Итак,

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Следствие 1. *Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.*

Например, для трех слагаемых имеем

$$D(X+Y+Z)=D[X+(Y+Z)]=D(X)+D(Y+Z)=$$
$$=D(X)+D(Y)+D(Z).$$

Для произвольного числа слагаемых доказательство проводится методом математической индукции.

Следствие 2. *Дисперсия суммы постоянной величины и случайной равна дисперсии случайной величины:*

$$D(C+X)=D(X).$$

Доказательство. Величины C и X независимы, поэтому, по третьему свойству,

$$D(C+X)=D(C)+D(X).$$

В силу первого свойства $D(C)=0$. Следовательно,

$$D(C+X)=D(X).$$

Свойство становится понятным, если учесть, что величины X и $X+C$ отличаются лишь началом отсчета и, значит, рассеяны вокруг своих математических ожиданий одинаково.

Свойство 4. *Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:*

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Доказательство. В силу третьего свойства

$$D(X-Y)=D(X)+D(-Y).$$

По второму свойству,

$$D(X-Y)=D(X)+(-1)^2 D(Y),$$

или

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

§ 6. Дисперсия числа появлений события в независимых испытаниях

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна. Чему равна дисперсия числа появлений события в этих испытаниях? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Дисперсия числа появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность*

p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании:

$$D(X)=npq.$$

Доказательство. Рассмотрим случайную величину X — число появлений события A в n независимых испытаниях. Очевидно, общее число появлений события в этих испытаниях равно сумме появлений события в отдельных испытаниях:

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n,$$

где X_1 — число наступлений события в первом испытании, X_2 — во втором, ..., X_n — в n-м.

Величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ взаимно независимы, так как исход каждого испытания не зависит от исходов остальных, поэтому мы вправе воспользоваться следствием 1 (см. § 5):

$$D(X)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n). \qquad (*)$$

Вычислим дисперсию X_1 по формуле

$$D(X_1)=M(X_1^2)-[M(X_1)]^2. \qquad (**)$$

Величина X_1 — число появлений события A в первом испытании, поэтому (см. гл. VII, § 2, пример 2) $M(X_1)=p$.

Найдем математическое ожидание величины X_1^2, которая может принимать только два значения, а именно: 1^2 с вероятностью p и 0^2 с вероятностью q:

$$M(X_1^2)=1^2\cdot p+0^2\cdot q=p.$$

Подставляя найденные результаты в соотношение (**), имеем

$$D(X_1)=p-p^2=p(1-p)=pq.$$

Очевидно, дисперсия каждой из остальных случайных величин также равна pq. Заменив каждое слагаемое правой части (*) через pq, окончательно получим

$$D(X)=npq.$$

Замечание. Так как величина X распределена по биномиальному закону, то доказанную теорему можно сформулировать и так: *дисперсия биномиального распределения с параметрами n и p равна произведению npq.*

Пример. Производятся 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найти дисперсию случайной величины X — числа появлений события в этих испытаниях.

Решение. По условию, $n=10$, $p=0{,}6$. Очевидно, вероятность непоявления события

$$q=1-0{,}6=0{,}4.$$

Искомая дисперсия

$$D(X)=npq=10\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=2{,}4.$$

§ 7. Среднее квадратическое отклонение

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения кроме дисперсии служат и некоторые другие характеристики. К их числу относится среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Легко показать, что дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Так как среднее квадратическое отклонение равно квадратному корню из дисперсии, то размерность $\sigma(X)$ совпадает с размерностью X. Поэтому в тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют среднее квадратическое отклонение, а не дисперсию. Например, если X выражается в линейных метрах, то $\sigma(X)$ будет выражаться также в линейных метрах, а $D(X)$ — в квадратных метрах.

Пример. Случайная величина X задана законом распределения

X	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5

Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение. Найдем математическое ожидание X:

$$M(X)=2\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}4+10\cdot 0{,}5=6{,}4.$$

Найдем математическое ожидание X^2:

$$M(X^2)=2^2\cdot 0{,}1+3^2\cdot 0{,}4+10^2\cdot 0{,}5=54.$$

Найдем дисперсию:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=54-6{,}4^2=13{,}04.$$

Искомое среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{13{,}04}\simeq 3{,}61.$$

§ 8. Среднее квадратическое отклонение суммы взаимно независимых случайных величин

Пусть известны средние квадратические отклонения нескольких взаимно независимых случайных величин. Как найти среднее квадратическое отклонение суммы этих величин? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Среднее квадратическое отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин:*

$$\sigma(X_1+X_2+\ldots+X_n)=\sqrt{\sigma^2(X_1)+\sigma^2(X_2)+\ldots+\sigma^2(X_n)}.$$

Доказательство. Обозначим через X сумму рассматриваемых взаимно независимых величин:

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n.$$

Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых (см. § 5, следствие 1), поэтому

$$D(X)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n).$$

Отсюда

$$\sqrt{D(X)}=\sqrt{D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n)},$$

или окончательно

$$\sigma(X)=\sqrt{\sigma^2(X_1)+\sigma^2(X_2)+\ldots+\sigma^2(X_n)}.$$

§ 9. Одинаково распределенные взаимно независимые случайные величины

Уже известно, что по закону распределения можно найти числовые характеристики случайной величины. Отсюда следует, что если несколько случайных величин имеют одинаковые распределения, то их числовые характеристики одинаковы.

Рассмотрим n взаимно независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, которые имеют одинаковые распределения, а следовательно, и одинаковые характеристики (математическое ожидание, дисперсию и др.). Наибольший интерес представляет изучение числовых характеристик среднего арифметического этих величин, чем мы и займемся в настоящем параграфе.

Обозначим среднее арифметическое рассматриваемых случайных величин через $\overline{X}$:

$$\overline{X}=(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n.$$

Следующие ниже три положения устанавливают связь между числовыми характеристиками среднего арифметического $\overline{X}$ и соответствующими характеристиками каждой отдельной величины.

1. *Математическое ожидание среднего арифметического одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин равно математическому ожиданию a каждой из величин*:

$$M(\overline{X})=a.$$

Доказательство. Пользуясь свойствами математического ожидания (постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания; математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых), имеем

$$M(\overline{X})=M\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=$$
$$=\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}.$$

Приняв во внимание, что математическое ожидание каждой из величин по условию равно a, получим

$$M(\overline{X})=na/n=a.$$

2. *Дисперсия среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин в n раз меньше дисперсии D каждой из величин:*

$$D(\overline{X})=D/n. \qquad (*)$$

Доказательство. Пользуясь свойствами дисперсии (постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, возведя его в квадрат; дисперсия суммы независимых величин равна сумме дисперсий слагаемых), имеем

$$D(\overline{X})=D\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=$$
$$=\frac{D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n)}{n^2}.$$

Приняв во внимание, что дисперсия каждой из величин по условию равна D, получим

$$D(\overline{X}) = nD/n^2 = D/n.$$

3. *Среднее квадратическое отклонение среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин в $\sqrt{n}$ раз меньше среднего квадратического отклонения σ каждой из величин:*

$$\sigma(\overline{X}) = \sigma/\sqrt{n}. \qquad (**)$$

Доказательство. Так как $D(\overline{X}) = D/n$, то среднее квадратическое отклонение $\overline{X}$ равно

$$\sigma(\overline{X}) = \sqrt{D(\overline{X})} = \sqrt{D/n} = \sqrt{D}/\sqrt{n} = \sigma/\sqrt{n}.$$

Общий вывод из формул (*) и (**): вспоминая, что дисперсия и среднее квадратическое отклонение служат мерами рассеяния случайной величины, заключаем, что среднее арифметическое достаточно большого числа взаимно независимых случайных величин имеет значительно меньшее рассеяние, чем каждая отдельная величина.

Поясним на примере значение этого вывода для практики.

Пример. Обычно для измерения некоторой физической величины производят несколько измерений, а затем находят среднее арифметическое полученных чисел, которое принимают за приближенное значение измеряемой величины. Предполагая, что измерения производятся в одних и тех же условиях, доказать:

а) среднее арифметическое дает результат более надежный, чем отдельные измерения;

б) с увеличением числа измерений надежность этого результата возрастает.

Решение. а) Известно, что отдельные измерения дают неодинаковые значения измеряемой величины. Результат каждого измерения зависит от многих случайных причин (изменение температуры, колебания прибора и т. п.), которые не могут быть заранее полностью учтены.

Поэтому мы вправе рассматривать возможные результаты n отдельных измерений в качестве случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (индекс указывает номер измерения). Эти величины имеют одинаковое распределение вероятностей (измерения производятся по одной и той же методике и теми же приборами), а следовательно, и одинаковые числовые характеристики; кроме того, они взаимно независимы (результат каждого отдельного измерения не зависит от остальных измерений).

Мы уже знаем, что среднее арифметическое таких величин имеет меньшее рассеяние, чем каждая отдельная величина. Иначе говоря, среднее арифметическое оказывается более близким к истинному значению измеряемой величины, чем результат отдельного измерения. Это и означает, что среднее арифметическое нескольких измерений дает более надежный результат, чем отдельное измерение.

б) Нам уже известно, что при возрастании числа отдельных случайных величин рассеяние среднего арифметического убывает. Это значит, что с увеличением числа измерений среднее арифметическое нескольких измерений все менее отличается от истинного значения измеряемой величины. Таким образом, увеличивая число измерений, получают более надежный результат.

Например, если среднее квадратическое отклонение отдельного измерения $\sigma=6$ *м*, а всего произведено $n=36$ измерений, то среднее квадратическое отклонение среднего арифметического этих измерений равно лишь 1 м. Действительно,

$$\sigma(\overline{X})=\sigma/\sqrt{n}=6/\sqrt{36}=1.$$

Мы видим, что среднее арифметическое нескольких измерений, как и следовало ожидать, оказалось более близким к истинному значению измеряемой величины, чем результат отдельного измерения.

§ 10. Начальные и центральные теоретические моменты

Рассмотрим дискретную случайную величину X, заданную законом распределения:

X	1	2	5	100
p	0,6	0,2	0,19	0,01

Найдем математическое ожидание X:

$$M(X)=1\cdot 0{,}6+2\cdot 0{,}2+5\cdot 0{,}19+100\cdot 0{,}01=2{,}95.$$

Напишем закон распределения X^2:

X^2	1	4	25	10 000
p	0,6	0,2	0,19	0,01

Найдем математическое ожидание X^2:

$$M(X^2)=1\cdot 0{,}6+4\cdot 0{,}2+25\cdot 0{,}19+10\,000\cdot 0{,}01=106{,}15.$$

Видим, что $M(X^2)$ значительно больше $M(X)$. Это объясняется тем, что после возведения в квадрат возможное значение величины X^2, соответствующее значению $x=100$ величины X, стало равным 10 000, т. е. значительно увеличилось; вероятность же этого значения мала (0,01).

Таким образом, переход от $M(X)$ к $M(X^2)$ позволил лучше учесть влияние на математическое ожидание того возможного значения, которое велико и имеет малую вероятность. Разумеется, если бы величина X имела несколько больших и маловероятных значений, то переход к величине X^2, а тем более к величинам X^3, X^4 и т. д., позволил бы еще больше «усилить роль» этих больших, но маловероятных возможных значений. Вот почему оказывается целесообразным рассматривать математическое ожидание целой положительной степени случайной величины (не только дискретной, но и непрерывной).

Начальным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины X^k:

$$\nu_k = M(X^k).$$

В частности,

$$\nu_1 = M(X), \quad \nu_2 = M(X^2).$$

Пользуясь этими моментами, формулу для вычисления дисперсии $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ можно записать так:

$$D(X) = \nu_2 - \nu_1^2. \qquad (*)$$

Кроме моментов случайной величины X целесообразно рассматривать моменты отклонения $X - M(X)$.

Центральным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M[(X - M(X))^k].$$

В частности,

$$\mu_1 = M[X - M(X)] = 0, \qquad (**)$$

$$\mu_2 = M[(X - M(X))^2] = D(X). \qquad (***)$$

Легко выводятся соотношения, связывающие начальные и центральные моменты. Например, сравнивая (*) и (***), получим

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2.$$

Нетрудно, исходя из определения центрального момента и пользуясь свойствами математического ожидания, получить формулы:

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3,$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4.$$

Моменты более высоких порядков применяются редко.

З а м е ч а н и е. Моменты, рассмотренные здесь, называют *теоретическими*. В отличие от теоретических моментов, моменты, которые вычисляются по данным наблюдений, называют *эмпирическими*. Определения эмпирических моментов даны далее (см. гл. XVII, § 2).

Задачи

1. Известны дисперсии двух независимых случайных величин: $D(X)=4$, $D(Y)=3$. Найти дисперсию суммы этих величин.

Отв. 7.

2. Дисперсия случайной величины X равна 5. Найти дисперсию следующих величин: а) $X-1$; б) $-2X$; в) $3X+6$.

Отв. а) 5; б) 20; в) 45.

3. Случайная величина X принимает только два значения: $+C$ и $-C$, каждое с вероятностью 0,5. Найти дисперсию этой величины.

Отв. C^2.

4. Найти дисперсию случайной величины, зная закон ее распределения

X	0,1	2	10	20
p	0,4	0,2	0,15	0,25

Отв. 67,6404.

5. Случайная величина X может принимать два возможных значения: x_1 с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью 0,7, причем $x_2 > x_1$. Найти x_1 и x_2, зная, что $M(X)=2{,}7$ и $D(X)=0{,}21$.

Отв. $x_1=2$, $x_2=3$.

6. Найти дисперсию случайной величины X — числа появлений событий A в двух независимых испытаниях, если $M(X)=0{,}8$.

Указание. Написать биномиальный закон распределения вероятностей числа появлений события A в двух независимых испытаниях.

Отв. 0,48.

7. Испытывается устройство, состоящее из четырех независимо работающих приборов. Вероятности отказа приборов таковы: $p_1=0{,}3$; $p_2=0{,}4$; $p_3=0{,}5$; $p_4=0{,}6$. Найти математическое ожидание и дисперсию числа отказавших приборов.

Отв. 1,8; 0,94.

8. Найти дисперсию случайной величины X — числа появлений события в 100 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,7.

Отв. 21.

9. Дисперсия случайной величины $D(X)=6{,}25$. Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Отв. 2,5.

10. Случайная величина задана законом распределения

X	2	4	8
p	0,1	0,5	0,4

Найти среднее квадратическое отклонение этой величины.

Отв. 2,2.

11. Дисперсия каждой из 9 одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин равна 36. Найти дисперсию среднего арифметического этих величин.

Отв. 4.

12. Среднее квадратическое отклонение каждой из 16 одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин равно 10. Найти среднее квадратическое отклонение среднего арифметического этих величин.

Отв. 2,5.

Глава девятая

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

§ 1. Предварительные замечания

Как уже известно, нельзя заранее уверенно предвидеть, какое из возможных значений примет случайная величина в итоге испытания; это зависит от многих случайных причин, учесть которые невозможно. Казалось бы, поскольку о каждой случайной величине мы располагаем в этом смысле весьма скромными сведениями, то вряд ли можно установить закономерности поведения и суммы достаточно большого числа случайных величин. На самом деле это не так. Оказывается, что при некоторых сравнительно широких условиях суммарное поведение достаточно большого числа случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится закономерным.

Для практики очень важно знание условий, при выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название закона больших чисел. К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли (имеются и другие теоремы, которые здесь не рассматриваются). Теорема Чебышева является наиболее общим законом больших чисел, теорема Бернулли — простейшим. Для доказательства этих теорем мы воспользуемся неравенством Чебышева.

§ 2. Неравенство Чебышева

Неравенство Чебышева справедливо для дискретных и непрерывных случайных величин. Для простоты ограничимся доказательством этого неравенства для дискретных величин.

Рассмотрим дискретную случайную величину X, заданную таблицей распределения:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Поставим перед собой задачу оценить вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания не превышает по абсолютной величине положительного числа ε. Если ε достаточно мало, то мы оценим, таким образом, вероятность того, что X примет значения, достаточно близкие к своему математическому ожиданию. П. Л. Чебышев доказал неравенство, позволяющее дать интересующую нас оценку.

Неравенство Чебышева. *Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем $1-D(X)/\varepsilon^2$:*

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geqslant 1-D(X)/\varepsilon^2.$$

Доказательство. Так как события, состоящие в осуществлении неравенств $|X-M(X)|<\varepsilon$ и $|X-M(X)|\geqslant\varepsilon$, противоположны, то сумма их вероятностей равна единице, т. е.

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)+P(|X-M(X)|\geqslant\varepsilon)=1.$$

Отсюда интересующая нас вероятность

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)=1-P(|X-M(X)|\geqslant\varepsilon). \qquad (*)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению вероятности $P(|X-M(X)|\geqslant\varepsilon)$.

Напишем выражение дисперсии случайной величины X:

$$D(X)=[x_1-M(X)]^2 p_1+[x_2-M(X)]^2 p_2+\ldots$$
$$\ldots+[x_n-M(X)]^2 p_n.$$

Очевидно, все слагаемые этой суммы неотрицательны.

Отбросим те слагаемые, у которых $|x_i-M(X)|<\varepsilon$ (для оставшихся слагаемых $|x_j-M(X)|\geqslant\varepsilon$), вследствие чего сумма может только уменьшиться. Условимся считать для определенности, что отброшено k первых слагаемых (не нарушая общности, можно считать, что в таблице распределения возможные значения занумерованы именно в таком порядке). Таким образом,

$$D(X)\geqslant[x_{k+1}-M(X)]^2 p_{k+1}+[x_{k+2}-M(X)]^2 p_{k+2}+\ldots$$
$$\ldots+[x_n-M(X)]^2 p_n.$$

Заметим, что обе части неравенства $|x_j-M(X)|\geqslant\varepsilon$ $(j=k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n)$ положительны, поэтому, возведя их в квадрат, получим равносильное неравенство $|x_j-$ $-M(X)|^2\geqslant\varepsilon^2$. Воспользуемся этим замечанием и, заменяя в оставшейся сумме каждый из множителей $|x_j-M(X)|^2$ числом ε^2 (прн этом неравенство может лишь усилиться), получим

$$D(X) \geqslant \varepsilon^2 (p_{k+1} + p_{k+2} + \ldots + p_n). \qquad (**)$$

По теореме сложения, сумма вероятностей $p_{k+1}+p_{k+2}+\ldots$ $\ldots+p_n$ есть вероятность того, что X примет одно, безразлично какое, из значений x_{k+1}, x_{k+2}, $\ldots$, x_n, а при любом из них отклонение удовлетворяет неравенству $|x_j - M(X)| \geqslant \varepsilon$. Отсюда следует, что сумма $p_{k+1}+p_{k+2}+\ldots$ $\ldots+p_n$ выражает вероятность

$$P(|X - M(X)| \geqslant \varepsilon).$$

Это соображение позволяет переписать неравенство (**) так:

$$D(X) \geqslant \varepsilon^2 P(|X - M(X)| \geqslant \varepsilon),$$

или

$$P(|X - M(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant D(X)/\varepsilon^2. \qquad (***)$$

Подставляя (***) в (*), окончательно получим

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geqslant 1 - D(X)/\varepsilon^2,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Неравенство Чебышева имеет для практики ограниченное значение, поскольку часто дает грубую, а иногда и тривиальную (не представляющую интереса) оценку. Например, если $D(X) > \varepsilon^2$ и, следовательно, $D(X)/\varepsilon^2 > 1$, то $1 - D(X)/\varepsilon^2 < 0$; таким образом, в этом случае неравенство Чебышева указывает лишь на то, что вероятность отклонения неотрицательна, а это и без того очевидно, так как любая вероятность выражается неотрицательным числом.

Теоретическое же значение неравенства Чебышева весьма велико. Ниже мы воспользуемся этим неравенством для вывода теоремы Чебышева.

§ 3. Теорема Чебышева

Теорема Чебышева. *Если X_1, X_2, $\ldots$, X_n, $\ldots$ — попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то, как бы мало ни было положительное число ε, вероятность неравенства*

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Другими словами, в условиях теоремы

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - \frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Таким образом, теорема Чебышева утверждает, что если рассматривается достаточно большое число независимых случайных величин, имеющих ограниченные дисперсии, то почти достоверным можно считать событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым.

Доказательство. Введем в рассмотрение новую случайную величину — среднее арифметическое случайных величин

$$\overline{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n.$$

Найдем математическое ожидание $\overline{X}$. Пользуясь свойствами математического ожидания (постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания, математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых), получим

$$M\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right) = \frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}. \qquad (*)$$

Применяя к величине $\overline{X}$ неравенство Чебышева, имеем

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - M\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{D\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2},$$

или, учитывая соотношение (*),

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - \frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{D\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}. \qquad (**)$$

Пользуясь свойствами дисперсии (постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, возведя его в квадрат; дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых), получим

$$D\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=\frac{D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n)}{n^2}.$$

По условию дисперсии всех случайных величин ограничены постоянным числом C, т. е. имеют место неравенства: $D(X_1)\leqslant C$; $D(X_2)\leqslant C$; ...; $D(X_n)\leqslant C$, поэтому

$$(D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n))/n^2\leqslant(C+C+\ldots+C)/n^2= \\ =nC/n^2=C/n.$$

Итак,

$$D\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)\leqslant\frac{C}{n}. \qquad (***)$$

Подставляя правую часть (***) в неравенство (**) (отчего последнее может быть лишь усилено), имеем

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\right.\right. \\ \left.\left.-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n\to\infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\right.\right. \\ \left.\left.-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1.$$

Наконец, учитывая, что вероятность не может превышать единицу, окончательно можем написать

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\right.\right. \\ \left.\left.-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Теорема доказана.

Выше, формулируя теорему Чебышева, мы предполагали, что случайные величины имеют различные математические ожидания. На практике часто бывает, что случайные величины имеют одно и то же математическое ожидание. Очевидно, что если вновь допустить, что дисперсии этих величин ограничены, то к ним будет применима теорема Чебышева.

Обозначим математическое ожидание каждой из случайных величин через a; в рассматриваемом случае среднее арифметическое математических ожиданий, как легко видеть, также равно a. Мы можем сформулировать теорему Чебышева для рассматриваемого частного случая.

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — попарно независимые случайные величины, имеющие одно и то же математическое ожидание a, и если дисперсии этих величин равномерно ограничены, то, как бы мало ни было число $\varepsilon > 0$, вероятность неравенства

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a \right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Другими словами, в условиях теоремы будет иметь место равенство

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

§ 4. Сущность теоремы Чебышева

Сущность доказанной теоремы такова: хотя отдельные независимые случайные величины могут принимать значения, далекие от своих математических ожиданий, среднее арифметическое достаточно большого числа случайных величин с большой вероятностью принимает значения, близкие к определенному постоянному числу, а именно к числу $(M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n))/n$ (или к числу a в частном случае). Иными словами, отдельные случайные величины могут иметь значительный разброс, а их среднее арифметическое рассеянно мало.

Таким образом, нельзя уверенно предсказать, какое возможное значение примет каждая из случайных величин, но можно предвидеть, какое значение примет их среднее арифметическое.

Итак, *среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин* (дисперсии которых равномерно ограничены) *утрачивает характер случайной величины.* Объясняется это тем, что отклонения каждой из величин от своих математических ожиданий могут быть как положительными, так и отрицательными, а в среднем арифметическом они взаимно погашаются.

Теорема Чебышева справедлива не только для дискретных, но и для непрерывных случайных величин; она является ярким примером, подтверждающим справедливость учения диалектического материализма о связи между случайностью и необходимостью.

§ 5. Значение теоремы Чебышева для практики

Приведем примеры применения теоремы Чебышева к решению практических задач.

Обычно для измерения некоторой физической величины производят несколько измерений и их среднее арифметическое принимают в качестве искомого размера. При каких условиях этот способ измерения можно считать правильным? Ответ на этот вопрос дает теорема Чебышева (ее частный случай).

Действительно, рассмотрим результаты каждого измерения как случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$. К этим величинам можно применить теорему Чебышева, если: 1) они попарно независимы, 2) имеют одно и то же математическое ожидание, 3) дисперсии их равномерно ограничены.

Первое требование выполняется, если результат каждого измерения не зависит от результатов остальных. Второе требование выполняется, если измерения произведены без систематических (одного знака) ошибок. В этом случае математические ожидания всех случайных величин одинаковы и равны истинному размеру a. Третье требование выполняется, если прибор обеспечивает определенную точность измерений. Хотя при этом результаты отдельных измерений различны, но рассеяние их ограничено.

Если все указанные требования выполнены, мы вправе применить к результатам измерений теорему Чебышева: при достаточно большом n вероятность неравенства

$$|(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n-a|<\varepsilon$$

как угодно близка к единице. Другими словами, при достаточно большом числе измерений почти достоверно, что их среднее арифметическое как угодно мало отличается от истинного значения измеряемой величины.

Итак, теорема Чебышева указывает условия, при которых описанный способ измерения может быть применен. Однако ошибочно думать, что, увеличивая число измерений, можно достичь сколь угодно большой точности. Дело в том, что сам прибор дает показания лишь с точностью $\pm\alpha$; поэтому каждый из результатов измерений, а следовательно, и их среднее арифметическое будут получены лишь с точностью, не превышающей точности прибора.

На теореме Чебышева основан широко применяемый в статистике выборочный метод, суть которого состоит в том, что по сравнительно небольшой случайной выборке судят о всей совокупности (генеральной совокупности) исследуемых объектов. Например, о качестве кипы хлопка заключают по небольшому пучку, состоящему из волокон, наудачу отобранных из разных мест кипы. Хотя число волокон в пучке значительно меньше, чем в кипе, сам пучок содержит достаточно большое количество волокон, исчисляемое сотнями.

В качестве другого примера можно указать на определение качества зерна по небольшой его пробе. И в этом случае число наудачу отобранных зерен мало сравнительно со всей массой зерна, но само по себе оно достаточно велико.

Уже из приведенных примеров можно заключить, что *для практики* теорема Чебышева имеет неоценимое значение.

§ 6. Теорема Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Можно ли предвидеть, какова примерно будет относительная частота появлений события? Положительный ответ на этот вопрос дает теорема, доказанная Якобом Бернулли (опубликована в 1713 г.), которая получила название «закона больших чисел» и положила начало теории вероятностей как науке. Доказательство Бернулли было сложным; простое доказательство дано П. Л. Чебышевым в 1846 г.

Теорема Бернулли. *Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико.*

Другими словами, если ε — сколь угодно малое положительное число, то при соблюдении условий теоремы имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} P(|m/n - p| < \varepsilon) = 1.$$

Доказательство. Обозначим через X_1 дискретную случайную величину — число появлений события в первом испытании, через X_2 — во втором, ..., X_n — в n-м испытании. Ясно, что каждая из величин может принять лишь два значения: 1 (событие A наступило) с вероятностью p и 0 (событие не появилось) с вероятностью $1 - p = q$.

Можно ли применить к рассматриваемым величинам теорему Чебышева? Можно, если случайные величины попарно независимы и дисперсии их ограничены. Оба условия выполняются Действительно, попарная независимость величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ следует из того, что испытания независимы. Дисперсия любой величины X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) равна произведению pq *); так как $p + q = 1$, то произведение pq не превышает **) 1/4 и, следовательно, дисперсии всех величин ограничены, например, числом $C = 1/4$.

Применяя теорему Чебышева (частный случай) к рассматриваемым величинам, имеем

$$\lim_{n \to \infty} P(|(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n - a| < \varepsilon) = 1.$$

Приняв во внимание, что математическое ожидание a каждой из величин X_i (т. е. математическое ожидание числа появлений события в одном испытании) равно вероятности p наступления события (см. гл. VII, § 2, пример 2), получим

$$\lim_{n \to \infty} P(|(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n - p| < \varepsilon) = 1.$$

Остается показать, что дробь $(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$ равна относительной частоте m/n появлений события A в испытаниях. Действительно, каждая из величин X_1, X_2, .., X_n при появлении события в соответствующем испытании принимает значение, равное единице; следо-

---

*) Это следует из § 6 гл. VIII, если принять $n = 1$.

**) Известно, что произведение двух сомножителей, сумма которых есть величина постоянная, имеет наибольшее значение при равенстве сомножителей. Здесь сумма $p_i + q_i = 1$, т. е. постоянна, поэтому при $p_i = q_i = 1/2$ произведение $p_i q_i$ имеет наибольшее значение и равно 1/4.

вательно, сумма $X_1+X_2+\ldots+X_n$ равна числу m появлений события в n испытаниях, а значит,

$$(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n=m/n.$$

Учитывая это равенство, окончательно получим

$$\lim_{n\to\infty} P(|m/n-p|<\varepsilon)=1.$$

Замечание. Было бы неправильным на основании теоремы Бернулли сделать вывод, что с ростом числа испытаний относительная частота неуклонно стремится к вероятности p; другими словами, из теоремы Бернулли не вытекает равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(m/n)=p$. В теореме речь идет лишь о вероятности того, что при достаточно большом числе испытаний относительная частота будет как угодно мало отличаться от постоянной вероятности появления события в каждом испытании.

Таким образом, сходимость относительной частоты m/n к вероятности p отличается от сходимости в смысле обычного анализа. Для того чтобы подчеркнуть это различие, вводят понятие «сходимости по вероятности»*). Точнее, различие между указанными видами сходимости состоит в следующем: если m/n стремится при $n\to\infty$ к p как пределу в смысле обычного анализа, то начиная с некоторого $n=N$ и для всех последующих значений n неуклонно выполняется неравенство $|m/n-p|<\varepsilon$; если же m/n стремится по вероятности к p при $n\to\infty$, то для отдельных значений n неравенство может не выполняться.

Итак, теорема Бернулли утверждает, что при $n\to\infty$ относительная частота стремится по вероятности к p. Коротко теорему Бернулли записывают так:

$$\frac{m}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{вер}}p.$$

Как видим, теорема Бернулли объясняет, почему относительная частота при достаточно большом числе испытаний обладает свойством устойчивости и оправдывает статистическое определение вероятности (см. гл. I, § 6—7).

Задачи

1. Сформулировать и записать теорему Чебышева, используя понятие «сходимости по вероятности».

2. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X-M(X)|<0{,}1$, если $D(X)=0{,}001$.

Отв. $P\geqslant 0{,}9$.

3. Дано: $P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geqslant 0{,}9$; $D(X)=0{,}004$. Используя неравенство Чебышева, найти ε.

Отв. 0,2.

---

*) Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ сходится по вероятности к случайной величине X, если для любого $\varepsilon>0$ вероятность неравенства $|X_n-X|<\varepsilon$ при $n\to\infty$ стремится к единице.

Глава десятая

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 1. Определение функции распределения

Вспомним, что дискретная случайная величина может быть задана перечнем всех ее возможных значений и их вероятностей. Такой способ задания не является общим: он неприменим, например, для непрерывных случайных величин.

Действительно, рассмотрим случайную величину X, возможные значения которой сплошь заполняют интервал (a, b). Можно ли составить перечень всех возможных значений X? Очевидно, что этого сделать нельзя. Этот пример указывает на целесообразность дать общий способ задания любых типов случайных величин. С этой целью и вводят функции распределения вероятностей случайной величины.

Пусть x — действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее x, т. е. вероятность события $X < x$, обозначим через $F(x)$. Разумеется, если x изменяется, то, вообще говоря, изменяется и $F(x)$, т. е. $F(x)$ — функция от x.

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x.

Иногда вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция».

Теперь можно дать более точное определение непрерывной случайной величины: случайную величину называют *непрерывной*, если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

§ 2. Свойства функции распределения

Свойство 1. *Значения функции распределения принадлежат отрезку* [0, 1]:

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1.$$

Доказательство. Свойство вытекает из определения функции распределения как вероятности: вероятность всегда есть неотрицательное число, не превышающее единицы.

Свойство 2. $F(x)$ — *неубывающая функция, т. е.*

$$F(x_2) \geqslant F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

Доказательство. Пусть $x_2 > x_1$. Событие, состоящее в том, что X примет значение, меньшее x_2, можно подразделить на следующие два несовместных события: 1) X примет значение, меньшее x_1, с вероятностью $P(X < x_1)$; 2) X примет значение, удовлетворяющее неравенству $x_1 \leqslant X < x_2$, с вероятностью $P(x_1 \leqslant X < x_2)$. По теореме сложения имеем

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leqslant X < x_2).$$

Отсюда

$$P(X < x_2) - P(X < x_1) = P(x_1 \leqslant X < x_2),$$

или

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \leqslant X < x_2). \qquad (*)$$

Так как любая вероятность есть число неотрицательное, то $F(x_2) - F(x_1) \geqslant 0$, или $F(x_2) \geqslant F(x_1)$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале* (a, b), *равна приращению функции распределения на этом интервале:*

$$P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a). \qquad (**)$$

Это важное следствие вытекает из формулы (*), если положить $x_2 = b$ и $x_1 = a$.

Пример. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -1; \\ x/4 + 1/4 & \text{при} \quad -1 < x \leqslant 3; \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу (0, 2):

$$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0).$$

Решение. Так как на интервале (0, 2), по условию,

$$F(x) = x/4 + 1/4,$$

то

$$F(2) - F(0) = (2/4 + 1/4) - (0/4 + 1/4) = 1/2.$$

Итак,

$$P(0 < X < 2) = 1/2.$$

Следствие 2. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.*

Действительно, положив в формуле (**) $a = x_1$, $b = x_1 + \Delta x$, имеем

$$P(x_1 \leqslant X < x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1).$$

Устремим Δx к нулю. Так как X — непрерывная случайная величина, то функция $F(x)$ непрерывна. В силу непрерывности $F(x)$ в точке x_1 разность $F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)$ также стремится к нулю; следовательно, $P(X = x_1) = 0$. Используя это положение, легко убедиться в справедливости равенств

$$P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b) = \\ = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b). \qquad (***)$$

Например, равенство $P(a < X \leqslant b) = P(a < X < b)$ доказывается так:

$$P(a < X \leqslant b) = P(a < X < b) + P(X = b) = P(a < X < b).$$

Таким образом, не представляет интереса говорить о вероятности того, что непрерывная случайная величина примет одно определенное значение, но имеет смысл рассматривать вероятность попадания ее в интервал, пусть даже сколь угодно малый. Этот фак полностью соответствует требованиям практических задач. Например, интересуются вероятностью того, что размеры деталей не выходят за дозволенные границы, но не ставят вопроса о вероятности их совпадения с проектным размером.

Заметим, что было бы неправильным думать, что равенство нулю вероятности $P(X = x_1)$ означает, что событие $X = x_1$ невозможно (если, конечно, не ограничиваться классическим определением вероятности). Действительно, в результате испытания случайная величина обязательно примет одно из возможных значений; в частности, это значение может оказаться равным x_1.

Свойство 3. *Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу* (a, b), *то*: 1) $F(x)=0$ *при* $x \leqslant a$; 2) $F(x)=1$ *при* $x \geqslant b$.

Доказательство. 1) Пусть $x_1 \leqslant a$. Тогда событие $X < x_1$ невозможно (так как значений, меньших x_1, величина X по условию не принимает) и, следовательно, вероятность его равна нулю.

2) Пусть $x_2 \geqslant b$. Тогда событие $X < x_2$ достоверно (так как все возможные значения X меньше x_2) и, следовательно, вероятность его равна единице.

Следствие. *Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси* x, *то справедливы следующие предельные соотношения:*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x)=0; \quad \lim_{x \to \infty} F(x)=1.$$

§ 3. График функции распределения

Доказанные свойства позволяют представить, как выглядит график функции распределения непрерывной случайной величины.

График расположен в полосе, ограниченной прямыми $y=0$, $y=1$ (первое свойство).

При возрастании x в интервале (a, b), в котором заключены все возможные значения случайной величины, график «подымается вверх» (второе свойство).

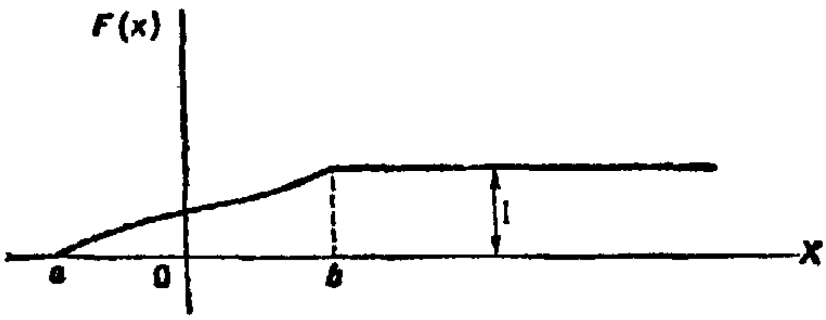

Рис. 2

При $x \leqslant a$ ординаты графика равны нулю; при $x \geqslant b$ ординаты графика равны единице (третье свойство).

График функции распределения непрерывной случайной величины изображен на рис. 2.

Замечание. График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид. Убедимся в этом на примере.

Пример. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения

X	1	4	8
p	0,3	0,1	0,6

Найти функцию распределения и вычертить ее график.

Решение. Если $x \leqslant 1$, то $F(x)=0$ (третье свойство).

Если $1 < x \leqslant 4$, то $F(x)=0{,}3$. Действительно, X может принять значение 1 с вероятностью 0,3.

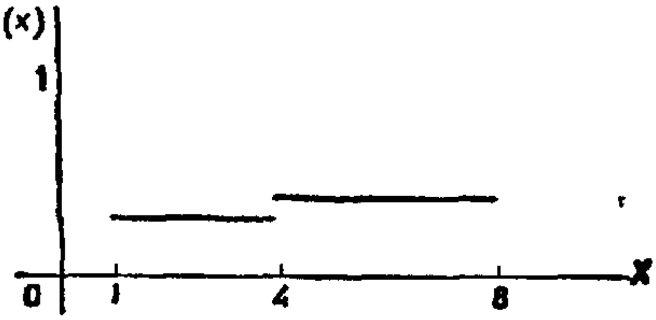

Рис. 3

Если $4 < x \leqslant 8$, то $F(x)=0{,}4$. Действительно, если x_1 удовлетворяет неравенству $4 < x_1 \leqslant 8$, то $F(x_1)$ равно вероятности события $X < x_1$, которое может быть осуществлено, когда X примет значение 1 (вероятность этого события равна 0,3) или значение 4 (вероятность этого события равна 0,1). Поскольку эти два события несовместны, то по теореме сложения вероятность события $X < x_1$ равна сумме вероятностей $0{,}3+0{,}1=0{,}4$.

Если $x > 8$, то $F(x)=1$. Действительно, событие $X \leqslant 8$ достоверно, следовательно, его вероятность равна единице.

Итак, функция распределения аналитически может быть записана так:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 1, \\ 0{,}3 & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 4, \\ 0{,}4 & \text{при} \quad 4 < x \leqslant 8, \\ 1 & \text{при} \quad x > 8. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рис. 3.

Задачи

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -1, \\ x/3+1/3 & \text{при} \quad -1 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (0, 1).

Отв. 1/3.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 2, \\ (x/2)-1 & \text{при} \quad 2 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (2, 3).

Отв. 1/2.

3. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	2	6	10
p	0,5	0,4	0,1

Построить график функции распределения этой величины.

Глава одиннадцатая

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 1. Определение плотности распределения

Выше непрерывная случайная величина задавалась с помощью функции распределения. Этот способ задания не является единственным. Непрерывную случайную величину можно также задать, используя другую функцию, которую называют плотностью распределения или плотностью вероятности (иногда ее называют дифференциальной функцией).

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ — первую производную от функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x).$$

Из этого определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности распределения.

Заметим, что для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины плотность распределения неприменима.

§ 2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее заданному интервалу. Вычисление основано на следующей теореме.

Теорема. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности* *распределения, взятому в пределах от a до b:*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Используем соотношение (**) (см. гл. X, § 2)

$$P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a).$$

По формуле Ньютона — Лейбница,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$P(a \leqslant X < b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Так как $P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$, то окончательно получим

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (*)$$

Геометрически полученный результат можно истолковать так: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, кривой распределения $f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$.

Замечание. В частности, если $f(x)$ — четная функция и концы интервала симметричны относительно начала координат, то

$$P(-a < X < a) = P(|X| < a) = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Пример. Задана плотность вероятности случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ 2x & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу (0,5; 1).

Решение. Искомая вероятность

$$P(0{,}5 < X < 1) = 2\int_{0,5}^{1} x\,dx = x^2 \Big|_{0,5}^{1} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

§ 3. Нахождение функции распределения по известной плотности распределения

Зная плотность распределения $f(x)$, можно найти функцию распределения $F(x)$ по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Действительно, мы обозначили через $F(x)$ вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее x, т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Очевидно, неравенство $X < x$ можно записать в виде двойного неравенства $-\infty < X < x$, следовательно,

$$F(x) = P(-\infty < X < x). \qquad (*)$$

Полагая в формуле (*) (см. § 2) $a = -\infty$, $b = x$, имеем

$$P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Наконец, заменив $P(-\infty < X < x)$ на $F(x)$, в силу (*), окончательно получим

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Таким образом, зная плотность распределения, можно найти функцию распределения. Разумеется, по известной функции распределения может быть найдена плотность распределения, а именно:

$$f(x) = \Gamma'(x).$$

Пример. Найти функцию распределения по данной плотности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq a, \\ 1/(b-a) & \text{при} \quad a < x \leq b, \\ 0 & \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

Построить график найденной функции.

Решение. Воспользуемся формулой $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$

Если $x \leqslant a$, то $f(x)=0$, следовательно, $F(x)=0$. Если $a < x \leqslant b$, то $f(x)=1/(b-a)$, следовательно,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{a} 0\,dx+\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{x-a}{b-a}.$$

Если $x > b$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{a} 0\,dx+\int_{a}^{b}\frac{dx}{b-a}+\int_{b}^{x} 0\,dx=\frac{b-a}{b-a}=1.$$

Итак, искомая функция распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant a, \\ (x-a)/(b-a) & \text{при} \quad a < x \leqslant b, \\ 1 & \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 4.

§ 4. Свойства плотности распределения

Свойство 1. *Плотность распределения — неотрицательная функция:*

$$f(x) \geqslant 0.$$

Доказательство. Функция распределения — неубывающая функция, следовательно, ее производная $F'(x)=f(x)$ — функция неотрицательная.

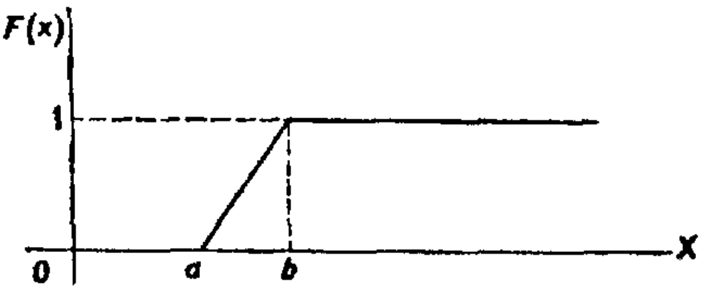

Рис. 4

Геометрически это свойство означает, что точки, принадлежащие графику плотности распределения, расположены либо над осью Ox, либо на этой оси.

График плотности распределения называют *кривой распределения.*

Свойство 2. *Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до ∞ равен единице:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1.$$

Доказательство. Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ выражает вероятность события, состоящего в том, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(-\infty, \infty)$. Очевидно, такое событие достоверно, следовательно, вероятность его равна единице.

Геометрически это означает, что вся площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox и кривой распределения, равна единице.

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1.$$

Пример. Плотность распределения случайной величины X задана:

$$f(x) = \frac{a}{e^{-x}+e^{x}}.$$

Найти постоянный параметр a.

