П. Е. ДАНКО, А. Г. ПОПОВ, Т. Я. КОЖЕВНИКОВА

Высшая математика в упражнениях и задачах

Часть 1

с решениями

П. Е. ДАНКО, А. Г. ПОПОВ,
Т. Я. КОЖЕВНИКОВА, С. П. ДАНКО

Высшая математика
в упражнениях и задачах

В двух частях

Часть 1

6-е издание

Москва
ОНИКС
Мир и Образование

УДК 516+517
ББК 22.1я73
Д17

Данко П. Е.

Д17 Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. I: Учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. — 6-е изд. — М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2007. — 304 с.: ил.

ISBN 978-5-488-01070-3 (ООО «Издательство Оникс»)
ISBN 978-5-488-01071-0 (Часть I)
ISBN 978-5-94666-366-3 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)
ISBN 978-5-94666-367-0 (Часть I)

Содержание первой части охватывает следующие разделы программы: аналитическую геометрию, основы линейной алгебры, дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных, интегральное исчисление функций одной переменной, элементы линейного программирования.

В каждом параграфе приводятся необходимые теоретические сведения. Типовые задачи даются с подробными решениями. Имеется большое количество задач для самостоятельной работы.

УДК 516+517
ББК 22.1я73

Учебное издание

Данко Павел Ефимович, Попов Александр Георгиевич, Кожевникова Татьяна Яковлевна, Данко Сергей Павлович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ

В двух частях

Часть I

Редактор *А. М. Суходский*

Подписано в печать с готовых диапозитивов заказчика 20.03.2007.
Формат $60\times90^1/_{16}$. Гарнитура «Литературная». Бумага газетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 19,00. Тираж 15 000 экз. Заказ 1181.

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2; 953005 — учебная литература

ООО «Издательство Оникс».
127422, Москва, ул. Тимирязевская, д. 38/25. Почтовый адрес: 117418, Москва, а/я 26.
Отдел реализации: тел. (495) 119-02-20, 110-02-50. Internet: www.onyx.ru; e-mail: mail@onyx.ru

ООО «Издательство «Мир и Образование».
Изд. лиц. ИД № 05088 от 18.06.2001. 109193, Москва, ул. 5-я Кожуховская, д. 13, стр. 1.
Тел./факс (495) 120-51-47, 129-09-60, 742-43-54. E-mail: mir-obrazovanie@onyx.ru
Издание осуществлено при техническом содействии ООО «Издательство АСТ»

Издано при участии ООО «Харвест». Лицензия № 02330/0056935 от 30.04.04.
Республика Беларусь, 220013, Минск, ул. Кульман, д. 1, корп. 3, эт. 4, к. 42.

Открытое акционерное общество «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
Республика Беларусь, 220600, Минск, ул. Красная, 23.

ISBN 978-5-488-01070-3 (ООО «Издательство Оникс»)
ISBN 978-5-488-01071-0 (Часть I)
ISBN 978-5-94666-366-3 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)
ISBN 978-5-94666-367-0 (Часть I)
ISBN 978-985-16-1587-8 (ООО «Харвест»)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

По сравнению с третьим изданием книги были сделаны следующие изменения и дополнения.

Во II часть включена новая глава «Основы вариационного исчисления», добавлен раздел об интерполировании функций на основе приближения сплайнами. Сделаны добавления по элементам теории поля и уравнениям математической физики. Увеличено число задач по определенным и кратным интегралам, а также в других разделах. Произведены улучшения методического характера и исправлены замеченные опечатки.

В настоящем издании используются следующие обозначения: начало и конец решения задачи отмечаются соответственно знаками △ и ▲, а вместо слова «Указание» употребляется знак ●.

Авторы признательны канд. физ.-мат. наук доц. В. А. Богачеву и канд. физ.-мат. наук Т. А. Малаховой за помощь в написании основ вариационного исчисления и интерполирования функций сплайнами.

Авторы считают своим приятным долгом выразить искренюю признательность зав. кафедрой высшей математики МЭИ, чл.-кор АН СССР С. И. Похожаеву, канд. физ.-мат. наук., доц. Т. В. Лоссиевской, А. Б. Крыгину и П. А. Шмелеву, канд. физ.-мат. наук, ст. препод. А. Л. Павлову и В. И. Афанасьеву, сделавшим ценные методические замечания и предложения, способствовавшие улучшению этой книги.

Авторы

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЙ К ПЕРВОМУ, ВТОРОМУ И ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЯМ

При написании книги «Высшая математика в упражнениях и задачах» авторы стремились раскрыть содержание основных понятий и теорем курса на систематически подобранных упражнениях и задачах.

В пособие включены типовые задачи и даются методы их решения. Каждому параграфу предшествует краткое введение, состоящее из определений и основных математических понятий рассматриваемого раздела. При этом наиболее трудные вопросы теории для лучшего усвоения сопровождаются раскрытием этих понятий (без доказательств).

Первое издание (в трех частях) вышло в 1967—1971 гг. Второе издание (в двух частях) вышло в 1974 г., а третье (также в двух частях) — в 1980 г.

При написании пособия авторы использовали некоторые методические приемы и задачи из книг: Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I—III; Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II; Гюнтер Н. М. и Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике, т. I—III; Демидович Б. П. и др. Сборник задач и упражнений по математическому анализу; Фролов С. В., Шостак Р. Я. Курс высшей математики.

За помощь в оформлении учебного пособия и проверки правильности ответов к задачам авторы признательны всему коллективу сотрудников кафедры высшей математики Ростовского-на-Дону института инженеров железнодорожного транспорта.

Авторы

ГЛАВА I

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ И ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

1. Координаты на прямой. Деление отрезка в данном отношении. Точку M координатной оси Ox, имеющую абсциссу x, принято обозначать через $M(x)$.

Расстояние d между точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ оси при любом расположении точек на оси определяется формулой

$$d=|x_2-x_1|. \tag{1}$$

Пусть на произвольной прямой задан отрезок AB (A — начало отрезка, B — его конец); тогда всякая третья точка C этой прямой делит отрезок AB в некотором отношении λ, где $\lambda=\pm|AC|:|CB|$. Если отрезки AC и CB направлены в одну сторону, то λ приписывают знак «+»; если же отрезки AC и CB направлены в противоположные стороны, то λ приписывают знак «—». Иными словами, λ положительно, если точка C лежит между точками A и B и отрицательно, если точка C лежит на прямой вне отрезка AB.

Если точки A и B лежат на оси Ox, то координата точки $C(\overline{x})$, делящей отрезок между точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ в отношении λ, определяется по формуле

$$\overline{x}=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}. \tag{2}$$

В частности, при $\lambda=1$ получается формула для координаты середины отрезка:

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2}{2}. \tag{3}$$

1. Построить на прямой точки $A(3)$, $B(-2)$, $C(0)$, $D(\sqrt{2})$, $E(-3{,}5)$.

2. Отрезок AB четырьмя точками разделен на пять равных частей. Определить координату ближайшей к A точки деления, если $A(-3)$, $B(7)$.

△ Пусть $C(\overline{x})$ — искомая точка; тогда $\lambda=|AC|:|CB|=1/4$. Следовательно, по формуле (2) находим

$$\overline{x}=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{-3+(1/4)\,7}{1+1/4}=-1,\text{ т. е. } C(-1). \ ▲$$

3. Известны точки $A(1)$, $B(5)$ — концы отрезка AB; вне этого отрезка расположена точка C, причем ее расстояние от точки A в три раза больше расстояния от точки B. Определить координату точки C.

△ Нетрудно видеть, что $\lambda=-|AC|:|BC|=-3$ (рекомендуем сделать чертеж). Таким образом,

$$\overline{x}=\frac{1-3\cdot 5}{1-3}=7,\text{ т. е. } C(7). \ ▲$$

4. Определить расстояние между точками: 1) $M(3)$ и $N(-5)$; 2) $P(-11/2)$ и $Q(-5/2)$.

5. Найти координаты середины отрезка, если известны его концы: 1) $A(-6)$ и $B(7)$; 2) $C(-5)$ и $D(1/2)$.

6. Найти точку M, симметричную точке $N(-3)$ относительно точки $P(2)$.

7. Отрезок AB двумя точками разделен на три равные части. Определить координаты точек деления, если $A(-1)$, $B(5)$.

8. Даны точки $A(-7)$, $B(-3)$. Вне отрезка AB расположены точки C и D, причем $|CA|=|BD|=0{,}5|AB|$. Определить координаты точек C и D.

2. Прямоугольные координаты на плоскости. Простейшие задачи. Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат xOy, то точку M этой плоскости, имеющую координаты x и y, обозначают $M(x;\ y)$.

Расстояние d между точками $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$ определяется по формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{1}$$

В частности, расстояние d точки $M(x;\ y)$ от начала координат определяется по формуле

$$d=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{2}$$

Координаты точки $C(\overline{x};\ \overline{y})$, делящей отрезок между точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ в заданном отношении λ (см. п. 1), определяются по формулам

$$\overline{x}=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad \overline{y}=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{3}$$

В частности, при $\lambda=1$ получаются формулы для координат середины отрезка:

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2}{2};\quad \overline{y}=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{4}$$

Площадь треугольника с вершинами $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$ определяется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|=$$
$$=\frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|. \tag{5}$$

Формулу для площади треугольника можно записать в виде

$$S=\frac{1}{2}|\Delta|, \tag{6}$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}$$

(понятие об определителе третьего порядка дано в § 5 этой главы).

9. Построить на координатной плоскости точки $A(4;\ 3)$, $B(-2;5)$, $C(5;\ -2)$, $D(-4;\ -3)$, $E(-6;\ 0)$, $F(0;\ 4)$.

10. Определить расстояние между точками $A(3;\ 8)$ и $B(-5;\ 14)$.

△ Воспользовавшись формулой (1), получим

$$d=\sqrt{(-5-3)^2+(14-8)^2}=\sqrt{64+36}=10. \ \blacktriangle$$

11. Показать, что треугольник с вершинами $A(-3; -3)$, $B(-1; 3)$, $C(11; -1)$ — прямоугольный.

△ Найдем длины сторон треугольника:

$$|AB|=\sqrt{(-1+3)^2+(3+3)^2}=\sqrt{40},$$
$$|BC|=\sqrt{(11+1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{160},$$
$$|AC|=\sqrt{(11+3)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{200}.$$

Так как $|AB|^2=40$, $|BC|^2=160$, $|AC|^2=200$, то $|AB|^2+|BC|^2=|AC|^2$. Таким образом, сумма квадратов длин двух сторон треугольника равна квадрату длины третьей стороны. Отсюда заключаем, что треугольник ABC прямоугольный и сторона AC является его гипотенузой. ▲

12. Известны точки $A(-2; 5)$, $B(4; 17)$ — концы отрезка AB. На этом отрезке находится точка C, расстояние которой от A в два раза больше расстояния от B. Определить координаты точки C.

△ Так как $|AC|=2|CB|$, то $\lambda=|AC|:|CB|=2$. Здесь $x_1=-2$, $y_1=5$, $x_2=4$, $y_2=17$; следовательно,

$$\bar{x}=\frac{-2+2\cdot 4}{1+2}=2,\quad \bar{y}=\frac{5+2\cdot 17}{1+2}=13,\ \text{т. е. } C(2;\ 13).\ ▲$$

13. Точка $C(2; 3)$ служит серединой отрезка AB. Определить координаты точки A, если $B(7; 5)$.

△ Здесь $\bar{x}=2$, $\bar{y}=3$, $x_2=7$, $y_2=5$, откуда $2=(x_1+7)/2$, $3=(y_1+5)/2$. Следовательно, $x_1=-3$, $y_1=1$, т. е. $A(-3; 1)$. ▲

14. Даны вершины треугольника ABC: $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$. Определить координаты точки пересечения медиан треугольника.

△ Находим координаты точки D — середины отрезка AB; имеем $x_D=(x_1+x_2)/2$, $y_D=(y_1+y_2)/2$. Точка M, в которой пересекаются медианы, делит отрезок CD в отношении 2:1, считая от точки C. Следовательно, координаты точки M определяются по формулам

$$\bar{x}=\frac{x_3+2x_D}{1+2},\quad \bar{y}=\frac{y_3+2y_D}{1+2},$$

т. е.

$$\bar{x}=\frac{x_3+2(x_1+x_2)/2}{3},\quad \bar{y}=\frac{y_3+2(y_1+y_2)/2}{3}.$$

Окончательно получаем

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad \bar{y}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.\ ▲$$

15. Определить площадь треугольника с вершинами $A(-2; -4)$, $B(2; 8)$ и $C(10; 2)$.

△ Используя формулу (5), получаем

$$S=\frac{1}{2}|(2+2)(2+4)-(10+2)(8+4)|=\frac{1}{2}|24-144|=60\ (\text{кв. ед.}).\ ▲$$

16. Определить расстояние между точками: 1) $A(2; 3)$ и $B(-10; -2)$; 2) $C(\sqrt{2}; -\sqrt{7})$ и $D(2\sqrt{2}; 0)$.

17. Показать, что треугольник с вершинами $A(4; 3)$, $B(7; 6)$ и $C(2; 11)$ — прямоугольный.

18. Показать, что треугольник с вершинами $A(2; -1)$, $B(4; 2)$ и $C(5; 1)$ — равнобедренный.

19. Даны вершины треугольника: $A(-1; -1)$, $B(0; -6)$ и $C(-10; -2)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

20. Даны концы отрезка AB: $A(-3; 7)$ и $B(5; 11)$. Этот отрезок тремя точками разделен на четыре равные части. Определить координаты точек деления.

21. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1; 5)$, $B(2; 7)$, $C(4; 11)$.

22. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(11; 4)$, $B(-1; -1)$, $C(5; 7)$. Определить координаты четвертой вершины.

23. Даны две вершины треугольника $A(3; 8)$ и $B(10; 2)$ и точка пересечения медиан $M(1; 1)$. Найти координаты третьей вершины треугольника.

24. Даны вершины треугольника: $A(7; 2)$, $B(1; 9)$ и $C(-8; -11)$. Найти расстояния точки пересечения медиан от вершин треугольника.

25. Точки $L(0; 0)$, $M(3; 0)$ и $N(0; 4)$ являются серединами сторон треугольника. Вычислить площадь треугольника.

3. Полярные координаты. В полярной системе координат положение точки M на плоскости определяется ее расстоянием $|OM| = \rho$ от полюса O (ρ — *полярный радиус-вектор* точки) и углом θ, образованным отрезком OM с полярной осью Ox (θ — *полярный угол* точки). Угол θ считается положительным при отсчете от полярной оси против часовой стрелки.

Если точка M имеет полярные координаты $\rho > 0$ и $0 \leqslant \theta < 2\pi$, то ей же отвечает и бесчисленное множество пар полярных координат $(\rho; \theta + 2k\pi)$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Если начало декартовой прямоугольной системы координат совместить с полюсом, а ось Ox направить по полярной оси, то прямоугольные координаты x и y точки M и ее полярные координаты ρ и θ связаны следующими формулами:

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta; \tag{1}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = y/x. \tag{2}$$

26. Построить точки, заданные полярными координатами: $A(4; \pi/4)$, $B(2; 4\pi/3)$, $C(3; -\pi/6)$, $D(-3; \pi/3)$, $E(0; \alpha)$, $F(-1; -3\pi/4)$.

27. Найти полярные координаты точки $M(1; -\sqrt{3})$, если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось — с положительным направлением оси абсцисс.

△ На основании равенств (2) находим $\rho = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$; $\operatorname{tg}\theta = -\sqrt{3}$. Очевидно, что точка M лежит в IV четверти и, следовательно, $\theta = 5\pi/3$. Итак, $M(2; 5\pi/3)$. ▲

28. Найти прямоугольные координаты точки $A(2\sqrt{2}; 3\pi/4)$, если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось направлена по оси абсцисс.

△ Используя формулы (1), имеем $x=2\sqrt{2}\cos(3\pi/4)=-2$, $y=2\sqrt{2}\sin(3\pi/4)=2$. Итак, $A(-2;\ 2)$. ▲

29. Найти полярные координаты точек: $A(2\sqrt{3};\ 2)$, $B(0;\ -3)$, $C(-4;\ 4)$, $D(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$, $E(-\sqrt{2};\ -\sqrt{6})$, $F(-7;\ 0)$.

30. Найти прямоугольные координаты точек: $A(10;\ \pi/2)$, $B(2;\ 5\pi/4)$, $C(0;\ \pi/10)$, $D(1;\ -\pi/4)$, $E(-1;\ \pi/4)$, $F(-1;\ -\pi/4)$.

31. Определить расстояние между точками $M_1(\rho_1;\ \theta_1)$ и $M_2(\rho_2;\ \theta_2)$.

● Применить к треугольнику OM_1M_2 теорему косинусов.

32. Определить расстояние между точками $M(3;\ \pi/4)$ и $N(4;\ 3\pi/4)$.

33. Найти полярные координаты точки, симметричной точке $M(\rho;\ \theta)$ относительно полярной оси.

34. Найти полярные координаты точки, симметричной точке $M(\rho;\ \theta)$ относительно полюса.

35. Найти полярные координаты точек, симметричных точкам $(3;\ \pi/6)$, $(5;\ 2\pi/3)$ и $(2;\ -\pi/6)$: 1) относительно полюса; 2) относительно полярной оси.

36. Найти полярные координаты точки, симметричной точке $M(\rho;\ \theta)$ относительно прямой, проходящей через полюс перпендикулярно полярной оси.

4. Уравнение линии. Пусть некоторой линии на плоскости xOy, рассматриваемой как множество точек, соответствует уравнение, связывающее координаты любой точки $M(x;\ y)$ («текущей точки»), лежащей на этой линии. Такое уравнение называется *уравнением* данной *линии*.

Если в уравнение данной линии подставить координаты любой точки, лежащей на этой линии, то уравнение обращается в тождество. Если же в уравнение линии подставить координаты любой точки, не принадлежащей этой линии, то уравнение не удовлетворяется.

37. Один конец отрезка перемещается по оси абсцисс, а другой — по оси ординат. Найти уравнение линии, описываемой серединой этого отрезка, если длина отрезка равна c.

△ Пусть $M(x;\ y)$ — середина отрезка. Длина отрезка OM (длина медианы) равна половине гипотенузы, т. е. $|OM|=c/2$. С другой стороны, $|OM|=\sqrt{x^2+y^2}$ (расстояние точки M от начала координат).

Таким образом, приходим к уравнению

$$\sqrt{x^2+y^2}=c/2, \text{ или } x^2+y^2=c^2/4.$$

Это и есть уравнение искомой линии. Геометрически очевидно, что этой линией является окружность радиуса $c/2$ с центром в начале координат. ▲

38. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $F(0;\ 1/4)$ равно расстоянию этой же точки от прямой $y=-1/4$.

△ Возьмем на искомой линии произвольную точку $M(x;\ y)$. Расстояние точки M от точки F определится по формуле расстояния между двумя точками:

$$|MF|=\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}.$$

Расстояние точки M от прямой $y=-1/4$ найдется из простых геометрических соображений (рис. 1):

$$|MN|=|MK|+|KN|=y+\frac{1}{4}.$$

Так как по условию равенство $|MF|=|MN|$ выполняется для любой точки M, лежащей на искомой линии, то уравнение этой линии можно записать в виде

$$\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}=y+\frac{1}{4},$$

или

$$x^2+y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}=y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{16},$$

т. е. $y=x^2$.

Линия, определяемая уравнением $y=x^2$, называется *параболой*. ▲

39. Составить уравнение множества точек, произведение расстояний которых от точек $F_1(a;\ 0)$ и $F_2(-a;\ 0)$ есть постоянная величина, равная a^2.

△ Возьмем на искомой кривой произвольную точку $M(x;\ y)$. Ее расстояния от точек $F_1(a_1;\ 0)$ и $F_2(-a;\ 0)$ составляют $r_1=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$, $r_2=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$. Из условия задачи следует, что $r_1r_2=a^2$. Таким образом, искомая кривая имеет уравнение

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+a)^2+y^2}=a^2.$$

Приведем это уравнение к рациональному виду:

$$(x^2+a^2+y^2-2ax)(x^2+a^2+y^2+2ax)=a^4,$$

т. е.

$$(x^2+a^2+y^2)^2-4a^2x^2=a^4,$$

или, наконец,

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2).$$

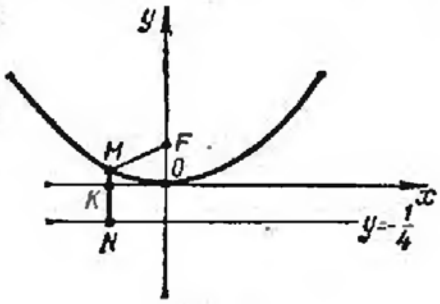

Рис. 1

Найденная кривая называется *лемнискатой*. ▲

40. Составить уравнение лемнискаты в полярных координатах и построить кривую.

△ В уравнении $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ (см. предыдущую задачу) переходим к полярным координатам по формулам $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$. Тогда получим

$$(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)^2=2a^2(\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta),\ \text{или}\ \rho^2=2a^2\cos 2\theta.$$

Это — уравнение лемнискаты в полярных координатах.

Построим кривую. Разрешив уравнение относительно ρ, находим $\rho=\pm a\sqrt{2\cos 2\theta}$. Из того, что в правой части равенства стоит двойной знак «$\pm$», а также из того, что уравнение не меняется при замене θ на $-\theta$, заключаем, что лемниската расположена симметрично относительно осей Ox и Oy. Исследуем форму лемнискаты для I четверти, т. е. для случая $\rho\geqslant 0$, $0\leqslant\theta<\pi/2$. Для этих значений ρ и θ имеем $\rho=a\sqrt{2}\cdot\sqrt{\cos 2\theta}$. Нетрудно видеть, что θ может изменяться только в промежутке от 0 до $\pi/4$. Таким образом, соответствующая часть кривой заключена между полярной осью и лучом $\theta=\pi/4$. Если $\theta=0$, то $\rho=a\sqrt{2}$. С возрастанием θ от 0 до $\pi/4$ величина ρ убывает до значения $\rho=0$.

Приняв во внимание соображения симметрии, мы можем построить лемнискату (рис. 2). ▲

41. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A(1;\ 1)$ и $B(3;\ 3)$.

△ Пусть точка M принадлежит искомому множеству; тогда $|MA|=|MB|$. По формуле расстояния между двумя точками находим

$$|MA|=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2},\quad |MB|=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$$

и уравнение линии может быть записано в виде

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}.$$

Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим

$$x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2-6x+9+y^2-6y+9,$$

откуда после приведения подобных членов окончательно приходим к уравнению $x+y-4=0$. Итак, искомым множеством является прямая, которая, как известно, служит серединным перпендикуляром к отрезку AB. ▲

42. Точка M равномерно перемещается по лучу, вращающемуся равномерно около полюса. Составить уравнение линии, описанной

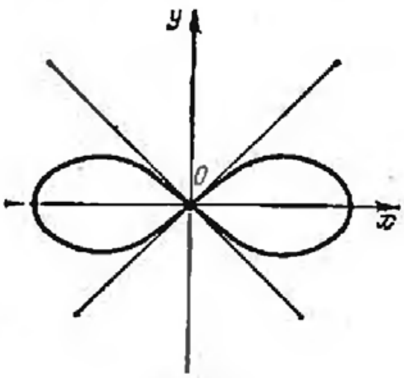

Рис. 2

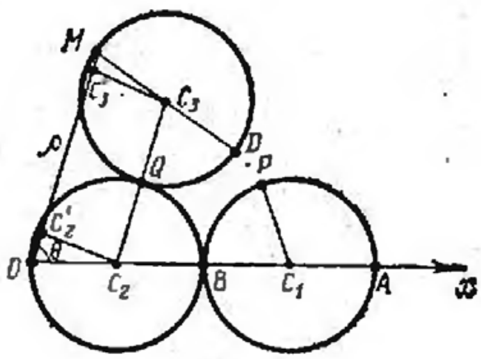

Рис. 3

точкой M, если в начальный момент вращающийся луч совпадает с полярной осью, а точка M — с полюсом; при повороте же луча на угол $\theta=1$ (один радиан) точка M удалилась от полюса на расстояние a.

△ Поскольку в начальный момент величины ρ и θ равны нулю, а затем обе возрастают пропорционально времени, нетрудно установить, что они связаны прямой пропорциональной зависимостью: $\rho/\theta=\text{const}$. Но $\rho=a$ при $\theta=1$; следовательно, $\rho/\theta=a/1$, т. е. $\rho=a\theta$. Кривая $\rho=a\theta$ называется *спиралью Архимеда*. ▲

43. Окружность диаметра a катится без скольжения по внешней стороне другой окружности такого же диаметра. Составить в полярных координатах уравнение линии, описанной некоторой фиксированной точкой катящейся окружности.

△ На рис. 3: C_1 — первоначальное положение центра катящейся окружности; A — первоначальное положение точки, описывающей искомую линию (точка A диаметрально противоположна точке B, где в начальный момент соприкасаются окружности); C_2 — центр неподвижной окружности; C_3 — центр катящейся окружности в новом положении; M — новое положение точки A, описывающей искомую линию. (После перемещения окружности C_1 в положение C_3 точка P займет положение Q. Точка B займет положение D, причем, поскольку качение происходит без скольжения, $\overset{\frown}{BQ}=\overset{\frown}{DQ}$, $\widehat{QC_2B}=\widehat{QC_3D}$.)

На чертеже показано положение полюса O и полярной оси Ox. Требуется составить уравнение, которому удовлетворяют координаты любой точки $M(\rho;\ \theta)$ искомой линии.

Легко установить, что $\widehat{MC_3Q}=\widehat{OC_2Q}$, в силу чего четырехугольник OC_2C_3M является равнобедренной трапецией с меньшим основанием $|C_2C_3|=a$; C_2C_2' и C_3C_3' — перпендикуляры, опущенные из точек C_2 и C_3 на прямую OM. Итак,

$$\rho=|OC_2'|+|C_2'C_3'|+|C_3'M|=\frac{a}{2}\cos\theta+a+\frac{a}{2}\cos\theta=a(1+\cos\theta).$$

Таким образом, уравнение искомой линии в полярных координатах имеет вид $\rho=a(1+\cos\theta)$; эта кривая называется *кардиоидой*.

Поскольку при замене θ на $-\theta$ уравнение кардиоиды не меняется, кардиоида расположена симметрично относительно полярной оси. Если θ изменяется от 0 до π, то ρ убывает от $2a$ до 0. ▲

44. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A(2;\ 0)$ и $B(0;\ 1)$.

45. Какая линия определяется уравнением $x=y$?

46. Какая линия определяется уравнением $x=-y$?

47. Составить уравнение множества точек, сумма квадратов расстояний которых от точек $A(2;\ 0)$ и $B(0;\ 2)$ равна квадрату расстояния между точками A и B.

48. Составить уравнение множества точек, сумма расстояний которых от точек $A(1;\ 0)$ и $B(0;\ 1)$ равна 2.

49. В полярной системе координат составить уравнение окружности с центром в полюсе.

50. В полярной системе координат составить уравнение полупрямой, проходящей через полюс и образующей с полярной осью угол α.

51. В полярной системе координат составить уравнение окружности диаметра a, если полюс лежит на окружности, а полярная ось проходит через центр окружности.

5. **Параметрические уравнения линии.** При отыскании уравнения множества точек иногда оказывается более удобным выразить координаты x и y произвольной точки этого множества через некоторую вспомогательную величину t (ее называют *параметром*), т. е. рассматривать систему уравнений $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Такое представление искомой линии называется *параметрическим*, а уравнения системы — *параметрическими уравнениями* данной *линии*.

Исключение параметра t из системы (если оно возможно) приводит к уравнению, связывающему x и y, т. е. к обычному уравнению линии вида $f(x,\ y)=0$.

52. Составить параметрические уравнения окружности.

△ Рассмотрим окружность радиуса a с центром в начале координат (рис. 4). Возьмем на ней произвольную точку $M(x;\ y)$. Примем за параметр t угол, образованный с осью абсцисс радиусом OM. Из треугольника OMN следует, что $x=a\cos t$, $y=a\sin t$. Таким образом, уравнения

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t$$

являются параметрическими уравнениями окружности.

Исключив из этих уравнений параметр t, получим обычное уравнение окружности. В данном случае для исключения параметра достаточно каждое из уравнений возвести в квадрат и полученные уравнения сложить: $x^2+y^2=a^2\cos^2 t+$

$+a^2\sin^2 t$, т. е. $x^2+y^2=a^2$. Последнее уравнение является уравнением окружности радиуса a с центром в начале координат. ▲

53. Составить параметрические уравнения кривой, описанной фиксированной точкой окружности, катящейся без скольжения по неподвижной прямой.

△ Пусть окружность радиуса a катится без скольжения вправо по горизонтальной прямой (рис. 5). Примем эту прямую за ось Ox, поместив начало координат в некоторой точке O оси. За фиксированную точку окружности (перемещением которой образуется искомая кривая) примем ту ее точку, которая совпадает с точкой O при соответствующем положении окружности. За параметр t примем угол поворота радиуса окружности, проходящего через фиксированную точку.

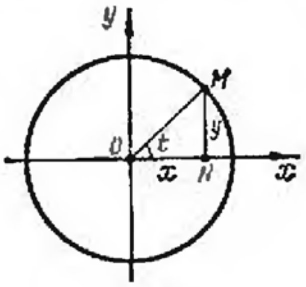

Рис. 4

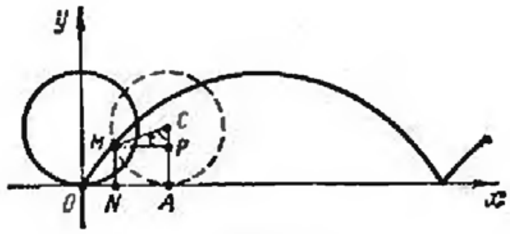

Рис. 5

Пусть в некоторый момент времени окружность касается оси в точке A. Фиксированная точка окружности займет положение $M(x;\ y)$, соответствующее углу t поворота радиуса CM ($t=\widehat{ACM}$). Так как качение происходит без скольжения, то $|OA|=\smile{MA}=at$. Используя это, выразим координаты точки M через t:

$$x=|ON|=|OA|-|NA|=\smile{MA}-|NA|=at-a\sin t=a(t-\sin t),$$
$$y=|NM|=|AP|=|AC|-|PC|=a-a\cos t=a(1-\cos t).$$

Таким образом, параметрические уравнения искомой линии имеют вид

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t).$$

Эта линия называется *циклоидой*; она изображена на рис. 5. ▲

54. Какая линия определяется параметрическими уравнениями $x=t^2$, $y=t^2$?

△ Исключая параметр t, приходим к уравнению $y=x$. В силу параметрических уравнений $x\geq 0$, $y\geq 0$. Следовательно, данные параметрические уравнения определяют луч — биссектрису I координатного угла. ▲

55. Какая линия определяется параметрическими уравнениями $x=\cos t$, $y=\cos^2 t$?

△ Подставив x вместо $\cos t$ во второе уравнение, получаем уравнение параболы $y=x^2$. Из параметрических уравнений следует $|x|\leq 1$, $0\leq y\leq 1$. Таким образом, параметрические уравнения определяют дугу AOB параболы $y=x^2$, где $A(-1;\ 1)$; $B(1;\ 1)$. ▲

56. Какая линия определяется уравнениями $x=\sin t$, $y=\operatorname{cosec} t$?

△ Так как $y=1/\sin t$, то, исключив t, получаем уравнение $y=1/x$, выражающее обратную пропорциональную зависимость величин x и y. Учитывая, что

$|x|\leqslant 1$, $|y|\geqslant 1$, заключаем, что линия, заданная параметрическими уравнениями $x=\sin t$, $y=\operatorname{cosec} t$, имеет вид, изображенный на рис. 6. ▲

57. Какая линия определяется уравнениями $x=2t$, $y=4t$?

58. Кривая задана параметрическими уравнениями $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. Найти ее уравнение в прямоугольной системе координат.

● Разделить первое уравнение на a, второе — на b, а затем исключить t.

59. Кривая задана параметрическими уравнениями $x=a\sec t$, $y=b\operatorname{tg} t$. Найти ее уравнение в прямоугольной системе координат.

60. Какая линия определяется уравнениями $x=\cos^2 t$, $y=\sin^2 t$?

