

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА

А.В. Чернов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

КОМПЛЕКС УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Часть 4

Том 1

*Рекомендовано Ученым советом Нижегородского государственного
технического университета им. Р.Е. Алексева
в качестве учебно-методического пособия
для студентов заочной и дистанционной форм обучения
по всем техническим специальностям*

Нижний Новгород 2007

УДК 517.1(075.8), 517.3

Чернов А.В. Высшая математика: комплекс учебно-методических материалов: ч.4, т.1 / А.В. Чернов; Нижегород. гос. техн. ун-т. Нижний Новгород, 2007.-142 с.

Изложен опорный конспект лекций, соответствующий рабочей учебной программе. Данный том содержит разделы: векторный анализ и теория поля, комплексные числа и функции комплексного переменного, операционное исчисление, интеграл Фурье. Излагаемый достаточно сжато теоретический материал сопровождается большим количеством примеров решения типовых задач с подробными пояснениями и иллюстрациями. Прилагаются глоссарий определяемых терминов и список рекомендуемой литературы.

Предназначается для студентов всех технических специальностей заочной и дистанционной форм обучения.

Научный редактор – И.П.Рязанцева

Редактор – О.В.Пугина

Подписано к печати 12.11.2007. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ.л. 9. Уч.-изд.л. 9. Тираж 500 экз. Заказ .

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева.
Типография НГТУ.

Адрес университета и полиграфического предприятия:
603950, ГСП-41, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

© Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, 2007

© Чернов А.В., 2007

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА	5
1. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ	6
§1. Векторные функции скалярного аргумента	6
§2. Понятие скалярного и векторного поля	10
§3. Векторные линии	11
§4. Криволинейные интегралы первого рода	13
§5. Циркуляция и криволинейные интегралы второго рода	17
§6. Поверхностные интегралы первого рода	22
§7. Односторонние и двусторонние поверхности. Ориентация поверхности.	25
§8. Поток векторного поля через поверхность и поверхностные интегралы второго рода	26
§9. Физический смысл потока поля скоростей жидкости	30
§10. Формула Остроградского-Гаусса	31
§11. Дивергенция векторного поля и ее физический смысл	35
§12. Формула Грина	36
§13. Формула Стокса	39
§14. Ротор векторного поля и его физический смысл	41
§15. Понятие потенциальности векторного поля	44
§16. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования	49
§17. Вычисление потенциала	50
2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА	54
§1. Понятие комплексного числа	54
§2. Графическое изображение комплексных чисел	55
§3. Разложение действительного многочлена n -й степени на множители ..	58
§4. Последовательности комплексных чисел	59
§5. Числовые ряды с комплексными членами	59
§6. Множества на комплексной плоскости	60
3. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО	62
§1. Понятие функции комплексного переменного	62
§2. Основные элементарные функции комплексного переменного	64
§3. Предел и непрерывность функции комплексного переменного	67
§4. Аналитические функции. Условия Коши-Римана	69
§5. Интеграл от функции комплексного переменного	73
§6. Теорема Коши. Интегральная формула Коши	75

§7. Степенные ряды	82
§8. Ряды Лорана	88
§9. Изолированные особые точки и их классификация	95
§10. Вычеты	98
§11. Применение вычетов к вычислению интегралов	102
4. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ	107
§1. Преобразование Лапласа	107
§2. Нахождение изображения функций, заданных графически	116
§3. Восстановление оригинала по изображению	118
§4. Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений	123
§5. Применение операционного исчисления к решению линейных систем дифференциальных уравнений	128
5. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ	132
§1. Понятие интеграла Фурье. Преобразование Фурье	132
§2. Достаточные условия представимости функции интегралом Фурье	134
§3. Спектральные характеристики периодических функций	134
§4. Спектральные характеристики непериодических функций	136
ГЛОССАРИЙ	139
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	142

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Данный курс является четвертой частью курса высшей математики в рамках комплекса учебно-методических материалов для студентов заочной и дистанционной форм обучения и содержит материал четвертого семестра обучения студента-заочника, а именно, следующие разделы:

1. Векторный анализ.
2. Комплексные числа.
3. Теория функций комплексного переменного.
4. Операционное исчисление.
5. Интеграл Фурье.
6. Теория вероятностей.
7. Математическая статистика.

Отметим, что разделы 3-5 и 6-7 предназначены для различных специальностей (часть студентов изучает либо то, либо другое, хотя некоторая часть студентов изучает и то и другое вместе). Этим объясняется, во-первых, увеличение объема данной, четвертой части по сравнению с предыдущими, а во-вторых, разделение ее на два тома. Данный, первый том, содержит материал разделов 1-5. Приведем пояснения по этим пяти разделам.

Методы векторного анализа широко применяются при решении физических, механических и инженерных задач – в качестве простейших примеров укажем вычисление масс, статических моментов и моментов инерции материальных кривых и поверхностей, отыскание их центра масс, вычисление работы силы, количества жидкости, протекающей через поверхность в единицу времени, угловую скорость вращения частиц жидкости, плотности источников или стоков и т.д. Успехи технических наук были бы попросту невозможны без углубления их теоретической базы и использования методов векторного анализа. Это объясняется тем, что: во-первых, конструкции векторного анализа адекватно отражают суть многих понятий и закономерностей геометрии и физики; во-вторых, здесь достигается единство аналитического и геометрического методов исследования; в третьих, формулы векторного анализа, выражающие физические закономерности, отражают сущность явления в чистом виде. Перед изучением этого раздела настоятельно рекомендуется повторить темы "Аналитическая геометрия в пространстве" и "Кратные интегралы".

Теория функций комплексного переменного (ТФКП) является одним из важнейших разделов математики и имеет многочисленные приложения как в самой математике, так и в задачах гидромеханики, теории упругости, электротехнике, теории управления и т.д. Настоящее пособие ставит своей целью познакомить студентов с основными понятиями и методами ТФКП на примере решения большого количества типовых задач.

Следующий далее раздел "Операционное исчисление" является, по сути, одним из приложений ТФКП и, в свою очередь, имеет многочисленные применения как в математике, так и в прикладных дисциплинах (например, в теории автоматического регулирования, при обработке сигналов и т.д.).

Раздел "Интеграл Фурье" содержит изложение таких понятий, как спектр, спектральная плотность, амплитудный и фазовый спектры. Уже отсюда понятно, что указанный раздел относится непосредственно к теории колебаний и теории волновых процессов и возникает, фактически, из физических и прикладных потребностей.

Излагаемый достаточно сжато теоретический материал сопровождается большим количеством примеров, практических рекомендаций и иллюстраций.

1. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ.

§1.1. Векторные функции скалярного аргумента

Пусть в пространстве задана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$, и соответственно, правый ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}$ – некоторое множество на числовой оси.

Определение 1.1. Если каждому $t \in \mathcal{D}$ поставлен в соответствие геометрический вектор $\vec{F}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = \{x(t), y(t), z(t)\}$, то говорят, что на множестве \mathcal{D} определена *вектор-функция* $\vec{F} = \vec{F}(t)$ переменной t .

Примечание. Задание вектор-функции $\vec{F} = \vec{F}(t)$ равносильно заданию трех обычных (так называемых скалярных) функций $x(t), y(t), z(t)$ ее координат (как функций переменной t). Аналогично определяется вектор-функция на плоскости.

Определение 1.2. Если $\vec{F} = \vec{F}(t)$ – вектор-функция, определенная на множестве \mathcal{D} , то совокупность точек $\left\{M(t) = (x(t); y(t); z(t)) : t \in \mathcal{D}\right\}$ называется *годографом* вектор-функции $\vec{F}(t)$.

Примечание. Фактически, годограф вектор-функции $\vec{F}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$, $t \in \mathcal{D}$, – это линия, определяемая параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in \mathcal{D}.$$

Например, годографом вектор-функции $\vec{F}(t) = \{\cos t; \sin t; 1\}$, $t \in [0; 2\pi]$, является окружность

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1, \end{cases}$$

радиуса 1 в горизонтальной плоскости $z = 1$ с центром на оси Oz . С другой стороны, всякую кривую в пространстве, заданную некоторыми параметрическими уравнениями, можно рассматривать как годограф радиус-вектора $\vec{r}(t) = \overline{OM}$ переменной точки этой кривой $M = M(t) = (x(t); y(t); z(t))$. Вообще, годограф – это аналог графика скалярной функции.

Определение 1.3. Вектор \vec{a} называется *пределом вектор-функции* $\vec{F}(t)$ при $t \rightarrow t_0$, если $\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{a} - \vec{F}(t)| = 0$.

Примечание. Если $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$, то, как известно,

$$|\vec{a} - \vec{F}(t)| = \sqrt{(x(t) - x_a)^2 + (y(t) - y_a)^2 + (z(t) - z_a)^2}.$$

Таким образом,

$$\vec{a} = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) \quad \Leftrightarrow \quad x_a = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t), \quad y_a = \lim_{t \rightarrow t_0} y(t), \quad z_a = \lim_{t \rightarrow t_0} z(t),$$

то есть предел вектор-функции определяется покомпонентно. Соответственно, точно так же – покомпонентно определяется понятие *непрерывности вектор-функции*:

- вектор-функция $\vec{F}(t) = \{x(t); y(t); z(t)\}$ *непрерывна в точке* t_0 тогда и только тогда, когда каждая из ее компонент $x(t), y(t), z(t)$ непрерывна в точке t_0 ;

а также *производной вектор-функции* $\vec{F}'(t) = \{x'(t); y'(t); z'(t)\}$ и т.п.

Из определения и соответствующих свойств скалярных функций очевидны следующие свойства вектор-функций.

Правила дифференцирования вектор-функции

$$1. \frac{d}{dt}(\vec{F}(t) \pm \vec{G}(t)) = \frac{d\vec{F}}{dt} \pm \frac{d\vec{G}}{dt}.$$

$$2. \forall \alpha \in \mathbf{R} \quad \frac{d}{dt}(\alpha \vec{F}(t)) = \alpha \frac{d\vec{F}}{dt}.$$

$$3. \text{ Для любого постоянного вектора } \vec{F} \text{ имеем: } \frac{d\vec{F}}{dt} = \vec{0} \text{ (нулевому вектору).}$$

4. Для любой дифференцируемой скалярной функции $\varphi(t)$ имеем:

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t)\vec{F}(t)) = \frac{d\varphi}{dt}\vec{F}(t) + \varphi(t)\frac{d\vec{F}}{dt}.$$

5. Производная скалярного произведения

$$\frac{d}{dt}(\vec{F}(t), \vec{G}(t)) = \left(\frac{d\vec{F}}{dt}, \vec{G}\right) + \left(\vec{F}, \frac{d\vec{G}}{dt}\right).$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{F}(t), \vec{G}(t)) &= \frac{d}{dt}(x_F x_G + y_F y_G + z_F z_G) = (x'_F x_G + y'_F y_G + z'_F z_G) + \\ &+ (x_F x'_G + y_F y'_G + z_F z'_G) = \left(\frac{d\vec{F}}{dt}, \vec{G}\right) + \left(\vec{F}, \frac{d\vec{G}}{dt}\right). \end{aligned}$$

6. Производная векторного произведения (аналогично 5.):

$$\frac{d}{dt}[\vec{F}(t), \vec{G}(t)] = \left[\frac{d\vec{F}}{dt}, \vec{G}\right] + \left[\vec{F}, \frac{d\vec{G}}{dt}\right].$$

7. Если $\varphi(t)$ – дифференцируемая скалярная функция, для которой соответствующая композиция определена, то $\frac{d}{dt}\vec{F}(\varphi(t)) = \frac{d\vec{F}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$.

8. Если $|\vec{F}(t)| \equiv \text{const}$, то $\left(\vec{F}(t), \frac{d\vec{F}}{dt}\right) \equiv 0$.

Доказательство. Достаточно, пользуясь свойством 5, продифференцировать очевидное тождество

$$\text{const} \equiv \left|\vec{F}(t)\right|^2 = \left(\vec{F}(t), \vec{F}(t)\right).$$

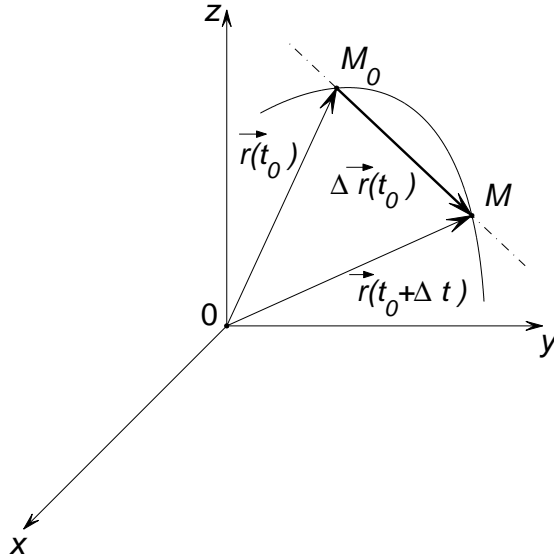


Рис. 1.1

Пример 1.1. Пусть $\vec{r}(t) = \{\sin t; \cos^2 t; \sin 2t\}$. Тогда

$$\vec{r}'(t) = \{\cos t; -2 \cos t \sin t; 2 \cos 2t\}.$$

Рассмотрим некоторую кривую Γ в пространстве, заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta]. \quad (1.1)$$

Определение 1.4. Если функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывны на $[\alpha; \beta]$ (то есть вектор-функция $\vec{r}(t) = \{x(t); y(t); z(t)\}$ непрерывна на $[\alpha; \beta]$), то кривая Γ , определяемая параметрическими уравнениями (1.1)¹, называется *непрерывной*.

Примечание. Образно говоря, непрерывность кривой Γ означает, что она не распадается на обособленные части, то есть согласуется с интуитивным пониманием непрерывности.

Геометрический смысл производной вектор-функции

Определение 1.5. Вектор-функция $\vec{r}(t) = \{x(t); y(t); z(t)\}$ называется *гладкой* на отрезке $[\alpha; \beta]$, если она имеет непрерывную на этом отрезке производную $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$. При этом кривая (1.1), являющаяся годографом вектор-функции $\vec{r}(t)$, тоже называется *гладкой*.

Пусть $\vec{r}(t) = \{x(t); y(t); z(t)\}$, $t \in [\alpha; \beta]$, – гладкая вектор-функция, а параметры $t_0, t_0 + \Delta t \in [\alpha; \beta]$. Заметим, что точки $M_0(x(t_0); y(t_0); z(t_0))$ и $M(x(t_0 + \Delta t); y(t_0 + \Delta t); z(t_0 + \Delta t))$ лежат на кривой (1.1), см. рис. 1.1. При этом $\vec{r}(t_0) = \overline{OM_0}$, $\vec{r}(t_0 + \Delta t) = \overline{OM}$.

Определение 1.6. Прямая M_0M называется *секущей* кривой (1.1) – годографа вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

¹Их обычно переписывают в более короткой векторной форме: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$.

Заметим, что вектор $\overline{M_0M} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0) = \Delta \vec{r}(t_0)$ является направляющим вектором секущей. Тогда и вектор $\frac{\Delta \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ тоже является направляющим для нее. При этом в силу гладкости вектор-функции существует

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}.$$

А это означает, что при $\Delta t \rightarrow 0$, то есть при $M \rightarrow M_0$ секущая стремится занять вполне определенное положение – положение прямой, проходящей через точку M_0 в направлении вектора $\vec{r}'(t_0)$. Соответственно, указанная прямая (предельное положение секущей M_0M при $M \rightarrow M_0$) называется *касательной к пространственной кривой* (1.1) в точке M_0 . При этом вектор $\vec{r}'(t_0)$ является направляющим вектором этой касательной. В этом состоит геометрический смысл производной вектор-функции.

Примечание. Таким образом, если кривая (1.1) гладкая, то она в любой своей точке имеет касательную, то есть формально определенное понятие гладкости пространственной кривой совпадает с интуитивным пониманием гладкости кривой (у нее нет "углов", "зазубрин" и т.п.).

Отметим, наконец, что по доказанному, канонические уравнения касательной к гладкой кривой (1.1) в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ имеют вид

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

При этом уравнение *нормальной плоскости* к этой кривой в точке M_0 (то есть уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно касательной) имеет вид

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

Пример 1.2. Покажем, что касательная к винтовой линии

$$\vec{r}(t) = \{a \cos t; a \sin t; bt\}$$

образует постоянный угол с осью Oz .

Найдем направляющий вектор касательной: $\vec{r}'(t) = \{-a \sin t; a \cos t; b\}$ и косинус угла, который он образует с осью Oz :

$$\cos \widehat{\vec{r}'(t), \vec{k}} = \frac{(\vec{r}'(t), \vec{k})}{|\vec{r}'(t)| \cdot |\vec{k}|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Физический смысл производной вектор-функции

Пусть t – это время, а конец радиус-вектора $\vec{r}(t)$ описывает движение некоторой материальной точки. Заметим, что при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\left| |\vec{r}'(t_0)| - \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| \right| \leq \left| \vec{r}'(t_0) - \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| \rightarrow 0 \Rightarrow |\vec{r}'(t_0)| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|M_0M|}{\Delta t}.$$

Таким образом, $|\vec{r}'(t)|$ – скалярная величина (мгновенной) скорости материальной точки в момент времени t . В таком случае, сам вектор $\vec{r}'(t)$, направленный, как установлено, по касательной к траектории движения, является

вектором скорости материальной точки. Аналогично, $\vec{r}''(t)$ – ускорение материальной точки в момент времени t .

Длина дуги кривой²

Пусть кривая Γ , определяемая параметрическими уравнениями (1.1), непрерывна, а отображение (1.1) взаимно однозначно (то есть кривая не имеет точек самопересечения). Разобьем отрезок $[\alpha; \beta]$ точками

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta.$$

Соответствующие точки кривой Γ обозначим $M_i(x(t_i); y(t_i); z(t_i))$, $i = \overline{0, n}$.

Соединяя точки $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$ последовательно, получаем ломаную, вписанную в кривую Γ . Длина этой ломаной равна $\sigma_n = \sum_{i=1}^n |M_{i-1}M_i|$.

Обозначим $\lambda = \max_{i \in \overline{1, n}} (t_i - t_{i-1})$ (мелкость разбиения отрезка $[\alpha; \beta]$).

Определение 1.7. Если $\exists \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n = L < \infty$ независимо от способа разбиения отрезка $[\alpha; \beta]$, то говорят, что кривая Γ *спрямляема*, а число L называется *длиной дуги AB* и обозначается $L = |\widetilde{AB}|$.

Можно показать³, что если Γ – гладкая кривая, то она спрямляема, причем для переменной точки $M = M(t) = (x(t); y(t); z(t)) \in \Gamma$ значения функции $\ell(t) = |\widetilde{AM}|$, $t \in [\alpha; \beta]$, могут быть найдены по формуле:

$$\ell(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt.$$

Тогда по теореме о дифференцируемости определенного интеграла по верхнему пределу получаем, что функция $\ell(t)$ является дифференцируемой и

$$\frac{d\ell}{dt} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} = |\vec{r}'(t)|.$$

Функция $\ell(t)$ – переменная длина дуги. Соответственно ее дифференциал $d\ell(t) = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt$ называется *дифференциалом дуги*.

§1.2. Понятие скалярного и векторного поля

Понятие поля является одним из основных понятий современной физики. По определению говорят, что в некотором множестве Ω на плоскости или в пространстве задано *поле величины U* , если в каждой точке множества Ω определено значение этой величины. При этом поле величины U называется *стационарным (установившимся)*, если значения U на Ω не зависят от времени; в противном случае поле называется *нестационарным (неустановившимся)*. Далее в целях простоты изложения будем считать все рассматриваемые поля стационарными. В случае, когда величина U является скалярной, то есть числовой (например, поле температур газа в трубопроводе), поле величины U

²Речь идет о пространственной кривой. Для плоской кривой все аналогично, см. Часть 2, §4.16.

³См., например, теорему 1 на с.311 в [Я.С. Бугров, С.М. Никольский. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* – Ростов н/Д: Феникс, 1998. – 512 с.].

называется *скалярным*. Если в пространстве (или на плоскости), содержащем множество Ω , задана декартова прямоугольная система координат, скажем, $Oxyz$, то каждая точка $M \in \Omega$ отождествляется с набором своих координат $M(x; y; z)$. Тогда значение $U(M) = U(x; y; z)$, и стало быть, понятие скалярного поля совпадает с понятием функции многих (в данном случае трех) переменных. А эта тема была уже изложена в предыдущей части, см. Часть 3, глава 1. Если же рассматриваемая величина является векторной $\vec{U}(M)$, $M \in \Omega$, то говорят, что в множестве (или на множестве) Ω задано *векторное поле*. Аналогично скалярному случаю, при заданной системе координат $Oxyz$ имеем:

$$\vec{F}(M) = \{P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z)\}, \quad M(x; y; z) \in \Omega.$$

Здесь $\{P; Q; R\}$ – компоненты вектора \vec{F} в соответствующем базисе. Они зависят от координат точки M (в каждой точке M из Ω векторное поле $\vec{F}(M)$ определяет некоторый вектор определенной длины и направления). Таким образом, понятие векторного поля совпадает с понятием векторной функции (вектор-функции) векторного аргумента $(x; y; z)$. Примерами векторных полей являются силовое поле (например, поле силы тяготения), поле скоростей (газа в трубопроводе, воды в реке, точек материального тела и т.п.) и т.д. Далее, если множество Ω не указано, предполагается, что оно совпадает со всем пространством (или плоскостью).

Пример 1.3. Найдем поле скоростей $\vec{v}(M)$ точек твердого тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси. Как известно из курса физики, скорость \vec{v} точки M равна векторному произведению $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$, где $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости, направленный по оси вращения и имеющий абсолютную величину ω , а \vec{r} – радиус-вектор точки M , направленный в точку M из некоторой фиксированной точки O на оси вращения. Примем точку O за начало координат, а ось вращения – за ось Oz . Тогда

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{\omega} = \omega\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j},$$

то есть $\vec{v}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$, где $P(x, y, z) = -\omega y$, $Q(x, y, z) = \omega x$, $R(x, y, z) = 0$.

§1.3. Векторные линии

Важнейшей геометрической характеристикой векторного поля являются векторные линии⁴.

Определение 1.8. *Векторной (или силовой) линией* векторного поля $\vec{F}(M)$, $M \in \Omega$, называется всякая гладкая линия, расположенная целиком в множестве Ω и такая, что в каждой ее точке M_0 направление касательной к ней совпадает с направлением поля $\vec{F}(M_0)$ в этой точке (см. рис. 1.2).

Например, векторными линиями силы притяжения к Земле являются всевозможные прямые, проходящие через ее центр (поскольку сила притяжения направлена, как известно, к центру Земли из любой точки ее окрестности).

⁴Подобно тому, как линии или поверхности уровня являются геометрической характеристикой скалярного поля, см. Часть 3, §1.7, с.20.

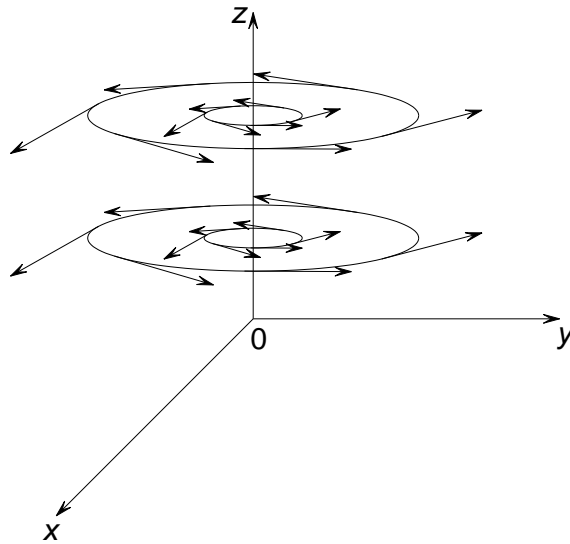


Рис. 1.2

Если $\vec{F}(M)$ – это поле скоростей, то силовые линии поля – это траектории движения соответствующих материальных точек.

Пусть $\vec{F}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$. Предположим, что силовая линия векторного поля $\vec{F}(M)$ имеет параметрические уравнения (1.1), или в векторной форме $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$. Тогда всякая точка M , лежащая на ней, имеет координаты $M(x(t); y(t); z(t))$ при некотором $t \in [\alpha; \beta]$. При этом касательная к линии в этой точке направлена (см. §1.1) по вектору $\vec{r}'(t)$. Записывая условие коллинеарности векторов $\vec{F}(M(t))$ и $\vec{r}'(t)$ как условие пропорциональности координат, заключаем, что

$$\frac{dx/dt}{P(M(t))} = \frac{dy/dt}{Q(M(t))} = \frac{dz/dt}{R(M(t))}.$$

Исключая параметр t , получаем *дифференциальные уравнения силовых линий*:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

Задача 1.1. Найти силовые линии векторного поля⁵ $\vec{F} = \{-y; x; 0\}$.

Решение. Запишем дифференциальные уравнения силовых линий:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

Перепишем их в виде системы двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}, \\ dz = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int y dy = -\int x dx, \\ \int dz = C_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C_1}{2}, \\ z = C_2, \end{cases}$$

⁵Сравните с предыдущим примером.

откуда

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = C_1^2, \\ z = C_2. \end{cases}$$

Таким образом, силовыми линиями данного векторного поля являются всевозможные горизонтально расположенные окружности с центром на оси Oz , см. рис. 1.2.

§1.4. Криволинейные интегралы первого рода

Криволинейные интегралы первого рода являются непосредственным обобщением определенного интеграла на случай криволинейного пути интегрирования. Как будет показано ниже, их можно использовать, например, для вычисления массы и центра масс материальной кривой, статических моментов и моментов инерции этой кривой относительно осей и начала координат. Кроме того, интегралы указанного типа являются основой для определения криволинейных интегралов второго рода, которые являются одним из основных инструментов векторного анализа.

Определение 1.9. Непрерывная кривая Γ называется *кусочно гладкой*, если она состоит из конечного числа гладких кривых.

Примечание. Как уже было сказано, гладкость кривой гарантирует спрямляемость любой ее дуги. Очевидно, что дуга кусочно гладкой кривой тоже является спрямляемой, так как ее длину можно вычислить как сумму длин составляющих ее гладких частей.

Пусть $\overset{\frown}{AB}$ – дуга кусочно гладкой кривой (плоской или пространственной), $u(M)$ – скалярное поле (функция двух или трех переменных), определенное и ограниченное на дуге $\overset{\frown}{AB}$. Будем говорить, что точка $M_1 \in \overset{\frown}{AB}$ предшествует точке $M_2 \in \overset{\frown}{AB}$ и обозначать этот факт следующим образом: $M_1 \prec M_2$, если точку M_2 можно получить из точки M_1 смещением вдоль дуги $\overset{\frown}{AB}$ по направлению от точки A к точке B . Произведем разбиение дуги $\overset{\frown}{AB}$ точками

$$A = M_0 \prec M_1 \prec \dots \prec M_n = B.$$

Обозначим $\Delta\ell_i = |\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}|$, $i = \overline{1, n}$ и число $\lambda = \max_{i \in \overline{1, n}} \Delta\ell_i$ назовем *мель-*

костью данного разбиения дуги $\overset{\frown}{AB}$. На каждом из элементов разбиения

$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ выберем произвольно точку M_i^* и составим *интегральную сумму* $\sigma_n = \sum_{i=1}^n u(M_i^*) \Delta\ell_i$.

Определение 1.10. Если $\exists \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n = I < \infty$ независимо от способа разбиения дуги $\overset{\frown}{AB}$ и выбора средних точек, то говорят, что скалярное поле $u(M)$ *интегрируемо вдоль дуги $\overset{\frown}{AB}$* , а число I называется *криволинейным интегралом первого рода* скалярного поля $u(M)$ по дуге $\overset{\frown}{AB}$ и обозначается следующим образом

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} u(M) dl.$$

При этом дуга $\overset{\frown}{AB}$ называется *путем*, или *контуром*, или *линией интегрирования*. В случае, когда дуга $\overset{\frown}{AB} = \Gamma$ замкнутая $A = B$, говорят о *криволинейном интеграле первого рода по замкнутому контуру* и используют также обозначение

$$I = \oint_{\Gamma} u(M) dl.$$

Примечание 1.1. Каждой точке $M \in \overset{\frown}{AB}$ взаимно однозначным образом отвечает значение параметра $\ell = |AM|$ (так называемый *натуральный параметр*). Обозначим $L = |\overset{\frown}{AB}|$ и рассмотрим функцию одного переменного $\varphi(\ell) = u(M(\ell))$, $\ell \in [0; L]$ (здесь $M(\ell)$ – это точка на дуге $\overset{\frown}{AB}$, для которой $|AM| = \ell$). Тогда σ_n можно рассматривать как интегральную сумму функции $\varphi(\ell)$ по отрезку $[0; L]$. Отсюда получаем, что справедливо равенство

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} u(M) dl = \int_0^L \varphi(\ell) d\ell, \quad (1.2)$$

где справа стоит обычный определенный интеграл. Отсюда понятно, что криволинейный интеграл первого рода сохраняет все свойства определенного интеграла, за исключением одного: он не меняет знака при перемене местами начальной и конечной точек пути интегрирования, поскольку величины $\Delta\ell_i$ в интегральной сумме всегда должны быть положительны независимо от направления обхода контура (в отличие от определенного интеграла). Условия существования криволинейного интеграла первого рода также аналогичны условиям существования определенного интеграла. В частности, если скалярное поле $u(M) = u(x, y, z)$ непрерывно вдоль дуги $\overset{\frown}{AB}$, то оно интегрируемо вдоль этой дуги. Действительно, согласно свойству непрерывности суперпозиции непрерывных функций многих переменных (см. Часть 3, с.10), функция $\varphi(\ell) = u(x(\ell), y(\ell), z(\ell))$ является непрерывной на отрезке $[0; L]$, а следовательно, определенный интеграл в формуле (1.2) существует. Но тогда существует и криволинейный интеграл первого рода, стоящий в той же формуле слева.

Геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода для случая плоской кривой

Пусть $\overset{\frown}{AB}$ – плоская кривая, а скалярное поле $u(M)$ непрерывно (а следовательно, интегрируемо – см. примечание 1.1) вдоль дуги $\overset{\frown}{AB}$, и кроме того, неотрицательно. Тогда $u(M_i^*)\Delta\ell_i$ – это площадь цилиндрической поверхности с направляющей $M_{i-1}M_i$ и образующими высоты $u(M_i^*)$, параллельными оси Oz . Отсюда понятно, что $\int_{\overset{\frown}{AB}} u(M) dl$ – это площадь цилиндрической поверх-

ности, образованной перпендикулярами к точкам дуги $\overset{\frown}{AB}$ на плоскости Oxy , обрезанными сверху графиком функции $z = u(x, y)$.