Решение. *Плотность распределения должна удовлетворять условию* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, поэтому потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$a\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x}+e^{x}} = 1.$$

Отсюда

$$a = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x}+e^{x}}}.$$

Найдем неопределенный интеграл:

$$\int \frac{dx}{e^{-x}+e^{x}} = \int \frac{e^{x}\,dx}{1+e^{2x}} = \operatorname{arctg} e^{x}.$$

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x}+e^{x}} = \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 \frac{dx}{e^{-x}+e^{x}} + \lim_{c\to\infty}\int_0^c \frac{dx}{e^{-x}+e^{x}} =$$

$$= \lim_{b\to-\infty}(-\operatorname{arctg} e^{b}) + \lim_{c\to\infty}(\operatorname{arctg} e^{c}) = \pi/2.$$

Таким образом, искомый параметр

$$a = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

§ 5. Вероятностный смысл плотности распределения

Пусть $F(x)$ — функция распределения непрерывной случайной величины X. По определению плотности распределения, $f(x) = F'(x)$, или в иной форме

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Как уже известно, разность $F(x+\Delta x) - F(x)$ определяет вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(x, x+\Delta x)$. Таким образом, предел отношения вероятности того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(x, x+\Delta x)$, к длине этого интервала (при $\Delta x \to 0$) равен значению плотности распределения в точке x.

По аналогии с определением плотности массы в точке *) целесообразно рассматривать значение функции $f(x)$ в точке x как плотность вероятности в этой точке.

Итак, функция $f(x)$ определяет плотность распределения вероятности для каждой точки x.

Из дифференциального исчисления известно, что приращение функции приближенно равно дифференциалу функции, т. е.

$$F(x+\Delta x) - F(x) \simeq dF(x),$$

или

$$F(x+\Delta x) - F(x) \simeq F'(x)\, dx.$$

Так как $F'(x) = f(x)$ и $dx = \Delta x$, то

$$F(x+\Delta x) - F(x) \simeq f(x)\, \Delta x.$$

Вероятностный смысл этого равенства таков: вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(x, x+\Delta x)$, приближенно равна (с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно Δx) произведению плотности вероятности в точке x на длину интервала Δx.

---

*) Если масса непрерывно распределена вдоль оси x по некоторому закону, например $F(x)$, то плотностью $\rho(x)$ массы в точке x называют предел отношения массы интервала $(x, x+\Delta x)$ к длине интервала при $\Delta x \to 0$, т. е. $\rho(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$.

Геометрически этот результат можно истолковать так: вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(x, x+\Delta x)$, приближенно равна площади прямоугольника с основанием Δx и высотой $f(x)$.

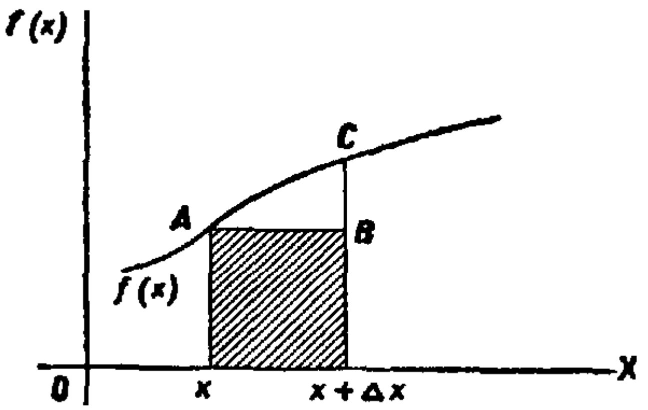

Рис. 5

На рис. 5 видно, что площадь заштрихованного прямоугольника, равная произведению $f(x)\Delta x$, лишь приближенно равна площади криволинейной трапеции (истинной вероятности, определяемой определенным интегралом $\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(x)\,dx$). Допущенная при этом погрешность равна площади криволинейного треугольника ABC.

§ 6. Закон равномерного распределения вероятностей

При решении задач, которые выдвигает практика, приходится сталкиваться с различными распределениями непрерывных случайных величин. Плотности распределений непрерывных случайных величин называют также *законами распределений*. Часто встречаются, например, законы равномерного, нормального и показательного распределений. В настоящем параграфе рассматривается закон равномерного распределения вероятностей. Нормальному и показательному законам посвящены следующие две главы.

Распределение вероятностей называют *равномерным*, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение.

Приведем пример равномерно распределенной непрерывной случайной величины.

Пример. Шкала измерительного прибора проградуирована в некоторых единицах. Ошибку при округлении отсчета до ближайшего целого деления можно рассматривать как случайную величину X, которая может принимать с постоянной плотностью вероятности любое значение между двумя соседними целыми делениями. Таким образом, X имеет равномерное распределение.

Найдем плотность равномерного распределения $f(x)$, считая, что все возможные значения случайной величины заключены в интервале (a, b), на котором функция $f(x)$ сохраняет постоянные значения:
По условию, X не принимает значений вне интервала (a, b), поэтому $f(x)=0$ при $x < a$ и $x > b$.

Найдем постоянную C. Так как все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то должно выполняться соотношение

$$\int_a^b f(x)\,dx=1, \quad \text{или} \quad \int_a^b C\,dx=1.$$

Отсюда

$$C=1/\int_a^b dx=1/(b-a).$$

Итак, искомая плотность вероятности равномерного распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\leqslant a, \\ 1/(b-a) & \text{при} \quad a < x\leqslant b, \\ 0 & \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

График плотности равномерного распределения изображен на рис. 6, а график функции распределения — на рис. 4.

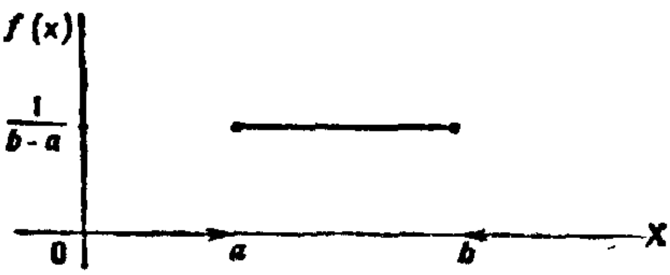

Рис. 6

Замечание. Обозначим через R непрерывную случайную величину, распределенную равномерно в интервале $(0, 1)$, а через r — ее возможные значения. Вероятность попадания величины R (в результате испытания) в интервал (c, d), принадлежащий интервалу $(0, 1)$, равна его длине:

$$P(c < R < d)=d-c.$$

Действительно, плотность рассматриваемого равномерного распределения

$$f(r)=1/(1-0)=1.$$

Следовательно, вероятность попадания случайной величины R в интервал (c, d) (см. гл. XI, § 2)

$$P(c < R < d)=\int_c^d f(r)\,dr=\int_c^d 1\cdot dr=d-c.$$

Далее случайная величина R используется неоднократно (см. гл. XXI).

1. Случайная величина задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\leqslant -\pi/2, \\ a\cos x & \text{при} \quad -\pi/2 < x\leqslant \pi/2, \\ 0 & \text{при} \quad x>\pi/2. \end{cases}$$

Найти коэффициент a.

Отв. $a=1/2$.

2. Случайная величина задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\leqslant 0, \\ (\sin x)/2 & \text{при} \quad 0 < x\leqslant \pi, \\ 0 & \text{при} \quad x>\pi. \end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения; б) вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(0, \pi/4)$.

Отв. $$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\leqslant 0, \\ (1-\cos x)/2 & \text{при} \quad 0 < x\leqslant \pi, \\ 1 & \text{при} \quad x>\pi. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\leqslant 0, \\ x & \text{при} \quad 0 < x\leqslant 1, \\ 1 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения.

Отв. $f(x)=1$ в интервале $(0, 1)$; вне этого интервала $f(x)=0$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x=0, \\ (1-\cos x)/2 & \text{при} \quad 0 < x\leqslant \pi, \\ 1 & \text{при} \quad x>\pi. \end{cases}$$

Отв. $f(x)=(\sin x)/2$ в интервале $(0, \pi)$; вне этого интервала $f(x)=0$.

Глава двенадцатая

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

§ 1. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Распространим определения числовых характеристик дискретных величин на величины непрерывные. Начнем с математического ожидания.

Пусть непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Допустим, что все возможные значения X принадлежат отрезку $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на n частичных отрезков длиной $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ и выберем в каждом из них произвольную точку x_i ($=1, 2, \ldots, n$). Нам надо определить математическое ожидание непрерывной величины по аналогии с дискретной; составим сумму произведений возможных значений x_i на вероятности попадания их в интервал Δx_i (напомним, что произведение $f(x)\Delta x$ приближенно равно вероятности попадания X в интервал Δx):

$$\sum x_i f(x_i)\Delta x_i.$$

Перейдя к пределу при стремлении к нулю длины наибольшего из частичных отрезков, получим определенный интеграл $\int\limits_a^b xf(x)\,dx$.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называют определенный интеграл

$$M(X)=\int\limits_a^b xf(x)\,dx. \qquad (*)$$

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx.$$

Предполагается, что несобственный интеграл сходится абсолютно, т. е. существует интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)\,dx$. Если бы это требование не выполнялось, то значение интеграла зависело бы от скорости стремления (в отдельности) нижнего предела к $-\infty$, а верхнего — к $+\infty$.

По аналогии с дисперсией дискретной величины определяется и дисперсия непрерывной величины.

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения.

Если возможные значения X принадлежат отрезку $[a, b]$, то

$$D(X)=\int\limits_a^b [x-M(X)]^2 f(x)\,dx;$$

если возможные значения принадлежат всей оси x, то

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2 f(x)\,dx.$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется, как и для величины дискретной, равенством

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Замечание 1. Можно доказать, что свойства математического ожидания и дисперсии дискретных величин сохраняются и для непрерывных величин.

Замечание 2. Легко получить для вычисления дисперсии более удобные формулы:

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2, \qquad (**)$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2.$$

Пример 1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0,\\ x & \text{при} \quad 0<x\leqslant 1,\\ 1 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

Решение. Найдем плотность распределения:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0,\\ 1 & \text{при} \quad 0<x<1.\\ 0 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

Найдем математическое ожидание по формуле (*):

$$M(X)=\int_0^1 x\cdot 1\cdot dx=x^2/2\Big|_0^1=1/2.$$

Найдем дисперсию по формуле (**):

$$D(X)=\int_0^1 x^2\cdot 1\cdot dx-[1/2]^2=x^3/3\Big|_0^1-1/4=1/12.$$

Пример 2. Найти математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (a, b).

Решение. Найдем математическое ожидание X по формуле (*), учитывая, что плотность равномерного распределения $f(x)=1/(b-a)$

(см. гл. XI, § 6):

$$M(X)=\int_a^b xf(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx.$$

Выполнив элементарные выкладки, получим

$$M(X)=(a+b)/2.$$

Найдем дисперсию X по формуле (**):

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx-\left[\frac{a+b}{2}\right]^2.$$

Выполнив элементарные выкладки, получим

$$D(X)=(b-a)^2/12.$$

Замечание 3. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины R, распределенной равномерно в интервале (0, 1), т. е. если $a=0$, $b=1$, как следует из примера 2, соответственно равны $M(R)=1/2$, $D(R)=1/12$. Этот же результат мы получили в примере 1 по заданной функции распределения случайной величины R.

§ 2. Нормальное распределение

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}.$$

Мы видим, что *нормальное распределение определяется двумя параметрами*: a и σ. Достаточно знать эти параметры, чтобы задать нормальное распределение. Покажем, что вероятностный смысл этих параметров таков: a есть математическое ожидание, σ — среднее квадратическое отклонение нормального распределения.

а) По определению математического ожидания непрерывной случайной величины,

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\,dx.$$

Введем новую переменную $z=(x-a)/\sigma$. Отсюда $x=\sigma z+a$, $dx=\sigma\,dz$. Приняв во внимание, что новые пределы интегрирования равны старым, получим

$$M(X)=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+a)\,e^{-z^2/2}\,dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma z e^{-z^2/2}\,dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}\,dz.$$

Первое из слагаемых равно нулю (под знаком интеграла нечетная функция; пределы интегрирования симметричны относительно начала координат). Второе из слагаемых равно a $\left(\text{интеграл Пуассона } \int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}\,dz=\sqrt{2\pi}\right)$.

Итак, $M(X)=a$, т. е. *математическое ожидание нормального распределения равно параметру a.*

б) По определению дисперсии непрерывной случайной величины, учитывая, что $M(X)=a$, имеем

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\,e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\,dx.$$

Введем новую переменную $z=(x-a)/\sigma$. Отсюда $x-a=\sigma z$, $dx=\sigma\,dz$. Приняв во внимание, что новые пределы интегрирования равны старым, получим

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}z\cdot z e^{-z^2/2}\,dz.$$

Интегрируя по частям, положив $u=z$, $dv=ze^{-z^2/2}\,dz$, найдем

$$D(X)=\sigma^2.$$

Следовательно,

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\sigma^2}=\sigma.$$

Итак, *среднее квадратическое отклонение нормального распределения равно параметру σ.*

Замечание 1. *Общим* называют нормальное распределение с произвольными параметрами a и σ ($\sigma>0$).

Нормированным называют нормальное распределение с параметрами $a=0$ и $\sigma=1$. Например, если X — нормальная величина с параметрами a и σ, то $U=(X-a)/\sigma$ — нормированная нормальная величина, причем $M(U)=0$, $\sigma(U)=1$.

Плотность нормированного распределения

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

Эта функция табулирована (см. приложение 1).

Замечание 2. Функция $F(x)$ общего нормального распределения (см. гл. XI, § 3)

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-(z-a)^2/(2\sigma^2)}\,dz,$$

а функция нормированного распределения

$$F_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-z^2/2}\,dz.$$

Функция $F_0(x)$ табулирована. Легко проверить, что

$$F(x)=F_0((x-a)/\sigma).$$

Замечание 3. Вероятность попадания нормированной нормальной величины X в интервал $(0, x)$ можно найти, пользуясь функцией Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-z^2/2}\,dz$. Действительно (см. гл. XI, § 2),

$$P(0<X<x)=\int\limits_{0}^{x}\varphi(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-z^2/2}\,dz=\Phi(x).$$

Замечание 4. Учитывая, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx=1$ (см. гл. XI, § 4, свойство 2), и, следовательно, в силу симметрии $\varphi(x)$ относительно нуля

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx=0{,}5, \text{ а значит, и } P(-\infty<X<0)=0{,}5,$$

легко получить, что

$$F_0(x)=0{,}5+\Phi(x).$$

Действительно,

$$F_0(x)=P(-\infty<X<x)=P(-\infty<X<0)+P(0<X<x)=$$
$$=0{,}5+\Phi(x).$$

§ 3. Нормальная кривая

График плотности нормального распределения называют *нормальной кривой (кривой Гаусса)*.

Исследуем функцию

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}$$

методами дифференциального исчисления.

1. Очевидно, функция определена на всей оси x.

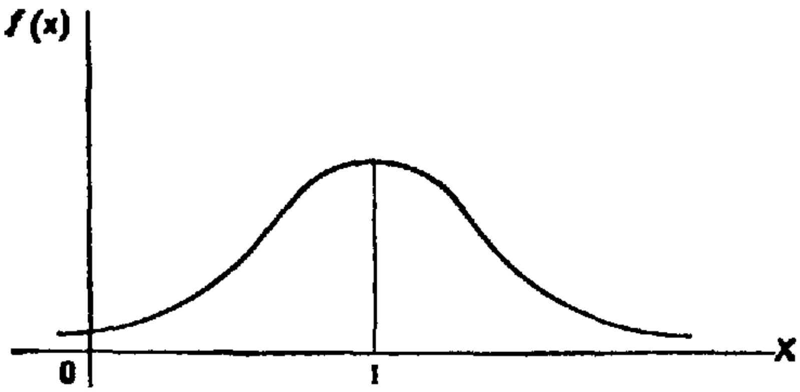

Рис. 7

2. При всех значениях x функция принимает положительные значения, т. е. нормальная кривая расположена над осью Ox.

3 Предел функции при неограниченном возрастании x (по абсолютной величине) равен нулю: $\lim\limits_{|x|\to\infty} y = 0$, т. е. ось Ox служит горизонтальной асимптотой графика.

4. Исследуем функцию на экстремум. Найдем первую производную:

$$y' = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}.$$

Легко видеть, что $y'=0$ при $x=a$, $y'>0$ при $x<a$, $y'<0$ при $x>a$.

Следовательно, при $x=a$ функция имеет максимум, равный $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$.

5. Разность $x-a$ содержится в аналитическом выражении функции в квадрате, т. е. график функции симметричен относительно прямой $x=a$.

6. Исследуем функцию на точки перегиба. Найдем вторую производную:

$$y'' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}\left[1-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right].$$

Легко видеть, что при $x=a+\sigma$ и $x=a-\sigma$ вторая производная равна нулю, а при переходе через эти точки она меняет знак (в обеих этих точках значение функции равно $1/(\sigma\sqrt{2\pi}\,e)$). Таким образом, точки графика $(a-\sigma,\ 1/(\sigma\sqrt{2\pi}e))$ и $(a+\sigma,\ 1/(\sigma\sqrt{2\pi}e))$ являются точками перегиба.

На рис. 7 изображена нормальная кривая при $a=1$ и $\sigma=2$.

§ 4. Влияние параметров нормального распределения на форму нормальной кривой

Выясним, как влияют на форму и расположение нормальной кривой значения параметров a и σ.

Известно, что графики функций $f(x)$ и $f(x-a)$ имеют одинаковую форму; сдвинув график $f(x)$ в положительном направлении оси x на a единиц масштаба при $a>0$ или в отрицательном направлении при $a<0$, получим график $f(x-a)$. Отсюда следует, что *изменение величины параметра* a (математического ожидания) *не изменяет формы нормальной кривой, а приводит лишь к ее сдвигу вдоль оси* Ox: *вправо, если* a *возрастает, и влево, если* a *убывает*.

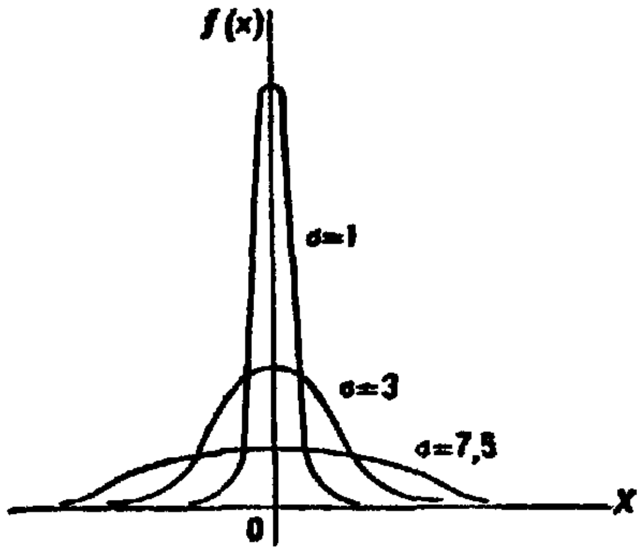

Рис. 8

По-иному обстоит дело, если изменяется параметр σ (среднее квадратическое отклонение). Как было указано в предыдущем параграфе, максимум дифференциальной функции нормального распределения равен $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$. Отсюда следует, что *с возрастанием* σ *максимальная ордината нормальной кривой убывает, а сама кривая становится более пологой, т. е. сжимается к оси* Ox; *при убывании* σ *нормальная кривая становится более «островершинной» и растягивается в положительном направлении оси* Oy.

Подчеркнем, что при любых значениях параметров a и σ площадь, ограниченная нормальной кривой и осью x, остается равной единице (см. гл. XI, § 4, второе свойство плотности распределения).

На рис. 8 изображены нормальные кривые при различных значениях σ и $a=0$. Чертеж наглядно иллюстрирует, как изменение параметра σ сказывается на форме нормальной кривой.

Заметим, что при $a=0$ и $\sigma=1$ нормальную кривую $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ называют *нормированной*.

§ 5. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины

Уже известно, что если случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$, то вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β), такова:

$$P(\alpha < X < \beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону. Тогда вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β), равна

$$P(\alpha < X < \beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}\,dx.$$

Преобразуем эту формулу так, чтобы можно было пользоваться готовыми таблицами. Введем новую переменную $z=(x-a)/\sigma$. Отсюда $x=\sigma z+a$, $dx=\sigma\,dz$. Найдем новые пределы интегрирования. Если $x=\alpha$, то $z=(\alpha-a)/\sigma$; если $x=\beta$, то $z=(\beta-a)/\sigma$.

Таким образом, имеем

$$P(\alpha < X < \beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-z^2/2}\,(\sigma\,dz)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(\alpha-a)/\sigma}^{0} e^{-z^2/2}\,dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-z^2/2}\,dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-z^2/2}\,dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{(\alpha-a)/\sigma} e^{-z^2/2}\,dz.$$

Пользуясь функцией Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}\,dz,$$

окончательно получим

$$P(\alpha < X < \beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \qquad (*)$$

Пример. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (10, 50).

Решение. Воспользуемся формулой (*). По условию, $\alpha=10$, $\beta=50$, $a=30$, $\sigma=10$, следовательно,

$$P(10 < X < 50)=\Phi\left(\frac{50-30}{10}\right)-\Phi\left(\frac{10-30}{10}\right)=2\Phi(2).$$

По таблице приложения 2 находим $\Phi(2)=0{,}4772$. Отсюда искомая вероятность

$$P(10 < X < 50)=2\cdot 0{,}4772=0{,}9544.$$

§ 6. Вычисление вероятности заданного отклонения

Часто требуется вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ, т. е. требуется найти вероятность осуществления неравенства $|X-a| < \delta$.

Заменим это неравенство равносильным ему двойным неравенством

$$-\delta < X-a < \delta, \quad \text{или} \quad a-\delta < X < a+\delta.$$

Пользуясь формулой (*) (см. § 5), получим

$$P(|X-a| < \delta)=P(a-\delta < X < a+\delta)=$$
$$=\Phi\left[\frac{(a+\delta)-a}{\sigma}\right]-\Phi\left[\frac{(a-\delta)-a}{\sigma}\right]=\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Приняв во внимание равенство

$$\Phi(-\delta/\sigma)=-\Phi(\delta/\sigma)$$

(функция Лапласа — нечетная), окончательно имеем

$$P(|X-a| < \delta)=2\Phi(\delta/\sigma).$$

В частности, при $a=0$

$$P(|X| < \delta)=2\Phi(\delta/\sigma).$$

На рис. 9 наглядно показано, что если две случайные величины нормально распределены и $a=0$, то вероятность принять значение, принадлежащее интервалу $(-\delta, \delta)$, больше у той величины, которая имеет меньшее значение σ. Этот факт полностью соответствует вероятностному смыслу параметра σ (σ есть среднее квадратическое отклонение; оно характеризует рассеяние случайной величины вокруг ее математического ожидания).

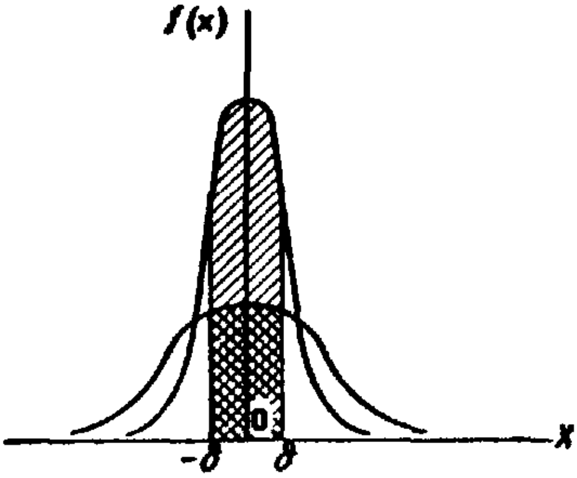

Рис. 9

Замечание. Очевидно, события, состоящие в осуществлении неравенств $|X-a|<\delta$ и $|X-a|\geqslant\delta$, — противоположные. Поэтому, если вероятность осуществления неравенства $|X-a|<\delta$ равна p, то вероятность неравенства $|X-a|\geqslant\delta$ равна $1-p$.

Пример. Случайная величина X распределена нормально. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение X соответственно равны 20 и 10. Найти вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше трех.

Решение. Воспользуемся формулой

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma).$$

По условию, $\delta=3$, $a=20$, $\sigma=10$. Следовательно,

$$P(|X-20|<3)=2\Phi(3/10)=2\Phi(0,3).$$

По таблице приложения 2 находим $\Phi(0,3)=0,1179$.

Искомая вероятность

$$P(|X-20|<3)=0,2358.$$

§ 7. Правило трех сигм

Преобразуем формулу (см. § 6)

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma),$$

положив $\delta=\sigma t$. В итоге получим

$$P(|X-a|<\sigma t)=2\Phi(t).$$

Если $t=3$ и, следовательно, $\sigma t=3\sigma$, то

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=2\cdot 0,49865=0,9973,$$

т. е. вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше утроенного среднего квадратического отклонения, равна 0,9973.

Другими словами, вероятность того, что абсолютная величина отклонения превысит утроенное среднее квадратическое отклонение, очень мала, а именно равна 0,0027. Это означает, что лишь в 0,27% случаев так может произойти. Такие события исходя из принципа невозможности маловероятных событий можно считать практически невозможными. В этом и состоит сущность правила трех сигм: *если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.*

На практике правило трех сигм применяют так: если распределение изучаемой случайной величины неизвестно, но условие, указанное в приведенном правиле, выполняется, то есть основание предполагать, что изучаемая величина распределена нормально; в противном случае она не распределена нормально.

§ 8. Понятие о теореме Ляпуиова. Формулировка центральной предельной теоремы

Известно, что нормально распределенные случайные величины широко распространены на практике. Чем это объясняется? Ответ на этот вопрос был дан выдающимся русским математиком А. М. Ляпуновым (центральная предельная теорема): *если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.*

Пример. Пусть производится измерение некоторой физической величины. Любое измерение дает лишь приближенное значение измеряемой величины, так как на результат измерения влияют очень многие независимые случайные факторы (температура, колебания прибора, влажность и др.). Каждый из этих факторов порождает ничтожную «частную ошибку». Однако, поскольку число этих факторов очень велико, нх совокупное действие порождает уже заметную «суммарную ошибку».

Рассматривая суммарную ошибку как сумму очень большого числа взаимно независимых частных ошибок, мы вправе заключить, что суммарная ошибка имеет распределение, близкое к нормальному. Опыт подтверждает справедливость такого заключения.

Приведем формулировку центральной предельной теоремы, которая устанавливает условия, при которых сумма большого числа независимых слагаемых имеет распределение, близкое к нормальному.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, каждая из которых имеет конечные математическое ожидание и дисперсию:

$$M(X_k) = a_k, \quad D(X_k) = b_k^2.$$

Введем обозначения:

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad B^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Обозначим функцию распределения нормированной суммы через

$$F_n(x) = P\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right).$$

Говорят, что к последовательности $X_1, X_2, \ldots$ применима центральная предельная теорема, если при любом x функция распределения нормированной суммы при $n \to \infty$ стремится к нормальной функции распределения:

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\, dz.$$

В частности, если все случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ одинаково распределены, то к этой последовательности применима центральная предельная теорема, если дисперсии всех величин X_i $(i = 1, 2, \ldots)$ конечны и отличны от нуля. А. М. Ляпунов доказал, что если для $\delta > 0$ при $n \to \infty$ отношение Ляпунова

$$L_n = C_n / B_n^{2+\delta}, \quad \text{где} \quad C_n = \sum_{k=1}^{n} M \,|\, X_k - a_k \,|^{2+\delta},$$

стремится к нулю (*условие Ляпунова*), то к последовательности $X_1, X_2, \ldots$ применима центральная предельная теорема.

Сущность условия Ляпунова состоит в требовании, чтобы каждое слагаемое суммы $(S_n - A_n)/B_n$ оказывало на сумму ничтожное влияние.

З а м е ч а н и е. Для доказательства центральной предельной теоремы А. М. Ляпунов использовал аппарат характеристических функций. Характеристической функцией случайной величины X называют функцию $\varphi(t) = M[e^{itX}]$.

Для дискретной случайной величины X с возможными значениями x_k и их вероятностями p_k характеристическая функция

$$\varphi(t)=\sum_k e^{itx_k} p_k.$$

Для непрерывной случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$ характеристическая функция

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx.$$

Можно доказать, что характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых.

§ 9. Оценка отклонения теоретического распределения от нормального. Асимметрия и эксцесс

Эмпирическим называют распределение относительных частот. Эмпирические распределения изучает математическая статистика.

Теоретическим называют распределение вероятностей. Теоретические распределения изучает теория вероятностей. В этом параграфе рассматриваются теоретические распределения.

При изучении распределений, отличных от нормального, возникает необходимость количественно оценить это различие. С этой целью вводят специальные характеристики, в частности асимметрию и эксцесс. Для нормального распределения эти характеристики равны нулю. Поэтому если для изучаемого распределения асимметрия и эксцесс имеют небольшие значения, то можно предположить близость этого распределения к нормальному. Наоборот, большие значения асимметрии и эксцесса указывают на значительное отклонение от нормального.

Как оценить асимметрию? Можно доказать, что для симметричного распределения (график такого распределения симметричен относительно прямой $x=M(X)$) каждый центральный момент нечетного порядка равен нулю. Для несимметричных распределений центральные моменты нечетного порядка отличны от нуля. Поэтому любой из этих моментов (кроме момента первого порядка, который равен нулю для любого распределения) может служить для оценки асимметрии; естественно выбрать простейший из них, т. е. момент третьего порядка μ_3. Однако принять этот момент для оценки асимметрии неудобно потому, что его величина зависит от единиц, в которых измеряется случайная величина. Чтобы устранить этот недостаток, μ_3 делят на σ^3 и таким образом получают безразмерную характеристику.

Асимметрией теоретического распределения называют отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднего квадратического отклонения:

$$A_s = \mu_3/\sigma^3.$$

Асимметрия положительна, если «длинная часть» кривой распределения расположена справа от математического ожидания; асимметрия отрицательна, если «длинная часть» кривой расположена слева от математического ожидания. Практически определяют знак асимметрии по расположению кривой распределения относительно моды (точки максимума дифференциальной функции): если «длинная часть» кривой расположена правее моды, то асимметрия положительна (рис. 10, *а*), если слева — отрицательна (рис. 10, *б*).

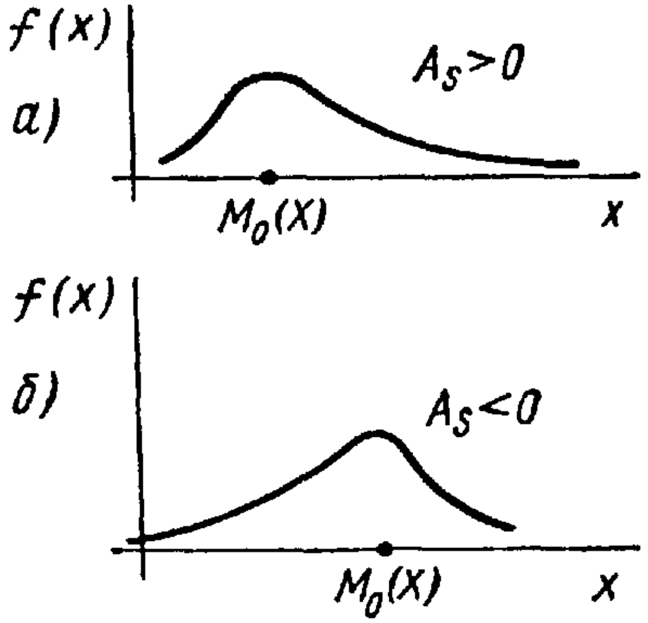

Рис. 10

Для оценки «крутости», т. е. большего или меньшего подъема кривой теоретического распределения по сравнению с нормальной кривой, пользуются характеристикой — эксцессом.

Эксцессом теоретического распределения называют характеристику, которая определяется равенством

$$E_k = (\mu_4/\sigma^4) - 3.$$

Для нормального распределения $\mu_4/\sigma^4 = 3$; следовательно, эксцесс равен нулю. Поэтому если эксцесс некоторого распределения отличен от нуля, то кривая этого распределе-

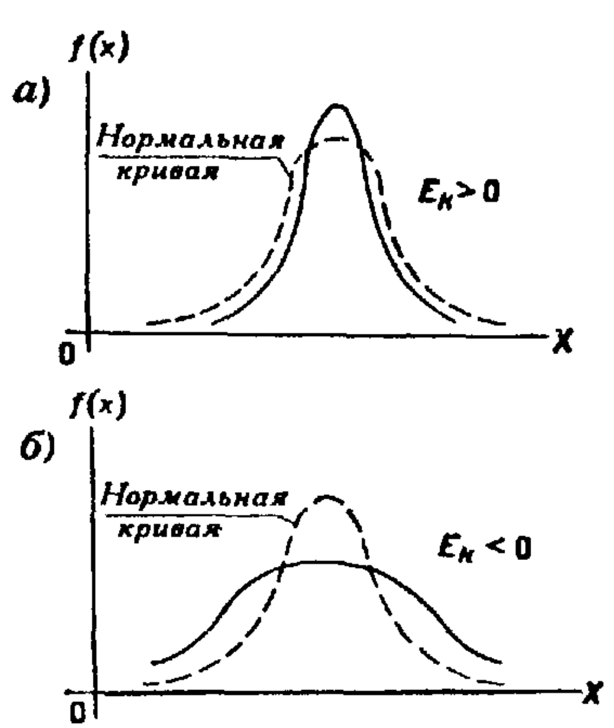

Рис. 11

ния отличается от нормальной кривой: если эксцесс положительный, то кривая имеет более высокую и «острую» вершину, чем нормальная кривая (рис. 11, *а*); если эксцесс отрицательный, то сравниваемая кривая имеет более низкую и «плоскую» вершину, чем нормальная кривая (рис. 11, *б*). При этом предполагается, что нормальное и теоретическое распределения имеют одинаковые математические ожидания и дисперсии.

§ 10. Функция одного случайного аргумента и ее распределение

Предварительно заметим, что далее, вместо того чтобы говорить «закон распределения вероятностей», будем часто говорить кратко—«распределение».

Если каждому возможному значению случайной величины X соответствует одно возможное значение случайной величины Y, то Y называют функцией случайного аргумента X:

$$Y=\varphi(X).$$

Далее показано, как найти распределение функции по известному распределению дискретного и непрерывного аргумента.

1. Пусть аргумент X—дискретная случайная величина.

а) Если различным возможным значениям аргумента X соответствуют различные возможные значения функции Y, то вероятности соответствующих значений X и Y между собой равны.

Пример 1. Дискретная случайная величина X задана распределением

X	2	3
p	0,6	0,4

Найти распределение функции $Y=X^2$.

Решение. Найдем возможные значения Y: $y_1=2^2=4$; $y_2=3^2=9$. Напишем искомое распределение Y:

Y	4	9
p	0,6	0,4

б) Если различным возможным значениям X соответствуют значения Y, среди которых есть равные между собой, то следует складывать вероятности повторяющихся значений Y.

Пример 2. Дискретная случайная величина X задана распределением

X	-2	2	3
p	$0,4$	$0,5$	$0,1$

Найти распределение функции $Y=X^2$.

Решение. Вероятность возможного значения $y_1=4$ равна сумме вероятностей несовместных событий $X=-2$, $X=2$, т. е. $0,4+0,5=0,9$. Вероятность возможного значения $y_2=9$ равна $0,1$. Напишем искомое распределение Y:

Y	4	9
p	$0,9$	$0,1$

2. **Пусть аргумент X — непрерывная случайная величина.** Как найти распределение функции $Y=\varphi(X)$, зная плотность распределения случайного аргумента X? Доказано: если $y=\varphi(x)$ — дифференцируемая строго возрастающая или строго убывающая функция, обратная функция которой $x=\psi(y)$, то плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y находится с помощью равенства

$$g(y)=f[\psi(y)]\,|\psi'(y)|.$$

Пример 3. Случайная величина X распределена нормально, причем ее математическое ожидание $a=0$. Найти распределение функции $Y=X^3$.

Решение. Так как функция $y=x^3$ дифференцируема и строго возрастает, то можно применить формулу

$$g(y)=f[\psi(y)]\,|\psi'(y)|. \qquad (*)$$

Найдем функцию, обратную функции $y=x^3$:

$$\psi(y)=x=y^{1/3}.$$

Найдем $f[\psi(y)]$. По условию,

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2\sigma^2},$$

поэтому

$$f[\psi(y)]=f\left[y^{1/3}\right]=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-y^{2/3}/2\sigma^2}. \qquad (**)$$

Найдем производную обратной функции по y:

$$\psi'(y)=\left(y^{1/3}\right)'=\frac{1}{3y^{2/3}}. \qquad (***)$$

Найдем искомую плотность распределения, для чего подставим $(**)$ и $(***)$ в $(*)$:

$$g(y)=\frac{1}{3\sigma y^{2/3}\sqrt{2\pi}}\,e^{-y^{2/3}/2\sigma^2}.$$

Замечание. Пользуясь формулой (*), можно доказать, что линейная функция $Y=AX+B$ нормально распределенного аргумента X также распределена нормально, причем для того чтобы найти математическое ожидание Y, надо в выражение функции подставить вместо аргумента X его математическое ожидание a:

$$M(Y)=Aa+B;$$

для того чтобы найти среднее квадратическое отклоиение Y, надо среднее квадратическое отклонение аргумента X умножить на модуль коэффициента при X:

$$\sigma(Y)=|A|\,\sigma(X).$$

Пример 4. Найти плотность распределения линейной функции $Y=3X+1$, если аргумент распределен нормально, причем математическое ожидание X равно 2 и средиее квадратическое отклонение равно 0,5.

Решение. Найдем математическое ожидание Y:

$$M(Y)=3\cdot 2+1=7.$$

Найдем среднее квадратическое отклонение Y:

$$\sigma(Y)=3\cdot 0{,}5=1{,}5$$

Искомая плотность распределения имеет вид

$$g(y)=\frac{1}{1{,}5\sqrt{2\pi}}\,e^{-(y-7)^2/[2\cdot(1{,}5)^2]}.$$

§ 11. Математическое ожидание функции одного случайного аргумента

Задана функция $Y=\varphi(X)$ случайного аргумента X. Требуется найти математическое ожидание этой функции, зная закон распределения аргумента.

1. Пусть аргумент X — дискретная случайная величина с возможными значениями $x_1, x_2, \ldots, x_n$, вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Очевидно, Y — также дискретная случайная величина с возможными значениями $y_1=\varphi(x_1)$, $y_2=\varphi(x_2)$, ..., $y_n=\varphi(x_n)$. Так как событие «величина X приняла значение x_i» влечет за собой событие «величина Y приняла значение $\varphi(x_i)$», то вероятности возможных значений Y соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Следовательно, математическое ожидание функции

$$M[\varphi(X)]=\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\,p_i. \qquad (*)$$

Пример 1. Дискретная случайная величина X задана распределением

X	1	3	5
p	0,2	0,5	0,3

Найти математическое ожидание функции $Y=\varphi(X)=X^2+1$.

Решение. Найдем возможные значения Y:

$$\varphi(1)=1^2+1=2; \quad \varphi(3)=3^2+1=10;$$
$$\varphi(5)=5^2+1=26.$$

Искомое математическое ожидание функции Y равно

$$M[X^2+1]=2\cdot 0{,}2+10\cdot 0{,}5+26\cdot 0{,}3=13{,}2.$$

2. Пусть аргумент X—непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $f(x)$. Для отыскания математического ожидания функции $Y=\varphi(X)$ можно сначала найти плотность распределения $g(y)$ величины Y, а затем воспользоваться формулой

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} yg(y)\,dy.$$

Однако если отыскание функции $g(y)$ является затруднительным, то можно непосредственно найти математическое ожидание функции $\varphi(X)$ по формуле

$$M[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)\,dx.$$

В частности, если возможные значения X принадлежат интервалу (a, b), то

$$M[\varphi(X)]=\int_{a}^{b} \varphi(x)f(x)\,dx. \qquad (**)$$

Опуская доказательство, заметим, что оно аналогично доказательству формулы (*), если заменить суммирование интегрированием, а вероятность—элементом вероятности $f(x)\Delta x$.

Пример 2. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\sin x$ в интервале $(0, \pi/2)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание функции $Y=\varphi(X)=X^2$.

Решение. Воспользуемся формулой (**). По условию, $f(x)=\sin x$, $\varphi(x)=x^2$, $a=0$, $b=\pi/2$. Следовательно,

$$M[\varphi(X)]=\int_{0}^{\pi/2} x^2 \sin x\,dx.$$

Интегрируя по частям, получим искомое математическое ожидание

$$M[X^2]=\pi-2.$$

§ 12. Функция двух случайных аргументов. Распределение суммы независимых слагаемых. Устойчивость нормального распределения

Если каждой паре возможных значений случайных величин X и Y соответствует одно возможное значение случайной величины Z, то Z называют *функцией двух случайных аргументов* X и Y:

$$Z = \varphi(X, Y).$$

Далее на примерах будет показано, как найти распределение функции $Z = X + Y$ по известным распределениям слагаемых. Такая задача часто встречается на практике. Например, если X — погрешность показаний измерительного прибора (распределена нормально), Y — погрешность округления показаний до ближайшего деления шкалы (распределена равномерно), то возникает задача — найти закон распределения суммы погрешностей $Z = X + Y$.

1. Пусть X и Y — дискретные независимые случайные величины. Для того чтобы составить закон распределения функции $Z = X + Y$, надо найти все возможные значения Z и их вероятности.

Пример 1. Дискретные независимые случайные величины заданы распределениями:

X	1	2
p	0,4	0,6

Y	3	4
p	0,2	0,8

Составить распределение случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. Возможные значения Z есть суммы каждого возможного значения X со всеми возможными значениями Y:

$$z_1 = 1 + 3 = 4; \quad z_2 = 1 + 4 = 5; \quad z_3 = 2 + 3 = 5; \quad z_4 = 2 + 4 = 6.$$

Найдем вероятности этих возможных значений. Для того чтобы $Z = 4$, достаточно, чтобы величина X приняла значение $x_1 = 1$ и величина Y — значение $y_1 = 3$. Вероятности этих возможных значений, как следует из данных законов распределения, соответственно равны 0,4 и 0,2.

Аргументы X и Y независимы, поэтому события $X = 1$ и $Y = 3$ независимы и, следовательно, вероятность их совместного наступления (т. е. вероятность события $Z = 1 + 3 = 4$) по теореме умножения равна $0,4 \cdot 0,2 = 0,08$.

Аналогично найдем:

$$P(Z = 1 + 4 = 5) = 0,4 \cdot 0,8 = 0,32;$$

$$P(Z = 2 + 3 = 5) = 0,6 \cdot 0,2 = 0,12;$$

$$P(Z = 2 + 4 = 6) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48.$$

Напишем искомое распределение, сложив предварительно вероятности несовместных событий $Z=z_2$, $Z=z_3$ $(0{,}32+0{,}12=0{,}44)$:

Z	4	5	6
p	0,08	0,44	0,48

Контроль: $0{,}08+0{,}44+0{,}48=1$.

2. Пусть X и Y — непрерывные случайные величины. Доказано: если X и Y независимы, то плотность распределения $g(z)$ суммы $Z=X+Y$ (при условии, что плотность хотя бы одного из аргументов задана на интервале $(-\infty, \infty)$ одной формулой) может быть найдена с помощью равенства

$$g(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, f_2(z-x)\, dx \qquad (*)$$

либо с помощью равносильного равенства

$$g(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)\, f_2(y)\, dy, \qquad (**)$$

где f_1, f_2 — плотности распределения аргументов.

Если возможные значения аргументов неотрицательны, то $g(z)$ находят по формуле

$$g(z)=\int\limits_{0}^{z} f_1(x)\, f_2(z-x)\, dx, \qquad (***)$$

либо по равносильной формуле

$$g(z)=\int\limits_{0}^{z} f_1(z-y)\, f_2(y)\, dy. \qquad (****)$$

Плотность распределения суммы независимых случайных величин называют *композицией*.