61. Кривая, определяемая параметрическими уравнениями $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, называется *астроидой*. Исключив t, найти уравнение астроиды в прямоугольной системе координат.

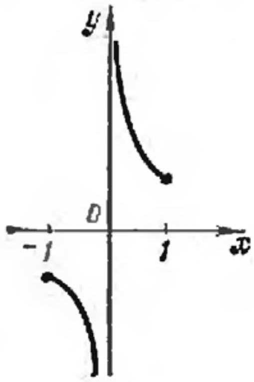

Рис. 6

62. На круг, описанный из центра O радиусом a, навернута по часовой стрелке нить; пусть конец нити находится в точке $A(a; 0)$. Станем развертывать нить (против часовой стрелки), сматывая ее с круга и все время натягивая за конец. Составить параметрические уравнения кривой, описываемой концом нити, если за параметр t взять угол между радиусом OA и радиусом OB, проведенным в точку касания окружности с натянутой нитью в произвольном положении последней.

§ 2. ПРЯМАЯ

1. Общее уравнение прямой. Всякое уравнение первой степени относительно x и y, т. е. уравнение вида

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

(где A, B и C — постоянные коэффициенты, причем $A^2+B^2\neq 0$) определяет на плоскости некоторую прямую. Это уравнение называется *общим уравнением прямой*.

Частные случаи. 1. $C=0$; $A\neq 0$; $B\neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $Ax+By=0$, проходит через начало координат.

2. $A=0$; $B\neq 0$; $C\neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $By+C=0$ (или $y=b$, где $b=-C/B$), параллельна оси Ox.

3. $B=0$; $A\neq 0$; $C\neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $Ax+C=0$ (или $x=a$, где $a=-C/A$), параллельна оси Oy.

4. $B=C=0$; $A\neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $Ax=0$ (или $x=0$, поскольку $A\neq 0$), совпадает с осью Oy.

5. $A=C=0$; $B\neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $By=0$ (или $y=0$, поскольку $B\neq 0$), совпадает с осью Ox.

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Если в общем уравнении прямой $B\neq 0$, то, разрешив его относительно y, получим уравнение вида

$$y=kx+b \qquad (2)$$

(здесь $k=-A/B$, $b=-C/B$). Его называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом*, поскольку $k=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол, образованный прямой с положительным направлением оси Ox. Свободный член уравнения b равен ординате точки пересечения прямой с осью Oy.

3. Уравнение прямой в отрезках. Если в общем уравнении прямой $C \neq 0$, то, разделив все его члены на $-C$, получим уравнение вида

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (3)$$

(здесь $a=-C/A$, $b=-C/B$). Его называют *уравнением прямой в отрезках*; в нем a является абсциссой точки пересечения прямой с осью Ox, а b — ординатой точки пересечения прямой с осью Oy. Поэтому a и b называют отрезками прямой на осях координат.

4. Нормальное уравнение прямой. Если обе части общего уравнения прямой $Ax+By+C=0$ умножить на число $\mu=1/(\pm\sqrt{A^2+B^2})$ (которое называется *нормирующим множителем*), причем знак перед радикалом выбрать так, чтобы выполнялось условие $\mu C<0$, то получится уравнение

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0. \qquad (4)$$

Это уравнение называется *нормальным уравнением прямой*. Здесь p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ — угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox.

63. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок $b=-3$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол $\alpha=\pi/6$.

△ Находим угловой коэффициент: $k=\operatorname{tg}(\pi/6)=1/\sqrt{3}$. Воспользовавшись уравнением (2) прямой с угловым коэффициентом, получаем $y=(1/\sqrt{3})x-3$; освобождаясь от знаменателя и перенося все члены в левую часть, получаем общее уравнение прямой $x-\sqrt{3}y-3\sqrt{3}=0$. ▲

64. Составить уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки $a=2/5$, $b=-1/10$.

△ Воспользовавшись уравнением (3) прямой в отрезках, имеем

$$\frac{x}{2/5}+\frac{y}{(-1/10)}=1.$$

Это уравнение можно переписать в виде $(5/2)x-10y=1$, или $5x-20y-2=0$ (общее уравнение прямой). ▲

65. Дано общее уравнение прямой $12x-5y-65=0$. Написать: 1) уравнение с угловым коэффициентом; 2) уравнение в отрезках; 3) нормальное уравнение.

△ 1) Разрешив уравнение относительно y, получаем уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y=(12/5)x-13.$$

Здесь $k=12/5$, $b=-13$.

2) Перенесем свободный член общего уравнения в правую часть и разделим обе части на 65; имеем $(12/65)x-(5/65)y=1$. Переписав последнее уравнение в виде

$$\frac{x}{65/12}+\frac{y}{(-65/5)}=1,$$

получим уравнение данной прямой в отрезках. Здесь $a=65/12$, $b=-65/5=-13$.

3) Находим нормирующий множитель $\mu=1/\sqrt{12^2+(-5)^2}=1/13$. Умножив обе части общего уравнения на этот множитель, получаем нормальное уравнение прямой

$$(12/13)x-(5/13)y-5=0.$$

Здесь $\cos\varphi=12/13$, $\sin\varphi=-5/13$, $p=5$. ▲

66. Построить прямые: 1) $x-2y+5=0$; 2) $2x+3y=0$; 3) $5x-2=0$; 4) $2y+7=0$.

△ 1) Полагая в уравнении $x=0$, получаем $y=5/2$. Следовательно, прямая пересекается с осью ординат в точке $B(0;\ 5/2)$. Полагая $y=0$, получаем $x=-5$, т. е. прямая пересекается с осью абсцисс в точке $A(-5;\ 0)$. Остается провести прямую через точки A и B (рис. 7).

2) Прямая $2x+3y=0$ проходит через начало координат, так как в ее уравнении отсутствует свободный член. Дадим x в уравнении прямой какое-нибудь значение. Пусть, например, $x=3$, тогда $6+3y=0$, т. е. $y=-2$; получим точку $M(3;\ -2)$. Остается через начало координат и точку M провести прямую.

3) Разрешив уравнение прямой относительно x, получим $x=2/5$. Эта прямая параллельна оси ординат и отсекает на оси абсцисс отрезок, равный $2/5$.

4) Аналогично получаем уравнение $y=-7/2$; эта прямая параллельна оси абсцисс. ▲

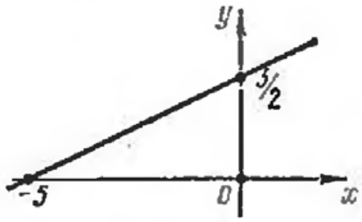

Рис. 7

67. Уравнение прямой задано в виде $(x+2\sqrt{5})/4+(y-2\sqrt{5})/2=0$. Написать: 1) общее уравнение этой прямой; 2) уравнение с угловым коэффициентом; 3) уравнение в отрезках; 4) нормальное уравнение.

68. Какой угол образует с положительным направлением оси абсцисс прямая $2x+2y-5=0$?

69. Определить площадь треугольника, образованного прямой $4x+3y-36=0$ с осями координат.

70. Можно ли уравнение прямой $20x+21y=0$ записать в отрезках?

71. Построить прямые: 1) $4x-5y+15=0$; 2) $2x-y=0$; 3) $7x-10=0$; 4) $2y+3=0$.

72. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок $b=1$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол $\alpha=2\pi/3$.

73. Прямая отсекает на осях координат равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного прямой с осями координат, равна 8 кв. ед.

74. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $A(-2;\ -3)$.

75. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ 5)$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b=7$.

76. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(-3;\ -4)$ и параллельных осям координат.

77. Составить уравнение прямой, отсекающей на осях координат равные отрезки, если длина отрезка прямой, заключенного между осями координат, равна $5\sqrt{2}$.

5. Угол между прямыми. Уравнение прямой, проходящей через две точки. *Острый угол между прямыми* $y=k_1x+b_1$ *и* $y=k_2x+b_2$ определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|. \qquad (1)$$

Условие параллельности прямых имеет вид $k_1=k_2$.

Условие перпендикулярности прямых имеет вид $k_1=-1/k_2$.

Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $M(x_1;\ y_1)$, записывается в виде

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{2}$$

Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1;\ y_1)$ *и* $M_2(x_2;\ y_2)$, записывается в виде

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}, \tag{3}$$

и угловой коэффициент этой прямой находится по формуле

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{4}$$

Если $x_1=x_2$, то уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, имеет вид $x=x_1$.

Если $y_1=y_2$, то уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, имеет вид $y=y_1$.

6. Пересечение прямых. Расстояние от точки до прямой. Пучок прямых. Если $A_1/A_2\neq B_1/B_2$, то координаты точки пересечения прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ находятся путем совместного решения уравнений этих прямых.

Расстояние от точки $M(x_0;\ y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{1}$$

Биссектрисы углов между прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ имеют уравнения

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=0. \tag{2}$$

Если пересекающиеся прямые заданы уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то уравнение

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0, \tag{3}$$

где λ — числовой множитель, определяет прямую линию, проходящую через точку пересечения заданных прямых. Давая в последнем уравнении λ различные значения, будем получать различные прямые, принадлежащие *пучку прямых*, центр которого есть точка пересечения заданных прямых.

78. Определить острый угол между прямыми $y=-3x+7$ и $y=2x+1$.

△ Полагая $k_1=-3$, $k_2=2$ в формуле (1) п. 5, получим

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{2-(-3)}{1-(-3)\cdot 2}\right|=1,\quad \text{т. е.}\quad \varphi=\frac{\pi}{4}.\ ▲$$

79. Показать, что прямые $4x-6y+7=0$ и $20x-30y-11=0$ параллельны.

△ Приведя уравнение каждой прямой к виду с угловым коэффициентом, получаем

$$y=(2/3)x+7/6 \quad\text{и}\quad y=(2/3)x-11/30.$$

Угловые коэффициенты этих прямых равны: $k_1=k_2=2/3$, т. е. прямые параллельны. ▲

80. Показать, что прямые $3x-5y+7=0$ и $10x+6y-3=0$ перпендикулярны.

△ После приведения уравнений к виду с угловым коэффициентом получаем

$$y=(3/5)\,x+7/5 \quad \text{и} \quad y=(-5/3)\,x+1/2.$$

Здесь $k_1=3/5$, $k_2=-5/3$. Так как $k_1=-1/k_2$, то прямые перпендикулярны. ▲

81. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M(-1;\,3)$ и $N(2;\,5)$.

△ Полагая $x_1=-1$, $y_1=3$, $x_2=2$, $y_2=5$ в уравнении (3) п. 5, получаем

$$\frac{y-3}{5-3}=\frac{x+1}{2+1}, \quad \text{или} \quad \frac{y-3}{2}=\frac{x+1}{3}.$$

Итак, искомое уравнение имеет вид $2x-3y+11=0$.

Полезно проверить, что уравнение составлено верно. Для этого достаточно показать, что координаты точек M и N удовлетворяют уравнению прямой. Действительно, равенства $2(-1)-3\cdot 3+11=0$, $2\cdot 2-3\cdot 5+11=0$ выполняются тождественно. ▲

82. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2;\,4)$ и $B(-2;\,-1)$.

△ Так как $x_1=x_2=-2$, то прямая имеет уравнение $x=-2$ (параллельна оси ординат). ▲

83. Показать, что прямые $3x-2y+1=0$ и $2x+5y-12=0$ пересекаются, и найти координаты точки пересечения.

△ Так как $3/2\neq(-2)/5$, то прямые пересекаются. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-2y+1=0, \\ 2x+5y-12=0, \end{cases}$$

находим $x=1$, $y=2$, т. е. прямые пересекаются в точке $(1;\,2)$. ▲

84. Определить расстояние от точки $M(x_0;\,y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$, не пользуясь нормальным уравнением прямой.

△ Задача сводится к определению расстояния между точками $M(x_0;\,y_0)$ и N, где N — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на данную прямую. Составим уравнение прямой MN. Так как угловой коэффициент заданной прямой равен $-A/B$, то угловой коэффициент прямой MN равен B/A (из условия перпендикулярности) и уравнение последней имеет вид $y-y_0=(B/A)(x-x_0)$. Это уравнение может быть переписано в виде $(x-x_0)/A=(y-y_0)/B$.

Для определения координат точки N решим систему уравнений

$$Ax+By+C=0, \quad (x-x_0)/A=(y-y_0)/B.$$

Введем вспомогательную неизвестную t:

$$(x-x_0)/A=(y-y_0)/B=t.$$

Тогда $x=x_0+At$, $y=y_0+Bt$. Подставив эти выражения в уравнение данной прямой, получим $A(x_0+At)+B(y_0+Bt)+C=0$, откуда

$$t=-(Ax_0+By_0+C)/(A^2+B^2).$$

Подставив теперь значение t в уравнения $x=x_0+At$ и $y=y_0+Bt$, определим координаты точки N:

$$x=x_0-A\,\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}, \quad y=y_0-B\,\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}.$$

Остается определить расстояние между точками M и N:

$$d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(A\,\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}\right)^2+\left(B\,\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}\right)^2}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \ ▲$$

85. Определить расстояние от точки $M(1;\ 2)$ до прямой $20x-21y-58=0$.

$$\triangle\ d=\frac{|20\cdot 1-21\cdot 2-58|}{\sqrt{400+441}}=\frac{|20-42-58|}{29}=\frac{|-80|}{29}=2\frac{22}{29}. \ ▲$$

86. Дана прямая $l: 4x-3y-7=0$. Какие из точек $A(5/2;\ 1)$, $B(3;\ 2)$, $C(1;\ -1)$, $D(0;\ -2)$, $E(4;\ 3)$, $F(5;\ 2)$ лежат на этой прямой?

△ Если точка лежит на прямой, то ее координаты должны удовлетворять уравнению прямой. Имеем: $A\in l$, так как $4(5/2)-3\cdot 1-7=0$; $B\notin l$, так как $4\cdot 3-3\cdot 2-7\neq 0$; $C\in l$, так как $4\cdot 1-3(-1)-7=0$; $D\notin l$, так как $4\cdot 0-3(-2)-7\neq 0$; $E\in l$, так как $4\cdot 4-3\cdot 3-7=0$; $F\notin l$, так как $4\cdot 5-3\cdot 2-7\neq 0$. ▲

87. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;\ -5)$ и параллельной прямой $3x+4y+2=0$.

△ Разрешив последнее уравнение относительно y, получим $y=-(3/4)x-1/2$. Следовательно, в силу условия параллельности угловой коэффициент искомой прямой равен $-3/4$. Воспользовавшись уравнением (2) п. 5, получаем

$$y-(-5)=(-3/4)[x-(-2)],\quad \text{т. е.}\quad 3x+4y+26=0. \ ▲$$

88. Даны вершины треугольника: $A(2;\ 2)$, $B(-2;\ -8)$ и $C(-6;\ -2)$. Составить уравнения медиан треугольника.

△ Находим координаты середин сторон BC, AC и AB:

$$x'=(-2-6)/2=-4,\quad y'=(-8-2)/2=-5;\quad A_1(-4;\ -5);$$
$$x''=(2-6)/2=-2,\quad y''=(2-2)/2=0;\quad B_1(-2;\ 0);$$
$$x'''=(2-2)/2=0;\quad y'''=(2-8)/2=-3;\quad C_1(0;\ -3).$$

Уравнения медиан находим с помощью уравнения прямой, проходящей через две данные точки. Уравнение медианы AA_1:

$$(y-2)/(-5-2)=(x-2)/(-4-2),\quad \text{или}\quad (y-2)/7=(x-2)/6,\ \text{т. е.}\ 7x-6y-2=0.$$

Находим уравнение медианы BB_1; поскольку точки $B(-2;\ -8)$ и $B_1(-2;\ 0)$ имеют одинаковые абсциссы, медиана BB_1 параллельна оси ординат. Ее уравнение $x+2=0$.

Уравнение медианы CC_1: $(y+2)/(-3+2)=(x+6)/(0+6)$, или $x+6y+18=0$. ▲

89. Даны вершины треугольника: $A(0;\ 1)$; $B(6;\ 5)$ и $C(12;\ -1)$. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины C.

△ По формуле (4) п. 5 найдем угловой коэффициент стороны AB: имеем $k=(5-1)/(6-0)=4/6=2/3$. В силу условия перпендикулярности угловой коэффициент высоты, проведенной из вершины C, равен $-3/2$. Уравнение этой высоты имеет вид

$$y+1=(-3/2)(x-12),\quad \text{или}\quad 3x+2y-34=0. \ ▲$$

90. Даны стороны треугольника: $x+3y-7=0\ (AB)$, $4x-y-2=0\ (BC)$, $6x+8y-35=0\ (AC)$. Найти длину высоты, проведенной из вершины B.

△ Определим координаты точки B. Решая систему уравнений $x+3y-7=0$ и $4x-y-2=0$, получим $x=1$, $y=2$, т. е. $B(1;\ 2)$. Находим длину высоты BB_1 как расстояние от точки B до прямой AC:

$$|BB_1|=\frac{|6\cdot 1+8\cdot 2-35|}{\sqrt{6^2+8^2}}=1{,}3. \ ▲$$

91. Определить расстояние между параллельными прямыми $3x+y-3\sqrt{10}=0$ и $6x+2y+5\sqrt{10}=0$.

△ Задача сводится к определению расстояния от произвольной точки одной прямой до другой прямой. Полагая, например, в уравнении первой прямой $x=0$, получаем $y=3\sqrt{10}$. Таким образом, $M(0;\ 3\sqrt{10})$ — точка, лежащая на первой прямой. Определим расстояние точки M до второй прямой:

$$d=\frac{|6\cdot 0+2\cdot 3\sqrt{10}+5\sqrt{10}|}{\sqrt{36+4}}=\frac{11\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}=5{,}5. \ ▲$$

92. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми $x+y-5=0$ и $7x-y-19=0$ (рис. 8).

△ Решим сначала эту задачу в общем виде. Биссектрисы углов, образованных двумя прямыми, являются, как известно, множеством точек, равноудаленных от этих прямых. Если уравнения заданных прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ ($A_1/A_2\neq B_1/B_2$, т. е. прямые не параллельны), то для всякой точки $M(\bar{x};\ \bar{y})$, лежащей на одной из биссектрис, имеем (используя формулу для определения расстояния от точки до прямой):

$$\frac{|A_1\bar{x}+B_1\bar{y}+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2\bar{x}+B_2\bar{y}+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

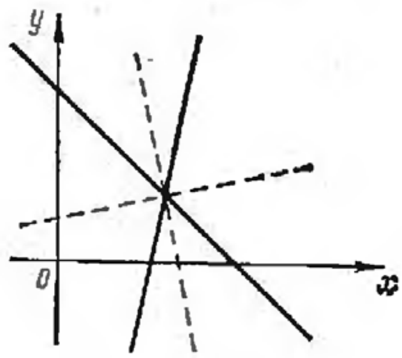

Рис. 8

Поскольку $M(\bar{x};\ \bar{y})$ — произвольная точка биссектрисы, ее можно обозначать просто через $M(x,\ y)$. Учитывая, что выражения, стоящие в последнем равенстве под знаком абсолютной величины, могут иметь разные знаки, получаем для одной из биссектрис уравнение

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

а для другой — уравнение

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Таким образом, уравнения обеих биссектрис можно записать в виде

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=0.$$

Теперь решим поставленную конкретную задачу. Заменив A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 их значениями из уравнений заданных прямых, получим

$$\frac{x+y-5}{\sqrt{1+1}}\pm\frac{7x-y-19}{\sqrt{49+1}}=0,\ \text{т. е.}\ 5(x+y-5)\pm(7x-y-19)=0.$$

Уравнение одной из биссектрис записывается в виде

$$5(x+y-5)+(7x-y-19)=0, \text{ т. е. } 3x+y-11=0,$$

а уравнение другой — в виде

$$5(x+y-5)-(7x-y-19)=0, \text{ т. е. } x-3y+3=0. \ ▲$$

93. Даны вершины треугольника: $A(1;\ 1)$, $B(10;\ 13)$, $C(13;\ 6)$. Составить уравнение биссектрисы угла A.

△ Воспользуемся другим (по сравнению с решением предыдущей задачи) способом составления уравнения биссектрисы.

Пусть D — точка пересечения биссектрисы со стороной BC. Из свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника следует, что $|BD|:|DC|=|AB|:|AC|$. Но $|AB|=\sqrt{(10-1)^2+(13-1)^2}=15$, $|AC|=\sqrt{(13-1)^2+(6-1)^2}=13$. Следовательно, $\lambda=|BD|:|DC|=15/13$. Так как известно отношение, в котором точка D делит отрезок BC, то координаты точки D определятся по формулам

$$x=\frac{10+(15/13)\,13}{1+15/13}, \quad y=\frac{13+(15/13)\,6}{1+15/13},$$

или $x=325/28$, $y=259/28$, т. е. $D(325/28;\ 259/28)$. Задача сводится к составлению уравнения прямой, проходящей через точки A и D:

$$\frac{y-1}{259/28-1}=\frac{x-1}{325/28-1}, \text{ т. е. } 7x-9y+2=0. \ ▲$$

94. Даны уравнения высот треугольника ABC: $x+y-2=0$, $9x-3y-4=0$ и координаты вершины $A(2;\ 2)$. Составить уравнения сторон треугольника.

△ Легко убедиться в том, что вершина A не лежит ни на одной из заданных высот: ее координаты не удовлетворяют уравнениям этих высот.

Пусть $9x-3y-4=0$ — уравнение высоты BB_1 и $x+y-2=0$ — уравнение высоты CC_1. Составим уравнение стороны AC, рассматривая ее как прямую, проходящую через точку A и перпендикулярную высоте BB_1. Так как угловой коэффициент высоты BB_1 равен 3, то угловой коэффициент стороны AC равен $-1/3$, т. е. $k_{AC}=-1/3$. Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через данную точку и имеющей данный угловой коэффициент, получим уравнение стороны AC:

$$y-2=(-1/3)(x-2), \text{ или } x+3y-8=0.$$

Аналогично получаем $k_{CC_1}=-1$, $k_{AB}=1$, и уравнение стороны AB имеет вид

$$y-2=x-2, \text{ т. е. } y=x.$$

Решив совместно уравнения прямых AB и BB_1, а также прямых AC и CC_1, найдем координаты вершин треугольника: $B(2/3;\ 2/3)$ и $C(-1;\ 3)$. Остается составить уравнение стороны BC:

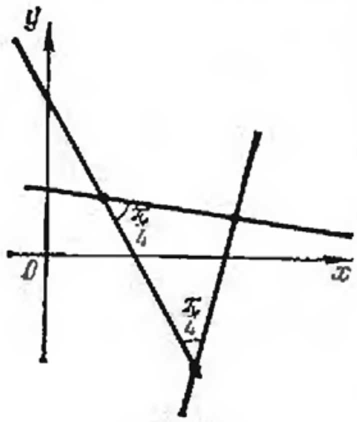

Рис. 9

$$\frac{y-2/3}{3-2/3}=\frac{x-2/3}{-1-2/3}, \text{ т. е. } 7x+5y-8=0. \ ▲$$

95. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(5;\ 1)$ и образующих с прямой $2x+y-4=0$ угол $\pi/4$ (рис. 9).

△ Пусть угловой коэффициент одной из искомых прямых равен k. Угловой коэффициент заданной прямой равен -2. Так как угол между этими прямыми равен $\pi/4$, то

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\left|\frac{k+2}{1-2k}\right|, \text{ т. е. } 1=\left|\frac{k+2}{1-2k}\right|,$$

откуда

$$\frac{k+2}{1-2k}=1 \text{ и } \frac{k+2}{1-2k}=-1.$$

Решая каждое из полученных уравнений, находим $k=-1/3$ и $k=3$. Итак, уравнение одной из искомых прямых запишется в виде $y-1=(-1/3)(x-5)$, т. е. $x+3y-8=0$, а уравнение другой прямой в виде $y-1=3(x-5)$, т. е. $3x-y-14=0$. ▲

96. Найти прямую, принадлежащую пучку $2x+3y+5+\lambda(x+8y+6)=0$ и проходящую через точку $M(1; 1)$.

△ Координаты точки M должны удовлетворять уравнению искомой прямой, поэтому для определения λ получаем уравнение

$$2\cdot 1+3\cdot 1+5+\lambda(1+8\cdot 1+6)=0, \text{ или } 10+15\lambda=0,$$

т. е. $\lambda=-2/3$. Подставив значение λ в уравнение пучка, получим уравнение искомой прямой:

$$2x+3y+5-(2/3)(x+8y+6)=0, \text{ или } 4x-7y+3=0. \ ▲$$

97. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $3x-4y+7=0$ и $5x+2y+3=0$ и параллельную оси ординат.

△ Прямая принадлежит пучку

$$3x-4y+7+\lambda(5x+2y+3)=0, \text{ т. е. } (3+5\lambda)x+(-4+2\lambda)y+(7+3\lambda)=0.$$

Так как искомая параллельна оси ординат, то коэффициент при y должен быть равен нулю: $-4+2\lambda=0$, т. е. $\lambda=2$. Остается подставить найденное значение λ в уравнение пучка, откуда получаем искомое уравнение $x+1=0$. ▲

98. Даны стороны треугольника: $x+2y+5=0$ (AB), $3x+y+1=0$ (BC) и $x+y+7=0$ (AC). Составить уравнение высоты треугольника, опущенной на сторону AC.

△ Высота принадлежит пучку

$$x+2y+5+\lambda(3x+y+1)=0, \text{ т. е. } (1+3\lambda)x+(2+\lambda)y+(5+\lambda)=0.$$

Угловой коэффициент прямой пучка равен $-(1+3\lambda)/(2+\lambda)$; так как угловой коэффициент прямой AC равен -1, то угловой коэффициент искомой высоты равен 1 и для определения λ получаем уравнение $-(1+3\lambda)/(2+\lambda)=1$. Отсюда $1+3\lambda+2+\lambda=0$, т. е. $\lambda=-3/4$. Подставив найденное значение λ в уравнение пучка, получим искомое уравнение высоты:

$$\left(1-\frac{9}{4}\right)x+\left(2-\frac{3}{4}\right)y+\left(5-\frac{3}{4}\right)=0, \text{ т. е. } 5x-5y-17=0. \ ▲$$

99. Даны вершины треугольника ABC: $A(0; 2)$, $B(7; 3)$ и $C(1; 6)$. Определить $\widehat{BAC}=\alpha$.

100. Даны стороны треугольника: $x+y-6=0$, $3x-5y+14=0$ и $5x-3y-14=0$. Составить уравнения его высот.

101. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми $3x+4y-20=0$ и $8x+6y-5=0$.

102. Даны вершины треугольника: $A(0; 0)$, $B(-1; -3)$ и $C(-5; -1)$. Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника и параллельных его сторонам.

103. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(2; 7)$ и образующих с прямой AB, где $A(-1; 7)$ и $B(8; -2)$, углы $45°$.

104. Определить расстояние от точки $M(2; -1)$ до прямой, отсекающей на осях координат отрезки $a=8$, $b=6$.

105. В треугольнике с вершинами $A(3/2; 1)$, $B(1; 5/3)$, $C(3; 3)$ найти длину высоты, проведенной из вершины C.

106. При каком значении m прямые $7x-2y-5=0$, $x+7y-8=0$ и $mx+my-8=0$ пересекаются в одной точке?

107. Даны середины сторон треугольника: $A_1(-1; -1)$, $B_1(1; 9)$ и $C_1(9; 1)$. Составить уравнения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

108. Найти острый угол, образованный с осью ординат прямой, проходящей через точки $A(2; \sqrt{3})$ и $B(3; 2\sqrt{3})$.

109. Точки $A(1; 2)$ и $C(3; 6)$ являются противоположными вершинами квадрата. Определить координаты двух других вершин квадрата.

110. На оси абсцисс найти точку, расстояние которой от прямой $8x+15y+10=0$ равно 1.

111. Даны вершины треугольника: $A(1; 1)$, $B(4; 5)$ и $C(13; -4)$. Составить уравнения медианы, проведенной из вершины B, и высоты, опущенной из вершины C. Вычислить площадь треугольника.

112. Найти прямые, принадлежащие пучку $2x+3y+6+\lambda(x-5y-6)=0$ и перпендикулярные основным прямым пучка.

113. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x+6y+5=0$, $3x-2y+1$ и через точку $M(-4/5; 1)$.

114. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x+2y+3=0$, $2x+3y+4=0$ и параллельную прямой $5x+8y=0$.

115. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $3x-y-1=0$, $x+3y+1=0$ и параллельную оси абсцисс.

116. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $5x+3y+10=0$, $x+y-15=0$ и через начало координат.

117. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x+2y+1=0$, $2x+y+2=0$ и образующую угол $135°$ с осью абсцисс.

118. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(a; b)$ и образующих с прямой $x+y+c=0$ угол $45°$.

119. Даны стороны треугольника: $x-y=0$ (AB), $x+y-2=0$ (BC), $y=0$ (AC). Составить уравнения медианы, проходящей через вершину B, и высоты, проходящей через вершину A.

120. Показать, что треугольник со сторонами $x+y\sqrt{3}+1=0$, $x\sqrt{3}+y+1=0$ и $x-y-10=0$ равнобедренный. Найти угол при его вершине.

121. Даны последовательные вершины параллелограмма: $A(0; 0)$, $B(1; 3)$, $C(7; 1)$. Найти угол между его диагоналями и показать, что этот параллелограмм является прямоугольником.

122. Даны стороны треугольника: $x-y+2=0$ (AB), $x=2$ (BC),

$x+y-2=0$ (AC). Составить уравнение прямой, проходящей через вершину B и через точку на стороне AC, делящую ее (считая от вершины A) в отношении $1:3$.

123. Показать, что треугольник с вершинами $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 1+\sqrt{3})$, $C(3;\ 1)$ равносторонний, и вычислить его площадь.

124. Показать, что треугольник, стороны которого заданы уравнениями с целыми коэффициентами, не может быть равносторонним.

125. Дана вершина треугольника $A(3;\ 9)$ и уравнения медиан: $y-6=0$ и $3x-4y+9=0$. Найти координаты двух других вершин.

126. Составить уравнение гипотенузы прямоугольного треугольника, проходящей через точку $M(2;\ 3)$, если катеты треугольника расположены на осях координат, а площадь треугольника равна 12 кв. ед.

127. Составить уравнения трех сторон квадрата, если известно, что четвертой стороной является отрезок прямой $4x+3y-12=0$, концы которого лежат на осях координат.

§ 3. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Окружность. *Окружность* — это множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра). Если r — радиус окружности, а точка $C(a;\ b)$ — ее центр, то уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{1}$$

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то последнее уравнение примет вид

$$x^2+y^2=r^2.$$

Если в левой части уравнения (1) раскрыть скобки, то получится уравнение вида

$$x^2+y^2+lx+my+n=0, \tag{2}$$

где $l=-2a$, $m=-2b$, $n=a^2+b^2-r^2$.

В общем случае уравнение (2) определяет окружность, если $l^2+m^2-4n>0$. Если $l^2+m^2-4n=0$, то указанное уравнение определяет точку $(-l/2;\ -m/2)$, а если $l^2+m^2-4n<0$, то оно не имеет геометрического смысла. В этом случае говорят, что уравнение определяет мнимую окружность.

Полезно помнить, что уравнение окружности содержит старшие члены x^2 и y^2 с равными коэффициентами и в нем отсутствует член с произведением x на y.

Взаимное расположение точки $M(x_1;\ y_1)$ и окружности $x^2+y^2=r^2$ определяется такими условиями: если $x_1^2+y_1^2=r^2$, то точка M лежит на окружности; если $x_1^2+y_1^2>r^2$, то точка M лежит вне окружности, и если $x_1^2+y_1^2<r^2$, то точка M лежит внутри окружности.

128. Найти координаты центра и радиус окружности $2x^2+2y^2-8x+5y-4=0$.

△ Разделив уравнение на 2 и сгруппировав члены уравнения, получим $x^2-4x+y^2+(5/2)\,y=2$. Дополним выражения x^2-4x и $y^2+(5/2)\,y$ до полных квадратов, прибавив к первому двучлену 4 и ко второму $(5/4)^2$ (одновременно к правой части прибавляется сумма этих чисел):

$$(x^2-4x+4)+\left(y^2+\frac{5}{2}\,y+\frac{25}{16}\right)=2+4+\frac{25}{16},$$

или

$$(x-2)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{121}{16}$$

Таким образом, координаты центра окружности $a=2$, $b=-5/4$, а радиус окружности $r=11/4$. ▲

129. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника, стороны которого заданы уравнениями $9x-2y-41=0$, $7x+4y+7=0$, $x-3y+1=0$.