Вычисление криволинейных интегралов первого рода

Пусть дуга $\overset{\frown}{AB}$ гладкая и задается параметрическими уравнениями (1.1), причем $M(x(\alpha); y(\alpha); z(\alpha)) = A$, $M(x(\beta); y(\beta); z(\beta)) = B$, $\alpha < \beta$. Будем

предполагать, кроме того, что скалярное поле $u(M) = u(x, y, z)$ непрерывно вдоль $\overset{\sim}{AB}$. Тогда функция $\varphi(\ell)$, определенная выше, непрерывна на отрезке $[0; L]$. Перейдем в интеграле справа в формуле (1.2) от переменной ℓ к переменной $t \in [\alpha; \beta]$. Зафиксируем точку $M(x(t); y(t); z(t))$. Тогда длина дуги

$$\ell(t) = |\overset{\sim}{AM}| = \int_{\alpha}^t \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} d\tau,$$

откуда

$$d\ell(t) = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt.$$

Таким образом, производя указанную замену переменных, получаем

$$\int_0^L \varphi(\ell) d\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\ell(t)) \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt.$$

В соответствии с формулой (1.2) это означает, что

$$\int_{\overset{\sim}{AB}} u(x, y, z) d\ell = \int_{\alpha}^{\beta} u(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt. \quad (1.3)$$

Для плоского случая

$$\overset{\sim}{AB} : \quad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta],$$

нетрудно вывести аналогичную формулу:

$$\int_{\overset{\sim}{AB}} u(x, y) d\ell = \int_{\alpha}^{\beta} u(x(t), y(t)) \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt. \quad (1.4)$$

В частности, если плоская кривая $\overset{\sim}{AB}$ задана явным уравнением $y = y(x)$, $x \in [a; b]$, то выбирая в качестве параметра $t = x$, получаем:

$$\int_{\overset{\sim}{AB}} u(x, y) d\ell = \int_a^b u(x, y(x)) \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (1.5)$$

Задача 1.2. Вычислить $\int_{\overset{\sim}{AB}} (x + \sqrt{y}) d\ell$ по дуге параболы $y = x^2$, $x \in [0; 2]$.

Решение. Воспользуемся формулой (1.5). Вычислим дифференциал дуги:

$$y'(x) = (x^2)' = 2x \quad \Rightarrow \quad dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + 4x^2} dx.$$

Переходя от криволинейного интеграла к определенному интегралу по переменной x в соответствии с формулой (1.5), получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\overset{\sim}{AB}} (x + \sqrt{y}) dl &= \int_0^2 (x + \sqrt{x^2}) \sqrt{1 + 4x^2} dx = \int_0^2 2x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 (1 + 4x^2)^{1/2} d(1 + 4x^2) = \frac{2}{3 \cdot 4} (1 + 4x^2)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{1}{6} (\sqrt{17^3} - 1). \end{aligned}$$

Задача 1.3. Вычислить $\int_{\overset{\sim}{AB}} xy dl$ по дуге окружности⁶

$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; \pi/2].$$

Решение. Чтобы найти дифференциал дуги, вычислим производные:

$$x'(t) = -2 \sin t, \quad y'(t) = 2 \cos t \quad \Rightarrow \quad dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = 2 dt.$$

Переходя от криволинейного интеграла к определенному интегралу по параметру t согласно формуле (1.4), имеем:

$$\int_{\overset{\sim}{AB}} xy dl = \int_0^{\pi/2} (2 \cos t)(2 \sin t) 2 dt = 8 \int_0^{\pi/2} \sin t d(\sin t) = 8 \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\pi/2} = 4.$$

Некоторые физические и механические приложения криволинейных интегралов первого рода

Пусть $\overset{\sim}{AB}$ – некоторая материальная кривая (плоская или пространственная), по которой распределена масса плотности $\rho(M)$. Будем понимать $\rho(M)$ как скалярное поле и предполагать, что оно непрерывно вдоль $\overset{\sim}{AB}$. Совершенно аналогично случаю двойного интеграла и материальной пластинки доказывается⁷, что справедливы следующие формулы.

1. Масса дуги $\overset{\sim}{AB}$ вычисляется по формуле:

$$m(\overset{\sim}{AB}) = \int_{\overset{\sim}{AB}} \rho(M) dl.$$

⁶Часть окружности радиуса 2 с центром в начале координат, расположенная в первой четверти; здесь параметр t – это полярный угол, а полярный радиус $r = 2$ – фиксирован.

⁷См. Часть 3, §2.6.

2. Статические моменты плоской дуги $\overset{\frown}{AB}$ относительно осей координат:

$$M_y = \int_{\overset{\frown}{AB}} x \rho(x, y) dl, \quad M_x = \int_{\overset{\frown}{AB}} y \rho(x, y) dl.$$

Статические моменты пространственной дуги $\overset{\frown}{AB}$ относительно координатных плоскостей:

$$M_{yz} = \int_{\overset{\frown}{AB}} x \rho(x, y, z) dl, \quad M_{zx} = \int_{\overset{\frown}{AB}} y \rho(x, y, z) dl, \quad M_{xy} = \int_{\overset{\frown}{AB}} z \rho(x, y, z) dl.$$

3. Координаты центра масс плоской дуги:

$$x_c = \frac{M_y}{m(\overset{\frown}{AB})}, \quad y_c = \frac{M_x}{m(\overset{\frown}{AB})}.$$

Координаты центра масс пространственной дуги:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m(\overset{\frown}{AB})}, \quad y_c = \frac{M_{zx}}{m(\overset{\frown}{AB})}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m(\overset{\frown}{AB})}.$$

4. Моменты инерции плоской дуги относительно осей и начала координат:

$$I_x = \int_{\overset{\frown}{AB}} y^2 \rho(x, y) dl, \quad I_y = \int_{\overset{\frown}{AB}} x^2 \rho(x, y) dl, \quad I_0 = \int_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 + y^2) \rho(x, y) dl.$$

Моменты инерции пространственной дуги относительно осей и начала координат:

$$I_x = \int_{\overset{\frown}{AB}} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dl, \quad I_y = \int_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dl,$$

$$I_z = \int_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dl, \quad I_0 = \int_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dl.$$

Аналогичным образом можно считать, что $\rho(M)$ – это, например, плотность заряда, распределенного по дуге, и вычислять заряд (вместо массы) и т.п.

§1.5. Циркуляция и криволинейные интегралы второго рода

Пусть $\overset{\frown}{AB}$ – дуга гладкой или кусочно гладкой кривой. Тогда в каждой точке этой дуги (за исключением, может быть, конечного числа точек) существует касательная. Обозначим $\vec{\tau}_e = \vec{\tau}_e(M)$ – единичный вектор касательной к дуге $\overset{\frown}{AB}$ в точке M , направленный в сторону от точки A к точке B . Пусть,

кроме того, вдоль дуги $\overset{\frown}{AB}$ задано векторное поле $\vec{F}(M)$. Тогда криволинейный интеграл первого рода от скалярного произведения (если он существует⁸⁾)

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \left(\vec{F}(M), \vec{\tau}_e(M) \right) d\ell$$

называется *циркуляцией*⁹ векторного поля $\vec{F}(M)$ по дуге (или по контуру) $\overset{\frown}{AB}$ и обозначается следующим образом:

1) для плоской кривой и векторного поля $\vec{F}(M) = \{P(M); Q(M)\}$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy;$$

в частности (при $Q = 0$) интеграл

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y) dx$$

называется *криволинейным интегралом второго рода* скалярного поля P относительно переменной x по дуге $\overset{\frown}{AB}$; аналогично именуется интеграл

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Q(x, y) dy;$$

2) для пространственной кривой и поля $\vec{F}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

(криволинейные интегралы второго рода определяются аналогично плоскому случаю).

Примечание. Пусть $\overset{\frown}{AB}$ задана параметрическими уравнениями (1.1), или в векторной форме $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$. Тогда касательная к дуге в точке $M(t) = M(x(t); y(t); z(t))$ имеет направляющим вектором (направленным от точки A к точке B) производную $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, следовательно,

$$\vec{\tau}_e(M) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}} \{x'(t), y'(t), z'(t)\}.$$

⁸В этом случае говорят, что векторное поле *интегрируемо по дуге* $\overset{\frown}{AB}$.

⁹Некоторые авторы (см., напр., *Л.Д.Кудрявцев, А.Д.Кутасов, В.И.Чехлов, М.И.Шабунин. Сб. задач по матем. анализу. Функции нескольких переменных.* - М.: Наука. Физматлит, 1995, с.280) называют этот интеграл *линейным*, а линейный интеграл по замкнутой кривой называют циркуляцией, тогда как другая часть авторов при определении циркуляции не требует замкнутости кривой (см., напр., *Б.М.Будак, С.В.Фомин. Кратные интегралы и ряды.* - М.: Физматлит, 2002, с.212. Мы, таким образом, из двух вариантов терминологии используем наиболее простой.

Предположим, что компоненты векторного поля непрерывны вдоль $\overset{\frown}{AB}$. Рассмотрим скалярное произведение $u(M) = \left(\vec{F}(M), \vec{\tau}_e(M) \right)$ в точке $M(t)$:

$$u(M(t)) = \frac{P(M(t))x'(t) + Q(M(t))y'(t) + R(M(t))z'(t)}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}.$$

Тогда переходя от криволинейного интеграла к определенному интегралу по параметру t согласно формуле (1.3), получаем:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} \left[P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \right. \\ \left. + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right] dt,$$

или

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\alpha}^{\beta} \left[P(x(t), y(t), z(t))dx(t) + \right. \\ \left. + Q(x(t), y(t), z(t))dy(t) + R(x(t), y(t), z(t))dz(t) \right]. \quad (1.6)$$

Для плоского случая все аналогично:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(M)dx + Q(M)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[P(M(t))dx(t) + Q(M(t))dy(t) \right]. \quad (1.7)$$

В частности, если плоская дуга $\overset{\frown}{AB}$ задана явным уравнением вида $y = y(x)$, $x \in [a; b]$, то

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(M)dx + Q(M)dy = \int_a^b \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x) \right] dx. \quad (1.8)$$

Примечание. Непосредственно из определения видно, что криволинейный интеграл второго рода сохраняет основные свойства криволинейного интеграла первого рода за исключением одного – при перемене местами начальной и конечной точек пути интегрирования (при изменении *направления обхода контура интегрирования* на противоположное) интеграл меняет знак:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = - \int_{\overset{\frown}{BA}} Pdx + Qdy + Rdz.$$

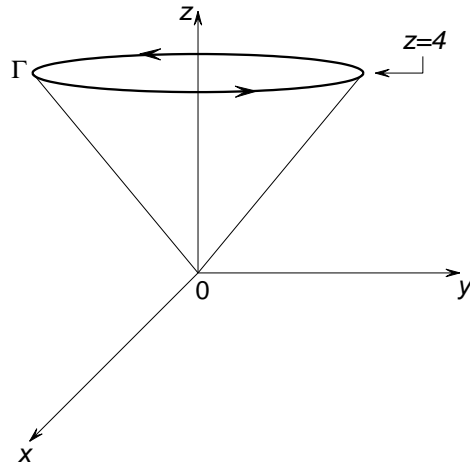


Рис. 1.3

Выбор одного из двух направлений обхода контура называется его *ориентацией*. Для замкнутого плоского контура $\Gamma = \overline{AB}$ ($A = B$) направление обхода против часовой стрелки¹⁰ принято называть *положительным*, а противоположное направление – *отрицательным*. При этом соответственно используются обозначения:

$$\oint_{\Gamma^+} Pdx + Qdy + Rdz, \quad \oint_{\Gamma^-} Pdx + Qdy + Rdz.$$

По умолчанию (если значок "+" или "-" не указан и ничего не сказано о направлении обхода) считается, что направление обхода положительно.

Задача 1.4. Пусть $\vec{F} = y\vec{i} + (2x - 1)\vec{j} + z\vec{k}$. Вычислить циркуляцию векторного поля \vec{F} вдоль контура Γ , указав на чертеже направление обхода:

$$\Gamma : \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = 4. \end{cases}$$

Решение. В данном случае $P = y$, $Q = 2x - 1$, $R = z$. Контур Γ представляет собой пересечение конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и горизонтальной плоскости $z = 4$, то есть окружность, расположенную в плоскости $z = 4$, см. рис. 1.3. Найдем уравнение проекции этой окружности на плоскость Oxy . Для этого подставим $z = 4$ в уравнение конуса:

$$4 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 4^2.$$

Стало быть, окружность имеет радиус 4 и задается параметрическими уравнениями

$$\Gamma : \begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \\ z = 4, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

При увеличении параметра t точка $M(t) = M(4 \cos t, 4 \sin t, 4)$ перемещается по контуру Γ против часовой стрелки, если смотреть сверху. Будем считать,

¹⁰Точнее говоря, то направление обхода, при котором наблюдатель, двигаясь вдоль контура, оставляет ограниченную им часть плоскости (*внутренность контура*) слева от себя.

что таково направление обхода контура. Согласно определению, циркуляция векторного поля $\vec{F}(M)$ по замкнутому контуру Γ вычисляется по формуле

$$\text{Ц} = \oint_{\Gamma} \left(\vec{F}(M), \vec{\tau}_e(M) \right) dl = \oint_{\Gamma} y dx + (2x - 1) dy + z dz.$$

Пользуясь формулой (1.6), перейдем к определенному интегралу по параметру t . Имеем:

$$x = 4 \cos t, y = 4 \sin t, z = 4 \Rightarrow dx = -4 \sin t dt, dy = 4 \cos t dt, dz = 0.$$

Подставляя эти выражения в интеграл по контуру Γ и преобразуя его в определенный интеграл по параметру $t \in [0; 2\pi]$, получаем:

$$\begin{aligned} \text{Ц} &= \int_0^{2\pi} \left[(4 \sin t)(-4 \sin t) + (8 \cos t - 1)(4 \cos t) \right] dt = 16 \int_0^{2\pi} \left[2 \cos^2 t - \sin^2 t \right] dt - \\ &- 4 \int_0^{2\pi} \cos t dt = 16 \int_0^{2\pi} \left[1 + \cos 2t - \frac{1 - \cos 2t}{2} \right] dt = 8 \int_0^{2\pi} dt + 24 \int_0^{2\pi} \cos 2t dt = 16\pi. \end{aligned}$$

Физический смысл циркуляции

Рассмотрим силовое поле $\vec{F}(M)$ и найдем работу силы \vec{F} по перемещению материальной точки (пробного заряда или массы и т.д. в зависимости от характера силы \vec{F}) вдоль дуги $\overset{\frown}{MN}$. Будем считать, что векторное поле $\vec{F}(M)$ непрерывно (а следовательно, интегрируемо) вдоль $\overset{\frown}{MN}$. Разобьем дугу $\overset{\frown}{MN}$ точками:

$$M = M_0 \prec M_1 \prec \dots \prec M_n = N.$$

При достаточно малой мелкости разбиения $\lambda = \max_{i \in \overline{1, n}} \Delta l_i$, $\Delta l_i = |\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}|$, можем считать участок $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ не отличимым от прямолинейного, предполагая, что направление движения по этому участку совпадает с единичным вектором касательной $\vec{\tau}_e(M_i)$. Кроме того, в силу непрерывности векторного поля $\vec{F}(M)$ оно весьма незначительно изменяется при $M \in \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$, и мы можем считать, что оно постоянно на этом участке, то есть $\vec{F}(M) = \vec{F}(M_i)$. Но, как известно, работа постоянной силы $\vec{F}(M_i)$ по перемещению материальной точки вдоль вектора $\vec{\Delta l}_i = \Delta l_i \vec{\tau}_e$ вычисляется по формуле:

$$\mathcal{A}_i = \left(\vec{F}(M_i), \vec{\tau}_e(M_i) \right) \Delta l_i,$$

и таким образом, работа силы $\vec{F}(M)$ по перемещению материальной точки по всей дуге $\overset{\frown}{MN}$

$$\mathcal{A} \approx \sum_{i=1}^n \mathcal{A}_i = \sum_{i=1}^n \left(\vec{F}(M_i), \vec{\tau}_e(M_i) \right) \Delta l_i.$$

Справа стоит интегральная сумма скалярного поля $u(M) = \left(\vec{F}(M), \vec{\tau}_e(M) \right)$ по дуге $\overset{\sim}{MN}$. Поэтому, переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ и учитывая, что оно интегрируемо, получаем точное равенство

$$\mathcal{A} = \int_{\overset{\sim}{MN}} \left(\vec{F}(M), \vec{\tau}_e(M) \right) dl,$$

то есть работа равна циркуляции.

§1.6. Поверхностные интегралы первого рода

Поверхностные интегралы первого рода являются непосредственным обобщением двойного интеграла на случай области интегрирования, "искривленной в пространстве". С другой стороны, они являются двумерным аналогом криволинейных интегралов первого рода. Их можно использовать, например, для вычисления массы и центра масс материальной поверхности, статических моментов и моментов инерции этой поверхности относительно координатных плоскостей и начала координат. Соответствующие формулы выводятся совершенно аналогично случаю материальной пластинки и двойного интеграла. Кроме того, интегралы указанного типа являются основой для определения поверхностных интегралов второго рода, которые являются одним из основных инструментов векторного анализа.

Определение 1.11. Поверхность¹¹ S называется *гладкой*, если в каждой ее точке существует касательная плоскость и при переходе от точки к точке положение касательной плоскости меняется непрерывно.

Примечание. Если поверхность S задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, то гладкость поверхности S означает, что векторное поле¹² $\nabla F(M) = \left\{ F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M) \right\}$ (нормалей к поверхности) непрерывно и не обращается в $\vec{0}$ в точках поверхности. В частности, если поверхность S задана явным уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in G$, то гладкость поверхности означает, что функция $z(x, y)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка. При этом векторное поле нормалей к поверхности имеет вид¹³

$$\vec{n}(x, y, z) = \left\{ z'_x(x, y); z'_y(x, y), -1 \right\}.$$

Площадь такой поверхности вычисляется, как известно (см. тему "Двойные интегралы" – Часть 3, формула (2.8), с.54), по формуле

$$s(S) = \iint_G \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy. \quad (1.9)$$

Можно показать, что и всякая гладкая поверхность является *квадрируемой*, то есть допускающей вычисление площади.

Определение 1.12. Непрерывная поверхность S называется *кусочно гладкой*, если она состоит из конечного числа гладких поверхностей.

Примечание. Очевидно, что кусочно гладкая поверхность тоже является квадрируемой, так как ее площадь можно вычислить как сумму площадей составляющих ее гладких участков.

¹¹Здесь и далее предполагается, что все поверхности являются замкнутыми и ограниченными множествами.

¹²См. Часть 3, §1.7, с.20.

¹³См. Часть 3, §1.6, с.17.

Пусть S – гладкая или кусочно гладкая поверхность, $u(M)$ – скалярное поле (функция трех переменных), определенное и ограниченное на поверхности S . Произведем разбиение поверхности S на поверхности S_1, S_2, \dots, S_n достаточно малого диаметра. Обозначим $\Delta s_i = s(S_i)$ – площадь элемента разбиения S_i , $i = \overline{1, n}$, а число $\lambda = \max_{i \in \overline{1, n}} \text{diam}(S_i)$ назовем *мелкостью данного разбиения поверхности S* . На каждом из элементов разбиения S_i выберем произвольно точку M_i^* и составим *интегральную сумму* $\sigma = \sum_{i=1}^n u(M_i^*) \Delta s_i$.

Определение 1.13. Если $\exists \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I < \infty$ независимо от способа разбиения поверхности S и выбора средних точек M_i^* , то говорят, что скалярное поле $u(M)$ *интегрируемо вдоль поверхности S* , а число I называется *поверхностным интегралом первого рода* скалярного поля $u(M)$ по поверхности S и обозначается следующим образом

$$I = \iint_S u(M) ds = \iint_S u(x, y, z) ds.$$

Примечания.

1. Нетрудно заметить, что определение поверхностного интеграла первого рода аналогично определению двойного интеграла. Отсюда понятно, что поверхностный интеграл первого рода сохраняет все основные свойства двойного интеграла.
2. Непосредственно из определения поверхностного интеграла первого рода видно, что

$$\iint_S ds = s(S).$$

Вычисление поверхностных интегралов первого рода

Пусть скалярное поле $u(x, y, z)$ непрерывно вдоль поверхности S , заданной явным уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in G$. Обозначим G_i – проекцию элемента разбиения S_i на плоскость Oxy , $\Delta \sigma_i = s(G_i)$, $i = \overline{1, n}$. Определим, кроме того, функции

$$\varphi(x, y) = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}, \quad f(x, y) = u(x, y, z(x, y)) \varphi(x, y).$$

Согласно формуле (1.9) и теореме о среднем для двойных интегралов получаем, что

$$\Delta s_i = \iint_{G_i} \varphi(x, y) dx dy = \varphi(N_i^*) \Delta \sigma_i,$$

где $N_i^*(x_i, y_i)$ – некоторая точка из замкнутой области G_i . Ей соответствует точка $M_i^*(x_i, y_i, z(x_i, y_i))$, лежащая на поверхности S_i , $i = \overline{1, n}$. Тогда интегральная сумма

$$\sigma = \sum_{i=1}^n u(M_i^*) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta \sigma_i = \sum_{i=1}^n f(N_i^*) \Delta \sigma_i$$

– представляется как интегральная сумма функции $f(x, y)$ (непрерывной, а следовательно, интегрируемой) по области G . Тогда переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ и в силу определения поверхностного интеграла первого рода, получаем равенство

$$\iint_S u(x, y, z) ds = \iint_G f(x, y) dx dy,$$

то есть

$$\iint_S u(x, y, z) ds = \iint_G u(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy. \quad (1.10)$$

Примечание. Поверхность S задается уравнением вида $z = z(x, y)$, $(x, y) \in G$, тогда и только тогда, когда она взаимно однозначным образом проецируется в замкнутую область G на плоскости Oxy . В случае, когда S проецируется взаимно однозначно на замкнутую область плоскости Oyz или Ozx , справедливы аналогичные формулы. В случае, когда поверхность S не проецируется взаимно однозначным образом ни на одну из координатных плоскостей, ее следует разбить на части, которые обладают таким свойством, и вычислить исходный интеграл как сумму интегралов по этим частям.

Задача 1.5. Вычислить интеграл $I = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) ds$ по поверхности S : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Решение. Поверхность S представляет собой сферу единичного радиуса с центром в начале координат. Она не проецируется взаимно однозначным образом ни на одну из координатных плоскостей. Однако ее можно разбить на две части – верхнюю и нижнюю полусферы S_V : $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ и S_H : $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, которые проецируются взаимно однозначным образом в круг G : $x^2 + y^2 \leq 1$ на плоскости Oxy . Вычислим с помощью формулы (1.10) интеграл $I_V = \iint_{S_V} (x^2 + y^2 + z^2) ds$. Имеем:

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

следовательно,

$$ds = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}} dx dy = \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Тогда

$$I_V = \iint_G (x^2 + y^2 + (\sqrt{1 - x^2 - y^2})^2) \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \iint_G \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

В последнем двойном интеграле перейдем к полярным координатам¹⁴

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [0; 2\pi], \quad 0 \leq r \leq 1; \quad |J| = r \Rightarrow dx dy = r dr d\varphi.$$

¹⁴См. Часть 3, теорема 2.3 на с.48, а также с.50.

Тогда получим:

$$\begin{aligned}
 I_B &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-r^2)^{-1/2} d(1-r^2) = \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot 2(1-r^2)^{1/2} \Big|_0^1 = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.
 \end{aligned}$$

Аналогично, $I_H = 2\pi$. Тогда $I = I_B + I_H = 4\pi$.

§1.7. Односторонние и двусторонние поверхности. Ориентация поверхности

Пусть имеется гладкая поверхность S . Тогда в каждой точке $M \in S$, не лежащей на границе поверхности¹⁵, существует единичный вектор нормали $\vec{n}_e(M) = \{p(M); q(M); r(M)\}$, $\sqrt{p^2(M) + q^2(M) + r^2(M)} = 1$, причем положение $\vec{n}_e(M)$ при перемещении точки M по поверхности меняется непрерывно, то есть $p(M), q(M), r(M)$ – непрерывные вдоль поверхности S функции. Заметим, что и противоположный вектор $-\vec{n}_e(M)$ тоже является вектором нормали и обладает такими же свойствами. Таким образом, если мы рассмотрим кусочно гладкий замкнутый контур, лежащий на поверхности S и не имеющий общих точек с границей поверхности, то при перемещении точки M по этому контуру возможно одно из двух. Либо мы вернемся в исходное положение с тем же направлением вектора нормали, либо с противоположным.

Определение 1.14. Поверхность S называется *двусторонней*, если для любого кусочно гладкого замкнутого контура Γ , лежащего на поверхности и не имеющего общих точек с границей поверхности, точка M при обходе контура возвращается в исходное положение с первоначальным направлением вектора нормали. Если же существует контур Γ , при обходе по которому точка M возвращается в исходное положение с противоположным направлением вектора нормали, то поверхность S называется *односторонней*. Для двусторонней поверхности совокупность всех точек поверхности с выбранным в них (одним из двух) направлением вектора нормали, меняющимся непрерывно при переходе от точки к точке, называется *стороной поверхности*. При этом выбор одной из двух сторон поверхности называется *ориентацией поверхности*. В связи с этим двусторонние поверхности называют также *ориентируемыми*.

Примечание. Понятие двусторонней поверхности полностью соответствует нашему интуитивному пониманию как поверхности, "имеющей две стороны". В частности, всякая поверхность, заданная явным уравнением $z = z(x, y)$, является двусторонней (имеет верхнюю и нижнюю стороны; для верхней стороны векторы $\vec{n}_e(M)$ составляют острый угол с положительным направлением оси Oz , для нижней – тупой угол). Всякая поверхность, представляющая собой границу некоторого тела, тоже является двусторонней (имеет внешнюю и внутреннюю стороны). Вместе с тем, как показывает следующий пример, односторонние поверхности существуют (впрочем, всегда носят в некотором смысле "экзотический" характер).

¹⁵Можно определить его и в граничной точке M_0 как предел $\vec{n}_e(M_0) = \lim_{M \rightarrow M_0} \vec{n}_e(M)$.

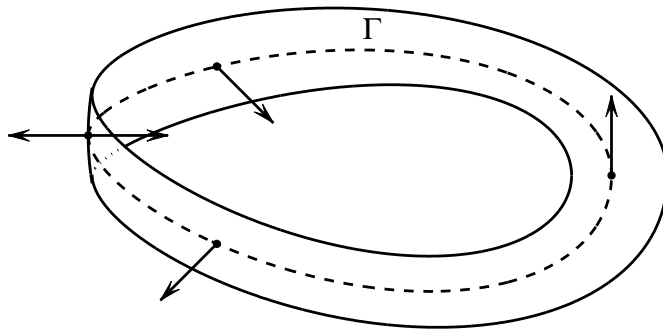


Рис. 1.4

Пример 1.4. Возьмем прямоугольную полоску бумаги $ABCD$ (предполагается, что сторона AB значительно больше стороны BC) и склеим сторону BC со стороной DA так чтобы, точка B совпала с точкой D , а точка A – с точкой C , то есть повернув край BC перед склеиванием на 180° . Затем устремим толщину бумажного листа к нулю. Получим одностороннюю поверхность – так называемый *лист Мебиуса* (см. рис 1.4). Действительно, если взять в качестве контура Γ среднюю линию листа Мебиуса, то окажется, что всякая точка при обходе контура Γ возвращается в исходное положение с противоположным направлением вектора нормали.

В дальнейшем будем рассматривать только двусторонние поверхности.

§1.8. Поток векторного поля через поверхность и поверхностные интегралы второго рода

Пусть S – двусторонняя поверхность, ориентированная определенным образом, то есть выбрано (одно из двух) поле единичных векторов нормалей к поверхности $\vec{n}_e(M) = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$. Пусть, кроме того, вдоль поверхности S определено векторное поле $\vec{F}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$ и существует поверхностный интеграл¹⁶

$$\Pi = \iint_S (\vec{F}(M), \vec{n}_e(M)) ds.$$

Тогда векторное поле $\vec{F}(M)$ называется *интегрируемым* по поверхности S , а интеграл Π называется *поток векторного поля $\vec{F}(M)$* по поверхности S и (иногда) обозначается следующим образом:

$$\Pi = \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy.$$

В частности, интеграл (при $Q = R = 0$)

$$\iint_S P(x, y, z) dydz = \iint_S P(x, y, z) \cos \alpha ds$$

¹⁶Поверхностный интеграл первого рода от скалярного поля $u(M) = (\vec{F}(M), \vec{n}_e(M))$ по поверхности S .

называется *поверхностным интегралом второго рода* от (скалярной) функции $P(x, y, z)$ относительно переменных y и z по поверхности S . Аналогичным образом именуются интегралы

$$\iint_S Q(x, y, z) dz dx = \iint_S Q(x, y, z) \cos \beta ds,$$

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \iint_S R(x, y, z) \cos \gamma ds.$$

Рассмотрим частный случай, когда поверхность S задана явным уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in G$, где функция $z(x, y)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка, и выбрана верхняя сторона поверхности. Тогда вектор нормали составляет острый угол с положительным направлением оси Oz и соответственно, третья координата у него должна быть положительна. В таком случае, вектор нормали, как известно, имеет координаты

$$\vec{n}(M) = \left\{ -z'_x(M); -z'_y(M); 1 \right\},$$

а единичный вектор нормали

$$\vec{n}_e(M) = \frac{\vec{n}(M)}{|\vec{n}(M)|} = \frac{1}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}} \left\{ -z'_x(M); -z'_y(M); 1 \right\}.$$

Рассмотрим векторное поле $\vec{F}(M) = \left\{ 0; 0; R(M) \right\}$, где функция $R(M)$ непрерывна вдоль S . Тогда

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \iint_S \left(\vec{F}(M), \vec{n}_e(M) \right) ds = \iint_S \frac{R(M)}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}} ds.$$

Поскольку

$$ds = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy,$$

то переходя к двойному интегралу по области G , имеем:

$$\iint_S \frac{R(M)}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}} ds = \iint_G R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

Таким образом, в случае, когда вектор нормали составляет острый угол с положительным направлением оси Oz , справедливо равенство

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \iint_G R(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (1.11)$$

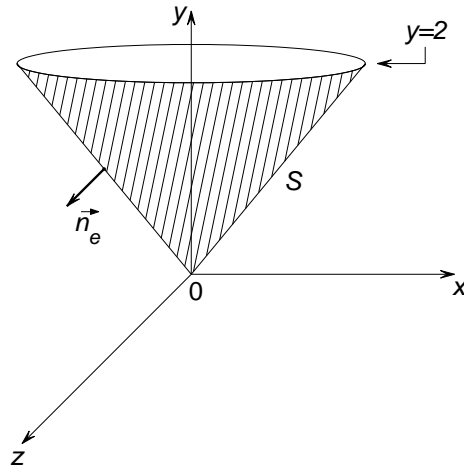


Рис. 1.5

Аналогичным образом,

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz = \iint_{G_1} P(x(y, z), y, z) dy dz, \quad (1.12)$$

если поверхность S может быть задана уравнением $x = x(y, z)$, $(y, z) \in G_1$, вектор нормали составляет острый угол с положительным направлением оси Ox , а функция $P(M)$ непрерывна вдоль S ;

$$\iint_S Q(x, y, z) dz dx = \iint_{G_2} Q(x, y(x, z), z) dz dx, \quad (1.13)$$

если поверхность S может быть задана уравнением $y = y(x, z)$, $(x, z) \in G_2$, вектор нормали составляет острый угол с положительным направлением оси Oy , а функция $Q(M)$ непрерывна вдоль S .

Примечание. Непосредственно из определения видно, что при смене ориентации поверхности на противоположную (выборе противоположной стороны поверхности) поток векторного поля и поверхностные интегралы второго рода меняют знак на противоположный.

Задача 1.6. Найти поток векторного поля $\vec{F} = 3y^2\vec{i} - 2x\vec{j} + 5z\vec{k}$ через поверхность S : $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, отсеченную плоскостью $y = 2$.