Закон распределения вероятностей называют *устойчивым*, если композиция таких законов есть тот же закон (отличающийся, вообще говоря, параметрами). Нормальный закон обладает свойством устойчивости: композиция нормальных законов также имеет нормальное распределение (математическое ожидание и дисперсия этой композиции равны соответственно суммам математических ожиданий и дисперсий слагаемых). Например, если X и Y — независимые случайные величины, распределенные нормально с математическими ожиданиями и дисперсиями, соответственно равными $a_1=3$, $a_2=4$, $D_1=1$, $D_2=0{,}5$, то композиция этих величин (т. е. плотность вероятности суммы $Z=X+Y$) также распределена нормально, причем математическое ожидание и дисперсия композиции соответственно равны $a=3+4=7$; $D=1+$ $+0{,}5=1{,}5$.

Пример 2. Независимые случайные величины X и Y заданы плотностями распределений:

$$f(x)=\frac{1}{3}\,e^{-x/3} \quad (0\leqslant x<\infty);$$

$$f(y)=\frac{1}{4}\,e^{-y/4} \quad (0\leqslant y<\infty).$$

Найти композицию этих законов, т. е. плотность распределения случайной величины $Z=X+Y$.

Решение. Возможные значения аргументов неотрицательны, поэтому воспользуемся формулой (***)

$$g(z)=\int_0^z f_1(x)\,f_2(z-x)\,dx=\int_0^z\left[\frac{1}{3}\,e^{-x/3}\right]\left[\frac{1}{4}\,e^{-(z-x)/4}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{12}\,e^{-z/4}\int_0^z e^{-x/12}\,dx=e^{-z/4}\left(1-e^{-z/12}\right).$$

Заметим, что здесь $z\geqslant 0$, так как $Z=X+Y$ и, по условию, возможные значения X и Y неотрицательны.

Рекомендуем читателю для контроля убедиться, что

$$\int_0^\infty g(z)\,dz=1.$$

В следующих далее параграфах кратко описаны распределения, связанные с нормальным, которые будут использованы при изложении математической статистики.

§ 13. Распределение «хи квадрат»

Пусть X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ — нормальные независимые случайные величины, причем математическое ожидание каждой из них равно нулю, а среднее квадратическое отклонение — единице. Тогда сумма квадратов этих величин

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

распределена по закону χ^2 («хи квадрат») с $k=n$ степенями свободы; если же эти величины связаны одним линейным соотношением, например $\sum X_i = n\overline{X}$, то число степеней свободы $k=n-1$.

Плотность этого распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 0, \\ \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}\,e^{-x/2}\,x^{(k/2)-1} & \text{при } x>0, \end{cases}$$

где $\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ — гамма-функция; в частности,

$$\Gamma(n+1)=n!.$$

Отсюда видно, что распределение «хи квадрат» определяется одним параметром — числом степеней свободы k.

С увеличением числа степеней свободы распределение медленно приближается к нормальному.

§ 14. Распределение Стьюдента

Пусть Z — нормальная случайная величина, причем $M(Z)=0$, $\sigma(Z)=1$, а V — независимая от Z величина, которая распределена по закону χ^2 с k степенями свободы. Тогда величина

$$T=\frac{Z}{\sqrt{V/k}} \qquad (*)$$

имеет распределение, которое называют t-распределением или распределением Стьюдента (псевдоним английского статистика В. Госсета), с k степенями свободы.

Итак, отношение нормированной нормальной величины к квадратному корню из независимой случайной величины, распределенной по закону «хи квадрат» с k степенями свободы, деленной на k, распределено по закону Стьюдента с k степенями свободы.

С возрастанием числа степеней свободы распределение Стьюдента быстро приближается к нормальному. Дополнительные сведения об этом распределении приведены далее (см. гл. XVI, § 16).

§ 15. Распределение F Фишера — Снедекора

Если U и V — независимые случайные величины, распределенные по закону χ^2 со степенями свободы k_1 и k_2, то величина

$$F = \frac{U/k_1}{V/k_2} \qquad (*)$$

имеет распределение, которое называют распределением F Фишера — Снедекора со степенями свободы k_1 и k_2 (иногда его обозначают через V^2).

Плотность этого распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ C_0 \dfrac{x^{(k_1-2)/2}}{(k_2+k_1x)^{(k_1+k_2)/2}} & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

где

$$C_0 = \frac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right) k_1^{k_1/2}\, k_2^{k_2/2}}{\Gamma(k_1/2)\,\Gamma(k_2/2)}.$$

Мы видим, что распределение F определяется двумя параметрами — числами степеней свободы. Дополнительные сведения об этом распределении приведены далее (см. гл. XIX, § 8).

Задачи

1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, зная ее плотность распределения:

а) $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ при $-1 < x < 1$, $f(x)=0$ при остальных значениях x;

б) $f(x) = \dfrac{1}{2l}$ при $a-l \leqslant x \leqslant a+l$, $f(x)=0$ при остальных значениях x.

Отв. а) $M(X)=0$, $D(X)=1/2$; б) $M(X)=a$, $D(X)=l^2/3$.

2. Случайная величина X распределена нормально. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 6 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (4,8).

Отв. 0,6826.

3. Случайная величина распределена нормально. Среднее квадратическое отклонение этой величины равно 0,4. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине будет меньше 0,3.

Отв. 0,5468.

4. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 1$ мм и математическим ожиданием $a = 0$. Найти вероятность того, что из двух независимых наблюдений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет по абсолютной величине 1,28 мм.

Отв. 0,96.

5. Валики, изготовляемые автоматом, считаются стандартными, если отклонение диаметра валика от проектного размера не превышает 2 мм. Случайные отклонения диаметра валиков подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 1{,}6$ мм и математическим ожиданием $a = 0$. Сколько процентов стандартных валиков изготовляет автомат?

Отв. Примерно 79%.

6. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

а)

X	1	2	3
p	0,2	0,1	0,7

б)

X	—1	1	2
p	0,1	0,2	0,7

Найти закон распределения случайной величины $Y = X^4$.

Отв. а)

Y	1	16	81
p	0,2	0,1	0,7

б)

Y	1	16
p	0,3	0,7

7. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Найти дифференциальную функцию $g(y)$ случайной величины Y, если:

а) $Y = X + 1 \ (-\infty < x < \infty)$; б) $Y = 2X \ (-a < x < a)$.

Отв. а) $g(y) = f(y-1) \ (-\infty < y < \infty)$;

б) $g(y) = \frac{1}{2} f\left(\frac{y}{2}\right) \ (-2a < y < 2a)$.

8. Независимые дискретные случайные величины заданы следующими законами распределения:

X	2	3	5
p	0,3	0,5	0,2

Y	1	4
p	0,2	0,8

Найти законы распределения функций: а) $Z = X + Y$; б) $Z = XY$.

Отв. а)

Z	3	4	6	7	9
p	0,06	0,10	0,28	0,40	0,16

б)

Z	2	3	5	8	12	20
p	0,06	0,10	0,04	0,24	0,40	0,16

9. Независимые случайные величины X и Y заданы плотностями распределений

$$f_1(x) = \frac{1}{3} e^{-x/3} \quad (0 \leqslant x < \infty);$$

$$f_2(x) = \frac{1}{5} e^{-y/5} \quad (0 \leqslant y < \infty).$$

Найти композицию этих законов, т. е. плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

$$\textit{Отв.} \quad g(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-z/5} (1 - e^{-2z/15}) & \text{при } z \geqslant 0; \\ 0 & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Глава пятнадцатая

ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

§ 1. Задачи математической статистики

Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении методами теории вероятностей статистических данных — результатов наблюдений.

Первая задача математической статистики — указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате специально поставленных экспериментов.

Вторая задача математической статистики — разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования. Сюда относятся:

а) оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен; оценка зависимости случайной величины от одной или нескольких случайных величин и др.;

б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого известен.

Современная математическая статистика разрабатывает способы определения числа необходимых испытаний до начала исследования (планирование эксперимента), в ходе исследования (последовательный анализ) и решает многие другие задачи. Современную математическую статистику определяют как науку о принятии решений в условиях неопределенности.

Итак, задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

§ 2. Краткая историческая справка

Математическая статистика возникла (XVII в.) и развивалась параллельно с теорией вероятностей. Дальнейшее развитие математической статистики (вторая половина XIX—начало XX в.) обязано, в первую очередь, П. Л. Чебышеву, А. А. Маркову, А. М. Ляпунову, а также К. Гауссу, А. Кетле, Ф. Гальтону, К. Пирсону и др.

В XX в. наиболее существенный вклад в математическую статистику был сделан советскими математиками (В. И. Романовский, Е. Е. Слуцкий, А. Н. Колмогоров, Н. В. Смирнов), а также английскими (Стьюдент, Р. Фишер, Э. Пирсон) и американскими (Ю. Нейман, А. Вальд) учеными.

§ 3. Генеральная и выборочная совокупности

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным—контролируемый размер детали.

Иногда проводят сплошное обследование, т. е. обследуют каждый из объектов совокупности относительно признака, которым интересуются. На практике, однако, сплошное обследование применяют сравнительно редко. Например, если совокупность содержит очень большое число объектов, то провести сплошное обследование физически невозможно. Если обследование объекта связано с его уничтожением или требует больших материальных затрат, то проводить сплошное обследование практически не имеет смысла. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Выборочной совокупностью или просто *выборкой* называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Например, если из 1000 деталей отобрано для обследования 100 деталей, то объем генеральной совокупности $N = 1000$, а объем выборки $n = 100$.

Замечание. Часто генеральная совокупность содержит конечное число объектов. Однако если это число достаточно велико, то иногда в целях упрощения вычислений, или для облегчения теоретических выводов, допускают, что генеральная совокупность состоит из бесчисленного множества объектов. Такое допущение оправдывается тем, что увеличение объема генеральной совокупности (достаточно большого объема) практически не сказывается на результатах обработки данных выборки.

§ 4. Повторная и бесповторная выборки. Репрезентативная выборка

При составлении выборки можно поступать двумя способами: после того как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен либо не возвращен в генеральную совокупность. В соответствии со сказанным выборки подразделяют на повторные и бесповторные.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

На практике обычно пользуются бесповторным случайным отбором.

Для того чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки правильно его представляли. Другими словами, выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности. Это требование коротко формулируют так: выборка должна быть *репрезентативной (представительной)*.

В силу закона больших чисел можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если ее осуществить случайно: каждый объект выборки отобран случайно из генеральной совокупности, если все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Если объем генеральной совокупности достаточно велик, а выборка составляет лишь незначительную часть этой совокупности, то различие между повторной и бесповторной выборками стирается; в предельном случае, когда рассматривается бесконечная генеральная совокупность, а выборка имеет конечный объем, это различие исчезает.

§ 5. Способы отбора

На практике применяются различные способы отбора. Принципиально эти способы можно подразделить на два вида:

1. Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части. Сюда относятся: а) простой случайный бесповторный отбор; б) простой случайный повторный отбор.

2. Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части. Сюда относятся: а) типический отбор; б) механический отбор; в) серийный отбор.

Простым случайным называют такой отбор, при котором объекты извлекают по одному из всей генеральной совокупности. Осуществить простой отбор можно различными способами. Например, для извлечения n объектов из генеральной совокупности объема N поступают так: выписывают номера от 1 до N на карточках, которые тщательно перемешивают, и наугад вынимают одну карточку; объект, имеющий одинаковый номер с извлеченной карточкой, подвергают обследованию; затем карточку возвращают в пачку и процесс повторяют, т. е. карточки перемешивают, наугад вынимают одну из них и т. д. Так поступают n раз; в итоге получают простую случайную повторную выборку объема n.

Если извлеченные карточки не возвращать в пачку, то выборка является простой случайной бесповторной.

При большом объеме генеральной совокупности описанный процесс оказывается очень трудоемким. В этом случае пользуются готовыми таблицами «случайных чисел», в которых числа расположены в случайном порядке. Для того чтобы отобрать, например, 50 объектов из пронумерованной генеральной совокупности, открывают любую страницу таблицы случайных чисел и выписывают подряд 50 чисел; в выборку попадают те объекты, номера которых совпадают с выписанными случайными числами. Если бы оказалось, что случайное число таблицы превышает число N, то такое случайное число пропускают. При осуществлении бесповторной выборки случайные числа таблицы, уже встречавшиеся ранее, следует также пропустить.

Типическим называют отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее «типической» части. Например, если детали изготовляют на нескольких станках, то отбор производят не из всей совокупности деталей, произведенных всеми станками, а из продукции каждого станка в отдельности. Типическим отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак заметно колеблется в различных типических частях генеральной совокупности. Например, если продукция изготовляется на нескольких машинах, среди которых есть более и менее изношенные, то здесь типический отбор целесообразен.

Механическим называют отбор, при котором генеральную совокупность «механически» делят на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы отбирают один объект. Например, если нужно отобрать 20% изготовленных станком деталей, то отбирают каждую пятую деталь; если требуется отобрать 5% деталей, то отбирают каждую двадцатую деталь, и т. д. Следует указать, что иногда механический отбор может не обеспечить репрезентативности выборки. Например, если отбирают каждый двадцатый обтачиваемый валик, причем сразу же после отбора производят замену резца, то отобранными окажутся все валики, обточенные затупленными резцами. В таком случае следует устранить совпадение ритма отбора с ритмом замены резца, для чего надо отбирать, скажем, каждый десятый валик из двадцати обточенных.

Серийным называют отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному обследованию. Например, если изделия изготовляются большой группой станков-автоматов, то подвергают сплошному обследованию продукцию только нескольких станков. Серийным отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак колеблется в различных сериях незначительно.

Подчеркнем, что на практике часто применяется комбинированный отбор, при котором сочетаются указанные выше способы. Например, иногда разбивают генеральную совокупность на серии одинакового объема, затем простым случайным отбором выбирают несколько серий и, наконец, из каждой серии простым случайным отбором извлекают отдельные объекты.

§ 6. Статистическое распределение выборки

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2—n_2 раз, x_k—n_k раз и $\sum n_i = n$ — объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называют *вариантами*, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке,— *вариационным рядом*. Числа наблюдений называют *частотами*, а их отношения к объему выборки $n_i/n = W_i$—*относительными частотами*.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

Заметим, что в теории вероятностей под *распределением* понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике — соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами, или относительными частотами.

Пример. Задано распределение частот выборки объема $n=20$:

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Написать распределение относительных частот.

Решение. Найдем относительные частоты, для чего разделим частоты на объем выборки:

$$W_1 = 3/20 = 0{,}15,\quad W_2 = 10/20 = 0{,}50,\quad W_3 = 7/20 = 0{,}35.$$

Напишем распределение относительных частот:

x_i	2	6	12
W_i	0,15	0,50	0,35

Контроль: $0{,}15 + 0{,}50 + 0{,}35 = 1$.

§ 7. Эмпирическая функция распределения

Пусть известно статистическое распределение частот количественного признака X. Введем обозначения: n_x — число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака, меньшее x; n — общее число наблюдений (объем выборки). Ясно, что относительная частота события $X < x$ равна n_x/n. Если x изменяется, то, вообще говоря, изменяется и относительная частота, т. е. относительная частота n_x/n есть функция от x. Так как эта функция находится эмпирическим (опытным) путем, то ее называют эмпирической.

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$.

Итак, по определению,

$$F^*(x) = n_x/n,$$

где n_x — число вариант, меньших x; n — объем выборки.

Таким образом, для того чтобы найти, например, $F^*(x_2)$, надо число вариант, меньших x_2, разделить на объем выборки:

$$F^*(x_2) = n_{x_2}/n.$$

В отличие от эмпирической функции распределения выборки функцию распределения $F(x)$ генеральной совокупности называют *теоретической функцией распределения*. Различие между эмпирической и теоретической функциями состоит в том, что теоретическая функция $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а эмпирическая функция $F^*(x)$ определяет относительную частоту этого же события. Из теоремы Бернулли следует, что относительная частота события $X < x$, т. е. $F^*(x)$ стремится по вероятности к вероятности $F(x)$ этого события. Другими словами, при больших n числа $F^*(x)$ и $F(x)$ мало отличаются одно от другого в том смысле, что $\lim\limits_{n \to \infty} P[|F(x) - F^*(x)| < \varepsilon] = 1$ $(\varepsilon > 0)$. Уже отсюда следует целесообразность использования эмпирической функции распределения выборки для приближенного представления теоретической (интегральной) функции распределения генеральной совокупности.

Такое заключение подтверждается и тем, что $F^*(x)$ обладает всеми свойствами $F(x)$. Действительно, из определения функции $F^*(x)$ вытекают следующие ее свойства:

1) значения эмпирической функции принадлежат отрезку $[0, 1]$;

2) $F^*(x)$ — неубывающая функция;

3) если x_1 — наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x \leqslant x_1$; если x_k — наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Итак, эмпирическая функция распределения выборки служит для оценки теоретической функции распределения генеральной совокупности.

Пример. Построить эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

варианты x_i	2	6	10
частоты n_i	12	18	30

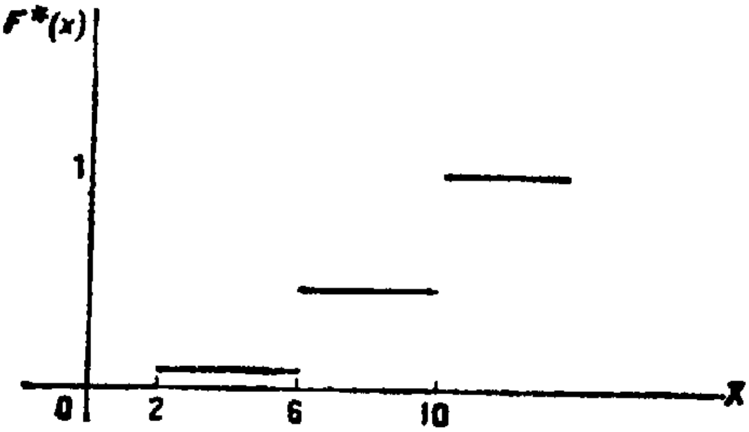

Рис. 19

Решение. Найдем объем выборки: $12 + 18 + 30 = 60$. Наименьшая варианта равна 2, следовательно,

$$F^*(x) = 0 \text{ при } x \leqslant 2.$$

Значение $X < 6$, а именно $x_1 = 2$, наблюдалось 12 раз, следовательно,

$$F^*(x) = 12/60 = 0{,}2 \text{ при } 2 < x \leqslant 6.$$

Значения $X < 10$, а именно $x_1 = 2$ и $x_2 = 6$, наблюдались $12 + 18 = 30$ раз, следовательно,

$$F^*(x) = 30/60 = 0{,}5 \text{ при } 6 < x \leqslant 10.$$

Так как $x = 10$ — наибольшая варианта, то

$$F^*(x) = 1 \text{ при } x > 10.$$

Искомая эмпирическая функция

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 2, \\ 0{,}2 & \text{при} \quad 2 < x \leqslant 6, \\ 0{,}5 & \text{при} \quad 6 < x \leqslant 10, \\ 1 & \text{при} \quad x > 10. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 19.

§ 8. Полигон и гистограмма

Для наглядности строят различные графики статистического распределения и, в частности, полигон и гистограмму.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1;\ n_1)$, $(x_2;\ n_2)$, ..., $(x_k;\ n_k)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат — соответствующие им частоты n_i. Точки $(x_i;\ n_i)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1;\ W_1)$, $(x_2;\ W_2)$, ...

..., $(x_k; W_k)$. Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат — соответствующие им относительные частоты W_i. Точки $(x_i; W_i)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон относительных частот.

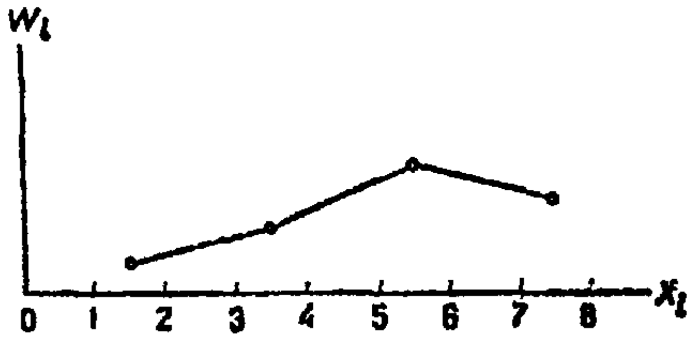

Рис. 20

На рис. 20 изображен полигон относительных частот следующего распределения:

X	1,5	3,5	5,5	7,5
W	0,1	0,2	0,4	0,3

В случае **непрерывного признака** целесообразно строить гистограмму, для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i — сумму частот вариант, попавших в i-й интервал.

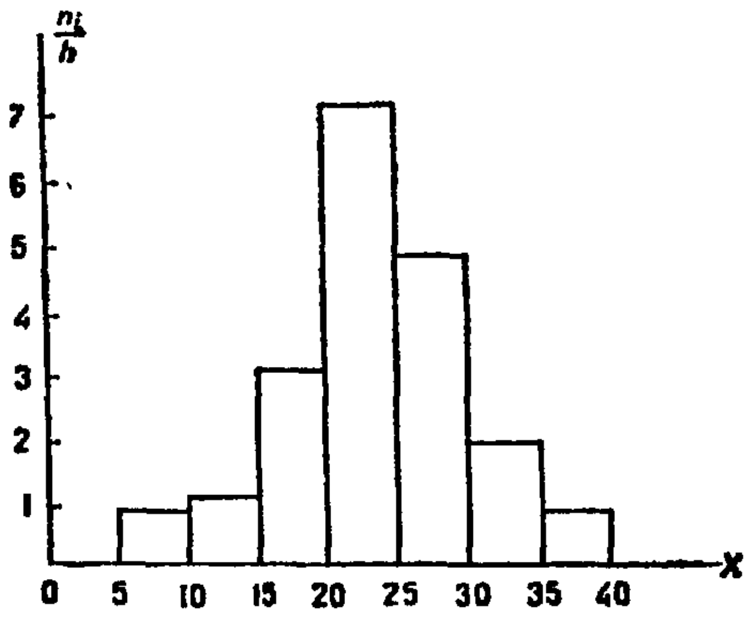

Рис. 21

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению n_i/h (плотность частоты).

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии n_i/h.

Площадь i-го частичного прямоугольника равна $hn_i/h = n_i$ — сумме частот вариант i-го интервала; следовательно, *площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т. е. объему выборки.*

На рис. 21 изображена гистограмма частот распределения объема $n = 100$, приведенного в табл. 6.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению W_i/h (плотность относительной частоты).

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над

Таблица 6

Частичный интервал длиною $h=5$	Сумма частот вариант частичного интервала n_i	Плотность частоты n_i/h
5—10	4	0,8
10—15	6	1,2
15—20	16	3,2
20—25	36	7,2
25—30	24	4,8
30—35	10	2,0
35—40	4	0,8

ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии W_i/h. Площадь i-го частичного прямоугольника равна $hW_i/h=W_i$ — относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал. Следовательно, *площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т. е. единице.*

Задачи

1. Построить график эмпирической функции распределения

x_i	5	7	10	15
n_i	2	3	8	7

2. Построить полигоны частот и относительных частот распределения

x_i	1	3	5	7	9
n_i	10	15	30	33	12

3. Построить гистограммы частот и относительных частот распределения (в первом столбце указан частичный интервал, во втором — сумма частот вариант частичного интервала)

2—5	9
5—8	10
8—11	25
11—14	6

Глава шестнадцатая

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1. Статистические оценки параметров распределения

Пусть требуется изучить количественный признак генеральной совокупности. Допустим, что из теоретических соображений удалось установить, какое именно распределение имеет признак. Естественно возникает задача оценки параметров, которыми определяется это распределение. Например, если наперед известно, что изучаемый признак распределен в генеральной совокупности нормально, то необходимо оценить (приближенно найти) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, так как эти два параметра полностью определяют нормальное распределение; если же есть основания считать, что признак имеет, например, распределение Пуассона, то необходимо оценить параметр λ, которым это распределение определяется.

Обычно в распоряжении исследователя имеются лишь данные выборки, например значения количественного признака $x_1, x_2, \ldots, x_n$, полученные в результате n наблюдений (здесь и далее наблюдения предполагаются независимыми). Через эти данные и выражают оцениваемый параметр. Рассматривая $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, можно сказать, что найти статистическую оценку неизвестного параметра теоретического распределения — это значит найти функцию от наблюдаемых случайных величин, которая и дает приближенное значение оцениваемого параметра. Например, как будет показано далее, для оценки математического ожидания нормального распределения служит функция (среднее арифметическое наблюдаемых значений признака)

$$\overline{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n.$$

Итак, статистической оценкой неизвестного параметра теоретического распределения называют функцию от наблюдаемых случайных величин.

§ 2. Несмещенные, эффективные и состоятельные оценки

Для того чтобы статистические оценки давали «хорошие» приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять определенным требованиям. Ниже указаны эти требования.

Пусть Θ^* — статистическая оценка неизвестного параметра Θ теоретического распределения. Допустим, что по выборке объема n найдена оценка Θ_1^*. Повторим опыт, т. е. извлечем из генеральной совокупности другую выборку того же объема и по ее данным найдем оценку Θ_2^*. Повторяя опыт многократно, получим числа $\Theta_1^*, \Theta_2^*, \ldots, \Theta_k^*$, которые, вообще говоря, различны между собой. Таким образом, оценку Θ^* можно рассматривать как случайную величину, а числа Θ_1^*, Θ_2^*, ..., Θ_k^* — как ее возможные значения.

Представим себе, что оценка Θ^* дает приближенное значение Θ с избытком; тогда каждое найденное по данным выборок число Θ_i^* $(i = 1, 2, \ldots, k)$ больше истинного значения Θ. Ясно, что в этом случае и математическое ожидание (среднее значение) случайной величины Θ^* больше, чем Θ, т. е. $M(\Theta^*) > \Theta$. Очевидно, что если Θ^* дает оценку с недостатком, то $M(\Theta^*) < \Theta$.

Таким образом, использование статистической оценки, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру, привело бы к систематическим*) (одного знака) ошибкам. По этой причине естественно потребовать, чтобы математическое ожидание оценки Θ^* было равно оцениваемому параметру. Хотя соблюдение этого требования не устранит ошибок (одни значения Θ^* больше, а другие меньше Θ), однако ошибки разных знаков будут встречаться одинаково часто. Иными словами, соблюдение требований $M(\Theta^*) = \Theta$ гарантирует от получения систематических ошибок.

Несмещенной называют статистическую оценку Θ^*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру Θ при любом объеме выборки, т. е.

$$M(\Theta^*) = \Theta.$$

---

*) В теории ошибок измерений систематическими ошибками называют неслучайные ошибки, искажающие результаты измерений в одну определенную сторону. Например, измерение длины растянутой рулеткой систематически дает заниженные результаты.

Смещенной называют оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Однако было бы ошибочным считать, что несмещенная оценка всегда дает хорошее приближение оцениваемого параметра. Действительно, возможные значения Θ^* могут быть сильно рассеяны вокруг своего среднего значения, т е. дисперсия $D(\Theta^*)$ может быть значительной. В этом случае найденная по данным одной выборки оценка, например Θ_1^*, может оказаться весьма удаленной от среднего значения $\overline{\Theta^*}$, а значит, и от самого оцениваемого параметра Θ; приняв Θ_1^* в качестве приближенного значения Θ, мы допустили бы большую ошибку. Если же потребовать, чтобы дисперсия Θ^* была малой, то возможность допустить большую ошибку будет исключена. По этой причине к статистической оценке предъявляется требование эффективности.

Эффективной называют статистическую оценку, которая (при заданном объеме выборки n) имеет наименьшую возможную дисперсию.

При рассмотрении выборок большого объема (n велико!) к статистическим оценкам предъявляется требование состоятельности.

Состоятельной называют статистическую оценку, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру. Например, если дисперсия несмещенной оценки при $n \to \infty$ стремится к нулю, то такая оценка оказывается и состоятельной.

§ 3. Генеральная средняя

Пусть изучается дискретная генеральная совокупность относительно количественного признака X.

Генеральной средней $\overline{x}_г$ называют среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_N$ признака генеральной совокупности объема N различны, то

$$\overline{x}_г = (x_1 + x_2 + \ldots + x_N)/N.$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, \ldots, N_k$, причем $N_1 + N_2 + \ldots + N_k = N$, то

$$\overline{x}_г = (x_1 N_1 + x_2 N_2 + \ldots + x_k N_k)/N,$$

т. е. генеральная средняя есть средняя взвешенная значений признака с весами, равными соответствующим частотам.

Замечание. Пусть генеральная совокупиость объема N содержит объекты с различными значениями признака X, равными $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Представим себе, что из этой совокупности наудачу извлекается один объект. Вероятность того, что будет извлечен объект со значением признака, например x_1, очевидно, равна $1/N$. С этой же вероятностью может быть извлечен и любой другой объект. Таким образом, величину признака X можно рассматривать как случайную величину, возможные значения которой $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеют одинаковые вероятности, равные $1/N$. Найдем математическое ожидание $M(X)$:

$$M(X) = x_1 \cdot 1/N + x_2 \cdot 1/N + \ldots + x_N \cdot 1/N = (x_1 + x_2 + \ldots + x_N)/N = \overline{x}_{\text{г}}.$$

Итак, если рассматривать обследуемый признак X генеральной совокупности как случайную величину, то математическое ожидание признака равно генеральной средней этого признака:

$$M(X) = \overline{x}_{\text{г}}.$$

Этот вывод мы получили, считая, что все объекты генеральной совокупности имеют различные значения признака. Такой же итог будет получен, если допустить, что генеральная совокупность содержит по нескольку объектов с одинаковым значением признака.

Обобщая полученный результат на генеральную совокупность с непрерывным распределением признака X, и в этом случае определим генеральную среднюю как математическое ожидание признака:

$$\overline{x}_{\text{г}} = M(X).$$

§ 4. Выборочная средняя

Пусть для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака X извлечена выборка объема n.

Выборочной средней $\overline{x}_{\text{в}}$ называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$\overline{x}_{\text{в}} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n.$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то

$$\overline{x}_{\text{в}} = (n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k)/n,$$

или

$$\overline{x}_{\text{в}} = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i \right) \Big/ n,$$

т. е. выборочная средняя есть средняя взвешенная значений признака с весами, равными соответствующим частотам.

Замечание. Выборочная средняя, найденная по данным одной выборки, есть, очевидно, определенное число. Если же извлекать другие выборки того же объема из той же генеральной совокупности, то выборочная средняя будет изменяться от выборки к выборке. Таким образом, выборочную среднюю можно рассматривать как случайную величину, а следовательно, можно говорить о распределениях (теоретическом и эмпирическом) выборочной средней и о числовых характеристиках этого распределения (его называют выборочным), в частности о математическом ожидании и дисперсии выборочного распределения.

Заметим, что в теоретических рассуждениях выборочные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака X, полученные в итоге независимых наблюдений, также рассматривают как случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, имеющие то же распределение и, следовательно, те же числовые характеристики, которые имеют X.

§ 5. Оценка генеральной средней по выборочной средней. Устойчивость выборочных средних

Пусть из генеральной совокупности (в результате независимых наблюдений над количественным признаком X) извлечена повторная выборка объема n со значениями признака $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Не уменьшая общности рассуждений, будем считать эти значения признака различными. Пусть генеральная средняя $\overline{x}_{\text{г}}$ неизвестна и требуется оценить ее по данным выборки. В качестве оценки генеральной средней принимают выборочную среднюю

$$\overline{x}_{\text{в}} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n.$$

Убедимся, что $\overline{x}_{\text{в}}$ — несмещенная оценка, т. е. покажем, что математическое ожидание этой оценки равно $\overline{x}_{\text{г}}$. Будем рассматривать $\overline{x}_{\text{в}}$ как случайную величину и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как независимые, одинаково распределенные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Поскольку эти величины одинаково распределены, то они имеют одинаковые числовые характеристики, в частности одинаковое математическое ожидание, которое обозначим через a. Так как математическое ожидание среднего арифметического одинаково распределенных случайных величин равно математическому ожиданию каждой из величин (см. гл. VIII, § 9), то

$$M(\overline{X}_в) = M[(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n] = a \qquad (*)$$

Приняв во внимание, что каждая из величин $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_n$ имеет то же распределение, что и генеральная совокупность (которую мы также рассматриваем как случайную величину), заключаем, что и числовые характеристики этих величин и генеральной совокупности одинаковы. В частности, математическое ожидание a каждой из величин равно математическому ожиданию признака X генеральной совокупности, т. е.

$$M(X) = \overline{x}_г = a.$$

Заменив в формуле (*) математическое ожидание a на $\overline{x}_г$, окончательно получим

$$M(\overline{X}_в) = \overline{x}_г.$$

Тем самым доказано, что выборочная средняя есть несмещенная оценка генеральной средней.

Легко показать, что выборочная средняя является и состоятельной оценкой генеральной средней. Действительно, допуская, что случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют ограниченные дисперсии, мы вправе применить к этим величинам теорему Чебышева (частный случай), в силу которой при увеличении n среднее арифметическое рассматриваемых величин, т. е. $\overline{X}_в$, стремится по вероятности к математическому ожиданию a каждой из величин, или, что то же, к генеральной средней $\overline{x}_г$ (так как $\overline{x}_г = a$).

Итак, при увеличении объема выборки n выборочная средняя стремится по вероятности к генеральной средней, а это и означает, что выборочная средняя есть состоятельная оценка генеральной средней. Из сказанного следует также, что если по нескольким выборкам достаточно большого объема из одной и той же генеральной совокупности будут найдены выборочные средние, то они будут приближенно равны между собой. В этом и состоит свойство *устойчивости выборочных средних*.

Заметим, что если дисперсии двух одинаково распределенных совокупностей равны между собой, то близость выборочных средних к генеральным не зависит от отношения объема выборки к объему генеральной совокупности. Она зависит от объема выборки: чем объем выборки больше, тем меньше выборочная средняя отличается от генеральной. Например, если из одной совокупности отобран 1% объектов, а из другой совокупности отобрано 4% объектов, причем объем первой выборки оказался большим, чем второй, то первая выборочная средняя будет меньше отличаться от соответствующей генеральной средней, чем вторая.

Замечание. Мы предполагали выборку повторной. Однако полученные выводы применимы и для бесповторной выборки, если ее объем значительно меньше объема генеральной совокупности. Это положение часто используется на практике.

§ 6. Групповая и общая средние

Допустим, что все значения количественного признака X совокупности, безразлично-генеральной или выборочной, разбиты на несколько групп. Рассматривая каждую группу как самостоятельную совокупность, можно найти ее среднюю арифметическую.

Групповой средней называют среднее арифметическое значений признака, принадлежащих группе.

Теперь целесообразно ввести специальный термин для средней всей совокупности.

Общей средней $\overline{x}$ называют среднее арифметическое значений признака, принадлежащих всей совокупности.

Зная групповые средние и объемы групп, можно найти общую среднюю: *общая средняя равна средней арифметической групповых средних, взвешенной по объемам групп.*

Опуская доказательство, приведем иллюстрирующий пример.

Пример. Найти общую среднюю совокупности, состоящей из следующих двух групп:

Группа	первая		вторая	
Значение признака . . .	1	6	1	5
Частота	10	15	20	30
Объем	$10+15=25$		$20+30=50$	

Решение. Найдем групповые средние:

$$\overline{x}_1=(10\cdot 1+15\cdot 6)/25=4;$$

$$\overline{x}_2=(20\cdot 1+30\cdot 5)/50=3{,}4.$$

Найдем общую среднюю по групповым средним:

$$\overline{x}=(25\cdot 4+50\cdot 3{,}4)/(25+50)=3{,}6.$$

Замечание. Для упрощения расчета общей средней совокупности большого объема целесообразно разбить ее на несколько групп, найти групповые средние и по ним общую среднюю.

§ 7. Отклонение от общей средней и его свойство

Рассмотрим совокупность, безразлично — генеральную или выборочную, значений количественного признака X объема n:

значения признака	x_1	x_2	...	x_k
частоты	n_1	n_2	...	n_k

При этом $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Далее для удобства записи знак суммы $\sum_{i=1}^{k}$ заменен знаком $\sum$.

Найдем общую среднюю:

$$\bar{x} = (\sum n_i x_i)/n.$$

Отсюда

$$\sum n_i x_i = n\bar{x}. \qquad (*)$$

Заметим, что поскольку $\bar{x}$ — постоянная величина, то

$$\sum n_i \bar{x} = \bar{x} \sum n_i = n\bar{x}. \qquad (**)$$

Отклонением называют разность $x_i - \bar{x}$ между значением признака и общей средней.

Теорема. *Сумма произведений отклонений на соответствующие частоты равна нулю:*

$$\sum n_i (x_i - \bar{x}) = 0.$$

Доказательство. Учитывая (*) и (**), получим

$$\sum n_i (x_i - \bar{x}) = \sum n_i x_i - \sum n_i \bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0.$$

Следствие. *Среднее значение отклонения равно нулю.* Действительно,

$$(\sum n_i (x_i - \bar{x}))/\sum n_i = 0/n = 0.$$

Пример. Дано распределение количественного признака X:

x_i	1	2	3
n_i	10	4	6

Убедиться, что сумма произведений отклонений иа соответствующне частоты равна нулю.

Решеине. Найдем общую среднюю:

$$\bar{x} = (10\cdot 1 + 4\cdot 2 + 6\cdot 3)/20 = 1{,}8.$$

Найдем сумму произведений отклоиеиий на соответствующие частоты·

$$\sum n_i (x_i - \bar{x}) = 10\,(1 - 1{,}8) + 4\,(2 - 1{,}8) + 6\,(3 - 1{,}8) = 8 - 8 = 0.$$

§ 8. Генеральная дисперсия

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние значений количественного признака X генеральной совокупности вокруг своего среднего значения, вводят сводную характеристику — генеральную дисперсию.

Генеральной дисперсией $D_г$ называют среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака генеральной совокупности от их среднего значения $\overline{x}_г$.

Если все значения x_1 x_2, ..., x_N признака генеральной совокупности объема N различны, то

$$D_г = \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x}_г)^2 \right) \Big/ N.$$

Если же значения признака x_1, x_2, ..., x_k имеют соответственно частоты N_1, N_2, ..., N_k, причем $N_1 + N_2 + \ldots + N_k = N$, то

$$D_г = \left(\sum_{i=1}^{k} N_i (x_i - \overline{x}_г)^2 \right) \Big/ N,$$

т. е. генеральная дисперсия есть средняя взвешенная квадратов отклонений с весами, равными соответствующим частотам.

Пример. Генеральная совокупность задана таблицей распределения

x_i	2	4	5	6
N_i	8	9	10	3

Найти генеральную дисперсию.

Решение. Найдем генеральную среднюю (см. § 3):

$$\overline{x}_г = \frac{8 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{8 + 9 + 10 + 3} = \frac{120}{30} = 4.$$

Найдем генеральную дисперсию;

$$D_г = \frac{8 \cdot (2-4)^2 + 9 \cdot (4-4)^2 + 10 \cdot (5-4)^2 + 3 \cdot (6-4)^2}{30} = 54/30 = 1{,}8.$$

Кроме дисперсии для характеристики рассеяния значений признака генеральной совокупности вокруг своего среднего значения пользуются сводной характеристикой — средним квадратическим отклонением.

Генеральным средним квадратическим отклонением (стандартом) называют квадратный корень из генеральной дисперсии:

$$\sigma_г = \sqrt{D_г}.$$

§ 9. Выборочная дисперсия

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние наблюдаемых значений количественного признака выборки вокруг своего среднего значения $\overline{x}_в$, вводят сводную характеристику — выборочную дисперсию.

Выборочной дисперсией $D_в$ называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения $\overline{x}_в$.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$D_в = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_в)^2\right) \Big/ n.$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1 + n_2 + \ldots$ $\ldots + n_k = n$, то

$$D_в = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_в)^2\right) \Big/ n,$$

т. е. выборочная дисперсия есть средняя взвешенная квадратов отклонений с весами, равными соответствующим частотам.

Пример. Выборочная совокупность задана таблицей распределения

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Найти выборочную дисперсию.

Решение. Найдем выборочную среднюю (см. § 4):

$$\overline{x}_в = \frac{20\cdot 1 + 15\cdot 2 + 10\cdot 3 + 5\cdot 4}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2.$$

Найдем выборочную дисперсию:

$$D_в = \frac{20\,(1-2)^2 + 15\cdot(2-2)^2 + 10\cdot(3-2)^2 + 5\cdot(4-2)^2}{50} =$$
$$= 50/50 = 1.$$

Кроме дисперсии для характеристики рассеяния значений признака выборочной совокупности вокруг своего среднего значения пользуются сводной характеристикой — средним квадратическим отклонением.

Выборочным средним квадратическим отклонением (стандартом) называют квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}.$$

§ 10. Формула для вычисления дисперсии

Вычисление дисперсии, безразлично — выборочной или генеральной, можно упростить, используя следующую теорему.

Теорема. *Дисперсия равна среднему квадратов значений признака минус квадрат общей средней:*

$$D = \overline{x^2} - [\overline{x}]^2.$$

Доказательство. Справедливость теоремы вытекает из преобразований:

$$D = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum n_i \left(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + [\overline{x}]^2\right)}{n} =$$

$$= \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - 2\overline{x}\frac{\sum n_i x_i}{n} + [\overline{x}]^2 \frac{\sum n_i}{n} = \overline{x^2} - 2\overline{x}\cdot\overline{x} + [\overline{x}]^2 =$$

$$= \overline{x^2} - [\overline{x}]^2.$$

Итак,

$$D = \overline{x^2} - [\overline{x}]^2,$$

где $\overline{x} = (\sum n_i x_i)/n$, $\overline{x^2} = (\sum n_i x_i^2)/n$.

Пример. Найти дисперсию по данному распределению

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Решение. Найдем общую среднюю:

$$\overline{x} = \frac{20\cdot 1 + 15\cdot 2 + 10\cdot 3 + 5\cdot 4}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2.$$

Найдем среднюю квадратов значений признака

$$\overline{x^2} = \frac{20\cdot 1^2 + 15\cdot 2^2 + 10\cdot 3^2 + 5\cdot 4^2}{50} = 5.$$

Искомая дисперсия

$$D = \overline{x^2} - [\overline{x}]^2 = 5 - 2^2 = 1.$$

§ 11. Групповая, внутригрупповая, межгрупповая и общая дисперсии

Допустим, что все значения количественного признака X совокупности, безразлично — генеральной или выборочной, разбиты на k групп. Рассматривая каждую группу как самостоятельную совокупность, можно найти групповую среднюю (см. § 6) и дисперсию значений признака, принадлежащих группе, относительно групповой средней.

Групповой дисперсией называют дисперсию значений признака, принадлежащих группе, относительно групповой средней

$$D_{j\,гр}=(\sum n_i(x_i-\overline{x}_j)^2)/N_j,$$

где n_i — частота значения x_i; j — номер группы; $\overline{x}_j$ — групповая средняя группы j; $N_j=\sum n_i$ — объем группы j.

Пример 1. Найти групповые дисперсии совокупности, состоящей из следующих двух групп:

Первая группа

x_i	n_i
2	1
4	7
5	2

$N_1=\sum n_i=10$

Вторая группа

x_i	n_i
3	2
8	3

$N_2=\sum n_i=5$

Решение. Найдем групповые средние:

$$\overline{x}_1=(\sum n_ix_i)/\sum n_i=(1\cdot2+7\cdot4+2\cdot5)/10=4;$$

$$\overline{x}_2=(2\cdot3+3\cdot8)/5=6.$$

Найдем искомые групповые дисперсии:

$$D_{1гр}=(\sum n_i(x_i-\overline{x}_1)^2)/N_1=$$
$$=(1\cdot(2-4)^2+7\cdot(4-4)^2+2\cdot(5-4)^2)/10=0{,}6;$$
$$D_{2гр}=(2\cdot(3-6)^2+3\cdot(8-6)^2)/5=6.$$

Зная дисперсию каждой группы, можно найти их среднюю арифметическую.