△ Найдем координаты вершин треугольника, решив совместно три системы уравнений:

$$\begin{cases} 9x-2y-41=0, \\ 7x+4y+\ 7=0; \end{cases} \begin{cases} 9x-2y-41=0, \\ x-3y+\ 1=0; \end{cases} \begin{cases} 7x+4y+7=0, \\ x-3y+1=0. \end{cases}$$

В результате получим $A\ (3;\ -7)$, $B\ (5;\ 2)$, $C\ (-1;\ 0)$.

Пусть искомое уравнение окружности имеет вид $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Для нахождения a, b и r напишем три равенства, подставив в искомое уравнение вместо текущих координат координаты точек A, B и C:

$$(3-a)^2+(-7-b)^2=r^2;\quad (5-a)^2+(2-b)^2=r^2;\quad (-1-a)^2+b^2=r^2.$$

Исключая r^2, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} (3-a)^2+(-7-b)^2=(5-a)^2+(2-b)^2, \\ (3-a)^2+(-7-b)^2=(-1-a)^2+b^2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4a+18b=-29, \\ 8a-14b=57. \end{cases}$$

Отсюда $a=3{,}1$, $b=-2{,}3$. Значение r^2 находим из уравнения $(-1-a)^2+b^2=r^2$, т. е. $r^2=22{,}1$. Итак, искомое уравнение записывается в виде $(x-3{,}1)^2+(y+2{,}3)^2=22{,}1$. ▲

130. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A\ (5;\ 0)$ и $B\ (1;\ 4)$, если ее центр лежит на прямой $x+y-3=0$.

△ Найдем координаты точки M — середины хорды AB; имеем $x_M=(5+1)/2=3$, $y_M=(4+0)/2=2$, т. е. $M\ (3;\ 2)$. Центр окружности лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Уравнение прямой AB имеет вид

$$(y-0)/(4-0)=(x-5)/(1-5), \text{ т. е. } x+y-5=0.$$

Так как угловой коэффициент этой прямой есть -1, то угловой коэффициент перпендикуляра к ней равен 1, а уравнение этого перпендикуляра $y-2=1\times(x-3)$, т. е. $x-y-1=0$.

Очевидно, что центр окружности C есть точка пересечения прямой AB с указанным перпендикуляром, т. е. координаты центра определяются путем решения системы уравнений $x+y-5=0$, $x-y-1=0$. Следовательно, $x=2$, $y=1$, т. е. $C\ (2;\ 1)$. Радиус окружности равен длине отрезка CA, т. е. $r=\sqrt{(5-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{10}$. Итак, искомое уравнение имеет вид $(x-2)^2+(y-1)^2=10$. ▲

131. Составить уравнение хорды окружности $x^2+y^2=49$, делящейся в точке $A\ (1;\ 2)$ пополам.

△ Составим уравнение диаметра окружности, проходящего через точку $A\ (1;\ 2)$. Это уравнение имеет вид $y=2x$. Искомая хорда перпендикулярна диаметру и проходит через точку A, т. е. ее уравнение $y-2=(-1/2)(x-1)$, или $x+2y-5=0$. ▲

132. Найти уравнение окружности, симметричной с окружностью $x^2+y^2=2x+4y-4$ относительно прямой $x-y-3=0$.

△ Приведем уравнение данной окружности к каноническому виду $(x-1)^2+(y-2)^2=1$; центр окружности находится в точке $C\ (1;\ 2)$ и ее радиус равен 1.

Найдем координаты центра $C_1(x_1;\ y_1)$ симметричной окружности, для чего через точку $C(1;\ 2)$ проведем прямую, перпендикулярную прямой $x-y-3=0$; ее уравнение $y-2=k(x-1)$, где $k=-1/1=-1$, откуда $y-2=-x+1$, или $x+y-3=0$.

Решая совместно уравнения $x-y-3=0$ и $x+y-3=0$, получим $x=3,\ y=0$, т. е. проекция точки $C(1;\ 2)$ на данную прямую — точка $P(3;\ 0)$. Координаты же симметричной точки получим по формулам координат середины отрезка: $3=(1+x_1)/2$, $0=(2+y_1)/2$; таким образом, $x_1=5$, $y_1=-2$. Значит, точка $C_1(5;\ -2)$ — центр симметричной окружности, а уравнение этой окружности имеет вид $(x-5)^2+(y+2)^2=1$. ▲

133. Найти множество середин хорд окружности $x^2+y^2=4(y+1)$, проведенных через начало координат.

△ Уравнение множества хорд имеет вид $y=kx$. Выразим координаты точки пересечения хорд с окружностью через k, для чего решим систему уравнений $y=kx$ и $x^2+y^2-4y-4=0$. Получим квадратное уравнение $x^2(k^2+1)-4kx-4=0$. Здесь $x_1+x_2=4k/(1+k^2)$. Но полусумма этих абсцисс дает абсциссу середины хорды, т. е. $x=2k/(1+k^2)$, а ордината середины хорды $y=2k^2/(1+k^2)$. Последние два равенства являются параметрическими уравнениями искомого множества точек.

Исключив из этих равенств k (для чего достаточно в соотношении $x=2k/(1+k^2)$ положить $k=y/x$), получим $x^2+y^2-2y=0$. Таким образом, искомым множеством также является окружность. ▲

134. Определить координаты центров и радиусы окружностей: 1) $x^2+y^2-8x+6y=0$; 2) $x^2+y^2+10x-4y+29=0$; 3) $x^2+y^2-4x+14y+54=0$.

135. Найти угол между радиусами окружности $x^2+y^2+4x-6y=0$, проведенными в точки ее пересечения с осью Oy.

136. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(1;\ 2)$, $B(0;\ -1)$ и $C(-3;\ 0)$.

137. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(7;\ 7)$ и $B(-2;\ 4)$, если ее центр лежит на прямой $2x-y-2=0$.

138. Составить уравнение общей хорды окружностей $x^2+y^2=16$ и $(x-5)^2+y^2=9$.

139. Составить уравнения касательных к окружности $(x-3)^2+(y+2)^2=25$, проведенных в точках пересечения окружности с прямой $x-y+2=0$.

140. Дана окружность $x^2+y^2=4$. Из точки $A(-2;\ 0)$ проведена хорда AB, которая продолжена на расстояние $|BM|=|AB|$. Найти множество точек M.

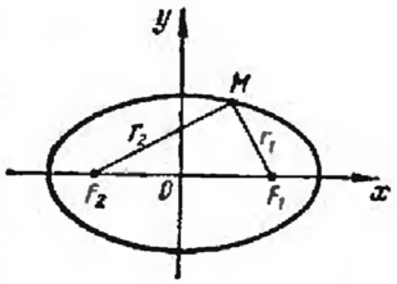

Рис. 10

2. **Эллипс.** *Эллипсом* называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обозначают через $2a$), причем эта постоянная больше расстояния между фокусами.

Если оси координат расположены по отношению к эллипсу так, как на рис. 10, а фокусы эллипса находятся на оси Ox на равных расстояниях от начала координат в точках $F_1(c;\ 0)$ и $F_2(-c;\ 0)$, то получится *простейшее (каноническое) уравнение эллипса*:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

Здесь a — большая, b — малая полуось эллипса, причем a, b и c (c — половина расстояния между фокусами) связаны соотношением $a^2=b^2+c^2$.

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется его *эксцентриситетом* $e=c/a$ (так как $c<a$, то $e<1$).

Расстояния некоторой точки эллипса M от его фокусов называются *фокальными радиусами-векторами* этой точки. Их обычно обозначают r_1 и r_2 (в силу определения эллипса для любой его точки $r_1+r_2=2a$).

В частном случае, когда $a=b$ ($c=0$, $e=0$, фокусы сливаются в одной точке — центре), эллипс превращается в окружность (с уравнением $x^2+y^2=a^2$).

Взаимное расположение точки $M(x_1;\ y_1)$ и эллипса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ определяется условиями: если $x_1^2/a^2+y_1^2/b^2=1$, то точка M лежит на эллипсе; если $x_1^2/a^2+y_1^2/b^2>1$, то точка M лежит вне эллипса; если $x_1^2/a^2+y_1^2/b^2<1$, то точка M лежит внутри эллипса.

Фокальные радиусы-векторы выражаются через абсциссу точки эллипса по формулам $r_1=a-ex$ (правый фокальный радиус-вектор) и $r_2=a+ex$ (левый фокальный радиус-вектор).

141. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M(5/2;\ \sqrt{6}/4)$ и $N(-2;\ \sqrt{15}/5)$.

△ Пусть $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ — искомое уравнение эллипса. Этому уравнению должны удовлетворять координаты данных точек. Следовательно,

$$\frac{25}{4a^2}+\frac{3}{8b^2}=1,\quad \frac{4}{a^2}+\frac{3}{5b^2}=1.$$

Отсюда находим $a^2=10$, $b^2=1$. Итак, уравнение эллипса имеет вид $x^2/10+$ $+y^2=1$. ▲

142. На эллипсе $x^2/25+y^2/9=1$ найти точку, разность фокальных радиусов-векторов которой равна 6,4.

143. Найти длину перпендикуляра, восставленного из фокуса эллипса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ к большой оси до пересечения с эллипсом.

144. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса $x^2/25+y^2/16=1$.

145. Эллипс, отнесенный к осям, проходит через точку $M(1;\ 1)$ и имеет эксцентриситет $e=3/5$. Составить уравнение эллипса.

146. Как расположены относительно эллипса $x^2/50+y^2/32=1$ точки $M(7;\ 1)$, $N(-5;\ -4)$, $P(4;\ 5)$?

147. Найти эксцентриситет эллипса, если фокальный отрезок виден из верхней вершины под углом α.

148. На прямой $x+5=0$ найти точку, одинаково удаленную от левого фокуса и верхней вершины эллипса $x^2/20+y^2/4=1$.

149. Пользуясь определением эллипса, составить его уравнение, если известно, что точки $F_1(0;\ 0)$ и $F_2(1;\ 1)$ являются фокусами эллипса, а длина большой оси равна 2.

150. Составить уравнение множества точек, расстояния которых от точки $A(0;\ 1)$ в два раза меньше расстояния до прямой $y-4=0$.

151. Концы отрезка AB постоянной длины a скользят по сторонам прямого угла. Найти уравнение кривой, описываемой точкой M, делящей этот отрезок в отношении $1:2$.

3. Гипербола. *Гиперболой* называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обозначают через $2a$), причем эта постоянная меньше расстояния между фокусами. Если поместить фокусы гиперболы в точках $F_1(c;\ 0)$ и $F_2(-c;\ 0)$, то получится *каноническое уравнение гиперболы*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (1)$$

где $b^2=c^2-a^2$. Гипербола состоит из двух ветвей и расположена симметрично относительно осей координат. Точки $A_1(a;\ 0)$ и $A_2(-a;\ 0)$ называются *вершинами* гиперболы. Отрезок A_1A_2 такой, что $|A_1A_2|=2a$, называется *действительной осью* гиперболы, а отрезок B_1B_2 такой, что $|B_1B_2|=2b$, — *мнимой осью* (рис. 11).

Прямая называется *асимптотой* гиперболы, если расстояние точки $M(x;\ y)$ гиперболы от этой прямой стремится к нулю при $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$. Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y=\pm(b/a)x$.

Для построения асимптот гиперболы строят осевой прямоугольник гиперболы со сторонами $x=a$, $x=-a$, $y=b$, $y=-b$. Прямые, проходящие через противоположные вершины этого прямоугольника, являются асимптотами гиперболы. На рис. 11 указано взаимное расположение гиперболы и ее асимптот. Отношение $e=c/a>1$ называется *эксцентриситетом* гиперболы.

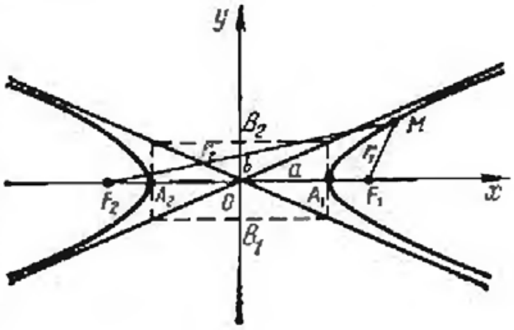

Рис. 11

Фокальные радиусы-векторы правой ветви гиперболы: $r_1=ex-a$ (правый фокальный радиус-вектор), $r_2=ex+a$ (левый фокальный радиус-вектор).

Фокальные радиусы-векторы левой ветви гиперболы: $r_1=-ex+a$ (правый фокальный радиус-вектор), $r_2=-ex-a$ (левый фокальный радиус-вектор).

Если $a=b$, то уравнение гиперболы принимает вид

$$x^2-y^2=a^2.$$

Такая гипербола называется *равнобочной*. Ее асимптоты образуют прямой угол. Если за оси координат принять асимптоты равнобочной гиперболы, то ее уравнение примет вид $xy=m$ ($m=\pm a^2/2$; при $m>0$ гипербола расположена в I и III четвертях, при $m<0$ — во II и IV четвертях). Так как уравнение $xy=m$ можно переписать в виде $y=m/x$, то равнобочная гипербола является графиком обратной пропорциональной зависимости между величинами x и y.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad \left(\text{или } \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\right) \qquad (2)$$

также является уравнением гиперболы, но действительной осью этой гиперболы служит отрезок оси Oy длины $2b$.

Две гиперболы $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ и $x^2/a^2-y^2/b^2=-1$ имеют одни и те же полуоси и одни и те же асимптоты, но действительная ось одной служит мнимой осью другой, и наоборот. Такие две гиперболы называют *сопряженными*.

152. На правой ветви гиперболы $x^2/16-y^2/9=1$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса в два раза меньше ее расстояния от левого фокуса.

△ Для правой ветви гиперболы фокальные радиусы-векторы определяются по формулам $r_1=ex-a$ и $r_2=ex+a$. Следовательно, имеем уравнение $ex+a=2(ex-a)$, откуда $x=3a/e$; здесь $a=4$, $e=c/a=\sqrt{a^2+b^2}/a=\sqrt{16+9}/4=5/4$, т. е. $x=9{,}6$.

Ординату находим из уравнения гиперболы:

$$y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}=\pm\frac{3}{4}\sqrt{\left(\frac{48}{5}\right)^2-16}=\pm\frac{3}{5}\sqrt{119}.$$

Таким образом, условию задачи удовлетворяют две точки: $M_1(9{,}6;\ 0{,}6\sqrt{119})$ и $M_2(9{,}6;\ -0{,}6\sqrt{119})$. ▲

153. Даны точки $A(-1;\ 0)$ и $B(2;\ 0)$. Точка M движется так, что в треугольнике AMB угол $\hat{B}$ остается вдвое больше угла $\hat{A}$. Найти уравнение кривой, которую опишет точка M.

△ Взяв точку M с координатами x и y, выразим $\operatorname{tg}\hat{B}$ и $\operatorname{tg}\hat{A}$ через координаты точек A, B и M:

$$\operatorname{tg}\hat{B}=-\frac{y}{x-2}=\frac{y}{2-x},\quad \operatorname{tg}\hat{A}=\frac{y}{x+1}.$$

Согласно условию, получаем уравнение $\operatorname{tg}\hat{B}=\operatorname{tg}2\hat{A}$, т. е. $\operatorname{tg}\hat{B}=2\operatorname{tg}\hat{A}/(1-\operatorname{tg}^2\hat{A})$. Подставив в это равенство найденные для $\operatorname{tg}\hat{B}$ и $\operatorname{tg}\hat{A}$ выражения, приходим к уравнению

$$\frac{y}{2-x}=\frac{2y/(x+1)}{1-y^2/(1+x)^2};$$

после сокращения на y $(y\neq 0)$ и упрощения получаем $x^2-y^2/3=1$. Искомая кривая — гипербола. ▲

154. Эксцентриситет гиперболы равен $\sqrt{2}$. Составить простейшее уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(\sqrt{3};\ \sqrt{2})$.

△ Согласно определению эксцентриситета, имеем $c/a=\sqrt{2}$, или $c^2=2a^2$. Но $c^2=a^2+b^2$; следовательно, $a^2+b^2=2a^2$, или $a^2=b^2$, т. е. гипербола равнобочная.

Другое равенство получим из условия нахождения точки M на гиперболе, т. е. $(\sqrt{3})^2/a^2-(\sqrt{2})^2/b^2=1$, или $3/a^2-2/b^2=1$. Поскольку $a^2=b^2$, получим $3/a^2-2/a^2=1$, т. е. $a^2=1$.

Таким образом, уравнение искомой гиперболы имеет вид $x^2-y^2=1$. ▲

155. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(9;\ 8)$, если асимптоты гиперболы имеют уравнения $y=\pm(2\sqrt{2}/3)\,x$.

156. Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих фокусах и вершинах эллипса $x^2/8+y^2/5=1$.

157. Через точку $M(0;\ -1)$ и правую вершину гиперболы $3x^2-4y^2=12$ проведена прямая. Найти вторую точку пересечения прямой с гиперболой.

158. Дана гипербола $x^2-y^2=8$. Найти софокусный эллипс, проходящий через точку $M(4;\ 6)$.

159. Дан эллипс $9x^2+25y^2=1$. Написать уравнение софокусной равнобочной гиперболы.

160. Угол между асимптотами гиперболы равен 60°. Вычислить эксцентриситет гиперболы.

161. На левой ветви гиперболы $x^2/64-y^2/36=1$ найти точку, правый фокальный радиус-вектор которой равен 18.

162. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2 и фокусы совпадают с фокусами эллипса $x^2/25+y^2/9=1$.

163. Найти фокальные радиусы-векторы гиперболы $x^2/16-y^2/9=1$ в точках пересечения ее с окружностью $x^2+y^2=91$.

164. Доказать, что длина перпендикуляра, опущенного из фокуса на одну из асимптот гиперболы, равна мнимой полуоси.

165. Доказать, что произведение расстояний от любой точки гиперболы $x^2-y^2=1$ до ее асимптот есть величина постоянная.

166. Найти уравнение множества точек, равноотстоящих от окружности $x^2+4x+y^2=0$ и от точки $M(2;\ 0)$.

4. Парабола. *Параболой* называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой*. Если директрисой параболы является прямая $x=-p/2$, а фокусом — точка $F(p/2;\ 0)$, то уравнение параболы имеет вид

$$y^2=2px. \qquad (1)$$

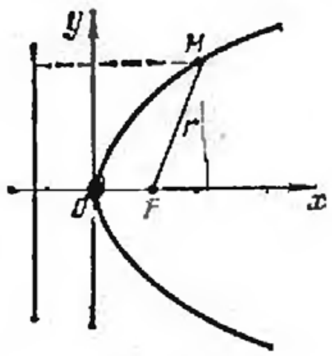

Рис. 12

Эта парабола расположена симметрично относительно оси абсцисс (рис. 12, где $p>0$).

Уравнение

$$x^2=2py \qquad (2)$$

является уравнением параболы, симметричной относительно оси ординат. При $p>0$ параболы (1) и (2) обращены в положительную сторону соответствующей оси, а при $p<0$ — в отрицательную сторону.

Длина фокального радиуса-вектора параболы $y^2=2px$ определяется по формуле $r=x+p/2$ $(p>0)$.

167. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox, с вершиной в начале координат, если длина некоторой хорды этой параболы, перпендикулярной оси Ox, равна 16, а расстояние этой хорды от вершины равно 6.

△ Так как известны длина хорды и расстояние ее от вершины, то, следовательно, известны координаты конца этой хорды — точки M, лежащей на параболе. Уравнение параболы имеет вид $y^2=2px$; полагая в нем $x=6$, $y=8$, находим $8^2=2p\cdot 6$, откуда $2p=32/3$. Итак, уравнение искомой параболы $y^2=32x/3$. ▲

168. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Oy и отсекающей на биссектрисе I и III координатных углов хорду длиной $8\sqrt{2}$.

△ Искомое уравнение параболы $x^2=2py$, уравнение биссектрисы $y=x$. Таким образом, получаем точки пересечения параболы с биссектрисой: $O(0;\ 0)$ и $M(2p;\ 2p)$. Длина хорды определяется как расстояние между двумя точками: $8\sqrt{2}=\sqrt{4p^2+4p^2}$, откуда $2p=8$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид $x^2=8y$. ▲

169. Составить простейшее уравнение параболы, если известно, что ее фокус находится в точке пересечения прямой $4x-3y-4=0$ с осью Ox.

170. На параболе $y^2=8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

171. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox и отсекающей от прямой $y=x$ хорду длиной $4\sqrt{2}$.

172. Парабола $y^2=2x$ отсекает от прямой, проходящей через начало координат, хорду, длина которой равна 3/4. Составить уравнение этой прямой.

173. Составить простейшее уравнение параболы, если длина хорды, перпендикулярной оси симметрии и делящей пополам расстояние между фокусом и вершиной, равна 1.

174. На параболе $y^2=32x$ найти точку, расстояние которой от прямой $4x+3y+10=0$ равно 2.

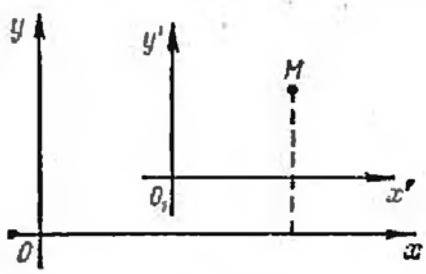

Рис. 13

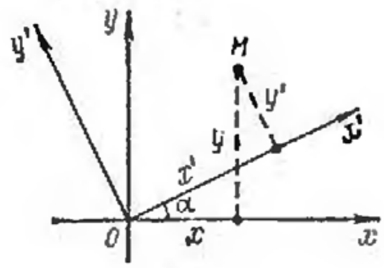

Рис. 14

175. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точку $M(4;\ 2)$; определить угол α между фокальным радиусом-вектором этой точки и осью Ox.

§ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ И УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Преобразование координат. При переходе от системы координат xOy к новой системе $x'O_1y'$ (направление осей координат прежнее, за новое начало координат принята точка $O_1(a;\ b)$; рис. 13) связь между старыми и новыми координатами некоторой точки M плоскости определяется следующими формулами:

$$x=x'+a,\quad y=y'+b; \tag{1}$$
$$x'=x-a,\quad y'=y-b. \tag{2}$$

С помощью формул (1) старые координаты выражаются через новые, а с помощью формул (2) — новые через старые.

При повороте осей координат на угол α (начало координат прежнее, причем α отсчитывается против часовой стрелки; рис. 14) зависимость между старыми координатами x, y и новыми x', y' определяется следующими формулами:

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\quad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha; \tag{3}$$
$$x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\quad y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha. \tag{4}$$

176. Сделан параллельный перенос осей координат, причем новое начало расположено в точке $O_1(3;\ -4)$. Известны старые координаты точки $M(7;\ 8)$. Определить новые координаты этой же точки.

△ Здесь $a=3$, $b=-4$, $x=7$, $y=8$. По формулам (2) находим $x'=7-3=4$, $y'=8-(-4)=12$. ▲

177. На плоскости xOy дана точка $M(4;\ 3)$. Система координат повернута вокруг начала координат так, что новая ось прошла через точку M. Определить старые координаты точки A, если известны ее новые координаты $x'=5$, $y'=5$.

△ Так как $|OM|=\sqrt{4^2+3^2}=5$, то $\sin\alpha=3/5$, $\cos\alpha=4/5$; тогда формулы (3) преобразования координат для данной задачи примут вид $x=(4/5)x'-(3/5)y'$, $y=(3/5)x'+(4/5)y'$. Полагая $x'=y'=5$, находим $x=1$, $y=7$. ▲

178. Система координат повернута на угол $\alpha=\pi/6$. Определить новые координаты точки $M(\sqrt{3};\ 3)$.

△ Используя формулы (4), получим

$$x'=\sqrt{3}\cos(\pi/6)+3\sin(\pi/6)=3/2+3/2=3,$$

$$y'=-\sqrt{3}\sin(\pi/6)+3\cos(\pi/6)=-\sqrt{3}/2+3\sqrt{3}/2=\sqrt{3}.\ ▲$$

179. Дана точка $M(9/2;\ 11/2)$. За новые координатные оси приняты прямые $2x-1=0$ (ось O_1y'), $2y-5=0$ (ось O_1x'). Найти координаты точки M в новой системе координат.

180. Дана точка $M(4\sqrt{5};\ 2\sqrt{5})$. За новую ось абсцисс принята прямая $y=2x$, а за новую ось ординат — прямая $y=-0{,}5x$, причем новые оси координат образуют с соответствующими старыми осями острые углы. Найти координаты точки M в новой системе.

2. Парабола $y=Ax^2+Bx+C$ и гипербола $y=(kx+l)/(px+q)$. Уравнение вида

$$y=Ax^2+Bx+C$$

преобразованием координат при параллельном переносе осей, т. е. по формулам $x=x'+a$, $y=y'+b$ (a и b — координаты нового начала, x' и y' — новые координаты), преобразуется к каноническому виду уравнения параболы.

Парабола, определяемая уравнением $y=Ax^2+Bx+C$, имеет ось симметрии, параллельную оси Oy (аналогично, уравнение $x=Ay^2+By+C$ определяет параболу с осью симметрии, параллельной оси Ox).

Дробно-линейная функция

$$y=(kx+l)/(px+q)$$

определяет равнобочную гиперболу, если $kq-pl\neq 0$, $p\neq 0$; преобразованием координат при параллельном переносе осей координат это уравнение преобразуется к каноническому виду уравнения равнобочной гиперболы $xy=m$, т. е. к уравнению равнобочной гиперболы, у которой оси координат являются асимптотами. При $m>0$ ветви гиперболы расположены в I и III четверти, а при $m<0$ — во II и IV четверти.

181. Привести к каноническому виду уравнение параболы $y=9x^2-6x+2$.

△ Заменим x на $x'+a$ и y на $y'+b$:

$$y'+b=9(x'+a)^2-6(x'+a)+2,$$

или

$$y'=9x'^2+6x'(3a-1)+(9a^2-6a+2-b).$$

Найдем такие значения a и b, при которых коэффициент при x' и свободный член обратятся в нуль: $3a-1=0$, $9a^2-6a+2-b=0$, т. е. $a=1/3$, $b=1$. Следовательно, каноническое уравнение параболы имеет вид $x'^2=(1/9)y'$. Вершина параболы находится в точке $O_1(1/3;\ 1)$ и $p=1/18$.

Другой способ решения таких задач заключается в том, что заданное уравнение вида $y=Ax^2+Bx+C$ (или $x=Ay^2+By+C$) приводится к виду $(x-a)^2=2p(y-b)$ [соответственно $(y-b)^2=2p(x-a)$]. Тогда точка $O_1(a;\ b)$ служит вершиной параболы, а знак параметра p определит, в какую сторону — положительную или отрицательную соответствующей оси (Oy или Ox) — направлена парабола.

Так, уравнение $y=9x^2-6x+2$ преобразуется следующим образом:

$$y=9\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)-1+2;$$

$$y-1=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2;\quad \left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}(y-1).$$

Отсюда снова получаем, что вершина параболы находится в точке $O_1(1/3;\ 1)$, параметр $p=1/18$, а ветвь параболы направлена в положительную сторону оси Oy. ▲

182. Привести уравнение гиперболы $y=(4x+5)/(2x-1)$ к виду $x'y'=k$. Найти уравнения асимптот гиперболы относительно первоначальной системы координат.

△ С помощью параллельного переноса осей координат преобразуем данное уравнение к виду

$$(y'+b)(2x'+2a-1)=4x'+4a+5,$$

или

$$2x'y'+(2b-4)x'+(2a-1)y'=4a+b-2ab+5.$$

Найдем a и b из условий $2b-4=0$ и $2a-1=0$, т. е. $a=0{,}5$, $b=2$. Тогда уравнение гиперболы в новой системе координат примет вид $x'y'=3{,}5$. Асимптотами гиперболы служат новые оси координат, а поэтому их уравнения $x'=0{,}5$, $y'=2$.

Другой способ решения таких задач заключается в том, что уравнение вида $y=(kx+l)/(px+q)$ преобразуется к виду $(x-a)(y-b)=m$; центр гиперболы находится в точке $O_1(a;\ b)$; ее асимптотами служат прямые $x=a$ и $y=b$, знак m по-прежнему определяет, в каких углах между асимптотами находятся ветви гиперболы.

Так, уравнение $y=(4x+5)/(2x-1)$ преобразуется следующим образом:

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)y-4\left(x-\frac{1}{2}+\frac{7}{4}\right)=0;$$

$$(2x-1)y-(4x+5)=0;\ 2(x-0{,}5)(y-2)=7.$$

Значит, уравнение гиперболы приведено к виду $(x-0{,}5)(y-2)=3{,}5$; центр гиперболы находится в точке $O_1(0{,}5;\ 2)$, ветви гиперболы расположены в I и III четвертях между ее асимптотами $x-0{,}5=0$, $y-2=0$. ▲

183. Привести к каноническому виду уравнения парабол: 1) $y=4x-2x^2$; 2) $y=-x^2+2x+2$; 3) $x=-4y^2+y$; 4) $x=y^2+4y+5$.

184. Преобразовать уравнения гипербол к виду $x'y'=m$: 1) $y=2x/(4x-1)$; 2) $y=(2x+3)/(3x-2)$; 3) $y=(10x+2)/(5x+4)$; 4) $y=(4x+3)/(2x+1)$.

3. Пятичленное уравнение кривой второго порядка. Уравнение второй степени вида

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

(не содержащее члена xy с произведением координат) называется *пятичленным уравнением кривой второго порядка*. Оно определяет на плоскости xOy эллипс, гиперболу или параболу (с возможными случаями распада и вырождения этих кривых) с осями симметрии, параллельными осям координат, в зависимости от знака произведения коэффициентов A и C.

1. Пусть $AC > 0$; тогда определяемая этим уравнением кривая есть эллипс (действительный, мнимый или выродившийся в точку); при $A=C$ эллипс превращается в окружность.

2. Пусть $AC < 0$; тогда соответствующая кривая является гиперболой, которая может вырождаться в две пересекающиеся прямые, если левая часть уравнения распадается на произведение двух линейных множителей;

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2).$$

3. Пусть $AC=0$ (т. е. либо $A=0$, $C\neq 0$, либо $C=0$, $A\neq 0$); тогда уравнение определяет параболу, которая может вырождаться в две параллельные прямые (действительные различные, действительные слившиеся или мнимые), если левая часть уравнения не содержит либо x, либо y (т. е. если уравнение имеет вид $Ax^2+2Dx+F=0$ или $Cy^2+2Ey+F=0$).

Вид кривой и расположение ее на плоскости легко устанавливаются преобразованием уравнения к виду $A(x-x_0)^2+C(y-y_0)^2=f$ (в случае $AC>0$ или $AC<0$); по виду полученного уравнения обнаруживаются и случаи распада или вырождения эллипса и гиперболы.

В случае невырожденных кривых переносом начала координат в точку $O_1(x_0; y_0)$ полученное уравнение эллипса или гиперболы можно привести к каноническому виду.

Случай $AC=0$ подробно рассмотрен в предыдущем параграфе, поскольку уравнение невырожденной параболы здесь может быть записано в виде $y=a_1x^2+b_1x+c$ или $x=a_1y^2+b_1y+c_1$.

185. Какую линию определяет уравнение $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$?

△ Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$4(x^2-2x)+9(y^2-4y)=-4;$$
$$4(x^2-2x+1-1)+9(y^2-4y+4-4)=-4;$$
$$4(x-1)^2+9(y-2)^2=-4+4+36;\quad 4(x-1)^2+9(y-2)^2=36.$$

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало координат точку $O'(1;\ 2)$. Воспользуемся формулами преобразования координат: $x=x'+1$, $y=y'+2$. Относительно новых осей уравнение кривой примет вид

$$4x'^2+9y'^2=36,\quad \text{или}\quad x'^2/9+y'^2/4=1.$$

Таким образом, заданная кривая является эллипсом. ▲

186. Какую линию определяет уравнение $x^2-9y^2+2x+36y-44=0$?