Решение. Поверхность S представляет собой часть конуса с вершиной в начале координат и осью Oy , отсеченную плоскостями $y = 0$ и $y = 2$, см. рис. 1.5. Выберем внешнюю сторону поверхности (ту, которая соответствует внешней стороне конуса). Это означает, что вектор нормали к поверхности (как вектор нормали к внешней стороне конуса) составляет тупой угол с положительным направлением оси Oy , то есть вторая координата вектора нормали должна быть отрицательной. Уравнение поверхности имеет вид $y = y(x, z)$. Поэтому вектор нормали с учетом отрицательности второй координаты имеет вид

$$\vec{n}(M) = \left\{ y'_x(x, z); -1; y'_z(x, z) \right\} = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}; -1; \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right\}.$$

Тогда длина вектора нормали

$$|\vec{n}(M)| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + z^2} + 1 + \frac{z^2}{x^2 + z^2}} = \sqrt{2},$$

а единичный вектор нормали

$$\vec{n}_e(M) = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}(M)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}; -1; \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right\}.$$

Тогда скалярное произведение

$$\left(\vec{F}(M), \vec{n}_e(M) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3y^2x}{\sqrt{x^2 + z^2}} + 2x + \frac{5z^2}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right),$$

и согласно определению, поток векторного поля $\vec{F}(M)$ через поверхность S

$$\Pi = \iint_S \left(\vec{F}(M), \vec{n}_e(M) \right) ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S \left(\frac{3y^2x}{\sqrt{x^2 + z^2}} + 2x + \frac{5z^2}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right) ds.$$

Учитывая, что поверхность задана уравнением вида $y = y(x, z)$, удобно перейти от полученного поверхностного интеграла к двойному интегралу по области G , являющейся проекцией поверхности S на плоскость Ozx . Линия пересечения конуса с плоскостью $y = 2$ представляет собой окружность $2 = \sqrt{x^2 + z^2}$, или $x^2 + z^2 = 2^2$, расположенную в этой плоскости. Соответственно, проекцией поверхности S на плоскость Ozx является круг

$$G: \quad x^2 + z^2 \leq 2^2.$$

Переходя от поверхностного интеграла первого рода к двойному интегралу по области G , имеем: $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ (вдоль поверхности S),

$$ds = \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dzdx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + z^2} + \frac{z^2}{x^2 + z^2}} dzdx = \sqrt{2} dzdx,$$

$$\Pi = \iint_G \left(\frac{3(x^2 + z^2)x}{\sqrt{x^2 + z^2}} + 2x + \frac{5z^2}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right) dzdx.$$

В полученном двойном интеграле перейдем к полярным координатам:

$$\begin{cases} z = r \cos \varphi, \\ x = r \sin \varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [0; 2\pi], \quad r \in [0; 2], \quad |J| = r \Rightarrow dzdx = r dr d\varphi,$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(3r^2 \sin \varphi + 2r \sin \varphi + 5r \cos^2 \varphi \right) r dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(3 \sin \varphi \frac{r^4}{4} + 2 \sin \varphi \frac{r^3}{3} + 5 \cos^2 \varphi \frac{r^3}{3} \right) \Big|_{r=0}^{r=2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{52}{3} \sin \varphi + \frac{40}{3} \cos^2 \varphi \right) d\varphi = -\frac{52}{3} \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} + \frac{20}{3} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\varphi)) d\varphi = \\
&= \frac{20}{3} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{40\pi}{3}.
\end{aligned}$$

§1.9. Физический смысл потока поля скоростей жидкости

Предположим, что некоторая область пространства Ω заполнена движущейся жидкостью. Тогда на области Ω определено векторное поле скоростей жидкости $\vec{v}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$. Будем считать далее, что это векторное поле непрерывно. Кроме того, для простоты будем предполагать плотность жидкости равной $\rho(M) = 1$ (такой плотностью обладает вода). Пусть, кроме того, в области Ω задана двусторонняя поверхность S (будем считать ее гладкой, хотя выводы, которые мы получим, будут справедливы и для кусочно-гладкой поверхности), ориентированная определенным образом. Поскольку поверхность гладкая, то (выбранное) поле единичных векторов нормалей $\vec{n}_e(M)$ является непрерывным на S . Вычислим количество¹⁷ Π жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность S .

Рассмотрим разбиение поверхности S на поверхности S_1, \dots, S_n достаточно малой мелкости λ . Пусть $\Delta s_i = s(S_i)$ – площадь i -го элемента разбиения. Поскольку оба векторных поля $\vec{v}(M)$ и $\vec{n}_e(M)$ непрерывны вдоль поверхности S , а мелкость разбиения, и следовательно, $\text{diam}(S_i)$ достаточно малы, то и то, и другое поле меняются весьма незначительно в пределах элемента разбиения S_i , и стало быть, можем считать их практически постоянными на S_i , то есть при некоторой фиксированной точке $M_i \in S_i$ $\vec{v}(M) = \vec{v}(M_i)$, $\vec{n}_e(M) = \vec{n}_e(M_i) \forall M \in S_i$. Последнее, в частности, означает, что поверхность S_i рассматривается как часть плоскости. Тогда количество Π_i жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность S_i , принимаемое со знаком "+", если жидкость течет в ту же сторону от поверхности, в которую указывает вектор нормали, и со знаком "–" в противном случае, будет приближенно равно объему цилиндра с площадью основания Δs_i и с образующими из векторов, равных $\vec{v}(M_i)$, взятому со знаком "+", если угол φ между векторами $\vec{v}(M_i)$ и $\vec{n}_e(M_i)$ острый, и со знаком "–", если этот угол тупой. Высота такого цилиндра с точностью до знака равна $h_i = |\vec{v}(M_i)| \cos \varphi$. Стало быть,

$$\Pi_i \approx h_i \Delta s_i = |\vec{v}(M_i)| \cos \varphi \Delta s_i = |\vec{v}(M_i)| \cdot |\vec{n}_e(M_i)| \cos \varphi \Delta s_i,$$

или согласно определению скалярного произведения векторов,

$$\Pi_i \approx \left(\vec{v}(M_i), \vec{n}_e(M_i) \right) \Delta s_i.$$

Тогда искомое количество

$$\Pi \approx \sum_{i=1}^n \left(\vec{v}(M_i), \vec{n}_e(M_i) \right) \Delta s_i = \sigma.$$

¹⁷Поскольку плотность равна единица, то под словом "количество" можно понимать как массу, так и объем.

Это равенство тем точнее, чем меньше мелкость разбиения λ . Заметим, что справа стоит интегральная сумма скалярного поля $u(M) = (\vec{v}(M), \vec{n}_e(M))$ по поверхности S . Согласно принятым предположениям, $u(M)$ непрерывно, а следовательно, интегрируемо по поверхности S . Поэтому устремляя мелкость разбиения $\lambda \rightarrow 0$, в пределе получаем точное равенство

$$\Pi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \iint_S (\vec{v}(M), \vec{n}_e(M)) ds,$$

то есть *поток поля скоростей жидкости* через поверхность S равен количеству жидкости, протекающей через поверхность S в единицу времени. При этом, если поток $\Pi > 0$, то через поверхность S в выбранном направлении вектора нормали протекает больше жидкости (в единицу времени), чем в противоположном направлении. Если же $\Pi < 0$, то наоборот. И наконец, если $\Pi = 0$, то в заданном направлении через поверхность S протекает столько же жидкости в единицу времени, сколько и в противоположном.

§1.10. Формула Остроградского-Гаусса

Пусть гладкая или кусочно гладкая поверхность S является границей тела¹⁸ V . Такая поверхность называется *замкнутой*. Предположим, что тело V таково, что всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку тела V параллельно одной из осей координат, пересекает его границу ровно в двух точках. Тело V , обладающее указанным свойством, условимся называть *простым*.

Теорема Остроградского-Гаусса. Пусть V – простое тело, ограниченное поверхностью S , а функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывны вместе с частными производными P'_x , Q'_y , R'_z на V . Тогда справедлива *формула Остроградского-Гаусса*:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy, \quad (1.14)$$

где S^+ – внешняя сторона поверхности S .

Примечание. Для векторного поля $\vec{F}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$ сумма частных производных $P'_x(M) + Q'_y(M) + R'_z(M)$ называется *дивергенцией* векторного поля $\vec{F}(M)$ в точке M и обозначается $\operatorname{div} \vec{F}(M)$. Подробнее о дивергенции см. следующий параграф.

Доказательство. Нам достаточно доказать только одно равенство:

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{S^+} R(x, y, z) dx dy, \quad (1.15)$$

поскольку соответствующие два равенства по другим переменным будут доказываться аналогично.

¹⁸Под *телом* понимается ограниченная замкнутая область в пространстве, см. Часть 3, §1.3.

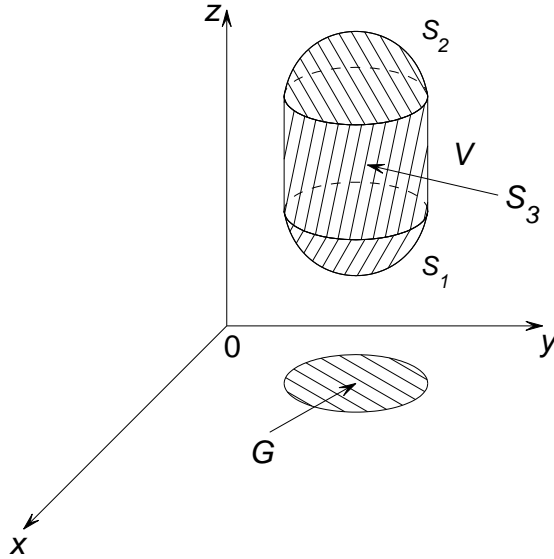


Рис. 1.6

Так как V согласно условию простое тело, то оно представимо в виде

$$V = \left\{ (x; y; z) \in \mathbf{R}^3 : z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in G \right\},$$

где G – замкнутая ограниченная область, представляющая собой проекцию тела V на плоскость Oxy , а функции $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка (если считать, что поверхность S гладкая). Это означает, что тело V ограничено снизу поверхностью S_1 с уравнением $z = z_1(x, y)$, $(x, y) \in G$, сверху – поверхностью S_2 : $z = z_2(x, y)$, $(x, y) \in G$, и с боковых сторон – цилиндрической поверхностью S_3 с образующими, параллельными оси Oz (см. рис. 1.6 на с.32). Переходя от тройного интеграла к повторному и пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_G dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_G dx dy R(x, y, z) \Big|_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} = \\ &= \iint_G R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_G R(x, y, z_1(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Заметим, что для той стороны S_2^+ поверхности S_2 , которая соответствует внешней стороне поверхности S , нормаль к поверхности составляет острый угол с положительным направлением оси Oz (направлена вверх), тогда как для той стороны S_1^+ поверхности S_1 , которая соответствует внешней стороне поверхности S , нормаль уже направлена вниз, то есть составляет тупой угол с положительным направлением оси Oz . Поэтому согласно формуле (1.11) получаем:

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{S_2^+} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_1^+} R(x, y, z) dx dy.$$

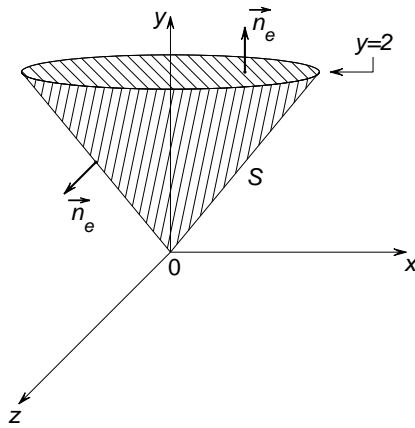


Рис. 1.7

Заметим, кроме того, что нормаль к поверхности S_3^+ ортогональна к оси Oz , то есть третья координата у нее нулевая, и стало быть, для векторного поля $\vec{F}(M) = \{0; 0; R(M)\}$ вдоль поверхности S_3 будет выполняться тождество $(\vec{F}(M), \vec{n}_e(M)) = 0 \cdot R(M) = 0$. Но тогда

$$\iint_{S_3^+} R(x, y, z) dx dy = \iint_{S_3} (\vec{F}(M), \vec{n}_e(M)) ds = 0.$$

Поэтому можем записать:

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \sum_{i=1}^3 \iint_{S_i^+} R(x, y, z) dx dy.$$

Поскольку $S^+ = \bigcup_{i=1}^3 S_i^+$, где поверхности S_i , $i = \overline{1, 3}$, не имеют общих точек за исключением граничных, то это и означает, что выполнено равенство (1.15). Теорема доказана.

Примечание. Формула (1.14) остается справедливой для всякого тела V , которое можно разбить на конечное число простых тел с помощью построения вспомогательных гладких или кусочно гладких поверхностей. Действительно, к каждому из элементов разбиения можно применить формулу (1.14). Суммируя полученные равенства, слева будем иметь тройной интеграл по телу V , а справа сумму потоков, в которой для каждой из вспомогательных поверхностей будут участвовать потоки по обеим сторонам этих поверхностей, и следовательно, каждая такая пара потоков в сумме даст ноль. Поэтому в результате суммирования всех потоков останется лишь поток через границу тела V .

Задача 1.7. Найти поток векторного поля $\vec{F} = 3y^2\vec{i} - 2x\vec{j} + 5z\vec{k}$ через замкнутую поверхность

$$S : \begin{cases} y = \sqrt{x^2 + z^2}, \\ y = 2 \end{cases}$$

(нормаль внешняя), используя формулу Остроградского-Гаусса.

Решение. Поверхность S изображена на рис. 1.7. В данном случае компо-

ненты векторного поля имеют вид

$$P(x, y, z) = 3y^2, \quad Q(x, y, z) = -2x, \quad R(x, y, z) = 5z.$$

Соответственно, дивергенция

$$\operatorname{div} \vec{F} = P'_x + Q'_y + R'_z = 0 + 0 + 5 = 5.$$

Стало быть, по формуле Остроградского-Гаусса

$$\Pi = \iint_S (\vec{F}(M), \vec{n}_e(M)) ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) dx dy dz = 5 \iiint_V dx dy dz,$$

или $\Pi = 5v(V)$, где V – это тело, ограниченное поверхностью S , а $v(V)$ – объем тела V . Поскольку V – это конус высотой $h = 2$ и с основанием радиуса $R = 2$, то можем воспользоваться известной формулой

$$v(V) = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{8\pi}{3} \Rightarrow \Pi = \frac{40\pi}{3}.$$

Но предположим, что мы забыли, по какой формуле вычисляется объем конуса. Тогда можем вычислить тройной интеграл, перейдя к цилиндрическим координатам¹⁹:

$$\begin{cases} z = r \cos \varphi, \\ x = r \sin \varphi, \\ y = y, \end{cases} \quad |J| = r \Rightarrow dx dy dz = r dy d\varphi dr.$$

Проекцией тела V на ось Oy является отрезок $[0; 2]$. Поэтому выбирая y внешней переменной интегрирования в повторном интеграле в цилиндрических координатах, получаем: $y \in [0; 2]$. В сечении тела V плоскостью, проходящей перпендикулярно оси Oy через точку y , получаем круг радиуса y : $\sqrt{z^2 + x^2} \leq y$, то есть $z^2 + x^2 \leq y^2$. Поэтому

$$\varphi \in [0; 2\pi], \quad r \in [0; y].$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} v(V) &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^2 dy \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^y r dr = \frac{1}{2} \int_0^2 dy \int_0^{2\pi} y^2 d\varphi = \\ &= \pi \int_0^2 y^2 dy = \pi \frac{y^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

Примечание. Объем конуса можно было вычислить и без перехода к цилиндрическим координатам, помня только, что площадь круга \mathcal{D}_y : $z^2 + x^2 \leq y^2$ радиуса y равна πy^2 . Тогда

$$v(V) = \iiint_V dx dy dz = \int_0^2 dy \iint_{\mathcal{D}_y} dz dx = \int_0^2 s(\mathcal{D}_y) dy = \pi \int_0^2 y^2 dy = \frac{\pi y^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3}.$$

¹⁹См. Часть 3, теорема 2.5 на с.66, а также с.67.

§1.11. Дивергенция векторного поля и ее физический смысл

Пусть Ω – некоторая область в пространстве, и на области Ω определено векторное поле $\vec{F}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$, где функции P, Q, R непрерывны в Ω вместе со своими частными производными P'_x, Q'_y, R'_z . Тогда сумма этих частных производных, рассматриваемая как скалярное поле на области Ω , называется *дивергенцией векторного поля* $\vec{F}(M)$ и обозначается $\operatorname{div}\vec{F}(M)$, то есть

$$\operatorname{div}\vec{F}(M) = P'_x(M) + Q'_y(M) + R'_z(M). \quad (1.16)$$

Примечание. Используя понятие дивергенции, формулу Остроградского-Гаусса (1.14) можно переписать в более компактной форме:

$$\Pi = \iint_{\partial V} (\vec{F}(M), \vec{n}_e(M)) ds = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}(M) dv, \quad (1.17)$$

где \vec{n}_e – единичный вектор внешней нормали к поверхности $S = \partial V$ – границе тела V . Таким образом, *поток векторного поля* $\vec{F}(M)$ *через внешнюю сторону замкнутой поверхности* S , *ограничивающей тело* V , *равен тройному интегралу от дивергенции векторного поля по телу* V .

Предположим далее, что тело V расположено целиком в области Ω и граница его $\partial V = S$ является гладкой или кусочно гладкой поверхностью, а $\vec{n}_e(M)$ – скалярное поле единичных векторов внешних нормалей к поверхности S . Используя формулу (1.17), а также теорему о среднем для тройных интегралов, можем записать:

$$\iint_{\partial V} (\vec{F}(M), \vec{n}_e(M)) ds = \operatorname{div}\vec{F}(M_0)v(V),$$

или

$$\operatorname{div}\vec{F}(M_0) = \frac{1}{v(V)} \iint_{\partial V} (\vec{F}(M), \vec{n}_e(M)) ds,$$

где $M_V \in V$ – некоторая средняя точка, а $v(V)$ – объем тела V . Зафиксируем теперь некоторую точку $M_0 \in V$ и будем стягивать тело V в эту точку. Тогда получим, что $v(V) \rightarrow 0$, $M_V \rightarrow M_0$, и поскольку согласно нашим предположениям $\operatorname{div}\vec{F}(M)$ – непрерывная функция, то по определению непрерывной функции

$$\operatorname{div}\vec{F}(M_0) = \lim_{M_V \rightarrow M_0} \operatorname{div}\vec{F}(M_V) = \lim_{M_V \rightarrow M_0} \frac{1}{v(V)} \iint_{\partial V} (\vec{F}(M), \vec{n}_e(M)) ds.$$

Обозначим Π_S – поток векторного поля $\vec{F}(M)$ через внешнюю сторону границы $S = \partial V$. Тогда *при стягивании замкнутой поверхности* S *в точку* M_0 *получаем, что*

$$\operatorname{div}\vec{F}(M_0) = \lim_{S \rightarrow M_0} \frac{\Pi_S}{v(V)}. \quad (1.18)$$

Формула (1.18) позволяет понять *физический смысл дивергенции*. Предположим, например, что векторное поле $\vec{F}(M)$ представляет собой поле скоростей жидкости плотности $\rho(M) \equiv 1$. Тогда, как уже было установлено ранее, Π_S – это количество жидкости, вытекающей через поверхность S из области V , ограниченной этой поверхностью, в единицу времени. Таким образом, если $\Pi_S = 0$, то внутрь области V втекает столько же жидкости в единицу времени, сколько и вытекает из нее, то есть в области V нет ни источников, ни стоков жидкости (либо они есть, но компенсируют друг друга). Если же $\Pi_S > 0$, то это означает, что в области V есть источники жидкости, а если $\Pi_S < 0$, то в области V имеются стоки жидкости. Тогда отношение

$$\frac{\Pi_S}{v(V)}$$

естественно понимать в первом случае как среднюю плотность источников жидкости по области V (количество жидкости, возникающей за единицу времени в единице объема области V), а во втором – как среднюю плотность стоков жидкости по области V . Соответственно, предел (1.18) представляет собой *плотность источников или стоков* жидкости в точке M_0 . В этом и состоит физический смысл дивергенции при данном характере векторного поля $\vec{F}(M)$. Для векторного поля $\vec{F}(M)$ иной физической природы $\operatorname{div}\vec{F}(M)$ в любом случае характеризует плотность источников или стоков поля в точке M .

Примечание. Предположим, для векторного поля $\vec{F}(M)$ дивергенция $\operatorname{div}\vec{F}(M) \equiv 0$ на области Ω . Это означает, что в области Ω нет ни источников, ни стоков векторного поля $\vec{F}(M)$. В частности, если $\vec{F}(M)$ – поле скоростей жидкости, то в области Ω нет ни источников, ни стоков жидкости. Так будет, например, для любой области Ω , расположенной в потоке воды, текущей в реке или водопроводной трубе. Соответственно с этим всякое векторное поле $\vec{F}(M)$, обладающее свойством $\operatorname{div}\vec{F}(M) \equiv 0$, называется *трубчатым*, или *соленоидальным*²⁰. Другим примером соленоидального поля является магнитное поле при соленоиде, что $\operatorname{div}\vec{b} \equiv 0$, где \vec{b} – вектор магнитной индукции.

§1.12. Формула Грина

Пусть $G \subset \mathbf{R}^2$ – замкнутая ограниченная область. Назовем эту область *простой*, если всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку G параллельно одной из осей координат Ox или Oy , пересекает границу $\Gamma = \partial G$ области G ровно в двух точках, причем граница Γ является гладкой или кусочно гладкой.

Теорема Грина. Пусть $G \subset \mathbf{R}^2$ – простая область, а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны в этой области вместе со своими частными производными P'_y и Q'_x . Тогда справедлива *формула Грина*

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial G^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (1.19)$$

²⁰ От греческих слов $\sigma\omega\lambda\eta\nu$ (трубка) и $\epsilon\iota\delta\omicron\varsigma$ (вид).

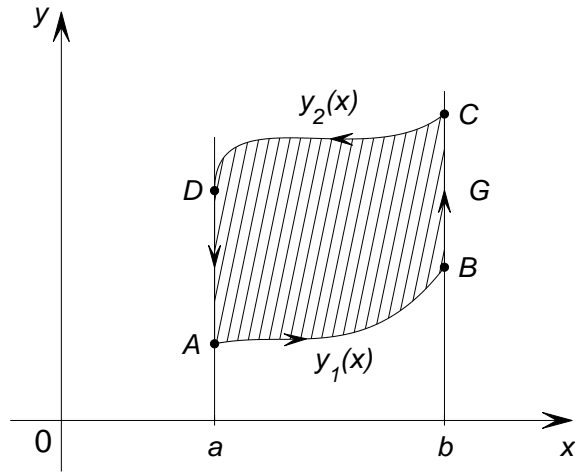


Рис. 1.8

Доказательство. Нам достаточно доказать только одно равенство:

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_{\partial G^+} P(x, y) dx, \quad (1.20)$$

поскольку соответствующее равенство по другой переменной будет доказываться аналогично. Так как G согласно условию простая область, то она представима в виде

$$G = \left\{ (x; y) \in \mathbf{R}^2 : y_1(x) \leq y \leq y_2(x), x \in [a; b] \right\},$$

где отрезок $[a; b]$ – это проекция области G на ось Ox , а функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ непрерывны вместе со своими производными первого порядка (если считать, что соответствующие части границы $\Gamma = \partial G$ гладкие). Это означает, что область G ограничена снизу линией AB с уравнением $y = y_1(x)$, $x \in [a; b]$, сверху – линией CD : $y = y_2(x)$, $x \in [b; a]$ (мы имеем в виду, что точке $x = b$ соответствует точка C , а точке $x = a$ – точка D ; это соответствует обходу границы $\Gamma = \partial G$ в положительном направлении, то есть против часовой стрелки), и с боковых сторон – отрезками BC и DA вертикальных прямых $x = b$ и $x = a$ (см. рис. 1.8). Переходя от двойного интеграла к повторному и пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b dx P(x, y) \Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} = \\ &= \int_a^b \left[P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)) \right] dx = \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \\ &- \int_a^b P(x, y_1(x)) dx = - \int_b^a P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx. \end{aligned}$$

Отсюда, используя формулу (1.8) перехода от криволинейного интеграла второго рода к определенному интегралу по параметру x , получаем:

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{\widetilde{CD}} P(x, y) dx - \int_{\widetilde{AB}} P(x, y) dx.$$

Заметим, что единичный вектор касательной $\vec{\tau}_e(M)$ к каждому из отрезков BC и DA направлен параллельно оси Oy , поэтому первая координата у него нулевая. Стало быть, для векторного поля $\vec{F}(M) = \{P(M); 0\}$ получаем:

$$\int_{BC} P(x, y) dx = \int_{BC} (\vec{F}(M), \vec{\tau}_e(M)) dl = \int_{BC} (P(M) \cdot 0 + 0 \cdot \cos \beta(M)) dl = 0,$$

и аналогично,

$$\int_{DA} P(x, y) dx = 0.$$

Таким образом,

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{\widetilde{AB}} P(x, y) dx - \int_{BC} P(x, y) dx - \int_{\widetilde{CD}} P(x, y) dx - \int_{DA} P(x, y) dx.$$

Учитывая, что $\partial G^+ = \widetilde{AB} \cup BC \cup \widetilde{CD} \cup DA$, получаем, что справедливо равенство (1.20). Теорема доказана.

Примечание. Формула (1.19) остается справедливой для всякой замкнутой области G , которую можно разбить на конечное число простых областей с помощью проведения вспомогательных гладких или кусочно гладких кривых. Действительно, к каждому из элементов разбиения можно применить формулу (1.19). Суммируя полученные равенства, слева будем иметь двойной интеграл по области G , а справа сумму циркуляций, в которой для каждой из вспомогательных кривых будут участвовать циркуляции по обоим направлениям обхода этих кривых, и следовательно, каждая такая пара циркуляций в сумме даст ноль. Поэтому в результате суммирования всех циркуляций останется лишь циркуляция через границу области G .

Формула Грина используется при доказательстве формулы Стокса, а также при доказательстве теоремы об условиях независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования (в плоском случае). Однако ее можно использовать не только в теории, но и на практике, например, для вычисления площади области G . Возьмем $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = x$. Тогда непосредственно из формулы (1.19) получаем:

$$s(G) = \iint_G dx dy = \oint_{\partial G^+} x dy.$$

Аналогичным образом, выбирая $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = 0$, находим:

$$s(G) = \iint_G dx dy = - \oint_{\partial G^+} y dx.$$

Суммируя эти две формулы, получаем еще одну:

$$s(G) = \frac{1}{2} \oint_{\partial G^+} x dy - y dx. \quad (1.21)$$

Используем ее, например, для вычисления площади фигуры, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Тот же эллипс можем задать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) = a \cos t, \\ y = y(t) = b \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

При увеличении параметра $t \in [0; 2\pi]$ переменная точка $M(x(t); y(t))$ движется по эллипсу против часовой стрелки, то есть обход эллипса происходит в положительном направлении. Поэтому в соответствии с формулой (1.21) находим

$$s(G) = \frac{1}{2} \oint_{\partial G^+} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(t) dy(t) - y(t) dx(t)) = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt,$$

откуда $s(G) = \pi ab$.

§1.13. Формула Стокса

Формула Стокса является обобщением формулы Грина на случай пространственной кривой.

Пусть S – гладкая или кусочно гладкая поверхность, ориентированная определенным образом и ограниченная²¹ гладким или кусочно гладким контуром Γ . Ориентируем замкнутый контур Γ таким образом, чтобы с конца вектора нормали к поверхности S обход контура Γ выглядел как обход в положительном направлении, то есть против часовой стрелки. В этом случае говорят, что ориентации поверхности S и ее границы Γ согласованы.

Пусть, кроме того, задано векторное поле $\vec{F}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$, компоненты которого непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка вдоль поверхности S . Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема Стокса. Если $\vec{n}_e(M)$ – поле единичных векторов нормалей к поверхности S , то имеет место формула Стокса:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \\ + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx. \end{aligned} \quad (1.22)$$

²¹ Еще говорят "натянута на контур" Γ .

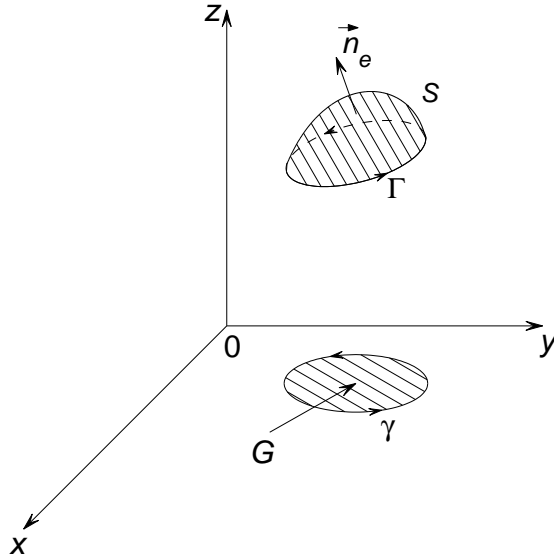


Рис. 1.9

Примечание. Формулу Стокса легко запомнить, если заметить, что первое слагаемое в ее правой части аналогично соответствующей части формулы Грина, а остальные получаются из него циклическими перестановками:

$$P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow P, \quad x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x.$$

Доказательство. Поскольку формула (1.22) распадается в сумму слагаемых, зависящих только от P , только от Q и только от R , и все эти слагаемые совершенно однотипны, нам достаточно доказать ее только для одного слагаемого, то есть, например, для случая, когда $Q = R = 0$. В этом случае она принимает вид

$$\oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \quad (1.23)$$

Предположим, что $\vec{n}_e = \{ \cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma \}$. Тогда формула (1.23) путем перехода от поверхностного интеграла второго рода к поверхностному интегралу первого рода преобразуется к виду:

$$\oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) ds. \quad (1.24)$$

Проведем доказательство формулы (1.24) для случая, когда поверхность S задается явным уравнением вида $z = z(x, y)$, $(x, y) \in G$, где G – замкнутая ограниченная область на плоскости Oxy – проекция поверхности S на эту плоскость (см. рис. 1.9). Обозначим γ – границу области G . Будем считать для определенности, что выбрана верхняя сторона поверхности S . Тогда обход контура Γ , если смотреть сверху, происходит против часовой стрелки. Поскольку $\Gamma \subset S$, то для любой точки $M(x, y, z) \in \Gamma$ имеем $M \in S$, и стало быть, $z = z(x, y)$, причем $(x, y) \in \gamma$. Поэтому вдоль контура Γ

$$P(x, y, z) = P(x, y, z(x, y)) \equiv p(x, y), \quad (x, y) \in \gamma.$$

При этом движении точки $M(x, y, z)$ вдоль контура Γ в выбранном направлении соответствует движение ее проекции $N(x, y)$ по контуру γ против часовой стрелки, то есть в положительном направлении. Поэтому

$$\oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx = \oint_{\gamma^+} p(x, y) dx = [\text{по формуле Грина}] = - \iint_G \frac{\partial p}{\partial y} dx dy,$$

откуда, используя правило дифференцирования сложной функции, получаем:

$$\oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx = - \iint_G \left(\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial z} z'_y \right) dx dy.$$

Заметим, что вектор нормали $\vec{n} = \{-z'_x, -z'_y, 1\}$ сонаправлен с вектором \vec{n}_e , поэтому координаты у них пропорциональны, и таким образом,

$$\frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = \frac{-z'_y}{1} = -z'_y,$$

откуда

$$\oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx = - \iint_G \left(\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial z} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right) dx dy,$$

или, переходя от двойного интеграла к поверхностному второго рода (см. (1.11)), имеем:

$$\oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx = - \iint_S \left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right) dx dy.$$

Переходя наконец от поверхностного интеграла второго рода к поверхностному интегралу первого рода, получаем формулу (1.24). Теорема доказана.

§1.14. Ротор векторного поля и его физический смысл

Заметим, что в правой части формулы Стокса (1.22) стоит поток векторного поля

$$\left\{ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\}$$

через поверхность S . Это векторное поле называется *ротатором*, или *вихрем* векторного поля $\vec{F}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$ и обозначается $\text{rot} \vec{F}(M)$.