Внутригрупповой дисперсией называют среднюю арифметическую дисперсий, взвешенную по объемам групп:

$$D_{внгр}=(\sum N_jD_{j\,гр})/n,$$

где N_j — объем группы j; $n=\sum_{j=1}^{k}N_j$ — объем всей совокупности.

Пример 2. Найти внутригрупповую дисперсию по данным примера 1.

Решение. Искомая внутригрупповая дисперсия равна

$$D_{внгр}=(N_1D_{1гр}+N_2D_{2гр})/n=(10\cdot0{,}6+5\cdot6)/15=12/5.$$

Зная групповые средние и общую среднюю, можно найти дисперсию групповых средних относительно общей средней.

Межгрупповой дисперсией называют дисперсию групповых средних относительно общей средней:

$$D_{\text{межгр}} = \left(\sum N_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2\right)/n,$$

где $\bar{x}_j$ — групповая средняя группы j; N_j — объем группы j; $\bar{x}$ — общая средняя; $n = \sum_{j=1}^{k} N_j$ — объем всей совокупности.

Пример 3. Найти межгрупповую дисперсию по данным примера 1.

Решение. Найдем общую среднюю:

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{1\cdot 2 + 7\cdot 4 + 2\cdot 5 + 2\cdot 3 + 3\cdot 8}{15} = \frac{14}{3}.$$

Используя вычисленные выше величины $\bar{x}_1 = 4$, $\bar{x}_2 = 6$, найдем искомую межгрупповую дисперсию:

$$D_{\text{межгр}} = \frac{N_1 (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + N_2 (\bar{x}_2 - \bar{x})^2}{n} =$$

$$= \frac{10\cdot(4 - 14/3)^2 + 5\cdot(6 - 14/3)^2}{15} = \frac{8}{9}.$$

Теперь целесообразно ввести специальный термин для дисперсии всей совокупности.

Общей дисперсией называют дисперсию значений признака всей совокупности относительно общей средней:

$$D_{\text{общ}} = \left(\sum n_i (x_i - \bar{x})^2\right)/n,$$

где n_i — частота значения x_i; $\bar{x}$ — общая средняя; n — объем всей совокупности.

Пример 4. Найти общую дисперсию по данным примера 1.

Решение. Найдем искомую общую дисперсию, учитывая, что общая средняя равна 14/3:

$$D_{\text{общ}} = \frac{1\cdot(2 - 14/3)^2 + 7\cdot(4 - 14/3)^2 + 2\cdot(5 - 14/3)^2}{15} +$$

$$+ \frac{2\cdot(3 - 14/3)^2 + 3\cdot(8 - 14/3)^2}{15} = \frac{148}{45}.$$

Замечание. Найденная общая дисперсия равна сумме внутригрупповой и межгрупповой дисперсий:

$$D_{\text{общ}} = 148/45;$$

$$D_{\text{внгр}} + D_{\text{межгр}} = 12/5 + 8/9 = 148/45.$$

В следующем параграфе будет доказано, что такая закономерность справедлива для любой совокупности.

§ 12. Сложение дисперсий

Теорема. *Если совокупность состоит из нескольких групп, то общая дисперсия равна сумме внутригрупповой и межгрупповой дисперсий:*

$$D_{\text{общ}} = D_{\text{внгр}} + D_{\text{межгр}}.$$

Доказательство. Для упрощения доказательства предположим, что вся совокупность значений количественного признака X разбита на две следующие группы:

Группа	первая	вторая
Значение признака . . .	$x_1 \; x_2$	$x_1 \; x_2$
Частота	$m_1 \; m_2$	$n_1 \; n_2$
Объем группы	$N_1 = m_1 + m_2$	$N_2 = n_1 + n_2$
Групповая средняя . . .	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$
Групповая дисперсия . .	$D_{1\text{гр}}$	$D_{2\text{гр}}$
Объем своей совокупности $n = N_1 + N_2$		

Далее для удобства записи вместо знака суммы $\sum\limits_{i=1}^{2}$ пишется знак $\sum$. Например, $\sum m_i = \sum\limits_{i=1}^{2} m_i = m_1 + m_2 = N_1$.

Следует также иметь в виду, что если под знаком суммы стоит постоянная величина, то ее целесообразно выносить за знак суммы. Например, $\sum m_i (\overline{x}_1 - \overline{x})^2 = (\overline{x}_1 - \overline{x})^2 \sum m_i = (\overline{x}_1 - \overline{x})^2 N_1$.

Найдем общую дисперсию:

$$D_{\text{общ}} = \left(\sum m_i (x_i - \overline{x})^2 + \sum n_i (x_i - \overline{x})^2\right)/n. \qquad (*)$$

Преобразуем первое слагаемое числителя, вычтя и прибавив $\overline{x}_1$:

$$\sum m_i (x_i - \overline{x})^2 = \sum m_i \left[(x_i - \overline{x}_1) + (\overline{x}_1 - \overline{x})\right]^2 =$$
$$= \sum m_i (x_i - \overline{x}_1)^2 + 2(\overline{x}_1 - \overline{x}) \sum m_i (x_i - \overline{x}_1) + \sum m_i (\overline{x}_1 - \overline{x})^2.$$

Так как

$$\sum m_i (x_i - \overline{x}_1)^2 = N_1 D_{1\text{гр}}$$

(равенство следует из соотношения $D_{1\text{гр}} = \left(\sum m_i (x_i - \overline{x}_1)^2\right)/N_1$) и в силу § 7

$$\sum m_i (x_i - \overline{x}_1) = 0,$$

то первое слагаемое принимает вид

$$\sum m_i (x_i - \overline{x}_1)^2 = N_1 D_{1гр} + N_1 (\overline{x}_1 - \overline{x})^2. \qquad (**)$$

Аналогично можно представить второе слагаемое числителя (*) (вычтя и прибавив $\overline{x}_2$):

$$\sum n_i (x_i - \overline{x})^2 = N_2 D_{2гр} + N_2 (\overline{x}_2 - \overline{x})^2. \qquad (***)$$

Подставим (**) и (***) в (*):

$$D_{общ} = (N_1 D_{1гр} + N_2 D_{2гр})/n +$$
$$+ (N_1 (\overline{x}_1 - \overline{x})^2 + N_2 (\overline{x}_2 - \overline{x})^2)/n = D_{внгр} + D_{межгр}.$$

Итак,

$$D_{общ} = D_{внгр} + D_{межгр}.$$

Пример, иллюстрирующий доказанную теорему, приведен в предыдущем параграфе.

Замечание. Теорема имеет не только теоретическое, но и важное практическое значение. Например, если в результате наблюдений получены несколько групп значений признака, то для вычисления общей дисперсии можно группы в единую совокупность не объединять. С другой стороны, если совокупность имеет большой объем, то целесообразно разбить ее на несколько групп. В том и другом случаях непосредственное вычисление общей дисперсии заменяется вычислением дисперсий отдельных групп, что облегчает расчеты.

§ 13. Оценка генеральной дисперсии по исправленной выборочной

Пусть из генеральной совокупности в результате n независимых наблюдений над количественным признаком X извлечена повторная выборка объема n:

значения признака	$x_1\ x_2\ \ldots\ x_k$
частоты	$n_1\ n_2\ \ldots\ n_k$

При этом $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Требуется по данным выборки оценить (приближенно найти) неизвестную генеральную дисперсию $D_г$. Если в качестве оценки генеральной дисперсии принять выборочную дисперсию, то эта оценка будет приводить к систематическим ошибкам, давая заниженное значение генеральной дисперсии. Объясняется это тем, что, как можно доказать, выборочная дисперсия является смещенной оценкой $D_г$, другими словами, математическое ожидание выборочной дисперсии не равно оцениваемой генеральной дисперсии, а равно

$$M[D_в]=\frac{n-1}{n}D_г.$$

Легко «исправить» выборочную дисперсию так, чтобы ее математическое ожидание было равно генеральной дисперсии. Достаточно для этого умножить $D_в$ на дробь $n/(n-1)$. Сделав это, получим *исправленную дисперсию*, которую обычно обозначают через s^2:

$$s^2=\frac{n}{n-1}D_в=\frac{n}{n-1}\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i-\overline{x}_в)^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i-\overline{x}_в)^2}{n-1}.$$

Исправленная дисперсия является, конечно, несмещенной оценкой генеральной дисперсии. Действительно,

$$M[s^2]=M\left[\frac{n}{n-1}D_в\right]=\frac{n}{n-1}M[D_в]=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}D_г=D_г.$$

Итак, в качестве оценки генеральной дисперсии принимают исправленную дисперсию

$$s^2=\left(\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i-\overline{x}_в)^2\right)\Big/(n-1).$$

Для оценки же среднего квадратического отклонения генеральной совокупности используют «исправленное» среднее квадратическое отклонение, которое равно квадратному корню из исправленной дисперсии:

$$s=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i-\overline{x}_в)^2\right)\Big/(n-1)}.$$

Подчеркнем, что s не является несмещенной оценкой; чтобы отразить этот факт, мы написали и будем писать далее так: «исправленное» среднее квадратическое отклонение.

Замечание. Сравнивая формулы

$$D_в\left(\sum n_i(x_i-\overline{x}_в)^2\right)/n \quad \text{и} \quad s^2=\left(\sum n_i(x_i-\overline{x})^2\right)/(n-1),$$

видим, что они отличаются лишь знаменателями. Очевидно, при достаточно больших значениях n объема выборки выборочная и исправленная дисперсии различаются мало. На практике пользуются исправленной дисперсией, если примерно $n < 30$.

§ 14. Точность оценки, доверительная вероятность (надежность). Доверительный интервал

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом. Все оценки, рассмотренные выше, — точечные. При выборке малого объема точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, т. е. приводить к грубым ошибкам. По этой причине при небольшом объеме выборки следует пользоваться интервальными оценками.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами — концами интервала. Интервальные оценки позволяют установить точность и надежность оценок (смысл этих понятий выясняется ниже).

Пусть найденная по данным выборки статистическая характеристика Θ^* служит оценкой неизвестного параметра Θ. Будем считать Θ постоянным числом (Θ может быть и случайной величиной). Ясно, что Θ^* тем точнее определяет параметр Θ, чем меньше абсолютная величина разности $|\Theta - \Theta^*|$. Другими словами, если $\delta > 0$ и $|\Theta - \Theta^*| < \delta$, то чем меньше δ, тем оценка точнее. Таким образом, положительное число δ характеризует *точность оценки*.

Однако статистические методы не позволяют категорически утверждать, что оценка Θ^* удовлетворяет неравенству $|\Theta - \Theta^*| < \delta$; можно лишь говорить о вероятности γ, с которой это неравенство осуществляется.

Надежностью (доверительной вероятностью) оценки Θ по Θ^* называют вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $|\Theta - \Theta^*| < \delta$. Обычно надежность оценки задается наперед, причем в качестве γ берут число, близкое к единице. Наиболее часто задают надежность, равную 0,95; 0,99 и 0,999.

Пусть вероятность того, что $|\Theta - \Theta^*| < \delta$, равна γ:

$$P[|\Theta - \Theta^*| < \delta] = \gamma.$$

Заменив неравенство $|\Theta - \Theta^*| < \delta$ равносильным ему двойным неравенством $-\delta < \Theta - \Theta^* < \delta$, или $\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta$, имеем

$$P[\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta] = \gamma.$$

Это соотношение следует понимать так: вероятность того, что интервал $(\Theta^* - \delta,\ \Theta^* + \delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр Θ, равна γ.

Доверительным называют интервал $(\Theta^*-\delta,\ \Theta^*+\delta)$, который покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью γ.

Замечание. Интервал $(\Theta^*-\delta,\ \Theta^*+\delta)$ имеет случайные концы (их называют доверительными границами). Действительно, в разных выборках получаются различные значения Θ^*. Следовательно, от выборки к выборке будут изменяться и концы доверительного интервала, т. е. доверительные границы сами являются случайными величинами—функциями от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Так как случайной величиной является не оцениваемый параметр Θ, а доверительный интервал, то более правильно говорить не о вероятности попадания Θ в доверительный интервал, а о вероятности того, что доверительный интервал покроет Θ.

Метод доверительных интервалов разработал американский статистик Ю. Нейман, исходя из идей английского статистика Р. Фишера.

§ 15. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней $\overline{x}$. Поставим своей задачей найти доверительные интервалы, покрывающие параметр a с надежностью γ.

Будем рассматривать выборочную среднюю $\overline{x}$ как случайную величину $\overline{X}$ ($\overline{x}$ изменяется от выборки к выборке) и выборочные значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_n$—как одинаково распределенные независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (эти числа также изменяются от выборки к выборке). Другими словами, математическое ожидание каждой из этих величин равно a и среднее квадратическое отклонение—σ.

Примем без доказательства, что если случайная величина X распределена нормально, то выборочная средняя $\overline{X}$, найденная по независимым наблюдениям, также распределена нормально. Параметры распределения $\overline{X}$ таковы (см. гл. VIII, § 9):

$$M(\overline{X})=a,\quad \sigma(\overline{X})=\sigma/\sqrt{n}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$P(|\overline{X}-a|<\delta)=\gamma,$$

где γ — заданная надежность.

Пользуясь формулой (см. гл. XII, § 6)

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma),$$

заменив X на $\overline{X}$ и σ на $\sigma(\overline{X})=\sigma/\sqrt{n}$, получим

$$P(|\overline{X}-a|<\delta)=2\Phi(\delta\sqrt{n}/\sigma)=2\Phi(t),$$

где $t=\delta\sqrt{n}/\sigma$.

Найдя из последнего равенства $\delta=t\sigma/\sqrt{n}$, можем написать

$$P(|\overline{X}-a|<t\sigma/\sqrt{n})=2\Phi(t).$$

Приняв во внимание, что вероятность P задана и равна γ, окончательно имеем (чтобы получить рабочую формулу, выборочную среднюю вновь обозначим через $\overline{x}$)

$$P(\overline{x}-t\sigma/\sqrt{n}<a<\overline{x}+t\sigma/\sqrt{n})=2\Phi(t)=\gamma.$$

Смысл полученного соотношения таков: с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $(\overline{x}-t\sigma/\sqrt{n},\ \overline{x}+t\sigma/\sqrt{n})$ покрывает неизвестный параметр a; точность оценки $\delta=t\sigma/\sqrt{n}$.

Итак, поставленная выше задача полностью решена. Укажем еще, что число t определяется из равенства $2\Phi(t)=\gamma$, или $\Phi(t)=\gamma/2$; по таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находят аргумент t, которому соответствует значение функции Лапласа, равное $\gamma/2$.

Замечание 1. Оценку $|\overline{x}-a|<t\sigma/\sqrt{n}$ называют классической. Из формулы $\delta=t\sigma/\sqrt{n}$, определяющей точность классической оценки, можно сделать следующие выводы:

1) при возрастании объема выборки n число δ убывает и, следовательно, точность оценки увеличивается;

2) увеличение надежности оценки $\gamma=2\Phi(t)$ приводит к увеличению t ($\Phi(t)$ — возрастающая функция), следовательно, и к возрастанию δ; другими словами, увеличение надежности классической оценки влечет за собой уменьшение ее точности.

Пример. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma=3$. Найти доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочным средним $\overline{x}$, если объем выборки $n=36$ и задана надежность оценки $\gamma=0{,}95$.

Решение. Найдем t. Из соотношения $2\Phi(t)=0,95$ получим $\Phi(t)=0,475$. По таблице приложения 2 находим $t=1,96$.

Найдем точность оценки:

$$\delta = t\sigma/\sqrt{n} = (1,96\cdot 3)/\sqrt{36} = 0,98.$$

Доверительный интервал таков: $(\bar{x}-0,98;\ \bar{x}+0,98)$. Например, если $\bar{x}=4,1$, то доверительный интервал имеет следующие довернтельные границы:

$$\bar{x}-0,98=4,1-0,98=3,12; \qquad \bar{x}+0,98=4,1+0,98=5,08.$$

Таким образом, зиачения неизвестного параметра a, согласующиеся с данными выборки, удовлетьоряют неравенству $3,12 < a < 5,08$. Подчеркнем, что было бы ошибочным написать $P(3,12 < a < 5,08)=0,95$. Действительно, так как a — постояиная величина, то либо она заключена в найденном интервале (тогда событие $3,12 < a < 5,08$ достоверно и его вероятность равиа единице), либо в нем не заключена (в этом случае событие $3,12 < a < 5,08$ невозможно и его вероятиость равна нулю). Другими словами, доверительную вероятность не следует связывать с оценнваемым параметром; она связана лишь с границами доверительного интервала, которые, как уже было указано, изменяются от выборки к выборке.

Поясним смысл, который имеет заданная надежность. Надежность $\gamma=0,95$ указывает, что если произведено достаточно большое число выборок, то 95% из них определяет такие доверительные интервалы, в которых параметр действнтельно заключен; лишь в 5% случаев он может выйти за границы доверительного интервала.

Замечание 2. Если требуется оценить математнческое ожидание с наперед заданной точностью δ н надежностью γ, то минимальный объем выборки, который обеспечит эту точность, находят по формуле

$$n = t^2\sigma^2/\delta^2$$

(следствне равенства $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$).

§ 16. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратическое отклонение σ неизвестно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a с помощью доверительных интервалов. Разумеется, невозможно воспользоваться результатами предыдущего параграфа, в котором σ предполагалось известным.

Оказывается, что по данным выборки можно построить случайную величину (ее возможные значения будем обозначать через t):

$$T=\frac{\overline{X}-a}{S/\sqrt{n}},$$

которая имеет распределение Стьюдента с $k=n-1$ степенями свободы (см. пояснение в конце параграфа); здесь $\overline{X}$ — выборочная средняя, S — «исправленное» среднее квадратическое отклонение, n — объем выборки.

Плотность распределения Стьюдента

$$S(t,\ n)=B_n\left[1+\frac{t^2}{n-1}\right]^{-n/2},$$

где $B_n=\dfrac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma((n-1)/2)}$.

Мы видим, что распределение Стьюдента определяется параметром n — объемом выборки (или, что то же, числом степеней свободы $k=n-1$) и не зависит от неизвестных параметров a и σ; эта особенность является его большим достоинством. Поскольку $S(t,\ n)$ — четная функция от t, вероятность осуществления неравенства $\left|\dfrac{\overline{X}-a}{S/\sqrt{n}}\right|<\gamma$ определяется так (см. гл. § XI, 2, замечание):

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-a}{S/\sqrt{n}}\right|<t_\gamma\right)=2\int_0^{t_\gamma}S(t,\ n)\,dt=\gamma.$$

Заменив неравенство в круглых скобках равносильным ему двойным неравенством, получим

$$P(\overline{X}-t_\gamma S/\sqrt{n}<a<\overline{X}+t_\gamma S/\sqrt{n})=\gamma.$$

Итак, пользуясь распределением Стьюдента, мы нашли доверительный интервал $(\overline{x}-t_\gamma s/\sqrt{n},\ \overline{x}+t_\gamma s/\sqrt{n})$, покрывающий неизвестный параметр a с надежностью γ. Здесь случайные величины $\overline{X}$ и S заменены неслучайными величинами $\overline{x}$ и s, найденными по выборке. По таблице приложеиия 3 по заданным n и γ можно найти t_γ.

Пример. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n=16$ найдены выборочная средняя $\overline{x}=20{,}2$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s=0{,}8$. Оценить неизвестное математическое ожидание при помощи доверительного интервала с надежностью 0,95.

Решение. Найдем t_γ. Пользуясь таблицей приложения 3, по $\gamma=0{,}95$ и $n=16$ находим $t_\gamma=2{,}13$.

Найдем доверительные границы:

$$\overline{x}-t_\gamma s/\sqrt{n}=20,2-2,13\cdot 0,8/\sqrt{16}=19,774.$$

$$\overline{x}+t_\gamma s/\sqrt{n}=20,2+2,13\ 0,8/\sqrt{16}=20,626.$$

Итак, с надежностью 0,95 неизвестный параметр a заключен в доверительном интервале $19,774 < a < 20,626$.

Замечание. Из предельных соотиошеиий

$$\lim_{n\to\infty} B_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2}=e^{-t^2/2},$$

следует, что при неограниченном возрастании объема выборки n распределение Стьюдента стремится к нормальному. Поэтому практически при $n>30$ можно вместо распределения Стьюдента пользоваться нормальным распределением.

Одиако важно подчеркнуть, что **для малых выборок** ($n<30$), в особенности для малых значений n, замена распределения нормальным приводит к грубым ошибкам, а именно к неоправданному сужению доверительного интервала, т. е. к повышению точности оценки. Например, если $n=5$ и $\gamma=0,99$, то, пользуясь распределением Стьюдента, найдем $t_\gamma=4,6$, а используя функцию Лапласа, найдем $t_\gamma=2,58$, т. е. доверительный интервал в последнем случае окажется более узким, чем иайденный по распределению Стьюдента.

То обстоятельство, что распределение Стьюдента при малой выборке дает не вполие определенные результаты (широкий доверительный интервал), вовсе не свидетельствует о слабости метода Стьюдента, а объясняется тем, что малая выборка, разумеется, содержит малую информацию об интересующем нас признаке.

Пояснение. Раиее было указано (см. гл. XII, § 14), что если Z — нормальная величина, причем $M(Z)=0$, $\sigma(Z)=1$, а V — независимая от Z величина, распределенная по закону χ^2 с k степенями свободы, то величина

$$T=\frac{Z}{\sqrt{V/k}} \qquad (*)$$

распределена по закону Стьюдента с k степенями свободы.

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем $M(X)=a$, $\sigma(X)=\sigma$. Если из этой совокупности извлекать выборки объема n и по ним находить выборочные средние, то можно доказать, что выборочная средняя распределена нормально, причем (см. гл. VIII, § 9)

$$M(\overline{X}_в)=a,\quad \sigma(\overline{X}_в)=\sigma/\sqrt{n}.$$

Тогда случайная величина

$$Z=\frac{\overline{X}_{\text{в}}-a}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad (**)$$

также имеет нормальное распределение как линейная функция нормального аргумента $\overline{X}_{\text{в}}$ (см. гл. XII, § 10, замечание), причем $M(Z)=0$, $\sigma(Z)=1$.

Доказано, что случайные величины Z и

$$V=((n-1)S^2)/\sigma^2 \qquad (***)$$

независимы (S^2 — исправленная выборочная дисперсия) и что величина V распределена по закону χ^2 с $k=n-1$ степенями свободы.

Следовательно, подставив (**) и (***) в (*), получим величину

$$T=((\overline{x}_{\text{в}}-a)\sqrt{n})/S,$$

которая распределена по закону Стьюдента с $k=n-1$ степенями свободы.

§ 17. Оценка истинного значения измеряемой величины

Пусть производится n независимых равноточных измерений некоторой физической величины, истинное значение a которой неизвестно. Будем рассматривать результаты отдельных измерений как случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Эти величины независимы (измерения независимы), имеют одно и то же математическое ожидание a (истинное значение измеряемой величины), одинаковые дисперсии σ^2 (измерения равноточны) и распределены нормально (такое допущение подтверждается опытом). Таким образом, все предположения, которые были сделаны при выводе доверительных интервалов в двух предыдущих параграфах, выполняются, и, следовательно, мы вправе использовать полученные в них формулы. Другими словами, истинное значение измеряемой величины можно оценивать по среднему арифметическому результатов отдельных измерений при помощи доверительных интервалов. Поскольку обычно σ неизвестно, следует пользоваться формулами, приведенными в § 16.

Пример. По данным девяти независимых равноточных измерений физической величины найдены среднее арифметической результатов отдельных измерений $\overline{x}=42,319$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s=5,0$. Требуется оценить истинное значение измеряемой величины с надежностью $\gamma=0,95$.

Решение. Истинное значение измеряемой величины равно ее математическому ожиданию. Поэтому задача сводится к оценке математического ожидания (при неизвестном σ) при помощи доверительного интервала

$$\overline{x}-t_\gamma S/\sqrt{n} < a < \overline{x}+t_\gamma S/\sqrt{n},$$

покрывающего a с заданной надежностью $\gamma=0,95$.

Пользуясь таблицей приложения 3, по $\gamma=0,95$ и $n=9$ находим $t_\gamma=2,31$.

Найдем точность оценки:

$$t_\gamma(s/\sqrt{n})=2,31\cdot(5/\sqrt{9})=3,85.$$

Найдем доверительные границы:

$$\overline{x}-t_\gamma s/\sqrt{n}=42,319-3,85=38,469;$$
$$\overline{x}+t_\gamma s/\sqrt{n}=42,319+3,85=46,169.$$

Итак, с надежностью 0,95 истинное значение измеряемой величины заключено в доверительном интервале

$$38,469 < a < 46,169.$$

§ 18. Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. Требуется оценить неизвестное генеральное среднее квадратическое отклонение σ по «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению s. Поставим перед собой задачу найти доверительные интервалы, покрывающие параметр σ с заданной надежностью γ.

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$P(|\sigma-s|<\delta)=\gamma, \text{ или } P(s-\delta<\sigma<s+\delta)=\gamma.$$

Для того чтобы можно было пользоваться готовой таблицей, преобразуем двойное неравенство

$$s-\delta<\sigma<s+\delta$$

в равносильное неравенство

$$s(1-\delta/s)<\sigma<s(1+\delta/s).$$

Положив $\delta/s=q$, получим

$$s(1-q)<\sigma<s(1+q). \qquad (*)$$

Остается найти q. С этой целью введем в рассмотрение случайную величину «хи»:

$$\chi = (S/\sigma)\sqrt{n-1},$$

где n — объем выборки.

Как было указано [см. § 16, пояснение, соотношение (***)], величина $S^2(n-1)/\sigma^2$ распределена по закону χ^2 с $n-1$ степенями свободы, поэтому квадратный корень из нее обозначают через χ.

Плотность распределения χ имеет вид (см. пояснение в конце параграфа)

$$R(\chi,\ n) = \frac{\chi^{n-2} e^{-\chi^2/2}}{2^{(n-3)/2}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}. \qquad (**)$$

Это распределение не зависит от оцениваемого параметра σ, а зависит лишь от объема выборки n.

Преобразуем неравенство (*) так, чтобы оно приняло вид $\chi_1 < \chi < \chi_2$. Вероятность этого неравенства (см. гл. XI, § 2) равна заданной вероятности γ, т. е.

$$\int_{\chi_1}^{\chi_2} R(\chi,\ n)\, d\chi = \gamma.$$

Предполагая, что $q < 1$, перепишем неравенство (*) так:

$$\frac{1}{S(1+q)} < \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{S(1-q)}.$$

Умножив все члены неравенства на $S\sqrt{n-1}$, получим

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \frac{S\sqrt{n-1}}{\sigma} < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q},$$

или

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}.$$

Вероятность того, что это неравенство, а следовательно, и равносильное ему неравенство (*) будет осуществлено, равна

$$\int_{\sqrt{n-1}/(1+q)}^{\sqrt{n-1}/(1-q)} R(\chi,\ n)\, d\chi = \gamma.$$

Из этого уравнения можно по заданным n и γ найти q. Практически для отыскания q пользуются таблицей приложения 4.

Вычислив по выборке s и найдя по таблице q, получим искомый доверительный интервал (*), покрывающий σ с заданной надежностью γ, т. е. интервал

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q).$$

Пример 1. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n=25$ найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s=0{,}8$. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,95.

Решение. По таблице приложения 4 по данным $\gamma=0{,}95$ и $n=25$ найдем $q=0{,}32$.

Искомый доверительный интервал (*) таков:

$$0{,}8(1-0{,}32) < \sigma < 0{,}8(1+0{,}32), \quad \text{или} \quad 0{,}544 < \sigma < 1{,}056.$$

Замечание. Выше предполагалось, что $q < 1$. Если $q > 1$, то неравенство (*) примет вид (учитывая, что $\sigma > 0$)

$$0 < \sigma < s(1+q),$$

или (после преобразований, аналогичных случаю $q < 1$)

$$\sqrt{n-1}/(1+q) < \chi < \infty.$$

Следовательно, значения $q > 1$ могут быть найдены из уравнения

$$\int\limits_{\sqrt{n-1}/(1+q)}^{\infty} R(\chi, n)\, d\chi = \gamma.$$

Практически для отыскания значений $q > 1$, соответствующих различным заданным n и γ, пользуются таблицей приложения 4.

Пример 2. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n=10$ найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s=0{,}16$. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,999.

Решение. По таблице приложения 4 по данным $\gamma=0{,}999$ и $n=10$ найдем $q=1{,}80$ ($q > 1$). Искомый доверительный интервал таков:

$$0 < \sigma < 0{,}16(1+1{,}80), \quad \text{или} \quad 0 < \sigma < 0{,}448.$$

Пояснение. Покажем, что плотность распределения χ имеет вид (**).

Если случайная величина X распределена по закону χ^2 с $k=n-1$ степенями свободы, то ее плотность распределения (см. гл. XII, § 13)

$$f(x) = \frac{x^{(k/2)-1}\, e^{-x/2}}{2^{k/2}\, \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)},$$

или после подстановки $k=n-1$

$$f(x)=\frac{x^{(n-3)/2}\,e^{-x/2}}{2^{(n-1)/2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Воспользуемся формулой (см. гл. XII, § 10)

$$g(y)=f[\psi(y)]\,|\psi'(y)|,$$

чтобы найти распределение функции $\chi=\varphi(X)=\sqrt{X}$ $(\chi>0)$. Отсюда обратная функция

$$x=\psi(\chi)=\chi^2 \quad \text{и} \quad \psi'(\chi)=2\chi.$$

Так как $\chi>0$, то $|\psi'(\chi)|=2\chi$, следовательно,

$$g(\chi)=f[\psi(\chi)]\cdot|\psi'(\chi)|=\frac{(\chi^2)^{(n-3)/2}\,e^{-\chi^2/2}}{2^{(n-1)/2}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot 2\chi.$$

Выполнив элементарные преобразования и изменив обозначения ($g(\chi)$, заменим на $R(\chi,\ n)$), окончательно получим

$$R(\chi,\ n)=\frac{\chi^{n-2}\,e^{-\chi^2/2}}{2^{(n-3)/2}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

§ 19. Оценка точности измерений

В теории ошибок принято точность измерений (точность прибора) характеризовать с помощью среднего квадратического отклонения σ случайных ошибок измерений. Для оценки σ используют «исправленное» среднее квадратическое отклонение s. Поскольку обычно результаты измерений взаимно независимы, имеют одно и то же математическое ожидание (истинное значение измеряемой величины) и одинаковую дисперсию (в случае равноточных измерений), то теория, изложенная в предыдущем параграфе, применима для оценки точности измерений.

Пример. По 15 равноточным измерениям найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s=0{,}12$. Найти точность измерений с надежностью 0,99.

Решение. Точность измерений характеризуется средним квадратическим отклонением σ случайных ошибок, поэтому задача сводится к отысканию доверительного интервала (*), покрывающего σ с заданной надежностью 0,99 (см. § 18).

По таблице приложения 4 по $\gamma=0,99$ и $n=15$ найдем $q=0,73$. Искомый доверительный интервал

$$0,12(1-0,73) < \sigma < 0,12(1+0,73), \quad \text{или} \quad 0,03 < \sigma < 0,21.$$

§ 20. Оценка вероятности (биномиального распределения) по относительной частоте

Пусть производятся независимые испытания с неизвестной вероятностью p появления события A в каждом испытании. Требуется оценить неизвестную вероятность p по относительной частоте, т. е. надо найти ее точечную и интервальную оценки.

А. Точечная оценка. В качестве точечной оценки неизвестной вероятности p принимают относительную частоту

$$W=m/n,$$

где m — число появлений события A; n — число испытаний *).

Эта оценка несмещенная, т. е. ее математическое ожидание равно оцениваемой вероятности. Действительно, учитывая, что $M(m)=np$ (см. гл. VII, § 5), получим

$$M(W)=M[m/n]=M(m)/n=np/n=p.$$

Найдем дисперсию оценки, приняв во внимание, что $D(m)=npq$ (см. гл. VII, § 6):

$$D(W)=D[m/n]=D(m)/n^2=npq/n^2=pq/n.$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_W=\sqrt{D(W)}=\sqrt{pq/n}.$$

Б. Интервальная оценка. Найдем доверительный интервал для оценки вероятности по относительной частоте. Напомним, что ранее (см. гл. XII, § 6) была выведена формула, позволяющая найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения не превысит положительного числа δ:

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma), \qquad (*)$$

*) Напомним, что случайные величины обозначают прописными, а их возможные значения — строчными буквами. В различных опытах число m появлений события будет изменяться и поэтому является случайной величиной M. Однако, поскольку через M уже обозначено математическое ожидание, мы сохраним для случайного числа появлений события обозначение m.

где X — нормальная случайная величина с математическим ожиданием $M(X)=a$.

Если n достаточно велико и вероятность p не очень близка к нулю и к единице, то можно считать, что относительная частота распределена приближенно нормально, причем, как показано в п. А, $M(W)=p$.

Таким образом, заменив в соотношении (*) случайную величину X и ее математическое ожидание a соответственно случайной величиной W и ее математическим ожиданием p, получим приближенное (так как относительная частота распределена приближенно нормально) равенство

$$P(|W-p|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma_W). \qquad (**)$$

Приступим к построению доверительного интервала (p_1, p_2), который с надежностью γ покрывает оцениваемый параметр p, для чего используем рассуждения, с помощью которых был построен доверительный интервал в гл. XVI, § 15. Потребуем, чтобы с надежностью γ выполнялось соотношение (**):

$$P(|W-p|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma)=\gamma.$$

Заменив σ_W через $\sqrt{pq/n}$ (см. п. А), получим

$$P(|W-p|<\delta)=2\Phi(\delta\sqrt{n}/\sqrt{pq})=2\Phi(t)=\gamma,$$

где $t=\delta\sqrt{n}/\sqrt{pq}$.

Отсюда

$$\delta=t\sqrt{pq/n}$$

и, следовательно,

$$P\left(|W-p|<t\sqrt{pq/n}\right)=2\Phi(t)=\gamma.$$

Таким образом, с надежностью γ выполняется неравенство (чтобы получить рабочую формулу, случайную величину W заменим неслучайной наблюдаемой относительной частотой w и подставим $1-p$ вместо q):

$$|w-p|<t\sqrt{p(1-p)/n}.$$

Учитывая, что вероятность p неизвестна, решим это неравенство относительно p. Допустим, что $w>p$. Тогда

$$w-p<t\sqrt{p(1-p)/n}.$$

Обе части неравенства положительны; возведя их в квадрат, получим равносильное квадратное неравенство относительно p:

$$[(t^2/n)+1)]\,p^2-2\,[w+(t^2/n)]\,p+w^2<0.$$

Дискриминант трехчлена положительный, поэтому его корни действительные и различные:

меньший корень

$$p_1=\frac{n}{t^2+n}\left[w+\frac{t^2}{2n}-t\,\sqrt{\frac{w\,(1-w)}{n}+\left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right], \qquad (***)$$

больший корень

$$p_2=\frac{n}{t^2+n}\left[w+\frac{t^2}{2n}+t\,\sqrt{\frac{w\,(1-w)}{n}+\left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right]. \qquad (****)$$

Итак, искомый доверительный интервал $p_1<p<p_2$, где p_1 и p_2 находят по формулам (***) и (****).

При выводе мы предположили, что $w>p$; тот же результат получим при $w<p$.

Пример. Производят независимые испытания с одинаковой, но неизвестной вероятностью p появления события A в каждом испытании. Найти доверительный интервал для оценки вероятности p с надежностью 0,95, если в 80 испытаниях событие A появилось 16 раз.

Решение. По условию, $n=80$, $m=16$, $\gamma=0{,}95$. Найдем относительную частоту появления события A:

$$w=m/n=16/80=0{,}2.$$

Найдем t из соотношения $\Phi(t)=\gamma/2=0{,}95/2=0{,}475$; по таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $t=1{,}96$.

Подставив $n=80$, $w=0{,}2$, $t=1{,}96$ в формулы (***) и (****), получим соответственно $p_1=0{,}128$, $p_2=0{,}299$.

Итак, искомый доверительный интервал $0{,}128<p<0{,}299$.

Замечание 1. При больших значениях n (порядка сотен) слагаемые $t^2/(2n)$ и $(t/(2n))^2$ очень малы и множитель $n/(t^2+n)\simeq 1$, поэтому можно принять в качестве приближенных границ доверительного интервала

$$p_1=w-t\,\sqrt{w\,(1-w)/n} \quad \text{и} \quad p_2=w+t\,\sqrt{w\,(1-w)/n}.$$

Замечание 2. Чтобы избежать расчетов концов доверительных интервалов, можно использовать табл. 28 книги Янко Я. Математико-статистические таблицы. М., Госстатиздат, 1961.

§ 21. Метод моментов для точечной оценки параметров распределения

Можно доказать, что начальные и центральные эмпирические моменты являются состоятельными оценками соответственно начальных и центральных теоретических моментов того же порядка. На этом основан метод моментов, предложенный К. Пирсоном. Достоинство метода — сравнительная его простота. Метод моментов точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения состоит в приравнивании теоретических моментов рассматриваемого распределения соответствующим эмпирическим моментам того же порядка.

А. Оценка одного параметра. Пусть задан вид плотности распределения $f(x, \theta)$, определяемой одним неизвестным параметром θ. Требуется найти точечную оценку параметра θ.

Для оценки одного параметра достаточно иметь одно уравнение относительно этого параметра. Следуя методу моментов, приравняем, например, начальный теоретический момент первого порядка начальному эмпирическому моменту первого порядка: $\nu_1 = M_1$. Учитывая, что $\nu_1 = M(X)$ (см. гл. VIII, § 10), $M_1 = \bar{x}_в$ (см. гл. XVII, § 2), получим

$$M(X) = \bar{x}_в. \qquad (*)$$

Математическое ожидание $M(X)$, как видно из соотношения

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;\ \theta)\, dx = \varphi(\theta),$$

есть функция от θ, поэтому (*) можно рассматривать как уравнение с одним неизвестным θ. Решив это уравнение относительно параметра θ, тем самым найдем его точечную оценку θ^*, которая является функцией от выборочной средней, следовательно, и от вариант выборки:

$$\theta^* = \psi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Пример 1. Найти методом моментов по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения, плотность распределения которого $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \geqslant 0)$.

Решение. Приравняем начальный теоретический момент первого порядка начальному эмпирическому моменту первого порядка: $\nu_1 = M_1$. Учитывая, что $\nu_1 = M(X)$, $M_1 = \bar{x}_в$, получим

$$M(X) = \bar{x}_в.$$

Приняв во внимание, что математическое ожидание показательного распределения равно $1/\lambda$ (см. гл. XIII, § 3), имеем

$$1/\lambda = \bar{x}_в.$$

Отсюда

$$\lambda = 1/\overline{x}_{\text{в}}.$$

Итак, искомая точечная оценка параметра λ показательного распределения равна величине, обратной выборочной средней:

$$\lambda^* = 1/\overline{x}_{\text{в}}.$$

Б. Оценка двух параметров. Пусть задан вид плотности распределения $f(x;\ \theta_1,\ \theta_2)$, определяемой неизвестными параметрами θ_1 и θ_2. Для отыскания двух параметров необходимы два уравнения относительно этих параметров. Следуя методу моментов, приравняем, например, начальный теоретический момент первого порядка начальному эмпирическому моменту первого порядка и центральный теоретический момент второго порядка центральному эмпирическому моменту второго порядка:

$$\nu_1 = M_1, \quad \mu_2 = m_2.$$

Учитывая, что $\nu_1 = M(X)$, $\mu_2 = D(X)$ (см. гл. VIII, § 10), $M_1 = \overline{x}_{\text{в}}$, $m_2 = D_{\text{в}}$ (см. гл. XVII, § 2), получим

$$\left.\begin{aligned} M(X) &= \overline{x}_{\text{в}}, \\ D(X) &= D_{\text{в}}. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Математическое ожидание и дисперсия есть функции от θ_1 и θ_2, поэтому (**) можно рассматривать как систему двух уравнений с двумя неизвестными θ_1 и θ_2. Решив эту систему относительно неизвестных параметров, тем самым получим их точечные оценки θ_1^* и θ_2^*. Эти оценки являются функциями от вариант выборки:

$$\theta_1^* = \psi_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),$$

$$\theta_2^* = \psi_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Пример 2. Найти методом моментов по выборке $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ точечные оценки неизвестных параметров a и σ нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}.$$

Решение. Приравняем начальные теоретические и эмпирические моменты первого порядка, а также центральные и эмпирические моменты второго порядка:

$$\nu_1 = M_1, \qquad \mu_2 = m_2.$$

Учитывая, что $\nu_1 = M(X)$, $\mu_2 = D(X)$, $M_1 = \overline{x}_{\text{в}}$, $m_2 = D_{\text{в}}$, получим

$$M(X) = \overline{x}_{\text{в}}, \quad D(X) = D_{\text{в}}.$$

Приняв во внимание, что математическое ожидание нормального распределения равно параметру a, дисперсия равна σ^2 (см. гл. XII, § 2), имеем:

$$a=\overline{x}_{\text{в}},\qquad \sigma^2=D_{\text{в}}.$$

Итак, искомые точечные оценки параметров нормального распределения:

$$a^*=\overline{x}_{\text{в}},\qquad \sigma^*=\sqrt{D_{\text{в}}}.$$

Замечание 1. Для оценок неизвестных параметров можно приравнивать не только сами моменты, но и функции от моментов. В частности, этим путем получают состоятельные оценки характеристик распределений, которые являются функциями теоретических моментов. Например, асимметрия теоретического распределения (см. гл. XII, § 9)

$$A_S=\mu_3/\sigma^3=\mu_3/\left(\sqrt{\mu_2}\right)^3$$

есть функция от центральных моментов второго и третьего порядков. Заменив эти теоретические моменты соответствующими эмпирическими моментами, получим точечную оценку асимметрии

$$A_S^*=m_3/\left(\sqrt{m_2}\right)^3.$$

Замечание 2. Учитывая, что $\sqrt{m_2}=\sqrt{D_{\text{в}}}=\sigma_{\text{в}}$, последнюю формулу можно записать в виде

$$A_S^*=m_3/\sigma_{\text{в}}^3.$$

Далее эта оценка будет принята в качестве определения асимметрии эмпирического распределения (см. гл. XVII, § 9).

§ 22. Метод наибольшего правдоподобия

Кроме метода моментов, который изложен в предыдущем параграфе, существуют и другие методы точечной оценки неизвестных параметров распределения. К ним относится метод наибольшего правдоподобия, предложенный Р. Фишером.

А. Дискретные случайные величины. Пусть X — дискретная случайная величина, которая в результате n испытаний приняла значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Допустим, что вид закона распределения величины X задан, но неизвестен параметр θ, которым определяется этот закон. Требуется найти его точечную оценку.

Обозначим вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, через $p(x_i;\ \theta)$.

Функцией правдоподобия дискретной случайной величины X называют функцию аргумента θ:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \theta)=p(x_1;\ \theta)\,p(x_2;\ \theta)\ldots p(x_n;\ \theta),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — фиксированные числа.

В качестве точечной оценки параметра θ принимают такое его значение $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при котором функция правдоподобия достигает максимума. Оценку θ^* называют *оценкой наибольшего правдоподобия*.

Функции L и $\ln L$ достигают максимума при одном и том же значении θ, поэтому вместо отыскания максимума функции L ищут (что удобнее) максимум функции $\ln L$.