△ Преобразуем данное уравнение так:

$$(x^2+2x+1-1)-9(y^2-4y+4-4)=44;$$
$$(x+1)^2-9(y-2)^2=44+1-36,\quad (x+1)^2-9(y-2)^2=9.$$

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало точку $O'(-1;\ 2)$. Формулы преобразования координат имеют вид $x=x'-1$, $y=y'+2$. После преобразования координат получим уравнение

$$x'^2-9y'^2=9,\quad \text{или}\quad x'^2/9-y'^2=1.$$

Кривая является гиперболой. Асимптотами этой гиперболы относительно новых осей служат прямые $y'=\pm(1/3)x'$. ▲

Установить, какие кривые определяются нижеследующими уравнениями. Построить чертежи.

187. $36x^2+36y^2-36x-24y-23=0$.

188. $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0$.

189. $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2-x+\frac{2}{3}y-1=0.$

190. $x^2+4y^2-4x-8y+8=0.$

191. $x^2+4y^2+8y+5=0.$

192. $x^2-y^2-6x+10=0.$

193. $2x^2-4x+2y-3=0.$

194. $x^2-6x+8=0.$

195. $x^2+2x+5=0.$

4. **Приведение к каноническому виду общего уравнения кривой второго порядка.** Если кривая второго порядка задана уравнением

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

то, применив преобразование поворота осей координат с использованием формул $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$, $y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$, следует при надлежащем выборе α освободиться в уравнении от члена с произведением координат.

Дальнейшие преобразования были рассмотрены в предыдущем разделе.

Случай распада кривой второго порядка на две прямые может быть легко установлен по исходному уравнению следующим образом: рассматривая уравнение как квадратное относительно y (предполагая, что коэффициент при y^2 отличен от нуля), разрешают его относительно y; если при этом под корнем окажется точный квадрат некоторого двучлена $ax+b$, то корень извлечется, и для y получатся два значения: $y_1=k_1x+b_1$; $y_2=k_2x+b_2$. Это и покажет, что кривая распадается на две прямые.

Данное уравнение может быть разрешено и относительно x. Если в общем уравнении кривой второго порядка $A=C=0$ (естественно, что $B\neq 0$), то указанное уравнение определяет пару прямых тогда и только тогда, если $B/D=2E/F$. В этом случае левая часть уравнения разлагается на линейные множители.

196. Показать, что уравнение $9x^2+24xy+16y^2-25=0$ определяет совокупность двух прямых.

△ Перепишем уравнение в виде $(3x+4y)^2-25=0$. Разложив левую часть на множители, получаем $(3x+4y+5)(3x+4y-5)=0$. Таким образом, заданное уравнение определяет прямые $3x+4y+5=0$ и $3x+4y-5=0$. ▲

197. Показать, что уравнение $3x^2+8xy-3y^2-14x-2y+8=0$ определяет совокупность двух прямых.

△ Перепишем уравнение в виде $3y^2-2(4x-1)y-(3x^2-14x+8)=0$. Разрешим уравнение относительно y:

$$y=\frac{4x-1\pm\sqrt{(4x-1)^2+(9x^2-42x+24)}}{3},\quad \text{или}\quad y=\frac{4x-1\pm(5x-5)}{3}.$$

Получаем уравнения прямых $y=3x-2$ и $y=(-x+4)/3$. Эти уравнения можно записать в виде $3x-y-2=0$, $x+3y-4=0$. ▲

198. Какая линия определяется уравнением $xy+2x-4y-8=0$?

△ Запишем уравнение в виде $x(y+2)-4(y+2)=0$, или $(x-4)(y+2)=0$. Таким образом, уравнение определяет две прямые $x-4=0$ и $y+2=0$, одна из которых параллельна оси Ox, а другая параллельна оси Oy. ▲

199. Привести к каноническому виду уравнение

$$5x^2+4xy+8y^2+8x+14y+5=0.$$

△ 1. Преобразуем это уравнение, воспользовавшись формулами (3) п. 1 поворота осей координат. Имеем

$$5(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+4(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+$$
$$+8(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2+8(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+14(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+5=0,$$

или

$$(5\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+8\sin^2\alpha)x'^2+(5\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha+8\cos^2\alpha)y'^2+$$
$$+[6\sin\alpha\cos\alpha+4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)]x'y'+(8\cos\alpha+14\sin\alpha)x'+$$
$$+(14\cos\alpha-8\sin\alpha)y'+5=0.$$

Найдем α из условия $4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+6\sin\alpha\cos\alpha=0$, т. е. приравняем нулю коэффициент при $x'y'$. Получаем уравнение $2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha-3\,\mathrm{tg}\,\alpha-2=0$. Отсюда $\mathrm{tg}\,\alpha_1=2$, $\mathrm{tg}\,\alpha_2=-1/2$.

Заметим, что эти значения $\mathrm{tg}\,\alpha$ соответствуют двум взаимно перпендикулярным направлениям. Поэтому, взяв $\mathrm{tg}\,\alpha=2$ вместо $\mathrm{tg}\,\alpha=-1/2$, мы только меняем ролями оси x' и y' (рис. 15).

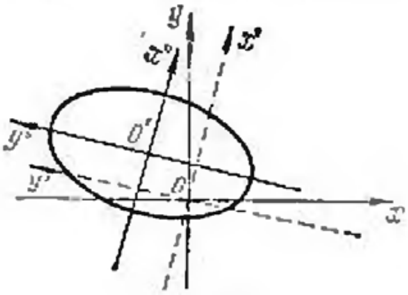

Рис. 15

Пусть $\mathrm{tg}\,\alpha=2$, тогда $\sin\alpha=\pm 2/\sqrt{5}$, $\cos\alpha=\pm 1/\sqrt{5}$; возьмем положительные значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Тогда уравнение принимает вид

$$9x'^2+4y'^2+\frac{36}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'+5=0,$$

или

$$9\left(x'^2+\frac{4}{\sqrt{5}}x'\right)+4\left(y'^2-\frac{1}{2\sqrt{5}}y'\right)=-5.$$

2. Выражения в скобках дополним до полных квадратов:

$$9\left(x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2=\frac{36}{5}+\frac{1}{20}-5,$$

или

$$9\left(x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2=\frac{9}{4}.$$

Приняв за новое начало точку $O'\left(-2/\sqrt{5};\ 1/(4\sqrt{5})\right)$, применим формулы преобразования координат $x'=x''-2/\sqrt{5}$, $y'=y''+1/(4\sqrt{5})$; получим $9x''^2+4y''^2=9/4$, или $\frac{x''^2}{1/4}+\frac{y''^2}{9/16}=1$ (уравнение эллипса). ▲

200. Привести к каноническому виду уравнение

$$6xy+8y^2-12x-26y+11=0.$$

△ 1. Преобразуем это уравнение, воспользовавшись формулами (3) п. 1 поворота осей координат:

$$6(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+8(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2-$$
$$-12(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)-26(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+11=0,$$

или

$$(6\sin\alpha\cos\alpha+8\sin^2\alpha)x'^2+(8\cos^2\alpha-6\sin\alpha\cos\alpha)y'^2+$$
$$+[16\sin\alpha\cos\alpha+6(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)]x'y'-$$
$$-(12\cos\alpha+26\sin\alpha)x'-(26\cos\alpha-12\sin\alpha)y'+11=0.$$

Приравнивая нулю коэффициент при $x'y'$, имеем

$$16\sin\alpha\cos\alpha+6(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0,\ \text{или}\ 3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha-8\,\mathrm{tg}\,\alpha-3=0.$$

Отсюда $\mathrm{tg}\,\alpha_1=3$, $\mathrm{tg}\,\alpha_2=-1/3$; примем $\mathrm{tg}\,\alpha=3$, тогда $\sin\alpha=\pm 3/\sqrt{10}$, $\cos\alpha=\pm 1/\sqrt{10}$; возьмем положительные значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Тогда уравнение принимает вид

$$9x'^2-y'^2-9\sqrt{10}\,x'+\sqrt{10}\,y'+11=0,$$

или

$$9(x'^2-\sqrt{10}\,x')-(y'^2-\sqrt{10}\,y')=-11.$$

2. Выражения в скобках дополним до полных квадратов:

$$9\left(x'-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2-\left(y'-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=\frac{45}{2}-\frac{5}{2}-11,$$

или

$$9\left(x'-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2-\left(y'-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=9.$$

Приняв за новое начало точку $O'(\sqrt{10}/2;\ \sqrt{10}/2)$, применим формулы преобразования координат $x'=x''+\sqrt{10}/2$, $y'=y''+\sqrt{10}/2$; получим $9x''^2-y''^2=9$, или $x''^2-y''^2/9=1$ (уравнение гиперболы). ▲

201. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0.$$

△ 1. Преобразуем уравнение с помощью формул поворота осей:

$$(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2-2(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+$$
$$+(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2-10(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)-6(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+25=0,$$

или

$$(\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha)\,x'^2+(\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)\,y'^2+$$
$$+2(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\,x'y'-(10\cos\alpha+6\sin\alpha)\,x'+(10\sin\alpha-6\cos\alpha)\,y'+25=0.$$

Приравнивая нулю коэффициент при произведении $x'y'$, имеем $(2\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)=0$, откуда $\mathrm{tg}^2\,\alpha=1$, т. е. $\mathrm{tg}\,\alpha_1=1$, $\mathrm{tg}\,\alpha_2=-1$. Возьмем $\mathrm{tg}\,\alpha=1$, откуда $\alpha=\pi/4$ и $\sin\alpha=1/\sqrt{2}$, $\cos\alpha=1/\sqrt{2}$. Тогда уравнение принимает вид

$$2y'^2-8\sqrt{2}\,x'+2\sqrt{2}\,y'+25=0,\ \text{или}\ 2(y'^2+\sqrt{2}\,y')-8\sqrt{2}\,x'+25=0.$$

2. Выражение в скобках дополним до полного квадрата:

$$2\left(y'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=8\sqrt{2}\,x'-24,\ \text{или}\ \left(y'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=4\sqrt{2}\left(x'-\frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

Приняв за новое начало точку $O'(3/\sqrt{2};\ -\sqrt{2}/2)$, применим формулы преобразования координат $x'=x''-3\sqrt{2}$, $y'=y''+\sqrt{2}/2$; получим $y''^2=4\sqrt{2}\,x''$ (уравнение параболы). ▲

Показать, что нижеследующие уравнения определяют кривые, распадающиеся на пару прямых, и найти уравнения этих прямых:

202. $25x^2+10xy+y^2-1=0.$

203. $x^2+2xy+y^2+2x+2y+1=0.$

204. $8x^2-18xy+9y^2+2x-1=0.$

Привести к каноническому виду уравнения следующих кривых:

205. $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$.

206. $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$.

207. $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$.

§ 5. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ И ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

1. Определители второго порядка и системы линейных уравнений. *Определитель второго порядка*, соответствующий таблице элементов $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, определяется равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$$

если ее определитель $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$, имеет единственное решение, которое находится по *формулам Крамера*

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{1}$$

Если определитель $D=0$, то система является либо несовместной (когда $D_x\neq 0$ и $D_y\neq 0$), либо неопределенной (когда $D_x=D_y=0$). В последнем случае система сводится к одному уравнению (например, первому), второе же уравнение является следствием первого.

Условие несовместности системы можно записать в виде $a_1/a_2=b_1/b_2\neq c_1/c_2$, а условие неопределенности — в виде $a_1/a_2=b_1/b_2=c_1/c_2$.

Линейное уравнение называется *однородным*, если свободный член этого уравнения равен нулю.

Рассмотрим систему двух линейных однородных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0. \end{cases}$$

1. Если $a_1/a_2=b_1/b_2=c_1/c_2$, то система сводится к одному уравнению (например, первому), из которого одно из неизвестных выражается через два других, значения которых остаются произвольными.

2. Если условие $a_1/a_2=b_1/b_2=c_1/c_2$ не выполнено, то решения системы находятся по формулам

$$x=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\cdot t, \quad y=-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\cdot t, \quad z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\cdot t, \tag{2}$$

где t может принимать любые значения. Эти решения можно записать также в виде пропорции:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}=\frac{y}{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=t.$$

При этой форме записи решений следует помнить, что если один из знаменателей обращается в нуль, то следует приравнять нулю и соответствующий числитель.

208. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (a+b)\,x-(a-b)\,y=4ab, \\ (a-b)\,x+(a+b)\,y=2\,(a^2-b^2). \end{cases}$$

△ Находим определитель D системы и определители D_x и D_y, входящие в числители формул (1):

$$D=\begin{vmatrix} a+b & -(a-b) \\ a-b & a+b \end{vmatrix}=(a+b)^2+(a-b)^2=2\,(a^2+b^2),$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 4ab & -(a-b) \\ 2\,(a^2-b^2) & a+b \end{vmatrix}=4a^2b+4ab^2+2a^3-2a^2b-$$

$$-2ab^2+2b^3=2\,(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=2\,(a^2+b^2)\,(a+b),$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a+b & 4ab \\ a-b & 2\,(a^2-b^2) \end{vmatrix}=2a^3+2a^2b-2ab^2-2b^3-$$

$$-4a^2b+4ab^2=2\,(a^3-a^2b+ab^2-b^3)=2\,(a^2+b^2)\,(a-b).$$

Отсюда $x=D_x/D=a+b$, $y=D_y/D=a-b$. ▲

209. Решить систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 3x+4y+5z=0, \\ x+2y-3z=0. \end{cases}$$

△ Используя формулы (2), находим

$$x=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\cdot t=-22t,\quad y=-\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\cdot t=14t,\quad z=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot t=2t,$$

где t можно придавать любые значения. ▲

Решить системы уравнений:

210. $\begin{cases} 5x-3y=1, \\ x+11y=6. \end{cases}$

211. $\begin{cases} 2x+y=1/5, \\ 4x+2y=1/3. \end{cases}$

212. $\begin{cases} ax-by=a^2+b^2, \\ bx+ay=a^2+b^2. \end{cases}$

213. $\begin{cases} 3x+2y=1/6, \\ 9x+6y=1/2. \end{cases}$

214. $\begin{cases} x-2y+z=0, \\ 3x-5y+2z=0. \end{cases}$

215. $\begin{cases} x\cos\alpha-y\sin\alpha=\cos 2\alpha, \\ x\sin\alpha+y\cos\alpha=\sin 2\alpha. \end{cases}$

216. $\begin{cases} a^2x-2\,(a^2+b^2)\,y+b^2z=0, \\ 2x+2y-3z=0. \end{cases}$

2. Определители третьего порядка и системы линейных уравнений. *Определитель третьего порядка*, соответствующий таблице элементов $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, определяется равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Минором данного элемента определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, который получится, если в исходном определителе вычеркнуть строку и столбец, содержащие данный элемент. *Алгебраическим до-*

полнением данного элемента называется его минор, умноженный на $(-1)^k$, где k — сумма номеров строки и столбца, содержащих данный элемент.

Таким образом, знак, который при этом приписывается минору соответствующего элемента определителя, определяется следующей таблицей:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

В приведенном выше равенстве, выражающем определитель третьего порядка, в правой части стоит сумма произведений элементов 1-й строки определителя на их алгебраические дополнения.

Теорема 1. *Определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов любой его строки или столбца на их алгебраические дополнения.*

Эта теорема позволяет вычислять значение определителя, раскрывая его по элементам любой его строки или столбца.

Теорема 2. *Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.*

Свойства определителей.

1°. *Определитель не изменится, если строки определителя заменить столбцами, а столбцы — соответствующими строками.*

2°. *Общий множитель элементов какой-нибудь строки (или столбца) может быть вынесен за знак определителя.*

3°. *Если элементы одной строки (столбца) определителя соответственно равны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.*

4°. *При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.*

5°. *Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответственные элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число* (теорема о линейной комбинации параллельных рядов определителя).

Решение системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

находится по формулам Крамера

$$x=D_x/D,\ y=D_y/D,\ z=D_z/D, \tag{1}$$

где

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

При этом предполагается, что $D \neq 0$ (если $D=0$, то исходная система либо неопределенная, либо несовместная).

Если система однородная, т. е. имеет вид

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0, \end{cases}$$

и ее определитель отличен от нуля, то она имеет единственное решение $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Если же определитель однородной системы равен нулю, то система сводится либо к двум независимым уравнениям (третье является их следствием), либо к одному уравнению (остальные два являются его следствиями). Первый случай имеет место тогда, когда среди миноров определителя однородной системы есть хотя бы один отличный от нуля, второй — тогда, когда все миноры этого определителя равны нулю.

В обоих случаях (см. п. 1) однородная система имеет бесчисленное множество решений.

217. Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

△ Разложив определитель по элементам 1-й строки, получим

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 0 - 3(-34) + 2(-17) = 68. \ \blacktriangle$$

218. Вычислить тот же определитель на основании теоремы о линейной комбинации элементов строк (столбцов).

△ К элементам 1-й строки прибавим соответствующие элементы 2-й строки, умноженные на 5, а к элементам 3-й строки — соответствующие элементы 2-й строки, умноженные на 7:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix}.$$

Разложив определитель по элементам 1-го столбца, получаем

$$\begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix} = 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 13\cdot 34 - 17\cdot 22 = 68. \ \blacktriangle$$

219. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 3x + 2y + z = 10, \\ 4x + 3y - 2z = 4. \end{cases}$$

△ По формулам (1) находим

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{8\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{14}{14} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{14} = \frac{1\cdot\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{28}{14} = 2,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{14} = \frac{42}{14} = 3. \ \blacktriangle$$

220. Решить систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 4x + y + z = 0, \\ x + 3y + z = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

△ Здесь $D=\begin{vmatrix}4&1&1\\1&3&1\\1&1&2\end{vmatrix}$. Для вычисления этого определителя к элементам 1-й строки прибавим элементы 3-й строки, умноженные на —4, а к элементам 2-й строки — элементы 3-й строки, умноженные на —1:

$$D=\begin{vmatrix}0&-3&-7\\0&2&-1\\1&1&2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-3&-7\\2&-1\end{vmatrix}=17.$$

Так как $D\neq 0$, то система имеет только нулевое решение $x=y=z=0$. ▲

221. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}3x+2y-z=0,\\x+2y+9z=0,\\x+y+2z=0.\end{cases}$$

△ Имеем

$$D=\begin{vmatrix}3&2&-1\\1&2&9\\1&1&2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2&9\\1&2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&9\\1&2\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=-15+14+1=0.$$

Следовательно, система имеет решения, отличные от нулевого. Решаем систему первых двух уравнений (третье уравнение является их следствием):

$$\begin{cases}3x+2y-z=0,\\x+2y+9z=0.\end{cases}$$

Отсюда по формулам (2) п. 1 получаем

$$x=\begin{vmatrix}2&-1\\2&9\end{vmatrix}\cdot t=20t,\quad y=-\begin{vmatrix}3&-1\\1&9\end{vmatrix}\cdot t=-28t,\quad z=\begin{vmatrix}3&2\\1&2\end{vmatrix}\cdot t=4t.\ ▲$$

222. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&7&2\\2&3&-7\end{vmatrix}$, разложив его по элементам 3-й строки.

223. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&4\\4&9&16\end{vmatrix}$, использовав теорему о линейной комбинации строк (столбцов).

224. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}2&3&4\\2&a+3&b+4\\2&c+3&d+4\end{vmatrix}$.

Решить системы уравнений:

225. $\begin{cases}5x-y-z=0,\\x+2y+3z=14,\\4x+3y+2z=16.\end{cases}$ **226.** $\begin{cases}x+3y-6z=12,\\3x+2y+5z=-10,\\2x+5y-3z=6.\end{cases}$

227. $\begin{cases}-5x+y+z=0,\\x-6y+z=0,\\x+y-7z=0.\end{cases}$ **228.** $\begin{cases}x+y+z=0,\\8x+6y+5z=0,\\x+4y+3z=0.\end{cases}$

229. $\begin{cases}ax+by+cz=a-b,\\bx+cy+az=b-c,\\cx+ay+bz=c-a,\end{cases}$ если $a+b+c\neq 0$. **230.** $\begin{cases}ax+by+(a+b)z=0,\\bx+ay+(a+b)z=0,\\x+y+2z=0.\end{cases}$

ГЛАВА II

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Если в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$, то точка M пространства, имеющая координаты x (абсцисса), y (ордината) и z (аппликата), обозначается $M(x;\ y;\ z)$.

Расстояние между двумя точками $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ определяется по формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1}$$

В частности, расстояние точки $M(x;\ y;\ z)$ от начала координат O определяется по формуле

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{2}$$

Если отрезок, концами которого служат точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, разделен точкой $C(\bar{x};\ \bar{y};\ \bar{z})$ в отношении λ (см. гл. I, § 1), то координаты точки C определяются по формулам

$$\bar{x}=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad \bar{y}=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\quad \bar{z}=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{3}$$

В частности, координаты середины отрезка определяются по формулам

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2};\quad \bar{y}=\frac{y_1+y_2}{2};\quad \bar{z}=\frac{z_1+z_2}{2}. \tag{4}$$

231. Даны точки $M_1(2;\ 4;\ -2)$ и $M_2(-2;\ 4;\ 2)$. На прямой M_1M_2 найти точку M, делящую отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda=3$.

△ Воспользуемся формулами деления отрезка в данном отношении:

$$x_M=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{2+3(-2)}{1+3}=-1,\quad y_M=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{4+3\cdot 4}{1+3}=4,$$
$$z_M=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}=\frac{-2+3\cdot 2}{1+3}=1.$$

Следовательно, искомая точка $M(-1;\ 4;\ 1)$. ▲

232. Дан треугольник: $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(5;\ 1;\ -2)$, $C(7;\ 9;\ 1)$. Найти координаты точки D пересечения биссектрисы угла A со стороной CB.

△ Найдем длины сторон треугольника, образующих угол A:

$$|AC|=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2}=\sqrt{(7-1)^2+(9-1)^2+(1-1)^2}=10;$$
$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{(5-1)^2+(1-1)^2+(-2-1)^2}=5.$$

Следовательно, $|CD|:|DB|=10:5=2$, так как биссектриса делит сторону CB на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Таким образом,

$$x_D=\frac{x_C+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{7+2\cdot 5}{1+2}=\frac{17}{3}, \quad y_D=\frac{y_C+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{9+2\cdot 1}{1+2}=\frac{11}{3},$$

$$z_D=\frac{z_C+\lambda z_B}{1+\lambda}=\frac{1+2(-2)}{1+2}=-1;$$

искомая точка $D(17/3,\ 11/3,\ -1)$. ▲

233. На оси Ox найти точку, равноудаленную от точек $A(2;\ -4;\ 5)$ и $B(-3;\ 2;\ 7)$.

△ Пусть M — искомая точка. Для нее должно выполняться равенство $|AM|=|MB|$. Так как эта точка лежит на оси Ox, то ее координаты $(x;\ 0;\ 0)$, а потому имеем

$$|AM|=\sqrt{(x-2)^2+(-4)^2+5^2}, \quad |MB|=\sqrt{(x+3)^2+2^2+7^2}.$$

Отсюда после возведения в квадрат получаем

$$(x-2)^2+41=(x+3)^2+53, \text{ или } 10x=-17, \text{ т. е. } x=-1,7.$$

Таким образом, искомая точка $M(-1,7;\ 0;\ 0)$. ▲

234. Даны точки $A(3;\ 3;\ 3)$ и $B(-1;\ 5;\ 7)$. Найти координаты точек C и D, делящих отрезок AB на три равные части.

235. Дан треугольник: $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(7;\ 10;\ 3)$, $C(-1;\ 3;\ 1)$. Показать, что угол A — тупой.

236. Найти координаты центра тяжести треугольника с вершинами $A(2;\ 3;\ 4)$, $B(3;\ 1;\ 2)$ и $C(4;\ -1;\ 3)$.

237. В каком отношении точка M, равноудаленная от точек $A(3;\ 1;\ 4)$ и $B(-4;\ 5;\ 3)$, разделит отрезок оси Oy от начала координат до точки $C(0;\ 6;\ 0)$?

238. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точек $M_1(2;\ 4;\ 1)$ и $M_2(-3;\ 2;\ 5)$.

239. На плоскости xOy найти точку, равноудаленную от точек $A(1;\ -1;\ 5)$, $B(3;\ 4;\ 4)$ и $C(4;\ 6;\ 1)$.

§ 2. ВЕКТОРЫ И ПРОСТЕЙШИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Свободный вектор $\mathbf{a}$ (т. е. такой вектор, который без изменения длины и направления может быть перенесен в любую точку пространства), заданный в координатном пространстве $Oxyz$, может быть представлен в виде

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}.$$

Такое представление вектора $\mathbf{a}$ называется его *разложением по осям координат*, или *разложением по ортам*.

Здесь a_x, a_y, a_z — проекции вектора $\mathbf{a}$ на соответствующие оси координат (их называют *координатами* вектора $\mathbf{a}$), $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты этих осей (единичные векторы, направление каждого из которых совпадает с положительным направлением соответствующей оси).

Векторы $a_x\mathbf{i}$, $a_y\mathbf{j}$ и $a_z\mathbf{k}$, в виде суммы которых представлен вектор $\mathbf{a}$, называются *составляющими* (*компонентами*) вектора $\mathbf{a}$ по осям координат.

Длина (модуль) вектора $\mathbf{a}$ обозначается a или $|\mathbf{a}|$ и определяется по формуле

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

Направление вектора **a** определяется углами α, β и γ, образованными им с осями координат Ox, Oy и Oz. Косинусы этих углов (так называемые *направляющие косинусы вектора*) определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}.$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Если векторы **a** и **b** заданы их разложениями по ортам, то их сумма и разность определяются по формулам

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_x + b_x)\,\mathbf{i} + (a_y + b_y)\,\mathbf{j} + (a_z + b_z)\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{a}-\mathbf{b} = (a_x - b_x)\,\mathbf{i} + (a_y - b_y)\,\mathbf{j} + (a_z - b_z)\,\mathbf{k}.$$

Напомним, что сумма векторов **a** и **b**, начала которых совмещены, изображается вектором с тем же началом, совпадающим с диагональю параллелограмма,

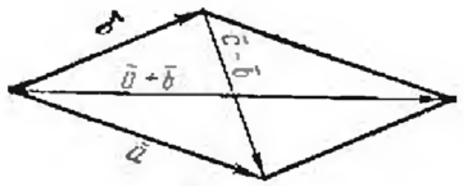

Рис. 16

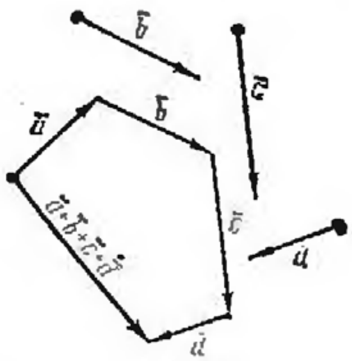

Рис. 17

сторонами которого являются векторы **a** и **b**. Разность $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ этих векторов изображается вектором, совпадающим со второй диагональю того же параллелограмма, причем начало этого вектора находится в конце вектора **b**, а конец — в конце вектора **a** (рис. 16).

Сумма любого числа векторов может быть найдена по правилу многоугольника (рис. 17).

Произведение вектора **a** на скалярный множитель m определяется формулой

$$m\mathbf{a} = ma_x\mathbf{i} + ma_y\mathbf{j} + ma_z\mathbf{k}.$$

Напомним, что векторы **a** и m**a** параллельны (коллинеарны) и направлены в одну и ту же сторону, если $m > 0$, и в противоположные стороны, если $m < 0$.

В частности, если $m = 1/a$, то вектор $\mathbf{a}/a$ имеет длину, равную единице, и направление, совпадающее с направлением вектора **a**. Этот вектор называют *единичным вектором* (*ортом*) вектора **a** и обозначают $\mathbf{a}_0$. Нахождение единичного вектора того же направления, что и данный вектор **a**, называется *нормированием* вектора **a**.

Таким образом, $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}/a$, или $\mathbf{a} = a\mathbf{a}_0$.

Вектор $\overline{OM}$, начало которого находится в начале координат, а конец — в точке $M(x;\ y;\ z)$, называют *радиусом-вектором* точки M и обозначают $\mathbf{r}(M)$ или просто **r**. Так как его координаты совпадают с координатами точки M, то его разложение по ортам имеет вид

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Вектор $\overline{AB}$, имеющий начало в точке $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и конец в точке $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, может быть записан в виде $\overline{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, где $\mathbf{r}_2$ — радиус-вектор точки B, а $\mathbf{r}_1$ — радиус-вектор точки A. Поэтому разложение вектора $\overline{AB}$ по ортам имеет вид

$$\overline{AB}=(x_2-x_1)\,\mathbf{i}+(y_2-y_1)\,\mathbf{j}+(z_2-z_1)\,\mathbf{k}.$$

Его длина совпадает с расстоянием между точками A и B:

$$|\overline{AB}|=d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

В силу приведенных выше формул направление вектора $\overline{AB}$ определяется направляющими косинусами:

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{d};\quad \cos\beta=\frac{y_2-y_1}{d};\quad \cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{d}.$$ ▲

240. В треугольнике ABC сторона AB точками M и N разделена на три равные части: $|AM|=|MN|=|NB|$. Найти вектор $\overline{CM}$, если $\overline{CA}=\mathbf{a}$, $\overline{CB}=\mathbf{b}$.

△ Имеем $\overline{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$. Следовательно, $\overline{AM}=(\mathbf{b}-\mathbf{a})/3$. Так как $\overline{CM}=\overline{CA}+\overline{AM}$, то $\overline{CM}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}-\mathbf{a})/3=(2\mathbf{a}+\mathbf{b})/3$. ▲

241. В треугольнике ABC прямая AM является биссектрисой угла BAC, причем точка M лежит на стороне BC. Найти $\overline{AM}$, если $\overline{AB}=\mathbf{b}$, $\overline{AC}=\mathbf{c}$.

△ Имеем $\overline{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$. Из свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника следует, что $|BM|:|MC|=b:c$, т. е. $|BM|:|BC|=b:(b+c)$. Отсюда получаем $\overline{BM}=\frac{b}{b+c}(\mathbf{c}-\mathbf{b})$. Так как $\overline{AM}=\overline{AB}+\overline{BM}$, то

$$\overline{AM}=\mathbf{b}+\frac{b}{b+c}(\mathbf{c}-\mathbf{b})=\frac{b\mathbf{c}+c\mathbf{b}}{b+c}.$$ ▲

242. Радиусами-векторами вершин треугольника ABC являются $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$. Найти радиус-вектор точки пересечения медиан треугольника.

△ Имеем $\overline{BC}=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2$; $\overline{BD}=(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2)/2$ (D — середина стороны BC); $\overline{AB}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$; $\overline{AD}=\overline{BD}+\overline{AB}=(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2)/2+\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3-2\mathbf{r}_1)/2$; $\overline{AM}=(2/3)\,\overline{AD}$ (M — точка пересечения медиан), поэтому $\overline{AM}=(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3-2\mathbf{r}_1)/3$. Итак,

$$\mathbf{r}=\overline{OM}=\mathbf{r}_1+\overline{AM}=(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3-2\mathbf{r}_1)/3+\mathbf{r}_1,\ \text{или}\ \mathbf{r}=(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3)/3.$$ ▲

243. Найти длину вектора $\mathbf{a}=20\mathbf{i}+30\mathbf{j}-60\mathbf{k}$ и его направляющие косинусы.

△ $a=\sqrt{20^2+30^2+60^2}=70$; $\cos\alpha=20/70=2/7$,
$\cos\beta=30/70=3/7$, $\cos\gamma=-60/70=-6/7$. ▲

244. Найти вектор $\mathbf{a}=\overline{AB}$, если $A(1;\ 3;\ 2)$ и $B(5;\ 8;\ -1)$.

△ Проекциями вектора $\overline{AB}$ на оси координат являются разности соответственных координат точек B и A: $a_x=5-1=4$, $a_y=8-3=5$, $a_z=-1-2=-3$. Следовательно, $\overline{AB}=4\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k}$. ▲

245. Нормировать вектор $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-12\mathbf{k}$.

△ Найдем длину вектора $\mathbf{a}$:

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{3^2+4^2+(-12)^2}=13.$$

Искомый единичный вектор имеет вид

$$\mathbf{a}_0=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\frac{3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-12\mathbf{k}}{13}=\frac{3}{13}\mathbf{i}+\frac{4}{13}\mathbf{j}-\frac{12}{13}\mathbf{k}. \blacktriangle$$

246. Дан треугольник ABC. На стороне BC расположена точка M так, что $|\overline{BM}|:|\overline{MC}|=\lambda$. Найти $\overline{AM}$, если $\overline{AB}=\mathbf{b}$, $\overline{AC}=\mathbf{c}$.