Примечание. Пусть $\vec{\tau}_e$ – единичный вектор касательной к контуру Γ , направленный по направлению обхода контура, а \vec{n}_e – единичный вектор нормали к поверхности S , соответствующий выбранной стороне поверхности. Тогда формулу Стокса можно переписать в более компактной форме:

$$\oint_{\Gamma} (\vec{F}(M), \vec{\tau}_e(M)) d\ell = \iint_S (\text{rot} \vec{F}(M), \vec{n}_e(M)) ds. \quad (1.25)$$

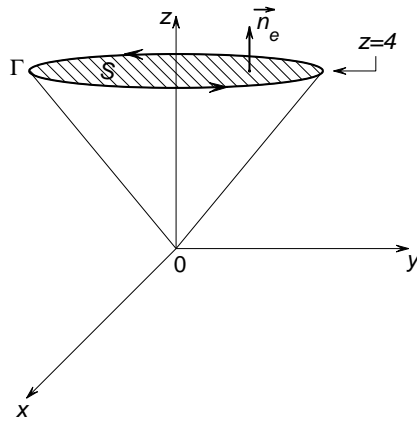


Рис. 1.10

Таким образом, циркуляция векторного поля по замкнутому контуру равна потоку ротора этого векторного поля через любую гладкую или кусочно гладкую поверхность S , натянутую на этот контур.

Формулу, определяющую ротор векторного поля $\vec{F}(M)$, удобно запомнить, если переписать ее следующим символическим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{F}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Фактически она получается разложением этого определителя по первой строке. Если определить символический вектор (*оператор Гамильтона*)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

то ротор можно представить в виде векторного произведения:

$$\operatorname{rot} \vec{F}(M) = [\nabla, \vec{F}(M)].$$

Задача 1.8. Вычислить по формуле Стокса циркуляцию векторного поля $\vec{F} = y\vec{i} + (2x - 1)\vec{j} + z\vec{k}$ вдоль контура Γ , указав на чертеже направление обхода:

$$\Gamma : \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = 4. \end{cases}$$

Решение. В данном случае $P = y$, $Q = 2x - 1$, $R = z$. Контур Γ представляет собой пересечение конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и горизонтальной плоскости $z = 4$, то есть окружность радиуса 4, расположенную в плоскости $z = 4$, с центром на оси Oz , см. рис. 1.10. Будем считать, что направление обхода контура Γ – против часовой стрелки, если смотреть сверху. Возьмем в качестве поверхности S , натянутой на контур Γ , часть плоскости $z = 4$, ограниченную окружностью Γ (то есть круг радиуса 4). Чтобы ориентация поверхности и контура были согласованными, выберем верхнюю сторону поверхности S .

Учитывая, что поверхность S проходит перпендикулярно к оси Oz , получаем, что единичный вектор нормали к поверхности $\vec{n}_e = \vec{k} = \{0; 0; 1\}$. Найдем ротор векторного поля $\vec{F}(M)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F}(M) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 2x-1 & z \end{vmatrix} = \\ &= \left\{ (z)'_y - (2x-1)'_z; (y)'_z - (z)'_x; (2x-1)'_x - (y)'_y \right\} = \{0-0; 0-0; 2-1\} = \{0; 0; 1\}. \end{aligned}$$

Тогда скалярное произведение

$$\left(\operatorname{rot} \vec{F}(M), \vec{n}_e(M) \right) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1.$$

По формуле Стокса (1.25) получаем:

$$\text{Ц} = \oint_{\Gamma} \left(\vec{F}(M), \vec{\tau}_e(M) \right) dl = \iint_S \left(\operatorname{rot} \vec{F}(M), \vec{n}_e(M) \right) ds = \iint_S ds = s(S),$$

и по формуле площади круга $\text{Ц} = s(S) = \pi 4^2 = 16\pi$.

Физический смысл ротора

Предположим, что $\vec{F}(M)$ – это поле скоростей жидкости, протекающей через область Ω . Поместим в некоторой точке $M \in \Omega$ бесконечно малое колесико с лопастями, расположенными по его окружности Γ . Под воздействием текущей жидкости колесико будет вращаться с некоторой скоростью. Естественно ожидать, что линейная скорость каждой точки окружности Γ по величине будет одной и той же. С другой стороны, если разбить всю окружность на дуги достаточно малой длины и каждую такую дугу $\tilde{\gamma}_i$ отождествить с некоторой ее точкой M_i , $i = \overline{1, n}$, то всю окружность можно рассматривать как совокупность этих отдельных точек, а поскольку эти точки связаны, то величина реальной скорости каждой из них $v(M_i)$ будет равна арифметическому среднему скоростей $v^*(M_i)$ этих точек, которые они имели бы под воздействием поля, если бы не были связаны между собой. Понятно, что $v^*(M_i)$ равна проекции вектора скорости $\vec{F}(M_i)$ на касательную к контуру, то есть

$$v^*(M_i) = \left| \vec{F}(M_i) \right| \cos \widehat{\vec{F}(M_i), \vec{\tau}_e(M_i)} = \left(\vec{F}(M_i), \vec{\tau}_e(M_i) \right).$$

Исходя из этих соображений, можно получить, что

$$v(M) = \frac{1}{L} \oint_{\Gamma} \left(\vec{F}(M), \vec{\tau}_e(M) \right) dl = \frac{1}{2\pi R} \oint_{\Gamma} \left(\vec{F}(M), \vec{\tau}_e(M) \right) dl, \quad \forall M \in \Gamma,$$

где L – это длина, а R – радиус окружности Γ . Тогда по формуле Стокса (1.25) получаем, что

$$v(M) = \frac{1}{2\pi R} \iint_S \left(\operatorname{rot} \vec{F}(M), \vec{n}_e(M) \right) ds, \quad \forall M \in \Gamma,$$

где S – это часть плоскости колесика, ограниченная его окружностью. Тогда по теореме о среднем получаем:

$$v(M) = \frac{1}{2\pi R} \left(\text{rot} \vec{F}(M_1), \vec{n}_e(M_1) \right) s(S) = \frac{R}{2} \left(\text{rot} \vec{F}(M_1), \vec{n}_e(M_1) \right) \equiv \Psi(M_1),$$

где M_1 – некоторая точка на поверхности S . Если $R \rightarrow 0$, то по непрерывности функции $\Psi(M)$ получаем, что $\Psi(M_1) \rightarrow \Psi(M_0)$, где M_0 – центр колесика. Поэтому при всех достаточно малых $R > 0$ можем считать, что M_1 совпадает с M_0 . В таком случае

$$v(M) \approx \frac{R}{2} \left(\text{rot} \vec{F}(M_0), \vec{n}_e(M_0) \right),$$

и максимальным по модулю это значение будет, когда вектор $\vec{n}_e(M_0)$ сонаправлен с вектором $\text{rot} \vec{F}(M_0)$. Указанное максимальное значение будет равно

$$v_{\max}(M) \approx \frac{R}{2} \left| \text{rot} \vec{F}(M_0) \right|.$$

Но $\frac{v}{R}$ – это величина угловой скорости ω колесика. Отсюда получаем следующий вывод:

Если ось малого колесика с лопастями с центром в точке M_0 направить по ротору $\text{rot} \vec{F}(M_0)$ поля скоростей в этой точке, то угловая скорость вращения колесика будет максимально возможной и по величине равной

$$\omega_{\max} = \frac{1}{2} \left| \text{rot} \vec{F}(M_0) \right|.$$

Таким образом, $\text{rot} \vec{F}(M)$ характеризует ”вращательную составляющую” поля скоростей и равен удвоенной угловой скорости вращения бесконечно малой частицы жидкости.

§1.15. Понятие потенциальности векторного поля

Векторное поле $\vec{F}(M)$, определенное в области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, называется *потенциальным*, если существует непрерывно дифференцируемое на области Ω скалярное поле $u(M)$, градиентом²² которого является векторное поле $\vec{F}(M)$, то есть

$$\vec{F}(M) = \nabla u(M) = \left\{ u'_x(M); u'_y(M); u'_z(M) \right\}. \quad (1.26)$$

При этом функция $u(M)$ называется *потенциалом* векторного поля $\vec{F}(M)$.

Примечание. Таким образом, если векторное поле $\vec{F}(M) = \left\{ P(M); Q(M); R(M) \right\}$, то его потенциальность означает, что существует функция $u(x, y, z)$ такая, что

$$P(x, y, z) = u'_x(x, y, z), \quad Q(x, y, z) = u'_y(x, y, z), \quad R(x, y, z) = u'_z(x, y, z),$$

то есть выражение $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ представимо в виде

$$u'_x(x, y, z)dx + u'_y(x, y, z)dy + u'_z(x, y, z)dz = du(x, y, z),$$

²²См. Часть 3, §1.7.

и стало быть, является *полным дифференциалом* функции²³ $u(x, y, z)$.

Следующая теорема позволяет уяснить физический смысл потенциальности.

Теорема 1.1. Пусть векторное поле $\vec{F}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$ непрерывно в области Ω . Тогда для его потенциальности необходимо и достаточно, чтобы $\forall M_0, M_1 \in \Omega$ циркуляция

$$\int_{\widetilde{M_0M_1}} (\vec{F}(M), \vec{\tau}_e) d\ell = \int_{\widetilde{M_0M_1}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

не зависела от выбора кусочно гладкого контура, соединяющего точки M_0 и M_1 и расположенного целиком в области Ω (то есть криволинейный интеграл не зависел от пути интегрирования). При этом потенциал (с точностью до произвольной постоянной) вычисляется по формуле

$$u(M_1) = \int_{\widetilde{M_0M_1}} (\vec{F}(M), \vec{\tau}_e) d\ell + C, \quad C = u(M_0), \quad (1.27)$$

где M_0 – любая фиксированная точка из области Ω .

Доказательство. Необходимость. Итак, пусть векторное поле $\vec{F}(M)$ потенциально в Ω и $u(M)$ – его потенциал. Тогда циркуляция

$$\begin{aligned} \text{Ц} &= \int_{\widetilde{M_0M_1}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ &= \int_{\widetilde{M_0M_1}} u'_x(x, y, z)dx + u'_y(x, y, z)dy + u'_z(x, y, z)dz. \end{aligned}$$

Предположим, что дуга $\widetilde{M_0M_1}$ задается параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [t_0; t_1]; \quad M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2).$$

Тогда переходя от криволинейного интеграла второго рода к определенному интегралу по параметру t по формуле (1.6), получаем:

$$\text{Ц} = \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) dt = \psi(t) \Big|_{t_0}^{t_1} = \psi(t_1) - \psi(t_0),$$

где принято обозначение:

$$\psi(t) = u(x(t), y(t), z(t)),$$

²³См. Часть 3, §1.6.

и следовательно,

$$u'_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + u'_y(\dots)y'(t) + u'_z(\dots)z'(t) = \Psi'(t).$$

Заметим, что $\Psi(t_0) = u(M_0)$, $\Psi(t_1) = u(M_1)$. Таким образом, циркуляция $\Pi = u(M_1) - u(M_0)$. Отсюда следует, во-первых, что циркуляция зависит только от начальной и конечной точек M_0 и M_1 , но не от пути интегрирования; и во-вторых, потенциал $u(M_1) = \Pi + u(M_0)$.

Достаточность. Итак, пусть циркуляция

$$\Pi = \int_{\widetilde{M_0M_1}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

зависит лишь от начальной и конечной точек M_0 и $M_1 \in \Omega$, но не от пути интегрирования. Тогда фиксируя одну из этих точек M_0 , а другую считая переменной $M_1 = M(x, y, z)$, получаем, что в области Ω определена функция

$$u(M) = \int_{\widetilde{M_0M}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Покажем, что это и есть потенциал векторного поля $\vec{F}(M)$. Дадим приращение точке M по переменной x , то есть рассмотрим точку $M_1(x + \Delta x, y, z)$. Тогда в силу аддитивности²⁴ криволинейного интеграла по контуру интегрирования получаем (во избежание путаницы в обозначениях над переменными интегрирования добавим черту)

$$\Delta_x u(M) = u(M_1) - u(M) = \int_{\widetilde{MM_1}} P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})d\bar{x} + Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})d\bar{y} + R(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})d\bar{z}.$$

Согласно условию, этот интеграл не зависит от выбора пути интегрирования.

Поэтому в качестве дуги $\widetilde{MM_1}$ можем выбрать отрезок прямой, соединяющей точки MM_1 , то есть считать, что он задается параметрическими уравнениями:

$$\bar{x} = t, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z, \quad t \in [x, x + \Delta x] \quad \Rightarrow \quad d\bar{x} = dt, \quad d\bar{y} = d\bar{z} = 0.$$

Тогда переходя от криволинейного интеграла к определенному интегралу по параметру t по формуле (1.6), получаем:

$$\Delta_x u(M) = \int_x^{x+\Delta x} P(t, y, z)dt.$$

²⁴Непосредственно из определения криволинейного интеграла второго рода следует, что он обладает свойствами, аналогичными свойствам определенного интеграла. Упомянутое свойство аддитивности по контуру интегрирования состоит в следующем. Если дуга \widetilde{AB} разбита некоторой точкой $C \in \widetilde{AB}$ на две дуги \widetilde{AC} и \widetilde{CB} , то

$$\int_{\widetilde{AB}} (\vec{F}, \vec{\tau}_e) dl = \int_{\widetilde{AC}} (\vec{F}, \vec{\tau}_e) dl + \int_{\widetilde{CB}} (\vec{F}, \vec{\tau}_e) dl.$$

Учитывая непрерывность функции P , можем воспользоваться теоремой о среднем в определенном интеграле:

$$\Delta_x u(M) = P(t^*, y, z) \Delta x, \quad t \in [x, x + \Delta x] \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(t^*, y, z) = P(x, y, z),$$

и таким образом,

$$\exists u'_x(M) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u(M)}{\Delta x} = P(x, y, z) = P(M).$$

Аналогично доказывается, что $\exists u'_y(M) = Q(M)$, $u'_z(M) = R(M)$. Теорема доказана.

Примечание. Таким образом, если $\vec{F}(M)$ – силовое поле, то потенциальность этого поля означает, что работа поля по перемещению материальной точки из положения M_0 в положение M_1 зависит только от начального и конечного пункта M_0 и M_1 , но не зависит от выбора пути этого перемещения. Таким свойством обладает, например, поле тяготения. Оно, стало быть, является потенциальным.

Непосредственно из примечания к определению потенциальности и формулы (1.27) видно, что справедливо следующее утверждение.

Следствие 1.1 (обобщение формулы Ньютона-Лейбница). Пусть векторное поле $\vec{F}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$ непрерывно в области Ω и выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ представляет собой полный дифференциал $du(x, y, z)$ (то есть поле потенциально в Ω и имеет потенциал u). Тогда $\forall M_0, M_1 \in \Omega$ справедлива формула:

$$\int_{\overline{M_0 M_1}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = u(M_1) - u(M_0),$$

то есть

$$\int_{\overline{M_0 M_1}} du(x, y, z) = u(M) \Big|_{M_0}^{M_1} = u(M_1) - u(M_0).$$

Примечание. Для плоского случая все аналогично.

Следствие 1.2. Пусть векторное поле $\vec{F}(M)$ непрерывно в области Ω . Тогда для его потенциальности необходимо и достаточно, чтобы его циркуляция по любому кусочно гладкому замкнутому контуру Γ , расположенному целиком в области Ω , равнялась нулю.

Доказательство.

Необходимость получаем непосредственно из следствия 1.1, поскольку для замкнутого контура начальная и конечная точки совпадают $M_0 = M_1$.

Достаточность. Рассмотрим две дуги $M_0 A M_1$ и $M_0 B M_1$, расположенные в области Ω и соединяющие точки M_0 и M_1 (см. рис. 1.11 на с.48). Тогда контур $\Gamma = M_0 A M_1 \cup M_1 B M_0$ – замкнутый, и согласно условию для функции $f(M) = (\vec{F}(M), \vec{\tau}_e(M))$ интеграл $\oint_{\Gamma} f(M) d\ell = 0$, но с другой стороны,

$$\oint_{\Gamma} f(M) d\ell = \int_{M_0 A M_1} f(M) d\ell + \int_{M_1 B M_0} f(M) d\ell = \int_{M_0 A M_1} f(M) d\ell - \int_{M_0 B M_1} f(M) d\ell.$$

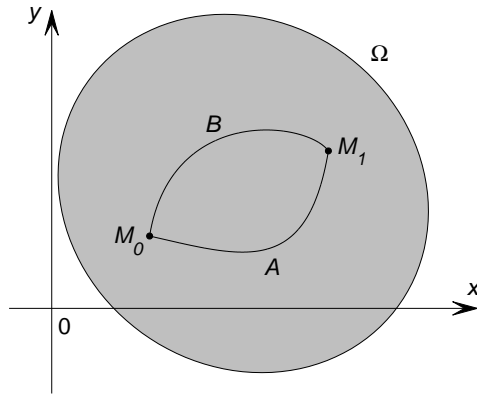


Рис. 1.11 . Плоский случай. В пространстве – аналогично.

Следствие доказано.

Теорема 1.2 (необходимое условие потенциальности). Пусть векторное поле $\vec{F}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$ непрерывно дифференцируемо в области Ω . Тогда для его потенциальности необходимо, чтобы

$$\text{rot}\vec{F}(M) \equiv \vec{0} \quad \text{в } \Omega. \quad (1.28)$$

Доказательство. Итак, предположим, что поле $\vec{F}(M)$ потенциально, то есть существует непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y, z)$ такая, что $u'_x = P$, $u'_y = Q$, $u'_z = R$. По условию, частные производные от этих производных непрерывны, и стало быть, по теореме о равенстве смешанных производных (Часть 3, §1.8) получаем:

$$\text{rot}\vec{F}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u'_x & u'_y & u'_z \end{vmatrix} = \{u''_{zy} - u''_{yz}; u''_{xz} - u''_{zx}; u''_{yx} - u''_{xy}\} = \{0; 0; 0\} = \vec{0}.$$

Теорема доказана.

Примечания.

1. Для двумерного случая $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = \{P(x, y); Q(x, y)\}$ необходимое условие потенциальности принимает более простой и конкретный вид:

$$Q'_x(x, y) = P'_y(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega. \quad (1.29)$$

Действительно, в силу потенциальности существует непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y)$ такая, что $P = u'_x$, $Q = u'_y$. Поскольку векторное поле $\vec{F} = \{P; Q\}$ непрерывно дифференцируемо в области Ω , то функция $u(x, y)$ имеет непрерывные смешанные производные $u''_{yx} = Q'_x$, $u''_{xy} = P'_y$, причем по теореме о равенстве смешанных производных²⁵ они равны: $u''_{yx} = u''_{xy}$. Стало быть, в области Ω справедливо и равенство $Q'_x = P'_y$.

2. Векторное поле, удовлетворяющее условию (1.28), называется *безвихревым*. Таким образом, всякое потенциальное поле является безвихревым. Обратное, вообще говоря, неверно. В следующем параграфе, однако, показано, что при определенных обстоятельствах безвихревое поле будет потенциальным.

²⁵См. Часть 3, с.22.

§1.16. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

В соответствии с теоремой 1.1 необходимым и достаточным условием потенциальности векторного поля является независимость криволинейного интеграла второго рода соответствующей вектор-функции от пути интегрирования. Однако это условие само по себе не удобно для проверки. Гораздо более удобное для проверки условие удается получить в случае односвязности области Ω .

Понятие односвязности плоской области

Для плоского замкнутого²⁶ контура Γ ограниченную им часть плоскости (понимаемую как открытое множество) называют *внутренностью контура* Γ и обозначают $\text{int}\Gamma$.

Определение 1.15. Плоская область Ω называется *односвязной*, если для любого кусочно гладкого замкнутого контура Γ , расположенного целиком в области Ω , его внутренность $\text{int}\Gamma \subset \Omega$.

Примечание. Образно говоря, односвязность области Ω означает отсутствие "дырок" в этой области. Например, внутренность круга является односвязной областью, а кольцо $1 < x^2 + y^2 < 4$ уже не является односвязной областью. Для ограниченной области односвязность означает также связность ее границы, то есть то, что граница области не распадается на обособленные части. Граница кольца, упомянутого выше, распадается на две обособленные части – внутреннюю и внешнюю окружности, то есть кольцо, как говорят, является *двусвязной областью*. Вообще, область, не являющаяся односвязной, называется *многосвязной*.

Теорема 1.3. Пусть векторное поле $\vec{F}(x, y) = \{P(x, y); Q(x, y)\}$ непрерывно дифференцируемо в *односвязной* области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Тогда следующие условия эквивалентны (равносильны):

1. Для любых двух точек $M_0, M_1 \in \Omega$ криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{\widetilde{M_0M_1}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\widetilde{M_0M_1}} (\vec{F}(M), \vec{\tau}_e) d\ell$$

не зависит от выбора кусочно гладкого контура $\widetilde{M_0M_1} \subset \Omega$, то есть не зависит от пути интегрирования.

2. Циркуляция векторного поля $\vec{F}(x, y)$ по любому кусочно гладкому замкнутому контуру $\Gamma \subset \Omega$ равна нулю: $\oint_{\Gamma} (\vec{F}(M), \vec{\tau}_e) d\ell = 0$.
3. Поле $\vec{F}(x, y)$ потенциально в Ω .
4. Выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ представляет собой полный дифференциал $du(x, y)$ в Ω .
5. Выполняется условие (1.29).

Доказательство. Эквивалентность условий 1–4 уже доказана ранее²⁷ (за-

²⁶Здесь и далее, говоря о замкнутом контуре, достаточно иметь в виду только такой замкнутый контур, который не имеет точек самопересечения. Например, контур, имеющий форму восьмерки, является, строго говоря, замкнутым, но такой контур можно исключить из рассмотрения.

²⁷Односвязность области здесь не требовалась.

мечание к определению потенциальности, теорема 1.1 и следствие 1.2 из нее). Согласно теореме 1.2 (точнее, замечанию к ней) имеем: $2 \Leftrightarrow 3 \Rightarrow 5$. Таким образом, нам достаточно доказать, что $5 \Rightarrow 2$. Но доказательство этого факта (при условии односвязности Ω) следует непосредственно из формулы Грина. Теорема доказана.

Понятие односвязности пространственной области

Определение 1.16. Пространственная область $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ называется *односвязной*²⁸, если на любой кусочно гладкий замкнутый контур, расположенный целиком в области Ω , можно натянуть кусочно гладкую поверхность, также целиком лежащую в Ω .

Примечание. Примерами односвязных областей являются все пространство, открытый шар, область, заключенная между двумя сферами с центром в одной точке, и т.д. Примером неодносвязной области является шар, из которого выброшены все точки, попадающие внутрь (бесконечного) цилиндра с осью, проходящей через его центр:

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : r^2 < x^2 + y^2 < R^2 - z^2 \right\}, \quad 0 < r < R.$$

Теорема 1.4. Пусть векторное поле $\vec{F}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$ непрерывно дифференцируемо в *односвязной* области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. Тогда следующие условия эквивалентны (равносильны):

1. Для любых двух точек $M_0, M_1 \in \Omega$ криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{\overset{\frown}{M_0 M_1}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{\overset{\frown}{M_0 M_1}} \left(\vec{F}(M), \vec{\tau}_e \right) dl$$

не зависит от выбора кусочно гладкого контура $\overset{\frown}{M_0 M_1} \subset \Omega$, то есть не зависит от пути интегрирования.

2. Циркуляция векторного поля $\vec{F}(M)$ по любому кусочно гладкому замкнутому контуру $\Gamma \subset \Omega$ равна нулю: $\oint_{\Gamma} \left(\vec{F}(M), \vec{\tau}_e \right) dl = 0$.
3. Поле $\vec{F}(M)$ потенциально в Ω .
4. Выражение $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ представляет собой полный дифференциал $du(x, y, z)$ в Ω .
5. Поле $\vec{F}(M)$ является безвихревым, то есть выполняется условие (1.28): $\text{rot} \vec{F}(M) = \vec{0}$.

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 1.3 и почти дословно его повторяет, нужно только вместо формулы Грина использовать формулу Стокса. Теорема доказана.

Примечание. Таким образом, в случае односвязной области Ω для проверки потенциальности непрерывно дифференцируемого поля $\vec{F}(M)$ можно использовать условие (1.28).

²⁸Или еще говорят *поверхностно односвязной*.

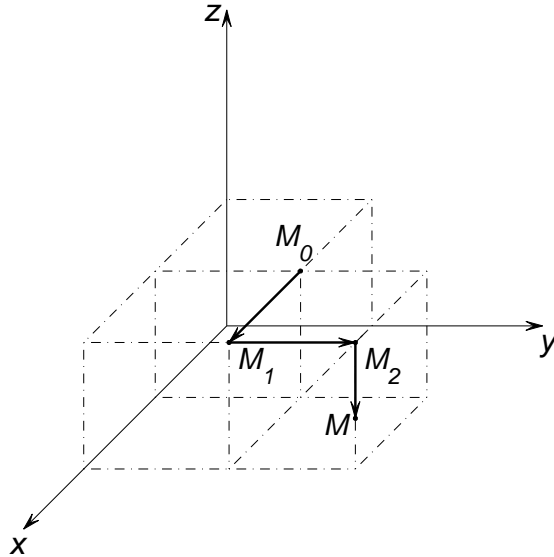


Рис. 1.12

§1.17. Вычисление потенциала

Предположим, что потенциальность векторного поля $\vec{F}(M)$ в области Ω уже установлена. Для вычисления потенциала следует использовать формулу (1.27), которую нам будет удобно переписать в виде:

$$u(x, y, z) = \int_{\widetilde{M_0M}} P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) d\bar{x} + Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) d\bar{y} + R(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) d\bar{z} + C, \quad (1.30)$$

где предполагается, что $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ – любая фиксированная точка, а $M(x, y, z)$ – переменная точка.

Рассмотрим случай, когда область Ω совпадает со всем пространством \mathbf{R}^3 . Впрочем, дальнейшие построения останутся справедливыми также и в том случае, когда область Ω является внутренностью прямоугольного параллелепипеда или открытым октантом и т.п. В силу теоремы 1.1 (необходимых и достаточных условий потенциальности) криволинейный интеграл в (1.30) не зависит от пути интегрирования, то есть от выбора дуги $\widetilde{M_0M} \subset \Omega$. Предполагаемая нами структура области Ω позволяет нам выбрать в качестве этой дуги ломаную $M_0M_1M_2M$ (см. рис. 1.12 на с.51), где $M_1(x, y_0, z_0)$, $M_2(x, y, z_0)$. Тогда

$$\int_{\widetilde{M_0M}} P d\bar{x} + Q d\bar{y} + R d\bar{z} = \int_{\widetilde{M_0M_1}} \dots + \int_{\widetilde{M_1M_2}} \dots + \int_{\widetilde{M_2M}} \dots$$

Заметим, что дуга M_0M_1 представляет собой отрезок прямой, параллельной оси Ox , и следовательно, вдоль нее переменные $\bar{y} \equiv y_0$ и $\bar{z} \equiv z_0$ остаются постоянными, а в таком случае дифференциалы $d\bar{y} = d\bar{z} = 0$. Переменную \bar{x} можем принять в качестве параметра: $\bar{x} = t \in [x_0; x]$. Таким образом, переходя

к определенному интегралу по параметру, получаем:

$$\int_{\widetilde{M_0 M_1}} P d\bar{x} + Q d\bar{y} + R d\bar{z} = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt.$$

Аналогичным образом,

$$\int_{\widetilde{M_1 M_2}} P d\bar{x} + Q d\bar{y} + R d\bar{z} = \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt,$$

$$\int_{\widetilde{M_2 M}} P d\bar{x} + Q d\bar{y} + R d\bar{z} = \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt.$$

Стало быть, в принятых предположениях справедлива формула:

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt + C. \quad (1.31)$$

Примечание. Для плоского случая аналогично²⁹:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt + C.$$

Задача 1.9. Доказать потенциальность векторного поля

$$\vec{F} = \left(\frac{1}{y} - \frac{z^3}{x^2} \right) \vec{i} + \left(\frac{2y}{z} - \frac{x}{y^2} \right) \vec{j} + \left(\frac{3z^2}{x} - \frac{y^2}{z^2} \right) \vec{k}$$

и найти его потенциал.

Решение. Данное векторное поле определено и является непрерывно дифференцируемым на всем пространстве \mathbf{R}^3 за исключением координатных плоскостей $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, то есть на каждом из открытых ортантов.

²⁹Эта формула используется при решении *дифференциальных уравнений в полных дифференциалах* (д.у.п.д.). К сожалению, в Части 2 соответствующий раздел отсутствует. Поэтому приведем краткую справку. Д.у. в симметричной форме

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

называется д.у.п.д., если существует дифференцируемая в области Ω функция $u(x, y)$ такая, что левая часть уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y)$. По доказанному, для этого необходимо и достаточно, чтобы в области Ω $P'_y = Q'_x$. Общее решение в неявном виде такого уравнения очевидно: $u(x, y) = C$.

Функция $u(x, y)$, в свою очередь, может быть найдена по формуле $u(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt$.

Докажем потенциальность этого поля и найдем его потенциал на первом ортанте $\Omega = \{(x; y; z) \in \mathbf{R}^3 : x, y, z > 0\}$. Что касается остальных ортантов, соответствующее исследование для них проводится аналогично. Область Ω является односвязной. Поэтому для того, чтобы векторное поле $\vec{F}(M)$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым. Проверим это:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{y} - \frac{z^3}{x^2} & \frac{2y}{z} - \frac{x}{y^2} & \frac{3z^2}{x} - \frac{y^2}{z^2} \end{vmatrix} = \left\{ -\frac{2y}{z^2} + \frac{2y}{z^2}; -\frac{3z^2}{x^2} + \frac{3z^2}{x^2}; -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2} \right\},$$

то есть $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$. Таким образом, поле потенциально. В качестве фиксированной точки из Ω возьмем $M_0(1; 1; 1)$. Для вычисления потенциала используем формулу (1.30). Пользуясь структурой области Ω , преобразуем ее к формуле (1.31). Тогда получим (см. рис. 1.12 на с.51):

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_1^x P(t, 1, 1) dt + \int_1^y Q(x, t, 1) dt + \int_1^z R(x, y, t) dt + C = \\ &= \int_1^x \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt + \int_1^y \left(2t - \frac{x}{t^2}\right) dt + \int_1^z \left(\frac{3t^2}{x} - \frac{y^2}{t^2}\right) dt + C = \\ &= \left(t + \frac{1}{t}\right) \Big|_{t=1}^{t=x} + \left(t^2 + \frac{x}{t}\right) \Big|_{t=1}^{t=y} + \left(\frac{t^3}{x} + \frac{y^2}{t}\right) \Big|_{t=1}^{t=z} + C = \\ &= x + \frac{1}{x} - 2 + y^2 + \frac{x}{y} - 1 - x + \frac{z^3}{x} + \frac{y^2}{z} - \frac{1}{x} - y^2 + C = \frac{x}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^3}{x} - 3 + C. \end{aligned}$$

Относя константу -3 к произвольной постоянной, окончательно получаем:

$$u(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^3}{x} + C.$$

Проверка.

$$u'_x = \frac{1}{y} - \frac{z^3}{x^2} = P, \quad u'_y = -\frac{x}{y^2} + \frac{2y}{z} = Q, \quad u'_z = -\frac{y^2}{z^2} + \frac{3z^2}{x} = R \quad \Rightarrow \quad \nabla u = \vec{F}.$$

Проведенная проверка на самом деле показывает, что функция $u(x, y, z)$ является потенциалом векторного поля $\vec{F}(x, y, z)$ не только на области Ω , но и на каждом из ортантов.