Логарифмической функцией правдоподобия называют функцию $\ln L$. Как известно, точку максимума функции $\ln L$ аргумента θ можно искать, например, так:

1) найти производную $\frac{d \ln L}{d\theta}$;

2) приравнять производную нулю и найти критическую точку — корень полученного уравнения (его называют *уравнением правдоподобия*);

3) найти вторую производную $\frac{d^2 \ln L}{d\theta^2}$; если вторая производная при $\theta = \theta^*$ отрицательна, то θ^* — точка максимума.

Найденную точку максимума θ^* принимают в качестве оценки наибольшего правдоподобия параметра θ.

Метод наибольшего правдоподобия имеет ряд достоинств: оценки наибольшего правдоподобия, вообще говоря, состоятельны (но они могут быть смещенными), распределены асимптотически нормально (при больших значениях n приближенно нормальны) и имеют наименьшую дисперсию по сравнению с другими асимптотически нормальными оценками; если для оцениваемого параметра θ существует эффективная оценка θ^*, то уравнение правдоподобия имеет единственное решение θ^*; этот метод наиболее полно использует данные выборки об оцениваемом параметре, поэтому он особенно полезен в случае малых выборок.

Недостаток метода состоит в том, что он часто требует сложных вычислений.

Замечание 1. Функция правдоподобия — функция от аргумента θ; оценка наибольшего правдоподсбия — функция от независимых аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Замечание 2. Оценка наибольшего правдоподобия не всегда совпадает с оценкой, найденной методом моментов.

Пример 1. Найти методом наибольшего правдоподобия оценку параметра λ распределения Пуассона

$$P_m(X = x_i) = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!},$$

где m — число произведенных испытаний, x_i — число появлений события в i-м ($i = 1, 2, \ldots, n$) опыте (опыт состоит из m испытаний).

Решение. Составим функцию правдоподобия, учитывая, что $\theta=\lambda$:

$$L=p(x_1;\ \lambda)\,p(x_2;\ \lambda)\ \ldots\ p(x_n;\ \lambda)=$$

$$=\frac{\lambda^{x_1}\,e^{-\lambda}}{x_1!}\cdot\frac{\lambda^{x_2}\,e^{-\lambda}}{x_2!}\ \ldots\ \frac{\lambda^{x_n}\cdot e^{-\lambda}}{x_n!}=\frac{\lambda^{\sum x_i}\cdot e^{-n\lambda}}{x_1!x_2!\ .\ .\ x_n!}\ .$$

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L=\left(\sum x_i\right)\ln\lambda-n\lambda-\ln\left(x_1!x_2!\ \ldots\ x_n!\right).$$

Найдем первую производную по λ:

$$\frac{d\ln L}{d\lambda}=\frac{\sum x_i}{\lambda}-n.$$

Напишем уравнение правдоподобия, для чего приравняем первую производную нулю:

$$\left(\sum x_i/\lambda\right)-n=0.$$

Найдем критическую точку, для чего решим полученное уравнение относительно λ:

$$\lambda=\sum x_i/n=\overline{x}_в.$$

Найдем вторую производную по λ:

$$\frac{d^2\ln L}{d\lambda^2}=-\frac{\sum x_i}{\lambda^2}\,.$$

Легко видеть, что при $\lambda=\overline{x}_в$ вторая производная отрицательна; следовательно, $\lambda=\overline{x}_в$ — точка максимума и, значит, в качестве оценки наибольшого правдоподобия параметра λ распределения Пуассона надо принять выборочную среднюю $\lambda^*=\overline{x}_в$.

Пример 2. Найти методом наибольшего правдоподобия оценку параметра p биномиального распределения

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},$$

если в n_1 независимых испытаниях событие A появилось $x_1=m_1$ раз и в n_2 независимых испытаниях событие A появилось $x_2=m_2$ раз.

Решение. Составим функцию правдоподобия, учитывая, что $\theta=p$:

$$L=P_{n_1}(m_1)\,P_{n_2}(m_2)=C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}p^{m_1+m_2}(1-p)^{[(n_1+n_2)-(m_1+m_2)]}.$$

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L=\ln\left(C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}\right)+(m_1+m_2)\ln p+[(n_1+n_2)-(m_1+m_2)]\ln(1-p).$$

Найдем первую производную по p:

$$\frac{d\ln L}{dp}=\frac{m_1+m_2}{p}-\frac{(n_1+n_2)-(m_1+m_2)}{1-p}\,.$$

Напишем уравнение правдоподобия, для чего приравняем первую производную нулю:

$$\frac{m_1+m_2}{p}-\frac{(n_1+n_2)-(m_1+m_2)}{1-p}=0.$$

Найдем критическую точку, для чего решим полученное уравнение относительно p:

$$p=(m_1+m_2)/(n_1+n_2).$$

Найдем вторую производную по p:

$$\frac{d^2 \ln L}{dp^2}=-\frac{m_1+m_2}{p^2}+\frac{(n_1+n_2)-(m_1+m_2)}{(1-p)^2}.$$

Легко убедиться, что при $p=(m_1+m_2)/(n_1+n_2)$ вторая производная отрицательна; следовательно, $p=(m_1+m_2)/(n_1+n_2)$ — точка максимума и, значит, ее надо принять в качестве оценки наибольшего правдоподобия неизвестной вероятности p биномиального распределения:

$$p^*=(m_1+m_2)/(n_1+n_2).$$

Б. Непрерывные случайные величины. Пусть X — непрерывная случайная величина, которая в результате n испытаний приняла значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Допустим, что вид плотности распределения $f(x)$ задан, но не известен параметр θ, которым определяется эта функция.

Функцией правдоподобия непрерывной случайной величины X называют функцию аргумента θ:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)=f(x_1; \theta)\, f(x_2; \theta) \ldots f(x_n; \theta),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — фиксированные числа.

Оценку наибольшего правдоподобия неизвестного параметра распределения непрерывной случайной величины ищут так же, как в случае дискретной величины.

Пример 3. Найти методом наибольшего правдоподобия оценку параметра λ показательного распределения

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \qquad (0<x<\infty),$$

если в результате n испытаний случайная величина X, распределенная по показательному закону, приняла значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Решение. Составим функцию правдоподобия, учитывая, что $\theta=\lambda$:

$$L=f(x_1; \lambda)\, f(x_2; \lambda) \ldots f(x_n; \lambda)=(\lambda e^{-\lambda x_1})(\lambda e^{-\lambda x_2}) \ldots (\lambda e^{-\lambda x_n}).$$

Отсюда

$$L=\lambda^n e^{-\lambda \sum x_i}.$$

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L=n \ln \lambda-\lambda \sum x_i.$$

Найдем первую производную по λ:

$$\frac{d \ln L}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum x_i.$$

Напишем уравнение правдоподобия, для чего приравняем первую производную нулю:

$$(n/\lambda)-\sum x_i=0.$$

Найдем критическую точку, для чего решим полученное уравнение относительно λ:

$$\lambda=n\Big/\sum x_i=1\Big/\Big(\sum x_i/n\Big)=1/\bar{x}_\text{в}.$$

Найдем вторую производную по λ:

$$\frac{d^2\ln L}{d\lambda^2}=-\frac{n}{\lambda^2}.$$

Легко видеть, что при $\lambda=1/\bar{x}_\text{в}$ вторая производная отрицательна; следовательно, $\lambda=1/\bar{x}_\text{в}$ — точка максимума и, значит, в качестве оценки наибольшего правдоподобия параметра λ показательного распределения надо принять величину, обратную выборочной средней: $\lambda^*=1/\bar{x}_\text{в}$.

Замечание. Если плотность распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины X определяется двумя неизвестными параметрами θ_1 и θ_2, то функция правдоподобия является функцией двух независимых аргументов θ_1 и θ_2:

$$L=f(x_1;\ \theta_1,\ \theta_2)\,f(x_2;\ \theta_1,\ \theta_2)\ \ldots\ f(x_n;\ \theta_1,\ \theta_2),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — наблюдавшиеся значения X. Далее находят логарифмическую функцию правдоподобия и для отыскания ее максимума составляют и решают систему

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta_1}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta_2}=0.\end{cases}$$

Пример 4. Найти методом наибольшего правдоподобия оценки параметров a и σ нормального распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-a)^2/2\sigma^2},$$

если в результате n испытаний величина X приняла значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Решение. Составим функцию правдоподобия, учитывая, что $\theta_1=a$ и $\theta_2=\sigma$:

$$L=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x_1-a)^2/2\sigma^2}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x_2-a)^2/2\sigma^2}\ldots\times$$
$$\ldots\times\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x_n-a)^2/2\sigma^2}.$$

Отсюда

$$L=\frac{1}{\sigma^n(\sqrt{2\pi})^n}\,e^{-\left(\sum(x_i-a)^2\right)/2\sigma^2}$$

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L = -n \ln \sigma + \ln \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} - \frac{\sum (x_i - a)^2}{2\sigma^2}.$$

Найдем частные производные по a и по σ:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{\sum x_i - na}{\sigma^2}; \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum (x_i - a)^2}{\sigma^3}.$$

Приравняв частные производные нулю и решив полученную систему двух уравнений относительно a и σ^2, получим:

$$a = \sum x_i / n = \overline{x}_{\text{в}}; \quad \sigma^2 = \left(\sum (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2\right) / n = D_{\text{в}}.$$

Итак, искомые оценки наибольшего правдоподобия: $a^* = \overline{x}_{\text{в}}$; $\sigma^* = \sqrt{D_{\text{в}}}$. Заметим, что первая оценка несмещенная, а вторая смещенная.

§ 23. Другие характеристики вариационного ряда

Кроме выборочной средней и выборочной дисперсии применяются и другие характеристики вариационного ряда. Укажем главные из них.

Модой M_0 называют варианту, которая имеет наибольшую частоту. Например, для ряда

варианта	1	4	7	9
частота	5	1	20	6

мода равна 7.

Медианой m_e называют варианту, которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариант. Если число вариант нечетно, т. е. $n = 2k + 1$, то $m_e = x_{k+1}$; при четном $n = 2k$ медиана

$$m_e = (x_k + x_{k+1})/2.$$

Например, для ряда 2 3 5 6 7 медиана равна 5; для ряда 2 3 5 6 7 9 медиана равна $(5+6)/2 = 5{,}5$.

Размахом варьирования R называют разность между наибольшей и наименьшей вариантами:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Например, для ряда 1 3 4 5 6 10 размах равен $10 - 1 = 9$.

Размах является простейшей характеристикой рассеяния вариационного ряда.

Средним абсолютным отклонением θ называют среднее арифметическое абсолютных отклонений:

$$\theta = \left(\sum n_i \left| x_i - \overline{x}_{\text{в}} \right|\right) / \sum n_i.$$

Например, для ряда

x_i	1	3	6	16
n_i	4	10	5	1

имеем:

$$\bar{x}_в = \frac{4\cdot 1+10\cdot 3+5\cdot 6+1\cdot 16}{4+10+5+1} = \frac{80}{20} = 4;$$

$$\theta = \frac{4\cdot|1-4|+10\cdot|3-4|+5\cdot|6-4|+1\cdot|16-4|}{20} = 2{,}2.$$

Среднее абсолютное отклонение служит для характеристики рассеяния вариационного ряда.

Коэффициентом вариации V называют выраженное в процентах отношение выборочного среднего квадратического отклонения к выборочной средней:

$$V = \sigma_в/\bar{x}_в\cdot 100\%.$$

Коэффициент вариации служит для сравнения величин рассеяния по отношению к выборочной средней двух вариационных рядов: тот из рядов имеет большее рассеяние по отношению к выборочной средней, у которого коэффициент вариации больше. Коэффициент вариации — безразмерная величина, поэтому он пригоден для сравнения рассеяний вариационных рядов, варианты которых имеют различную размерность, например если варианты одного ряда выражены в сантиметрах, а другого — в граммах.

Замечание. Выше предполагалось, что вариационный ряд составлен по данным выборки, поэтому все описанные характеристики называют *выборочными*; если вариационный ряд составлен по данным генеральной совокупности, то характеристики называют *генеральными*.

Задачи

1. Найти групповые средние совокупности, состоящей из двух групп:

первая группа . . .	x_i	0,1	0,4	0,6
	n_i	3	2	5
вторая группа . . .	x_i	0,1	0,3	0,4
	n_i	10	4	6

Отв. $\bar{x}_1 = 0{,}41$; $\bar{x}_2 = 0{,}23$.

2. Найти общую среднюю по данным задачи 1 двумя способами: а) объединить обе группы в одну совокупность; б) использовать найденные в задаче 1 групповые средние.

Отв. $\bar{x} = 0{,}29$.

3. Дано распределение статистической совокупности:

x_i	1	4	5
n_i	6	11	3

Убедиться, что сумма произведений отклонений на соответствующие частоты равна нулю.

4. Дано распределение статистической совокупности:

x_i	4	7	10	15
n_i	10	15	20	5

Найти дисперсию совокупности: а) исходя из определения дисперсии; б) пользуясь формулой $D=\overline{x^2}-[\overline{x}]^2$.

Отв. $D=9{,}84$.

5. Найти внутригрупповую, межгрупповую и общую дисперсии совокупности, состоящей из трех групп:

первая группа . . .	x_i	1	2	8
	n_i	30	15	5
вторая группа . . .	x_i	1	6	
	n_i	10	15	
третья группа . . .	x_i	3	8	
	n_i	20	5	

Отв. $D_{внгр}=4{,}6$; $D_{межгр}=1$; $D_{общ}=5{,}6$.

6. Найти внутригрупповую, межгрупповую и общую дисперсии совокупности, состоящей из двух групп:

первая группа . . .	x_i	2	7
	n_i	6	4
вторая группа . . .	x_i	2	7
	n_i	2	8

Отв. $D_{внгр}=5$; $D_{межгр}=1$; $D_{общ}=6$.

7. Найти выборочную и исправленную дисперсии вариационного ряда, составленного по данным выборкам:

варианта . . .	1	2	5	8	9
частота . . .	3	4	6	4	3

Отв: $\sigma_в^2=8{,}4$; $s^2=8{,}84$.

В задачах 8—9 даны среднее квадратическое отклонение, выборочная средняя и объем выборки нормально распределенного признака. Найти доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания с заданной надежностью.

8. $\sigma=2$, $\overline{x}_в=5{,}40$, $n=10$, $\gamma=0{,}95$.

Отв. $4{,}16 < a < 6{,}64$.

9. $\sigma=3$, $\overline{x}_в=20{,}12$, $n=25$, $\gamma=0{,}99$.

Отв. $18{,}57 < a < 21{,}67$.

10. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,95 точность оценки математического ожидания нормально распределенного признака по выборочной средней будет равна 0,2, если среднее квадратическое отклонение равно 2.

Указание. См. замечание 2, § 15.

Отв. $n=385$.

В задачах 11—12 даны «исправленное» среднее квадратическое отклонение, выборочная средняя и объем малой выборки нормально распределенного признака. Найти, пользуясь распределением Стьюдента, доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания с заданной надежностью.

11. $s=1,5$, $\bar{x}_в=16,8$, $n=12$, $\gamma=0,95$.
Отв. $15,85 < a < 17,75$.

12. $s=2,4$, $\bar{x}_в=14,2$, $n=9$, $\gamma=0,99$.
Отв. $11,512 < a < 16,888$.

13. По данным 16 независимых равноточных измерений физической величины найдены $\bar{x}_в=23,161$ и $s=0,400$. Требуется оценить истинное значение a измеряемой величины и точность измерений σ с надежностью 0,95.

Отв. $22,948 < a < 23,374$; $0,224 < \sigma < 0,576$.

14. Найти доверительный интервал для оценки неизвестной вероятности p биномиального распределения с надежностью 0,95, если в 60 испытаниях событие появилось 18 раз.

Отв. $0,200 < p < 0,424$.

15. Найти методом моментов точечную оценку эксцесса $E_k = m_4/\sigma^4-3$ теоретического распределения.

Отв. $e_k=m_4/\sigma_в^4-3$.

16. Найти методом моментов точечные оценки параметров α и β гамма-распределения

$$f(x)=\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}e^{-x/\beta}\ (\alpha>-1,\ \beta>0,\ x\geqslant 0).$$

Указание. Сделать подстановку $y=x/\beta$ и, используя гамма-функцию $\Gamma(n)=\int\limits_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx$, найти сначала $M(X)=(\alpha+1)\beta$, $D(X)=(\alpha+1)\beta^2$, а затем приравнять $M(X)=\bar{x}_в$, $D(X)=D_в$.

Отв. $\alpha^*=(\bar{x}_в^2/D_в)-1$; $\beta^*=D_в/\bar{x}_в$.

17. Найти методом наибольшего правдоподобия по выборке x_1, x_2, ..., x_n точечную оценку неизвестного параметра β гамма-распределения, если параметр α известен.

Указание. Использовать плотность гамма-распределения, приведенную в задаче 16.

Отв. $\beta^*=\bar{x}_в/(\alpha+1)$.

Глава девятнадцатая

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

§ 1. Статистическая гипотеза. Нулевая и конкурирующая, простая и сложная гипотезы

Часто необходимо знать закон распределения генеральной совокупности. Если закон распределения неизвестен, но имеются основания предположить, что он имеет определенный вид (назовем его A), выдвигают гипотезу: генеральная совокупность распределена по закону A. Таким образом, в этой гипотезе речь идет о виде предполагаемого распределения.

Возможен случай, когда закон распределения известен, а его параметры неизвестны. Если есть основания предположить, что неизвестный параметр Θ равен определенному значению Θ_0, выдвигают гипотезу: $\Theta = \Theta_0$. Таким образом, в этой гипотезе речь идет о предполагаемой величине параметра одного известного распределения.

Возможны и другие гипотезы: о равенстве параметров двух или нескольких распределений, о независимости выборок и многие другие.

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения, или о параметрах известных распределений.

Например, статистическими являются гипотезы:

1) генеральная совокупность распределена по закону Пуассона;

2) дисперсии двух нормальных совокупностей равны между собой.

В первой гипотезе сделано предположение о виде неизвестного распределения, во второй — о параметрах двух известных распределений.

Гипотеза «на Марсе есть жизнь» не является статистической, поскольку в ней не идет речь ни о виде, ни о параметрах распределения.

Наряду с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то имеет место противоречащая гипотеза. По этой причине эти гипотезы целесообразно различать.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Например, если нулевая гипотеза состоит в предположении, что математическое ожидание a нормального распределения равно 10, то конкурирующая гипотеза, в частности, может состоять в предположении, что $a \neq 10$. Коротко это записывают так: $H_0: a = 10$; $H_1: a \neq 10$.

Различают гипотезы, которые содержат только одно и более одного предположений.

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение. Например, если λ — параметр показательного распределения, то гипотеза $H_0: \lambda = 5$ — простая. Гипотеза H_0: математическое ожидание нормального распределения равно 3 (σ известно) — простая.

Сложной называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез. Например, сложная гипотеза $H: \lambda > 5$ состоит из бесчисленного множества простых вида $H_i: \lambda = b_i$, где b_i — любое число, большее 5. Гипотеза H_0: математическое ожидание нормального распределения равно 3 (σ неизвестно) — сложная.

§ 2. Ошибки первого и второго рода

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость ее проверки. Поскольку проверку производят статистическими методами, ее называют *статистической*. В итоге статистической проверки гипотезы в двух случаях может быть принято неправильное решение, т. е. могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Подчеркнем, что последствия этих ошибок могут оказаться весьма различными. Например, если отвергнуто правильное решение «продолжать строительство жилого дома», то эта ошибка первого рода повлечет материальный ущерб; если же принято неправильное решение «продолжать строительство», несмотря на опасность обвала стройки, то эта ошибка второго рода может повлечь гибель людей. Можно привести примеры, когда ошибка первого рода влечет более тяжелые последствия, чем ошибка второго рода.

Замечание 1. Правильное решение может быть принято также в двух случаях:

1) гипотеза принимается, причем и в действительности она правильная;

2) гипотеза отвергается, причем и в действительности она неверна.

Замечание 2. Вероятность совершить ошибку первого рода принято обозначать через α; ее называют *уровнем значимости*. Наиболее часто уровень значимости принимают равным 0,05 или 0,01. Если, например, принят уровень значимости, равный 0,05, то это означает, что в пяти случаях из ста имеется риск допустить ошибку первого рода (отвергнуть правильную гипотезу).

§ 3. Статистический критерий проверки нулевой гипотезы. Наблюдаемое значение критерия

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину, точное или приближенное распределение которой известно. Эту величину обозначают через U или Z, если она распределена нормально, F или v^2 — по закону Фишера — Снедекора, T — по закону Стьюдента, χ^2 — по закону «хи квадрат» и т. д. Поскольку в этом параграфе вид распределения во внимание приниматься не будет, обозначим эту величину в целях общности через K.

Статистическим критерием (или просто *критерием*) называют случайную величину K, которая служит для проверки нулевой гипотезы.

Например, если проверяют гипотезу о равенстве дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей, то в качестве критерия K принимают отношение исправленных выборочных дисперсий:

$$F = s_1^2/s_2^2.$$

Эта величина случайная, потому что в различных опытах дисперсии принимают различные, наперед неизвестные значения, и распределена по закону Фишера — Снедекора.

Для проверки гипотезы по данным выборок вычисляют частные значения входящих в критерий величин и таким образом получают частное (наблюдаемое) значение критерия.

Наблюдаемым значением $K_{набл}$ называют значение критерия, вычисленное по выборкам. Например, если по двум выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии $s_1^2 = 20$ и $s_2^2 = 5$, то наблюдаемое значение критерия F

$$F_{набл} = s_1^2/s_2^2 = 20/5 = 4.$$

§ 4. Критическая область. Область принятия гипотезы. Критические точки

После выбора определенного критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другая — при которых она принимается.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

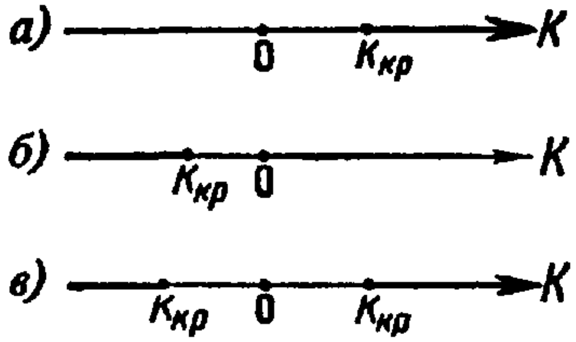

Рис. 23

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез можно сформулировать так: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области — гипотезу отвергают, если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы — гипотезу принимают.

Поскольку критерий K — одномерная случайная величина, все ее возможные значения принадлежат некоторому интервалу. Поэтому критическая область и область принятия гипотезы также являются интервалами и, следовательно, существуют точки, которые их разделяют.

Критическими точками (границами) $k_{кр}$ называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Различают одностороннюю (правостороннюю или левостороннюю) и двустороннюю критические области.

Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K > k_{кр}$, где $k_{кр}$ — положительное число (рис. 23, *а*).

Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < k_{кр}$, где $k_{кр}$ — отрицательное число (рис. 23, *б*).

Односторонней называют правостороннюю или левостороннюю критическую область.

Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенствами $K < k_1$, $K > k_2$, где $k_2 > k_1$.

В частности, если критические точки симметричны относительно нуля, двусторонняя критическая область определяется неравенствами (в предположении, что $k_{кр}>0$): $K<-k_{кр}$, $K>k_{кр}$, или равносильным неравенством $|K|>k_{кр}$ (рис. 23, *в*).

§ 5. Отыскание правосторонней критической области

Как найти критическую область? Обоснованный ответ на этот вопрос требует привлечения довольно сложной теории. Ограничимся ее элементами. Для определенности начнем с нахождения правосторонней критической области, которая определяется неравенством $K>k_{кр}$, где $k_{кр}>0$. Видим, что для отыскания правосторонней критической области достаточно найти критическую точку. Следовательно, возникает новый вопрос: как ее найти?

Для ее нахождения задаются достаточной малой вероятностью — уровнем значимости α. Затем ищут критическую точку $k_{кр}$, исходя из требования, чтобы при условии справедливости нулевой гипотезы вероятность того, что критерий K примет значение, большее $k_{кр}$, была равна принятому уровню значимости:

$$P(K>k_{кр})=\alpha.$$

Для каждого критерия имеются соответствующие таблицы, по которым и находят критическую точку, удовлетворяющую этому требованию.

Замечание 1. Когда критическая точка уже найдена, вычисляют по данным выборок наблюденное значение критерия и, если окажется, что $K_{набл}>k_{кр}$, то нулевую гипотезу отвергают; если же $K_{набл}<k_{кр}$, то нет оснований, чтобы отвергнуть нулевую гипотезу.

Пояснение. Почему правосторонняя критическая область была определена исходя из требования, чтобы при справедливости нулевой гипотезы выполнялось соотношение

$$P(K>k_{кр})=\alpha? \qquad (*)$$

Поскольку вероятность события $K>k_{кр}$ мала (α — малая вероятность), такое событие при справедливости нулевой гипотезы, в силу принципа практической невозможности маловероятных событий, в единичном испытании не должно наступить (см. гл. II, § 4). Если все же оно произошло, т. е. наблюдаемое значение критерия оказалось больше $k_{кр}$, то это можно объяснить тем, что нулевая гипотеза ложна и, следовательно, должна быть отвергнута. Таким образом, требование (*) определяет такие значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а они и составляют правостороннюю критическую область.

Замечание 2. Наблюдаемое значение критерия может оказаться большим $k_{кр}$ не потому, что нулевая гипотеза ложна, а по другим причинам (малый объем выборки, недостатки методики эксперимента и др.). В этом случае, отвергнув правильную нулевую гипотезу, совершают ошибку первого рода. Вероятность этой ошибки равна уровню значимости α. Итак, пользуясь требованием (*), мы с вероятностью α рискуем совершить ошибку первого рода.

Заметим кстати, что в книгах по контролю качества продукции вероятность признать негодной партию годных изделий называют «риском производителя», а вероятность принять негодную партию — «риском потребителя».

Замечание 3. Пусть нулевая гипотеза принята; ошибочно думать, что тем самым она доказана. Действительно, известно, что один пример, подтверждающий справедливость некоторого общего утверждения, еще не доказывает его. Поэтому более правильно говорить «данные наблюдений согласуются с нулевой гипотезой и, следовательно, не дают оснований ее отвергнуть».

На практике для большей уверенности принятия гипотезы ее проверяют другими способами или повторяют эксперимент, увеличив объем выборки.

Отвергают гипотезу более категорично, чем принимают. Действительно, известно, что достаточно привести один пример, противоречащий некоторому общему утверждению, чтобы это утверждение отвергнуть. Если оказалось, что наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то этот факт и служит примером, противоречащим нулевой гипотезе, что позволяет ее отклонить.

§ 6. Отыскание левосторонней и двусторонней критических областей

Отыскание левосторонней и двусторонней критических областей сводится (так же, как и для правосторонней) к нахождению соответствующих критических точек.

Левосторонняя критическая область определяется (см. § 4) неравенством $K < k_{кр}$ ($k_{кр} < 0$). Критическую точку находят исходя из требования, чтобы при справедливости нулевой гипотезы вероятность того, что критерий примет значение, меньшее $k_{кр}$, была равна принятому уровню значимости:

$$P(K < k_{кр}) = \alpha.$$

Двусторонняя критическая область определяется (см. § 4) неравенствами $K < k_1$, $K > k_2$. Критические точки находят исходя из требования, чтобы при справедливости нулевой гипотезы сумма вероятностей того, что критерий примет значение, меньшее k_1 или большее k_2, была равна принятому уровню значимости:

$$P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha. \qquad (*)$$

Ясно, что критические точки могут быть выбраны бесчисленным множеством способов. Если же распределение критерия симметрично относительно нуля и имеются основания (например, для увеличения мощности *)) выбрать симметричные относительно нуля точки $-k_{\text{кр}}$ и $k_{\text{кр}}$ $(k_{\text{кр}} > 0)$, то

$$P(K < -k_{\text{кр}}) = P(K > k_{\text{кр}}).$$

Учитывая (*), получим

$$P(K > k_{\text{кр}}) = \alpha/2.$$

Это соотношение и служит для отыскания критических точек двусторонней критической области.

Как уже было указано (см. § 5), критические точки находят по соответствующим таблицам.

§ 7. Дополнительные сведения о выборе критической области. Мощность критерия

Мы строили критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания в нее критерия была равна α при условии, что нулевая гипотеза справедлива. Оказывается целесообразным ввести в рассмотрение вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что нулевая гипотеза неверна и, следовательно, справедлива конкурирующая.

Мощностью критерия называют вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза. Другими словами, мощность критерия есть вероятность того, что нулевая гипотеза будет отвергнута, если верна конкурирующая гипотеза.

Пусть для проверки гипотезы принят определенный уровень значимости и выборка имеет фиксированный объем. Остается произвол в выборе критической области. Покажем, что ее целесообразно построить так, чтобы мощность критерия была максимальной. Предварительно убедимся, что если вероятность ошибки второго рода

---

*) Определение мощности дано в § 7.

(принять неправильную гипотезу) равна β, то мощность равна $1-\beta$. Действительно, если β — вероятность ошибки второго рода, т. е. события «принята нулевая гипотеза, причем справедлива конкурирующая», то мощность критерия равна $1-\beta$.

Пусть мощность $1-\beta$ возрастает; следовательно, уменьшается вероятность β совершить ошибку второго рода. Таким образом, чем мощность больше, тем вероятность ошибки второго рода меньше.

Итак, если уровень значимости уже выбран, то *критическую область следует строить так, чтобы мощность критерия была максимальной*. Выполнение этого требования должно обеспечить минимальную ошибку второго рода, что, конечно, желательно.

Замечание 1. Поскольку вероятность события «ошибка второго рода допущена» равна β, то вероятность противоположного события «ошибка второго рода не допущена» равна $1-\beta$, т. е. мощности критерия. Отсюда следует, что мощность критерия есть вероятность того, что не будет допущена ошибка второго рода.

Замечание 2. Ясно, что чем меньше вероятности ошибок первого и второго рода, тем критическая область «лучше». Однако при заданном объеме выборки уменьшить одновременно α и β невозможно; если уменьшить α, то β будет возрастать. Например, если принять $\alpha=0$, то будут приниматься все гипотезы, в том числе и неправильные, т. е. возрастает вероятность β ошибки второго рода.

Как же выбрать α наиболее целесообразно? Ответ на этот вопрос зависит от «тяжести последствий» ошибок для каждой конкретной задачи. Например, если ошибка первого рода повлечет большие потери, а второго рода — малые, то следует принять возможно меньшее α.

Если α уже выбрано, то, пользуясь теоремой Ю. Неймана и Э. Пирсона, изложенной в более полных курсах, можно построить критическую область, для которой β будет минимальным и, следовательно, мощность критерия максимальной.

Замечание 3. Единственный способ одновременного уменьшения вероятностей ошибок первого и второго рода состоит в увеличении объема выборок.

§ 8. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей

На практике задача сравнения дисперсий возникает, если требуется сравнить точность приборов, инструментов, самих методов измерений и т. д. Очевидно, предпочтительнее тот прибор, инструмент и метод, который обеспечивает наименьшее рассеяние результатов измерений, т. е. наименьшую дисперсию.

Пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально. По независимым выборкам с объемами, соответственно равными n_1 и n_2, извлеченным из этих совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии s_X^2 и s_Y^2. Требуется по исправленным дисперсиям при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральные дисперсии рассматриваемых совокупностей равны между собой:

$$H_0: D(X) = D(Y).$$

Учитывая, что исправленные дисперсии являются несмещенными оценками генеральных дисперсий (см. гл. XVI, § 13), т. е.

$$M[s_X^2] = D(X), \quad M[s_Y^2] = D(Y),$$

нулевую гипотезу можно записать так:

$$H_0: M[s_X^2] = M[s_Y^2].$$

Таким образом, требуется проверить, что математические ожидания исправленных выборочных дисперсий равны между собой. Такая задача ставится потому, что обычно исправленные дисперсии оказываются различными. Возникает вопрос: з н а ч и м о (существенно) или н е з н а ч и м о р а з л и ч а ю т с я и с п р а в л е н н ы е д и с п е р с и и?

Если окажется, что нулевая гипотеза справедлива, т. е. генеральные дисперсии одинаковы, то различие исправленных дисперсий незначимо и объясняется случайными причинами, в частности случайным отбором объектов выборки. Например, если различие исправленных выборочных дисперсий результатов измерений, выполненных двумя приборами, оказалось незначимым, то приборы имеют одинаковую точность.

Если нулевая гипотеза отвергнута, т. е. генеральные дисперсии неодинаковы, то различие исправленных дисперсий значимо и не может быть объяснено случайными причинами, а является следствием того, что сами генеральные дисперсии различны. Например, если различие исправленных выборочных дисперсий результатов измерений, произведенных двумя приборами, оказалось значимым, то точность приборов различна.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы о равенстве генеральных дисперсий примем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей, т. е. случайную величину

$$F = S_б^2/S_м^2.$$

Величина F при условии справедливости нулевой гипотезы имеет распределение Фишера — Снедекора (см. гл. XII, § 15) со степенями свободы $k_1=n_1-1$ и $k_2=n_2-1$, где n_1 — объем выборки, по которой вычислена большая исправленная дисперсия, n_2 — объем выборки, по которой найдена меньшая дисперсия. Напомним, что распределение Фишера — Снедекора зависит только от чисел степеней свободы и не зависит от других параметров.

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

Первый случай. Нулевая гипотеза $H_0: D(X)=D(Y)$. Конкурирующая гипотеза $H_1: D(X) > D(Y)$.

В этом случае строят одностороннюю, а именно правостороннюю, критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия F в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:

$$P[F > F_{кр}(\alpha;\ k_1,\ k_2)] = \alpha.$$

Критическую точку $F_{кр}(\alpha;\ k_1, k_2)$ находят по таблице критических точек распределения Фишера — Снедекора (см. приложение 7), и тогда правосторонняя критическая область определяется неравенством $F > F_{кр}$, а область принятия нулевой гипотезы — неравенством $F < F_{кр}$.

Обозначим отношение большей исправленной дисперсии к меньшей, вычисленное по данным наблюдений, через $F_{набл}$ и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу $H_0: D(X)=D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий нормальных совокупностей при конкурирующей гипотезе $H_1: D(X) > D(Y)$, надо вычислить отношение большей исправленной дисперсии к меньшей, т. е.

$$F_{набл} = s_б^2/s_м^2,$$

и по таблице критических точек распределения Фишера — Снедекора, по заданному уровню значимости α и числам степеней свободы k_1 и k_2 (k_1 — число степеней свободы большей исправленной дисперсии) найти критическую точку $F_{набл}(\alpha;\ k_1,\ k_2)$.

Если $F_{набл} < F_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $F_{набл} > F_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример 1. По двум независимым выборкам объемов $n_1 = 12$ и $n_2 = 15$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии $s_X^2 = 11{,}41$ и $s_Y^2 = 6{,}52$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0: D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе $H_1: D(X) > D(Y)$.

Решение. Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F_{набл} = 11{,}41/6{,}52 = 1{,}75.$$

Конкурирующая гипотеза имеет вид $D(X) > D(Y)$, поэтому критическая область — правосторонняя.

По таблице приложения 7, по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числам степеней свободы $k_1 = 12 - 1 = 11$ и $k_2 = 15 - 1 = 14$ находим критическую точку $F_{кр}(0{,}05;\ 11,\ 14) = 2{,}56$.

Так как $F_{набл} < F_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий.

Второй случай. Нулевая гипотеза $H_0: D(X) = D(Y)$. Конкурирующая гипотеза $H_1: D(X) \neq D(Y)$.

В этом случае строят двустороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попа-

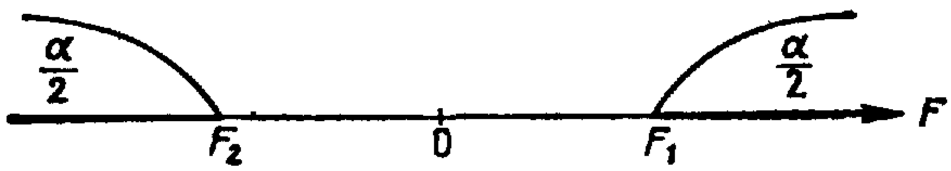

Рис. 24

дания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости α.

Как выбрать границы критической области? Оказывается, что наибольшая мощность (вероятность попадания критерия в критическую область при справедливости конкурирующей гипотезы) достигается тогда, когда вероятность попадания критерия в каждый из двух интервалов критической области равна $\alpha/2$.

Таким образом, если обозначить через F_1 левую границу критической области и через F_2 — правую, то должны иметь место соотношения (рис. 24):

$$P(F < F_1) = \alpha/2, \quad P(F > F_2) = \alpha/2.$$

Мы видим, что достаточно найти критические точки, чтобы найти саму критическую область: $F < F_1$, $F > F_2$, а также область принятия нулевой гипотезы: $F_1 < F < F_2$. Как практически отыскать критические точки?

Правую критическую точку $F_2 = F_{кр}(\alpha/2; k_1, k_2)$ находят непосредственно по таблице критических точек распределения Фишера — Снедекора по уровню значимости $\alpha/2$ и степеням свободы k_1 и k_2.

Однако левых критических точек эта таблица не содержит и поэтому найти F_1 непосредственно по таблице невозможно. Существует способ, позволяющий преодолеть это затруднение. Однако мы не будем его описывать, поскольку можно левую критическую точку и не отыскивать. Ограничимся изложением того, как обеспечить попадание критерия F в двустороннюю критическую область с вероятностью, равной принятому уровню значимости α.

Оказывается, достаточно найти правую критическую точку F_2 при уровне значимости, вдвое меньшем заданного. Тогда не только вероятность попадания критерия в «правую часть» критической области (т. е. правее F_2) равна $\alpha/2$, но и вероятность попадания этого критерия в «левую часть» критической области (т. е. левее F_1) также равна $\alpha/2$. Так как эти события несовместны, то вероятность попадания рассматриваемого критерия во всю двустороннюю критическую область будет равна $\alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$.

Таким образом, в случае конкурирующей гипотезы $H_1: D(X) \neq D(Y)$ достаточно найти критическую точку $F_2 = F_{кр}(\alpha/2; k_1, k_2)$.

Правило 2. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий нормально распределенных совокупностей при конкурирующей гипотезе $H_1: D(X) \neq D(Y)$, надо вычислить отношение большей исправленной дисперсии к меньшей, т. е. $F_{набл} = s_б^2/s_м^2$ и по таблице критических точек распределения Фишера — Снедекора по уровню значимости $\alpha/2$ (вдвое меньшем заданного) и числам степеней свободы k_1 и k_2 (k_1 — число степеней свободы большей дисперсии) найти критическую точку $F_{кр}(\alpha/2; k_1, k_2)$.

Если $F_{набл} < F_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $F_{набл} > F_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример 2. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны $n_1 = 10$ и $n_2 = 18$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии $s_X^2 = 1{,}23$ и $s_Y^2 = 0{,}41$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$

проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе $H_1: D(X) \neq D(Y)$.

Решение. Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F_{\text{набл}} = 1{,}23/0{,}41 = 3.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $D(X) \neq D(Y)$, поэтому критическая область — двусторонняя.

По таблице, по уровню значимости, вдвое меньшем заданного, т. е. при $\alpha/2 = 0{,}1/2 = 0{,}05$, и числам степеней свободы $k_1 = 10-1 = 9$, $k_2 = 18-1 = 17$ находим критическую точку $F_{\text{кр}}(0{,}05, 9, 17) = 2{,}50$.

Так как $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$, нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий отвергаем. Другими словами, выборочные исправленные дисперсии различаются значимо. Например, если бы рассматриваемые дисперсии характеризовали точность двух методов измерений, то следует предпочесть тот метод, который имеет меньшую дисперсию (0,41).

§ 9. Сравнение исправленной выборочной дисперсии с гипотетической генеральной дисперсией нормальной совокупности

Пусть генеральная совокупность распределена нормально, причем генеральная дисперсия хотя и неизвестна, но имеются основания предполагать, что она равна гипотетическому (предполагаемому) значению σ_0^2. На практике σ_0^2 устанавливается на основании предшествующего опыта или теоретически.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объема n и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия S^2 с $k = n-1$ степенями свободы. Требуется по исправленной дисперсии при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральная дисперсия рассматриваемой совокупности равна гипотетическому значению σ_0^2.

Учитывая, что S^2 является несмещенной оценкой генеральной дисперсии, нулевую гипотезу можно записать так:

$$H_0: M(S^2) = \sigma_0^2.$$

Итак, требуется проверить, что математическое ожидание исправленной дисперсии равно гипотетическому значению генеральной дисперсии. Другими словами, *требуется установить, значимо или незначимо различаются исправленная выборочная и гипотетическая генеральная дисперсии*.

На практике рассматриваемая гипотеза проверяется, если нужно проверить точность приборов, инструментов, станков, методов исследования и устойчивость технологических процессов. Например, если известна допустимая характеристика рассеяния контролируемого размера деталей, изготавливаемых станком-автоматом, равная σ_0^2, а найденная по выборке окажется значимо больше σ_0^2, то станок требует подналадки.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину $(n-1)S^2/\sigma_0^2$. Эта величина случайная, потому что в разных опытах S^2 принимает различные, наперед неизвестные значения. Поскольку можно доказать, что она имеет распределение χ^2 с $k=n-1$ степенями свободы (см. гл. XII, § 13), обозначим ее через χ^2.

Итак, критерий проверки нулевой гипотезы

$$\chi^2=(n-1)S^2/\sigma_0^2.$$

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

Первый случай. Нулевая гипотеза $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2$. Конкурирующая гипотеза $H_1: \sigma^2>\sigma_0^2$.

В этом случае строят правостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:

$$P[\chi^2>\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)]=\alpha.$$

Критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$ находят по таблице критических точек распределения χ^2 (см. приложение 5), и тогда правосторонняя критическая область определяется неравенством $\chi^2>\chi^2_{\text{кр}}$, а область принятия нулевой гипотезы—неравенством $\chi^2<\chi^2_{\text{кр}}$.

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $\chi^2_{\text{набл}}$ и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2$ о равенстве неизвестной генеральной дисперсии нормальной совокупности гипотетическому значению при конкурирующей гипотезе $H_1: \sigma^2>\sigma_0^2$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{\text{набл}}=(n-1)S^2/\sigma_0^2$ и по таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k=n-1$ найти критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$.

Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример 1. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 13$ и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия $s^2 = 14{,}6$. Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 12$, приняв в качестве конкурирующей гипотезы $H_1: \sigma^2 > 12$.

Решение. Найдем наблюденное значение критерия:

$$\chi^2_{набл} = (n-1) S^2/\sigma_0^2 = ((13-1)\cdot 14{,}6)/12 = 14{,}6.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $\sigma^2 > 12$, поэтому критическая область правосторонняя.

По таблице приложения 5, по уровню значимости 0,01 и числу степеней свободы $k = n - 1 = 13 - 1 = 12$ находим критическую точку $\chi^2_{кр}(0{,}01;\ 12) = 26{,}2$.

Так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, различие между исправленной дисперсией (14,6) и гипотетической генеральной дисперсией (12) — незначимое.

Второй случай. Нулевая гипотеза $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$. Конкурирующая гипотеза $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

В этом случае строят двустороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости α.