247. Дано $\overline{AB}=\mathbf{a}+2\mathbf{b}$, $\overline{BC}=-4\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\overline{CD}=-5\mathbf{a}-3\mathbf{b}$. Доказать, что $ABCD$ — трапеция.

248. Найти проекции вектора $\mathbf{a}$ на оси координат, если $\mathbf{a}=\overline{AB}+\overline{CD}$, $A(0;\ 0;\ 1)$, $B(3;\ 2;\ 1)$, $C(4;\ 6;\ 5)$ и $D(1;\ 6;\ 3)$.

249. Найти длину вектора $\mathbf{a}=m\mathbf{i}+(m+1)\mathbf{j}+m(m+1)\mathbf{k}$.

250. Даны радиусы-векторы вершин треугольника ABC: $\mathbf{r}_A=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_B=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_C=\mathbf{i}+4\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Показать, что треугольник ABC равносторонний.

251. Вычислить модуль вектора $\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}-(1/5)(4\mathbf{i}+8\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ и найти его направляющие косинусы.

252. Даны точки $M_1(1;\ 2;\ 3)$ и $M_2(3;\ -4;\ 6)$. Найти длину и направление вектора $\overline{M_1M_2}$.

253. Дан вектор $\mathbf{a}=4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$. Найти вектор $\mathbf{b}$, если $b=a$, $b_y=a_y$ и $b_x=0$.

254. Радиус-вектор точки M составляет с осью Oy угол $60°$, а с осью Oz угол $45°$, его длина $r=8$. Найти координаты точки M, если ее абсцисса отрицательна.

255. Нормировать вектор $\mathbf{a}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$.

§ 3. СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

1. Скалярное произведение. *Скалярным произведением* двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=ab\cos\varphi.$$

Свойства скалярного произведения.

1°. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=a^2$, или $\mathbf{a}^2=a^2$.

2°. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$, если $\mathbf{a}=\mathbf{0}$, либо $\mathbf{b}=\mathbf{0}$, либо $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ (ортогональность ненулевых векторов).

3°. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ (переместительный закон).

4°. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ (распределительный закон).

5°. $(m\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(m\mathbf{b})=m(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ (сочетательный закон по отношению к скалярному множителю).

Скалярные произведения ортов осей координат:

$$\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=1,\quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0.$$

Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы своими координатами: $\mathbf{a}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$. Тогда скалярное произведение этих векторов находится по формуле

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

2. Векторное произведение. *Векторным произведением* вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$ называется третий вектор $\mathbf{c}$, определяемый следующим образом (рис. 18):

1) модуль вектора $\mathbf{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ($c=ab\sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$);

2) вектор $\mathbf{c}$ перпендикулярен векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

3) векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ после приведения к общему началу ориентированы по от-

ношению друг к другу соответственно как орты **i**, **j**, **k** (в правой системе координат образуют так называемую *правую тройку* векторов).

Векторное произведение **a** на **b** обозначается через $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Свойства векторного произведения.

1°. $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, т. е. векторное произведение не обладает переместительным свойством.

2°. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$, если $\mathbf{a}=0$, либо $\mathbf{b}=0$, либо $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$ (коллинеарность ненулевых векторов).

3°. $(m\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(m\mathbf{b})=m(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ (сочетательное свойство по отношению к скалярному множителю).

4°. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ (распределительное свойство).

Векторные произведения координатных ортов **i**, **j** и **k**:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0,$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=-\mathbf{j}\times\mathbf{i}=\mathbf{k};\ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=-\mathbf{k}\times\mathbf{j}=\mathbf{i};\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=-\mathbf{i}\times\mathbf{k}=\mathbf{j}.$$

Векторное произведение векторов $\mathbf{a}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$ удобнее всего находить по формуле

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

3. **Смешанное произведение.** *Смешанным произведением* векторов **a**, **b** и **c** называется скалярное произведение вектора $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ на вектор **c**, т. е. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$.

Смешанное произведение трех векторов **a**, **b**, **c** по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Свойства смешанного произведения.

1°. Смешанное произведение трех векторов равно нулю, если:

а) хоть один из перемножаемых векторов равен нулю;

б) два из перемножаемых векторов коллинеарны;

в) три ненулевых вектора параллельны одной и той же плоскости (компланарность).

2°. Смешанное произведение не изменяется, если в нем поменять местами знаки векторного ($\times$) и скалярного ($\cdot$) умножения, т. е. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. В силу этого свойства смешанное произведение векторов **a**, **b** и **c** условимся записывать в виде **abc**.

3°. Смешанное произведение не изменяется, если переставлять перемножаемые векторы в круговом порядке:

$$\mathbf{abc}=\mathbf{bca}=\mathbf{cab}.$$

4°. При перестановке любых двух векторов смешанное произведение изменяет только знак:

$$\mathbf{bac}=-\mathbf{abc};\ \mathbf{cba}=-\mathbf{abc};\ \mathbf{acb}=-\mathbf{abc}.$$

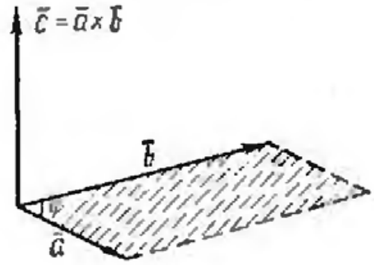

Рис. 18

Пусть векторы заданы их разложениями по ортам: $\mathbf{a}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$; $\mathbf{b}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$; $\mathbf{c}=x_3\mathbf{i}+y_3\mathbf{j}+z_3\mathbf{k}$. Тогда

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_3 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Из свойств смешанного произведения трех векторов вытекает следующее:

необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов служит условие $\mathbf{abc}=0$;

объем V_1 параллелепипеда, построенного на векторах **a** **b** и **c**, и объем V_2 образованной ими треугольной пирамиды находятся по формулам

$$V_1=|\mathbf{abc}|,\ V_2=\frac{1}{6}V_1=\frac{1}{6}|\mathbf{abc}|.$$

256. Найти скалярное произведение векторов $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-5\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

△ Находим $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=3\cdot2+4(-5)+7\cdot2=0$. Так как $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ и $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, то $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$. ▲

257. Даны векторы $\mathbf{a}=m\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=4\mathbf{i}+m\mathbf{j}-7\mathbf{k}$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

△ Находим скалярное произведение этих векторов: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=4m+3m-28$; так как $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, то $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$. Отсюда $7m-28=0$, т. е. $m=4$. ▲

258. Найти $(5\mathbf{a}+3\mathbf{b})\cdot(2\mathbf{a}-\mathbf{b})$, если $a=2$, $b=3$, $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

△ $(5\mathbf{a}+3\mathbf{b})\cdot(2\mathbf{a}-\mathbf{b})=10\mathbf{a}^2-5\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+6\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-3\mathbf{b}^2=10\mathbf{a}^2-3\mathbf{b}^2=40-27=13$. ▲

259. Определить угол между векторами $\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=6\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$.

△ Так как $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=ab\cos\varphi$, то $\cos\varphi=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{ab}$. Имеем $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1\cdot6+2\cdot4+3(-2)=8$, $a=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$, $b=\sqrt{36+16+4}=2\sqrt{14}$.

Следовательно, $\cos\varphi=\dfrac{8}{\sqrt{14}\cdot2\sqrt{14}}=\dfrac{2}{7}$ и $\varphi=\arccos\dfrac{2}{7}$. ▲

260. Найти векторное произведение векторов $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

△ Имеем

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&3&5\\1&2&1\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}3&5\\2&1\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}2&5\\1&1\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix},$$

т. е. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-7\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$. ▲

261. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}=6\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$.

△ Находим векторное произведение $\mathbf{a}$ на $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\6&3&-2\\3&-2&6\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}3&-2\\-2&6\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}6&-2\\3&6\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}6&3\\3&-2\end{vmatrix}=14\mathbf{i}-42\mathbf{j}-21\mathbf{k}.$$

Так как модуль векторного произведения двух векторов равен площади построенного на них параллелограмма, то $S=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{14^2+42^2+21^2}=49$ (кв. ед.). ▲

262. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ 4)$, $C(4;\ 3;\ 2)$.

△ Находим векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}=(2-1)\,\mathbf{i}+(3-1)\,\mathbf{j}+(4-1)\,\mathbf{k}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k},$$
$$\overline{AC}=(4-1)\,\mathbf{i}+(3-1)\,\mathbf{j}+(2-1)\,\mathbf{k}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, поэтому находим векторное произведение этих векторов:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&2&3\\3&2&1\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}2&3\\2&1\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}1&3\\3&1\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix}=-4\mathbf{i}+8\mathbf{j}-4\mathbf{k}.$$

Следовательно,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{16+64+16}=\sqrt{24} \text{ (кв. ед.)} \ \blacktriangle$$

263. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ и $3\mathbf{a}+\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=30°$.

△ Имеем

$$(\mathbf{a}+3\mathbf{b})\times(3\mathbf{a}+\mathbf{b})=3\mathbf{a}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}+9\mathbf{b}\times\mathbf{a}+3\mathbf{b}\times\mathbf{b}=$$
$$=3\cdot 0+\mathbf{a}\times\mathbf{b}-9\mathbf{a}\times\mathbf{b}+3\cdot 0=-8\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

(поскольку $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{b}=0$, $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$). Итак,

$$S=8|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=8\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 30°=4 \text{ (кв. ед.)}. \ \blacktriangle$$

264. Найти смешанное произведение векторов $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k}$.

$$\triangle\ \mathbf{abc}=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=26+5+2=33. \ \blacktriangle$$

265. Показать, что векторы $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+7\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ компланарны.

△ Находим смешанное произведение векторов:

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}2 & 5 & 7\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=8-15+7=0.$$

Так как $\mathbf{abc}=0$, то заданные векторы компланарны. ▲

266. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами $A(2;\ 2;\ 2)$, $B(4;\ 3;\ 3)$, $C(4;\ 5;\ 4)$ и $D(5;\ 5;\ 6)$.

△ Найдем векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, совпадающие с ребрами пирамиды, сходящимися в вершине A: $\overline{AB}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\overline{AC}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\overline{AD}=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$. Находим смешанное произведение этих векторов:

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 6-1\cdot 2-1\cdot 3=7.$$

Так как объем пирамиды равен 1/6 объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, то $V=7/6$ (куб. ед.). ▲

267. Вычислить $(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{b}-\mathbf{c})(\mathbf{c}-\mathbf{a})$.

△ Так как $(\mathbf{a}-\mathbf{b})+(\mathbf{b}-\mathbf{c})+(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$, то эти векторы компланарны (рис. 19). Следовательно, их смешанное произведение равно нулю: $(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{b}-\mathbf{c})(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$. ▲

268. Найти скалярное произведение векторов $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ и $5\mathbf{a}-6\mathbf{b}$, если $a=4$, $b=6$ и угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен $\pi/3$.

269. Определить угол между векторами $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=4\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.

270. При каком значении m векторы $\mathbf{a}=m\mathbf{i}+\mathbf{j}$ и $\mathbf{b}=3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ перпендикулярны?

271. Найти скалярное произведение векторов $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}+4\mathbf{c}$ и $5\mathbf{a}+6\mathbf{b}+7\mathbf{c}$, если $a=1$, $b=2$, $c=3$, а $(\widehat{\mathbf{a},\ \mathbf{b}})=(\widehat{\mathbf{a},\ \mathbf{c}})=(\widehat{\mathbf{b},\ \mathbf{c}})=\pi/3$.

272. Найти работу силы $\mathbf{F}$ на перемещении $\mathbf{s}$, если $F=2$, $s=5$, $\varphi=(\widehat{\mathbf{F},\ \mathbf{s}})=\pi/6$.

273. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

274. Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ имеют равные длины и образуют попарно равные углы. Найти вектор $\mathbf{c}$, если $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

275. Даны векторы $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=6\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$. Найти $\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ и $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$.

276. Даны радиусы-векторы трех последовательных вершин параллелограмма $ABCD$: $\mathbf{r}_A=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_B=\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_C=7\mathbf{i}+9\mathbf{j}+11\mathbf{k}$. Определить радиус-вектор четвертой вершины D.

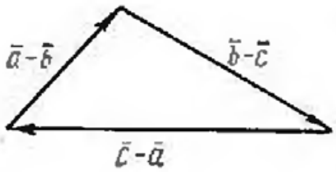

Рис. 19

277. Показать, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не могут быть перпендикулярными, если $\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}>0$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}>0$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}>0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}<0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{j}<0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{k}<0$.

278. Показать, что векторы $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+m\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+(m+1)\,\mathbf{k}$ и $\mathbf{c}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+m\mathbf{k}$ ни при каком значении m не могут быть компланарными.

279. Могут ли отличные от нуля числа x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 удовлетворять уравнениям

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{aligned} x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2&=0,\\ x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3&=0,\\ x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3&=0? \end{aligned}$$

280. Найти векторное произведение векторов $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.

281. Вычислить площадь треугольника с вершинами A (2; 2; 2), B (4; 0; 3) и C (0; 1; 0).

282. Найти смешанное произведение векторов $\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$.

283. Показать, что векторы $\mathbf{a}=7\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{i}-7\mathbf{j}+8\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ компланарны.

284. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами A (0; 0; 1), B (2; 3; 5), C (6; 2; 3) и D (3; 7; 2). Найти длину высоты пирамиды, опущенной на грань BCD.

285. Показать, что точки A (5; 7; —2), B (3; 1; —1), C (9; 4; —4) и D (1; 5; 0) лежат в одной плоскости.

ГЛАВА III

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ

1. Плоскость. 1) *Уравнение плоскости в векторной форме* имеет вид

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=p.$$

Здесь $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ — радиус-вектор текущей точки $M(x;\ y;\ z)$ плоскости; $\mathbf{n}=\mathbf{i}\cos\alpha+\mathbf{j}\cos\beta+\mathbf{k}\cos\gamma$ — единичный вектор, имеющий направление перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат; α, β, γ — углы, образованные этим перпендикуляром с осями координат Ox, Oy, Oz; p — длина этого перпендикуляра.

При переходе к координатам это уравнение принимает вид

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \tag{1}$$

(*нормальное уравнение плоскости*)

2) Уравнение всякой плоскости может быть записано также в виде

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{2}$$

если $A^2+B^2+C^2\neq 0$ (*общее уравнение*). Здесь A, B, C можно рассматривать как координаты некоторого вектора $\mathbf{N}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$, перпендикулярного плоскости (*нормального вектора* плоскости). Для приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду надо все члены уравнения умножить на нормирующий множитель

$$\mu=\pm 1/N=\pm 1/\sqrt{A^2+B^2+C^2}, \tag{3}$$

где знак перед радикалом противоположен знаку свободного члена D в общем уравнении плоскости.

3) Частные случаи расположения плоскости, определяемой общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$:

$A=0$; параллельна оси Ox;
$B=0$; » » Oy;
$C=0$; » » Oz;
$D=0$; проходит через начало координат;
$A=B=0$; перпендикулярна оси Oz (параллельна плоскости xOy);
$A=C=0$; » » Oy (» » xOz);
$B=C=0$; » » Ox (» » yOz);
$A=D=0$ проходит через ось Ox;
$B=D=0$ » » » Oy;
$C=D=0$ » » » Oz;
$A=B=D=0$; совпадает с плоскостью xOy $(z=0)$;
$A=C=D=0$; » » » xOz $(y=0)$;
$B=C=D=0$; » » » yOz $(x=0)$.

Если в общем уравнении плоскости коэффициент $D\neq 0$, то, разделив все члены уравнения на $-D$, уравнение плоскости можно привести к виду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{4}$$

(здесь $a=-D/A$, $b=-D/B$, $c=-D/C$). Это уравнение называется *уравнением плоскости в отрезках*: в нем a, b и c — соответственно абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями Ox, Oy и Oz.

4) *Угол φ между плоскостями* $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (5)$$

Условие параллельности плоскостей:

$$A_1/A_2=B_1/B_2=C_1/C_2. \qquad (6)$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (7)$$

5) *Расстояние от точки* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *до плоскости*, определяемой уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (8)$$

Оно равно взятому по абсолютной величине результату подстановки координат точки в нормальное уравнение плоскости; знак результата этой подстановки характеризует взаимное расположение точки и начала координат относительно данной плоскости: «плюс», если точка M_0 и начало координат расположены по разные стороны от плоскости, и «минус», если они расположены по одну сторону от плоскости.

6) *Уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *и перпендикулярной вектору* $\mathbf{N}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (9)$$

При произвольных значениях A, B и C последнее уравнение определяет некоторую плоскость, принадлежащую связке плоскостей, проходящих через точку M_0. Его поэтому часто называют *уравнением связки плоскостей.*

7) Уравнение

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (10)$$

при произвольном значении λ определяет некоторую плоскость, проходящую через прямую пересечения плоскостей

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{(I)} \quad \text{и} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \quad \text{(II)}$$

т. е. некоторую плоскость, принадлежащую пучку плоскостей, проходящих через эту прямую (в силу чего такое уравнение часто называют *уравнением пучка плоскостей*). Если плоскости, определяемые уравнениями (I) и (II), параллельны, то пучок плоскостей превращается в совокупность плоскостей, параллельных этим плоскостям.

8) *Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки* $M_1(r_1)$, $M_2(r_2)$, $M_3(r_3)$ (здесь $\mathbf{r}_1=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$; $\mathbf{r}_2=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$; $\mathbf{r}_3=x_3\mathbf{i}+y_3\mathbf{j}+z_3\mathbf{k}$), проще найти из условия компланарности векторов $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1$, где $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ — радиус-вектор текущей точки искомой плоскости M:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)=0,$$

или в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (11)$$

286. Уравнение плоскости $2x+3y-6z+21=0$ привести к нормальному виду.

△ Находим нормирующий множитель (который берем со знаком «минус», поскольку $D=21>0$): $\mu=-1/\sqrt{2^2+3^2+6^2}=-1/7$. Итак, нормальное уравнение заданной плоскости имеет вид $-(2/7)x-(3/7)y+(6/7)z-3=0$. ▲

287. Определить расстояние от точки M_0 (3; 5; —8) до плоскости $6x-3y+2z-28=0$.

△ Используя формулу (8) расстояния от точки до плоскости, находим

$$d=\frac{|6\cdot3-3\cdot5+2\cdot(-8)-28|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{41}{7}.$$

Так как результат подстановки координат точки M_0 в нормальное уравнение плоскости отрицателен, то M_0 и начало координат лежат по одну сторону от заданной плоскости. ▲

288. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M (2; 3; 5) и перпендикулярной вектору $\mathbf{N}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

△ Достаточно воспользоваться уравнением (9) плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору:

$$4(x-2)+3(y-3)+2(z-5)=0, \text{ т. е. } 4x+3y+2z-27=0. \ ▲$$

289. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку M (2; 3; —1) параллельно плоскости $5x-3y+2z-10=0$.

△ Запишем уравнение (9) связки плоскостей, проходящих через данную точку:

$$A(x-2)+B(y-3)+C(z+1)=0.$$

Нормальный вектор искомой плоскости совпадает с нормальным вектором $\mathbf{n}=(5; -3; 2)$ данной плоскости; следовательно, $A=5$, $B=-3$, $C=2$ и уравнение искомой плоскости примет вид

$$5(x-2)-3(y-3)+2(z+1)=0, \text{ или } 5x-3y+2z+1=0. \ ▲$$

290. Из точки P (2; 3; —5) на координатные оси опущены перпендикуляры. Составить уравнение плоскости, проходящей через их основания.

△ Основаниями перпендикуляров, опущенных на координатные плоскости, служат следующие точки: M_1 (2; 3; 0), M_2 (2; 0; —5), M_3 (0; 3; —5). Используя соотношение (11), запишем уравнение плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix}=0, \text{ или } 15x+10y-6z-60=0. \ ▲$$

291. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A (5; 4; 3) и отсекающей равные отрезки на осях координат.

△ Используя уравнение (4) плоскости в отрезках, в котором $a=b=c$, имеем $x/a+y/a+z/a=1$. Координаты точки A удовлетворяют уравнению искомой плоскости, поэтому выполняется равенство $5/a+4/a+3/a=1$, откуда $a=12$. Итак, получаем уравнение $x+y+z-12=0$. ▲

292. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+y+5z-1=0$, $2x+3y-z+2=0$ и через точку M (3; 2; 1).

△ Воспользуемся уравнением (10) пучка плоскостей:

$$x+y+5z-1+\lambda(2x+3y-z+2)=0.$$

Значение λ определяем из условия, что координаты точки M удовлетворяют этому уравнению: $3+2+5-1+\lambda(6+6-1+2)=9+13\lambda=0$, откуда $\lambda=-9/13$. Таким образом, искомое уравнение имеет вид

$$x+y+5z-1-\frac{9}{13}(2x+3y-z+2)=0, \text{ или } 5x+14y-74z+31=0. \blacktriangle$$

293. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+3y+5z-4=0$ и $x-y-2z+7=0$ и параллельной оси Oy.

$\triangle$ Воспользуемся уравнением пучка плоскостей:

$$x+3y+5z-4+\lambda(x-y-2z+7)=0;$$
$$(1+\lambda)x+(3-\lambda)y+(5-2\lambda)z+(7\lambda-4)=0.$$

Так как искомая плоскость параллельна оси ординат, то коэффициент при y должен быть равен нулю: $3-\lambda=0$, т. е. $\lambda=3$. Подставив найденное значение λ в уравнение пучка, получаем $4x-z+17=0$. $\blacktriangle$

294. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;-1;4)$ и $B(3;2;-1)$ перпендикулярно плоскости $x+y+2z-3=0$.

$\triangle$ В качестве нормального вектора $\mathbf{N}$ искомой плоскости можно взять вектор, перпендикулярный вектору $\overline{AB}=\{1;\ 3;\ -5\}$ и нормальному вектору $\mathbf{n}=\{1;\ 1;\ 2\}$ данной плоскости. Поэтому за $\mathbf{N}$ примем векторное произведение $\overline{AB}$ и $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{N}=\overline{AB}\times\mathbf{n}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 3 & -5\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=11\mathbf{i}-7\mathbf{j}-2\mathbf{k}.$$

Остается воспользоваться уравнением плоскости, проходящей через данную точку (например, A) перпендикулярно заданному вектору $\mathbf{N}=\{11;\ -7;\ -2\}$:

$$11(x-2)-7(y+1)-2(z-4)=0, \text{ или } 11x-7y-2z-21=0. \blacktriangle$$

295. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;-1;-5)$ и перпендикулярной плоскостям $3x-2y+2z+7=0$ и $5x-4y+3z+1=0$.

$\triangle$ Очевидно, что в качестве нормального вектора $\mathbf{N}$ искомой плоскости можно взять векторное произведение нормальных векторов $\mathbf{n}_1=\{3;\ -2;\ 2\}$ и $\mathbf{n}_2=\{5;\ -4;\ 3\}$ данных плоскостей:

$$\mathbf{N}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & -2 & 2\\ 5 & -4 & 3\end{vmatrix}=$$
$$=\mathbf{i}\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -4 & 3\end{vmatrix}+\mathbf{j}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{vmatrix}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}.$$

Теперь, используя уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M(3;-1;-5)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N}=\{2;\ 1;\ -2\}$, получаем

$$2(x-3)+(y+1)-2(z+5)=0, \text{ или } 2x+y-2z-15=0. \blacktriangle$$

296. Привести к нормальному виду уравнения следующих плоскостей: 1) $x+y-z-2=0$; 2) $3x+5y-4z+7=0$.

297. Найти расстояние от точки $M_0(1;\ 3;-2)$ до плоскости

$2x-3y-4z+12=0$. Как расположена точка M_0 относительно плоскости?

298. Найти длину перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(2; 3; -5)$ на плоскость $4x-2y+5z-12=0$.

299. Найти уравнение плоскости, проходящей: 1) через точку $M(-2; 3; 4)$, если она отсекает на осях координат равные отрезки; 2) через точку $N(2; -1; 4)$, если она отсекает на оси Oz отрезок вдвое больший, чем на осях Ox и Oy.

300. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $P(2; 0; -1)$ и $Q(1; -1; 3)$ и перпендикулярной плоскости $3x+2y-z+5=0$.

301. На плоскости $2x-5y+2z+5=0$ найти такую точку M, чтобы прямая OM составляла с осями координат равные углы.

302. Найти уравнение плоскости, зная, что точка $P(4; -3; 12)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

303. Найти уравнения плоскостей, проходящих через оси координат перпендикулярно плоскости $3x-4y+5z-12=0$.

304. Найти уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от точек $P(1; -4; 2)$ и $Q(7; 1; -5)$.

305. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $P(0; 2; 0)$ и $Q(2; 0; 0)$ и образующей угол 60° с плоскостью $x=0$.

306. Вычислить угол между плоскостями, проходящими через точку $M(1; -1; -1)$, одна из которых содержит ось Ox, а другая — ось Oz.

307. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через точки $P(4; -2; 1)$ и $Q(2; 4; -3)$.

308. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения плоскостей $2x+2y+z-7=0$, $2x-y+3z-3=0$, $4x+5y-2z-12=0$ и через точки $M(0; 3; 0)$ и $N(1; 1; 1)$.

309. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+5y+9z-13=0$, $3x-y-5z+1=0$ и через точку $M(0; 2; 1)$.

310. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+2y+3z-5=0$ и $3x-2y-z+1=0$ и отсекающей равные отрезки на осях Ox и Oz.

311. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $(1+\sqrt{2})x+2y+2z-4=0$, $x+y+z+1=0$ и образующей с координатной плоскостью xOy угол 60°.

312. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x-y-12z-3=0$ и $3x+y-7z-2=0$ и перпендикулярной плоскости $x+2y+5z-1=0$.

313. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ и через начало координат.

314. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0; 2; 1)$ и параллельной векторам $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

315. Какой угол образует с плоскостью $x+y+2z-4=0$ вектор $\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$?

2. Прямая. 1) Прямая может быть задана *уравнениями двух плоскостей*

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

пересекающихся по этой прямой.

2) Исключив поочередно x и y из предыдущих уравнений, получим уравнения $x=az+c$, $y=bz+d$. Здесь прямая определена *двумя плоскостями, проецирующими ее на плоскости* xOz и yOz.

3) *Уравнения прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{1}$$

4) Так называемые *канонические уравнения*

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \tag{2}$$

определяют прямую, проходящую через точку $M(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и параллельную вектору $\mathbf{s}=l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k}$. В частности, эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma},$$

где α, β и γ — углы, образованные прямой с осями координат. Направляющие косинусы прямой находятся по формулам

$$\cos\alpha=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\quad \cos\beta=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\quad \cos\gamma=\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \tag{3}$$

5) От канонических уравнений прямой, вводя параметр t, нетрудно перейти к *параметрическим уравнениям*:

$$\begin{cases} x=lt+x_1, \\ y=mt+y_1, \\ z=nt+z_1. \end{cases} \tag{4}$$

6) *Угол между двумя прямыми*, заданными их каноническими уравнениями $(x-x_1)/l_1=(y-y_1)/m_1=(z-z_1)/n_1$ и $(x-x_2)/l_2=(y-y_2)/m_2=(z-z_2)/n_2$, определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}; \tag{5}$$

условие параллельности двух прямых:

$$l_1/l_2=m_1/m_2=n_1/n_2; \tag{6}$$

условие перпендикулярности двух прямых:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0. \tag{7}$$

7) Необходимое и достаточное условие нахождения двух прямых, заданных их каноническими уравнениями, в одной плоскости (*условие компланарности двух прямых*):

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0. \tag{8}$$

Если величины l_1, m_1, n_1 не пропорциональны величинам l_2, m_2, n_2, то указанное соотношение является необходимым и достаточным условием пересечения двух прямых в пространстве.

8) *Угол между прямой* $(x-x_1)/l=(y-y_1)/m=(z-z_1)/n$ *и плоскостью* $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}};\qquad(9)$$

условие параллельности прямой и плоскости:

$$Al+Bm+Cn=0;\qquad(10)$$

условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$A/l=B/m=C/n.\qquad(11)$$

9) Для определения *точки пересечения прямой* $(x-x_0)/l=(y-y_0)/m=$ $=(z-z_0)/n$ *с плоскостью* $Ax+By+Cz+D=0$ нужно решить совместно их уравнения, для чего следует воспользоваться параметрическими уравнениями прямой $x=lt+x_0$, $y=mt+y_0$, $z=nt+z_0$:

а) если $Al+Bm+Cn\neq0$, то прямая пересекает плоскость;

б) если $Al+Bm+Cn=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq0$, то прямая параллельна плоскости;

в) если $Al+Bm+Cn=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, то прямая лежит в плоскости.

316. Уравнения прямых $2x-y+3z-1=0$ и $5x+4y-z-7=$ $=0$ привести к каноническому виду.

△ I способ. Исключив сначала y, а затем z, имеем

$$13x+11z-11=0 \text{ и } 17x+11y-22=0.$$

Если разрешить каждое из уравнений относительно x, то получим

$$x=\frac{11(y-2)}{-17}=\frac{11(z-1)}{-13},\text{ т. е. }\frac{x}{-11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13}.$$

II способ. Найдем вектор $\mathbf{s}=l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k}$, параллельный искомой прямой. Так как он должен быть перпендикулярен нормальным векторам $\mathbf{N}_1=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ и $\mathbf{N}_2=5\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}$ заданных плоскостей, то за $\mathbf{s}$ можно принять векторное произведение векторов $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$:

$$\mathbf{s}=\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&-1&3\\5&4&-1\end{vmatrix}=-11\mathbf{i}+17\mathbf{j}+13\mathbf{k}.$$

Таким образом, $l=-11$; $m=17$; $n=13$.

В качестве точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, через которую проходит искомая прямая, можно взять точку пересечения ее с любой из координатных плоскостей, например с плоскостью yOz. Так как при этом $x_1=0$, то координаты y_1 и z_1 этой точки определятся из системы уравнений заданных плоскостей, если в них положить $x=0$:

$$\begin{cases}-y+3z-1=0,\\4y-z-7=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $y_1=2$, $z_1=1$. Итак, искомая прямая определяется уравнениями $x/(-11)=(y-2)/17=(z-1)/13$. ▲

317. Построить прямую $\begin{cases}2x+3y+3z-9=0,\\4x+2y+z-8=0.\end{cases}$

△ Искомую прямую можно построить как линию пересечения плоскостей. Для этого запишем уравнения этих плоскостей в отрезках на осях: $x/4{,}5+y/3+z/3=$ $=1$, $x/2+y/4+z/8=1$. Построив данные плоскости, получим искомую прямую (рис. 20). ▲

318. Из начала координат опустить перпендикуляр на прямую $(x-2)/2=(y-1)/3=(z-3)/1$.

△ Используя условие (11) перпендикулярности прямой и плоскости и полагая $A=l$, $B=m$, $C=n$, $D=0$, составим уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной заданной прямой. Это уравнение имеет вид $2x+3y+z=0$.

Найдем точку пересечения этой плоскости и данной прямой. Параметрические уравнения прямой запишутся так: $x=2t+2$, $y=3t+1$, $z=t+3$. Для определения t имеем уравнение $2(2t+2)+3(3t+1)+t+3=0$, откуда $t=-5/7$. Координаты точки пересечения $x=4/7$, $y=-8/7$, $z=16/7$, т. е. $M(4/7; -8/7; 16/7)$.

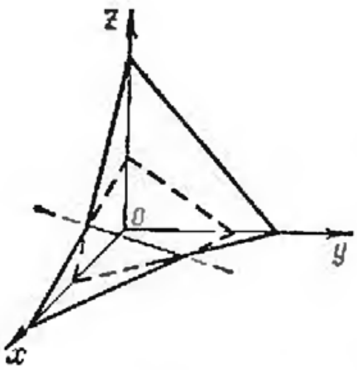

Рис. 20

Остается составить уравнения прямой, проходящей через начало координат и через точку M; используя соотношения (1), получим

$x/(4/7)=y/(-8/7)=z/(16/7)$, или $x/1=y/(-2)=z/4$. ▲

319. В уравнениях прямой $x/2=y/(-3)=z/n$ определить параметр n так, чтобы эта прямая пересеклась с прямой $(x+1)/3=(y+5)/2=z/1$, и найти точку их пересечения.