Примечание. В случае, когда начало координат содержится в области Ω (в приведенной выше задаче это было не так), всегда удобнее взять в качестве начальной точки точку $M_0(0; 0; 0)$.

2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА³⁰

§2.1. Понятие комплексного числа

Комплексным числом z называется арифметическое выражение вида

$$z = x + iy,$$

где x, y – действительные числа ($x, y \in \mathbf{R}$), а i – специальный символ, для которого по определению считается, что $i^2 = -1$. Этот специальный символ i называется *мнимой единицей*. Соответственно число x называется *действительной частью комплексного числа z* и обозначается $\operatorname{Re}z$, а число y называется *мнимой частью комплексного числа z* и обозначается $\operatorname{Im}z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными* $z_1 = z_2$, если равны их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Число $\bar{z} = x - iy = x + i(-y)$ называется *комплексно сопряженным* к числу $z = x + iy$. Операции сложения и умножения комплексных чисел вводятся по обычным правилам сложения и умножения буквенных выражений в алгебре. В частности,

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

Задача 2.1. Даны 2 комплексных числа $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 7 + 4i$. Найти: $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение.

- 1) $z_1 + z_2 = 2 - 3i + 7 + 4i = (2 + 7) + (4i - 3i) = 9 + i$.
- 2) $z_1 - z_2 = 2 - 3i - (7 + 4i) = (2 - 7) - (3i + 4i) = -5 - 7i$.
- 3) $z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i)(7 + 4i) = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 4i - 7 \cdot 3i - 3 \cdot 4 \cdot i^2 = 14 + 8i - 21i - 12i^2 = (14 + 12) + (8 - 21)i = 26 - 13i$.
- 4) Домножая числитель и знаменатель на комплексно сопряженное число к знаменателю, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2 - 3i}{7 + 4i} = \frac{(2 - 3i)(7 - 4i)}{(7 + 4i)(7 - 4i)} = \frac{14 - 8i - 21i + 12i^2}{7^2 - 4^2i^2} = \\ &= \frac{(14 - 12) - (8 + 21)i}{49 + 16} = \frac{2 - 29i}{65} = \frac{2}{65} - \frac{29}{65}i. \end{aligned}$$

Аналогично и в общем случае получаем, что справедливы свойства:

1. $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.
2. $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2)$.
3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$, если $z_2 \neq 0$.
4. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1z_2 = z_2z_1$.
5. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$.
6. $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$.

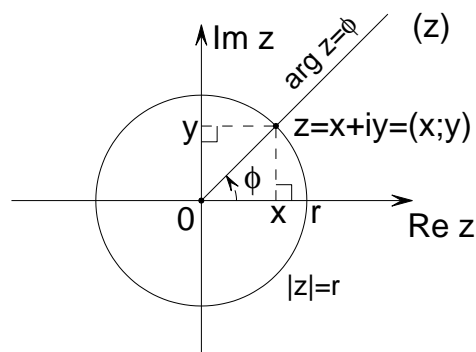


Рис. 2.1

§2.2. Графическое изображение комплексных чисел

Комплексное число $z = x + iy$ можно толковать как упорядоченную пару действительных чисел $(x; y)$, которую, в свою очередь, можно понимать как координаты геометрического вектора или координаты точки $M(x; y)$ на плоскости Oxy . Соответственно эту координатную плоскость Oxy , на которой ось Ox обозначается как $\text{Re } z$ (действительная ось), а ось Oy – как $\text{Im } z$ (мнимая ось), называют *комплексной плоскостью* и обозначают (z) . Множество всех комплексных чисел обозначают буквой \mathbf{C} по аналогии с тем, как множество всех действительных чисел – буквой \mathbf{R} . При этом расстояние от точки $z = x + iy$ до 0 на комплексной плоскости, т.е. длину вектора $|\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называют *модулем комплексного числа z* и обозначают обычно $r = |z|$. Соответственно угол φ между вектором \overline{OM} и положительным направлением действительной оси, отсчитываемый против часовой стрелки, называют *аргументом комплексного числа z* и обозначают $\varphi = \text{Arg } z$. Очевидно, что $\text{Arg } z$ определяется неоднозначно, а с точностью до $\pm 2\pi k$, где k – целое число ($k \in \mathbf{Z}$). Если же указан какой-то полуинтервал длины 2π и рассматриваются лишь значения φ из этого полуинтервала, то φ называют *аргументом комплексного числа z в смысле главного значения* и обозначают $\varphi = \text{arg } z$. Если r и φ известны, то число z на комплексной плоскости можно найти как точку пересечения окружности радиуса r с центром в 0 (она имеет уравнение $|z| = r$) с лучом, исходящим из 0 под углом φ к положительному направлению действительной оси (он имеет уравнение $\text{arg } z = \varphi$), см. рис. 2.1. Фактически, числа r и φ – это полярные координаты точки $z = x + iy$ на комплексной плоскости. Поэтому справедливы формулы:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{y}{x};$$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Отсюда получаем так называемую *тригонометрическую форму* комплексного числа $z = x + iy$:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

³⁰Первые три параграфа данного раздела, вообще говоря, рассматриваются в первом семестре, и соответственно, должны бы находиться в Части 1 настоящего пособия. Однако там они отсутствуют. Вместе с тем, их материал совершенно необходим для изучения следующего раздела "Функции комплексного переменного".

Выражение в скобках обозначают как $e^{i\varphi}$ и соответственно получают так называемую *показательную форму* комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Непосредственной проверкой в соответствии с формулами тригонометрии устанавливается справедливость равенств:

$$e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}, \quad e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}},$$

откуда, в частности, получаем $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$ и таким образом

$$z = re^{i\varphi}, \quad n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

(*первая формула Муавра*). Поскольку аргумент комплексного числа определяется с точностью до $\pm 2\pi k$, то отсюда получаем обратную формулу:

$$z = re^{i\varphi}, \quad n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

(*вторая формула Муавра*), где $k = 0, 1, \dots, n-1$ (при остальных значениях k все повторяется и таким образом существует ровно n различных корней n -й степени из комплексного числа z). Все они расположены на окружности $|z| = \sqrt[n]{r}$ на комплексной плоскости и находятся в вершинах некоторого правильного n -угольника.

Примечания.

1. $\sqrt[n]{r}$ понимается как неотрицательный действительный корень из неотрицательного действительного числа (он только один).
2. По аналогии формально определяется произвольная действительная степень комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi}, \quad p \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad z^p = r^p (\cos p(\varphi + 2\pi k) + i \sin p(\varphi + 2\pi k)).$$

При этом, если $p = \frac{m}{n}$ – рациональное число, то z^p имеет n различных значений.

Если же p – иррациональное число, то z^p имеет бесчисленное множество значений.

Задача 2.2. Найти все различные корни 4-й степени из -1 .

Решение. Заметим, что $z = -1 = \cos \pi + i \sin \pi$, и по 2-й формуле Муавра:

$$\sqrt[4]{z} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Таким образом, различными корнями 4-й степени из 1 являются следующие 4 числа:

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i); & z_1 &= \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i); \\ z_2 &= \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i); & z_3 &= \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i). \end{aligned}$$

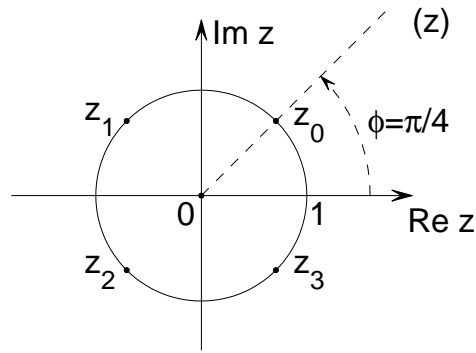


Рис. 2.2

Все они лежат на окружности радиуса 1 с центром в 0 и находятся в вершинах квадрата (рис. 2.2).

Задача 2.3. Даны 2 комплексных числа z_1, z_2 . Найти $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^9, \sqrt[3]{\frac{z_1}{z_2}}$, если $z_1 = i, z_2 = \sqrt{3} - i$.

Решение. Число $z = \frac{z_1}{z_2}$ можно вычислить так же, как в задаче 2.1. Но чтобы продемонстрировать использование показательной формы комплексного числа, поступим иначе. Представим оба числа в показательной форме.

Для числа $z_1 = i$: $x_1 = \operatorname{Re} z_1 = 0, y_1 = \operatorname{Im} z_1 = 1, r_1 = |z_1| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1, \varphi_1 = \pi/2$. Соответственно $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} = e^{i\pi/2}$.

Для числа $z_2 = \sqrt{3} - i$: $x_2 = \operatorname{Re} z_2 = \sqrt{3}, y_2 = \operatorname{Im} z_2 = -1, r_2 = |z_2| = \sqrt{3 + 1} = 2, \operatorname{tg} \varphi_2 = y_2/x_2 = -1/\sqrt{3}$, и поскольку $x_2 > 0, y_2 < 0$, то и $\cos \varphi > 0, \sin \varphi < 0$, и точка находится в 4-й четверти. Таким образом, $\varphi_2 = -\pi/6$. Соответственно, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} = 2e^{-i\pi/6}$.

Таким образом,

$$z = \frac{z_1}{z_2} = e^{i\pi/2} \frac{1}{2} e^{i\pi/6} = \frac{1}{2} e^{i\pi((1/2)+(1/6))} = \frac{1}{2} e^{i2\pi/3}.$$

По 1-й формуле Муавра:

$$z^9 = \left(\frac{1}{2}\right)^9 e^{9 \cdot i2\pi/3} = \frac{1}{512} e^{i6\pi} = \frac{1}{512} (\cos 6\pi + i \sin 6\pi) = \frac{1}{512}.$$

По 2-й формуле Муавра:

$$\sqrt[3]{z} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\cos \frac{(2\pi/3) + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{(2\pi/3) + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Таким образом, различными корнями 3-й степени являются следующие 3 числа:

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9} \right); \quad z_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\cos \frac{8\pi}{9} + i \sin \frac{8\pi}{9} \right);$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\cos \frac{14\pi}{9} + i \sin \frac{14\pi}{9} \right).$$

§2.3. Разложение действительного многочлена n -й степени на множители

Пусть $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{C}$, причем $a_n \neq 0$. Выражение

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

называется *комплексным многочленом n -й степени* или *многочленом n -й степени с комплексными коэффициентами*. Соответственно, $\deg P_n(x) = n$ называется *степенью многочлена $P_n(x)$* . Число z_0 , вообще говоря, комплексное, называется *корнем многочлена $P_n(x)$* , если $P_n(z_0) = 0$. Справедлива следующая теорема³¹.

Теорема 2.1. Многочлен $P_n(x)$ заведомо имеет хотя бы один корень. Более того, если z_1, \dots, z_k – все различные корни многочлена $P_n(x)$, то он представляется в виде

$$P_n(x) = a_n (x - z_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x - z_k)^{s_k},$$

где $s_1, \dots, s_k \in \mathbf{N}$, $s_1 + \dots + s_k = n$. При этом число s_j называется кратностью корня z_j , $j = \overline{1, k}$.

Многочлен $P_n(x)$, в котором $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, называется *действительным многочленом n -й степени* или *многочленом n -й степени с действительными коэффициентами*. Можно показать, что для всякого комплексного корня z_0 многочлена с действительными коэффициентами комплексно сопряженное число $\overline{z_0}$ тоже является корнем, причем той же кратности. Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ и $\overline{z_0} = x_0 - iy_0$ – два комплексно сопряженных корня такого многочлена, $y_0 \neq 0$. Рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} (x - z_0)(x - \overline{z_0}) &= ((x - x_0) - iy_0)((x - x_0) + iy_0) = (x - x_0)^2 + y_0^2 = \\ &= x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y_0^2 = x^2 + px + q, \quad \text{где } p = -2x_0, \quad q = x_0^2 + y_0^2. \end{aligned}$$

Соответственно дискриминант $D = p^2 - 4q = -4y_0^2 < 0$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2. Всякий действительный многочлен $P_n(x)$, $a_n \neq 0$, представляется в виде:

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x - x_k)^{s_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_lx + q_l)^{m_l},$$

где x_1, \dots, x_k – все различные действительные корни, многочлен 2-й степени $(x^2 + p_jx + q_j)$ имеет дискриминант $D < 0$ и представляется в виде $(x - z_j)(x - \overline{z_j})$, а $z_j, \overline{z_j}$, $j = \overline{1, l}$, – все пары различных комплексно сопряженных корней.

Задача 2.4. Разложить на множители многочлен $x^4 + 1$.

Решение. При решении задачи 2.2 были найдены корни этого многочлена z_0, \dots, z_3 . По теореме 2.2

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x - z_0)(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3) = \left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot \\ &\cdot \left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2} \right) \left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2} \right) = \end{aligned}$$

³¹См., например, Морозова В.Д. Введение в анализ. - М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000.- 408 с. (Сер. Математика в техническом университете; вып. I), §4.4.

$$= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

§2.4. Последовательности комплексных чисел

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие комплексное число $z_n = x_n + iy_n$, то говорят, что задана *последовательность комплексных чисел*

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots = \{z_n\}.$$

Комплексное число $z_0 = x_0 + iy_0$ называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$ (т.е. $z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}: \forall n > N$ выполняется неравенство $|z_n - z_0| < \varepsilon$.

Нетрудно показать, что $z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \Leftrightarrow x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и $y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Задача 2.5. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{n-1} + i \frac{5n^2 - n + 1}{7n^2 + 2n - 3} \right)$.

Решение. В данном случае

$$x_n = \frac{3n}{n-1} = \frac{3}{1-1/n} \rightarrow 3; \quad y_n = \frac{5n^2 - n + 1}{7n^2 + 2n - 3} = \frac{5 - 1/n + 1/n^2}{7 + 2/n - 3/n^2} \rightarrow \frac{5}{7}.$$

Таким образом, искомый предел равен $z_0 = 3 + i\frac{5}{7}$.

Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется *неограниченно возрастающей* или *бесконечно большой*, если $\forall E > 0 \exists N(E) \in \mathbf{N}: \forall n > N$ выполняется неравенство $|z_n| > E$. По определению считается, что всякая неограниченно возрастающая последовательность сходится к комплексному числу $z = \infty$ (то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$), которое называется *бесконечно удаленной точкой*.

Примечание. Отметим, что для $z = \infty$ (так же, как и для $z = 0$) $\text{Arg}z$ не имеет смысла, а $|z| = +\infty$. Кроме того, устанавливаются следующие соотношения:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty; \quad z \cdot \infty = \infty \text{ при } z \neq 0; \quad z + \infty = \infty; \quad \frac{z}{\infty} = 0 \text{ при } z \neq \infty.$$

Комплексная плоскость \mathbf{C} , дополненная $z = \infty$, то есть $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, называется *расширенной комплексной плоскостью* и обозначается $\overline{\mathbf{C}}$.

§2.5. Числовые ряды с комплексными членами

Для последовательности комплексных чисел $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ выражение вида

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

называется *числовым рядом с комплексными членами*.

Понятие частичной суммы ряда, сходимости ряда и его суммы определяется так же, как и для действительного случая, см. Часть 3, §3.1.

Очевидно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится \Leftrightarrow сходятся действительные числовые

ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *сходится абсолютно*, если сходится действительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$. Если же сам ряд сходится, а ряд из модулей расходится, то говорят, что ряд *сходится условно*. Так же, как и для действительного случая, из абсолютной сходимости следует сходимость ряда, см. Часть 3, §3.5.

Задача 2.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + i \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$.

Решение. Заметим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, следовательно, исходный ряд расходится.

Задача 2.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n^2}{n^2} + i \frac{\sin n^2}{n^2} \right)$.

Решение. Заметим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n^2}{n^2} + i \frac{\sin n^2}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $\alpha = 2 > 1$, следовательно, исходный ряд сходится и притом абсолютно.

§2.6. Множества на комплексной плоскости

Классификация множеств и классификация точек по отношению к множеству на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ вводится так же, как для пространства \mathbf{R}^2 (т.е. так же, как на действительной плоскости Oxy , см. Часть 3, §1.3). В частности, множество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется:

- *открытым*, если содержит каждую свою точку вместе с некоторой ее окрестностью³²;
- *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, расположенной целиком в множестве D (т.е. грубо говоря, множество не состоит из обособленных частей);
- *областью*, если является открытым и связным множеством.

Область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *односвязной*, если ее граница связна; иначе область называется *многосвязной*.

Задача 2.8. Описать множества на комплексной плоскости, заданные соотношениями 1) $0 < |z - i| < 5$; 2) $0 < |z - i| \leq 5$; 3) $|z - i| < 5$. Указать, какие из них являются областью, и если да, то односвязной или многосвязной.

Решение. Заметим, во-первых, что для двух комплексных чисел $z = x + iy$ и $z_0 = x_0 + iy_0$ модуль

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

представляет собой расстояние между соответствующими точками z и z_0 на комплексной плоскости. Таким образом, множество 1) представляет собой открытый круг радиуса $r = 5$ с выколотым центром в точке $z_0 = i$ (рис. 2.3).

³²Так же, как для функций двух переменных, под *окрестностью точки* понимается некоторый открытый круг с центром в этой точке.

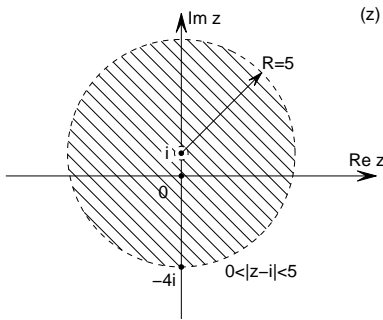


Рис. 2.3

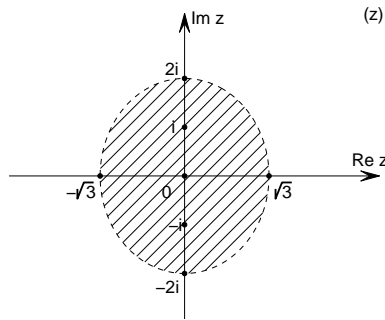


Рис. 2.4

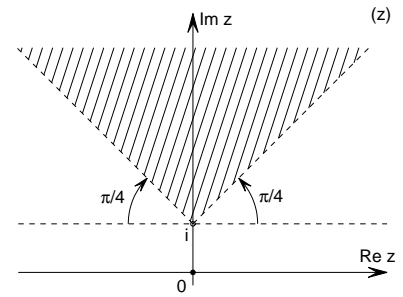


Рис. 2.5

Это открытое связное множество, то есть область. Ее граница представляет собой объединение окружности $|z - i| = 5$ и точки $z_0 = i$, то есть не является связным множеством (состоит из двух обособленных частей). Поэтому данная область не является односвязной (является двухсвязной областью). Аналогично множество 2) представляет собой замкнутый круг с выколотым центром. Это множество связное, но не открытое (никакая окрестность точки, лежащей на окружности $|z - i| = 5$, не содержится в данном множестве), то есть областью не является. Множество 3) представляет собой открытый круг с центром в точке $z_0 = i$ радиуса $r = 5$. Это открытое и связное множество, то есть область. Его граница – окружность $|z - i| = 5$ – связное множество. Поэтому данная область является односвязной.

Задача 2.9. Указать на комплексной плоскости множества точек, заданных соотношениями 1) $|z - i| + |z + i| < 4$; 2) $\frac{\pi}{4} < \arg(z - i) < \frac{3\pi}{4}$.

Решение. 1) Рассмотрим, прежде всего, линию, определяемую уравнением $|z - i| + |z + i| = 4$. Эта линия представляет собой геометрическое место всех точек на комплексной плоскости, для которых сумма расстояний до двух точек $z_1 = i$ и $z_2 = -i$ постоянна и равна 4. Как известно из аналитической геометрии, геометрическое место точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 постоянна и равна величине $2a$, большей, чем расстояние между F_1 и F_2 , представляет собой эллипс с фокусами F_1 и F_2 и большой полуосью a . При этом, если расстояние между фокусами равно $2c$, малая полуось b определяется из уравнения $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, то есть $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Поэтому данная линия представляет собой эллипс с фокусами $z_1 = i$ и $z_2 = -i$ и большой полуосью $a = 2$. Расстояние $|z_1 - z_2| = |2i| = 2$, поэтому $c = 1$. Таким образом, $b = \sqrt{3}$. Указанный эллипс разделяет всю комплексную плоскость на две области – внутренность и внешность эллипса. Каждый из фокусов, например, точка $z_1 = i$, удовлетворяет неравенству, следовательно, данное неравенство определяет внутренность эллипса (рис. 2.4).

2) Сделаем замену $z - i = w$. Этой замене соответствует параллельный перенос системы координат в точку $w = 0$, то есть $z = i$. При этом на комплексной плоскости (w) данное множество определяется соотношением: $\frac{\pi}{4} < \arg w < \frac{3\pi}{4}$, и таким образом на плоскости (w) оно представляет из себя

внутренность угла с вершиной в точке $w = 0$ раствора $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, симметричного относительно положительной части мнимой оси $\text{Im} w$. Соответствен-

но на комплексной плоскости (z) оно представляет собой внутренность угла с вершиной в точке $z = i$ раствора $\frac{\pi}{2}$, симметричного относительно положительной части мнимой оси $\text{Im}z$ (рис. 2.5).

3. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§3.1. Понятие функции комплексного переменного

Пусть $D \subset \mathbb{C}$. Если каждому $z \in D$ по некоторому закону f поставлено в соответствие комплексное число $w \in \mathbb{C}$, то говорят, что на множестве D определена *функция комплексного переменного* $w = f(z)$. При этом множество D называется *областью определения* функции комплексного переменного $w = f(z)$, а множество E всех $w \in \mathbb{C}$, для которых существует $z \in D$ такое, что $w = f(z)$, называется *множеством значений* этой функции.

Подобно тому, как для вещественной функции одного действительного переменного $y = y(x)$ область определения и множество значений не изображаются обе на одной числовой оси, хотя являются числовыми множествами, а изображаются фактически на двух ее экземплярах – оси Ox и оси Oy , область определения D и множество значений E функции комплексного переменного $w = f(z)$ изображаются соответственно на двух разных экземплярах комплексной плоскости, а именно, D – на комплексной плоскости (z), а E – на комплексной плоскости (w). При этом говорят, что функция f *осуществляет отображение* множества D , расположенного в комплексной плоскости (z), на множество E , расположенное в комплексной плоскости (w). Этот факт обозначают следующим образом: $f : D \xrightarrow{\text{на}} E$ (читается: " f действует из D на E "). Соответственно, для всякого множества G , расположенного в комплексной плоскости (w) и содержащего множество E , говорят, что функция f *осуществляет отображение* множества D в множество G . Обозначают этот факт так: $f : D \rightarrow G$ (читается: " f действует из D в G ").

Если $z = x + iy$ и $w = u + iv$, то функция комплексного переменного $w = f(z)$ может быть представлена как

$$w = f(z) = u + iv = u(x, y) + iv(x, y),$$

где $u(x, y) = \text{Re}f(z)$, $v(x, y) = \text{Im}f(z)$ – действительные функции двух переменных x и y .

Для каждой точки $z_0 = x_0 + iy_0$ на комплексной плоскости (z), взятой из области определения D , соответствующее значение функции $w_0 = f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$ представляет собой точку из множества E на комплексной плоскости (w). Точка w_0 называется *образом точки* z_0 при отображении f . И аналогично, для любого подмножества $D' \subset D$ подмножество $E' \subset E$ всех точек $w_0 \in E$, для которых существует точка $z_0 \in D'$ такая, что $w_0 = f(z_0)$, называется *образом множества* D' при отображении f .

Задача 3.1. Найти действительную и мнимую части функции комплексного переменного $f(z) = z^2 + 2i\bar{z}$.

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + iy)^2 + 2i(x - iy) = x^2 + 2ixy + i^2y^2 + 2ix - 2i^2y = \\ &= x^2 - y^2 + 2y + i2(xy + x) = u(x, y) + iv(x, y), \end{aligned}$$

откуда получаем:

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 2y, \quad v(x, y) = 2x(y + 1).$$

Задача 3.2. Найти образы указанных точек при отображении $f = z^3 - i$:
1) $z_0 = 1 - i$; 2) $z_0 = 2 + 3i$.

Решение. 1) $f(z_0) = (1-i)^3 - i = 1 - 3i + 3i^2 - i^3 - i = 1 - 3i - 3 + i - i = -2 - 3i$.

2) $f(z_0) = f(2 + 3i) = (2 + 3i)^3 - i = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 3i + 3 \cdot 2 \cdot 9i^2 + (3i)^3 - i$, то есть $f(z_0) = 8 + 36i - 54 - 27i - i = -46 + 8i$.

Задача 3.3. Найти образы указанных далее множеств при отображении $w = \frac{1+z}{1-z}$: 1) $\operatorname{Re} z = 0$; 2) $|z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi$; 3) $|z| < 1$.

Решение. 1) Пусть $z = iy$. Тогда множество определяется уравнением $x = 0$, или $z = iy, y \in \mathbf{R}$. Рассмотрим

$$w = f(iy) = \frac{1+iy}{1-iy} = \frac{(1+iy)^2}{1+y^2} = \frac{1-y^2}{1+y^2} + i \frac{2y}{1+y^2} = u + iv.$$

Соответственно, образом множества при данном отображении является линия на комплексной плоскости (w), определяемая параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} u = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \\ v = \frac{2y}{1+y^2}. \end{cases} \quad y \in \mathbf{R}.$$

Перейдем к другому параметру $t \in (-\pi; \pi)$: $y = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$. Тогда ту же линию можно задать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} u = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} = \cos t, \\ v = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} = \sin t. \end{cases} \quad t \in (-\pi; \pi).$$

Таким образом, линия представляет собой окружность $u^2 + v^2 = 1$, причем точка окружности $(-1; 0)$ соответствует $t = \pm \pi$, или $y = \pm \infty$. Заметим, кроме того, что $w(\pm i) = \pm i$, и, таким образом, точки $z = \pm i$ остаются неподвижными при данном отображении. Поскольку точка $z = 0$ переходит в точку $w = w(0) = 1$, то отрезок $[-i; i]$ переходит в правую полуокружность. А так как точка $w(2i) = -\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$ расположена в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$, то луч $\arg(z - i) = \frac{\pi}{2}$, то есть луч, исходящий из точки $z = i$ в положительном направлении мнимой оси, переходит в четверть окружности $|w| = 1, \operatorname{Im} w > 0, \operatorname{Re} w < 0$. Аналогично луч, исходящий из точки $z = -i$ в противоположном направлении, переходит в оставшуюся четверть окружности (рис. 3.1).

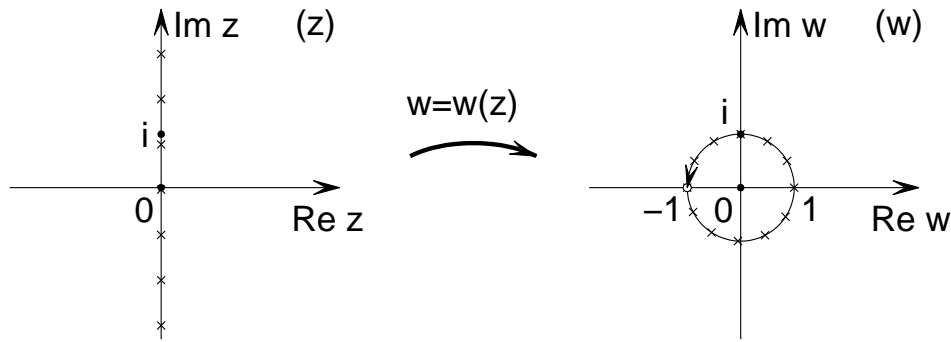


Рис. 3.1

2) Данное множество представляет собой верхнюю полуокружность с центром в 0 на комплексной плоскости (z) ($z = x + iy$). Эта полуокружность задается параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases} \quad t \in [0; \pi].$$

Найдем образы точек этой полуокружности:

$$\begin{aligned} w &= f(\cos t + i \sin t) = \frac{1 + \cos t + i \sin t}{1 - \cos t - i \sin t} = \\ &= \frac{(1 + \cos t + i \sin t)(1 - \cos t + i \sin t)}{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \\ &= \frac{(1 - \cos^2 t) - \sin^2 t + i \sin t(1 + \cos t + 1 - \cos t)}{2 - 2 \cos t} = i \cdot \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \\ &= i \cdot \frac{2 \sin(t/2) \cos(t/2)}{2 \sin^2(t/2)} = i \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = iv, \quad v \in [+\infty; 0] \quad \text{при } t \in [0; \pi]. \end{aligned}$$

Соответственно, образом указанной полуокружности при данном отображении является множество всех точек $w = u + iv$ комплексной плоскости (w), для которых $u = 0$, $v \geq 0$, то есть неотрицательная часть мнимой полуоси.

3) Данное множество представляет собой открытый круг радиуса 1 с центром в 0 на комплексной плоскости. Аналогично п.2) показываем, что граница этого круга, то есть окружность $|z| = 1$, переходит при заданном отображении в мнимую ось. Она разделяет всю плоскость на две полуплоскости – правую ($\operatorname{Re} w > 0$) и левую ($\operatorname{Re} w < 0$). Заметим, что 0 принадлежит кругу, и $w(0) = 1 > 0$. Поэтому образом круга является правая полуплоскость – множество всех точек $w = u + iv$ на комплексной плоскости (w), для которых $u > 0$.

§3.2. Основные элементарные функции комплексного переменного

Следующие функции называются *основными элементарными*:

1. Дробно-рациональная функция

$$\frac{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0}, \quad n, m \in \mathbf{N},$$

в частности,

а) линейная функция

$$az + b, \quad a, b \in \mathbf{C}, \quad a \neq 0;$$

б) степенная функция

$$z^n, \quad n \in \mathbf{N};$$

в) дробно-линейная функция

$$\frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{C}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0.$$

2. Показательная функция

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

3. Тригонометрические функции

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Примечания.

1. По определению,

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y}e^{ix} - e^ye^{-ix}}{2i} = \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)}{2i} = u(x, y) + iv(x, y), \end{aligned}$$

где

$$u(x, y) = \sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \sin x \operatorname{ch} y, \quad v(x, y) = \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \cos x \operatorname{sh} y,$$

откуда получаем:

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y. \quad (3.1)$$

Аналогично доказывается, что

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y. \quad (3.2)$$

2. По формулам (3.1) и (3.2),

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} z &= \frac{\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y}{\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y} = \\ &= \frac{(\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y)(\cos x \operatorname{ch} y + i \sin x \operatorname{sh} y)}{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \\ &= \frac{(\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y) \sin x \cos x + i(\cos^2 x + \sin^2 x) \operatorname{ch} y \operatorname{sh} y}{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y}, \end{aligned}$$

то есть

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y}.$$

По формулам двойного аргумента получаем:

$$\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y = \frac{1 + \cos 2x}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} 2y + 1}{2} + \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} 2y - 1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}(1 + \cos 2x \operatorname{ch} 2y + 2 \cos 2x + 2 \operatorname{ch} 2y - 1 - \cos 2x \operatorname{ch} 2y) = \frac{1}{2}(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y).$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(x + iy) = \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}. \quad (3.3)$$

Аналогично доказывается, что

$$\operatorname{ctg} z = \operatorname{ctg}(x + iy) = \frac{\sin 2x - i \operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}. \quad (3.4)$$

3. Как видно из доказательства формулы (3.3),

$$|\cos z|^2 = \cos z \cdot \overline{\cos z} = \frac{1}{2}(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y),$$

и таким образом, в отличие от действительного случая, $|\cos z|$ может принимать сколь угодно большие значения. Заметим, что $\operatorname{ch} 2y > 1$ при $y \neq 0$, $\operatorname{ch} 0 = 1$. При этом $|\cos 2x| \leq 1$. Поэтому $|\cos z| = 0$ только в том случае, когда $y = 0$, $\cos 2x = -1$, то есть при $2x = \pi + 2\pi k$, или $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Аналогичные рассуждения можно провести для $|\sin z|$.