Критические точки — левую и правую границы критической области — находят, требуя, чтобы вероятность попадания критерия в каждой из двух интервалов критической области была равна $\alpha/2$:

$$P\left[\chi^2 < \chi^2_{лев.кр}(\alpha/2;\ k)\right] = \alpha/2,$$
$$P\left[\chi^2 > \chi^2_{прав.кр}(\alpha/2;\ k)\right] = \alpha/2.$$

В таблице критических точек распределения χ^2 указаны лишь «правые» критические точки, поэтому возникает кажущееся затруднение в отыскании «левой» критической точки. Это затруднение легко преодолеть, если принять во внимание, что события $\chi^2 < \chi^2_{лев.кр}$ и $\chi^2 > \chi^2_{лев.кр}$ противоположны и, следовательно, сумма их вероятностей равна единице:

$$P(\chi^2 < \chi^2_{лев.кр}) + P(\chi^2 > \chi^2_{лев.кр}) = 1.$$

Отсюда

$$P(\chi^2 > \chi^2_{лев.кр}) = 1 - P(\chi^2 < \chi^2_{лев.кр}) = 1 - (\alpha/2).$$

Мы видим, что левую критическую точку можно искать как правую (и значит, ее можно найти по таблице), исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в интервал, расположенный правее этой точки, была равна $1-(\alpha/2)$.

Правило 2. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве неизвестной генеральной дисперсии σ^2 нормальной совокупности гипотетическому значению σ_0^2 при конкурирующей гипотезе $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{\text{набл}} = (n-1)s^2/\sigma_0^2$ и по таблице найти левую критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(1-\alpha/2;\ k)$ и правую критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha/2;\ k)$.

Если $\chi^2_{\text{лев.кр}} < \chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{прав.кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{лев.кр}}$ или $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{прав.кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример 2. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=13$ и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия $s^2=10{,}3$. Требуется при уровне значимости 0,02 проверить нулевую гипотезу $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 12$, приняв в качестве конкурирующей гипотезы $H_1: \sigma^2 \neq 12$.

Решение. Найдем наблюдавшееся значение критерия:

$$\chi^2_{\text{набл}} = (n-1)s^2/\sigma_0^2 = ((13-1)\cdot 10{,}3)/12 = 10{,}3.$$

Так как конкурирующая гипотеза имеет вид $\sigma^2 \neq 12$, то критическая область — двусторонняя.

По таблице приложения 5 находим критические точки: левую — $\chi^2_{\text{кр}}(1-\alpha/2;\ k) = \chi^2_{\text{кр}}(1-0{,}02/2;\ 12) = \chi^2_{\text{кр}}(0{,}99;\ 12) = 3{,}57$ и правую — $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha/2;\ k) = \chi^2_{\text{кр}}(0{,}01;\ 12) = 26{,}2$. Так как наблюдавшееся значение критерия принадлежит области принятия гипотезы $(3{,}57 < 10{,}3 < 26{,}2)$ — нет оснований ее отвергнуть. Другими словами, исправленная выборочная дисперсия (10,3) незначимо отличается от гипотетической генеральной дисперсии (12).

Третий случай. Конкурирующая гипотеза $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$.

Правило 3. При конкурирующей гипотезе $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ находят критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(1-\alpha;\ k)$.

Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}(1-\alpha;\ k)$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}(1-\alpha;\ k)$ — нулевую гипотезу отвергают.

Замечание 1. В случае, если найдена выборочная дисперсия $D_{\text{в}}$, в качестве критерия принимают случайную величину $\chi^{2\prime} = nD_{\text{в}}/\sigma_0^2$, которая имеет распределение χ^2 с $k=n-1$ степенями свободы, либо переходят к $s^2 = [n/(n-1)]\, D_{\text{в}}$.

Замечание 2. Если число степеней свободы $k > 30$, то критическую точку можно найти приближенно по равенству Уилсона —

Гилферти

$$\chi^2_{кр}(\alpha;\ k)=k[1-(2/9k)+z_\alpha\sqrt{(2/9k)}]^3,$$

где z_α определяют, используя функцию Лапласа (см. приложение 2), по равенству $\Phi(z_\alpha)=(1-2\alpha)/2$.

§ 10. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых известны (независимые выборки)

Пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально, причем их дисперсии известны (например, из предшествующего опыта или найдены теоретически). По независимым выборкам, объемы которых соответственно равны n и m, извлеченным из этих совокупностей, найдены выборочные средние $\overline{x}$ и $\overline{y}$.

Требуется по выборочным средним при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральные средние (математические ожидания) рассматриваемых совокупностей равны между собой, т. е.

$$H_0: M(X)=M(Y).$$

Учитывая, что выборочные средние являются несмещенными оценками генеральных средних (см. гл. XV, § 5), т. е. $M(\overline{X})=M(X)$ и $M(\overline{Y})=M(Y)$, нулевую гипотезу можно записать так:

$$H_0: M(\overline{X})=M(\overline{Y}).$$

Таким образом, требуется проверить, что математические ожидания выборочных средних равны между собой. Такая задача ставится потому, что, как правило, выборочные средние оказываются различными. Возникает вопрос: значимо или незначимо различаются выборочные средние?

Если окажется, что нулевая гипотеза справедлива, т. е. генеральные средние одинаковы, то различие выборочных средних незначимо и объясняется случайными причинами и, в частности, случайным отбором объектов выборки.

Например, если физические величины A и B имеют одинаковые истинные размеры, а средние арифметические $\bar{x}$ и $\bar{y}$ результатов измерений этих величин различны, то это различие незначимое.

Если нулевая гипотеза отвергнута, т. е. генеральные средние неодинаковы, то различие выборочных средних значимо и не может быть объяснено случайными причинами, а объясняется тем, что сами генеральные средние (математические ожидания) различны. Например, если среднее арифметическое $\bar{x}$ результатов измерений физической величины A значимо отличается от среднего арифметического $\bar{y}$ результатов измерений физической величины B, то это означает, что истинные размеры (математические ожидания) этих величин различны.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$Z = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sigma(\overline{X}-\overline{Y})} = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{D(X)/n+D(Y)/m}}.$$

Эта величина случайная, потому что в различных опытах $\bar{x}$ и $\bar{y}$ принимают различные, наперед неизвестные значения.

П о я с н е н и е. По определению среднего квадратического отклонения, $\sigma(\overline{X}-\overline{Y}) = \sqrt{D(\overline{X}-\overline{Y})}$.

На основании свойства 4 (см. гл. VIII, § 5), $D(\overline{X}-\overline{Y}) = D(\overline{X})+D(\overline{Y})$.

По формуле (*) (см. гл. VIII, § 9), $D(\overline{X}) = D(X)/n$, $D(\overline{Y}) = D(Y)/m$.

Следовательно,

$$\sigma(\overline{X}-\overline{Y}) = \sqrt{D(X)/n+D(Y)/m}.$$

Критерий Z—нормированная нормальная случайная величина. Действительно, величина Z распределена нормально, так как является линейной комбинацией нормально распределенных величин $\overline{X}$ и $\overline{Y}$; сами эти величины распределены нормально как выборочные средние, найденные по выборкам, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей; Z—нормированная величина потому, что $M(Z)=0$; при справедливости нулевой гипотезы $\sigma(Z)=1$, поскольку выборки независимы.

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

Первый случай. Нулевая гипотеза H_0: $M(X) = M(Y)$. Конкурирующая гипотеза H_1: $M(X) \neq M(Y)$.

В этом случае строят двустороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости α.

Наибольшая мощность критерия (вероятность попадания критерия в критическую область при справедливости конкурирующей гипотезы) достигается тогда, когда

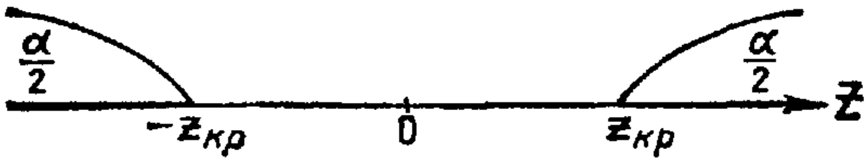

Рис. 25

«левая» и «правая» критические точки выбраны так, что вероятность попадания критерия в каждый из двух интервалов критической области равна $\alpha/2$:

$$P(Z < z_{\text{лев. кр}}) = \alpha/2, \quad P(Z > z_{\text{прав. кр}}) = \alpha/2.$$

Поскольку Z — нормированная нормальная величина, а распределение такой величины симметрично относительно нуля, критические точки симметричны относительно нуля.

Таким образом, если обозначить правую границу двусторонней критической области через $z_{\text{кр}}$, то левая граница равна $-z_{\text{кр}}$ (рис. 25).

Итак, достаточно найти правую границу, чтобы найти саму двустороннюю критическую область $Z < -z_{\text{кр}}$, $Z > z_{\text{кр}}$ и область принятия нулевой гипотезы $(-z_{\text{кр}}, z_{\text{кр}})$.

Покажем, как найти $z_{\text{кр}}$ — правую границу двусторонней критической области, пользуясь функцией Лапласа $\Phi(z)$. Известно, что функция Лапласа определяет вероятность попадания нормированной нормальной случайной величины, например Z, в интервал $(0, z)$:

$$P(0 < Z < z) = \Phi(z). \qquad (**)$$

Так как распределение Z симметрично относительно нуля, то вероятность попадания Z в интервал $(0, \infty)$ равна $1/2$. Следовательно, если разбить этот интервал точкой $z_{\text{кр}}$ на интервалы $(0, z_{\text{кр}})$ и $(z_{\text{кр}}, \infty)$, то, по теореме сложения,

$$P(0 < Z < z_{кр}) + P(Z > z_{кр}) = 1/2, \qquad (***)$$

В силу (*) и (**) получим

$$\Phi(z_{кр}) + \alpha/2 = 1/2.$$

Следовательно,

$$\Phi(z_{кр}) = (1-\alpha)/2.$$

Отсюда заключаем: для того чтобы найти правую границу двусторонней критической области ($z_{кр}$), достаточно найти значение аргумента функции Лапласа, которому соответствует значение функции, равное $(1-\alpha)/2$. Тогда двусторонняя критическая область определяется неравенствами

$$Z < -z_{кр}, \quad Z > z_{кр},$$

или равносильным неравенством $|Z| > z_{кр}$, а область принятия нулевой гипотезы — неравенством $-z_{кр} < Z < z_{кр}$, или равносильным неравенством $|Z| < z_{кр}$.

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $Z_{набл}$ и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X) = M(Y)$ о равенстве математических ожиданий двух нормальных генеральных совокупностей с известными дисперсиями при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) \neq M(Y)$, надо вычислить наблюденное значение критерия $Z_{набл} = \dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}}$ и по таблице функции Лапласа найти критическую точку по равенству $\Phi_{z_{кр}} = (1-\alpha)/2$.

Если $|Z_{набл}| < z_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $|Z_{набл}| > z_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример 1. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны $n = 60$ и $m = 50$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние $\bar{x} = 1250$ и $\bar{y} = 1275$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 120$, $D(Y) = 100$. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X) = M(Y)$, при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) \neq M(Y)$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$Z_{набл} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}} = \frac{1250-1275}{\sqrt{120/60 + 100/50}} = -12{,}5.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X) \neq M(Y)$, поэтому критическая область — двусторонняя.

Найдем правую критическую точку:

$$\Phi(z_{кр}) = (1-\alpha)/2 = (1-0{,}01)/2 = 0{,}495.$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $z_{кр} = 2{,}58$.

Так как $|Z_{набл}| > z_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочные средние различаются значимо.

Второй случай. Нулевая гипотеза H_0: $M(X) = M(Y)$. Конкурирующая гипотеза H_1: $M(X) > M(Y)$.

На практике такой случай имеет место, если профессиональные соображения позволяют предположить, что генеральная средняя одной совокупности больше генеральной средней другой. Например, если введено усовершенствование технологического процесса, то естественно допустить, что оно приведет к увеличению выпуска продукции. В этом случае строят правостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости (рис. 26):

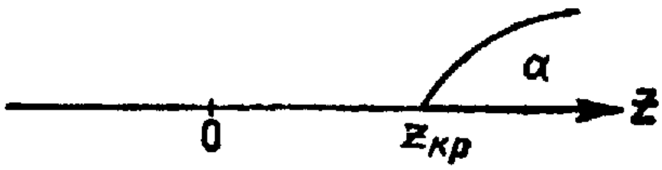

Рис. 26

$$P(Z > z_{кр}) = \alpha. \qquad (****)$$

Покажем, как найти критическую точку с помощью функции Лапласа. Воспользуемся соотношением (***):

$$P(0 < Z < z_{кр}) + P(Z > z_{кр}) = 1/2.$$

В силу (**) и (****) имеем

$$\Phi(z_{кр}) + \alpha = 1/2.$$

Следовательно,

$$\Phi(z_{кр}) = (1-2\alpha)/2.$$

Отсюда заключаем: для того чтобы найти границу правосторонней критической области ($z_{кр}$), достаточно найти значение аргумента функции Лапласа, которому соответствует значение функции, равное $(1-2\alpha)/2$. Тогда правосторонняя критическая область определяется неравенством $Z > z_{кр}$, а область принятия нулевой гипотезы — неравенством $Z < z_{кр}$.

Правило 2. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X) = M(Y)$

о равенстве математических ожиданий двух нормальных генеральных совокупностей с известными дисперсиями при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) > M(Y)$, надо вычислить наблюдавшееся значение критерия $Z_{набл} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{D(X)/n+D(Y)/m}}$ и по таблице функции Лапласа найти критическую точку из равенства $\Phi(z_{кр}) = (1-2\alpha)/2$.

Если $Z_{набл} < z_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $Z_{набл} > z_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример 2. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны $n=10$ и $m=10$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние $\bar{x}=14,3$ и $\bar{y}=12,2$. Генеральные дисперсии известны: $D(X)=22$, $D(Y)=18$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X) = M(Y)$, при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) > M(Y)$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$Z_{набл} = \frac{14,3-12,2}{\sqrt{22/10+18/10}} = 1,05.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X) > M(Y)$, поэтому критическая область — правосторонняя.

По таблице функции Лапласа находим $z_{кр}=1,64$.

Так как $Z_{набл} < z_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, выборочные средние различаются незначимо.

Третий случай. Нулевая гипотеза H_0: $M(X) = M(Y)$. Конкурирующая гипотеза H_1. $M(X) < M(Y)$.

В этом случае строят левостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости (рис. 27):

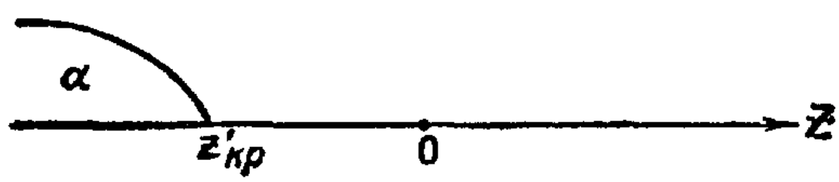

Рис. 27

$$P(Z < z'_{кр}) = \alpha.$$

Приняв во внимание, что критерий Z распределен симметрично относительно нуля, заключаем, что искомая критическая точка $z'_{кр}$ симметрична такой точке $z_{кр} > 0$, для которой $P(Z > z_{кр}) = \alpha$, т. е. $z'_{кр} = -z_{кр}$. Таким образом, для того чтобы найти точку $z'_{кр}$, достаточно сначала найти «вспомогательную точку» $z_{кр}$ так, как описано во втором случае, а затем взять найденное значение со знаком минус. Тогда левосторонняя критическая область определяется неравенством $Z < -z_{кр}$, а область принятия нулевой гипотезы — неравенством $Z > -z_{кр}$.

Правило 3. При конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) < M(Y)$ надо вычислить $Z_{набл}$ и сначала по таблице функции Лапласа найти «вспомогательную точку» $z_{кр}$ по равенству $\Phi(z_{кр} = (1-2\alpha)/2$, а затем положить $z'_{кр} = -z_{кр}$.

Если $Z_{набл} > -z_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $Z_{набл} < -z_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример 3. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны $n=50$ и $m=50$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние $\bar{x}=142$ и $\bar{y}=150$. Генеральные дисперсии известны: $D(X)=28{,}2$, $D(Y)=22{,}8$. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X)=M(Y)$, при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) < M(Y)$.

Решение. Подставив данные задачи в формулу для вычисления наблюдаемого значения критерия, получим $Z_{набл}=-8$.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X) < M(Y)$, поэтому критическая область — левосторонняя.

Найдем «вспомогательную точку» $z_{кр}$:

$$\Phi(z_{кр}) = (1-2\alpha)/2 = (1-2\cdot 0{,}01)/2 = 0{,}49.$$

По таблице функции Лапласа находим $z_{кр}=2{,}33$. Следовательно, $z'_{кр} = -z_{кр} = -2{,}33$.

Так как $Z_{набл} < -z_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочная средняя $\bar{x}$ значимо меньше выборочной средней $\bar{y}$.

§ 11. Сравнение двух средних произвольно распределенных генеральных совокупностей (большие независимые выборки)

В предыдущем параграфе предполагалось, что генеральные совокупности X и Y распределены нормально, а их дисперсии известны. При этих предположениях в случае справедливости нулевой гипотезы о равенстве средних и независимых выборках критерий Z распределен точно нормально с параметрами 0 и 1.

Если хотя бы одно из приведенных требований не выполняется, метод сравнения средних, описанный в § 10, неприменим.

Однако если независимые выборки имеют большой объем (не менее 30 каждая), то выборочные средние распределены приближенно нормально, а выборочные дисперсии являются достаточно хорошими оценками генеральных дисперсий и в этом смысле их можно считать известными приближенно. В итоге критерий

$$Z' = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{D_{\text{в}}(X)/n + D_{\text{в}}(Y)/m}}$$

распределен приближенно нормально с параметрами $M(Z') = 0$ (при условии справедливости нулевой гипотезы) и $\sigma(Z') = 1$ (если выборки независимы).

Итак, если: 1) генеральные совокупности распределены нормально, а дисперсии их неизвестны; 2) генеральные совокупности не распределены нормально и дисперсии их неизвестны, причем выборки имеют большой объем и независимы,— можно сравнивать средние так, как описано в § 10, заменив точный критерий Z приближенным критерием Z'. В этом случае наблюдаемое значение приближенного критерия таково:

$$Z'_{\text{набл}} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{D_{\text{в}}(X)/n + D_{\text{в}}(Y)/m}}.$$

Замечание. Поскольку рассматриваемый критерий — приближенный, к выводам, полученным по этому критерию, следует относиться осторожно.

Пример. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны $n = 100$ и $m = 120$, найдены выборочные средние $\overline{x} = 32{,}4$, $\overline{y} = 30{,}1$ и выборочные дисперсии $D_{\text{в}}(X) = 15{,}0$, $D_{\text{в}}(Y) = 25{,}2$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X) = M(Y)$, при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) \neq M(Y)$.

Решение. Подставив данные задачи в формулу для вычисления наблюдаемого значения приближенного критерия, получим $Z'_{\text{набл}} = 3{,}83$.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X) > M(Y)$, поэтому критическая область — правосторонняя.

Найдем критическую точку по равенству

$$\Phi(z_{\text{кр}}) = (1 - 2\alpha)/2 = (1 - 2 \cdot 0{,}05)/2 = 0{,}45.$$

По таблице функции Лапласа находим $z_{\text{кр}} = 1{,}64$.

Так как $Z_{\text{набл}} > z_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочные средние различаются значимо.

§ 12. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых неизвестны и одинаковы (малые независимые выборки)

Пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально, причем их дисперсии неизвестны. Например, по выборкам малого объема нельзя получить хорошие оценки генеральных дисперсий. По этой причине метод сравнения средних, изложенный в § 11, применить нельзя.

Однако если дополнительно предположить, что **неизвестные генеральные дисперсии равны между собой**, то можно построить критерий (Стьюдента) сравнения средних. Например, если сравниваются средние размеры двух партий деталей, изготовленных на одном и том же станке, то естественно допустить, что дисперсии контролируемых размеров одинаковы.

Если же нет оснований считать дисперсии одинаковыми, то, **прежде чем сравнивать средние**, следует, пользуясь критерием Фишера—Снедекора (см. § 8), предварительно проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий.

Итак, в предположении, что генеральные дисперсии одинаковы, требуется проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X)=M(Y)$. Другими словами, требуется установить, значимо или незначимо различаются выборочные средние $\overline{x}$ и $\overline{y}$, найденные по независимым малым выборкам объемов n и m.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}.$$

Доказано, что величина T при справедливости нулевой гипотезы имеет t-распределение Стьюдента с $k=n+m-2$ степенями свободы.

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

Первый случай. Нулевая гипотеза H_0: $M(X)=M(Y)$. Конкурирующая гипотеза H_1: $M(X)\neq M(Y)$.

В этом случае строят двустороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия T в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости α.

Наибольшая мощность критерия (вероятность попадания критерия в критическую область при справедливости конкурирующей гипотезы) достигается тогда, когда «левая» и «правая» критические точки выбраны так, что вероятность попадания критерия в каждый из двух интервалов двусторонней критической области равна $\alpha/2$:

$$P(T < t_{\text{лев. кр}}) = \alpha/2, \quad P(T > t_{\text{прав. кр}}) = \alpha/2.$$

Поскольку величина T имеет распределение Стьюдента, а оно симметрично относительно нуля, то и критические точки симметричны относительно нуля. Таким образом, если обозначить правую границу двусторонней критической области через $t_{\text{двуст. кр}}(\alpha; k)$, то левая граница равна $-t_{\text{двуст. кр}}(\alpha; k)$. Итак, достаточно найти правую границу двусторонней критической области, чтобы найти саму двустороннюю критическую область: $T < -t_{\text{двуст. кр}}(\alpha; k)$, $T > t_{\text{двуст. кр}}(\alpha; k)$ и область принятия нулевой гипотезы: $[-t_{\text{двуст. кр}}(\alpha; k),\ t_{\text{двуст. кр}}(\alpha; k)]$.

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $T_{\text{набл}}$ и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X) = M(Y)$ о равенстве математических ожиданий двух нормальных совокупностей с неизвестными, но одинаковыми дисперсиями (в случае независимых малых выборок) при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) \neq M(Y)$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия:

$$T_{\text{набл}} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n-1)\, s_X^2 + (m-1)\, s_Y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α (помещенному в верхней строке таблицы) и числу степеней свободы $k = n + m - 2$ найти критическую точку $t_{\text{двуст. кр}}(\alpha; k)$.

Если $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{двуст. кр}}(\alpha; k)$ — отвергнуть нулевую гипотезу нет оснований.

Если $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{двуст. кр}}(\alpha; k)$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример. По двум независимым малым выборкам, объемы которых соответственно равны $n=5$ и $m=6$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние $\overline{x}=3{,}3$, $\overline{y}=2{,}48$ и исправленные дисперсии $s_X^2=0{,}25$ и $s_Y^2=0{,}108$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0: M(X)=M(Y)$, при конкурирующей гипотезе $H_1: M(X) \neq M(Y)$.

Решение. Так как выборочные дисперсии различны, проверим предварительно нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий, пользуясь критерием Фишера—Снедекора (см. § 8).

Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F_{\text{набл}}=0{,}25/0{,}108=2{,}31.$$

Дисперсия s_X^2 значительно больше дисперсии s_Y^2, поэтому в качестве конкурирующей примем гипотезу $H_1: D(X) > D(Y)$. В этом случае критическая область — правосторонняя. По таблице, по уровню значимости $\alpha=0{,}05$ и числам степеней свободы $k_1=5-1=4$, $k_2=6-1=5$ находим критическую точку $F_{\text{кр}}(0{,}05;\ 4;\ 5)=5{,}19$.

Так как $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий.

Поскольку предположение о равенстве генеральных дисперсий выполняется, сравним средние.

Вычислим наблюдаемое значение критерия Стьюдента:

$$T_{\text{набл}}=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{ns_X^2+ms_Y^2}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}.$$

Подставив числовые значения величин, входящих в эту формулу, получим $T_{\text{набл}}=3{,}27$.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X) \neq M(Y)$, поэтому критическая область — двусторонняя. По уровню значимости 0,05 и числу степеней свободы $k=5+6-2=9$ находим по таблице (см. приложение 6) критическую точку $t_{\text{двуст. кр}}(0{,}05;\ 9)=2{,}26$.

Так как $T_{\text{набл}} > t_{\text{двуст. кр}}$ — нулевую гипотезу о равенстве генеральных средних отвергаем. Другими словами, выборочные средние различаются значимо.

Второй случай. Нулевая гипотеза $H_0: M(X)=M(Y)$. Конкурирующая гипотеза $H_1: M(X) > M(Y)$.

В этом случае строят правостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия T в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:

$$P(T > t_{\text{правост. кр}})=\alpha.$$

Критическую точку $t_{\text{правост. кр}}(\alpha;\ k)$ находят по таблице приложения 6, по уровню значимости α, помещенному в нижней строке таблицы, и по числу степеней свободы $k=n+m-2$.

Если $T_{\text{набл}} < t_{\text{правост. кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $T_{набл} > t_{правост.\ кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Третий случай. Нулевая гипотеза $H_0: M(X) = M(Y)$. Конкурирующая гипотеза $H_1: M(X) < M(Y)$.

В этом случае строят левостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:

$$P(T < t_{левост.\ кр}) = \alpha.$$

В силу симметрии распределения Стьюдента относительно нуля $t_{левост.\ кр} = -t_{правост.\ кр}$. Поэтому сначала находят «вспомогательную» критическую точку $t_{правост.\ кр}$ так, как описано во втором случае, и полагают $t_{левост.\ кр} = -t_{правост.\ кр}$.

Если $T_{набл} > -t_{правост.\ кр}$ — отвергнуть нулевую гипотезу нет оснований.

Если $T_{набл} < -t_{правост.\ кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

§ 13. Сравнение выборочной средней с гипотетической генеральной средней нормальной совокупности

А. Дисперсия генеральной совокупности известна. Пусть генеральная совокупность X распределена нормально, причем генеральная средняя a хотя и неизвестна, но имеются основания предполагать, что она равна гипотетическому (предполагаемому) значению a_0. Например, если X — совокупность размеров x_i партии деталей, изготовляемых станком-автоматом, то можно предположить, что генеральная средняя a этих размеров равна проектному размеру a_0. Чтобы проверить это предположение, находят выборочную среднюю $\bar{x}$ и устанавливают, значимо или незначимо различаются $\bar{x}$ и a_0. Если различие окажется незначимым, то станок обеспечивает в среднем проектный размер; если различие значимое, то станок требует подналадки.

Предположим, что дисперсия генеральной совокупности известна, например, из предшествующего опыта, или найдена теоретически, или вычислена по выборке большого объема (по большой выборке можно получить достаточно хорошую оценку дисперсии).

Итак, пусть из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема n и по ней найдена выборочная средняя $\overline{x}$, причем генеральная дисперсия σ^2 известна. Требуется по выборочиой средней при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу $H_0: a = a_0$ о равенстве генеральной средней a гипотетическому значению a_0.

Учитывая, что выборочная средняя является несмещенной оценкой генеральной средней (см. гл. XVI, § 5), т. е. $M(\overline{X}) = a$, нулевую гипотезу можно записать так: $M(\overline{X}) = a_0$.

Таким образом, требуется проверить, что математическое ожидание выборочной средней равно гипотетической генеральной средней. Другими словами, надо установить, значимо или незначимо различаются выборочная и генеральная средние.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$U = (\overline{X} - a_0)/\sigma(\overline{X}) = (\overline{X} - a_0)\sqrt{n}/\sigma,$$

которая распределена нормально, причем при справедливости нулевой гипотезы $M(U) = 0$, $\sigma(U) = 1$.

Поскольку здесь критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы, так же как в § 10, ограничимся формулировкой правил проверки нулевой гипотезы, обозначив значение критерия U, вычисленное по данным наблюдений, через $U_{\text{набл}}$.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0: a = a_0$ о равенстве генеральной средней a нормальной совокупности с известной дисперсией σ^2 гипотетическому значению a_0 при конкурирующей гипотезе $H_1: a \neq a_0$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия:

$$U_{\text{набл}} = (\overline{x} - a_0)\sqrt{n}/\sigma$$

и по таблице функции Лапласа найти критическую точку двусторонней критической области по равенству

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = (1 - \alpha)/2.$$

Если $|U_{\text{набл}}| < u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $|U_{\text{набл}}| > u_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 2. При конкурирующей гипотезе $H_1: a > a_0$ критическую точку правосторонней критической области находят по равенству

$$\Phi(u_{кр}) = (1-2\alpha)/2.$$

Если $U_{набл} < u_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $U_{набл} > u_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 3. При конкурирующей гипотезе $H_1: a < a_0$ сначала находят критическую точку $u_{кр}$ по правилу 2, а затем полагают границу левосторонней критической области $u'_{кр} = -u_{кр}$.

Если $U_{набл} > -u_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $U_{набл} < -u_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример 1. Из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}36$ извлечена выборка объема $n = 36$ и по ней найдена выборочная средняя $\bar{x} = 21{,}6$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0: a = a_0 = 21$, при конкурирующей гипотезе $H_1: a \neq 21$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$U_{набл} = (\bar{x} - a_0)\sqrt{n}/\sigma = (21{,}6-21)\sqrt{36}/0{,}36 = 10.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $a \neq a_0$, поэтому критическая область — двусторонняя.

Найдем критическую точку:

$$\Phi(u_{кр}) = (1-\alpha)/2 = (1-0{,}05)/2 = 0{,}475.$$

По таблице функции Лапласа находим $u_{кр} = 1{,}96$.

Так как $U_{набл} > u_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочная и гипотетическая генеральная средние различаются значимо.

Пример 2. По данным примера 1 проверить нулевую гипотезу $H_0: a = 21$ при конкурирующей гипотезе $a > 21$.

Решение. Так как конкурирующая гипотеза имеет вид $a > 21$, критическая область — правосторонняя.

Найдем критическую точку из равенства

$$\Phi(u_{кр}) = (1-2\alpha)/2 = (1-2\cdot 0{,}05)/2 = 0{,}45.$$

По таблице функции Лапласа находим $u_{кр} = 1{,}65$.

Так как $U_{набл} = 10 > u_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергаем; различие между выборочной и гипотетической генеральной средней — значимое.

Заметим, что в примере 2 нулевую гипотезу можно было отвергнуть сразу, поскольку она была отвергнута в примере 1 при двусторонней критической области; полное решение приведено в учебных целях.

Б. Дисперсия генеральной совокупности неизвестна. Если дисперсия генеральной совокупности неизвестна (например, в случае малых выборок), то в качестве критерия проверки нулевой гипотезы принимают случайную величину

$$T=(\bar{X}-a_0)\sqrt{n}/S,$$

где S — «исправленное» среднее квадратическое отклонение. Величина T имеет распределение Стьюдента с $k=n-1$ степенями свободы.

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы. Поскольку это делается так, как описано выше, ограничимся правилами проверки нулевой гипотезы.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0: a=a_0$ о равенстве неизвестной генеральной средней a (нормальной совокупности с неизвестной дисперсией) гипотетическому значению a_0 при конкурирующей гипотезе $H_1: a \neq a_0$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия:

$$T_{\text{набл}}=(\bar{x}-a_0)\sqrt{n}/s$$

и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α, помещенному в верхней строке таблицы, и числу степеней свободы $k=n-1$ найти критическую точку $t_{\text{двуст. кр}}(\alpha;\ k)$.

Если $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{двуст. кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{двуст. кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 2. При конкурирующей гипотезе $H_1: a > a_0$ по уровню значимости α, помещенному в нижней строке таблицы приложения 6, и числу степеней свободы $k=n-1$ находят критическую точку $t_{\text{правост. кр}}(\alpha;\ k)$ правосторонней критической области.

Если $T_{\text{набл}} < t_{\text{правост. кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Правило 3. При конкурирующей гипотезе $H_1: a < a_0$, сначала находят «вспомогательную» критическую точку $t_{\text{правост. кр}}(\alpha;\ k)$ и полагают границу левосторонней критической области $t_{\text{левост. кр}}=-t_{\text{правост. кр}}$.

Если $T_{\text{набл}} > -t_{\text{правост. кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $T_{\text{набл}} < -t_{\text{правост. кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример 3. По выборке объема $n=20$, извлеченной из нормальной генеральной совокупности, найдены выборочная средняя $\bar{x}=16$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s=4{,}5$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0: a = a_0 = 15$, при конкурирующей гипотезе $H_1: a \neq 15$.

Решение. Вычислим наблюдаемое значение критерия:

$$T_{\text{набл}} = (\bar{x} - a_0)\sqrt{n}/s = (16 - 15) \cdot \sqrt{20}/4{,}5 = 0{,}99.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $a \neq a_0$, поэтому критическая область — двусторонняя.

По таблице критических точек распределения Стьюдента, по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$, помещенному в верхней строке таблицы, и по числу степеней свободы $k = 20 - 1 = 19$ находим критическую точку $t_{\text{двуст. кр}}(0{,}05;\ 19) = 2{,}09$.

Так как $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{двуст. кр}}$ — нет оснований, чтобы отвергнуть нулевую гипотезу; выборочная средняя незначимо отличается от гипотетической генеральной средней.

§ 14. Связь между двусторонней критической областью и доверительным интервалом

Легко показать, что, отыскивая двустороннюю критическую область при уровне значимости α, тем самым находят и соответствующий доверительный интервал с надежностью $\gamma = 1 - \alpha$. Например, в § 13, проверяя нулевую гипотезу $H_0: a = a_0$ при $H_1: a \neq a_0$, мы требовали, чтобы вероятность попадания критерия $U = (\bar{x} - a)\sqrt{n}/\sigma$ в двустороннюю критическую область была равна уровню значимости α, следовательно, вероятность попадания критерия в область принятия гипотезы $(-u_{\text{кр}},\ u_{\text{кр}})$ равна $1 - \alpha = \gamma$. Другими словами, с надежностью γ выполняется неравенство

$$-u_{\text{кр}} < (\bar{x} - a)\sqrt{n}/\sigma < u_{\text{кр}},$$

или равносильное неравенство

$$\bar{x} - u_{\text{кр}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + u_{\text{кр}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $\Phi(u_{\text{кр}}) = \gamma/2$.

Мы получили доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения при известном σ с надежностью γ (см. гл. XVI, § 15).

Замечание. Хотя отыскание двусторонней критической области и доверительного интервала приводит к одинаковым результатам, их истолкование различно: двусторонняя критическая область определяет границы (критические точки), между которыми заключено $(1 - \alpha)\%$ числа наблюдаемых критериев, найденных при повторении опытов; доверительный же интервал определяет границы (концы интервала), между которыми в $\gamma = (1 - \alpha)\%$ опытов заключено истинное значение оцениваемого параметра.

§ 15. Определение минимального объема выборки при сравнении выборочной и гипотетической генеральной средних

На практике часто известна величина (точность) $\delta > 0$, которую не должна превышать абсолютная величина разности между выборочной и гипотетической генеральной средними. Например, обычно требуют, чтобы средний размер изготовляемых деталей отличался от проектного не более чем на заданное δ. Возникает вопрос: каким должен быть минимальный объем выборки, чтобы это требование с вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$ (α — уровень значимости) выполнялось?

Поскольку задача отыскания доверительного интервала для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ и задача отыскания двусторонней критической области для проверки гипотезы о равенстве математического ожидания (генеральной средней) гипотетическому значению (см. § 13, п. А) сводятся одна к другой (см. § 14), воспользуемся формулой (см. гл. XVI, § 15)

$$n = u_{кр}^2 \sigma^2 / \delta^2,$$

где $u_{кр}$ находят по равенству $\Phi(u_{кр}) = \gamma/2 = (1-\alpha)/2$.

Если же σ неизвестно, а найдена его оценка s, то (см. § 13, п. Б)

$$n = t_{двуст. кр}^2 (\alpha;\ k) \cdot s^2/\delta^2.$$

§ 16. Пример на отыскание мощности критерия

Приведем решение примера на нахождение мощности критерия.

Пример. По выборке объема $n = 25$, извлеченной из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$, найдена выборочная средняя $\bar{x} = 18$. При уровне значимости 0,05 требуется:

а) найти критическую область, если проверяется нулевая гипотеза $H_0: a = a_0 = 20$ о равенстве генеральной средней гипотетическому значению при конкурирующей гипотезе $H_1: a < 20$;

б) найти мощность критерия проверки при $a_0 = 16$.

Решение. а) Так как конкурирующая гипотеза имеет вид $a < a_0$, критическая область — левосторонняя.

Пользуясь правилом 3 (см. § 13, п. А), найдем критическую точку: $u'_{кр} = -1{,}65$. Следовательно, левосторонняя критическая область определяется неравенством $U < -1{,}65$, или подробнее

$$(\bar{x}-20)\sqrt{25}/10 < -1{,}65.$$

Отсюда $\bar{x} < 16{,}7$.

При этих значениях выборочной средней нулевая гипотеза отвергается; в этом смысле $\bar{x}=16{,}7$ можно рассматривать как критическое значение выборочной средней.

б) Для того чтобы вычислить мощность рассматриваемого критерия, предварительно найдем его значение при условии справедливости конкурирующей гипотезы (т. е. при $a_0=16$), положив $\bar{x}=16{,}7$:

$$U=(\bar{x}-a_0)\sqrt{n}/\sigma=(16{,}7-16)\sqrt{25}/10=0{,}35.$$

Отсюда видно, что если $\bar{x} < 16{,}7$, то $U < 0{,}35$. Поскольку при $\bar{x} < 16{,}7$ нулевая гипотеза отвергается, то и при $U < 0{,}35$ она также отвергается (при этом конкурирующая гипотеза справедлива, так как мы положили $a_0=16$).

Найдем теперь, пользуясь функцией Лапласа, мощность критерия, т. е. вероятность того, что нулевая гипотеза будет отвергнута, если справедлива конкурирующая гипотеза (см. § 7):

$$P(U < 0{,}35)=P(-\infty < U < 0{,}35)=P(-\infty < U < 0)+$$
$$+P(0 < U < 0{,}35)=0{,}5+\Phi(0{,}35)=0{,}5+0{,}1368=0{,}6368.$$

Итак, искомая мощность рассматриваемого критерия приближенно равна 0,64. Если увеличить объем выборки, то мощность увеличится.

Например, при $n=64$ мощность равна 0,71. Если увеличить α, то мощность также увеличится. Например, при $\alpha=0{,}1$ мощность равна 0,7642.

З а м е ч а н и е. Зная мощность, легко найти вероятность ошибки второго рода: $\beta=1-0{,}64$. (Разумеется, при решении примера можно было сначала найти β, а затем мощность, равную $1-\beta$.)

§ 17. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей с неизвестными дисперсиями (зависимые выборки)

В предыдущих параграфах выборки предполагались независимыми. Здесь рассматриваются выборки одинакового объема, варианты которых попарно зависимы. Например, если x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ — результаты измерений деталей первым прибором, а y_i — результаты измерений этих же деталей, произведенные в том же порядке вторым прибором, то x_i и y_i попарно зависимы и в этом смысле сами выборки зависимые. Поскольку, как правило, $x_i \neq y_i$, то возникает необходимость установить, значимо или незначимо различаются пары этих чисел. Аналогичная задача ставится при сравнении **д в у х** методов исследования, осуществленных **о д н о й** лабораторией, или если исследование произведено **одним** и тем же методом **двумя** различными лабораториями.

Итак, пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально, причем их дисперсии неизвестны. Требуется при уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0: M(\overline{X}) = M(\overline{Y})$ о равенстве генеральных средних нормальных совокупностей с неизвестными дисперсиями при конкурирующей гипотезе $H_1: M(\overline{X}) \neq M(\overline{Y})$ по двум зависимым выборкам одинакового объема.

Сведем эту задачу сравнения **двух** средних к задаче сравнения **одной** выборочной средней с гипотетическим значением генеральной средней, решенной в § 13, п. Б. С этой целью введем в рассмотренные случайные величины — разности $D_i = X_i - Y_i$ и их среднюю

$$\overline{D} = \frac{\sum D_i}{n} = \frac{\sum (X_i - Y_i)}{n} = \frac{\sum X_i}{n} - \frac{\sum Y_i}{n} = \overline{X} - \overline{Y}.$$

Если нулевая гипотеза справедлива, т. е. $M(\overline{X}) = M(\overline{Y})$, то $M(\overline{X}) - M(\overline{Y}) = 0$ и, следовательно,

$$M(\overline{D}) = M(\overline{X} - \overline{Y}) = M(\overline{X}) - M(\overline{Y}) = 0.$$

Таким образом, нулевую гипотезу $H_0: M(\overline{X}) = M(\overline{Y})$ можно записать так:

$$H_0: M(\overline{D}) = 0.$$

Тогда конкурирующая гипотеза примет вид

$$H_1: M(\overline{D}) \neq 0.$$

Замечание 1. Далее наблюдаемые неслучайные разности $x_i - y_i$ будем обозначать через d_i в отличие от случайных разностей $D_i = X_i - Y_i$. Аналогично выборочную среднюю этих разностей $\sum d_i/n$ обозначим через $\overline{d}$ в отличие от случайной величины $\overline{D}$.

Итак, задача сравнения двух средних $\overline{x}$ и $\overline{y}$ сведена к задаче сравнения одной выборочной средней $\overline{d}$ с гипотетическим значением генеральной средней $M(\overline{D}) = a_0 = 0$. Эта задача решена ранее в § 13, п. Б, поэтому приведем лишь правило проверки нулевой гипотезы и иллюстрирующий пример.

Замечание 2. Как следует из изложенного выше, в формуле (см. § 13, п. Б)

$$T_{\text{набл}} = (\overline{x} - a_0)\sqrt{n}/s$$

надо положить

$$\bar{x}=\bar{d},\ a_0=0,\ s=s_d=\sqrt{\frac{\sum d_i^2-\left[\sum d_i\right]^2/n}{n-1}}.$$

Тогда $T_{\text{набл}}=\bar{d}\sqrt{n}/s_d$.

Правило. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0: M(\bar{X})=M(\bar{Y})$ о равенстве двух средних нормальных совокупностей с неизвестными дисперсиями (в случае зависимых выборок одинакового объема) при конкурирующей гипотезе $M(\bar{X})\neq M(\bar{Y})$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия:

$$T_{\text{набл}}=\bar{d}\sqrt{n}/s_d$$

и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α, помещенному в верхней строке таблицы, и по числу степеней свободы $k=n-1$ найти критическую точку $t_{\text{двуст. кр}}(\alpha;\ k)$.

Если $|T_{\text{набл}}|<t_{\text{двуст. кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $|T_{\text{набл}}|>t_{\text{двуст. кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример. Двумя приборами в одном и том же порядке измерены 5 деталей и получены следующие результаты (в сотых долях миллиметра):

$$x_1=6,\quad x_2=7,\quad x_3=8,\quad x_4=5,\quad x_5=7;$$
$$y_1=7,\quad y_2=6,\quad y_3=8,\quad y_4=7,\quad y_5=8.$$

При уровне значимости 0,05 установить, значимо или незначимо различаются результаты измерений.

Решение. Вычитая из чисел первой строки числа второй, получим: $d_1=-1,\ d_2=1,\ d_3=0,\ d_4=-2,\ d_5=-1$.

Найдем выборочную среднюю:

$$\bar{d}=\sum d_i/n=(-1+1+0-2+-1)/5=-0,6.$$

Учитывая, что $\sum d_i^2=1+1+4+1=7$ и $\sum d_i=-3$, найдем «исправленное» среднее квадратическое отклонение:

$$s_d=\sqrt{\frac{\sum d_i^2-\left[\sum d_i\right]^2/n}{n-1}}=\sqrt{\frac{7-9/5}{5-1}}=\sqrt{1,3}.$$

Вычислим наблюдаемое значение критерия:

$$T_{\text{набл}}=\bar{d}\sqrt{n}/s_d=-0,6\sqrt{5}/\sqrt{1,3}=-1,18.$$

По таблице критических точек распределения Стьюдента, по уровню значимости 0,05, помещенному в верхней строке таблицы, и числу степеней свободы $k=5-1=4$ находим критическую точку $t_{\text{двуст. кр}}(0,05;\ 4)=2,78$.