△ Для нахождения параметра n используем условие (8) пересечения двух прямых; полагая $x_1=-1$, $y_1=-5$, $z_1=0$, $x_2=0$, $y_2=0$, $z_2=0$, $l_1=3$, $m_1=2$, $n_1=1$, $l_2=2$, $m_2=-3$, $n_2=n$, получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & n \end{vmatrix}=0, \text{ или } 2n+10+3-15n=0, \text{ т. е. } n=1.$$

Чтобы найти координаты точки пересечения прямых $x/2=y/(-3)=z/1$ и $(x+1)/3=(y+5)/2=z/1$, выразим из первых уравнений x и y через z: $x=2z$, $y=-3z$. Подставляя эти значения в равенство $(x+1)/3=(y+5)/2$, имеем $(2z+1)/3=(-3z+5)/2$, откуда $z=1$. Зная z, находим $x=2z=2$, $y=-3z=-3$. Следовательно, $M(2; -3; 1)$. ▲

320. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(3; 2; -1)$ и пересекающей ось Ox под прямым углом.

△ Так как прямая перпендикулярна оси Ox и пересекает ее, то она проходит через точку $N(3; 0; 0)$. Составив уравнения прямой, проходящей через точки M и N, получаем $(x-3)/0=(y-2)/(-2)=(z+1)/1$. ▲

321. Дана плоскость $x+y-2z-6=0$ и вне ее точка $M(1; 1; 1)$. Найти точку N, симметричную точке M относительно данной плоскости.

△ Запишем уравнения любой прямой, проходящей через точку M: $(x-1)/l=(y-1)/m=(z-1)/n$. Координаты $\{l; m; n\}$ направляющего вектора прямой, перпендикулярной плоскости, можно заменить координатами нормального вектора $\mathbf{n}=\{1; 1; -2\}$ данной плоскости. Тогда уравнения этой прямой запишутся в виде $(x-1)/1=(y-1)/1=(z-1)/(-2)$.

Найдем проекцию точки M на данную плоскость, решив совместно уравнения

$$x+y-2z-6=0, \ (x-1)/1=(y-1)/1=(z-1)/(-2).$$

Перепишем уравнения прямой в виде $x=t+1$, $y=t+1$, $z=-2t+1$. Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости, найдем $t=1$, откуда $x=2$, $y=2$, $z=-1$.

Координаты симметричной точки найдутся из формул $\overline{x}=(x_M+x_N)/2$, $\overline{y}=(y_M+y_N)/2$, $\overline{z}=(z_M+z_N)/2$, т. е. $2=(1+x_N)/2$, $2=(1+y_N)/2$, $-1=(1+z_N)/2$, откуда $x_N=3$, $y_N=3$, $z_N=-3$. Следовательно, $N(3;\ 3;\ -3)$. ▲

322. Дана прямая $(x-1)/2=y/3=(z+1)/(-1)$ и вне ее точка $M(1;\ 1;\ 1)$. Найти точку N, симметричную точке M относительно данной прямой.

△ Уравнение плоскости, проецирующей точку M на данную прямую, имеет вид

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0.$$

Координаты нормального вектора $\{A;\ B;\ C\}$ плоскости, перпендикулярной прямой, заменим координатами направляющего вектора $\{2;\ 3;\ -1\}$ данной прямой; тогда получим

$$2(x-1)+3(y-1)-(z-1)=0, \text{ или } 2x+3y-z-4=0.$$

Найдем проекцию точки M на прямую, для чего совместно решим систему уравнений

$$2x+3y-z-4=0,\ (x-1)/2=y/3=(z+1)/(-1).$$

Параметрические уравнения данной прямой имеют вид $x=2t+1$, $y=3t$, $z=-t-1$. Подставляя x, y и z в уравнение плоскости, найдем $t=1/14$. Отсюда $x=8/7$, $y=3/14$, $z=-15/14$.

Тогда координаты симметричной точки можно найти, используя формулы для координат середины отрезка, т. е. $8/7=(1+x_N)/2$, $3/14=(1+y_N)/2$, $-15/14=(1+z_N)/2$, откуда $x_N=9/7$, $y_N=-4/7$, $z_N=-22/7$. Итак, $N(9/7;\ -4/7;\ -22/7)$. ▲

323. Через прямую $(x+1)/2=(y-1)/(-1)=(z-2)/3$ провести плоскость, параллельную прямой $x/(-1)=(y+2)/2=(z-3)/(-3)$.

△ Запишем уравнения первой из заданных прямых с помощью уравнений двух плоскостей, проецирующих ее соответственно на плоскости xOy и yOz:

$$(x+1)/2=(y-1)/(-1), \text{ или } x+2y-1=0;$$
$$(y-1)/(-1)=(z-2)/3, \text{ или } 3y+z-5=0.$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через эту прямую, имеет вид

$$x+2y-1+\lambda(3y+z-5)=0, \text{ или } x+(2+3\lambda)y+\lambda z-(1+5\lambda)=0.$$

Используя условие параллельности прямой и плоскости, определим λ так, чтобы соответствующая плоскость пучка была параллельна второй из заданных прямых. Имеем $-1\cdot 1+2(2+3\lambda)-3\lambda=0$, или $3\lambda+3=0$, откуда $\lambda=-1$. Таким образом, искомая плоскость определяется уравнением $x-y-z+4=0$. ▲

324. Найти уравнения проекции прямой $(x-1)/1=(y+1)/2=z/3$ на плоскость $x+y+2z-5=0$.

△ Запишем уравнения заданной прямой в виде уравнений двух плоскостей, проецирующих ее соответственно на плоскости xOy и xOz:

$$(x-1)/1=(y+1)/2, \text{ или } 2x-y-3=0;$$
$$(x-1)/1=z/3, \text{ или } 3x-z-3=0.$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую, запишется в виде

$$2x-y-3+\lambda(3x-z-3)=0, \text{ или } (2+3\lambda)x-y-\lambda z-3(1+\lambda)=0.$$

Используя условие перпендикулярности плоскостей, выберем из этого пучка плоскость, проецирующую данную прямую на заданную плоскость. Имеем $1\cdot(2+3\lambda)+1\cdot(-1)+2\cdot(-\lambda)=0$, или $\lambda+1=0$, откуда $\lambda=-1$. Итак, уравнение проецирующей плоскости имеет вид

$$2x-y-3+(-1)\cdot(3x-z-3)=0, \text{ или } x+y-z=0.$$

Искомую проекцию можно определить как линию пересечения двух плоскостей — заданной и проецирующей:

$$\begin{cases} x+y+2z-5=0, \\ x+y-z=0. \end{cases}$$

Приведя эти уравнения прямой к каноническому виду, окончательно получим $x/1=(y-5/3)/(-1)=(z-5/3)/0$. ▲

325. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(5;\ 3;\ 4)$ и параллельной вектору $\mathbf{s}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}-8\mathbf{k}$.

△ Воспользуемся каноническими уравнениями прямой. Полагая в равенствах (2) $l=2$, $m=5$, $n=-8$, $x_1=5$, $y_1=3$, $z_1=4$, получаем $(x-5)/2=(y-3)/5=(z-4)/(-8)$. ▲

326. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;\ 1;\ 1)$ и перпендикулярной векторам $\mathbf{s}_1=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ и $\mathbf{s}_2=3\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

△ Прямая параллельна вектору $\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2=5\mathbf{i}-\mathbf{j}-7\mathbf{k}$, поэтому она определяется уравнениями $(x-1)/5=(y-1)/(-1)=(z-1)/(-7)$. ▲

327. Найти уравнения проекций прямой

$$\begin{cases} x+2y+3z-26=0, \\ 3x+y+4z-14=0 \end{cases}$$

на координатные плоскости.

328. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x+3y-16z-7=0, \\ 3x+y-17z=0. \end{cases}$$

329. Вычислить углы, образованные с осями координат прямой

$$\begin{cases} x-2y-5=0, \\ x-3z+8=0. \end{cases}$$

330. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;\ -2;\ 3)$ и образующей с осями Ox и Oy углы 45° и 60°.

331. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $N(5;\ -1;\ -3)$ и параллельной прямой

$$\begin{cases} 2x+3y+z-6=0, \\ 4x-5y-z+2=0. \end{cases}$$

332. Найти точку пересечения прямых $(x-1)/(-1)=(y-2)/5=(z+4)/2$ и $(x-2)/2=(y-5)/(-2)=(z-1)/3$.

333. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(3;\ 0;\ -1)$, $B(1;\ 2;\ -4)$ и $C(0;\ 7;\ -2)$. Найти уравнения сторон AD и CD.

334. Найти параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M(2;\ -5;\ 1)$ и $N(-1;\ 1;\ 2)$.

335. Вычислить расстояние между параллельными прямыми $x/1=(y-3)/2=(z-2)/1$ и $(x-3)/1=(y+1)/2=(z-2)/1$.

336. Даны точки $A(-1;\ 2;\ 3)$ и $B(2;\ -3;\ 1)$. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(3;\ -1;\ 2)$ и параллельной вектору $\overline{AB}$.

337. Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} 4x-y-z+12=0, \\ y-z-2=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x-2y+16=0, \\ 3x-z=0. \end{cases}$$

338. В плоскости yOz найти прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную прямой $\begin{cases} 2x-y=2, \\ y+2z=-2. \end{cases}$

339. Даны две вершины параллелограмма $ABCD$: $C(-2;\ 3;\ -5)$ и $D(0;\ 4;\ -7)$ и точка пересечения диагоналей $M(1;\ 2;\ -3{,}5)$. Найти уравнения стороны AB.

340. Треугольник ABC образован пересечением плоскости $x+2y+4z-8=0$ с координатными осями. Найти уравнения средней линии треугольника, параллельной плоскости xOy.

341. Даны точки $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ 3)$ и $C(3;\ 3;\ 2)$. Составить уравнения прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

342. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(0;\ 2;\ 1)$ и образующей равные углы с векторами $\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{j}$, $\mathbf{c}=3\mathbf{k}$.

343. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $(x+1)/3=(y-2)/(-1)=z/4$ и перпендикулярной плоскости $3x+y-z+2=0$.

344. Найти уравнения проекции прямой $x/2=(y+3)/1=(z-2)/(-2)$ на плоскость $2x+3y-z-5=0$.

§ 2. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Сфера. В декартовой системе координат сфера, имеющая центр в точке $C(a;\ b;\ c)$ и радиус r, определяется уравнением

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2. \qquad (1)$$

Если центр сферы находится в начале координат, то ее уравнение имеет вид

$$x^2+y^2+z^2=r^2. \qquad (2)$$

345. Найти координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением

$$x^2+y^2+z^2-x+2y+1=0.$$

△ Приведем уравнение сферы к каноническому виду (1), для чего дополним до полных квадратов члены, содержащие x, y, и z, т. е. перепишем уравнение в следующем виде:

$$\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+(y^2+2y+1)-1+z^2+1=0,$$

или

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+z^2=\frac{1}{4}.$$

Следовательно, центр сферы — точка C (1/2; —1; 0), а ее радиус $r=1/2$. ▲

346. Составить уравнение сферы, проходящей через точки A (1; 2; —4), B (1; —3; 1) и C (2; 2; 3), если ее центр находится в плоскости xOy.

△ Так как точки A, B и C принадлежат сфере $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$, центр которой находится в плоскости xOy (откуда $c=0$), то их координаты должны обращать искомое уравнение в тождество; поэтому получаем уравнения

$$(1-a)^2+(2-b)^2+(-4)^2=r^2,\ (1-a)^2+(-3-b)^2+1^2=r^2,$$
$$(2-a)^2+(2-b)^2+3^2=r^2.$$

Отсюда

$$(1-a)^2+(2-b)^2+16=(1-a)^2+(-3-b)^2+1,$$
$$(1-a)^2+(2-b)^2+16=(2-a)^2+(2-b)^2+9,$$

или

$$(2-b)^2-(-3-b)^2=-15,\ \text{т.е.}\ 10b=10;$$
$$(1-a)^2-(2-a)^2=-7,\ \text{т. е.}\ 2a=-4.$$

Итак, $a=-2$, $b=1$. Следовательно, центр сферы — точка $C(-2;\ 1;\ 0)$. Далее, находим $r^2=(1-a)^2+(2-b)^2+16=(1+2)^2+(2-1)^2+16=26$. Таким образом, искомое уравнение имеет вид $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=26$. ▲

347. Найти координаты центра и радиус окружности

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100,\\ 2x-2y-z+9=0.\end{cases}$$

△ Из центра сферы $C(3;\ -2;\ 1)$ опустим на плоскость $2x-2y-z+9=0$ перпендикуляр, уравнения которого можно записать в виде

$$(x-3)/2=(y+2)/(-2)=(z-1)/(-1) \qquad (*)$$

(в качестве направляющего вектора этого перпендикуляра можно взять нормальный вектор заданной плоскости).

Теперь найдем координаты точки пересечения прямой (*) с плоскостью $2x-2y-z+9=0$. Эта точка и есть центр окружности, являющейся сечением сферы данной плоскостью.

Записав уравнения прямой в параметрическом виде $x=2t+3$, $y=-2t-2$, $z=-t+1$ и подставив x, y, z в уравнение плоскости, получим

$$2(2t+3)-2(-2t-2)-(-t+1)+9=0,\ \text{т. е.}\ t=-2.$$

Следовательно, $x=2(-2)+3=-1$, $y=-2(-2)-2=2$, $z=-(-2)+1=3$, т. е. центр окружности находится в точке $C(-1;\ 2;\ 3)$.

Найдем теперь расстояние d от центра сферы $C(3;\ -2;\ 1)$ до плоскости $2x-2y-z+9=0$:

$$d=\frac{2\cdot 3+2\cdot 2-1+9}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=6.$$

Радиус окружности r определится из равенства $r^2=R^2-d^2$, где R — радиус сферы; таким образом, $r^2=100-36=64$, т. е. $r=8$. ▲

348. Определить координаты центров и радиусы сфер, заданных уравнениями: 1) $(x+1)^2+(y+2)^2+z^2=25$; 2) $x^2+y^2+z^2-4x+6y+2z-2=0$; 3) $2x^2+2y^2+2z^2+4y-3z+2=0$; 4) $x^2+y^2+z^2=2x$; 5) $x^2+y^2+z^2=4z-3$.

349. Как расположена точка $M(1;\ -1;\ 3)$ относительно сфер: 1) $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=19$; 2) $x^2+y^2+z^2-x+y=0$; 3) $x^2+y^2+z^2-4x+y-2z=0$?

350. Составить уравнение сферы, если точки $M(4; -1; -3)$ и $N(0; 3; -1)$ являются концами одного из ее диаметров.

351. Составить уравнения окружности, образующейся в сечении сферы $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$ координатной плоскостью $z=0$.

352. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2+z^2=100$, $2x+2y-z=18$.

2. Цилиндрические поверхности и конус второго порядка. Уравнение вида $F(x, y)=0$ в пространстве определяет цилиндрическую поверхность, у которой образующие параллельны оси Oz. Аналогично, уравнение $F(x, z)=0$ определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oy, и $F(y, z)=0$ — цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Ox.

Канонические уравнения цилиндров второго порядка:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ — \textit{эллиптический цилиндр},}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ — \textit{гиперболический цилиндр},}$$

$$y^2=2px \text{ — \textit{параболический цилиндр}.}$$

Образующие всех трех цилиндров, определяемых этими уравнениями, параллельны оси Oz, а направляющей служит соответствующая кривая второго порядка (эллипс, гипербола, парабола), лежащая в плоскости xOy.

Следует помнить, что кривую в пространстве можно задать либо параметрически, либо в виде линии пересечения двух поверхностей. Например, уравнения направляющей эллиптического цилиндра, т. е. уравнения эллипса в плоскости xOy, имеют вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$
$$z=0.$$

Уравнение *конуса второго порядка* с вершиной в начале координат, осью которого служит ось Oz, записывается в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Аналогично, уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

являются уравнениями конусов второго порядка с вершиной в начале координат, осями которых служат соответственно оси Oy и Ox.

353. Какую поверхность определяют в пространстве уравнения: 1) $x^2=4y$; 2) $z^2=xz$?

△ 1) Уравнение $x^2=4y$ определяет параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz. Направляющей цилиндрической поверхности является парабола $x^2=4y$, $z=0$.

2) Уравнение $z^2=xz$ может быть представлено в виде $z(z-x)$ и распадается на два уравнения: $z=0$ и $z=x$, т. е. оно определяет две плоскости — плоскость xOy и биссектральную плоскость $z=x$, проходящую через ось Oy. ▲

354. По какой линии пересекается конус $x^2+y^2-2z^2=0$ с плоскостью $y=2$?

△ Исключив из системы уравнений y, получим $x^2+4-2z^2=0$, или $z^2/2-x^2/4=1$. Следовательно, искомой линией пересечения является гипербола, лежащая в плоскости $y=2$; ее действительная ось параллельна оси Oz, а мнимая — оси Ox. ▲

355. Составить уравнение конической поверхности, вершиной которой служит точка $M(0;\ 0;\ 1)$, а направляющей — эллипс $x^2/25+y^2/9=1$, $z=3$.

△ Составим уравнение образующей AM, где $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — точка, лежащая на эллипсе. Уравнения этой образующей имеют вид $x/x_0=y/y_0=(z-1)/(z_0-1)$. Так как точка A лежит на эллипсе, то ее координаты удовлетворяют уравнениям эллипса, т. е. $x_0^2/25+y_0^2/9=1$, $z_0=3$.

Исключив теперь x_0, y_0 и z_0 из системы

$$x/x_0=(z-1)/(z_0-1),\quad y/y_0=(z-1)/(z_0-1),\quad x_0^2/25+y_0^2/9=1,\quad z_0=3,$$

получим уравнение искомого конуса: $x^2/25+y^2/9-(z-1)^2/4=0$. ▲

356. Установить, какие поверхности определяются следующими уравнениями, и построить эти поверхности: 1) $x^2+y^2=4$; 2) $x^2/25+y^2/16=1$; 3) $x^2-y^2=1$; 4) $y^2=2x$; 5) $z^2=y$; 6) $z+x^2=0$; 7) $x^2+y^2=2y$; 8) $x^2+y^2=0$; 9) $x^2-z^2=0$; 10) $y^2=xy$.

357. Составить уравнения линий пересечения конуса $x^2-y^2+z^2=0$ с плоскостями: 1) $y=3$; 2) $z=1$; 3) $x=0$.

358. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, направляющие которого заданы уравнениями: 1) $x=a$, $y^2+z^2=b^2$; 2) $y=b$, $x^2+z^2=a^2$; 3) $z=c$, $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

3. Поверхности вращения. Поверхности второго порядка. Если лежащая в плоскости yOz кривая $F(y,\ z)=0$, $x=0$ вращается вокруг оси Oz, то уравнение образуемой ею поверхности вращения имеет вид

$$F\left(\sqrt{x^2+y^2},\ z\right)=0.$$

Аналогично, уравнение $F\left(x,\ \sqrt{y^2+z^2}\right)=0$ определяет поверхность, образованную вращением вокруг оси Ox кривой $F(x,\ y)=0$, $z=0$; уравнение $F\left(\sqrt{x^2+z^2},\ y\right)=0$ — поверхность, образованную вращением той же кривой вокруг оси Oy.

Приведем уравнения поверхностей вращения второго порядка, образуемых вращением эллипса, гиперболы и параболы вокруг их осей симметрии.

Эллипсоид вращения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

осью вращения служит ось Oz; эллипсоид сжат при $a>c$ и удлинен при $a<c$ (при $a=c$ он превращается в сферу).

Однополостный гиперболоид вращения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

осью вращения является ось Oz (служащая мнимой осью гиперболы, вращением которой образована эта поверхность).

Двуполостный гиперболоид вращения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1;$$

осью вращения является ось Oz (служащая действительной осью гиперболы, вращением которой образована эта поверхность).

Параболоид вращения

$$x^2+y^2=2pz;$$

осью вращения служит ось Oz.

Поверхности вращения второго порядка являются частным случаем поверхностей второго порядка общего вида, канонические уравнения которых таковы:

Эллипсоид (трехосный)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\ q>0).$$

Кроме этих четырех поверхностей второго порядка, трех цилиндров второго порядка (эллиптического, гиперболического и параболического) и конуса второго порядка, существует еще одна поверхность второго порядка — *гиперболический параболоид*, каноническое уравнение которого имеет вид

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\ q>0).$$

Таким образом, всего существует девять различных поверхностей второго порядка.

359. Найти уравнение поверхности, полученной при вращении прямой $x+2y=4$, $z=0$ вокруг оси Ox.

△ Поверхностью вращения является конус с вершиной в точке $M(4;\ 0;\ 0)$. Пусть произвольная точка A искомой поверхности имеет координаты $X;\ Y;\ Z$; ей соответствует на данной прямой точка $B(x;\ y;\ 0)$. Точки A и B лежат в одной плоскости, перпендикулярной оси вращения Ox. Тогда $X=x$, $Y^2+Z^2=y^2$.

Подставляя выражения для x и y в уравнение данной прямой, получим уравнения искомой поверхности вращения: $X+2\sqrt{Y^2+Z^2}=4$, или $4(Y^2+Z^2)-(X-4)^2=0$, т. е. $4Y^2+4Z^2-(X-4)^2=0$. ▲

360. Какую поверхность определяет уравнение $x^2=yz$?

△ Произведем поворот координатных осей вокруг оси Ox на угол $\alpha=45°$ (от оси Oy к оси Oz против часовой стрелки). Формулы преобразования координат: $x=x'$, $y=y'\cos\alpha-z'\sin\alpha$, $z=y'\sin\alpha+z'\cos\alpha$. Так как $\sin\alpha=\cos\alpha=\sqrt{2}/2$, то $x=x'$, $y=(\sqrt{2}/2)(y'-z')$, $z=(\sqrt{2}/2)(y'+z')$.

Подставив эти выражения в уравнение поверхности, получим $x'^2=y'^2/2-z'^2/2$, или $x'^2-y'^2/2+z'^2/2=0$ (конус с вершиной в начале координат, осью которого является ось ординат). ▲

361. Найти уравнение поверхности, полученной при вращении прямой $2y+z-2=0$, $x=0$ вокруг оси Oz.

362. Найти уравнения линий пересечения поверхности $z=x^2-y^2$ плоскостями $z=1$, $y=1$, $x=1$, $z=-1$.

363. Какие поверхности определяются уравнениями: 1) $z=xy$, 2) $z^2=xy$?

● Произвести поворот вокруг оси Oz на угол $45°$.

364. Найти уравнение эллиптического параболоида, имеющего вершину в начале координат, осью которого является ось Oz, если на его поверхности заданы две точки $M(-1;\ -2;\ 2)$ и $N(1;\ 1;\ 1)$.

365. Составить уравнение эллипсоида, осями симметрии которого служат оси координат, если на его поверхности заданы три точки $A(3;\ 0;\ 0)$, $B(-2;\ 5/3;\ 0)$ и $C(0;\ -1;\ 2\sqrt{5})$.

366. Найти уравнения линии пересечения поверхностей $z=2-x^2-y^2$ и $z=x^2-y^2$.

367. Исследовать, какие поверхности определяет уравнение $z^2+x^2=m(z^2+y^2)$ при: 1) $m=0$; 2) $0<m<1$; 3) $m>1$; 4) $m<0$; 5) $m=1$.

4. Общее уравнение поверхности второго порядка. Общее уравнение второй степени относительно x, y и z имеет вид

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Exz+2Fxy+2Gx+2Hy+2Kz+L=0.$$

Это уравнение может определять сферу, эллипсоид, однополостный или двуполостный гиперболоид, эллиптический или гиперболический параболоид, цилиндрическую или коническую поверхность второго порядка. Оно может также определять совокупность двух плоскостей, точку, прямую или даже не иметь геометрического смысла (определять «мнимую» поверхность).

При $D=0$, $E=0$, $F=0$ общее уравнение принимает вид

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Gx+2Hy+2Kz+L=0.$$

В этом случае уравнение легко упрощается с помощью параллельного переноса осей координат, что позволяет сразу установить его геометрический смысл.

368. Каков геометрический смысл уравнения

$$x^2+4y^2+9z^2-12yz+6xz+4xy-4x-8y-12z+3=0?$$

△ Данное уравнение можно записать в виде

$$(x+2y+3z)^2-4(x+2y+3z)+3=0.$$

Разложим на множители левую часть уравнения: $(x+2y+3z-1)(x+2y+3z-3)=0$. Таким образом, уравнение определяет совокупность двух плоскостей $x+2y+3z-1=0$, $x+2y+3z-3=0$. ▲

369. Каков геометрический смысл уравнения

$$x^2+y^2+z^2-yz-xz-xy=0?$$

△ Умножая на 2, перепишем уравнение в виде

$$2x^2+2y^2+2z^2-2yz-2xz-2xy=0,$$

или

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2=0.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты только тех точек, для которых выполняются равенства $x=y$, $y=z$, $x=z$. Таким образом, уравнение определяет прямую $x=y=z$. ▲

370. Каков геометрический смысл уравнения

$$x^2+y^2+4z^2-2xy-8z+5=0?$$

△ Перепишем уравнение в виде $(x-y)^2+4(z-1)^2=-1$. Это уравнение не имеет геометрического смысла, так как его левая часть не может быть отрицательной ни при каких действительных значениях x, y и z. ▲

371. Привести к каноническому виду уравнение

$$4x^2+9y^2+36z^2-8x-18y-72z+13=0.$$

△ Сгруппируем члены с одинаковыми координатами:

$$4(x^2-2x)+9(y^2-2y)+36(z^2-2z)=-13.$$

Дополнив до полных квадратов выражения в скобках, получим

$$4(x^2-2x+1)+9(y^2-2y+1)+36(z^2-2z+1)=-13+4+9+36,$$

или

$$4(x-1)^2+9(y-1)^2+36(z-1)^2=36.$$

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало координат точку $O'(1;\ 1;\ 1)$. Формулы преобразования координат имеют вид $x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$. Тогда уравнение поверхности запишется так:

$$4x'^2+9y'^2+36z'^2=36, \quad \text{или} \quad x'^2/9+y'^2/4+z'^2=1.$$

Это уравнение определяет эллипсоид; его центр находится в новом начале координат, а полуоси соответственно равны 3, 2 и 1. ▲

372. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2-y^2-4x+8y-2z=0.$$

△ Сгруппируем члены, содержащие x и y: $(x^2-4x)-(y^2-8y)=2z$. Дополняем до полных квадратов выражения в скобках:

$$(x^2-4x+4)-(y^2-8y+16)=2z+4-16, \quad \text{или} \quad (x-2)^2-(y-4)^2=2(z-6).$$

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало точку $O'(2;\ 4;\ 6)$. Тогда $x=x'+2$, $y=y'+4$, $z=z'+6$. В результате получаем уравнение $x'^2-y'^2=2z'$, определяющее гиперболический параболоид. ▲

373. Какая поверхность определяется уравнением

$$4x^2-y^2+4z^2-8x+4y+8z+4=0?$$

△ Выполнив соответствующие преобразования, получим

$$4(x^2-2x)-(y^2-4y)+4(z^2+2z)=-4;$$

$$4(x^2-2x+1)-(y^2-4y+4)+4(z^2+2z+1)=-4+4-4+4;$$

$$4(x-1)^2-(y-2)^2+4(z+1)^2=0.$$

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало точку $O'(1;\ 2;\ -1)$. Формулы преобразования координат $x=x'+1$, $y=y'+2$, $z=z'-1$. Тогда данное уравнение примет вид $4x'^2-y'^2+4z'^2=0$, или $x'^2-y'^2/4+z'^2=0$. Это уравнение конической поверхности. ▲

Выяснить, какие поверхности определяются следующими уравнениями:

374. $x^2-xy-xz+yz=0$. **375.** $x^2+z^2-4x-4z+4=0$.

376. $x^2+2y^2+z^2-2xy-2yz=0$. **377.** $x^2+y^2-z^2-2y+2z=0$.

378. $x^2+2y^2+2z^2-4y+4z+4=0$.

379. $4x^2+y^2-z^2-24x-4y+2z+35=0$.

380. $x^2+y^2-z^2-2x-2y+2z+2=0$.

381. $x^2+y^2-6x+6y-4z+18=0$.

382. $9x^2-z^2-18x-18y-6z=0$.

ГЛАВА IV
ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И МАТРИЦЫ

§ 1. ПОНЯТИЕ ОБ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ n-ГО ПОРЯДКА

Определитель четвертого порядка, соответствующий таблице элементов $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$, определяется равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} -$$

$$- a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

С помощью определителей четвертого порядка можно аналогично ввести понятие определителя пятого порядка и т. д.

Для определителей любых порядков остаются в силе определения минора и алгебраического дополнения некоторого элемента и обе теоремы об алгебраических дополнениях, сформулированные для определителей третьего порядка.

Таким образом, обозначая через M_{ik} минор, а через A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} определителя n-го порядка (т. е. элемента, находящегося в i-й строке и k-м столбце этого определителя), имеем

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}.$$

Пусть D — определитель n-го порядка. Раскрывая его сначала по элементам i-й строки, а затем по элементам k-го столбца, в силу теоремы 1 (см. с. 41) получим

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in};$$
$$D = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}.$$

С другой стороны, при $j \neq i$ и $k \neq l$ в силу теоремы 2 (см. с. 41) имееем

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \ldots + a_{jn}A_{in} = 0,$$
$$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + \ldots + a_{nk}A_{nl} = 0.$$

Свойства определителей второго и третьего порядка, сформулированные на с. 41, справедливы и для определителей любого порядка.

Решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

определитель которой

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

находится по формулам

$$x_1=D_1/D;\quad x_2=D_2/D;\quad \ldots;\quad x_n=D_n/D.$$

В этих формулах D — определитель системы, а D_k ($k=1, 2, \ldots, n$) — определитель, полученный из определителя системы заменой k-го столбца (т. е. столбца коэффициентов при определяемом неизвестном) столбцом свободных членов:

$$D_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

383. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

△ Произведем следующие действия: 1) из элементов 1-й строки вычтем утроенные элементы 2-й строки; 2) к элементам 3-й строки прибавим удвоенные элементы 2-й строки; 3) из элементов 4-й строки вычтем элементы 2-й строки. Тогда исходный определитель преобразуется к виду

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по элементам 1-го столбца:

$$D=-\begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя к элементам 1-й строки элементы 3-й строки и вычитая из элементов 2-й строки элементы 3-й строки, получим

$$D=-\begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам 1-го столбца:

$$D=-\begin{vmatrix} 0 & -10 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}=-70. \ ▲$$

384. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

△ Вынесем за знак определителя общие множители 2, 4 и 5-го столбцов:

$$D=2\cdot 2\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 2-го столбца элементы 1-го столбца и разложим полученный определитель по элементам 1-й строки:

$$D=20\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=20\begin{vmatrix}-2 & 3 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 1\end{vmatrix}.$$

Прибавим к элементам 2-й строки элементы 1-й строки, вынесем -2 (общий множитель элементов 1-го столбца) за знак определителя, а затем разложим полученный определитель по элементам 1-го столбца:

$$D=-40\begin{vmatrix}1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 2 & 0\\ 0 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=-40\begin{vmatrix}6 & 2 & 0\\ 5 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 2-й строки элементы 3-й строки, вынесем 2 (общий множитель элементов 1-й строки) за знак определителя и разложим полученный определитель по элементам 3-го столбца:

$$D=-80\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ 5 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=-80\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{vmatrix}=640. \ ▲$$

385. Найти y из системы уравнений

$$\begin{cases}x+2y+3z=14,\\ y+2z+3t=20,\\ z+2t+3x=14,\\ t+2x+3y=12.\end{cases}$$

△ Запишем систему в виде

$$\begin{cases}x+2y+3z+0\cdot t=14,\\ 0\cdot x+y+2z+3t=20,\\ 3x+0\cdot y+z+2t=14,\\ 2x+3y+0\cdot z+t=12.\end{cases}$$

Найдем

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

Из элементов 2-го столбца вычтем удвоенные элементы 1-го столбца; из элементов 3-го столбца вычтем утроенные элементы 1-го столбца:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 3 & -6 & -8 & 2\\ 2 & -1 & -6 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -6 & -8 & 2\\ -1 & -6 & 1\end{vmatrix}=(-2)\cdot(-1)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & -1\\ 1 & 6 & -1\end{vmatrix}.$$

Из элементов 2-го столбца вычтем удвоенные элементы 1-го столбца; из элементов 3-го столбца вычтем утроенные элементы 1-го столбца:

$$D=2\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & -10\\ 1 & 4 & -4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-2 & -10\\ 4 & -4\end{vmatrix}=2(8+40)=96.$$

Находим

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 14 & 3 & 0\\ 0 & 20 & 2 & 3\\ 3 & 14 & 1 & 2\\ 2 & 12 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & 7 & 3 & 0\\ 0 & 10 & 2 & 3\\ 3 & 7 & 1 & 2\\ 2 & 6 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

Из элементов 3-й строки вычтем утроенные элементы 1-й строки; из элементов 4-й строки вычтем удвоенные элементы 1-й строки:

$$D_y=2\begin{vmatrix}1&7&3&0\\0&10&2&3\\0&-14&-8&2\\0&-8&-6&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}10&2&3\\-14&-8&2\\-8&-6&1\end{vmatrix}=2\cdot2\cdot2\begin{vmatrix}5&1&3\\-7&-4&2\\-4&-3&1\end{vmatrix}.$$

Из элементов 1-й строки вычтем утроенные элементы 3-й строки; из элементов 2-й строки вычтем удвоенные элементы 3-й строки:

$$D_y=8\begin{vmatrix}17&10&0\\1&2&0\\-4&-3&1\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}17&10\\1&2\end{vmatrix}=192.$$

Отсюда $y=D_y/D=192/96=2$. ▲

386. Вычислить определитель

$$V=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}.$$

△ Вычтем из 2-й строки 1-ю, умноженную на a; из 3-й строки 2-ю, умноженную на a; из 4-й строки 3-ю, умноженную на a:

$$V=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&b-a&c-a&d-a\\0&b^2-ab&c^2-ac&d^2-ad\\0&b^3-ab^2&c^3-ac^2&d^3-ad^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(d-a)\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\b&c&d\\b^2&c^2&d^2\end{vmatrix}.$$

Вычтем из 2-й строки 1-ю, умноженную на b; из 3-й строки 2-ю, умноженную на b:

$$V=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&c-b&d-b\\0&c^2-bc&d^2-db\end{vmatrix}=$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix}1&1\\c&d\end{vmatrix}=$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

Нетрудно видеть, что рассматриваемый определитель равен нулю тогда и только тогда, когда среди чисел a, b, c, d имеются равные. ▲

Вычислить определители:

387. $\begin{vmatrix}1&-2&3&4\\2&1&-4&3\\3&-4&-1&-2\\4&3&2&-1\end{vmatrix}.$ **388.** $\begin{vmatrix}-1&-1&-1&-1\\-1&-2&-4&-8\\-1&-3&-9&-27\\-1&-4&-16&-64\end{vmatrix}.$

389. $\begin{vmatrix}10&2&0&0&0\\12&10&2&0&0\\0&12&10&2&0\\0&0&12&10&2\\0&0&0&12&10\end{vmatrix}.$ **390.** $\begin{vmatrix}1+a&1&1&1\\1&1-a&1&1\\1&1&1+b&1\\1&1&1&1-b\end{vmatrix}.$

Решить системы уравнений:

391. $\begin{cases}y-3z+4t=-5,\\x-2z+3t=-4,\\3x+2y-5t=12,\\4x+3y-5z=5.\end{cases}$ **392.** $\begin{cases}x-3y+5z-7t=12,\\3x-5y+7z-t=0,\\5x-7y+z-3t=4,\\7x-y+3z-5t=16.\end{cases}$

393. $\begin{cases} x+2y=5, \\ 3y+4z=18, \\ 5z+6u=39, \\ 7u+8v=68, \\ 9v+10x=55. \end{cases}$ **394.** $\begin{cases} 2x+3y-3z+4t= & 7, \\ 2x+y-z+2t= & 5, \\ 6x+2y+z & = 4, \\ 2x+3y-5t & =-11. \end{cases}$

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И МАТРИЦЫ

С помощью равенств

$$x=a_{11}x'+a_{12}y',$$
$$y=a_{21}x'+a_{22}y'$$

значения переменных x и y можно выразить линейно через значения переменных x' и y'. Эти равенства принято называть *линейным преобразованием* переменных x' и y'. Их можно рассматривать также как линейное преобразование координат точки (или вектора) на плоскости.

Таблица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей* рассматриваемого *линейного преобразования*, а определитель

$$D_A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

— *определителем линейного преобразования*. В дальнейшем будем предполагать, что $D_A \neq 0$.

Можно также рассматривать линейное преобразование трех переменных (т. е. для пространства)*

$$x=a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z',$$
$$y=a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z',$$
$$z=a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z',$$

где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ и } D_A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

— соответственно матрица и определитель этого преобразования.

Матрица A называется *невырожденной* (*неособой*), если $D_A \neq 0$. Если же $D_A=0$, то матрица называется *вырожденной* (*особой*).

Матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называются *квадратными матрицами* соответственно *второго* и *третьего порядков*.

Для большей общности ряд определений будет дан для матриц третьего порядка; применение их к матрицам второго порядка не вызывает затруднений.

---

* Часто линейным преобразованием называют равенства более общего вида

$$x=a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z'+b_1,$$
$$y=a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z'+b_2,$$
$$z=a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z'+b_3.$$

Здесь рассматривается линейное преобразование, для которого $b_1=b_2=b_3=0$. В курсах функционального анализа такое линейное преобразование называют *линейным оператором*.

Если элементы квадратной матрицы удовлетворяют условию $a_{mn}=a_{nm}$, то матрица называется *симметрической*.

Две матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

считаются *равными* ($A=B$) тогда и только тогда, когда равны их соответственные элементы, т. е. когда $a_{mn}=b_{mn}$ ($m, n=1, 2, 3$).

Суммой двух матриц A и B называется матрица, определяемая равенством

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}.$$

Произведением числа m на матрицу A называется матрица, определяемая равенством

$$m\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \end{pmatrix}.$$

Произведение двух матриц A и B обозначается символом AB и определяется равенством

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j3} \\ \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j3} \\ \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix},$$

т. е. *элемент матрицы-произведения, стоящий в i-й строке и k-м столбце, равен сумме произведений соответственных элементов i-й строки матрицы A и k-го столбца матрицы B.*

По отношению к произведению двух матриц переместительный закон, вообще говоря, не выполняется: $AB \neq BA$.

Определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц.

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=0.$$

Сумма этой матрицы и любой матрицы A дает матрицу A: $A+0=A$.

Единичной матрицей называется матрица

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При умножении этой матрицы слева или справа на матрицу A получается матрица A: $EA=AE=A$. Единичной матрице отвечает тождественное линейное преобразование: $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$.

Матрица B называется *обратной* по отношению к матрице A, если произведения AB и BA равны единичной матрице: $AB = BA = E$.

Для матрицы, обратной по отношению к матрице A, принято обозначение A^{-1}, т. е. $B = A^{-1}$.

Всякая невырожденная квадратная матрица A имеет обратную матрицу. Обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}/D_A & A_{21}/D_A & A_{31}/D_A \\ A_{12}/D_A & A_{22}/D_A & A_{32}/D_A \\ A_{13}/D_A & A_{23}/D_A & A_{33}/D_A \end{pmatrix},$$

где A_{mn} — *алгебраическое дополнение* элемента матрицы a_{mn} в ее определителе, т. е. произведение минора второго порядка, полученного вычеркиванием m-й строки и n-го столбца в определителе матрицы A, на $(-1)^{m+n}$.

Матрицей-столбцом называется матрица

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Произведение AX определяется равенством

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

может быть записана в виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Решение этой системы имеет вид $X = A^{-1}B$ (если $D_A \neq 0$).

Характеристическим уравнением матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корни этого уравнения λ_1, λ_2, λ_3 называются *характеристическими числами* матрицы; они всегда действительны, если исходная матрица является симметрической.

Система уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\,\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 = 0, \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22}-\lambda)\,\xi_2 + a_{23}\xi_3 = 0, \\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + (a_{33}-\lambda)\,\xi_3 = 0, \end{cases}$$

в которой λ имеет одно из значений λ_1, λ_2, λ_3 и определитель которой в силу этого равен нулю, определяет тройку чисел $(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$, соответствующую данному характеристическому числу.

Эта совокупность трех чисел $(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$ с точностью до постоянного множителя определяет ненулевой вектор $\mathbf{r}=\xi_1\mathbf{i}+\xi_2\mathbf{j}+\xi_3\mathbf{k}$, называемый *собственным вектором* матрицы.

395. Дано линейное преобразование $x=x'+y'+z'$, $y=x'+y'$, $z=x'$ и даны точки в системе координат x', y', z': $(1; -1; 1)$, $(3; -2; -1)$, $(-1; -2; -3)$. Определить координаты этих точек в системе x, y, z.

△ Подставив координаты точек в равенства, определяющие данное линейное преобразование, получаем: если $x'=1$, $y'=-1$, $z'=1$, то $x=1$, $y=0$, $z=1$, т. е. $(1; 0; 1)$; если $x'=3$, $y'=-2$, $z'=-1$, то $x=0$, $y=1$, $z=3$, т. е. $(0; 1; 3)$; если $x'=-1$, $y'=-2$, $z'=-3$, то $x=-6$, $y=-3$, $z=-1$, т. е. $(-6; -3; -1)$. ▲

396. Написать линейное преобразование предыдущей задачи для перехода от координат x, y, z к координатам x', y', z'.

△ Имеем $x'=z$ (из третьего равенства); $y'=y-z$ (вычитаем из второго равенства третье); $z'=x-y$ (вычитаем из первого равенства второе). ▲

397. Дано линейное преобразование $x=x'+2y'$, $y=3x'+4y'$. У каких точек оно не меняет координат?

△ Нужно найти x и y, если $x=x'$, $y=y'$, т. е. $x=x+2y$, $y=3x+4y$. Следовательно, $x=x'=0$, $y=y'=0$. ▲

398. У каких точек линейное преобразование $x=3x'-2y'$, $y=5x'-4y'$ не меняет координат?

△ Имеем $x=3x-2y$, $y=5x-4y$. Следовательно, $x=y=x'=y'$, т. е. линейное преобразование не меняет координат у точек $(t; t)$ с одинаковыми координатами. ▲

399. Найти сумму матриц

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

△ $A+B=\begin{pmatrix} 3+1 & 5+2 & 7+4\\ 2+2 & -1+3 & 0-2\\ 4-1 & 3+0 & 2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 11\\ 4 & 2 & -2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$. ▲

400. Найти матрицу $2A+5B$, если

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}.$$

△ $2A=\begin{pmatrix} 6 & 10\\ 8 & 2\end{pmatrix}$, $5B=\begin{pmatrix} 10 & 15\\ 5 & -10\end{pmatrix}$, $2A+5B=\begin{pmatrix} 16 & 25\\ 13 & -8\end{pmatrix}$. ▲

401. Найти произведения матриц AB и BA, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

△ $AB=\begin{pmatrix} 1\cdot2+3\cdot1+1\cdot3 & 1\cdot1+3(-1)+1\cdot2 & 1\cdot0+3\cdot2+1\cdot1\\ 2\cdot2+0\cdot1+4\cdot3 & 2\cdot1+0(-1)+4\cdot2 & 2\cdot0+0\cdot2+4\cdot1\\ 1\cdot2+2\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot1+2(-1)+3\cdot2 & 1\cdot0+2\cdot2+3\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 7\\ 16 & 10 & 4\\ 13 & 5 & 7\end{pmatrix}$,

$BA=\begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot2+0\cdot1 & 2\cdot3+1\cdot0+0\cdot2 & 2\cdot1+1\cdot4+0\cdot3\\ 1\cdot1-1\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot3-1\cdot0+2\cdot2 & 1\cdot1-1\cdot4+2\cdot3\\ 3\cdot1+2\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot3+2\cdot0+1\cdot2 & 3\cdot1+2\cdot4+1\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6\\ 1 & 7 & 3\\ 8 & 11 & 14\end{pmatrix}$. ▲

402. Найти A^3, если $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$.

$\triangle$ $A^2=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+2&6+8\\3+4&2+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&14\\7&18\end{pmatrix}$,

$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}11&14\\7&18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33+14&22+56\\21+18&14+72\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47&78\\39&86\end{pmatrix}$. ▲

403. Найти значение матричного многочлена $2A^2+3A+5E$ при $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&1\\4&1&1\end{pmatrix}$, если E — единичная матрица третьего порядка.

$\triangle$ $A^2=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&1\\4&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&1\\4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&6&5\\8&11&6\\9&8&10\end{pmatrix}$, $2A^2=\begin{pmatrix}20&12&10\\16&22&12\\18&16&20\end{pmatrix}$,

$3A=\begin{pmatrix}3&3&6\\3&9&3\\12&3&3\end{pmatrix}$, $5E=5\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}$,

$2A^2+3A+5E=\begin{pmatrix}28&15&16\\19&35&15\\30&19&28\end{pmatrix}$. ▲

404. Даны два линейных преобразования $x=a_{11}x'+a_{12}y'$, $y=a_{21}x'+a_{22}y'$ и $x'=b_{11}x''+b_{12}y''$, $y'=b_{21}x''+b_{22}y''$. Подставляя x' и y' из второго преобразования в первое, получим линейное преобразование, выражающее x и y через x'' и y''. Показать, что матрица полученного преобразования равна произведению матриц первого и второго преобразований.

$\triangle$ Имеем

$$x=a_{11}(b_{11}x''+b_{12}y'')+a_{12}(b_{21}x''+b_{22}y'')=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})x''+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})y'',$$
$$y=a_{21}(b_{11}x''+b_{12}y'')+a_{22}(b_{21}x''+b_{22}y'')=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})x''+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})y''.$$

Матрица полученного линейного преобразования имеет вид

$$\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix},$$

т. е. она является произведением матриц $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$. ▲

405. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\1&3&1\\5&3&4\end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

$\triangle$ Вычисляем определитель матрицы A:

$$D_A=\begin{vmatrix}3&2&2\\1&3&1\\5&3&4\end{vmatrix}=27+2-24=5.$$

Находим алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3&1\\3&4\end{vmatrix}=9,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}=-2,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}2&2\\3&1\end{vmatrix}=-4,$$
$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1&1\\5&4\end{vmatrix}=1,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}3&2\\5&4\end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}3&2\\1&1\end{vmatrix}=-1,$$
$$A_{13}=\begin{vmatrix}1&3\\5&3\end{vmatrix}=-12,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}3&2\\5&3\end{vmatrix}=1,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}3&2\\1&3\end{vmatrix}=7.$$

Следовательно,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}9/5&-2/5&-4/5\\1/5&2/5&-1/5\\-12/5&1/5&7/5\end{pmatrix}.\ ▲$$

406. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=9, \\ x+2y-3z=14, \\ 3x+4y+\ z=16, \end{cases}$$

представив ее в виде матричного уравнения.

△ Перепишем систему в виде $AX=B$, где

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения имеет вид $X=A^{-1}B$. Найдем A^{-1}. Имеем

$$D_A=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=28-30-4=-6.$$

Вычислим алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=14,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=5,\quad A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-13,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-10,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-4,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=8,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1,\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1.$$

Таким образом,

$$A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$X=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 126+70-208 \\ -90-56+128 \\ -18+14+16 \end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x=2$, $y=3$, $z=-2$. ▲

407. Дана матрица $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Найти ее характеристические числа и собственные векторы.

△ Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0,\ \text{или}\ (5-\lambda)(3-\lambda)-8=0,\ \text{т. е.}\ \lambda^2-8\lambda+7=0;$$

характеристические числа $\lambda_1=1$, $\lambda_2=7$. Собственный вектор, соответствующий первому характеристическому числу, находим из системы уравнений

$$\begin{cases} (5-\lambda_1)\xi_1'+2\xi_2'=0, \\ 4\xi_1'+(3-\lambda_1)\xi_2'=0; \end{cases}$$

так как $\lambda_1=1$, то ξ_1' и ξ_2' связаны зависимостью $2\xi_1'+\xi_2'=0$.

Полагая $\xi_1'=\alpha$ ($\alpha\neq 0$ — произвольное число), получаем $\xi_2'=-2\alpha$ и собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda_1=1$, есть $\mathbf{r}_1=\alpha\mathbf{i}-2\alpha\mathbf{j}$.

Найдем второй собственный вектор. Имеем

$$\begin{cases} (5-\lambda_2)\xi_1''+2\xi_2''=0, \\ 4\xi_1''+(3-\lambda_2)\xi_2''=0. \end{cases}$$

Подставив значение $\lambda_2 = 7$, приходим к соотношению $\xi_1'' - \xi_2'' = 0$, т. е. $\xi_1'' = \xi_2'' = \beta \neq 0$. Собственным вектором, соответствующим второму характеристическому числу, служит $\mathbf{r}_2 = \beta\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$. ▲

408. Найти характеристические числа и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

△ Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(3-\lambda)\,[(5-\lambda)(3-\lambda)-1] + (-3+\lambda+1) + (1-5+\lambda) = 0.$$

После элементарных преобразований уравнение приводится к виду $(3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0$, откуда $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$.

Находим собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda_1 = 2$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} \xi_1' - \xi_2' + \xi_3' = 0, \\ -\xi_1' + 3\xi_2' - \xi_3' = 0, \\ \xi_1' - \xi_2' + \xi_3' = 0 \end{cases}$$

(одно из уравнений этой системы есть следствие двух других и может быть отброшено), получим $\xi_2' = 0$, $\xi_3' = -\xi_1'$. Полагаем $\xi_1' = \alpha$, тогда $\xi_2' = 0$, $\xi_3' = -\alpha$ и $\mathbf{r}_1 = \alpha\mathbf{i} - \alpha\mathbf{k}$.

Находим собственный вектор, соответствующий значению $\lambda_2 = 3$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -\xi_2'' + \xi_3'' = 0, \\ -\xi_1'' + 2\xi_2'' - \xi_3'' = 0, \\ \xi_1'' - \xi_2'' = 0 \end{cases}$$

(одно из этих уравнений — следствие двух других). Отсюда $\xi_1'' = \xi_2'' = \xi_3'' = \beta$ и $\mathbf{r}_2 = \beta\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \beta\mathbf{k}$.

Находим собственный вектор, соответствующий значению $\lambda_3 = 6$. Составляем систему уравнений

$$\begin{cases} -3\xi_1''' - \xi_2''' + \xi_3''' = 0, \\ -\xi_1''' - \xi_2''' - \xi_3''' = 0, \\ \xi_1''' - \xi_2''' - 3\xi_3''' = 0 \end{cases}$$

(снова одно из уравнений — следствие двух других). Решая эту систему, находим $\xi_1''' = \gamma$, $\xi_2''' = -2\gamma$, $\xi_3''' = \gamma$ и $\mathbf{r}_3 = \gamma\mathbf{i} - 2\gamma\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$.

Итак, собственные векторы заданной матрицы имеют вид $\mathbf{r}_1 = \alpha(\mathbf{i} - \mathbf{k})$; $\mathbf{r}_2 = \beta(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$; $\mathbf{r}_3 = \gamma(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$, где α, β, γ — произвольные отличные от нуля числа. ▲

409. Даны два линейных преобразования $x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z'$, $y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z'$, $z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'$; $x' = b_{11}x'' + b_{12}y'' + b_{13}z''$, $y' = b_{21}x'' + b_{22}y'' + b_{23}z''$, $z' = b_{31}x'' + b_{32}y'' + b_{33}z''$. Подставляя x', y' и z' из второго преобразования в первое, получим линейное преобразование, выражающее x, y, z через x'', y'', z''. Показать, что матрица полученного преобразования равна произведению матриц первого и второго преобразований.

410. Дано линейное преобразование $x=6x'+y'-2z'$, $y=-18x'+2y'+6z'$, $z=2x'+2y'$. Координаты каких точек удваиваются в результате этого преобразования?

411. Даны два линейных преобразования: $x=x'+y'+2z'$, $y=x'+2y'+6z'$, $z=2x'+3y'$; $x=2x'+2z'$, $y=x'+3y'+4z'$, $z=x'+3y'+2z'$. Найти точки, для которых каждое из этих преобразований дает один и тот же результат.

412. Найти точки, координаты которых не меняются при применении линейного преобразования $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$, $y'=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$.

413. Найти множество точек, координаты которых меняются местами при применении линейного преобразования $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$, $y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$.

414. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}5&8&4\\3&2&5\\7&6&0\end{pmatrix}$. Какую матрицу B нужно прибавить к матрице A, чтобы получить единичную матрицу?

415. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$. Найти сумму матриц A^2+A+E.

416. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}10&20&-30\\0&10&20\\0&0&10\end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

417. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}3x+4y=11,\\5y+6z=28,\\x+2z=7,\end{cases}$$

представив ее в виде матричного уравнения.

418. Найти характеристические числа и нормированные собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix}7&4\\5&6\end{pmatrix}$.

419. Найти характеристические числа и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{pmatrix}$.

§ 3. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Выражения вида

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$$

и

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$$

называются *квадратичными формами* соответственно от двух и трех переменных.

Симметрические матрицы

$$A_2^{(2)}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},\ \text{где } a_{21}=a_{12},$$

и

$$A_3^{(3)}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\ \text{где } a_{21}=a_{12},\ a_{31}=a_{13} \text{ и } a_{32}=a_{23},$$

называются *матрицами* этих форм.

Квадратичные формы с помощью линейного преобразования переменных можно преобразовать к виду, не содержащему произведений новых переменных (привести, как говорят, к алгебраической сумме квадратов); иными словами, квадратичная форма двух переменных может быть приведена к виду $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2$, а квадратичная форма трех переменных — к виду $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2$.

Для того чтобы коэффициенты при x_i^2 были характеристическими числами, линейное преобразование должно быть произведено следующим образом: определяют тройку (для квадратичной формы двух переменных — пару) нормированных попарно ортогональных собственных векторов, соответствующих характеристическим числам λ_1, λ_2, λ_3:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1&=\alpha_1\mathbf{i}+\beta_1\mathbf{j}+\gamma_1\mathbf{k},\\ \mathbf{e}_2&=\alpha_2\mathbf{i}+\beta_2\mathbf{j}+\gamma_2\mathbf{k},\\ \mathbf{e}_3&=\alpha_3\mathbf{i}+\beta_3\mathbf{j}+\gamma_3\mathbf{k}.\end{aligned}$$

В силу нормированности и ортогональности векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ должны выполняться тождества:

$$\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2=1\ (i=1,\ 2,\ 3);\ \alpha_i\alpha_j+\beta_i\beta_j+\gamma_i\gamma_j=0\ (i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ i\neq j).$$

Тогда матрица преобразования переменных имеет вид

$$S=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\ \beta_1&\beta_2&\beta_3\\ \gamma_1&\gamma_2&\gamma_3\end{pmatrix};$$

иными словами, надо положить

$$\begin{aligned}x&=\alpha_1x'+\alpha_2y'+\alpha_3z',\\ y&=\beta_1x'+\beta_2y'+\beta_3z',\\ z&=\gamma_1x'+\gamma_2y'+\gamma_3z'\end{aligned}$$

(для случая двух переменных все формулы соответственно упрощаются). Такое преобразование переменных носит название *линейного ортогонального преобразования*: в этом случае определитель матрицы S равен ±1: $D_S=\pm1$.

Линейное ортогональное преобразование используется для приведения к каноническому виду общего уравнения кривой или поверхности второго порядка, причем если хотят сохранить взаимную ориентацию новых координатных осей, то налагают на матрицу преобразования S дополнительное условие: $D_S=1$.

Преобразование уравнения кривой или поверхности второго порядка к каноническому виду производят следующим образом:

а) находят то линейное ортогональное преобразование координат, которое приводит квадратичную форму старших членов уравнения кривой или поверхности к сумме квадратов, и выполняют в уравнении соответствующую замену. В результате этого преобразования из уравнения исчезают члены с произведениями координат;

б) производя после этого параллельный перенос новых осей координат (в пространстве иногда приходится, кроме того, делать дополнительный поворот двух осей в одной из координатных плоскостей), приводят уравнение к требуемому каноническому виду.

420. Привести к каноническому виду уравнение кривой

$$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0.$$

△ В данном случае матрица старших членов имеет вид $A=\begin{pmatrix}5&2\\2&8\end{pmatrix}$. Составляем характеристическое уравнение матрицы:

$$\begin{vmatrix}5-\lambda&2\\2&8-\lambda\end{vmatrix}=0,\ \text{т. е. } \lambda^2-13\lambda+36=0.$$

Находим характеристические числа $\lambda_1=4$, $\lambda_2=9$. Полагая $\lambda_1=4$, для определения соответствующего собственного вектора получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \xi_1+2\xi_2=0, \\ 2\xi_1+4\xi_2=0. \end{cases}$$

Отсюда $\xi_1=-2\xi_2$; полагая $\xi_2=-\alpha$, находим $\xi_1=2\alpha$ и $\mathbf{r}_1=\alpha(2\mathbf{i}-\mathbf{j})$. Нормируя вектор $\mathbf{r}_1$, имеем $\mathbf{e}_1=(2/\sqrt{5})\,\mathbf{i}-(1/\sqrt{5})\,\mathbf{j}$.

Полагая $\lambda_2=9$, для определения второго собственного вектора получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -4\eta_1+2\eta_2=0, \\ 2\eta_1-\eta_2=0. \end{cases}$$

Отсюда $\eta_2=2\eta_1$ и $\mathbf{r}_2=\beta(\mathbf{i}+2\mathbf{j})$. Нормируя, определяем $\mathbf{e}_2=(1/\sqrt{5})\,\mathbf{i}+$ $+(2/\sqrt{5})\,\mathbf{j}$. Легко проверить, что скалярное произведение $\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2=0$, т. е. векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ ортогональны.

Используем собственные нормированные ортогональные векторы для построения матрицы преобразования координат

$$S=\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}; \quad D_S=1.$$

Отсюда

$$x=(2/\sqrt{5})\,x'+(1/\sqrt{5})\,y', \quad y=(-1/\sqrt{5})\,x'+2\,(\sqrt{5})\,y'.$$

Найденные для x и y выражения подставим в уравнение кривой:

$$5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,x'+\frac{1}{\sqrt{5}}\,y'\right)^2+4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,x'+\frac{1}{\sqrt{5}}\,y'\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\,x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\,y'\right)+$$
$$+8\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\,x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\,y'\right)^2-32\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,x'+\frac{1}{\sqrt{5}}\,y'\right)-56\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\,x'+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{\sqrt{5}}\,y'\right)+80=0,$$

откуда после раскрытия скобок и приведения подобных членов получим

$$4x'^2+9y'^2-\frac{8}{\sqrt{5}}\,x'-\frac{144}{\sqrt{5}}\,y'+80=0.$$

Заметим, что в преобразованном уравнении коэффициентами при x'^2 и y'^2 оказались (как и следовало ожидать) характеристические числа λ_1 и λ_2. Перепишем уравнение в виде

$$4\left(x'^2-\frac{2}{\sqrt{5}}\,x'\right)+9\left(y'^2-\frac{16}{\sqrt{5}}\,y'\right)+80=0.$$

Выражения в скобках дополним до полных квадратов:

$$4\left(x'^2-\frac{2}{\sqrt{5}}\,x'+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\right)+9\left(y'^2-\frac{16}{\sqrt{5}}\,y'+\frac{64}{5}-\frac{64}{5}\right)+80=0,$$

или

$$4\left(x'-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{4}{5}+9\left(y'-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{576}{5}+80=0,$$

или окончательно

$$4\left(x'-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+9\left(y'-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2=36.$$

Произведем параллельный перенос осей координат, полагая $x''=x'-1/\sqrt{5}$, $y''=y'-8/\sqrt{5}$; получаем $4x''^2+9y''^2=36$, или $x''^2/9+y''^2/4=1$ (каноническое уравнение эллипса). ▲

421. Привести к каноническому виду уравнение кривой

$$9x^2+24xy+16y^2-230x+110y-225=0.$$

△ Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 12 \\ 12 & 16-\lambda \end{vmatrix}=0, \text{ или } \lambda^2-25\lambda=0, \text{ т. е. } \lambda_1=0,\ \lambda_2=25.$$

При $\lambda=0$ получаем систему

$$\begin{cases} 9\xi_1+12\xi_2=0, \\ 12\xi_1+16\xi_2=0. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений сводится к уравнению $\xi_1/4=\xi_2/(-3)$. Следовательно, собственным вектором матрицы служит вектор $\mathbf{r}=\alpha(4\mathbf{i}-3\mathbf{j})$, а при $\alpha=1/\sqrt{4^2+(-3)^2}=1/5$ находим собственный нормированный вектор $\mathbf{e}_1=(4/5)\,\mathbf{i}-(3/5)\,\mathbf{j}$.

При $\lambda=25$ получаем систему

$$\begin{cases} -16\eta_1+12\eta_2=0, \\ 12\eta_1-9\eta_2=0. \end{cases}$$

Из этой системы аналогичным образом находим второй собственный нормированный вектор $\mathbf{e}_2=(3/5)\,\mathbf{i}+(4/5)\,\mathbf{j}$ $(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2=0)$.

Матрица преобразования координат имеет вид

$$S=\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \quad (D_S=1);$$

формулы преобразования $x=(4/5)\,x'+(3/5)\,y'$, $y=(-3/5)\,x'+(4/5)\,y'$.

Переписав уравнение кривой в виде

$$(3x+4y)^2-230x+110y-225=0,$$

перейдем к новым координатам:

$$25y'^2-230\left(\frac{4}{5}x'+\frac{3}{5}y'\right)+110\left(-\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}x'\right)-225=0 \quad .$$

После приведения подобных членов и сокращения на 25 приходим к уравнению

$$y'^2-10x'-2y'-9=0.$$

Последнее уравнение можно переписать в виде $(y'-1)^2=10(x'+1)$. Произведя параллельный перенос осей, примем за новое начало координат точку $O'(-1,\ 1)$. В итоге приходим к каноническому уравнению заданной кривой $y''^2=10x''$ (парабола). ▲

422. Привести к каноническому виду уравнение поверхности

$$3x^2+5y^2+3z^2-2xy+2xz-2yz-12x-10=0.$$

△ Здесь матрица старших членов уравнения поверхности имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

характеристические числа матрицы определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

которое приводится к виду $(3-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+12)=0$; отсюда находим $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=6$.

При $\lambda=2$ получаем систему

$$\begin{cases} u_1-u_2+u_3=0, \\ -u_1+3u_2-u_3=0, \\ u_1-u_2+u_3=0. \end{cases}$$

Указанному значению λ соответствует собственный вектор $(\alpha;\ 0;\ -\alpha)$. После нормирования приходим к вектору $\mathbf{e}_1=(1/\sqrt{2})\,\mathbf{i}-(1/\sqrt{2})\,\mathbf{k}$.

При $\lambda=3$ получаем систему

$$\begin{cases} \quad\ \ -v_2+v_2=0, \\ -v_1+2v_2-v_3=0, \\ \quad\ \ v_1-v_2=0. \end{cases}$$

Отсюда находим второй собственный нормированный вектор $\mathbf{e}_2=(1/\sqrt{3})\,\mathbf{i}+(1/\sqrt{3})\,\mathbf{j}+(1/\sqrt{3})\,\mathbf{k}$. Векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ ортогональны: $\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2=0$.