4. Гиперболические функции

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Примечание. Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями выражается следующими очевидными формулами:

$$\operatorname{ch} iz = \cos z, \quad \cos iz = \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{sh} iz = i \sin z, \quad \sin iz = i \operatorname{sh} z.$$

5. Логарифмическая функция

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\operatorname{arg} z + 2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Данная функция является многозначной. Наряду с ней рассматривается однозначная функция

$$\ln z = \ln |z| + i \operatorname{arg} z,$$

которая называется логарифмической функцией в смысле главного значения.

Примечания.

1. Пусть $z = re^{i\varphi}$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{Ln} z} &= e^{\ln r + i(\varphi + 2k\pi)} = e^{\ln r} \cdot e^{i(\varphi + 2k\pi)} = \\ &= r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi} = z. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $z = \operatorname{Ln} w$ представляет все множество решений уравнения $w = e^z$, то есть является обратной по отношению к показательной функции.

2. Через суперпозицию показательной и логарифмической функции определяются:

а) общая степенная функция $z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$, $a \in \mathbf{C}$;

б) общая показательная функция $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$, $a \in \mathbf{C}$.

6. Обратные тригонометрические и гиперболические функции: $\text{Arcsin}z$, $\text{Arccos}z$, $\text{Arctg}z$, $\text{Arcctg}z$, $\text{Arsh}z$, $\text{Arch}z$, $\text{Arth}z$, $\text{Arcth}z$.

Примечание. Указанные функции можно выразить в виде суперпозиции предыдущих функций.

Задача 3.4. Найти формулу, выражающую $\text{Arcsin}z$.

Решение. Пусть $w = \text{Arcsin}z$, то есть

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}.$$

Положим $x = e^{iw}$, $b = iz$. Тогда получаем уравнение:

$$x^2 - 2bx - 1 = 0, \quad \text{откуда } x = b + \sqrt{b^2 + 1}$$

(здесь $\sqrt{b^2 + 1}$ — это комплексный корень, то есть 2-значная функция комплексного переменного, поэтому \pm перед ним ставить не нужно), и, таким образом,

$$w = \frac{1}{i} \text{Ln}(b + \sqrt{1 + b^2}), \quad \text{то есть } w = -i \text{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

§3.3. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Определение 3.1. Число $w_0 \neq \infty$ называется *пределом функции* $w = f(z)$ при $z \rightarrow z_0$ ($\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0 : \quad \forall z \neq z_0, |z - z_0| < \delta, \quad \text{имеем } |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Примечание. Здесь предполагается, что функция $f(z)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки z_0 . Если это не так, но z_0 является предельной точкой области определения D функции f , то можно дать аналогичное определение *предела функции по множеству* D : $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0 : \quad \forall z \in D, z \neq z_0, |z - z_0| < \delta, \quad \text{имеем } |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Приведем равносильное определение предела функции комплексного переменного на языке последовательностей.

Определение 3.2. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$, если для любой последовательности $\{z_n\} \rightarrow z_0$, $z_n \neq z_0$, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w_0$.

Примечание. Если $w_0 = u_0 + iv_0$, $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

Определение 3.3. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, если

$$\forall R > 0 \quad \exists \delta = \delta(R, z_0) > 0 : \quad \forall z \neq z_0, |z - z_0| < \delta, \quad \text{имеем } |f(z)| > R.$$

Равносильное определение:

Определение 3.4. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, если для любой последовательности $\{z_n\} \rightarrow z_0$, $z_n \neq z_0$, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty$.

Далее, функция $w = f(z)$ называется *непрерывной в точке z_0* , если она определена в этой точке и в некоторой ее окрестности³³, и $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Примечание. Если $w_0 = u_0 + iv_0$, $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то функция $w = f(z)$ непрерывна в точке z_0 тогда и только тогда, когда функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точке $(x_0; y_0)$, см. Часть 3, §1.2.

Таким образом, все свойства непрерывных функций двух переменных переносятся на функции комплексной переменной.

Задача 3.5. Вычислить $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + iz + 2}{z - i}$.

Решение.

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + iz + 2}{z - i} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z - i)(z + 2i)}{z - i} = \lim_{z \rightarrow i} (z + 2i) = 3i.$$

В последнем равенстве используется тот факт, что $z + 2i = x + iy + 2i = x + i(y + 2) = u(x, y) + iv(x, y)$, где функции $u(x, y) = x$ и $v(x, y) = y + 2$ непрерывны на всей плоскости, а следовательно, и функция $f(z) = z + 2i$ непрерывна.

Задача 3.6. Исследовать на непрерывность функцию $w = f(z) = e^{\bar{z}}$.

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$w = e^{x-iy} = e^x e^{-iy} = e^x (\cos y - i \sin y) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где функции $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = -e^x \sin y$ непрерывны на всей плоскости, следовательно, функция $f(z) = e^{\bar{z}}$ непрерывна на всей комплексной плоскости.

Задача 3.7. Исследовать на непрерывность функцию $w = f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|}$.

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$w = \frac{x - iy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = u(x, y) + iv(x, y),$$

где

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Заметим, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны всюду, кроме начала координат $(x; y) = (0; 0)$. В точке $(0; 0)$ они не определены, следовательно, разрывны. Более того,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} v(x, y) \text{ не существуют.}$$

³³Если $z_0 \in D$ является предельной точкой для области определения D функции f , и $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, где предел понимается как предел функции по множеству D , то говорят о *непрерывности* функции f в точке z_0 по множеству D .

Действительно, например, для функции $u(x, y)$ можно указать 2 пары последовательностей: $x_n = 1/n$, $y_n = 0$ и $x'_n = -1/n$, $y'_n = 0$, сходящихся к 0, и таких, что последовательности соответствующих значений функции $u(x_n, y_n) \rightarrow 1$, $u(x'_n, y'_n) \rightarrow -1$ стремятся к разным числам. Следовательно, предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y)$$

не существует (ни конечный, ни бесконечный). Таким образом, $z = 0$ является точкой разрыва второго рода исходной функции³⁴.

§3.4. Аналитические функции. Условия Коши-Римана

Если функция $w = f(z)$ определена в области $D \subset \mathbb{C}$, и в точке $z \in D$ существует

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

то он называется *производной функции $f(z)$ в точке z* и обозначается $f'(z)$

или $\frac{df(z)}{dz}$.

Если для $z \in D \exists f'(z)$, то говорят, что функция $f(z)$ *дифференцируема в точке z* . Если функция дифференцируема в каждой точке области D , то говорят, что она является *аналитической в области D* . Функция называется *аналитической в точке z_0* , если она аналитична в некоторой окрестности этой точки. Если D – область определения функции $f(z)$, то всякая предельная по отношению к множеству D точка, в которой нарушается аналитичность функции $f(z)$, называется *особой точкой* функции $f(z)$.

Для того, чтобы функция $w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ была аналитической в области D , необходимо и достаточно, чтобы существовали непрерывные частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в этой области и выполнялись *условия Коши-Римана* (*CR-условия*, см., например, [1, §6.3, теоремы 1-3]):

$$u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x,$$

или в полярных координатах ($z = re^{i\varphi}$):

$$u'_r = \frac{1}{r}v'_\varphi, \quad v'_r = -\frac{1}{r}u'_\varphi.$$

Соответственно, производная выражается по формулам:

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y = u'_x - iu'_y = v'_y + iv'_x$$

или

$$f'(z) = \frac{r}{z}(u'_r + iv'_r) = \frac{1}{z}(v'_\varphi - iu'_\varphi).$$

³⁴В теории функций многих переменных точку разрыва, в которой предел функции не существует, ни конечный, ни бесконечный, называют существенно особой точкой разрыва. Мы намеренно избегаем здесь этого термина во избежание путаницы с понятием *особой точки* функции комплексного переменного – см. ниже, с.69.

Правила дифференцирования функций действительной переменной переносятся на функции комплексной переменной и доказываются аналогично. В частности, справедливы свойства:

1. Если $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в области D , то функции $f(z) \pm g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$, а также $f(z)/g(z)$ при условии, что $g(z) \neq 0$, аналитичны в области D , и при этом справедливы формулы:

$$\begin{aligned} (f(z) \pm g(z))' &= f'(z) \pm g'(z), \\ (f(z) \cdot g(z))' &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \\ \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' &= \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}. \end{aligned}$$

2. Если функция $f(z)$ аналитична в области D , а функция $\varphi(w)$ аналитична в области $G = \{f(z) | z \in D\}$, то их суперпозиция $F(z) = \varphi(f(z))$ аналитична в области D и справедлива формула:

$$F'(z) = \varphi'(f(z))f'(z).$$

3. Если функция $w = f(z)$ аналитична в области D и $f'(z) \neq 0$ в окрестности точки $z_0 \in D$, то в окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ определена обратная функция $z = f^{-1}(w_0)$, причем она тоже аналитична и справедлива формула

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Примечание. Формулы производных элементарных функций комплексного переменного аналогичны соответствующим формулам производных функций действительного переменного.

Задача 3.8. Доказать, что функция $f(z) = e^{3z}$ аналитична и найти $f'(z)$.

Решение. По определению $e^{3z} = e^{3(x+iy)} = e^{3x}(\cos 3y + i \sin 3y)$. Поэтому $u(x, y) = e^{3x} \cos 3y$, $v(x, y) = e^{3x} \sin 3y$. Таким образом,

$$u'_x = 3e^{3x} \cos 3y = v'_y, \quad u'_y = -3e^{3x} \sin 3y = -v'_x,$$

то есть CR-условия выполнены на всей комплексной плоскости. Соответственно

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = 3e^{3x}(\cos 3y + i \sin 3y) = 3e^{3z}.$$

Задача 3.9. Доказать, что функция $f(z) = z^2$ аналитична и найти $f'(z)$.

Решение. Пусть $z = re^{i\varphi}$. Тогда $f(z) = z^2 = r^2 e^{i2\varphi} = r^2 [\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi]$, и $u(r, \varphi) = r^2 \cos 2\varphi$, $v(r, \varphi) = r^2 \sin 2\varphi$, откуда получаем:

$$u'_r = 2r \cos 2\varphi, \quad v'_r = 2r \sin 2\varphi, \quad u'_\varphi = -2r^2 \sin 2\varphi, \quad v'_\varphi = 2r^2 \cos 2\varphi.$$

Таким образом,

$$u'_r = \frac{1}{r}v'_\varphi, \quad v'_r = -\frac{1}{r}u'_\varphi,$$

то есть выполнены CR-условия в полярных координатах. Соответственно функция аналитична и

$$f'(z) = \frac{r}{z} (u'_r + iv'_r) = \frac{r}{z} 2r(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) = 2 \frac{r^2 e^{i2\varphi}}{z} = 2 \frac{z^2}{z} = 2z.$$

Задача 3.10. Доказать, что функция $f(z) = \ln z$ аналитична во всей комплексной плоскости, кроме точки $z = 0$, и найти $f'(z)$.

Решение. Пусть $z = re^{i\varphi}$. По определению $\ln z = \ln r + i\varphi$. Поэтому $u(r, \varphi) = \ln r$, $v(r, \varphi) = \varphi$, откуда получаем при $r \neq 0$:

$$u'_r = \frac{1}{r}, \quad v'_r = 0, \quad u'_\varphi = 0, \quad v'_\varphi = 1, \quad \text{то есть} \quad u'_r = \frac{1}{r} v'_\varphi, \quad v'_r = -\frac{1}{r} u'_\varphi.$$

Таким образом, выполнены CR-условия в полярных координатах. Соответственно функция аналитична и

$$f'(z) = \frac{r}{z} (u'_r + iv'_r) = \frac{r}{z} \left(\frac{1}{r} + i0 \right) = \frac{1}{z}.$$

Задача 3.11. Доказать, что функция $f(z) = \sin z$ аналитична во всей комплексной плоскости, и найти $f'(z)$. Задачу решить двумя способами: с помощью CR-условий и с помощью свойств аналитических функций.

Решение. 1) По формуле (3.1) $\sin z = u(x, y) + iv(x, y)$, где

$$u(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y, \quad v(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y,$$

откуда получаем:

$$u'_x = \cos x \operatorname{ch} y = v'_y, \quad u'_y = \sin x \operatorname{sh} y = -v'_x,$$

то есть CR-условия выполнены на всей комплексной плоскости. Соответственно

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$

и по формуле (3.2), $f'(z) = \cos z$.

2) По определению

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

и по правилам дифференцирования аналитических функций получаем, что функция аналитическая как суперпозиция аналитических функций и справедливы равенства

$$f'(z) = \frac{1}{2i} (ie^{iz} + ie^{-iz}) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

Задача 3.12. Найти область аналитичности функции $f(z) = \operatorname{tg} z$ и вычислить $f'(z)$. Задачу решить двумя способами: с помощью CR-условий и с помощью свойств аналитических функций.

Решение. 1) По формуле (3.3) $\operatorname{tg} z = u(x, y) + iv(x, y)$, где

$$u(x, y) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}, \quad v(x, y) = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y},$$

откуда получаем:

$$u'_x = \frac{2 \cos 2x (\cos 2x + \operatorname{ch} 2y) + 2 \sin^2 2x}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2} = \frac{2(\operatorname{ch} 2y \cos 2x + 1)}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2},$$

$$u'_y = -\frac{2 \operatorname{sh} 2y \sin 2x}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2},$$

$$v'_x = \frac{2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2},$$

$$v'_y = \frac{2 \operatorname{ch} 2y (\cos 2x + \operatorname{ch} 2y) - 2 \operatorname{sh}^2 2y}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2} = \frac{2(\operatorname{ch} 2y \cos 2x + 1)}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2},$$

то есть CR-условия выполнены на всей комплексной плоскости, кроме точек, в которых $\cos 2x + \operatorname{ch} 2y = 0$, то есть $y = 0$, $2x = \pi + 2\pi k$, или $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Соответственно

$$f'(z) = u'_x + i v'_x = \frac{2(\operatorname{ch} 2y \cos 2x + 1) + i 2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 z} &= \frac{(\overline{\cos z})^2}{|\cos z|^4} = \frac{4(\cos x \operatorname{ch} y + i \sin x \operatorname{sh} y)^2}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2} = \\ &= \frac{4(\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y) + 8i \cos x \operatorname{ch} y \sin x \operatorname{sh} y}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2} = \\ &= \frac{2(\operatorname{ch} 2y \cos 2x + 1) + i 2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, $f'(z) = \frac{1}{\cos^2 z}$.

2) По определению

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

и по правилам дифференцирования аналитических функций получаем, что в области тех z , для которых $|\cos z| \neq 0$, то есть при $z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, функция является аналитической как частное аналитических функций и справедливы равенства

$$f'(z) = \frac{(\sin z)' \cos z - \sin z (\cos z)'}{\cos^2 z} = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z}.$$

Рассмотрим

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} (\{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}\} - \{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}\}) = \frac{2+2}{4} = 1.$$

Таким образом, $f'(z) = \frac{1}{\cos^2 z}$.

Задача 3.13. Найти область аналитичности функции $f(z) = (\bar{z})^2$.

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда $f(z) = (x - iy)^2 = x^2 - 2ixy - y^2 = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = -2xy$. При этом

$$u'_x = 2x, \quad v'_y = -2x,$$

то есть $u'_x \neq v'_y$ ни при каком z , если $x \neq 0$. Аналогично, $u'_y \neq -v'_x$ при $y \neq 0$. Таким образом, CR-условие нигде не выполнено, кроме $z = 0$, и $f(z)$ не является аналитической ни в одной точке комплексной плоскости.

§3.5. Интеграл от функции комплексного переменного

Пусть $\gamma \subset \mathbf{C}$ – дуга кусочно гладкой кривой с выбранным направлением обхода, а $f(z)$ – функция комплексного переменного, определенная и ограниченная на дуге γ . Разобьем дугу γ точками $z_k \in \gamma$, $k = \overline{0, n}$, так что переход от z_{k-1} к z_k соответствует направлению обхода. Положим $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $k = \overline{1, n}$. Назовем число $\lambda = \max_{k=\overline{1, n}} |\Delta z_k|$ *мелкостью данного разбиения дуги γ* .

На каждой из частичных дуг $z_{k-1}z_k$ выберем произвольно точку c_k , $k = \overline{1, n}$ (рис. 3.2 на с.74). Составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta z_k.$$

Назовем ее *интегральной суммой функции $f(z)$ по дуге γ* , отвечающей данному разбиению дуги и данному выбору средних точек c_k . Если существует конечный $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I \in \mathbf{C}$, не зависящий ни от способа разбиения дуги, ни от

выбора средних точек c_k , то говорят, что *функция $f(z)$ интегрируема вдоль дуги γ* , а само число I называется *интегралом функции $f(z)$ по дуге γ* и обозначается следующим образом

$$I = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

При этом γ называется *контуром интегрирования*, а $f(z)$ – *подынтегральной функцией*.

Примечания.

1. Если $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то $dz = dx + idy$ и

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \{u(x, y) + iv(x, y)\} (dx + idy),$$

или

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy, \quad (3.5)$$

где справа стоят обычные криволинейные интегралы 2-го рода от функций двух действительных переменных. Отсюда вытекает, что если функция $f(z)$ непрерывна вдоль дуги γ , то она интегрируема вдоль нее.

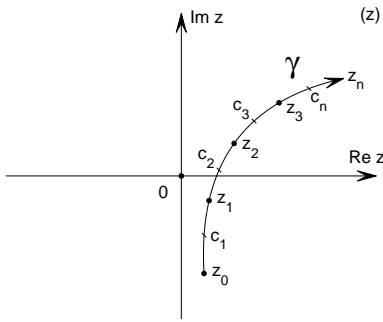


Рис. 3.2

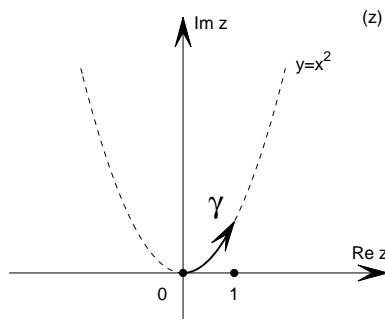


Рис. 3.3

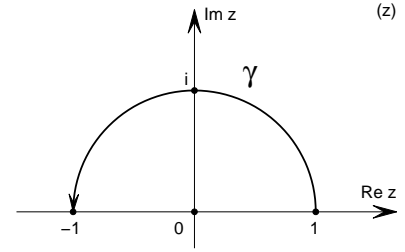


Рис. 3.4

2. Если дуга γ задана параметрическим уравнением

$$z = z(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

(при $z(t) = x(t) + iy(t)$ можно считать, что γ – дуга на плоскости Oxy , заданная параметрическими уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$), причем начальной и конечной точкам дуги соответствуют значения параметра $t = \alpha$ и $t = \beta$, то

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt. \quad (3.6)$$

Задача 3.14. Вычислить (рис. 3.3)

$$\int_{\gamma} \operatorname{Im}(\bar{z})^2 dz, \quad \gamma = \{z = x + iy \mid y = x^2, \quad x \in [0, 1]\}.$$

Решение. Заметим, что $(\bar{z})^2 = (x - iy)^2 = x^2 - 2ixy - y^2$, следовательно, $\operatorname{Im}(\bar{z})^2 = -2xy$. Вдоль дуги γ имеем: $\operatorname{Im}(\bar{z})^2 = -2x \cdot x^2 = -2x^3$, $dz = d(x + iy) = d(x + ix^2) = dx + 2ixdx$, и таким образом, переходя к интегралу по параметру $x \in [0, 1]$, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \operatorname{Im}(\bar{z})^2 dz &= \int_0^1 (-2x^3)(dx + 2ixdx) = \\ &= -2 \int_0^1 x^3 dx - 4i \int_0^1 x^4 dx = -\frac{x^4}{2} - i\frac{4}{5}x^5 \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} - i\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Задача 3.15. Вычислить (рис. 3.4 на с.74)

$$\int_{\gamma} (2z + 1)\bar{z} dz, \quad \gamma = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1, \quad 0 \leq \arg z \leq \pi\}.$$

Решение. Заметим, что дуга γ задается параметрическими уравнениями

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad \text{или} \quad z = e^{it}, \quad t \in [0, \pi]$$

и, следовательно, $dz = ie^{it}dt$, $\bar{z} = x - iy = \cos t - i \sin t = e^{-it}$. Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (2z + 1)\bar{z}dz &= \int_0^{\pi} (2e^{it} + 1)e^{-it}ie^{it}dt = i \int_0^{\pi} (2e^{it} + 1)dt = i \left(\frac{2}{i}e^{it} + t \right) \Big|_0^{\pi} = \\ &= i \left(\frac{2}{i}e^{i\pi} - \frac{2}{i} + \pi \right) = 2 \cos \pi + 2i \sin \pi - 2 + i\pi = -4 + i\pi. \end{aligned}$$

Задача 3.16. Вычислить (рис. 3.5)

$$\int_{\gamma} (2z + 1)\bar{z}dz, \quad \gamma = \{z \in \mathbf{C} \mid \arg z = \frac{3\pi}{4}, \quad 1 \leq |z| \leq 3\}.$$

Решение. Заметим, что дуга γ задается параметрическим уравнением:

$$z = te^{i3\pi/4} = t \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right), \quad t \in [1, 3].$$

Действительно, представляя z в показательной форме $z = re^{i\varphi}$, получаем, что вдоль дуги γ : $\varphi = \arg z = \frac{3\pi}{4}$, $r = |z| \in [1, 3]$. Поэтому $dz = e^{i3\pi/4}dt$, $\bar{z} = te^{-i3\pi/4}$, $t = r \in [1, 3]$. Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (2z + 1)\bar{z}dz &= \int_1^3 (2te^{i3\pi/4} + 1)te^{-i3\pi/4}e^{i3\pi/4}dt = \int_1^3 (2t^2e^{i3\pi/4} + t)dt = \\ &= \left(\frac{2}{3}t^3e^{i3\pi/4} + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^3 = \left(\frac{2}{3}e^{i3\pi/4}(27 - 1) + \frac{1}{2}(9 - 1) \right) = \frac{52}{3\sqrt{2}}(-1 + i) + 4. \end{aligned}$$

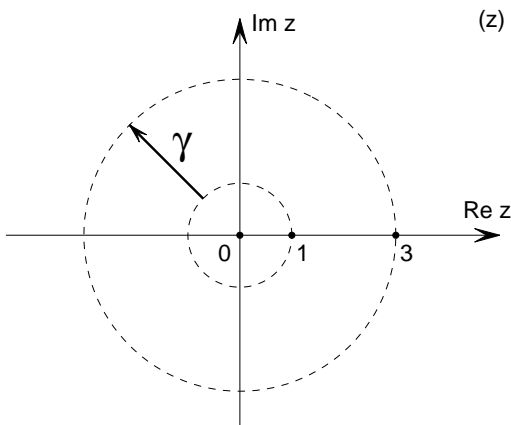


Рис. 3.5

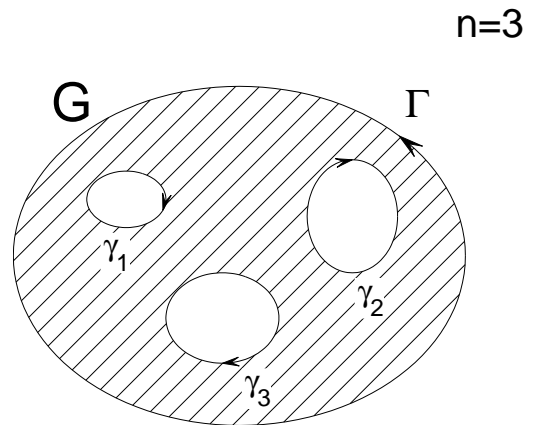


Рис. 3.6

§3.6. Теорема Коши. Интегральная формула Коши

Далее для замкнутого кусочно гладкого контура $\gamma \subset \mathbf{C}$ ограниченную им область будем обозначать $\text{int}\gamma$ и называть ее *внутренностью контура* γ . Соответственно, область $\mathbf{C} \setminus \overline{\text{int}\gamma}$ будем называть *внешностью контура* γ и обозначать $\text{ext}\gamma$.

Теорема Коши для односвязной области (см., например, [1, §6.6, теоремы 1,2]). Если $G \subset \mathbf{C}$ – односвязная область и функция $f(z)$ аналитична в G , то для любого кусочно гладкого замкнутого контура $\gamma \subset G$

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0. \quad (3.7)$$

Если, кроме того, $f(z)$ непрерывна в замыкании \overline{G} , то

$$\oint_{\partial G} f(z)dz = 0, \quad (3.8)$$

где ∂G – граница области G .

Примечание. Формула (3.7) останется справедливой и для многосвязной области при том, однако, условии, что $\text{int}\gamma \subset G$. Действительно, чтобы убедиться в этом, достаточно взять в качестве области G односвязную область $D = \text{int}\gamma$ – тогда функция $f(z)$ аналитична в D и непрерывна в замыкании \overline{D} , причем $\partial D = \gamma$ – и воспользоваться формулой (3.8).

Пусть $G \subset \mathbf{C}$ – $(n+1)$ -связная область. Это означает, что $\partial G = \Gamma \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$, где Γ – внешний замкнутый контур, а $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ – внутренние, не пересекающиеся и не вложенные друг в друга замкнутые контуры. Положительным направлением обхода ∂G условимся называть такое, при котором область G остается слева от наблюдателя,двигающегося в этом направлении. Это соответствует положительному направлению обхода контура Γ и отрицательному направлению обхода контуров $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Далее ∂G , проходящую в положительном направлении, будем обозначать ∂G^+ (рис. 3.6 на с.75).

Теорема Коши для многосвязной области (см., например, [1, §6.6, теорема 3]). Если $G \subset \mathbf{C}$ – $(n+1)$ -связная область и функция $f(z)$ аналитична в G и непрерывна в замыкании \overline{G} , то

$$\int_{\partial G^+} f(z)dz = 0, \quad \text{то есть} \quad \oint_{\Gamma^+} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k^+} f(z)dz. \quad (3.9)$$

Следующая теорема доказывается аналогично следствию 1.2 теоремы 1.1.

Теорема о независимости интеграла от пути интегрирования.

Пусть $G \subset \mathbf{C}$ – односвязная область, а функция $f(z)$ непрерывна в G и для любого кусочно гладкого замкнутого контура $\Gamma \subset G$

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Тогда $\forall z_0, z_1 \in G$ интеграл $\int_{\gamma} f(z)dz$ не зависит от выбора кусочно гладкого контура $\gamma \subset G$ с началом в точке z_0 и концом в точке z_1 и соответственно

обозначается как $\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz$. Более того, для любого фиксированного $z_0 \in G$ функция

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw$$

аналитична в области G , причем $\Phi'(z) = f(z)$.

Примечание. Функция $\Phi(z)$ называется *первообразной функции* $f(z)$. Заметим, что если $F(z)$ – одна из первообразных функции $f(z)$, то в условиях теоремы справедлива обобщенная формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z) \Big|_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0).$$

Отсюда и из теоремы Коши получаем, что справедливо следующее утверждение.

Следствие теоремы Коши. Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области G , а $\gamma \subset G$ – любой кусочно гладкий контур, соединяющий точки $z_0, z_1 \in G$ и ориентированный в направлении от z_0 к z_1 . Тогда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z) \Big|_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0), \quad (3.10)$$

где $F(z)$ – любая первообразная, то есть аналитическая в G функция такая, что $F'(z) = f(z)$.

Примечание. Предположим, функции $u(z), v(z)$ аналитичны в односвязной области G . Функция $F(z) = u(z)v(z)$ является, очевидно, первообразной для функции $F'(z) = u'(z)v(z) + u(z)v'(z)$. Отсюда и из формулы (3.10) получаем, что для любого кусочно гладкого контура $\gamma \subset G$ с началом в точке $z_0 \in G$ и концом в точке $z_1 \in G$ справедлива *формула интегрирования по частям*:

$$\int_{\gamma} u(z)v'(z) dz = u(z)v(z) \Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{\gamma} v(z)u'(z) dz. \quad (3.11)$$

Теорема (интегральная формула Коши; см., например, [1, §6.8]). Пусть функция $f(z)$ аналитична в области G . Тогда функция $f(z)$ имеет всюду в области G производные любого порядка. Более того, $\forall z_0 \in G$ справедливы формулы:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz; \quad (3.12)$$

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad k \in \mathbf{N}, \quad (3.13)$$

где $\gamma \subset G$ – любой кусочно гладкий замкнутый контур такой, что

$$z_0 \in \text{int} \gamma \subset G.$$

Если, кроме того, функция $f(z)$ непрерывна в замыкании \overline{G} , то $\forall z_0 \in G$ справедливы формулы

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz; \quad (3.14)$$

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial G^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad k \in \mathbf{N}. \quad (3.15)$$

Задача 3.17. Вычислить (рис. 3.3, с.74)

$$\int_{\gamma} e^{2iz} dz, \quad \gamma = \{z = x + iy \mid y = x^2, \quad x \in [0, 1]\}.$$

Решение. Заметим, что функция e^{2iz} аналитическая и имеет первообразную $\frac{1}{2i}e^{2iz}$. Поэтому применима формула (3.10). Найдем начальную и конечную точки пути интегрирования:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0^2 = 0, \quad z_0 = x_0 + iy_0 = 0,$$

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 1^2 = 1, \quad z_1 = x_1 + iy_1 = 1 + i.$$

По обобщенной формуле Ньютона-Лейбница (3.10) получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} e^{2iz} dz &= \frac{1}{2i} e^{2iz} \Big|_0^{1+i} = \frac{1}{2i} (e^{2i(1+i)} - e^0) = \frac{1}{2i} (e^{-2+2i} - 1) = \\ &= \frac{1}{2i} (e^{-2} \cos 2 + ie^{-2} \sin 2 - 1) = \frac{e^{-2}}{2} \sin 2 + \frac{i}{2} (1 - e^{-2} \cos 2). \end{aligned}$$

Задача 3.18. Вычислить

$$\int_{\gamma} z \sin z dz, \quad \gamma = \{z = t + it^2 \mid t \in [1, 2]\}.$$

Решение. Заметим, что функции z и $-\cos z$, являющаяся первообразной для функции $\sin z$, аналитичны во всей комплексной плоскости \mathbf{C} . Поэтому можем воспользоваться формулой интегрирования по частям (3.11). Найдем начальную и конечную точки контура интегрирования:

$$z_0 = z(1) = 1 + i, \quad z_1 = z(2) = 2 + 4i.$$

По формуле (3.11) получаем:

$$\int_{\gamma} z \sin z dz = - \int_{\gamma} z (\cos z)' dz = - \left(z \cos z \Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{\gamma} \cos z dz \right).$$

Далее, поскольку $(\sin z)' = \cos z$, то по обобщенной формуле Ньютона-Лейбница (3.10), получаем:

$$\int_{\gamma} z \sin z dz = (-z \cos z + \sin z) \Big|_{z_0}^{z_1} = \sin z_1 - z_1 \cos z_1 - \sin z_0 + z_0 \cos z_0.$$

По формулам (3.1) и (3.2) получаем:

$$\begin{aligned} \sin z_0 &= \sin 1 \operatorname{ch} 1 + i \cos 1 \operatorname{sh} 1, & \sin z_1 &= \sin 2 \operatorname{ch} 4 + i \cos 2 \operatorname{sh} 4, \\ \cos z_0 &= \cos 1 \operatorname{ch} 1 - i \sin 1 \operatorname{sh} 1, & \cos z_1 &= \cos 2 \operatorname{ch} 4 - i \sin 2 \operatorname{sh} 4, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z \sin z dz &= \sin 2 \operatorname{ch} 4 - \sin 1 \operatorname{ch} 1 + i (\cos 2 \operatorname{sh} 4 - \cos 1 \operatorname{sh} 1) + \\ &+ \cos 1 \operatorname{ch} 1 + \sin 1 \operatorname{sh} 1 + i (\cos 1 \operatorname{ch} 1 - \sin 1 \operatorname{sh} 1) + \\ &+ 2 \cos 2 \operatorname{ch} 4 + 4 \sin 2 \operatorname{sh} 4 + i (4 \cos 2 \operatorname{ch} 4 - 2 \sin 2 \operatorname{sh} 4) = \\ &= \sin 2 \operatorname{ch} 4 - \sin 1 \operatorname{ch} 1 + \cos 1 \operatorname{ch} 1 + \sin 1 \operatorname{sh} 1 + 2 \cos 2 \operatorname{ch} 4 + 4 \sin 2 \operatorname{sh} 4 + \\ &+ i (\cos 2 \operatorname{sh} 4 - \cos 1 \operatorname{sh} 1 + \cos 1 \operatorname{ch} 1 - \sin 1 \operatorname{sh} 1 + 4 \cos 2 \operatorname{ch} 4 - 2 \sin 2 \operatorname{sh} 4). \end{aligned}$$

Задача 3.19. Вычислить интеграл по замкнутому контуру (обход контура – в положительном направлении)

$$\oint_{\gamma} \frac{z}{z^2 + 1} dz,$$

если: 1) $\gamma: |z| = \frac{1}{2}$; 2) $\gamma: |z - i| = 1$; 3) $\gamma: |z + i| = 1$; 4) $\gamma: |z| = 2$ (см. рис. 3.7).