Так как $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{двуст. кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, результаты измерений различаются незначимо.

§ 18. Сравнение наблюдаемой относительной частоты с гипотетической вероятностью появления события

Пусть по достаточно большому числу n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, но неизвестна, найдена относительная частота m/n. Пусть имеются основания предполагать, что неизвестная вероятность равна гипотетическому значению p_0. Требуется при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что неизвестная вероятность p равна гипотетической вероятности p_0.

Поскольку вероятность оценивается по относительной частоте, рассматриваемую задачу можно сформулировать и так: требуется установить, значимо или незначимо различаются наблюдаемая относительная частота и гипотетическая вероятность.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$U = (M/n - p_0)\sqrt{n}/\sqrt{p_0 q_0},$$

где $q_0 = 1 - p_0$.

Величина U при справедливости нулевой гипотезы распределена приближенно нормально с параметрами $M(U) = 0$, $\sigma(U) = 1$.

П о я с н е н и е. Доказано (теорема Лапласа), что при достаточно больших значениях n относительная частота имеет приближенно нормальное распределение с математическим ожиданием p и средним квадратическим отклонением $\sqrt{pq/n}$. Нормируя относительную частоту (вычитая математическое ожидание и деля на среднее квадратическое отклонение), получим

$$U = \frac{M/n - p}{\sqrt{pq/n}} = \frac{(M/n - p)\sqrt{n}}{\sqrt{pq}},$$

причем $M(U) = 0$, $\sigma(U) = 1$.

При справедливости нулевой гипотезы, т. е. при $p=p_0$,

$$U=\frac{(M/n-p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0q_0}}.$$

Замечание 1. Далее наблюдаемая частота обозначается через m/n в отличие от случайной величины M/n.

Поскольку здесь критическая область строится так же, как и в § 10, приведем лишь правила проверки нулевой гипотезы и иллюстрирующий пример.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу $H_0: p=p_0$ о равенстве неизвестной вероятности гипотетической вероятности при конкурирующей гипотезе $H_1: p\neq p_0$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия:

$$U_{\text{набл}}=(m/n-p_0)\sqrt{n}/\sqrt{p_0q_0}$$

и по таблице функции Лапласа найти критическую точку $u_{\text{кр}}$ по равенству $\Phi(u_{\text{кр}})=(1-\alpha)/2$.

Если $|U_{\text{набл}}|<u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $|U_{\text{набл}}|>u_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 2. При конкурирующей гипотезе $H_1: p>p_0$ находят критическую точку правосторонней критической области по равенству $\Phi(u_{\text{кр}})=(1-2\alpha)/2$.

Если $U_{\text{набл}}<u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $U_{\text{набл}}>u_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 3. При конкурирующей гипотезе $H_1: p<p_0$ находят критическую точку $u_{\text{кр}}$ по правилу 2, а затем полагают границу левосторонней критической области $u'_{\text{кр}}=-u_{\text{кр}}$.

Если $U_{\text{набл}}>-u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $U_{\text{набл}}<-u_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Замечание 2. Удовлетворительные результаты обеспечивает выполнение неравенства $np_0q_0>9$.

Пример. По 100 независимым испытаниям найдена относительная частота 0,08. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0: p=p_0=0{,}12$ при конкурирующей гипотезе $H_1: p\neq 0{,}12$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$U_{\text{набл}}=\frac{(m/n-p_0)/\sqrt{n}}{\sqrt{p_0q_0}}=\frac{(0{,}08-0{,}12)\sqrt{100}}{\sqrt{0{,}12\cdot 0{,}88}}=-1{,}23.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $p\neq p_0$, поэтому критическая область двусторонняя.

Найдем критическую точку $u_{кр}$ по равенству

$$\Phi(u_{кр}) = (1-\alpha)/2 = (1-0{,}05)/2 = 0{,}475.$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $u_{кр} = 1{,}96$.

Так как $|U_{набл}| < u_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, наблюдаемая относительная частота незначимо отличается от гипотетической вероятности.

§ 19. Сравнение двух вероятностей биномиальных распределений

Пусть в двух генеральных совокупностях производятся независимые испытания; в результате каждого испытания событие A может появиться либо не появиться.

Обозначим неизвестную вероятность появления события A в первой совокупности через p_1, а во второй — через p_2. Допустим, что в первой совокупности произведено n_1 испытаний (извлечена выборка объема n_1), причем событие A наблюдалось m_1 раз. Следовательно, относительная частота появления события в первой совокупности

$$w_1(A) = m_1/n_1.$$

Допустим, что во второй совокупности произведено n_2 испытаний (извлечена выборка объема n_2), причем событие A наблюдалось m_2 раз. Следовательно, относительная частота появления события во второй совокупности

$$w_2(A) = m_2/n_2.$$

Примем наблюдавшиеся относительные частоты в качестве оценок неизвестных вероятностей появления события A: $p_1 \simeq w_1$, $p_2 \simeq w_2$. Требуется при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что вероятности p_1 и p_2 равны между собой:

$$H_0: p_1 = p_2 = p.$$

Заметим, что, поскольку вероятности оцениваются по относительным частотам, рассматриваемую задачу можно сформулировать и так: требуется установить, значимо или незначимо различаются относительные частоты w_1 и w_2.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$U = \frac{M_1/n_1 - M_2/n_2}{\sqrt{p(1-p)(1/n_1 + 1/n_2)}}. \qquad (*)$$

Величина U при справедливости нулевой гипотезы распределена приближенно нормально с параметрами $M(U)=0$ и $\sigma(U)=1$ (см. далее пояснение). В формуле (*) вероятность p неизвестна, поэтому заменим ее оценкой наибольшего правдоподобия (см. гл. XVI, § 21, пример 2):

$$p^*=(m_1+m_2)/(n_1+n_2);$$

кроме того, заменим случайные величины M_1 и M_2 их возможными значениями m_1 и m_2, полученными в испытаниях. В итоге получим рабочую формулу для вычисления наблюдаемого значения критерия:

$$U_{\text{набл}}=\frac{m_1/n_1-m_2/n_2}{\sqrt{\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\left(1-\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}.$$

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы так же, как в § 10, поэтому ограничимся формулировкой правил проверки нулевой гипотезы.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0: p_1=p_2=p$ о равенстве вероятностей появления события в двух генеральных совокупностях (имеющих биномиальные распределения) при конкурирующей гипотезе $H_1: p_1\neq p_2$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия:

$$U_{\text{набл}}=\frac{m_1/n_1-m_2/n_2}{\sqrt{\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\left(1-\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

и по таблице функции Лапласа найти критическую точку $u_{\text{кр}}$ по равенству $\Phi(u_{\text{кр}})=(1-\alpha)/2$.

Если $|U_{\text{набл}}|<u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $|U_{\text{набл}}|>u_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 2. При конкурирующей гипотезе $H_1: p_1>p_2$ находят критическую точку правосторонней критической области по равенству $\Phi(u_{\text{кр}})=(1-2\alpha)/2$.

Если $U_{\text{набл}}<u_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $U_{\text{набл}}>u_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 3. При конкурирующей гипотезе $H_1: p_1<p_2$ находят критическую точку $u_{\text{кр}}$ по правилу 2, а затем полагают границу левосторонней критической области $u'_{\text{кр}}=-u_{\text{кр}}$.

Если $U_{набл} > -u_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $U_{набл} < -u_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример. Из первой партии изделий извлечена выборка объема $n_1 = 1000$ изделий, причем $m_1 = 20$ изделий оказались бракованными; из второй партии извлечена выборка объема $n = 900$, причем $m_2 = 30$ изделий оказались бракованными. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу $H_0: p_1 = p_2 = p$ о равенстве вероятностей появления брака в обеих партиях при конкурирующей гипотезе H_1: $p_1 \neq p_2$.

Решение. По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $p_1 \neq p_2$, поэтому критическая область — двусторонняя.

Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$U_{набл} = \frac{m_1/n_1 - m_2/n_2}{\sqrt{\dfrac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\left(1-\dfrac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\right)\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}}.$$

Подставив данные задачи и выполнив вычисления, получим $U_{набл} = -1{,}81$.

Найдем критическую точку:

$$\Phi(u_{кр}) = (1-\alpha)/2 = (1-0{,}05)/2 = 0{,}475.$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $u_{кр} = 1{,}96$.

Так как $|U_{набл}| < u_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, вероятности получения брака в обеих партиях различаются незначимо.

Замечание. Для увеличения точности расчета вводят так называемую *поправку на непрерывность*, а именно вычисляют наблюдаемое значение критерия по формуле

$$U_{набл} = \frac{[m_1/n_1 - 1/2n_1] - [m_2/n_2 + 1/2n_2]}{\sqrt{\dfrac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\left(1-\dfrac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\right)\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}}.$$

В рассмотренном примере по этой формуле получим $|U_{набл}| = 1{,}96$. Поскольку и $u_{кр} = 1{,}96$, необходимо провести дополнительные испытания, причем целесообразно увеличить объем выборок.

Пояснение. Случайные величины M_1 и M_2 распределены по биномиальному закону; при достаточно большом объеме выборок их можно считать приближенно нормальными (практически должно выполняться неравенство $npq > 9$), следовательно, и разность $U' = M_1/n_1 - M_2/n_2$ распределена приближенно нормально.

Для нормирования случайной величины U' надо вычесть из нее математическое ожидание $M(U')$ и разделить результат на среднее квадратическое отклонение $\sigma(U')$.

Покажем, что $M(U') = 0$. Действительно, $M(M_1) = n_1 p_1$ (см. гл. VII, § 5, замечание); при справедливости нулевой гипотезы ($p_1 = p_2 = p$) $M(M_1) = n_1 p$ и аналогично $M(M_2) = n_2 p$. Следовательно,

$$M(U') = M\left[\frac{M_1}{n_1}\right] - M\left[\frac{M_2}{n_2}\right] = \frac{1}{n_1} M(M_1) - \frac{1}{n_2} M(M_2) =$$
$$= \frac{1}{n_1} n_1 p - \frac{1}{n_2} n_2 p = 0.$$

Покажем, что среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(U') = \sqrt{p(1-p)[(1/n_1) + (1/n_2)]}.$$

Действительно, дисперсия $D(M_1) = n_1 p_1 (1-p_1)$ (см. гл. VIII, § 6, замечание); при справедливости нулевой гипотезы ($p_1 = p_2 = p$) $D(M_1) = n_1 p(1-p)$ и аналогично $D(M_2) = n_2 p(1-p)$. Следовательно,

$$D(U') = D\left[\frac{M_1}{n_1} - \frac{M_2}{n_2}\right] = \frac{1}{n_1^2} D(M_1) + \frac{1}{n_2^2} D(M_2) =$$
$$= \frac{1}{n_1^2} n_1 p(1-p) + \frac{1}{n_2^2} n_2 p(1-p) = p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right).$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(U') = \sqrt{p(1-p)[1/n_1) + (1/n_2)]}.$$

Итак, случайная величина $U = (u' - M(u'))/\sigma(u')$ (см. формулу (*)) нормирована и поэтому $M(U) = 0$ и $\sigma(U) = 1$.

§ 20. Сравнение нескольких дисперсий нормальных генеральных совокупностей по выборкам различного объема. Критерий Бартлетта

Пусть генеральные совокупности $X_1, X_2, \ldots, X_l$ распределены нормально Из этих совокупностей извлечены независимые выборки, вообще говоря, различных объемов $n_1, n_2, \ldots, n_l$ (некоторые объемы могут быть одинаковыми; если все выборки имеют одинаковый объем, то предпочтительнее пользоваться критерием Кочрена, который описан в следующем параграфе). По выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_l^2$.

Требуется по исправленным выборочным дисперсиям при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральные дисперсии рассматриваемых совокупностей равны между собой:

$$H_0: D(X_1) = D(X_2) = \ldots = D(X_l).$$

Другими словами, требуется установить, значимо или незначимо различаются исправленные выборочные дисперсии.

Рассматриваемую здесь гипотезу о равенстве нескольких дисперсий называют *гипотезой об однородности дисперсий*.

Заметим, что числом степеней свободы дисперсии s_i^2 называют число $k_i = n_i - 1$, т. е. число, на единицу меньшее объема выборки, по которой вычислена дисперсия.

Обозначим через $\overline{s^2}$ среднюю арифметическую исправленных дисперсий, взвешенную по числам степеней свободы:

$$\overline{s^2} = \left(\sum_{i=1}^{l} k_i s_i^2 \right) \Big/ k,$$

где $k = \sum_{i=1}^{l} k_i$.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы об однородности дисперсий примем критерий Бартлетта — случайную величину

$$B = V/C,$$

где

$$V = 2{,}303 \left[k \lg \overline{s^2} - \sum_{i=1}^{l} k_i \lg s_i^2 \right],$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(l-1)} \left[\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{k_i} - \frac{1}{k} \right].$$

Бартлетт установил, что случайная величина B при условии справедливости нулевой гипотезы распределена приближенно как χ^2 с $l-1$ степенями свободы, если все $k_i > 2$. Учитывая, что $k_i = n_i - 1$, заключаем, что $n_i - 1 > 2$, или $n_i > 3$, т. е. объем каждой из выборок должен быть не меньше 4.

Критическую область строят правостороннюю, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:

$$P[B > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha;\ l-1)] = \alpha.$$

Критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha;\ l-1)$ находят по таблице приложения 5, по уровню значимости α и числу степеней свободы $k=l-1$, и тогда правосторонняя критическая область определяется неравенством $B > \chi^2_{кр}$, а область принятия гипотезы — неравенством $B < \chi^2_{кр}$.

Обозначим значение критерия Бартлетта, вычисленное по данным наблюдений, через $B_{набл}$ и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.

Правило. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий нормальных совокупностей, надо вычислить наблюдаемое значение критерия Бартлетта $B=V/C$ и по таблице критических точек распределения χ^2 найти критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha;\ l-1)$.

Если $B_{набл} < \chi^2_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $B_{набл} > \chi^2_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Замечание 1. Не следует торопиться вычислять постоянную C. Сначала надо найти V и сравнить с $\chi^2_{кр}$; если окажется, что $V < \chi^2_{кр}$, то подавно (так как $C > 1$) $B=(V/C) < \chi^2_{кр}$ и, следовательно, C вычислять не нужно.

Если же $V > \chi^2_{кр}$, то надо вычислить C и затем сравнить B с $\chi^2_{кр}$.

Замечание 2. Критерий Бартлетта весьма чувствителен к отклонениям распределений от нормального, поэтому к выводам, полученным по этому критерию, надо относиться с осторожностью.

Таблица 25

1	2	3	4	5	6	7	8
Номер выборки i	Объем выборки n_i	Число степеней свободы k_i	Дисперсии s_i^2	$k_i s_i^2$	$\lg s_i^2$	$k_i \lg s_i^2$	$1/k_i$
1	10	9	0,25	2,25	$\bar{1}$,3979	$\bar{6}$,5811	
2	13	12	0,40	4,80	$\bar{1}$,6021	$\bar{5}$,2252	
3	15	14	0,36	5,04	$\bar{1}$,5563	$\bar{7}$,7822	
4	16	15	0,46	6,90	$\bar{1}$,6628	$\bar{6}$,9420	
Σ		$k=50$		18,99		$\overline{22}$,5305	

Пример. По четырем независимым выборкам, объемы которых соответственно равны $n_1=10$, $n_2=12$, $n_3=15$, $n_4=16$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии, соответственно равные 0,25; 0,40; 0,36; 0,46. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу об однородности дисперсий (критическая область — правосторонняя).

Решение. Составим расчетную табл. 25 (столбец 8 пока заполнять не будем, поскольку еще неизвестно, понадобится ли вычислять C).

Пользуясь расчетной таблицей, найдем:

$$\overline{s^2}=\left(\sum k_i s_i^2\right)/k=18{,}99/50=0{,}3798; \quad \lg 0{,}3798=\bar{1}{,}5795;$$

$$V=2{,}303\left[k \lg \overline{s^2}-\sum k_i \lg s_i^2\right]=2{,}303\left[50\cdot\bar{1}{,}5795-\overline{22}{,}5305\right]=1{,}02.$$

По таблице приложения 5, по уровню значимости 0,05 и числу степеней свободы $l-1=4-1=3$ находим критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\ 3)=7{,}8$.

Так как $V<\chi^2_{\text{кр}}$, то подавно (поскольку $C>1$) $B_{\text{набл}}=(V/C)<\chi^2_{\text{кр}}$ и, следовательно, отвергнуть нулевую гипотезу об однородности дисперсий нет оснований. Другими словами, исправленные выборочные дисперсии различаются незначимо.

Замечание 3. Если требуется оценить генеральную дисперсию, то при условии однородности дисперсий целесообразно принять в качестве ее оценки среднюю арифметическую исправленных дисперсий, взвешенную по числам степеней свободы, т. е.

$$\overline{s^2}=\left(\sum k_i s_i^2\right)/k.$$

Например, в рассмотренной задаче в качестве оценки генеральной дисперсии целесообразно принять 0,3798.

§ 21. Сравнение нескольких дисперсий нормальных генеральных совокупностей по выборкам одинакового объема. Критерий Кочрена

Пусть генеральные совокупности $X_1, X_2, \ldots, X_l$ распределены нормально. Из этих совокупностей извлечено l независимых выборок одинакового объема n и по ним найдены исправленные выборочные дисперсии $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_l^2$, все с одинаковым числом степеней свободы $k=n-1$.

Требуется по исправленным дисперсиям при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральные дисперсии рассматриваемых совокупностей равны между собой:

$$H_0: D(X_1)=D(X_2)=\ldots=D(X_l).$$

Другими словами, требуется проверить, значимо или незначимо различаются исправленные выборочные дисперсии.

В рассматриваемом случае выборок одинакового объема можно по критерию Фишера—Снедекора (см. § 8) сравнить наибольшую и наименьшую дисперсии; если окажется, что различие между ними незначимо, то подавно незначимо и различие между остальными дисперсиями. Недостаток этого метода состоит в том, что информация, которую содержат остальные дисперсии, кроме наименьшей и наибольшей, не учитывается.

Можно также применить критерий Бартлетта. Однако, как указано в § 20, известно лишь приближенное распределение этого критерия, поэтому предпочтительнее использовать критерий Кочрена, распределение которого найдено точно.

Итак, в качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем критерий Кочрена—отношение максимальной исправленной дисперсии к сумме всех исправленных дисперсий:

$$G = S^2_{\max}/(S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_l^2).$$

Распределение этой случайной величины зависит только от числа степеней свободы $k = n - 1$ и количества выборок l.

Критическую область строят правостороннюю, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:

$$P[G > G_{\text{кр}}(\alpha; k, l)] = \alpha.$$

Критическую точку $G_{\text{кр}}(\alpha; k, l)$ находят по таблице приложения 8, и тогда правосторонняя критическая область определяется неравенством $G > G_{\text{кр}}$, а область принятия нулевой гипотезы—неравенством $G < G_{\text{кр}}$.

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $G_{\text{набл}}$ и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.

Правило. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить гипотезу об однородности дисперсий нормально распределенных совокупностей, надо вычислить наблюдаемое значение критерия и по таблице найти критическую точку.

Если $G_{\text{набл}} < G_{\text{кр}}$—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $G_{\text{набл}} > G_{\text{кр}}$—нулевую гипотезу отвергают.

Замечание. Если требуется оценить генеральную дисперсию, то при условии однородности дисперсий целесообразно принять в качестве ее оценки среднюю арифметическую исправленных выборочных дисперсий.

Пример. По четырем независимым выборкам одинакового объема $n=17$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные дисперсии: 0,26; 0,36; 0,40; 0,42. Требуется: а) при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу об однородности генеральных дисперсий (критическая область — правосторонняя); б) оценить генеральную дисперсию.

Решение. а) Найдем наблюдаемое значение критерия Кочрена — отношение максимальной исправленной дисперсии к сумме всех дисперсий:

$$G_{\text{набл}} = 0{,}42/(0{,}26+0{,}36+0{,}40+0{,}42) = 0{,}2917.$$

Найдем по таблице приложения 8, по уровню значимости 0,05, числу степеней свободы $k=17-1=16$ и числу выборок $l=4$ критическую точку $G_{\text{кр}}(0{,}05;\ 16;\ 4)=0{,}4366$.

Так как $G_{\text{набл}} < G_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу об однородности дисперсий. Другими словами, исправленные выборочные дисперсии различаются незначимо.

б) Поскольку нулевая гипотеза справедлива, в качестве оценки генеральной дисперсии примем среднюю арифметическую исправленных дисперсий:

$$\sigma^2 = (0{,}26+0{,}36+0{,}40+0{,}42)/4 = 0{,}36.$$

§ 22. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции

Пусть двумерная генеральная совокупность (X, Y) распределена нормально. Из этой совокупности извлечена выборка объема n и по ней найден выборочный коэффициент корреляции $r_{\text{в}}$, который оказался отличным от нуля. Так как выборка отобрана случайно, то еще нельзя заключить, что коэффициент корреляции генеральной совокупности $r_{\text{г}}$ также отличен от нуля. В конечном счете нас интересует именно этот коэффициент, поэтому возникает необходимость при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0: r_{\text{г}}=0$ о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $H_1: r_{\text{г}}=0$.

Если нулевая гипотеза отвергается, то это означает, что выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля (кратко говоря, значим), а X и Y коррелированы, т. е. связаны линейной зависимостью.

Если нулевая гипотеза будет принята, то выборочный коэффициент корреляции незначим, а X и Y некоррелированы, т. е. не связаны линейной зависимостью.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$T = r_в \sqrt{n-2} / \sqrt{1-r_в^2}.$$

Величина T при справедливости нулевой гипотезы имеет распределение Стьюдента с $k=n-2$ степенями свободы.

Поскольку конкурирующая гипотеза имеет вид $r_г \neq 0$, критическая область — двусторонняя; она строится так же, как в § 12 (первый случай).

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $T_{набл}$ и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.

Правило. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0: r_г = 0$ о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции нормальной двумерной случайной величины при конкурирующей гипотезе $H_1: r_г \neq 0$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия:

$$T_{набл} = r_в \sqrt{n-2} / \sqrt{1-r_в^2}$$

и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости и числу степеней свободы $k=n-2$ найти критическую точку $t_{кр}(\alpha; k)$ для двусторонней критической области.

Если $|T_{набл}| < t_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $|T_{набл}| > t_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Пример. По выборке объема $n=122$, извлеченной из нормальной двумерной совокупности, найден выборочный коэффициент корреляции $r_в=0{,}4$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $H_1: r_г \neq 0$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$T_{набл} = r_в \sqrt{n-2} / \sqrt{1-r_в^2} = 0{,}4 \sqrt{122-2} / \sqrt{1-0{,}4^2} = 4{,}78.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $r_г \neq 0$, поэтому критическая область — двусторонняя.

По уровню значимости 0,05 и числу степеней свободы $k = 122-2 = 120$ находим по таблице приложения 6 для двусторонней критической области критическую точку $t_{кр}(0{,}05;\ 120) = 1{,}98$.

Поскольку $T_{набл} > t_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, т. е. X и Y коррелированы.

§ 23. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Критерий согласия Пирсона

В предыдущих параграфах закон распределения генеральной совокупности предполагается известным.

Если закон распределения неизвестен, но есть основания предположить, что он имеет определенный вид (назовем его *A*), то проверяют нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена по закону *A*.

Проверка гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения производится так же, как и проверка гипотезы о параметрах распределения, т. е. при помощи специально подобранной случайной величины — критерия согласия.

Критерием согласия называют критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

Имеется несколько критериев согласия: χ^2 («хи квадрат») К. Пирсона, Колмогорова, Смирнова и др. Ограничимся описанием применения критерия Пирсона к проверке гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности (критерий аналогично применяется и для других распределений, в этом состоит его достоинство). С этой целью будем сравнивать эмпирические (наблюдаемые) и теоретические (вычисленные в предположении нормального распределения) частоты.

Обычно эмпирические и теоретические частоты различаются. Например (см. гл. XVII, § 7):

эмп. частоты	6	13	38	74	106	85	30	10	4
теорет. частоты. . .	3	14	42	82	99	76	37	11	2

Случайно ли расхождение частот? Возможно, что расхождение случайно (незначимо) и объясняется либо малым числом наблюдений, либо способом их группировки, либо другими причинами. Возможно, что расхождение частот неслучайно (значимо) и объясняется тем, что теоретические частоты вычислены исходя из неверной гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности.

Критерий Пирсона отвечает на поставленный выше вопрос. Правда, как и любой критерий, он не доказывает справедливость гипотезы, а лишь устанавливает на принятом уровне значимости ее согласие или несогласие с данными наблюдений.

Итак, пусть по выборке объема n получено эмпирическое распределение:

$$\begin{array}{llllll} \text{варианты} \ldots\ldots & x_i & x_1 & x_2 & \ldots & x_s \\ \text{эмп. частоты} \ldots & n_i & n_1 & n_2 & \ldots & n_s \end{array}$$

Допустим, что в предположении нормального распределения генеральной совокупности вычислены теоретические частоты n'_i (например, так, как в следующем параграфе). При уровне значимости α требуется проверить нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена нормально.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$\chi^2 = \sum (n_i - n'_i)^2/n'_i. \qquad (*)$$

Эта величина случайная, так как в различных опытах она принимает различные, заранее не известные значения. Ясно, что чем меньше различаются эмпирические и теоретические частоты, тем меньше величина критерия (*), и, следовательно, он в известной степени характеризует близость эмпирического и теоретического распределений.

Заметим, что возведением в квадрат разностей частот устраняют возможность взаимного погашения положительных и отрицательных разностей. Делением на n'_i достигают уменьшения каждого из слагаемых; в противном случае сумма была бы настолько велика, что приводила бы к отклонению нулевой гипотезы даже и тогда, когда она справедлива. Разумеется, приведенные соображения не являются обоснованием выбранного критерия, а лишь пояснением.

Доказано, что при $n \to \infty$ закон распределения случайной величины (*) независимо от того, какому закону распределения подчинена генеральная совокупность, стремится к закону распределения χ^2 с k степенями свободы. Поэтому случайная величина (*) обозначена через χ^2, а сам критерий называют критерием согласия «хи квадрат».

Число степеней свободы находят по равенству $k = s - 1 - r$, где s — число групп (частичных интервалов) выборки; r — число параметров предполагаемого распределения, которые оценены по данным выборки.

В частности, если предполагаемое распределение — нормальное, то оценивают два параметра (математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение), поэтому $r=2$ и число степеней свободы $k=s-1-r=s-1-2=$ $=s-3$.

Если, например, предполагают, что генеральная совокупность распределена по закону Пуассона, то оценивают один параметр λ, поэтому $r=1$ и $k=s-2$.

Поскольку односторонний критерий более «жестко» отвергает нулевую гипотезу, чем двусторонний, построим правостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости α:

$$P[\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha;\ k)] = \alpha.$$

Таким образом, правосторонняя критическая область определяется неравенством $\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha;\ k)$, а область принятия нулевой гипотезы — неравенством $\chi^2 < \chi^2_{\text{кр}}(\alpha;\ k)$.

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $\chi^2_{\text{набл}}$ и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.

Правило. Для того чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу H_0: генеральная совокупность распределена нормально, надо сначала вычислить теоретические частоты, а затем наблюдаемое значение критерия:

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum (n_i - n_i')^2/n_i' \qquad (**)$$

и по таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k=s-3$ найти критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha;\ k)$.

Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Замечание 1. Объем выборки должен быть достаточно велик, во всяком случае не менее 50. Каждая группа должна содержать не менее 5—8 вариант; малочисленные группы следует объединять в одну, суммируя частоты.

Замечание 2. Поскольку возможны ошибки первого и второго рода, в особенности если согласование теоретических и эмпирических частот «слишком хорошее», следует проявлять осторожность. Например, можно повторить опыт, увеличить число наблюдений, воспользоваться другими критериями, построить график распределения, вычислить асимметрию и эксцесс (см. гл. XVII, § 8).

Замечание 3. Для контроля вычислений формулу (**) преобразуют к виду

$$\chi^2_{\text{набл}} = \left[\sum n_i^2/n_i'\right] - n.$$

Рекомендуем читателю выполнить это преобразование самостоятельно, для чего надо в (**) возвести в квадрат разность частот, сократить результат на n_i' и учесть, что $\sum n_i = n$, $\sum n_i' = n$.

Пример. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

эмп. частоты	6	13	38	74	106	85	30	14
теорет. частоты	3	14	42	82	99	76	37	13

Решение. Вычислим $\chi^2_{набл}$, для чего составим расчетную табл. 26.

Контроль: $\chi^2_{набл} = 7{,}19$:

$$\left[\sum n_i^2/n_i'\right] - n = 373{,}19 - 366 = 7{,}19.$$

Вычисления произведены правильно.

Найдем число степеней свободы, учитывая, что число групп выборки (число различных вариант) $s=8$; $k = 8-3 = 5$.

Таблица 26

1	2	3	4	5	6	7	8
i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$(n_i - n_i')^2/n_i'$	n_i^2	n_i^2/n_i'
1	6	3	3	9	3	36	12
2	13	14	—1	1	0,07	169	12,07
3	38	42	—4	16	0,38	1444	34,38
4	74	82	—8	64	0,78	5476	66,78
5	106	99	7	49	0,49	11236	113,49
6	85	76	9	81	1,07	7225	95,07
7	30	37	—7	49	1,32	900	24,32
8	14	13	1	1	0,08	196	15,08
Σ	366	366			$\chi^2_{набл} = 7{,}19$		373,19

По таблице критических точек распределения χ^2 (см. приложение 5), по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k=5$ находим $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 5) = 11{,}1$.

Так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое. Следовательно, данные наблюдений согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

§ 24. Методика вычисления теоретических частот нормального распределения

Как следует из предыдущего параграфа, сущность критерия согласия Пирсона состоит в сравнении эмпирических и теоретических частот. Ясно, что эмпирические частоты находят из опыта. Как найти теоретические частоты, если предполагается, что генеральная совокупность распределена нормально? Ниже приведен один из способов решения этой задачи.

1. Весь интервал наблюдаемых значений X (выборки объема n) делят на s частичных интервалов (x_i, x_{i+1}) одинаковой длины. Находят середины частичных интервалов $x_i^* = (x_i + x_{i+1})/2$; в качестве частоты n_i варианты x_i^* принимают число вариант, которые попали в i-й интервал. В итоге получают последовательность равноотстоящих вариант и соответствующих им частот:

$$\begin{array}{cccc} x_1^* & x_2^* & \dots & x_s^* \\ n_1 & n_2 & \dots & n_s \end{array}$$

При этом $\sum n_i = n$.

2. Вычисляют, например методом произведений, выборочную среднюю $\overline{x^*}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение σ^*.

3. Нормируют случайную величину X, т. е. переходят к величине $Z = (X - \overline{x^*})/\sigma^*$ и вычисляют концы интервалов (z_i, z_{i+1}):

$$z_i = (x_i - \overline{x^*})/\sigma^*, \quad z_{i+1} = (x_{i+1} - \overline{x^*})/\sigma^*,$$

причем наименьшее значение Z, т. е. z_1, полагают равным $-\infty$, а наибольшее, т. е. z_s, полагают равным ∞.

4. Вычисляют теоретические вероятности p_i попадания X в интервалы (x_i, x_{i+1}) по равенству ($\Phi(z)$ — функция Лапласа)

$$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$$

и, наконец, находят искомые теоретические частоты $n_i' = np_i$.

Пример. Найти теоретические частоты по заданному интервальному распределению выборки объема $n = 200$, предполагая, что генеральная совокупность распределена нормально (табл. 27).

Р е ш е н и е. 1. Найдем середины интервалов $x_i^* = (x_i + x_{i+1})/2$. Например, $x_1^* = (4+6)/2 = 5$. Поступая аналогично, получим последовательность равноотстоящих вариант x_i^* и соответствующих им частот n_i:

x_i^*	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

2. Пользуясь методом произведений, найдем выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\overline{x^*} = 12{,}63, \quad \sigma^* = 4{,}695.$$

3. Найдем интервалы (z_i, z_{i+1}), учитывая, что $\overline{x^*} = 12{,}63$, $\sigma^* = 4{,}695$, $1/\sigma^* = 0{,}213$, для чего составим расчетную табл. 28.

Таблица 27

Номер интервала	Границы интервала		Частота	Номер интервала	Границы интервала		Частота
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	4	6	15	6	14	16	21
2	6	8	26	7	16	18	24
3	8	10	25	8	18	20	20
4	10	12	30	9	20	22	13
5	12	14	26				
							$n = 200$

4. Найдем теоретические вероятности p_i и искомые теоретические частоты $n_i' = np_i$, для чего составим расчетную табл. 29.

Таблица 28

i	Границы интервала		$x_i - \overline{x}^*$	$x_{i+1} - \overline{x}^*$	Границы интервала	
	x_i	x_{i+1}			$z_i = (x_i - \overline{x}^*)/\sigma^*$	$z_{i+1} = (x_{i+1} - \overline{x}^*)/\sigma^*$
1	4	6	—	—6,63	$-\infty$	—1,41
2	6	8	—6,63	—4,63	—1,41	—0,99
3	8	10	—4,63	—2,63	—0,99	—0,56
4	10	12	—2,63	—0,63	—0,156	—0,13
5	12	14	—0,63	1,37	—0,13	0,29
6	14	16	1,37	3,37	0,29	0,72
7	16	18	3,37	5,37	0,72	1,14
8	18	20	5,37	7,37	1,14	1,57
9	20	22	7,37	—	1,57	∞

Таблица 29

i	Границы интервала		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$p_i=\Phi(z_{i+1})-\Phi(z_i)$	$n_i'=np_i=200\ p_i$
	z_i	z_{i+1}				
1	$-\infty$	$-1,41$	$-0,5$	$-0,4207$	0,0793	15,86
2	$-1,41$	$-0,99$	$-0,4207$	$-0,3389$	0,0818	16,36
3	$-0,99$	$-0,56$	$-0,3389$	$-0,2123$	0,1266	25,32
4	$-0,56$	$-0,13$	$-0,2123$	$-0,0517$	0,1606	32,12
5	$-0,13$	0,29	$-0,0517$	0,1141	0,1658	33,16
6	0,29	0,72	0,1141	0,2642	0,1501	30,02
7	0,72	1,14	0,2642	0,3729	0,1087	21,74
8	1,14	1,57	0,3729	0,4418	0,0689	13,78
9	1,57	∞	0,4418	0,5	0,0582	11,64
					$\sum p_i=1$	$\sum n_i'=200$

Искомые теоретические частоты помещены в последнем столбце табл. 29.

§ 25. Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена и проверка гипотезы о его значимости

Допустим, что объекты генеральной совокупности обладают двумя качественными признаками. Под *качественным* подразумевается признак, который невозможно измерить точно, но он позволяет сравнивать объекты между собой и, следовательно, расположить их в порядке убывания или возрастания качества. Для определенности будем всегда располагать объекты в порядке ухудшения качества. При таком «ранжировании» на первом месте находится объект наилучшего качества по сравнению с остальными; на втором месте окажется объект «хуже» первого, но «лучше» других, и т. д.

Пусть выборка объема n содержит независимые объекты, которые обладают двумя качественными признаками A и B. Для оценки степени связи признаков вводят, в частности, коэффициенты ранговой корреляции Спирмена (изложен в настоящем параграфе) и Кендалла (см. § 26).

Для практических целей использование ранговой корреляции весьма полезно. Например, если установлена высокая ранговая корреляция между двумя качественными признаками изделий, то достаточно контролировать изделия только по одному из признаков, что удешевляет и ускоряет контроль.

Расположим сначала объекты выборки в порядке ухудшения качества по признаку A при допущении, что **все объекты имеют различное качество по обоим признакам** (случай, когда это допущение не выполняется, рассмотрим ниже). Припишем объекту, стоящему на i-м месте, число—ранг x_i, равный порядковому номеру объекта. Например, ранг объекта, занимающего первое место, $x_1 = 1$; объект, расположенный на втором месте, имеет ранг $x_2 = 2$, и т. д. В итоге получим последовательность рангов по признаку A: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ..., $x_n = n$.

Расположим теперь объекты в порядке убывания качества по признаку B и припишем каждому из них ранг y_i, однако (для удобства сравнения рангов) **индекс i при y будет по-прежнему равен порядковому номеру объекта по признаку** A. Например, запись $y_2 = 5$ означает, что по признаку A объект стоит на втором месте, а по признаку B—на пятом.

В итоге получим две последовательности рангов:

$$\text{по признаку } A \ \dots \ x_1, x_2, \dots, x_n$$
$$\text{по признаку } B \ \dots \ y_1, y_2, \dots, y_n$$

Заметим, что в первой строке индекс i совпадает с порядковым номером объекта, а во второй, вообще говоря, не совпадает. Итак, в общем случае $x_i \neq y_i$.

Рассмотрим два «крайних случая».

1. Пусть ранги по признакам A и B совпадают при всех значениях индекса $i: x_i = y_i$. В этом случае ухудшение качества по одному признаку влечет ухудшение качества по другому. Очевидно, признаки связаны: имеет место «полная прямая зависимость».

2. Пусть ранги по признакам A и B противоположны в том смысле, что если $x_1 = 1$, то $y_1 = n$; если $x_2 = 2$, то $y_2 = n - 1$; ..., если $x_n = n$, то $y_n = 1$. В этом случае ухудшение качества по одному признаку влечет улучшение по другому. Очевидно, признаки связаны—имеет место «противоположная зависимость».

На практике чаще будет встречаться промежуточный случай, когда ухудшение качества по одному признаку влечет для некоторых объектов ухудшение, а для других—улучшение качества. Задача состоит в том, чтобы оценить связь между признаками. Для ее решения рассмотрим ранги $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как возможные значения случайной величины X, а $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — как возможные значения случайной величины Y. Таким образом, о связи между качественными признаками A и B можно судить по связи между случайными величинами X и Y, для оценки которой используем коэффициент корреляции.

Вычислим выборочный коэффициент корреляции случайных величин X и Y в условных вариантах (см. гл. XVIII, § 8):

$$r_{\text{в}} = \frac{\sum n_{uv}uv - n\bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v},$$

приняв в качестве условных вариант отклонения $u_i = x_i - \bar{x}$, $v_i = y_i - \bar{y}$. Каждому рангу x_i соответствует только один ранг y_i, поэтому частота любой пары рангов с одинаковыми индексами, а следовательно, и любой пары условных вариант с одинаковыми индексами равна единице: $n_{u_iv_i} = 1$. Очевидно, что частота любой пары вариант с разными индексами равна нулю. Учитывая, кроме того, что среднее значение отклонения равно нулю (см. гл. XVI, § 7, следствие), т. е. $\bar{u} = \bar{v} = 0$, получим более простую формулу вычисления выборочного коэффициента корреляции:

$$r_{\text{в}} = \frac{\sum u_iv_i}{n\sigma_u\sigma_v}. \qquad (*)$$

Таким образом, надо найти $\sum u_iv_i$, σ_u и σ_v.

Выразим $\sum u_iv_i$ через известные числа — объем выборки n и разности рангов $d_i = x_i - y_i$. Заметим, что поскольку средние значения рангов $\bar{x} = (1 + 2 + \ldots + n)/n$ и $\bar{y} = (1 + 2 + \ldots + n)/n$ равны между собой, то $\bar{y} - \bar{x} = 0$. Используем последнее равенство:

$$d_i = x_i - y_i = x_i - y_i + (\bar{y} - \bar{x}) = (x_i - \bar{x}) - (y_i - \bar{y}) = u_i - v_i.$$

Следовательно,

$$d_i^2 = (u_i - v_i)^2.$$

Учитывая, что (см. далее пояснение)

$$\sum u_i^2 = \sum v_i^2 = (n^3 - n)/12, \qquad (**)$$

имеем

$$\sum d_i^2 = \sum (u_i - v_i)^2 = \sum u_i^2 - 2\sum u_i v_i + \sum v_i^2 = \\ = [(n^3 - n)/6] - 2\sum u_i v_i.$$

Отсюда

$$\sum u_i v_i = [(n^3 - n)/12] - \sum d_i^2/2. \qquad (***)$$

Остается найти σ_u и σ_v. По определению выборочной дисперсии, учитывая, что $\bar{u} = 0$, и используя (**), получим

$$D_u = \sum (u_i - \bar{u})^2/n = \sum u_i^2/n = (n^3 - n)/12n = (n^2 - 1)/12.$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_u = \sqrt{(n^2 - 1)/12}.$$

Аналогично найдем

$$\sigma_v = \sqrt{(n^2 - 1)/12}.$$

Следовательно,

$$n\sigma_u\sigma_v = (n^3 - n)/12.$$

Подставив правые части этого равенства и соотношения (***) в (*), окончательно получим *выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена*

$$\rho_в = 1 - [(6\sum d_i^2)/(n^3 - n)], \qquad (****)$$

где $d_i = x_i - y_i$.

Пояснение. Покажем, что $\sum u_i^2 = (n^3 - n)/12$. Действительно, учитывая, что

$$\sum x_i = 1 + 2 + \ldots + n = (1 + n)\, n/2,$$
$$\bar{x} = \sum x_i/n = (1 + n)/2,$$
$$\sum x_i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = [n\,(n+1)\,(2n+1)]/6,$$
$$\sum u_i^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - 2\bar{x}\sum x_i + n\,(\bar{x})^2,$$

после элементарных выкладок получим

$$\sum u_i^2 = (n^3 - n)/12.$$

Аналогично можно показать, что

$$\sum v_i^2 = (n^3 - n)/12.$$

Приведем свойства выборочного коэффициента корреляции Спирмена.

Свойство 1. *Если между качественными признаками A и B имеется «полная прямая зависимость» в том смысле, что ранги объектов совпадают при всех значениях i, то выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена равен единице.*

Действительно, подставив $d_i = x_i - y_i = 0$ в (****), получим

$$\rho_в = 1.$$

Свойство 2. *Если между качественными признаками A и B имеется «противоположная зависимость» в том смысле, что рангу $x_1 = 1$ соответствует ранг $y_1 = n$; рангу x_2 соответствует ранг $y_2 = n - 1$; ...; рангу $x_n = n$ соответствует ранг $y_n = 1$, то выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена равен минус единице.*

Действительно,

$$d_1 = 1 - n, \ d_2 = 3 - n, \ \ldots, \ d_n = (2n - 1) - n.$$

Следовательно,

$$\sum d_i^2 = (1-n)^2 + (3-n)^2 + \ldots + [(2n-1)-n]^2 =$$
$$= [1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2] - 2n[1 + 3 + \ldots + (2n-1)] +$$
$$+ n \cdot n^2 = [n(4n^2 - 1)/3] - 2n \cdot n^2 + n^3 = (n^3 - n)/3.$$

Подставив $\sum d_i^2 = (n^3 - n)/3$ в (****), окончательно получим

$$\rho_в = -1.$$

Свойство 3. *Если между качественными признаками A и B нет ни «полной прямой», ни «противоположной» зависимостей, то коэффициент $\rho_в$ заключен между -1 и $+1$, причем чем ближе к нулю его абсолютная величина, тем зависимость меньше.*

Пример 1. Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена по данным ранга объектов выборки объема $n = 10$:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	6	4	8	1	2	5	10	3	7	9

Решение. Найдем разности рангов $d_i = x_i - y_i$: $-5, -2, -5, 3, 3, 1, -3, 5, 2, 1$.