При $\lambda=6$ получаем систему

$$\begin{cases} -3w_1-w_2+w_3=0, \\ -w_1-w_2-w_3=0, \\ \quad w_1-w_2-3w_3=0. \end{cases}$$

Соответствующим собственым нормированным вектором (третьим) служит вектор $\mathbf{e}_3=(1/\sqrt{6})\,\mathbf{i}-(2/\sqrt{6})\,\mathbf{j}+(1/\sqrt{6})\,\mathbf{k}$, который ортогонален векторам $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$: $\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3=0$, $\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3=0$. Находим матрицу преобразования координат:

$$S=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем формулы преобразования координат:

$$x=(1/\sqrt{2})\,x'+(1/\sqrt{3})\,y'+(1/\sqrt{6})z',\quad y=(1/\sqrt{3})\,y'-(2/\sqrt{6})\,z',$$
$$z=(-1/\sqrt{2})\,x'+(1/\sqrt{3})\,y'+(1/\sqrt{6})\,z'.$$

Подставив выражения для x, y и z в уравнение поверхности, после упрощений получим

$$2x'^2+3y'^2+6z'^2-6\sqrt{2}\,x'-4\sqrt{3}\,y'-2\sqrt{6}\,z'-10=0.$$

Коэффициентами при x'^2, y'^2, z'^2, как и должно быть, являются соответственно числа λ_1, λ_2, λ_3. Перепишем уравнение в виде

$$2\left(x'^2-\frac{6}{\sqrt{2}}x'\right)+3\left(y'^2-\frac{4}{\sqrt{3}}y'\right)+6\left(z'^2-\frac{2}{\sqrt{6}}z'\right)=10,$$

что после дополнения выражений в скобках до полных квадратов дает

$$2\left(x'-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+3\left(y'-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+6\left(z'-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2=24.$$

Произведя параллельный перенос осей координат по формулам $x'=x''+3/\sqrt{2}$, $y'=y''+2/\sqrt{3}$, $z'=z''+1/\sqrt{6}$ и разделив уравнение на 24, приходим к каноническому уравнению эллипсоида $x''^2/12+y''^2/8+z''^2/4=1$. ▲

Привести к каноническому виду уравнения кривых:

423. $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0$.

424. $7x^2+16xy-23y^2-14x-16y-218=0$.

425. $x^2+2xy+y^2-8x+4=0$.

Привести к каноническому виду уравнения поверхностей:

426. $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-6=0$.

● Формулы преобразования координат: $x=(1/\sqrt{3})\,x'+(1/\sqrt{6})\,y'+(1/\sqrt{2})\,z'$, $y=-(1/\sqrt{3})\,x'+(2/\sqrt{6})\,y'$, $z=(1/\sqrt{3})x'+(1/\sqrt{6})\,y'-(1/\sqrt{2})\,z'$.

427. $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+x-4y-3z+2=0$.

● Формулы преобразования координат: $x=-(1/\sqrt{6})\,x'-(1/\sqrt{2})\,y'+$ $+(1/\sqrt{3})\,z'$, $x'=x''$; $y=-(2/\sqrt{6})\,x'-(1/\sqrt{3})\,z'$, $y'=y''+1/\sqrt{2}$; $z=$ $=-(1/\sqrt{6})\,x'+(1/\sqrt{2})\,y'+(1/\sqrt{3})\,z'$, $z'=z''+1/\sqrt{3}$.

§ 4. РАНГ МАТРИЦЫ. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МАТРИЦЫ

Дана прямоугольная матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в этой матрице k произвольных строк и k произвольных столбцов ($k\leqslant m$, $k\leqslant n$). Определитель k-го порядка, составленный из элементов матрицы A, расположенных на пересечении выделенных строк и столбцов, называется *минором* k-го порядка матрицы A. Матрица A имеет $C_m^k\cdot C_n^k$ миноров k-го порядка.

Рассмотрим всевозможные миноры матрицы A, отличные от нуля. *Рангом матрицы* A называется наибольший порядок минора этой матрицы, отличного от нуля. Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг этой матрицы принимают равным нулю.

Всякий отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу этой матрицы, называется *базисным минором* матрицы.

Ранг матрицы A будем обозначать через $r(A)$. Если $r(A)=r(B)$, то матрицы A и B называются *эквивалентными*. В этом случае пишут $A\sim B$.

Ранг матрицы не изменится от элементарных преобразований. Под *элементарными преобразованиями* понимают:

1) замену строк столбцами, а столбцов — соответствующими строками;
2) перестановку строк матрицы;
3) вычеркивание строки, все элементы которой равны нулю;
4) умножение какой-либо строки на число, отличное от нуля;
5) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки.

428. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$.

△ Все миноры второго и третьего порядков данной матрицы равны нулю, так как элементы строк этих миноров пропорциональны. Миноры же первого порядка (сами элементы матрицы) отличны от нуля. Следовательно, ранг матрицы равен 1. ▲

429. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

△ Вычеркнув из этой матрицы 2-ю строку, а затем 2, 3 и 4-й столбцы, получаем матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$, эквивалентную заданной. Так как $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}=1\neq 0$, то ранг данной матрицы равен 2. ▲

430. Определить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

△ Сложим соответствующие элементы 1-й и 3-й строк, а затем разделим на 4 элементы 1-й строки:

$$A=\begin{pmatrix}3&5&7\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&8&12\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}.$$

Из элементов 1-й строки вычтем соответствующие элементы 2-й строки, после чего вычеркнем 1-ю строку:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&0\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}.$$

Ранг последней матрицы равен 2, так как, например, $\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}\neq 0$. Следовательно, и ранг данной матрицы равен 2. ▲

431. Определить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}4&3&2&2\\0&2&1&1\\0&0&3&3\end{pmatrix}$.

△ Вычтем из элементов 4-го столбца элементы 3-го столбца, а затем вычеркнем 4-й столбец:

$$A=\begin{pmatrix}4&3&2&2\\0&2&1&1\\0&0&3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&3&2&0\\0&2&1&0\\0&0&3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&3&2\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

Так как $\begin{vmatrix}4&3&2\\0&2&1\\0&0&3\end{vmatrix}=24\neq 0$, то ранг матрицы равен 3. ▲

432. Определить ранг и найти базисные миноры матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&0&2&0\\2&0&4&0&0\end{pmatrix}.$$

△ Имеем

$$\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&0&2&0\\2&0&4&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\2&0&4&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\1&0&2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\end{pmatrix};\ r(A)=2.$$

Базисными минорами являются миноры второго порядка этой матрицы, отличные от нуля:

$$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}0&2\\1&0\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}0&1\\2&0\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}0&2\\2&0\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1&0\\0&4\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}0&2\\4&0\end{vmatrix}.$$

Таким образом, матрица A имеет 8 базисных миноров. ▲

433. Сколько миноров второго порядка имеет матрица

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}?$$

Выписать все эти миноры.

△ Матрица имеет $C_3^2\cdot C_3^2=3\cdot 3=9$ миноров второго порядка:

$$\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{21}&a_{23}\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}.\ ▲$$

434. Определить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} \lambda & 5\lambda & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & 10\lambda \\ -\lambda & -2\lambda & -3\lambda \end{pmatrix}$.

435. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

436. Определить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ и найти ее базисные миноры.

437. Определить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ и найти ее базисные миноры.

§ 5. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ m ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С n НЕИЗВЕСТНЫМИ

Дана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Решением этой системы называется совокупность n чисел $(\overline{x_1};\ \overline{x_2};\ \ldots;\ \overline{x_n})$, которые, будучи подставлены вместо неизвестных в уравнения, обращают эти уравнения в тождества. Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение $(\overline{x_1};\ \overline{x_2};\ \ldots;\ \overline{x_n})$. Если же система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной*.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет только одно решение, и *неопределенной*, если она имеет больше одного решения.

Матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называются соответственно *матрицей* и *расширенной матрицей системы* (1).

Для совместности системы (1) *необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу ее расширенной матрицы* (**теорема Кронекера—Капелли**). Итак, система (1) совместна тогда и только тогда, когда $r(A)=r(A_1)=r$. В этом случае число r называется *рангом системы* (1).

Если $b_1=b_2=\ldots=b_m=0$, то система линейных уравнений (1) называется *однородной*. Однородная система уравнений всегда совместна.

Если ранг совместной системы равен числу неизвестных (т. е. $r=n$), то система является определенной.

Если же ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система — неопределенная. Остановимся на последнем случае. Итак, предположим, что система (1) совместна, причем $r<n$. Рассмотрим какой-нибудь базисный минор матрицы A. Выделим в этом миноре произвольную строку. Элементы этой строки являются коэффициентами при r неизвестных в одном из уравнений системы (1). Эти r неизвестных назовем *базисными неизвестными* рассматриваемой системы уравнений. Остальные $n-r$ неизвестных системы (1) назовем *свободными неизвестными*.

Выделим из системы (1) систему r уравнений, среди коэффициентов которых содержатся элементы базисного минора. Базисные неизвестные в выделенной системе оставим в левых частях уравнений, а члены, содержащие свободные неизвестные, перенесем вправо. Из полученной системы уравнений выразим базисные неизвестные через свободные неизвестные (например, по формулам Крамера).

Таким образом, придавая свободным неизвестным произвольные значения, можно найти соответствующие значения базисных неизвестных. Следовательно (об этом уже сказано выше), система (1) имеет бесчисленное множество решений.

438. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=1, \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5=2, \\ 2x_1+11x_2+12x_3+25x_4+22x_5=4. \end{cases}$$

△ Определим ранги матрицы и расширенной матрицы системы. Выпишем расширенную матрицу

$$A_1=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right).$$

Вертикальной чертой мы отделили элементы матрицы системы (матрицы A) от свободных членов системы.

Прибавим к элементам 2-й строки соответствующие элементы 3-й строки, а затем разделим все элементы 2-й строки на 3:

$$A_1\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 & 6 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right).$$

Вычтем из элементов 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки:

$$A_1\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right);\ A\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $r(A)=2$, $r(A_1)=3$, т. е. $r(A)\neq r(A_1)$; следовательно, система несовместна.▲

439. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=14, \\ 3x_1+2x_2+\ x_3=10, \\ x_1+\ x_2+\ x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-\ x_3=5, \\ x_1+\ x_2=3. \end{cases}$$

△ Расширенная матрица системы имеет вид

$$A_1=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Прибавим элементы 2-й строки к соответствующим элементам 1-й и 4-й строк а затем разделим элементы 1-й строки на 4, а элементы 4-й строки на 5:

$$A_1\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 5 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Вычтем из элементов 3-й строки соответствующие элементы 1-й строки, а из элементов 5-й строки вычтем элементы 4-й строки; после этого вычеркнем 3-ю и

5-ю строки:

$$A_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель последней матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, $r(A) = 3$. Ранг расширенной матрицы также равен 3, так как найденный определитель является минором матрицы A_1.

Итак, система совместна. Для ее решения возьмем, например, первое, третье и пятое уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Отсюда легко находим, что $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. ▲

440. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

△ Здесь

$$A_1 = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Вычтем из 3-й строки 1-ю:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Разделим элементы 3-й строки на 2 и вычтем из полученной 3-й строки 2-ю; затем вычеркнем 3-ю строку:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad A_1 \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Нетрудно видеть, что $r(A) = r(A_1) = 2$. Следовательно, система совместна.

Возьмем первое и второе уравнения заданной системы:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

За базисные неизвестные примем x_1 и x_2. Это можно сделать, так как определитель $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ из коэффициентов при этих неизвестных отличен от нуля. Свободными неизвестными служат x_3 и x_4. Переписав систему в виде

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4, \\ 2x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4, \end{cases}$$

выразим x_1 и x_2 через x_3 и x_4:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}1-4x_3-3x_4 & 5\\ -2x_3+x_4 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & -1\end{vmatrix}}=-\frac{6}{11}x_3-\frac{8}{11}x_4-\frac{1}{11},$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1-4x_3-3x_4\\ 2 & -2x_3+x_4\end{vmatrix}}{-11}=-\frac{6}{11}x_3+\frac{7}{11}x_4+\frac{2}{11}.$$

Полагая $x_3=u$, $x_4=v$, получим решение системы в виде

$$x_1=-\frac{6}{11}u+\frac{8}{11}v-\frac{1}{11},\quad x_2=-\frac{6}{11}u+\frac{7}{11}v+\frac{2}{11},\quad x_3=u,\quad x_4=v.$$

Придавая u и v различные числовые значения, будем получать различные решения данной системы уравнений. ▲

Исследовать системы уравнений:

441. $\begin{cases}3x_1+2x_2=4,\\ x_1-4x_2=-1,\\ 7x_1+10x_2=12,\\ 5x_1+6x_2=8,\\ 3x_1-16x_2=-5.\end{cases}$

442. $\begin{cases}x_1+5x_2+4x_3=1,\\ 2x_1+10x_2+8x_3=3,\\ 3x_1+15x_2+12x_3=5.\end{cases}$

443. $\begin{cases}x_1-3x_2+2x_3=-1,\\ x_1+9x_2+6x_3=3,\\ x_1+3x_2+4x_3=1.\end{cases}$

§ 6. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА

Численное решение линейных алгебраических уравнений с помощью определителей удобно производить для систем двух и трех уравнений. В случае же систем большего числа уравнений гораздо выгоднее пользоваться *методом Гаусса*, который заключается в последовательном исключении неизвестных. Поясним смысл этого метода на системе четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}u=a_{15}, & \text{(а)}\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}u=a_{25}, & \text{(б)}\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}u=a_{35}, & \text{(в)}\\ a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}u=a_{45}. & \text{(г)}\end{cases}$$

Допустим, что $a_{11}\neq 0$ (если $a_{11}=0$, то изменим порядок уравнений, выбрав первым такое уравнение, в котором коэффициент при x не равен нулю).

I шаг: делим уравнение (а) на a_{11}, умножаем полученное уравнение на a_{21} и вычитаем из (б); затем умножаем на a_{31} и вычитаем из (в); наконец, умножаем на a_{41} и вычитаем из (г). В результате I шага приходим к системе

$$\begin{cases}x+b_{12}y+b_{13}z+b_{14}u=b_{15}, & \text{(д)}\\ b_{22}y+b_{23}z+b_{24}u=b_{25}, & \text{(е)}\\ b_{32}y+b_{33}z+b_{34}u=b_{35}, & \text{(ж)}\\ b_{42}y+b_{43}z+b_{44}u=b_{45}, & \text{(з)}\end{cases}$$

причем b_{ij} получаются из a_{ij} по следующим формулам:

$$b_{1j}=a_{1j}/a_{11}\quad (j=2,\ 3,\ 4,\ 5);$$
$$b_{ij}=a_{ij}-a_{i1}b_{1j}\quad (i=2,\ 3,\ 4;\ j=2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

II шаг: поступаем с уравнениями (е), (ж), (з) точно так же, как с уравнениями (а), (б), (в), (г) и т. д. В итоге исходная система преобразуется к так называемому ступенчатому виду:

$$\begin{cases} x+b_{12}y+b_{13}z+b_{14}u=b_{15}, \\ \qquad y+c_{23}z+c_{24}u=c_{25}, \\ \qquad\qquad z+d_{34}u=d_{35}, \\ \qquad\qquad\qquad u=e_{15}. \end{cases}$$

Из преобразованной системы все неизвестные определяются последовательно без труда.

444. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 36,47x+5,28y+6,34z=12,26, & (а) \\ 7,33x+28,74y+5,86z=15,15, & (б) \\ 4,63x+6,31y+26,17z=25,22. & (в) \end{cases}$$

△ Разделив уравнение (а) на 36,47, получим

$$x+0,1447y+0,1738z=0,3361. \qquad (*)$$

Умножим уравнение (*) на 7,33 и результат вычтем из (б); получим

$$27,6793y+4,586z=12,6864;$$

теперь умножим уравнение (*) на 4,63 и результат вычтем из (в); получим

$$5,64y+25,3653z=23,6639.$$

Таким образом, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 27,6793y+4,586z=12,6864, & (г) \\ 5,64y+25,3653z=23,6639. & (д) \end{cases}$$

Разделив уравнение (г) на 27,68 имеем

$$y+0,1657z=0,4583. \qquad (**)$$

Умножая уравнение (**) на 5,64 и вычитая из (д), получим $24,4308z=21,0791$. Следовательно, $z=0,8628$. Тогда

$$y=0,4583-0,1657\cdot 0,8628=0,3153,$$
$$x=0,3361-0,1447\cdot 0,3153-0,1738\cdot 0,8628=0,1405.$$

Таким образом, $x=0,1405$, $y=0,3153$, $z=0,8628$.

Практически удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 36,47 & 5,28 & 6,34 & 12,26 \\ 7,33 & 28,74 & 5,86 & 15,15 \\ 4,63 & 6,31 & 26,17 & 25,22 \end{array}\right).$$

Введем 5-й, так называемый *контрольный столбец*, каждым элементом которого является сумма четырех элементов данной строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 36,47 & 5,28 & 6,34 & 12,26 & 60,35 \\ 7,33 & 28,74 & 5,86 & 15,15 & 57,08 \\ 4,63 & 6,31 & 26,17 & 25,22 & 62,33 \end{array}\right).$$

При линейных преобразованиях элементов матрицы такому же преобразованию должны подвергнуться и элементы контрольного столбца. Нетрудно видеть, что каждый элемент контрольного столбца преобразованной матрицы равен сумме элементов соответствующей строки. Переход от одной матрицы к другой будем записывать с помощью знака эквивалентности:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 36,47 & 5,28 & 6,34 & 12,26 & 60,35 \\ 7,33 & 28,74 & 5,86 & 15,15 & 57,08 \\ 4,63 & 6,31 & 26,17 & 25,22 & 62,33 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0,1447 & 0,1738 & 0,3361 & 1,6547 \\ 7,33 & 28,74 & 5,86 & 15,15 & 57,08 \\ 4,63 & 6,31 & 26,17 & 25,22 & 62,33 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0,1447 & 0,1738 & 0,3361 & 1,6547 \\ 0 & 27,6793 & 4,586 & 12,6864 & 44,9516 \\ 0 & 5,64 & 25,3653 & 23,6639 & 54,6688 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0,1447 & 0,1738 & 0,3361 & 1,6547 \\ 0 & 1 & 0,1657 & 0,4583 & 1,6240 \\ 0 & 5,64 & 25,3653 & 23,6639 & 54,6688 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0,1447 & 0,1738 & 0,3361 & 1,6547 \\ 0 & 1 & 0,1657 & 0,4583 & 1,6240 \\ 0 & 0 & 24,4308 & 21,0791 & 45,5094 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0,1447 & 0,1738 & 0,3361 & 1,6547 \\ 0 & 1 & 0,1657 & 0,4583 & 1,6240 \\ 0 & 0 & 1 & 0,8628 & 1,8529 \end{array}\right).$$

Используя полученную матрицу, выписываем преобразованную систему и находим решение:

$$\begin{aligned} z &= 0,8628, \\ y &= 0,4583 - 0,1657 \cdot 0,8628 = 0,3153, \\ x &= 0,3361 - 0,1738 \cdot 0,8628 - 0,1447 \cdot 0,3153 = 0,1405. \ \blacktriangle \end{aligned}$$

Если система имеет единственное решение, то ступенчатая система уравнений приведется к *треугольной*, в которой последнее уравнение содержит одно неизвестное. В случае неопределенной системы, т. е. такой, в которой число неизвестных больше числа линейно независимых уравнений, допускающей поэтому бесчисленное множество решений, треугольной системы не получается, так как последнее уравнение содержит более одного неизвестного.

Если же система уравнений несовместна, то после приведения к ступенчатому виду она содержит хотя бы одно уравнение вида $0 = 1$, т. е. уравнение, в котором все неизвестные имеют нулевые коэффициенты, а правая часть отлична от нуля. Такая система не имеет решений.

445. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = 0, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

$\triangle$ Преобразуем матрицу в эквивалентную:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 3 & 2 & 1 & 5 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 11 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

(для упрощения вычислений мы поменяли местами первое и второе уравнения).

Вычитаем из остальных двух строк 1-ю строку, умноженную на 3 и на 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 9 & 3 & 7 \end{array}\right).$$

Изменив знаки во 2-й строке и умножив ее на 5, прибавляем к 3-й:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & -11 & -22 & -33 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

(мы разделили на -11 последнюю строку).

Система уравнений приняла треугольный вид:

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ y - 4z = -5, \\ z = 2. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение. Из последнего уравнения имеем $z=2$; подставляя это значение во второе уравнение, получаем $y=3$ и, наконец, из первого уравнения находим $x=-1$. ▲

Решить системы уравнений:

446. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=5, \\ x_1-2x_2+2x_3=-5, \\ 7x_1+x_2-x_3=10. \end{cases}$

447. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=4, \\ 2x_1-x_2+3x_3-2x_4=1, \\ x_1-x_3+2x_4=6, \\ 3x_1-x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$

448. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3+2x_5=18, \\ 2x_1-5x_2+x_4+x_5=-7, \\ x_1-x_4+2x_5=8, \\ 2x_2+x_3+x_4-x_5=10, \\ x_1+x_2-3x_3+x_4=1. \end{cases}$

449. $\begin{cases} 4x_1+2x_2+3x_3=-2, \\ 2x_1+8x_2-x_3=8, \\ 9x_1+x_2+8x_3=0. \end{cases}$

450. $\begin{cases} 0{,}04x-0{,}08y+4z=20, \\ 4x+0{,}24y-0{,}08z=8, \\ 0{,}09x+3y-0{,}15z=9. \end{cases}$

451. $\begin{cases} 3{,}21x+0{,}71y+0{,}34z=6{,}12, \\ 0{,}43x+4{,}11y+0{,}22z=5{,}71, \\ 0{,}17x+0{,}16y+4{,}73z=7{,}06. \end{cases}$

§ 7. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЖОРДАНА—ГАУССА К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

При решении системы линейных уравнений методом Гаусса был рассмотрен матричный метод с контрольным столбцом, в результате чего данная система уравнений сводилась к треугольной системе (см. с. 92). Для последующего изложения важно познакомиться с *модифицированным методом Жордана—Гаусса*, позволяющим находить непосредственно значения неизвестных.

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1}$$

В матрице A этой системы выберем отличный от нуля элемент a_{qp}. Этот элемент называется *разрешающим элементом*, p-й столбец матрицы A — *разрешающим столбцом*, а q-я строка — *разрешающей строкой*.

Рассмотрим новую систему уравнений

$$\begin{cases} a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+\ldots+a'_{1n}x_n=b'_1, \\ a'_{21}x_1+a'_{22}x_2+\ldots+a'_{2n}x_n=b'_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a'_{m1}x_1+a'_{m2}x_2+\ldots+a'_{mn}x_n=b'_m \end{cases} \tag{2}$$

с матрицей A'; коэффициенты и свободные члены этой системы определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} a'_{ij}&=a_{ij}-\frac{a_{ip}a_{qj}}{a_{qp}} \\ b'_i&=b_i-\frac{a_{ip}b_q}{a_{qp}} \end{aligned}\right\},\quad \text{если}\quad i\neq q.$$

В частности, $a'_{ip}=0$, если $i\neq q$. Если же $i=q$, то принимаем $a'_{qj}=a_{qj}$, $b'_q=b_q$. Таким образом, q-е уравнения в системах (1) и (2) одинаковы, а коэффициенты при x_p во всех уравнениях системы (2), кроме q-го, равны нулю.

Следует иметь в виду, что системы (1) и (2) одновременно совместны или несовместны. В случае совместности эти системы равносильны (их решения совпадают).

Для определения элемента a'_{ij} матрицы A' полезно иметь в виду так называемое «правило прямоугольника».

Рассмотрим 4 элемента матрицы A: a_{ij} (элемент, подлежащий преобразованию), a_{qp} (разрешающий элемент) и элементы a_{ip} и a_{qj}. Для нахождения элемента a'_{ij} следует из элемента a_{ij} вычесть произведение элементов a_{ip} и a_{qj}, расположенных в противоположных вершинах прямоугольника, деленное на разрешающий элемент a_{qp}:

$$\begin{array}{ccc} a_{ij} & \cdots\cdots\cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{qj} & \cdots\cdots\cdots & a_{qp} \end{array}$$

Аналогичным образом можно преобразовать систему (2), приняв за разрешающий элемент матрицы A' элемент $a'_{sr} \neq 0$, причем $s \neq q$, $r \neq p$. После этого преобразования все коэффициенты при x_r, кроме a_{sr}, обратятся в нуль. Полученная система может быть снова преобразована и т. д. Если $r = n$ (ранг системы равен числу неизвестных), то после ряда преобразований придем к системе уравнений вида

$$\begin{aligned} k_1 x_1 &= l_1, \\ k_2 x_2 &= l_2, \\ &\ldots\ldots \\ k_n x_n &= l_n, \end{aligned}$$

из которой находятся значения неизвестных. Описанный метод решения, основанный на последовательном исключении неизвестных, называется методом Жордана — Гаусса.

452. Дана матрица системы линейных уравнений

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & -1 & 7 \\ 8 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 7 & -6 & 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

При решении этой системы методом Жордана — Гаусса за разрешающий элемент приняли $a_{23} = 3$. Найти элементы a'_{24}, a'_{13}, a'_{44} преобразованной матрицы.

△ Так как a_{24} — элемент разрешающей строки, то $a'_{24} = a_{24} = 2$. Элемент a_{13} принадлежит разрешающему столбцу; поэтому $a'_{13} = 0$. Элемент a'_{44} определяем по правилу прямоугольника:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & -1 & 7 \\ 8 & 1 & \boxed{3} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 7 & -6 & 5 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$a'_{44} = a_{44} - \frac{a_{24} a_{43}}{a_{23}} = -4 - \frac{2 \cdot 5}{3} = -7\frac{1}{3}. \ ▲$$

453. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 \qquad\quad - x_4 = -6, \\ \qquad x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \qquad = 6. \end{cases}$$

△ Запишем коэффициенты, свободные члены и суммы коэффициентов и свободных членов (Σ — контрольный столбец) в следующую таблицу:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
$\boxed{1}$	1	—3	2	6	7
1	—2	0	—1	—6	—8
0	1	1	3	16	21
2	—3	2	0	6	7

Мы взяли за разрешающий элемент коэффициент при x_1 в первом уравнении. Перепишем без изменения строку таблицы, содержащую этот элемент (разрешающую строку), а все элементы 1-го столбца, кроме разрешающего, заменим нулями. Применив правило прямоугольника, заполняем остальные клетки таблицы (это же правило применяем и к столбцу Σ):

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	1	—3	2	6	7
0	—3	3	—3	—12	—15
0	1	1	3	16	21
0	—5	8	—4	—6	—7

Отметим, что в контрольном столбце получаются суммы элементов соответствующих строк. Разделив на —3 элементы 2-й строки, получаем таблицу:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	1	—3	2	6	7
0	$\boxed{1}$	—1	1	4	5
0	1	1	3	16	21
0	—5	8	—4	—6	—7

Примем за разрешающий 2-й элемент 2-й строки. 1-й столбец перепишем без изменения, элементы 2-го столбца, кроме разрешающего, заменим нулями, 2-ю (разрешающую) строку перепишем без изменения, элементы остальных клеток таблицы преобразуем по правилу прямоугольника:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	—2	1	2	2
0	1	—1	1	4	5
0	0	2	2	12	16
0	0	3	1	14	18

Разделим элементы 3-й строки на 2:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	—2	1	2	2
0	1	—1	1	4	5
0	0	$\boxed{1}$	1	6	8
0	0	3	1	14	18

Преобразуем таблицу, приняв за разрешающий 3-й элемент 3-го столбца:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	0	3	14	18
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	0	—2	—4	—6

Разделим элементы 4-й строки на -2:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	0	3	14	18
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	0	$\boxed{1}$	2	3

Преобразуем таблицу, приняв за разрешающий 4-й элемент 4-й строки:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	0	0	8	9
0	1	0	0	6	7
0	0	1	0	4	5
0	0	0	1	2	3

В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=8, \\ 0\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=6, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+1\cdot x_3+0\cdot x_4=4, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+1\cdot x_4=2, \end{cases}$$

т. е. $x_1=8$, $x_2=6$, $x_3=4$, $x_4=2$. ▲

454. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=1, \\ x_1-3x_2+x_3+x_4=0, \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1, \\ 4x_1+3x_2-4x_3-x_4=2. \end{cases}$$

△ Составим таблицу

$\boxed{1}$	1	-2	1	1	2
1	-3	1	1	0	0
4	-1	-1	-1	1	2
4	3	-4	-1	2	4

1-й элемент 1-го столбца — разрешающий:

1	1	—2	1	1	2
0	—4	3	0	—1	—2
0	—5	7	—5	—3	—6
0	—1	4	—5	—2	—4

Изменим знаки в 4-й строке:

1	1	—2	1	1	2
0	—4	3	0	—1	—2
0	—5	7	—5	—3	—6
0	$\boxed{1}$	—4	5	2	4

4-й элемент 2-го столбца — разрешающий:

1	0	2	—4	—1	—2
0	0	—13	20	7	14
0	0	—13	20	7	14
0	1	—4	5	2	4

Вычтем из 3-й строки 2-ю и вычеркнем 3-ю строку:

1	0	2	—4	—1	—2
0	0	—13	$\boxed{20}$	7	14
0	1	—4	5	2	4

4-й элемент 2-й строки — разрешающий:

1	0	—0,6	0	0,4	0,8
0	0	—13	20	7	14
0	1	—0,75	0	0,25	0,5

Матрица имеет ранг, равный 3, следовательно, система содержит три базисных неизвестных x_1, x_2 и x_4 и одно свободное неизвестное x_3. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1\cdot x_1+0\cdot x_2-0,6x_3+0\cdot x_4=0,4, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2-13x_3+20x_4=7, \\ 0\cdot x_1+1\cdot x_2-0,75x_3+0\cdot x_4=0,25. \end{cases}$$

Отсюда

$$x_1=0,4+0,6x_3,\quad x_2=0,25+0,75x_3,\quad x_4=0,35+0,65x_3.$$

Итак, решение системы имеет вид

$$x_1=0,4+0,6u,\quad x_2=0,25+0,75u,\quad x_3=u,\quad x_4=0,35+0,65u,$$

где u — произвольное число. ▲

455. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6x-5y+7z+8t=3, \\ 3x+11y+2z+4t=6, \\ 3x+2y+3z+4t=1, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

△ Составим таблицу:

6	—5	7	8	3	19
3	11	2	4	6	26
3	2	3	4	1	13
$\boxed{1}$	1	1	0	0	3

4-й элемент 1-го столбца — разрешающий:

0	—11	$\boxed{1}$	8	3	1
0	8	—1	4	6	17
0	—1	0	4	1	4
1	1	1	0	0	3

1-й элемент 3-го столбца — разрешающий:

0	—11	$\boxed{1}$	8	3	1
0	—3	0	12	9	18
0	—1	0	4	1	4
1	12	0	—8	—3	2

Изменим знаки элементов 3-й строки на противоположные:

0	—11	1	8	3	1
0	—3	0	12	9	18
0	$\boxed{1}$	0	—4	—1	—4
1	12	0	—8	—3	2

3-й элемент 2-го столбца — разрешающий:

0	0	1	—36	—8	—43
0	0	0	0	6	6
0	$\boxed{1}$	0	—4	—1	—4
1	0	0	40	9	50

В результате приходим к системе

$$\begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z-36t=-8, \\ 0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+0\cdot t=6, \\ 0\cdot x+1\cdot y+0\cdot z-4\cdot t=-1, \\ 1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+40t=9. \end{cases}$$

Легко видеть, что второму уравнению не удовлетворяют никакие значения x, y, z и t. Таким образом, полученная система уравнений и заданная система несовместны. ▲

456. Применить метод Жордана—Гаусса к определению ранга матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

△ Составим таблицу

7	-1	3	5	14
$\boxed{1}$	3	5	7	16
4	1	4	6	15
3	-2	-1	-1	-1

В последнем (контрольном) столбце записаны суммы элементов соответствующих строк, 2-й элемент 1-го столбца — разрешающий:

0	-22	-32	-44	-98
1	3	5	7	16
0	-11	-16	-22	-49
0	-11	-16	-22	-49

Разделим элементы 1-й строки на -2, вычтем элементы 1-й строки из соответствующих элементов 4-й и 3-й строк и вычеркнем 3-ю и 4-ю строки. Тогда получим

0	11	16	22	49
1	3	5	7	16

Любой определитель второго порядка полученной матрицы отличен от нуля. Следовательно, $r(A)=2$ ▲.

Методом Жордана — Гаусса решить системы уравнений:

457. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8, \\ x_2+3x_3+x_4=15, \\ 4x_1+x_3+x_4=11, \\ x_1+x_2+5x_4=23. \end{cases}$

458. $\begin{cases} x_2-x_1+x_3-x_4=-2, \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4=-5, \\ 2x_1-x_2-3x_3+2x_4=-1, \\ x_1+2x_2+3x_3-6x_4=-10. \end{cases}$

459. $\begin{cases} x_1+5x_2-2x_3-3x_4=1, \\ 7x_1+2x_2-3x_3-4x_4=2, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=5, \\ 2x_1+3x_2+2x_3-3x_4=4, \\ x_1-x_2-x_3-x_4=-2. \end{cases}$

460. Методом Жордана — Гаусса определить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$