Решение. 1) Контур γ представляет собой окружность с центром в $z = 0$ радиуса $\frac{1}{2}$. Рассмотрим подынтегральную функцию

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1} = \frac{z}{(z - i)(z + i)}.$$

Она имеет только 2 особые точки $z = \pm i$. Тогда $G = \{z \in \mathbf{C} \mid z \neq \pm i\}$ – область аналитичности этой функции. При этом $\operatorname{int} \gamma = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < \frac{1}{2}\}$ целиком содержится в области G так же, как и сам контур γ . Поэтому по формуле (3.7) получаем, что

$$\oint_{\gamma} \frac{z}{z^2 + 1} dz = 0.$$

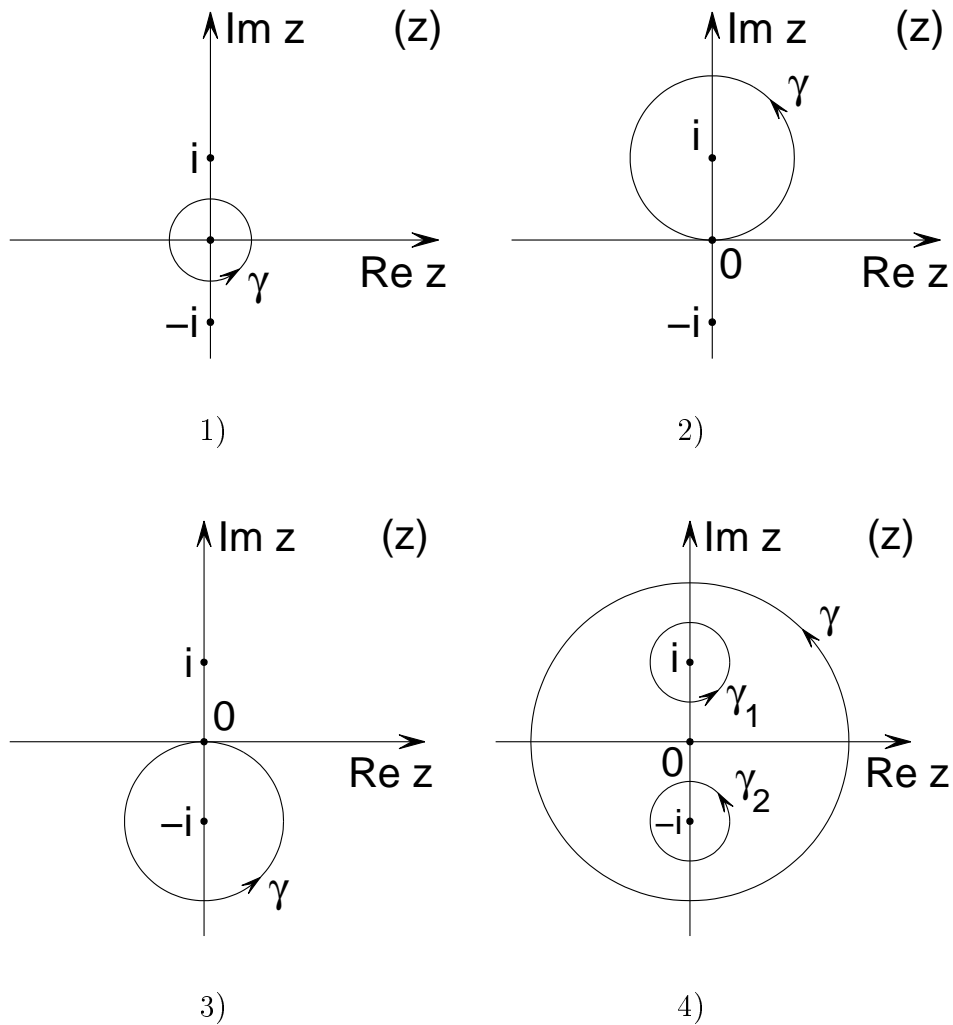


Рис. 3.7

2) Контур γ представляет собой окружность с центром в $z = i$ радиуса 1. Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{z}{z+i}$. Она имеет единственную особую точку $z = -i$, которая принадлежит внешности $\text{ext}\gamma$. При этом $z_0 = i \in \text{int}\gamma \subset G$, где $G = \{z \in \mathbf{C} \mid z \neq -i\}$ – область аналитичности функции $f(z)$. По формуле (3.12) получаем:

$$\oint_{\gamma} \frac{z}{z^2+1} dz = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-i} dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{i}{i+i} = \pi i.$$

3) Контур γ представляет собой окружность с центром в $z = -i$ радиуса 1. Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{z}{z-i}$. Она имеет единственную особую точку $z = i$, которая принадлежит внешности $\text{ext}\gamma$. При этом $z_0 = -i \in \text{int}\gamma \subset G$, где $G = \{z \in \mathbf{C} \mid z \neq i\}$ – область аналитичности функции $f(z)$. По формуле (3.12) получаем:

$$\oint_{\gamma} \frac{z}{z^2+1} dz = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z+i} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i \frac{-i}{-i-i} = \pi i.$$

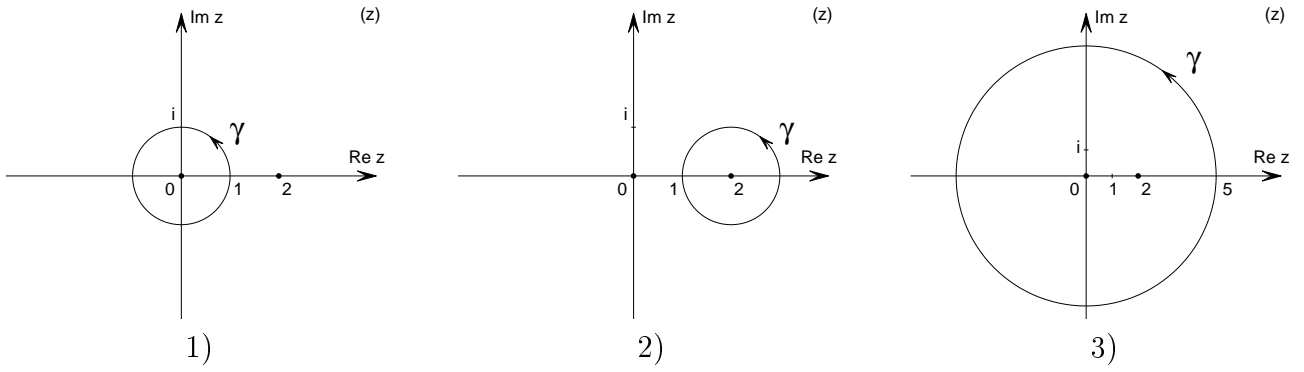


Рис. 3.8

4) Контур γ представляет собой окружность с центром в $z = 0$ радиуса 2. Он содержит внутри себя обе особые точки $z = \pm i$ подынтегральной функции. Рассмотрим 3-связную область G , ограниченную контуром γ , а также двумя внутренними контурами

$$\gamma_1 = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid |z - i| = \frac{1}{2} \right\} \quad \text{и} \quad \gamma_2 = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid |z + i| = \frac{1}{2} \right\},$$

каждый из которых содержит внутри себя по одной особой точке, и все контуры не пересекаются. Очевидно, что подынтегральная функция аналитична в области G и непрерывна в замыкании \overline{G} . Тогда по формуле (3.9) получаем:

$$\oint_{\gamma} \frac{z}{z^2 + 1} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{z}{z^2 + 1} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{z}{z^2 + 1} dz.$$

Аналогично п.п. 2, 3 находим, что

$$\oint_{\gamma_1} \frac{z}{z^2 + 1} dz = \pi i, \quad \oint_{\gamma_2} \frac{z}{z^2 + 1} dz = \pi i.$$

Таким образом,

$$\oint_{\gamma} \frac{z}{z^2 + 1} dz = 2\pi i.$$

Задача 3.20. Вычислить интеграл по замкнутому контуру (обход контура – в положительном направлении)

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z-2)^2},$$

если: 1) $\gamma: |z| = 1$; 2) $\gamma: |z - 2| = 1$; 3) $\gamma: |z| = 5$ (см. рис. 3.8).

Решение. 1) Контур γ представляет собой окружность с центром в $z = 0$ радиуса 1. Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$. Она имеет единственную особую точку $z = 2$, которая принадлежит внешности $\text{ext} \gamma$. При этом точка

$z_0 = 0 \in \text{int}\gamma \subset G$, где $G = \{z \in \mathbf{C} \mid z \neq 2\}$ – область аналитичности функции $f(z)$. По формуле (3.13) при $k = 2$ имеем:

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z-2)^2} = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0).$$

Учитывая, что $f''(z) = \frac{6}{(z-2)^4}$, получаем:

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z-2)^2} = \frac{6\pi i}{16} = \frac{3\pi i}{8}.$$

2) Контур γ представляет собой окружность с центром в $z = 2$ радиуса 1. Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{1}{z^3}$. Она имеет единственную особую точку $z = 0$, которая принадлежит внешности $\text{ext}\gamma$. При этом $z_0 = 2 \in \text{int}\gamma \subset G$, где $G = \{z \in \mathbf{C} \mid z \neq 0\}$ – область аналитичности функции $f(z)$. По формуле (3.13) при $k = 1$ имеем:

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z-2)^2} = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-2)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(2).$$

Учитывая, что $f'(z) = -\frac{3}{z^4}$, получаем: $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z-2)^2} = -\frac{6\pi i}{16} = -\frac{3\pi i}{8}$.

3) Контур γ представляет собой окружность с центром в $z = 0$ радиуса 5. Он содержит внутри себя обе особые точки $z = 0$ и $z = 2$ подынтегральной функции. Рассмотрим 3-связную область G , ограниченную контуром γ , а также двумя внутренними контурами

$$\gamma_1 = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid |z| = \frac{1}{2} \right\} \quad \text{и} \quad \gamma_2 = \{ z \in \mathbf{C} \mid |z-2| = 1 \},$$

каждый из которых содержит внутри себя по одной особой точке, и все контуры не пересекаются. Очевидно, что подынтегральная функция аналитична в области G и непрерывна в замыкании \overline{G} . Тогда по формуле (3.9) имеем:

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z-2)^2} = \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z^3(z-2)^2} + \oint_{\gamma_2} \frac{dz}{z^3(z-2)^2}.$$

Аналогично п.п. 1, 2 находим, что

$$\oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z^3(z-2)^2} = \frac{3\pi i}{8}, \quad \oint_{\gamma_2} \frac{dz}{z^3(z-2)^2} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

Таким образом, $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z-2)^2} = 0$.

§3.7. Степенные ряды

Пусть функции $f_n(z)$, $n \in \mathbf{N}$ определены в области D . Выражение

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad z \in D \quad (3.16)$$

называется *функциональным рядом*. Понятие точки сходимости, области сходимости и области равномерной сходимости функционального ряда определяются точно так же, как для вещественного случая, см. Часть 3, §4.2. Так же, как и для вещественного случая, доказывается, что справедливо следующее достаточное условие равномерной сходимости, см. Часть 3, §4.3, теорема 4.1.

Признак Вейерштрасса. Пусть $G \subset D$ и существует последовательность вещественных неотрицательных чисел $\{c_n\}$ такая, что $\forall n \in \mathbf{N}$ (или хотя бы начиная с некоторого номера) выполняются неравенства

$$|f_n(z)| \leq c_n, \quad \forall z \in G.$$

Тогда если вещественный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то ряд (3.16) сходится абсолютно и равномерно в области G . При этом числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ называется мажорирующим для исходного функционального ряда.

Важный частный случай функциональных рядов – это степенные ряды. Пусть даны последовательность $\{c_n\} \subset \mathbf{C}$ и число $z_0 \in \mathbf{C}$. Функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (3.17)$$

называется *степенным рядом в окрестности точки z_0* . При $z_0 = 0$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (3.18)$$

степенной ряд в окрестности 0.

Все факты теории вещественных степенных рядов (см. Часть 3, §4.4) переносятся на случай комплексных степенных рядов. В частности, справедлива следующая теорема, основная в теории таких рядов.

Теорема Абеля. Если степенной ряд (3.17) сходится в точке $z = z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится $\forall z \in \mathbf{C}$: $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, причем эта сходимость равномерна в любом замкнутом круге $|z - z_0| \leq r < |z_1 - z_0|$. Если же ряд (3.17) расходится в точке $z = z_2$, то он расходится $\forall z \in \mathbf{C}$: $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$.

Из теоремы Абеля следует, что существует число $R \in [0, +\infty]$ такое, что ряд (3.17) сходится, и притом абсолютно, в открытом круге (рис. 3.9)

$$B_R(z_0) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < R\}$$

и расходится $\forall z \in \mathbf{C}$: $|z - z_0| > R$. Так же, как и в вещественном случае, число R называется *радиусом сходимости степенного ряда* (3.17). Соответственно открытый круг $B_R(z_0)$ называется *кругом сходимости* этого ряда.

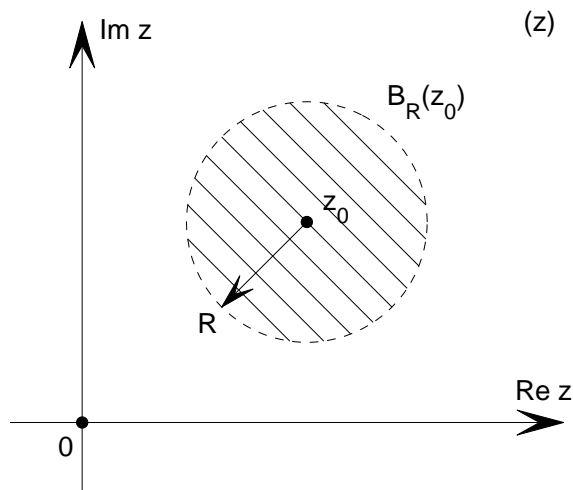


Рис. 3.9

Так же, как и в вещественном случае, радиус сходимости вычисляется по формулам:

$$R = \frac{1}{\rho}, \quad \text{где } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|, \quad \text{или } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

если указанные пределы существуют.

Аналогично вещественному случаю доказывается, что справедливы свойства:

1. В круге сходимости $B_R(z_0)$ функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ – сумма ряда (3.17) – является аналитической.
2. В круге сходимости $B_R(z_0)$ степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз, причем все полученные таким образом ряды имеют тот же радиус сходимости R .
3. Ряд (3.17) можно почленно интегрировать по любой кривой, лежащей в круге сходимости $B_R(z_0)$, причем интеграл зависит лишь от начальной и конечной точек пути интегрирования z_0 и z , и полученный таким образом ряд имеет тот же радиус сходимости R .

Задача 3.21. Найти область сходимости, абсолютной сходимости и равномерной сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - i)^n}{(1 + i)^n n^2}.$$

Решение. В данном случае $z_0 = i$, $c_n = \frac{1}{(1 + i)^n n^2}$. Найдем радиус сходимости:

$$R = \frac{1}{\rho}, \quad \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{(1 + i)^n n^2} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|1 + i|(\sqrt[n]{n})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, $R = \sqrt{2}$. Соответственно круг сходимости $B_R(z_0) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - i| < \sqrt{2}\}$. В круге сходимости ряд сходится абсолютно. На границе круга, то есть при $|z - i| = \sqrt{2}$, имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(z - i)^n}{(1 + i)^n n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{(\sqrt{2})^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

а этот ряд сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $\alpha = 2$. Таким образом, исходный степенной ряд сходится абсолютно в замкнутом круге $\overline{B_R(z_0)} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - i| \leq \sqrt{2}\}$. Вне этого круга степенной ряд расходится. Кроме того, данный степенной ряд удовлетворяет условиям признака Вейрштрасса на множестве $\overline{B_R(z_0)}$ с мажорирующим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Поэтому он сходится равномерно в замкнутом круге $\overline{B_R(z_0)}$.

Справедлива следующая теорема о представлении аналитической функции степенным рядом (аналогично вещественному случаю, см. Часть 3, §4.5; см. также формулу (3.12) на с.77)

Теорема Тейлора. Функция $f(z)$, аналитическая в круге $B_R(z_0)$, однозначно представима в этом круге своим *рядом Тейлора*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\gamma = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| = r\}, \quad r < R$$

(в качестве γ можно взять любой кусочно-гладкий замкнутый контур, содержащийся в круге $B_R(z_0)$ и содержащий внутри точку z_0).

Примечания.

1. При $z_0 = 0$ ряд Тейлора называют также *рядом Маклорена*.
2. При разложении функций в ряд Тейлора удобно использовать известные разложения основных элементарных функций:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbf{C};$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbf{C};$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbf{C};$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1;$$

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1;$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \\ |z| < 1, \quad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N},$$

в частности, при $\alpha = -1$:

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1.$$

При $\alpha = k \in \mathbf{N}$ справедливо разложение по биному Ньютона:

$$(1+z)^k = \sum_{n=0}^k C_k^n z^n, \quad z \in \mathbf{C}, \quad C_k^n = \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}.$$

Задача 3.22. Разложить функции $f(z) = \operatorname{sh} z$ и $f(z) = \operatorname{ch} z$ в ряд Маклорена.

Решение. По определению, $\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$. Используя разложение функции e^z , получаем:

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Разложения функций e^z и e^{-z} в ряд Маклорена справедливы на всей комплексной плоскости. Это подразумевает, что радиус сходимости того и другого ряда $R = \infty$. Стало быть, радиус сходимости ряда Маклорена, полученного нами в качестве разложения функции $f(z) = \operatorname{sh} z$, будет таким же. Пользуясь свойством 2 степенных рядов, получим разложение функции

$$f(z) = \operatorname{ch} z = (\operatorname{sh} z)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

причем радиус сходимости последнего степенного ряда должен быть таким же, как у исходного, то есть $R = \infty$.

Примечание. Таким образом, к приведенной выше таблице можем добавить еще две строки:

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbf{C};$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Задача 3.23. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(z) = \frac{4z^2 - (4i + 1)z + 2}{(z - 3)(2z - i)^2}.$$

Решение. Раскладывая функцию $f(z)$ на простейшие дроби, получаем:

$$f(z) = \frac{1}{z - 3} - \frac{1}{(2z - i)^2}.$$

Используя стандартное разложение, находим:

$$\frac{1}{z - 3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}, \quad \left| \frac{z}{3} \right| < 1, \quad \text{то есть } |z| < 3.$$

Заметим, что

$$-\frac{1}{(2z - i)^2} = \frac{1}{\left(\frac{2z}{i} - 1\right)^2} = \frac{1}{(1 - w)^2}, \quad \text{где } w = \frac{2z}{i}.$$

Пользуясь свойством 2 степенных рядов, имеем:

$$\frac{1}{(1 - w)^2} = \left(\frac{1}{1 - w} \right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} w^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (w^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1}, \quad |w| < 1.$$

Отсюда

$$-\frac{1}{(2z - i)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2z}{i} \right)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) \frac{2^n z^n}{i^n}, \quad |z| < \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((n + 1) \frac{2^n}{i^n} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) z^n, \quad |z| < \frac{1}{2}.$$

Задача 3.24. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(z) = \ln \left(z + \sqrt{1 + z^2} \right).$$

Решение. Заметим, что

$$f(z) = \ln \left(z + \sqrt{1 + z^2} \right) = \int_0^z \frac{dw}{\sqrt{1 + w^2}}.$$

Получим разложение в ряд Маклорена функции

$$\frac{1}{\sqrt{1 + w^2}} = (1 + t)^{-\frac{1}{2}}, \quad t = w^2.$$

Используя стандартное разложение, получаем:

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(\frac{1-2n}{2}\right)}{n!} t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} t^n, \quad |t| < 1.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\sqrt{1+w^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} w^{2n}, \quad |w| < 1.$$

Пользуясь свойством 3 степенных рядов, находим:

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^z \frac{dw}{\sqrt{1+w^2}} = \int_0^z \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} w^{2n} \right) dw = \\ &= z + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} w^{2n} dw = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n (2n+1)n!} z^{2n+1}, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(z) = \ln \left(z + \sqrt{1+z^2} \right) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n (2n+1)n!} z^{2n+1}, \quad |z| < 1.$$

§3.8. Ряды Лорана

Пусть $c_0 \in \mathbf{C}$, а $\{c_n\}$, $\{c_{-n}\}$, $n \in \mathbf{N}$, – две последовательности комплексных чисел; $z_0 \in \mathbf{C}$. Функциональный ряд (точнее говоря, сумма двух функциональных рядов) вида

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = f_1(z) + f_2(z) \end{aligned} \quad (3.19)$$

называется *рядом Лорана по степеням $z - z_0$* . При этом ряд $f_1(z)$ называется *главной частью ряда Лорана*, а ряд $f_2(z)$ – *правильной частью ряда Лорана*.

Заметим, что $f_2(z)$ – это обычный степенной ряд. Ряд $f_1(z)$ тоже можно представить как степенной, если сделать замену

$$w = \frac{1}{z - z_0} \quad \Rightarrow \quad f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n.$$

Радиус сходимости последнего ряда вычисляется по формуле³⁵

$$R' = \frac{1}{r}, \quad r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|},$$

соответственно круг сходимости: $|w| < R'$, или $|z - z_0| > \frac{1}{R'} = r$.

³⁵Здесь и ниже предполагается, что предел существует.

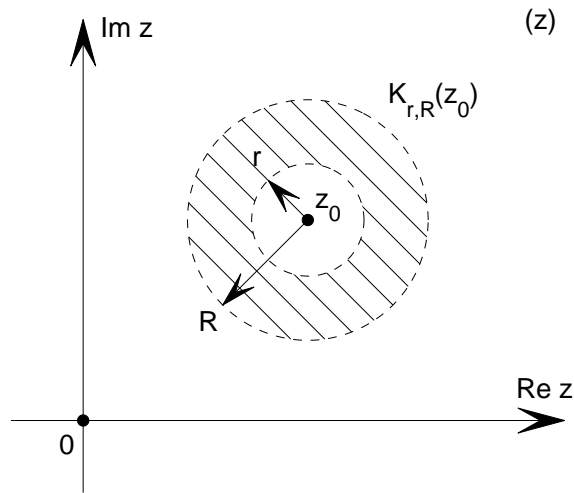


Рис. 3.10

Таким образом, ряд Лорана сходится, и притом абсолютно, в кольце (рис. 3.10)

$$K_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbf{C} \mid r < |z - z_0| < R\}, \quad R = \frac{1}{\rho},$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \quad r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}.$$

По аналогии со степенными рядами $K_{r,R}(z_0)$ называется *кольцом сходимости ряда Лорана*.

Примечание. В случае $R = \infty$ и $z_0 = 0$ кольцо сходимости представляет собой внешность круга $|z| \leq r$ и рассматривается как *окрестность бесконечно удаленной точки* $z = \infty$. Соответственно в этом случае ряд Лорана называется *рядом Лорана в окрестности $z = \infty$* . При этом, в отличие от общего случая, главной частью ряда Лорана называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, а правильной – ряд $\sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n$. Если сделать замену $t = \frac{1}{z}$, то из ряда Лорана в окрестности $z = \infty$ получается ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} t^n$ в окрестности $t = 0$.

Пусть $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ – сумма ряда Лорана (3.19). Так же, как и для степенных рядов, коэффициенты ряда Лорана c_n связаны с ней формулами:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.20)$$

$$\gamma = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| = r'\}, \quad r < r' < R$$

(в качестве γ можно взять любой кусочно-гладкий замкнутый контур, содержащийся в круге $B_R(z_0)$ и содержащий внутри замкнутый круг $\overline{B_r(z_0)}$).

Теорема Лорана (см. [1, §6.10, теорема 1]). Пусть $0 \leq r < R \leq +\infty$. Если функция $f(z)$ аналитична в кольце $K_{r,R}(z_0)$, то в этом кольце она единственным образом представима в виде ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

причем коэффициенты ряда определяются по формулам (3.20).

Задача 3.25. Найти область сходимости и сумму ряда Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1)(-i)^n(z+i)^n.$$

Решение. Обозначим $t = (-i)(z+i) = 1 - iz$. Тогда исследуемый ряд принимает вид

$$\sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1)t^n = \left[\begin{array}{l} n+2 = -m \\ n = -(m+2) \\ n+1 = -(m+1) \end{array} \right] = - \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1) \frac{1}{t^{m+2}}.$$

Переобозначая $\frac{1}{t} = \tau$, получаем степенной ряд

$$-\tau^2 \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1)\tau^m = -\tau^2 \sum_{m=1}^{+\infty} m\tau^{m-1} = -\tau^2 \sum_{m=1}^{+\infty} (\tau^m)' = -\tau^2 \sum_{m=0}^{+\infty} (\tau^m)'.$$

Для данного степенного ряда $\rho = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|c_m|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{m+1} = 1$, и соответственно радиус сходимости $R = \frac{1}{\rho} = 1$ — так же, как для ряда $\sum_{m=0}^{+\infty} \tau^m$.

По свойствам степенных рядов возможно почленное дифференцирование ряда $\sum_{m=0}^{+\infty} \tau^m$ в круге сходимости $\{\tau \in \mathbf{C} : |\tau| < 1\}$ (в данном случае он совпадает с областью сходимости, так как при $|\tau| = 1$ ряд расходится, поскольку общий член ряда не стремится к нулю). Таким образом, используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем:

$$-\tau^2 \sum_{m=0}^{+\infty} (\tau^m)' = -\tau^2 \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \tau^m \right)' = -\tau^2 \left(\frac{1}{1-\tau} \right)' = -\frac{\tau^2}{(1-\tau)^2},$$

где

$$|\tau| < 1 \Leftrightarrow |t| > 1 \Leftrightarrow |1 - iz| > 1 \Leftrightarrow |z + i| > 1.$$

Соответственно, сумма исходного ряда

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1)(-i)^n(z+i)^n &= -\frac{\tau^2}{(1-\tau)^2} = -\frac{1}{t^2(1-\frac{1}{t})^2} = \\ &= -\frac{1}{(t-1)^2} = -\frac{1}{(iz)^2} = \frac{1}{z^2}, \quad \text{где } |z+i| > 1. \end{aligned}$$

Задача 3.26. Разложить в ряд Лорана в окрестности 0 функцию

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2i)}.$$

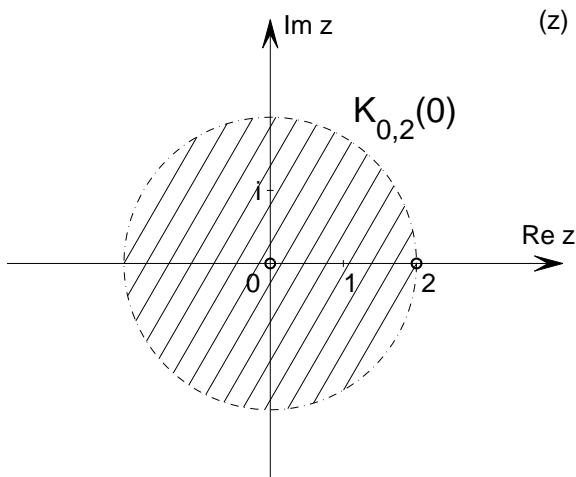


Рис. 3.11

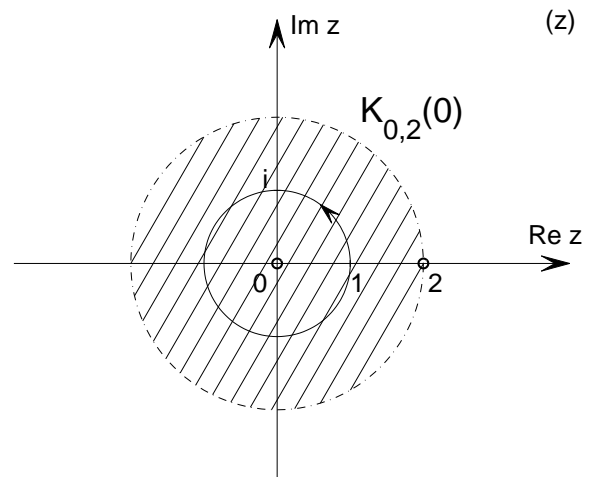


Рис. 3.12

Решение. *I способ.* Особыми точками данной функции являются $z = 0$ и $z = -2i$. Наибольшее кольцо с центром в 0 , не содержащее этих точек (и $z = \infty$), $-K_{0,2}(0) = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z| < 2\}$ является кольцом сходимости соответствующего ряда Лорана (см. рис. 3.11). По формулам (3.20) находим (см. рис. 3.12)

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^{n+2}(z+2i)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Поскольку при $n \leq -2$ подынтегральная функция аналитична в круге $|z| \leq 1$, то по теореме Коши $c_n = 0$ при $n \leq -2$. В случае $n > -2$, применяя формулу Коши для функции $g(z) = \frac{1}{z+2i}$ при $z_0 = 0$ и $k = n+1$, получаем:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^{k+1}} dz = \frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{k!(-1)^k}{(2i)^{k+1}} = \frac{i^{2k}}{2^{k+1}(i)^{k+1}} = \frac{i^{k-1}}{2^{k+1}} = \frac{i^n}{2^{n+2}}.$$

Таким образом,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{i^n}{2^{n+2}} z^n = \frac{1}{2iz} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^{n+2}} z^n, \quad 0 < |z| < 2.$$

II способ. Раскладывая на простейшие дроби, получаем

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2i)} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2i} \right) = \frac{1}{2i} (g_1(z) + g_2(z)).$$

Функция $g_1(z) = \frac{1}{z}$ уже является своим разложением в ряд Лорана по степеням z при $|z| > 0$. Рассмотрим функцию

$$g_2(z) = \frac{1}{z+2i} = \frac{1}{2i(1 - \frac{iz}{2})}.$$

Обозначая $\frac{iz}{2} = t$ и используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем

$$g_2(z) = \frac{1}{2i(1-t)} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad |t| < 1,$$

то есть

$$g_2(z) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{2^{n+1}} z^n, \quad |z| < 2,$$