Вычислим сумму квадратов разностей рангов:

$$\sum d_i^2 = 25 + 4 + 25 + 9 + 9 + 1 + 9 + 25 + 4 + 1 = 112.$$

Найдем искомый коэффициент ранговой корреляции, учитывая, что $n=10$:

$$\rho_в = 1 - \left[6 \sum d_i^2/(n^3-n)\right] = 1 - [6\cdot 112/(1000-10)] = 0{,}32.$$

З а м е ч а н и е. Если выборка содержит объекты с о д и н а к о в ы м к а ч е с т в о м, то каждому из них приписывается ранг, равный среднему арифметическому порядковых номеров объектов. Например, если объекты одинакового качества по признаку A имеют порядковые номера 5 и 6, то их ранги соответственно равны: $x_5 = (5+6)/2 = 5{,}5$; $x_6 = 5{,}5$.

Приведем правило, позволяющее установить значимость или незначимость ранговой корреляции связи для выборок объема $n \geqslant 9$. Если $n < 9$, то пользуются таблицами (см., например, табл. 6.10а, 6.10б в книге: Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В. Таблицы математической статистики. М., «Наука», 1965).

Правило. Для того чтобы при уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции $\rho_г$ Спирмена при конкурирующей гипотезе $H_1: \rho_г \neq 0$, надо вычислить критическую точку:

$$T_{кр} = t_{кр}(\alpha;\ k)\sqrt{(1-\rho_в^2)/(n-2)},$$

где n — объем выборки, $\rho_в$ — выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена, $t_{кр}(\alpha; k)$ — критическая точка д в у с т о р о н н е й критической области, которую находят по таблице критических точек распределения Стьюдента, по уровню значимости α и числу степеней свободы $k=n-2$.

Если $|\rho_в| < T_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Ранговая корреляционная связь между качественными признаками незначима.

Если $|\rho_в| > T_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают. Между качественными признаками существует значимая ранговая корреляционная связь.

Пример 2. При уровне значимости 0,05 проверить, является ли ранговая корреляционная связь, вычисленная в примере 1, значимой?

Р е ш е н и е. Найдем критическую точку двусторонней критической области распределения Стьюдента по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = n-2 = 10-2 = 8$ (см. приложение 6): $t_{кр}(0{,}05;\ 8) = 2{,}31$.

Найдем критическую точку:

$$T_{кр} = t_{кр}(\alpha;\ k)\sqrt{(1-\rho_в^2)/(n-2)}.$$

Подставив $t_{кр} = 2{,}31$, $n=10$, $\rho_в = 0{,}24$, получим $T_{кр} = 0{,}79$.

Итак, $T_{кр} = 0{,}79$, $\rho_в = 0{,}24$.

Так как $\rho_в < T_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; ранговая корреляционная связь между признаками незначимая.

§ 26. Выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла и проверка гипотезы о его значимости

Можно оценивать связь между двумя качественными признаками, используя коэффициент ранговой корреляции Кендалла. Пусть ранги объектов выборки объема n (здесь сохранены все обозначения § 25):

$$\text{по признаку } A \quad x_1, x_2, \ldots, x_n$$
$$\text{по признаку } B \quad y_1, y_2, \ldots, y_n$$

Допустим, что правее y_1 имеется R_1 рангов, бóльших y_1; правее y_2 имеется R_2 рангов, бóльших y_2; ... ; правее y_{n-1} имеется R_{n-1} рангов, бóльших y_{n-1}. Введем обозначение суммы рангов R_i $(i=1, 2, \ldots, n-1)$:

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1}.$$

Выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла определяется формулой

$$\tau_в = [4R/n(n-1)] - 1, \qquad (*)$$

где n — объем выборки, $R = \sum_{i=1}^{n-1} R_i$.

Убедимся, что коэффициент Кендалла имеет те же свойства, что и коэффициент Спирмена.

1. В случае «полной прямой зависимости» признаков

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \ \ldots, \ x_n = n$$
$$y_1 = 1, \quad y_2 = 2, \ \ldots, \ y_n = n$$

Правее y_1 имеется $n-1$ рангов, бóльших y_1, поэтому $R_1 = n-1$. Очевидно, что $R_2 = n-2, \ldots, R_{n-1} = 1$. Следовательно,

$$R = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = n(n-1)/2. \qquad (**)$$

Подставив (**) в (*), получим

$$\tau_в = 1.$$

2. В случае «противоположной зависимости»

$$x_1 = 1, \ x_2 = 2, \ \ldots, \ x_n = n$$
$$y_1 = n, \ y_2 = n-1, \ \ldots, \ y_n = 1$$

Правее y_1 нет рангов, бóльших y_1; поэтому $R_1=0$. Очевидно, что $R_2=R_3=\ldots=R_{n-1}=0$. Следовательно,

$$R=0. \qquad (***)$$

Подставив (***) в (*), получим

$$\tau_в=-1.$$

Замечание. При достаточно большом объеме выборки и при значениях коэффициентов ранговой корреляции, не близких к единице, имеет место приближенное равенство

$$\rho_в=(3/2)\,\tau_в.$$

Пример 1. Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла по данным рангам объектов выборки объема $n=10$:

по признаку	$A \ldots x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
по признаку	$B \ldots y_i$	6	4	8	1	2	5	10	3	7	9

Решение. Правее $y_1=6$ имеется 4 ранга (8, 10, 7, 9), бóльших y_1, поэтому $R_1=4$. Аналогично найдем. $R_2=5$, $R_3=2$, $R_4=6$, $R_5=5$, $R_6=3$, $R_7=0$, $R_8=2$, $R_9=1$. Следовательно, сумма рангов $R=28$.

Найдем искомый коэффициент ранговой корреляции Кендалла, учитывая, что $n=10$:

$$\tau_в=[4R/n\,(n-1)]-1=[4\cdot 28/10\cdot 9]-1=0{,}24.$$

Приведем правило, позволяющее установить значимость или незначимость ранговой корреляционной связи Кендалла.

Правило. Для того чтобы при уровне значимости α, проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции $\tau_г$ Кендалла при конкурирующей гипотезе $H_1: \tau_г \neq 0$, надо вычислить критическую точку:

$$T_{кр}=z_{кр}\sqrt{\frac{2\,(2n+5)}{9n\,(n-1)}},$$

где n — объем выборки; $z_{кр}$ — критическая точка двусторонней критической области, которую находят по таблице функции Лапласа по равенству $\Phi(z_{кр})=(1-\alpha)/2$.

Если $|\tau_в|<T_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Ранговая корреляционная связь между качественными признаками незначимая.

Если $|\tau_в|>T_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают. Между качественными признаками существует значимая ранговая корреляционная связь.

Пример 2. При уровне значимости 0,05 проверить, является ли ранговая корреляционная связь $\tau_в=0{,}24$, вычисленная в примере 1, значимой?

Решение. Найдем критическую точку $z_{кр}$:

$$\Phi(z_{кр}) = (1-\alpha)/2 = (1-0{,}05)/2 = 0{,}475.$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $z_{кр} = 1{,}96$

Найдем критическую точку:

$$T_{кр} = z_{кр} \sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}}.$$

Подставив $z_{кр} = 1{,}96$ и $n = 10$, получим $T_{кр} = 0{,}487$. В примере 1 $\tau_в = 0{,}24$.

Так как $\tau_в < T_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; ранговая корреляционная связь между признаками незначимая.

§ 27. Критерий Вилкоксона и проверка гипотезы об однородности двух выборок

Критерий Вилкоксона *) служит для проверки однородности двух независимых выборок: $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$. Достоинство этого критерия состоит в том, что он применим к случайным величинам, распределения которых неизвестны; требуется лишь, чтобы величины были непрерывными.

Если выборки однородны, то считают, что они извлечены из одной и той же генеральной совокупности и, следовательно, имеют одинаковые, причем неизвестные, непрерывные функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$.

Таким образом, нулевая гипотеза состоит в том, что при всех значениях аргумента (обозначим его через x) функции распределения равны между собой: $F_1(x) = F_2(x)$.

Конкурирующими являются следующие гипотезы: $F_1(x) \neq F_2(x)$, $F_1(x) < F_2(x)$ и $F_1(x) > F_2(x)$.

Заметим, что принятие конкурирующей гипотезы H_1: $F_1(x) < F_2(x)$ означает, что $X > Y$. Действительно, неравенство $F_1(x) < F_2(x)$ равносильно неравенству $P(X < x) < P(Y < x)$. Отсюда легко получить, что $P(X > x) > P(Y > x)$. Другими словами, вероятность того, что случайная величина X превзойдет фиксированное действительное число x, больше, чем вероятность случайной величине Y оказаться большей, чем x; в этом смысле $X > Y$.

Аналогично, если справедлива конкурирующая гипотеза $H_1: F_1(x) > F_2(y)$, то $X < Y$.

---

*) В 1945 г. Вилкоксон опубликовал критерий сравнения двух выборок одинакового объема. в 1947 г. Манн и Уитни обобщили критерий на выборки различного объема.

Далее предполагается, что объем первой выборки меньше (не больше) объема второй: $n_1 \leqslant n_2$; если это не так, то выборки можно перенумеровать (поменять местами).

А. Проверка нулевой гипотезы в случае, если объем обеих выборок не превосходит 25. Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости $\alpha = 2Q$ проверить нулевую гипотезу $H_0: F_1(x) = F_2(x)$ об однородности двух независимых выборок объемов n_1 и n_2 ($n_1 \leqslant n_2$) при конкурирующей гипотезе $H_1: F_1(x) \neq F_2(x)$, надо:

1) расположить варианты обеих выборок в возрастающем порядке, т. е. в виде одного вариационного ряда, и найти в этом ряду наблюдаемое значение критерия $W_{набл}$ — сумму порядковых номеров вариант первой выборки;

2) найти по таблице приложения 10 нижнюю критическую точку $w_{нижн.\,кр}(Q;\ n_1,\ n_2)$, где $Q = \alpha/2$;

3) найти верхнюю критическую точку по формуле

$$w_{верхн.\,кр} = (n_1 + n_2 + 1)\,n_1 - w_{нижн.\,кр}.$$

Если $W_{набл} < w_{нижн.\,кр}$ или $W_{набл} > w_{верхн.\,кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Если $w_{нижн.\,кр} < W_{набл} < w_{верхн.\,кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Пример 1. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу об однородности двух выборок объемов $n_1 = 6$ и $n_2 = 8$:

x_i	15	23	25	26	28	29		
y_i	12	14	18	20	22	24	27	30

при конкурирующей гипотезе $H_1: F_1(x) \neq F_2(x)$.

Решение. Расположим варианты обеих выборок в виде одного вариационного ряда и перенумеруем их:

порядковые номера . . .	1	2	*3*	4	5	6	*7*	8	*9*	*10*	11	*12*	*13*	14
варианты . . .	12	14	15	18	20	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Найдем наблюдаемое значение критерия Вилкоксона — сумму порядковых номеров (они набраны курсивом) вариант первой выборки:

$$W_{набл} = 3 + 7 + 9 + 10 + 12 + 13 = 54.$$

Найдем по таблице приложения 10 нижнюю критическую точку, учитывая, что $Q = \alpha/2 = 0{,}05/2 = 0{,}025$, $n_1 = 6$, $n_2 = 8$:

$$w_{нижн.\,кр}(0{,}025;\ 6,\ 8) = 29.$$

Найдем верхнюю критическую точку:

$$w_{верхн.\,кр} = (n_1 + n_2 + 1)n_1 - w_{нижн.\,кр} = (6 + 8 + 1)\cdot 6 - 29 = 61.$$

Так как $29 < 54 < 61$, т. е. $w_{нижн.\,кр} < W_{набл} < w_{верхн.\,кр}$, — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу об однородности выборок.

Правило 2. При конкурирующей гипотезе $F_1(x) > F_2(x)$ надо найти по таблице нижнюю критическую точку $w_{\text{нижн. кр}}(Q;\ n_1;\ n_2)$, где $Q=\alpha$.

Если $W_{\text{набл}} > w_{\text{нижн. кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $W_{\text{набл}} < w_{\text{нижн. кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 3. При конкурирующей гипотезе $H_1: F_1(x) < F_2(x)$ надо найти верхнюю критическую точку: $w_{\text{верхн. кр}}(Q;\ n_1,\ n_2) = (n_1+n_2+1)\,n_1 - w_{\text{нижн. кр}}(Q;\ n_1,\ n_2)$, где $Q=\alpha$.

Если $W_{\text{набл}} < w_{\text{верхн. кр}}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $W_{\text{набл}} > w_{\text{верхн. кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают.

Замечание. Если несколько вариант только одной выборки одинаковы, то в общем вариационном ряду им приписывают обычные порядковые номера (совпавшие варианты нумеруют так, как если бы они были различными числами); если же совпадают варианты разных выборок, то всем им присваивают один и тот же порядковый номер, равный среднему арифметическому порядковых номеров, которые имели бы эти варианты до совпадения.

Б. Проверка нулевой гипотезы в случае, если объем хотя бы одной из выборок превосходит 25. 1. При конкурирующей гипотезе $F_1(x) \ne F_2(x)$ нижняя критическая точка

$$w_{\text{нижн. кр}}(Q;\ n_1,\ n_2) = \left[\frac{(n_1+n_2+1)\,n_1-1}{2} - z_{\text{кр}}\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}\right], \qquad (*)$$

где $Q=\alpha/2$; $z_{\text{кр}}$ находят по таблице функции Лапласа по равенству $\Phi(z_{\text{кр}}) = (1-\alpha)/2$; знак $[a]$ означает целую часть числа a.

В остальном правило 1, приведенное в п. А, сохраняется.

2. При конкурирующих гипотезах $F_1(x) > F_2(x)$ и $F_1(x) < F_2(x)$ нижнюю критическую точку находят по формуле (*), положив $Q=\alpha$; соответственно $z_{\text{кр}}$ находят по таблице функции Лапласа по равенству $\Phi(z_{\text{кр}}) = (1-2\alpha)/2$. В остальном правила 2—3, приведенные в п. А, сохраняются.

Пример 2. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу об однородности двух выборок объемов $n_1=30$ и $n_2=50$ при конкурирующей гипотезе $H_1: F_1(x) \ne F_2(x)$, если известно, что в общем вариационном ряду, составленном из вариант обеих выборок, сумма порядковых номеров вариант первой выборки $W_{\text{набл}}=1600$.

Решение. По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $F_1(x) \neq F_2(x)$, поэтому критическая область — двусторонняя.

Найдем $z_{кр}$ по равенству

$$\Phi(z_{кр}) = (1-\alpha)/2 = (1-0{,}01)/2 = 0{,}495.$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $z_{кр} = 2{,}58$.

Подставив $n_1 = 30$, $n_2 = 50$, $z_{кр} = 2{,}58$ в формулу (*), получим $w_{нижн.\,кр} = 954$.

Найдем верхнюю критическую точку:

$$w_{верхн.\,кр} = (n_1 + n_2 + 1)\,n_1 - w_{нижн.\,кр} = 2430 - 954 = 1476.$$

Так как $1600 > 1476$, т. е. $W_{набл} > w_{верх.\,кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

Задачи

1. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны n_1 и n_2, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии s_X^2 и s_Y^2. При уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе H_1: $D(X) > D(Y)$, если:

а) $n_1 = 10$, $n_2 = 16$, $s_X^2 = 3{,}6$, $s_Y^2 = 2{,}4$, $\alpha = 0{,}05$;

б) $n_1 = 13$, $n_2 = 18$, $s_X^2 = 0{,}72$, $s_Y^2 = 0{,}20$, $\alpha = 0{,}01$.

Отв. а) $F_{набл} = 1{,}5$; $F_{кр}(0{,}05;\ 9;\ 15) = 2{,}59$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; б) $F_{набл} = 3{,}6$; $F_{кр}(0{,}01;\ 12;\ 17) = 3{,}45$. Нулевая гипотеза отвергается.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны n и m, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние $\overline{x}$ и $\overline{y}$. Генеральные дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$ известны. При уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X) = M(Y)$ о равенстве математических ожиданий при конкурирующей гипотезе $H_1: M(X) \neq M(Y)$, если:

а) $n = 30$, $m = 20$, $D(X) = 120$, $D(Y) = 100$, $\alpha = 0{,}05$;

б) $n = 50$, $m = 40$, $D(X) = 50$, $D(Y) = 120$, $\alpha = 0{,}01$.

Отв. а) $Z_{набл} = 1$, $z_{кр} = 1{,}96$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; б) $Z_{набл} = 10$, $z_{кр} = 2{,}58$. Нулевая гипотеза отвергается.

3. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны $n = 5$ и $m = 6$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние $\overline{x} = 15{,}9$, $\overline{y} = 14{,}1$ и исправленные выборочные дисперсии $s_X^2 = 14{,}76$, $s_Y^2 = 4{,}92$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0: M(X) = M(Y)$ о равенстве математических ожиданий при конкурирующей гипотезе $H_1: M(X) \neq M(Y)$.

Указание. Предварительно сравнить дисперсии.

Отв. $T_{набл} = 0{,}88$, $t_{кр}(0{,}05;\ 9) = 2{,}26$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

4. Из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 2{,}1$ извлечена выборка объема

$n=49$ и по ней найдена выборочная средняя $\overline{x}=4{,}5$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $a=3$ о равенстве математического ожидания гипотетическому значению при конкурирующей гипотезе H_1: $a \neq 3$.

Отв. $U_{\text{набл}}=5$, $u_{\text{кр}}=1{,}96$. Нулевая гипотеза отвергается.

5. По выборке объема $n=16$, извлеченной из нормальной генеральной совокупности, найдены выборочная средняя $\overline{x}=12{,}4$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s=1{,}2$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $a=11{,}8$ о равенстве математического ожидания гипотетическому значению при конкурирующей гипотезе $H_1: a \neq 11{,}8$.

Отв. $T_{\text{набл}}=2$, $t_{\text{кр}}(0{,}05;\ 15)=2{,}13$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

6. Двумя приборами измерены 5 деталей. Получены следующие результаты (мм):

$$x_1=4, \quad x_2=5, \quad x_3=6, \quad x_3=7, \quad x_5=8$$
$$y_1=5, \quad y_2=5, \quad y_3=9, \quad y_4=4, \quad y_5=6$$

При уровне значимости 0,05 проверить, значимо или незначимо различаются результаты измерений.

Отв. $T_{\text{набл}}=10{,}54$, $t_{\text{кр}}(0{,}05;\ 4)=2{,}78$. Различие результатов измерений значимое.

7. По 100 независимым испытаниям найдена относительная частота $m/n=0{,}15$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0: p=0{,}17$ о равенстве относительной частоты гипотетической вероятности при конкурирующей гипотезе $H_1: p \neq 0{,}17$.

Отв. $|U_{\text{набл}}|=0{,}53$, $u_{\text{кр}}=1{,}96$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

8. Из партии картона фабрики № 1 случайно отобрано 150 листов, среди которых оказалось 12 нестандартных; из 100 листов картона фабрики № 2 обнаружено 15 нестандартных. Можно ли считать на пятипроцентном уровне значимости, что относительные частоты получения нестандартного картона обеими фабриками различаются значимо?

Указание. Принять в качестве конкурирующей гипотезы $H_1: p_1 \neq p_2$.

Отв. $U_{\text{набл}}=-1{,}75$; $u_{\text{кр}}=1{,}96$. Различие относительных частот незначимое.

9. По пяти независимым выборкам, объемы которых соответственно равны $n_1=7$, $n_2=9$, $n_3=10$, $n_4=12$, $n_5=12$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии: 0,27; 0,32; 0,40; 0,42; 0,48. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий (критическая область — правосторонняя).

Указание. Использовать критерий Бартлетта (см. § 20).

Отв. $V=6{,}63$, $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\ 4)=9{,}5$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

10. По четырем независимым выборкам одинакового объема $n=17$, извлеченным из нормальных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии: 2,12; 2,32; 3,24; 4,32. Требуется: а) при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий (критическая область — правосторонняя); б) оценить генеральную дисперсию.

Указание. Использовать критерий Кочрена (см. § 21).

Отв. а) $G_{набл}=0,36$; $G_{кр}(0,05;\ 16;\ 4)=0,4366$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; б) $\sigma=3$.

11. По выборке объема $n=62$, извлеченной из двумерной нормальной совокупности (X, Y), найден выборочный коэффициент корреляции $r_в=0,6$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0: r_г=0$ о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $r_г \neq 0$.

Отв. $T_{набл}=5,81$, $t_{кр}(0,05;\ 60)=2,0$. Нулевая гипотеза отвергается.

12. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические (приведены в первой строке) и теоретические частоты (приведены во второй строке):

а)	6	12	16	40	13	8	5			
	4	11	15	43	15	6	6			
б)	5	6	14	32	43	39	30	20	6	5
	4	7	12	29	48	35	34	18	7	6
в)	5	13	12	44	8	12	6			
	2	20	12	35	15	10	6			

Отв. $\chi^2_{набл}=2,5$, $\chi^2_{кр}(0,05;\ 4)=9,5$. Нет оснований отвергнуть гипотезу; б) $\chi^2_{набл}=3$, $\chi^2_{кр}(0,05;\ 7)=1461$. Нет оснований отвергнуть гипотезу; в) $\chi^2_{набл}=13$, $\chi^2_{кр}(0,05;\ 4)=9,5$. Гипотеза отвергается.

13. а) Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена по данным рангам объектов выборки объема $n=10$:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	4	3	5	8	6	1	7	10	2	9

б) значима ли ранговая корреляционная связь при уровне значимости 0,05?

Отв. а) $\rho_в=1/3$; б) $T_{кр}=0,77$; корреляционная ранговая связь незначима.

14. а) Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла по данным рангам объектов выборки объема $n=10$:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	4	3	5	8	6	1	7	10	2	9

б) значима ли ранговая корреляционная связь при уровне значимости 0,05?

Отв. а) $\tau_в=0,29$; б) $T_{кр}=0,96$; ранговая корреляционная связь незначима.

15. Известны результаты измерения (мм) изделий двух выборок, объемы которых соответственно равны $n_1=6$ и $n_2=6$:

x_i	12	10	8	15	14	11
y_i	13	9	16	17	7	18

При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $F_1(x)=F_2(x)$ об однородности выборок при конкурирующей гипотезе $H_1: F_1(x) \neq \neq F_2(x)$.

Указание. Использовать критерий Вилкоксона.

Отв. Нулевая гипотеза отвергается: $w_{нижн.\,кр}(0,025;\ 6;\ 6)=26$, $w_{верхн.\,кр}=52$, $W_{набл}=70$.

16. Используя критерий Вилкоксона, при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу об однородности двух выборок, объемы которых соответственно равны $n_1=30$ и $n_2=50$, при конкурирующей гипотезе $F_1(x) > F_2(x)$, если известно, что сумма порядковых номеров вариант первой выборки в общем вариационном ряду $W_{\text{набл}}=1150$.

Отв. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу:

$$w_{\text{нижн. кр}}(0{,}05;\ 30;\ 50)=1048,\ w_{\text{верхн. кр}}=1382.$$

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2}\,dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	0,1915	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,27	0,1064	0,51	0,1950	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,28	0,1103	0,52	0,1985	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,29	0,1141	0,53	0,2019	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,30	0,1179	0,54	0,2054	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,31	0,1217	0,55	0,2088	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,32	0,1255	0,56	0,2123	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,33	0,1293	0,57	0,2157	0,81	0,2910
0,10	0,0398	0,34	0,1331	0,58	0,2190	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,35	0,1368	0,59	0,2224	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,36	0,1406	0,60	0,2257	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,37	0,1443	0,61	0,2291	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,38	0,1480	0,62	0,2324	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,39	0,1517	0,63	0,2357	0,87	0,3078
0,16	0,0636	0,40	0,1554	0,64	0,2389	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,41	0,1591	0,65	0,2422	0,89	0,3133
0,18	0,0714	0,42	0,1628	0,66	0,2454	0,90	0,3159
0,19	0,0753	0,43	0,1664	0,67	0,2486	0,91	0,3186
0,20	0,0793	0,44	0,1700	0,68	0,2517	0,92	0,3212
0,21	0,0832	0,45	0,1736	0,69	0,2549	0,93	0,3238
0,22	0,0871	0,46	0,1772	0,70	0,2580	0,94	0,3264
0,23	0,0910	0,47	0,1808	0,71	0,2611	0,95	0,3289

x	Φ (x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)
0,96	0,3315	1,37	0,4147	1,78	0,4625	2,36	0,4909
0,97	0,3340	1,38	0,4162	1,79	0,4633	2,38	0,4913
0,98	0,3365	1,39	0,4177	1,80	0,4641	2,40	0,4918
0,99	0,3389	1,40	0,4192	1,81	0,4649	2,42	0,4922
1,00	0,3413	1,41	0,4207	1,82	0,4656	2,44	0,4927
1,01	0,3438	1,42	0,4222	1,83	0,4664	2,46	0,4931
1,02	0,3461	1,43	0,4236	1,84	0,4671	2,48	0,4934
1,03	0,3485	1,44	0,4251	1,85	0,4678	2,50	0,4938
1,04	0,3508	1,45	0,4265	1,86	0,4686	2,52	0,4941
1,05	0,3531	1,46	0,4279	1,87	0,4693	2,54	0,4945
1,06	0,3554	1,47	0,4292	1,88	0,4699	2,56	0,4948
1,07	0,3577	1,48	0,4306	1,89	0,4706	2,58	0,4951
1,08	0,3599	1,49	0,4319	1,90	0,4713	2,60	0,4953
1,09	0,3621	1,50	0,4332	1,91	0,4719	2,62	0,4956
1,10	0,3643	1,51	0,4345	1,92	0,4726	2,64	0,4959
1,11	0,3665	1,52	0,4357	1,93	0,4732	2,66	0,4961
1,12	0,3686	1,53	0,4370	1,94	0,4738	2,68	0,4963
1,13	0,3708	1,54	0,4382	1,95	0,4744	2,70	0,4965
1,14	0,3729	1,55	0,4394	1,96	0,4750	2,72	0,4967
1,15	0,3749	1,56	0,4406	1,97	0,4756	2,74	0,4969
1,16	0,3770	1,57	0,4418	1,98	0,4761	2,76	0,4971
1,17	0,3790	1,58	0,4429	1,99	0,4767	2,78	0,4973
1,18	0,3810	1,59	0,4441	2,00	0,4772	2,80	0,4974
1,19	0,3830	1,60	0,4452	2,02	0,4783	2,82	0,4976
1,20	0,3849	1,61	0,4463	2,04	0,4793	2,84	0,4977
1,21	0,3869	1,62	0,4474	2,06	0,4803	2,86	0,4979
1,22	0,3883	1,63	0,4484	2,08	0,4812	2,88	0,4980
1,23	0,3907	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,90	0,4981
1,24	0,3925	1,65	0,4505	2,12	0,4830	2,92	0,4982
1,25	0,3944	1,66	0,4515	2,14	0,4838	2,94	0,4984
1,26	0,3962	1,67	0,4525	2,16	0,4846	2,96	0,4985
1,27	0,3980	1,68	0,4535	2,18	0,4854	2,98	0,4986
1,28	0,3997	1,69	0,4545	2,20	0,4861	3,00	0,49865
1,29	0,4015	1,70	0,4554	2,22	0,4868	3,20	0,49931
1,30	0,4032	1,71	0,4564	2,24	0,4875	3,40	0,49966
1,31	0,4049	1,72	0,4573	2,26	0,4881	3,60	0,499841
1,32	0,4066	1,73	0,4582	2,28	0,4887	3,80	0,499928
1,33	0,4082	1,74	0,4591	2,30	0,4893	4,00	0,499968
1,34	0,4099	1,75	0,4599	2,32	0,4898	4,50	0,499997
1,35	0,4115	1,76	0,4608	2,34	0,4904	5,00	0,499997
1,36	0,4131	1,77	0,4616				

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ 0,95	γ 0,99	γ 0,999	n	γ 0,95	γ 0,99	γ 0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Приложение 4

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

n	γ 0,95	γ 0,99	γ 0,999	n	γ 0,95	γ 0,99	γ 0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Критические точки распределения F Фишера — Снедекора

(k_1 — число степеней свободы большей дисперсии,
k_2 — число степеней свободы меньшей дисперсии)

Уровень значимости $\alpha=0{,}01$

k_2	k_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5.06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Уровень значимости $\alpha=0{,}05$

k_2	k_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19.39	19,40	19,41
3	10.13	9,55	9,28	9.12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3.02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2.70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Критические точки распределения Кочрена

(*k* — число степеней свободы, *l* — количество выборок)

l	Уровень значимости α=0,01						
	k						
	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9999	0,9950	0,9794	0,9586	0,9373	0,9172	0,8988
3	9933	9423	8831	8335	7933	7606	7335
4	9676	8643	7814	7212	6761	6410	6129
5	0,9279	0,7885	0,6957	0,6329	0,5875	0,5531	0,5259
6	8828	7218	6258	5635	5195	4866	4608
7	8376	6644	5685	5080	4659	4347	4105
8	0,7945	0,6152	0,5209	0,4627	0,4226	0,3932	0,3704
9	7544	5727	4810	4251	3870	3592	3378
10	7175	5358	4469	3934	3572	3308	3106
12	0,6528	0,4751	0,3919	0,3428	0,3099	0,2861	0,2680
15	5747	4069	3317	2882	2593	2386	2228
20	4799	3297	2654	2288	2048	1877	1748
24	0,4247	0,2871	0,2295	0,1970	0,1759	0,1608	0,1495
30	3632	2412	1913	1635	1454	1327	1232
40	2940	1915	1508	1281	1135	1033	0957
60	0,2151	0,1371	0,1069	0,0902	0,0796	0,0722	0,0668
120	1225	0759	0585	0489	0429	0387	0357
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

l	Уровень значимости α=0,01						
	k						
	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8823	0,8674	0,8539	0,7949	0,7067	0,6062	0,5000
3	7107	6912	6743	6059	5153	4230	3333
4	5897	5702	5536	4884	4057	3251	2500
5	0,5037	0,4854	0,4697	0,4094	0,3351	0,2644	0,2000
6	4401	4229	4084	3529	2858	2229	1667
7	3911	3751	3616	3105	2494	1929	1429
8	0,3522	0,3373	0,3248	0,2779	0,2214	0,1700	0,1250
9	3207	3067	2950	2514	1992	1521	1111
10	2945	2813	2704	2297	1811	1376	1000
12	0,2535	0,2419	0,2320	0,1961	0,1535	0,1157	0,0833
15	2104	2002	1918	1612	1251	0934	0667
20	1646	1567	1501	1248	0960	0709	0500
24	0,1406	0,1338	0,1283	0,1060	0,0810	0,0595	0,0417
30	1157	1100	1054	0867	0658	0480	0333
40	0898	0853	0816	0668	0503	0363	0250
60	0,0625	0,0594	0,0567	0,0461	0,0344	0,0245	0,0167
120	0334	0316	0302	0242	0178	0125	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Уровень значимости $\alpha=0,05$							
l	k						
	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	6530
4	9065	7679	6841	6287	5895	0,5598	5365
5	0,8412	0,6338	0,5981	0,5440	0,5063	4783	0,4564
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3535
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2666
12	0,5410	0,3924	0,3624	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1911
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1061
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0827
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0312
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Уровень значимости $\alpha=0,05$							
l	k						
	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	6333	6167	6025	5466	4748	4031	3333
4	5175	5017	4884	4366	3720	3093	2500
5	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2013	0,2000
6	3817	3682	3568	3135	2612	2119	1667
7	3384	3259	3154	2756	2278	1833	1429
8	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	2768	2659	2568	2226	1820	1446	1111
10	2541	2439	2353	2032	1655	1308	1000
12	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	1815	1736	1671	1429	1144	0889	0667
20	1422	1357	1303	1108	0879	0675	0500
24	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	1002	0958	0921	0771	0604	0457	0333
40	0780	0745	0713	0595	0462	0347	0250
60	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0.0234	0,0167
120	0292	0279	0266	0218	0165	0120	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Равномерно распределенные случайные числа

10 09 73 25 33	76 52 01 35 86	34 67 35 48 76	80 95 90 91 17
37 54 20 48 05	64 89 47 42 96	24 80 52 40 37	20 63 61 04 02
08 42 26 89 53	19 64 50 93 03	23 20 90 25 60	15 95 33 47 64
99 01 90 25 29	09 37 67 07 15	38 31 13 11 65	88 67 67 43 97
12 80 79 99 70	80 15 73 61 47	64 03 23 66 53	98 95 11 68 77
66 06 57 47 17	34 07 27 68 50	36 69 73 61 70	65 81 33 98 85
31 06 01 08 05	45 57 18 24 06	35 30 34 26 14	86 79 90 74 39
85 26 97 76 02	02 05 16 56 92	68 66 57 48 18	73 05 38 52 47
63 57 33 21 35	05 32 54 70 48	90 55 35 75 48	28 46 82 87 09
73 79 64 57 53	03 52 96 47 78	35 80 83 42 82	60 93 52 03 44
98 52 01 77 67	14 90 56 86 07	22 10 94 05 58	60 97 09 34 33
11 80 50 54 31	39 80 82 77 32	50 72 56 82 48	29 40 52 42 01
83 45 29 96 34	06 28 89 80 83	13 74 67 00 78	18 47 54 06 10
88 68 54 02 00	86 50 75 84 01	36 76 66 79 51	90 36 47 64 93
99 59 46 73 48	87 51 76 49 69	91 82 60 89 28	93 78 56 13 68
65 48 11 76 74	17 46 85 09 50	58 04 77 69 74	73 03 95 71 86
80 12 43 56 35	17 72 70 80 15	45 31 82 23 74	21 11 57 82 53
74 35 09 98 17	77 40 27 72 14	43 23 60 02 10	45 52 16 42 37
69 91 62 68 03	66 25 22 91 48	36 93 68 72 03	76 62 11 39 90
09 89 32 05 05	14 22 56 85 14	46 42 75 67 88	96 29 77 88 22
91 49 91 45 23	68 47 92 76 86	46 16 28 35 54	94 75 08 99 23
80 33 69 45 98	26 94 03 68 58	70 29 73 41 35	53 14 03 33 40
44 10 48 19 49	85 15 74 79 54	32 97 92 65 75	57 60 04 08 81
12 55 07 37 42	11 10 00 20 40	12 86 07 46 97	96 64 48 94 39
63 60 64 93 29	16 50 53 44 84	40 21 95 25 63	43 65 17 70 82
61 19 69 04 46	26 45 74 77 74	51 92 43 37 29	65 39 45 95 93
15 47 44 52 66	95 27 07 99 53	59 36 78 38 48	82 39 61 01 18
94 55 72 85 73	67 89 75 43 87	54 62 24 44 31	91 19 04 25 92
42 48 11 62 13	97 34 40 87 21	16 86 84 87 67	03 07 11 20 59
23 52 37 83 17	73 20 88 98 37	68 93 59 14 16	26 25 22 96 63
04 49 35 24 94	75 24 63 38 24	45 86 25 10 25	61 96 27 93 35
00 54 99 76 54	64 05 18 81 59	96 11 96 38 96	54 69 28 23 91
35 96 31 53 07	26 89 80 93 54	33 35 13 54 62	77 97 45 00 24
59 80 80 83 91	45 42 72 68 42	83 60 94 97 00	13 02 12 48 92
46 05 88 52 36	01 39 09 22 86	77 28 14 40 77	93 91 08 36 47

32 17 90 05 97	87 37 92 52 41	05 56 70 70 07	86 74 31 71 57
69 23 46 14 06	20 11 74 52 04	15 95 66 00 00	18 74 39 24 23
19 56 54 14 30	01 75 87 53 79	40 41 92 15 85	66 67 43 68 06
45 15 51 49 38	19 47 60 72 46	43 66 79 45 43	59 04 79 00 33
94 86 43 19 94	36 16 81 08 51	34 88 88 15 53	01 54 03 54 56
98 08 62 48 26	45 24 02 84 04	44 99 90 88 96	39 09 47 34 07
33 18 51 62 32	41 94 15 09 49	89 43 54 85 81	88 69 54 19 94
80 95 10 04 06	96 38 27 07 74	20 15 12 33 87	25 01 62 52 98
79 75 24 91 40	71 96 12 82 96	69 86 10 25 91	74 85 22 05 39
18 63 33 25 37	98 14 50 65 71	31 01 02 46 74	05 45 56 14 27
74 02 94 39 02	77 55 73 22 70	97 79 01 71 19	52 52 75 80 21
54 17 84 56 11	80 99 33 71 43	05 33 51 29 69	56 12 71 92 55
11 66 44 98 83	52 07 98 48 27	59 38 17 15 39	09 97 33 34 40
48 32 47 79 28	31 24 96 47 10	02 29 53 68 70	32 30 75 75 46
69 07 49 41 38	87 63 79 19 76	35 58 40 44 01	10 51 82 16 15

Приложение 10

Критические точки критерия Вилкоксона

Объемы выборок		Q				Объемы выборок		Q			
n_1	n_2	0,005	0,01	0,025	0,05	n_1	n_2	0,005	0,01	0,025	0,05
6	6	23	24	26	28	7	7	32	34	36	39
	7	24	25	27	30		8	34	35	38	41
	8	25	27	29	31		9	35	37	40	43
	9	26	28	31	33		10	37	39	42	45
	10	27	29	32	35		11	38	40	44	47
	11	28	30	34	37		12	40	42	46	49
	12	30	32	35	38		13	41	44	48	52
	13	31	33	37	40		14	43	45	50	54
	14	32	34	38	42		15	44	47	52	56
	15	33	36	40	44		16	46	49	54	58
	16	34	37	42	46		17	47	51	56	61
	17	36	39	43	47		18	49	52	58	63
	18	37	40	45	49		19	50	54	60	65
	19	38	41	46	51		20	52	56	62	67
	20	39	43	48	53		21	53	58	64	69
	21	40	44	50	55		22	55	59	66	72
	22	42	45	51	57		23	57	61	68	74
	23	43	47	53	58		24	58	63	70	76
	24	44	48	54	60		25	60	64	72	78
	25	45	50	56	62						

Объемы выборок		Q			
n_1	n_2	0,005	0,01	0,025	0,05
8	8	43	45	49	51
	9	45	47	51	54
	10	47	49	53	56
	11	49	51	55	59
	12	51	53	58	62
	13	53	56	60	64
	14	54	58	62	67
	15	56	60	65	69
	16	58	62	67	72
	17	60	64	70	75
	18	62	66	72	77
	19	64	68	74	80
	20	66	70	77	83
	21	68	72	79	85
	22	70	74	81	88
	23	71	76	84	90
	24	73	78	86	93
	25	75	81	89	96
9	9	56	59	62	66
	10	58	61	65	69
	11	61	63	68	72
	12	63	66	71	75
	13	65	68	73	78
	14	67	71	76	81
	15	69	73	79	84
	16	72	76	82	87
	17	74	78	84	90
	18	76	81	87	93
	19	78	83	90	96
	20	81	85	93	99
	21	83	88	95	102
	22	85	90	98	105
	23	88	93	101	108
	24	90	95	104	111
	25	92	98	107	114
10	10	71	74	78	82
	11	73	77	81	86
	12	76	79	84	89
	13	79	82	88	92
	14	81	85	91	96
	15	84	88	94	99
	16	86	91	97	103
	17	89	93	100	106

Объемы выборок		Q			
n_1	n_2	0,005	0,01	0,025	0,05
	18	92	96	103	110
	19	94	99	107	113
	20	97	102	110	117
	21	99	105	113	120
	22	102	108	116	123
	23	105	110	119	127
	24	107	113	122	130
	25	110	116	126	134
11	11	87	91	96	100
	12	90	94	99	104
	13	93	97	103	108
	14	96	100	106	112
	15	99	103	110	116
	16	102	107	113	120
	17	105	110	117	123
	18	108	113	121	127
	19	111	116	124	131
	20	114	119	128	135
	21	117	123	131	139
	22	120	126	135	143
	23	123	129	139	147
	24	126	132	142	151
	25	129	136	146	155
12	12	105	109	115	120
	13	109	113	119	125
	14	112	116	123	129
	15	115	120	127	133
	16	119	124	131	138
	17	122	127	135	142
	18	125	131	139	146
	19	129	134	143	150
	20	132	138	147	155
	21	136	142	151	159
	22	139	145	155	163
	23	142	149	159	168
	24	146	153	163	172
	25	149	156	167	176
13	13	125	130	136	142
	14	129	134	141	147
	15	133	138	145	152
	16	136	142	150	156
	17	140	146	154	161
	18	144	150	158	166

Объемы выборок		Q			
n_1	n_2	0,005	0,01	0,025	0,05
	19	148	154	163	171
	20	151	158	167	175
	21	155	162	171	180
	22	159	166	176	185
	23	163	170	180	189
	24	166	174	185	194
	25	170	178	189	199
14	14	147	152	160	166
	15	151	156	164	171
	16	155	161	169	176
	17	159	165	174	182
	18	163	170	179	187
	19	168	174	183	192
	20	172	178	188	197
	21	176	183	193	202
	22	180	187	198	207
	23	184	192	203	212
	24	188	196	207	218
	25	192	200	212	223
15	15	171	176	184	192
	16	175	181	190	197
	17	180	186	195	203
	18	184	190	200	208
	19	189	195	205	214
	20	193	200	210	220
	21	198	205	216	225
	22	202	210	221	231
	23	207	214	226	236
	24	211	219	231	242
	25	216	224	237	248
16	16	196	202	211	219
	17	201	207	217	225
	18	206	212	222	231
	19	210	218	228	237
	20	215	223	234	243
	21	220	228	239	249
	22	225	233	245	255
	23	230	238	251	261
	24	235	244	256	267
	25	240	249	262	273
17	17	223	230	240	249
	18	228	235	246	255
	19	234	241	252	262

Объемы выборок		Q			
n_1	n_2	0,005	0,01	0,025	0,05
	20	239	246	258	268
	21	244	252	264	274
	22	249	258	270	281
	23	255	263	276	287
	24	260	269	282	294
	25	265	275	288	300
18	18	252	259	270	280
	19	258	265	277	287
	20	263	271	283	294
	21	269	277	290	301
	22	275	283	296	307
	23	280	289	303	314
	24	286	295	309	321
	25	292	301	316	328
19	19	283	291	303	313
	20	289	297	309	320
	21	295	303	316	328
	22	301	310	323	335
	23	307	316	330	342
	24	313	323	337	350
	25	319	329	344	357
20	20	315	324	337	348
	21	322	331	344	356
	22	328	337	351	364
	23	335	344	359	371
	24	341	351	366	379
	25	348	358	373	387
21	21	349	359	373	385
	22	356	366	381	393
	23	363	373	388	401
	24	370	381	396	410
	25	377	388	404	418
22	22	386	396	411	424
	23	393	403	419	432
	24	400	411	427	441
	25	408	419	435	450
23	23	424	434	451	465
	24	431	443	459	474
	25	439	451	468	483
24	24	464	475	492	507
	25	472	484	501	517
25	25	505	517	536	552

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Учебное издание

Гмурман Владимир Ефимович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Художник *К Э Семенков*
Технический редактор *Л А Овчинникова*
Корректор *Г И Кострикова*

Лицензия ИД № 06236 от 09 11 01

Изд № ФМ-228 Подп в печать 14 02 03 Формат $60 \times 88^1/_{16}$ Бумага газетн
Гарнитура литературная Печать офсетная Объем 29,40 усл печ л
29,40 усл кр -отт 22 76 уч -изд л Тираж 20 000 экз Заказ № 2730

ФГУП «Издательство «Высшая школа», 127994 Москва, ГСП-4
Неглинная ул д 29/14

Тел (095) 200-04-56
E mail info@v-shkola ru http //www v-shkola ru

Отдел реализации (095) 200-07-69 200-59-39, факс (095) 200-03-01
E-mail sales@v-shkola ru

Отдел «Книга почтой» (095) 200-33-36
E-mail bookpost@v-shkola ru

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных
диапозитивов в ФГУП ордена «Знак Почета»
Смоленской областной типографии им В И Смирнова
214000, г Смоленск, пр-т им Ю Гагарина, 2

ISBN 5-06-004214-6

9 785060 042146