и окончательно,

$$f(z) = \frac{1}{2iz} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^{n+2}} z^n, \quad 0 < |z| < 2.$$

Задача 3.27. Разложить в ряд Лорана в окрестности $z = \infty$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2i)}.$$

Решение. *I способ.* Особыми точками данной функции являются $z = 0$ и $z = -2i$. Наибольшая окрестность точки $z = \infty$, не содержащая этих точек, $K_{2,\infty}(0) = \{z \in \mathbf{C} : |z| > 2\}$ является кольцом сходимости соответствующего ряда Лорана. По формулам (3.20) находим

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=5} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=5} \frac{dz}{z^{n+2}(z+2i)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Рассмотрим 2 случая:

1) $n > -2$. Тогда подынтегральная функция имеет внутри контура $|z| = 5$ две особые точки $z = 0$ и $z = -2i$ и, в частности, аналитична в замыкании трехсвязной области (рис. 3.13, а)

$$G = \{z \in \mathbf{C} : |z| > \frac{1}{2}, \quad |z+2i| > 1, \quad |z| < 5\}.$$

По теореме Коши для многосвязных областей, формула (3.9), получаем:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^{n+2}(z+2i)} + \oint_{|z+2i|=1} \frac{dz}{z^{n+2}(z+2i)} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{g_1(z)dz}{z^{n+2}} + \oint_{|z+2i|=1} \frac{g_2(z)dz}{z+2i} \right). \end{aligned}$$

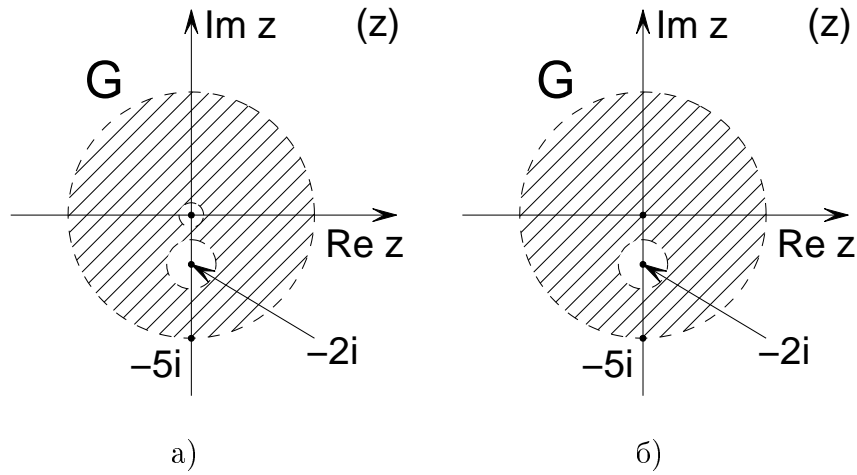


Рис. 3.13

Далее, по формуле Коши для функций $g_1(z) = \frac{1}{z+2i}$ и $g_2(z) = \frac{1}{z^{n+2}}$ при $k = n+1$, $z_0 = 0$ и $k = 0$, $z_0 = -2i$ соответственно, находим

$$c_n = \frac{g_1^{(k)}(0)}{k!} + g_2(-2i) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{(-1)^k k!}{(2i)^{k+1}} + \frac{1}{(-2i)^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2i)^{n+2}} (1 + (-1)) = 0.$$

2) $n \leq -2$. Подынтегральная функция имеет внутри контура $|z| = 5$ одну особую точку $z = -2i$ и, в частности, аналитична в замыкании двухсвязной области (рис. 3.13, б)

$$G = \{z \in \mathbf{C} : |z+2i| > 1, |z| < 5\}.$$

По теореме Коши для многосвязных областей получаем:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z+2i|=1} \frac{dz}{z^{n+2}(z+2i)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z+2i|=1} \frac{g(z)dz}{z+2i}.$$

Далее, по формуле Коши для функции $g(z) = \frac{1}{z^{n+2}}$ при $k = 0$, $z_0 = -2i$ находим $c_n = g_2(-2i) = \frac{1}{(-2i)^{n+2}}$. Таким образом,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{z^n}{(-2i)^{n+2}} = \left[\begin{array}{l} n+2 = -m \\ n = -(m+2) \end{array} \right] = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m i^m 2^m}{z^{m+2}}, \quad |z| > 2.$$

II способ. Фактически требуется получить разложение функции в ряд Лорана по степеням $\frac{1}{z}$. Заметим, что

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2i)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2i}{z}}.$$

Обозначая $t = \frac{2i}{z}$ и используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем:

$$\frac{1}{1 + \frac{2i}{z}} = \frac{1}{1 + t} = \frac{1}{1 - (-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^n 2^n}{z^n}, \quad |t| = \left| \frac{2i}{z} \right| < 1,$$

откуда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^n 2^n}{z^{n+2}}, \quad |z| > 2.$$

Задача 3.28. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$ в ряд Лорана

1) по степеням $(z - i)$; 2) в окрестности $z = \infty$.

Решение. 1) Обозначим $z - i = t$. Тогда

$$f(z) = \frac{t + i}{(t + i)^2 + 1} = \frac{t + i}{t(t + 2i)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t + 2i} \right).$$

Данная функция имеет особые точки $t = 0$ и $t = -2i$. По теореме Лорана она допускает разложение в ряд Лорана по степеням t в кольце $0 < |t| < 2$, а также во внешности круга $|t| \leq 2$, то есть при $|t| > 2$.

а) Используя результат задачи 3.26 (разложение функции $g_2(z)$), получаем

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{2^{n+1}} t^n \right), \quad 0 < |t| < 2,$$

откуда

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - i} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2} \right)^{n+1} (z - i)^n \right), \quad 0 < |z - i| < 2.$$

б) Заметим, что

$$\frac{1}{t + 2i} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2i}{t}}.$$

Используя результат задачи 3.27, получаем

$$f(z) = \frac{1}{2t} \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(i)^n 2^n}{t^n} \right) = \frac{1}{2t} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^n 2^{n-1}}{t^{n+1}}, \quad |t| > 2,$$

или

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2t} + \frac{1}{2t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(i)^n 2^{n-1}}{t^{n+1}} = \left[\begin{array}{l} n - 1 = m \\ n = m + 1 \\ n + 1 = m + 2 \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{t} - i \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(i)^m 2^m}{t^{m+2}} = \frac{1}{z - i} - i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2i)^m}{(z - i)^{m+2}}, \quad |z - i| > 2. \end{aligned}$$

2) Заметим, что

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^2}{z^2 + 1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z^2}}.$$

Обозначая $\frac{1}{z} = t$ и используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем

$$f(z) = t \cdot \frac{1}{1 + t^2} = t \cdot \frac{1}{1 - (-t^2)} = t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n+1}, \quad |t^2| < 1,$$

откуда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+1}}, \quad |z| > 1.$$

Задача 3.29. Разложить функцию $f(z) = \cos \frac{1}{z-i}$ в ряд Лорана по степеням $(z-i)$.

Решение. Обозначая $\frac{1}{z-i} = t$ и используя разложение $\cos t$ в ряд Маклорена получаем

$$f(z) = \cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!(z-i)^n}, \quad |z-i| > 0.$$

§3.9. Изолированные особые точки и их классификация

Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце

$$K_{0,R}(z_0) = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < R\}.$$

Тогда z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$.

Функция $f(z)$ при сделанных предположениях в кольце $K_{0,R}(z_0)$ разлагается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = f_1(z) + f_2(z).$$

При этом возможны следующие случаи.

1) $f(z) = f_2(z)$. Тогда полагая $f(z_0) = f_2(z_0) = c_0$, получаем, что $f(z)$ становится аналитической во всем круге $|z - z_0| < R$. Соответственно точка z_0 называется *устранимой особой точкой* функции $f(z)$.

2) $f(z) = \sum_{n=1}^m \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + f_2(z)$. Тогда z_0 называется *полюсом* (при $m = 1$ *простым полюсом*) функции $f(z)$ *кратности (или порядка) m* .

Примечания.

1. Фактически это означает, что функция $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ имеет в точке $z = z_0$ нуль порядка m . Таким образом, если оказалось, что $g(z) = \varphi(z)\psi(z)$, где $\psi(z_0) \neq 0$,

$$\varphi(z_0) = \varphi'(z_0) = \dots = \varphi^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad \varphi^{(m)}(z_0) \neq 0,$$

то z_0 – полюс кратности m . В частности, так будет, если

$$g(z) = (z - z_0)^m \Psi(z), \quad \Psi(z_0) \neq 0.$$

2. В соответствии с формулой Коши получаем, что если z_0 – полюс, то

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i c_{-1}, \quad \text{где } \gamma \subset K_{0,R}(z_0), \quad z_0 \in \text{int} \gamma. \quad (3.21)$$

3) В остальных случаях z_0 называется *существенно особой точкой функции* $f(z)$.

Примечание. Фактически это означает, что ряд $f_1(z)$ содержит бесконечное число членов, не равных нулю. Можно показать, что в этом случае $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует, ни конечный, ни бесконечный. Поскольку для случая 1) существует конечный предел, а для 2) – бесконечный, то справедливо и обратное. Таким образом, z_0 – существенно особая точка $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ \nexists . Что касается равенства (3.21), оно остается справедливым.

Бесконечно удаленная точка z_0 по определению называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если $f(z)$ аналитична во внешности некоторого круга $|z| \leq r$, то есть при $|z| > r$. Ее классификация строится в соответствии с тем, какой характер имеет особая точка $t = 0$ функции $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$, которая получается, если сделать замену $t = \frac{1}{z}$.

Задача 3.30. Для указанных функций определить все конечные изолированные особые точки и установить их характер:

$$1) \frac{2z}{(z-i)^2(z+1)^3(z+i)}; \quad 2) \frac{1}{z \sin(z-i)}; \quad 3) \frac{z^2(z-\pi)}{\sin 2z}; \quad 4) \cos \frac{1}{z-i}.$$

Решение. 1) Данная функция $f(z)$ аналитична всюду, за исключением точек $z = i$, $z = -1$, $z = -i$. Они, таким образом, являются изолированными особыми точками. Установим характер $z = i$. Заметим, что функция $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ представляется в виде $g(z) = (z-i)^2 \Psi(z)$, где

$$\Psi(z) = \frac{(z+1)^3(z+i)}{2z}, \quad \Psi(i) = (i+1)^3 \neq 0.$$

Таким образом, $z = i$ – полюс 2-го порядка. Аналогично $z = -1$ – полюс 3-го порядка, $z = -i$ – простой полюс.

2) Данная функция $f(z)$ аналитична всюду, за исключением счетного набора точек $z = 0$, $z_k = i + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Каждая из них имеет проколотую окрестность $0 < |z| < \frac{1}{2}$, $0 < |z - z_k| < \frac{1}{2}$, в которой функция аналитична, следовательно, все они являются изолированными особыми точками. Аналогично 1) точка $z = 0$ – простой полюс. Установим характер точек z_k . Заметим, что $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ представляется в виде

$$g(z) = \Phi(z) \Psi(z), \quad \Psi(z) = z, \quad \Psi(z_k) = z_k \neq 0, \quad \Phi(z) = \sin(z-i),$$

$$\varphi'(z) = \cos(z - i), \quad \varphi(z_k) = \sin(\pi k) = 0, \quad \varphi'(z_k) = \cos(\pi k) = (-1)^k \neq 0.$$

Таким образом, z_k – простой полюс, $k \in \mathbf{Z}$.

3) Данная функция $f(z)$ аналитична всюду, за исключением счетного набора точек $z = 0, z_k = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}$. Каждая из них имеет проколотую окрестность $0 < |z| < \frac{1}{2}, 0 < |z - z_k| < \frac{1}{2}$, в которой функция аналитична, следовательно, все они являются изолированными особыми точками. Заметим, что

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{2} \cdot \frac{2z}{\sin 2z} \cdot (z - \pi) = 0 \cdot 1 \cdot (-\pi) = 0,$$

то есть существует и конечен. Таким образом, $z = 0$ – устранимая особая точка. Аналогично

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \pi} f(z) &= \left[\begin{array}{l} z - \pi = t \\ z = t + \pi \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} (t + \pi)^2 \cdot \frac{2t}{\sin(2t + 2\pi)} \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (t + \pi)^2 \cdot \frac{2t}{\sin(2t)} \cdot \frac{1}{2} = \pi^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{2}, \end{aligned}$$

следовательно, $z = \pi$ – устранимая особая точка. Что касается точек $z_k = \frac{\pi k}{2}, k \neq 2$, аналогично 2) показывается, что каждая из них – простой полюс.

4) Данная функция $f(z)$ аналитична всюду, за исключением точки $z = i$. Это существенно особая точка, поскольку предел $\lim_{z \rightarrow i} f(z)$ не существует, ни конечный, ни бесконечный. Покажем это.

а) рассмотрим последовательность z_n такую, что

$$\frac{1}{z_n - i} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ то есть } z_n = i + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}.$$

Очевидно, что $z_n \rightarrow i$, и при этом $f(z_n) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 0$;

б) рассмотрим последовательность z_n такую, что

$$\frac{1}{z_n - i} = 2\pi n, \text{ то есть } z_n = i + \frac{1}{2\pi n}.$$

Очевидно, что $z_n \rightarrow i$, и при этом $f(z_n) = \cos(2\pi n) = 1$.

Таким образом, нашлись две последовательности комплексных чисел, сходящиеся к точке $z = i$, для которых соответствующие последовательности значений функции стремятся к разным числам. Это означает, что рассматриваемый предел не существует.

Задача 3.31. Для указанных функций установить характер бесконечно удаленной особой точки:

$$1) f(z) = 5 + z - 3z^2; \quad 2) f(z) = \cos \frac{z}{1 - iz}.$$

Решение. 1) Сделаем замену $z = \frac{1}{t}$. Тогда исследуемая функция принимает вид

$$g(t) = 5 + \frac{1}{t} - \frac{3}{t^2} = 5 + \frac{t-3}{t^2} = 5 + \tilde{g}(t).$$

Соответственно

$$\frac{1}{\tilde{g}(t)} = t^2 \cdot \frac{1}{t-3} = \varphi(t) \cdot \psi(t),$$

где функция $\varphi(t)$ имеет в точке $t = 0$ нуль 2-го порядка, $\psi(0) \neq 0$. Поэтому $t = 0$ – полюс 2-го порядка функции $\tilde{g}(t)$, а следовательно, и функции $g(t)$. Таким образом, $z = \infty$ – полюс 2-го порядка функции $f(z)$.

2) Сделаем замену $z = \frac{1}{t}$. Тогда исследуемая функция принимает вид:

$$g(t) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \cos \frac{1}{t(1-i\frac{1}{t})} = \cos \frac{1}{t-i}.$$

Функция справа определена при $t \neq i$ и является непрерывной (и более того, аналитической) в этой области как элементарная функция в своей области определения. Поэтому существует

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \cos \frac{1}{t-i} = \cos \frac{1}{-i} = \cos i = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} = \operatorname{ch} 1.$$

Таким образом, $t = 0$ – устранимая особая точка функции $g(t)$, а следовательно, $z = \infty$ – устранимая особая точка функции $f(z)$.

§3.10. Вычеты

Пусть z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$, то есть $f(z)$ аналитична в некотором кольце

$$K_{0,R}(z_0) = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < R\}, \quad z_0 \neq \infty.$$

Тогда для любого кусочно-гладкого замкнутого контура $\gamma \subset K_{0,R}(z_0)$ такого, что $z_0 \in \operatorname{int} \gamma$, интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$$

(его значение не зависит³⁶ от выбора такого контура) называется *вычетом функции $f(z)$ в точке z_0* и обозначается следующим образом: $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$.

Примечания.

1. При сделанных предположениях, согласно теореме Лорана, функция $f(z)$ разлагается в кольце $K_{0,R}(z_0)$ в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}},$$

причем $c_{-1} = \operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$.

³⁶См. формулы (3.20) при $n = -1$, с.89.

2. Непосредственно из интегрального представления вычета видно, что если в соответствующем интеграле сделать замену $(z - z_0) = t$, то получим равенство

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname{res}_{t=0} g(t), \quad \text{где } g(t) = f(t + z_0). \quad (3.22)$$

Если же $z_0 = \infty$ – изолированная особая точка функции $f(z)$, то $f(z)$ аналитична в ее окрестности $K_{R,+\infty}(0) = \{z \in \mathbf{C} : |z| > R\}$, и соответственно вычет функции $f(z)$ в точке $z_0 = \infty$ определяется как

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} f(z) dz,$$

где контур $\gamma \subset K_{R,+\infty}(0)$, $0 \in \operatorname{int}\gamma$, в отличие от предыдущего случая, обходится по часовой стрелке (γ^-). При этом $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$.

Примечание. Если в соответствующем интеграле сделать замену $z = \frac{1}{t}$ ($\Rightarrow dz = -\frac{dt}{t^2}$), то нетрудно убедиться, что

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{res}_{t=0} g(t), \quad \text{где } g(t) = \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right). \quad (3.23)$$

Для $z_0 \neq \infty$ возможны перечисленные ниже случаи.

1) z_0 – устранимая особая точка. Тогда (см. §3.9, 1)) разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $K_{0,R}(z_0)$ имеет вид

$$f(z) = f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

откуда сразу вытекает, что $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = 0$.

2) z_0 – простой полюс. Тогда (см. §3.9, 2) при $m = 1$) разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $K_{0,R}(z_0)$ имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

и после домножения на $z - z_0$:

$$(z - z_0)f(z) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+1}.$$

Стало быть, переходя в полученном тождестве к пределу при $z \rightarrow z_0$, получаем формулу:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z). \quad (3.24)$$

В частности, если

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \text{где } \varphi(z_0) \neq 0, \quad \psi(z_0) = 0, \quad \psi'(z_0) \neq 0,$$

то

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (3.25)$$

Действительно, пользуясь формулой (3.24), получаем:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)/(z-z_0)} = \varphi(z_0) : \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0} = \varphi(z_0) : \psi'(z_0).$$

3) z_0 – полюс порядка $m \geq 2$. Тогда (см. §3.9, 2) при $m \geq 2$) разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $K_{0,R}(z_0)$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=1}^m \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

Домножая это тождество на $(z-z_0)^m$, получаем разложение в степенной ряд функции

$$\varphi(z) = (z-z_0)^m f(z) = \sum_{n=1}^m \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^{n-m}} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n+m} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (z-z_0)^n,$$

где $\gamma_0 = c_{-m}$, $\gamma_1 = c_{-(m-1)}$, \dots , $\gamma_{m-1} = c_{-1}$, $\gamma_m = c_1$, \dots , $\gamma_{m+k} = c_k \dots$. Из этого разложения очевидно, что для функции $\varphi(z)$ и всех ее производных точка $z = z_0$ является устранимой особой точкой. Доопределим саму функцию и каждую ее производную $\varphi^{(n)}(z)$ в точке $z = z_0$ по непрерывности, положив

$$\varphi^{(n)}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi^{(n)}(z), \quad n = 0, 1, \dots$$

Тогда полученный нами степенной ряд является рядом Тейлора для функции $\varphi(z)$, а его коэффициенты, как известно, определяются по формулам:

$$\gamma_n = \frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

В частности,

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \gamma_{m-1} = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi^{(m-1)}(z).$$

Таким образом, справедлива формула

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]. \quad (3.26)$$

4) z_0 – существенно особая точка. Тогда в некоторых случаях можно воспользоваться 2-й теоремой о вычетах (см. далее). Если это затруднительно, то остается использовать разложение функции в ряд Лорана, а затем коэффициент c_{-1} из этого разложения.

Примечание. В случае $z_0 = \infty$ можно действовать, как указано в п.4.

Первая теорема о вычетах (см., например, [4, теорема 5.1]). Пусть функция $f(z)$ аналитична всюду в области G , за исключением изолированных особых точек $z_1, \dots, z_N \in G$. Тогда для любого кусочно-гладкого замкнутого контура $\gamma \subset G$ такого, что $z_1, \dots, z_N \in \text{int}\gamma$, справедливо равенство

$$\oint_{\gamma^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{res}_{z=z_k} f(z).$$

Вторая теорема о вычетах (там же, теорема 5.2). Пусть функция $f(z)$ аналитична в \mathbb{C} , за исключением изолированных особых точек z_1, \dots, z_{N-1} и $z_N = \infty$. Тогда

$$\sum_{k=1}^N \text{res}_{z=z_k} f(z) = 0.$$

Задача 3.32. Вычислить $\text{res}_{z=i} \frac{\cos 5z}{z^2 + 1}$.

Решение. Заметим, что $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$. Поэтому $z_0 = i$ – простой полюс, и по формуле (3.24)

$$\text{res}_{z=i} \frac{\cos 5z}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{\cos 5z}{(z - i)(z + i)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\cos 5z}{z + i} = \frac{\cos 5i}{2i} = -\frac{i}{2} \text{ch} 5.$$

Задача 3.33. Вычислить

$$\text{res}_{z=\frac{\pi}{6}} \frac{z^2}{\sqrt{3} - 2 \cos z}.$$

Решение. Пусть $\varphi(z) = z^2$, $\psi(z) = \sqrt{3} - 2 \cos z$. Заметим, что

$$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) \neq 0, \quad \psi\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0, \quad \psi'(z) = 2 \sin z, \quad \psi'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \neq 0.$$

Таким образом, $z_0 = \frac{\pi}{6}$ – простой полюс, и по формуле (3.25)

$$\text{res}_{z=\frac{\pi}{6}} \frac{z^2}{\sqrt{3} - 2 \cos z} = \frac{\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\psi'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\pi^2}{36}.$$

Задача 3.34. Вычислить $\text{res}_{z=i} \frac{\sin 3z}{(z - i)^3}$.

Решение. Поскольку $z_0 = i$ – полюс порядка $m = 3$, то по формуле (3.26)

$$\begin{aligned} \text{res}_{z=i} \frac{\sin 3z}{(z - i)^3} &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z - i)^3 \frac{\sin 3z}{(z - i)^3} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} (\sin 3z)'' = -\frac{9}{2} \sin 3i = -\frac{9}{4i} (e^{-3} - e^3) = \frac{9}{2i} \text{sh} 3 = -i \frac{9}{2} \text{sh} 3. \end{aligned}$$

Задача 3.35. Вычислить $\operatorname{res}_{z=i} \sin \frac{5}{z-i}$.

Решение. В соответствии с формулой (3.22)

$$\operatorname{res}_{z=i} \sin \frac{5}{z-i} = \operatorname{res}_{z=0} f(z), \quad \text{где } f(z) = \sin \frac{5}{z}.$$

Заметим, что $z = 0$ – существенно особая точка функции $f(z)$. Найдем $\operatorname{res}_{z=0} f(z)$ двумя способами.

I способ. Раскладывая функцию $f(z)$ в ряд Лорана

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin \frac{5}{z} = \left[\frac{5}{z} = t \right] = \sin t = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{5^{2n-1}}{(2n-1)! z^{2n-1}} = \frac{5}{z} - \frac{5^3}{3! z^3} + \dots, \quad |z| > 0, \end{aligned}$$

закключаем, что $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = 5$ (коэффициенту при $\frac{1}{z}$).

II способ. Функция $f(z)$ имеет только 2 особые точки $z = 0$ и $z = \infty$, следовательно, по 2-й теореме о вычетах $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = -\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$. Далее согласно формуле (3.23) получаем

$$-\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname{res}_{t=0} g(t), \quad \text{где } g(t) = \frac{\sin 5t}{t^2} = \frac{\sin 5t}{5t} \cdot \frac{5}{t}.$$

Из последнего представления видно, что $t = 0$ – простой полюс функции $g(t)$, и по формуле (3.24)

$$\operatorname{res}_{t=0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \frac{\sin 5t}{5t} \cdot \frac{5}{t} = 5.$$

Задача 3.36. Вычислить $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{e^z}{z^2+1}$.

Решение. Функция $f(z) = \frac{e^z}{z^2+1}$ имеет 3 особые точки: $z = \pm i$ и $z = \infty$. По 2-й теореме о вычетах

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{res}_{z=i} f(z) - \operatorname{res}_{z=-i} f(z).$$

Каждая из точек $z = \pm i$ является простым полюсом. По формуле (3.25)

$$\operatorname{res}_{z=\pm i} f(z) = \left. \frac{e^z}{(z^2+1)'} \right|_{z=\pm i} = \left. \frac{e^z}{2z} \right|_{z=\pm i} = \pm \frac{e^{\pm i}}{2i}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{e^i - e^{-i}}{2i} = -\sin 1.$$

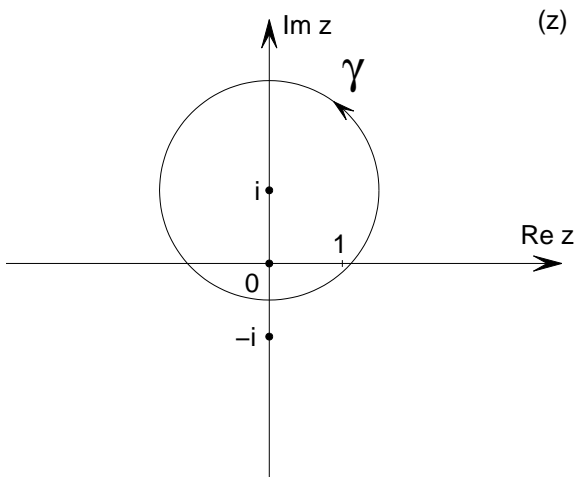


Рис. 3.14

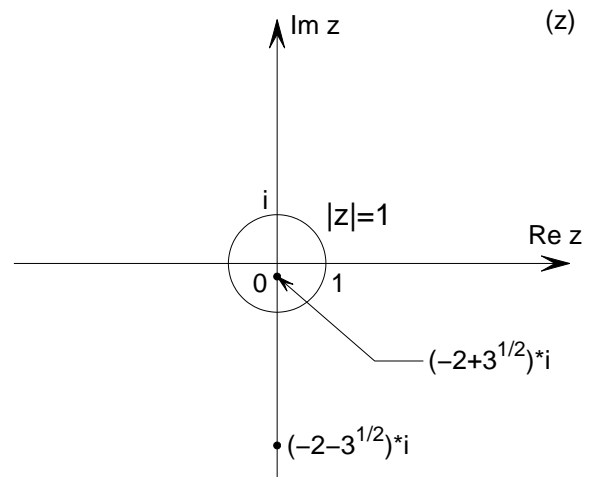


Рис. 3.15

§3.11. Применение вычетов к вычислению интегралов

Вычисление интегралов основывается на 1-й теореме о вычетах.

Задача 3.37. Вычислить интеграл

$$\oint_{\gamma^+} \frac{\cos z dz}{z(z^2 + 1)}, \quad \gamma = \left\{ z \in \mathbf{C} : |z - i| = \frac{3}{2} \right\}.$$

Решение. Функция $f(z) = \frac{\cos z}{z(z^2 + 1)}$ имеет 3 конечных особых точки $z = \pm i$ и $z = 0$. Две из них $z_1 = 0$ и $z_2 = i$ расположены внутри контура γ (см. рис. 3.14), тогда как $z_3 = -i$ и $z_4 = \infty$ – снаружи. Согласно 1-й теореме о вычетах получаем

$$\oint_{\gamma^+} \frac{\cos z dz}{z(z^2 + 1)} = 2\pi i \sum_{k=1}^2 \operatorname{res}_{z=z_k} f(z).$$

Каждая из точек $z_1 = 0$ и $z_2 = i$ является простым полюсом, поэтому по формуле (3.25)

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma^+} \frac{\cos z dz}{z(z^2 + 1)} &= 2\pi i \sum_{k=1}^2 \frac{\cos z}{(z^3 + z)'} \Big|_{z=z_k} = 2\pi i \sum_{k=1}^2 \frac{\cos z}{3z^2 + 1} \Big|_{z=z_k} = \\ &= 2\pi i \left(\frac{\cos 0}{3 \cdot 0^2 + 1} + \frac{\cos i}{3i^2 + 1} \right) = 2\pi i \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} 1 \right) = i\pi (2 - \operatorname{ch} 1). \end{aligned}$$

Задача 3.38. Вычислить интеграл

$$\oint_{\gamma^+} \frac{z^3 dz}{5z^4 + i}, \quad \gamma = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}.$$

Решение. Очевидно, что конечные особые точки подынтегральной функции $f(z) = \frac{z^3}{5z^4 + i}$ определяются как 4 корня $\sqrt[4]{-\frac{i}{5}}$, обозначим их $z_k, k = \overline{1, 4}$.

Все они расположены на окружности $|z| = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ и, таким образом, находятся внутри контура γ . В таком случае, непосредственно по определению вычета в бесконечно удаленной точке имеем

$$\oint_{\gamma^+} f(z) dz = - \oint_{\gamma^-} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z).$$

При этом по формуле (3.23)

$$- \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname{res}_{t=0} g(t), \quad \text{где} \quad g(t) = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{t^3(5\frac{1}{t^4} + i)} = \frac{1}{t(5 + it^4)}.$$

Поскольку $t = 0$ является простым полюсом функции $g(t)$, то по формуле (3.24)

$$\operatorname{res}_{t=0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{5 + it^4} = \frac{1}{5}$$

и окончательно,

$$\oint_{\gamma^+} f(z) dz = \frac{2\pi i}{5}.$$

Задача 3.39. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \sin x}$.

Решение. Сделаем замену

$$z = e^{ix} \Rightarrow dz = ie^{ix} dx = iz dx \Rightarrow dx = \frac{dz}{iz},$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}.$$

Таким образом,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \sin x} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(2 + \frac{z^2 - 1}{2iz}\right)} = 2 \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 4iz - 1} = 2 \oint_{|z|=1} f(z) dz.$$

Конечные особые точки функции $f(z) = \frac{1}{z^2 + 4iz - 1}$ определяются как корни уравнения

$$z^2 + 4iz - 1 = 0, \quad \text{то есть} \quad z_{0,1} = -2i \pm \sqrt{-4 + 1} = (-2 \pm \sqrt{3})i$$

и являются простыми полюсами (см. рис. 3.15 на с.103). Из них только точка $z_0 = (-2 + \sqrt{3})i$ удовлетворяет условию $|z| < 1$, то есть находится внутри контура γ , тогда как точка $z_1 = (-2 - \sqrt{3})i$ — снаружи. Согласно 1-й теореме о вычетах получаем

$$2 \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 4iz - 1} = 2 \oint_{|z|=1} f(z) dz = 4\pi i \operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{4\pi i}{2z + 4i} \Big|_{z=z_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Примечание. Аналогичным образом можно вычислять интегралы вида

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx,$$

где $R(u, v)$ – рациональная функция.

Исходя из 1-й теоремы о вычетах, можно получить, что справедливы следующие утверждения.

Следствие 3.1 (см., например, [4, теорема 5.3]). Пусть $M > 0$, $p > 1$; функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\text{Im} z > 0$, за исключением конечного числа лежащих в этой полуплоскости особых точек $z_1, \dots, z_N \neq \infty$, непрерывна на вещественной оси и для всех достаточно больших $|z|$ удовлетворяет условию

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p}.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{res}_{z=z_k} f(z). \quad (3.27)$$

Следствие 3.2 (там же, теорема 5.4). Пусть $f(z) = e^{i\alpha z} F(z)$, где $\alpha > 0$, а функция $F(z)$ аналитична на действительной оси, в верхней полуплоскости $\text{Im} z > 0$ имеет лишь конечное число особых точек $z_1, \dots, z_N \neq \infty$ и удовлетворяет условию $F(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ равномерно относительно $\arg z$. Тогда справедливо равенство (3.27).

Примечание. Учитывая, что $e^{i\alpha z} = \cos \alpha z + i \sin \alpha z$, формула (3.27) распадается на следующие две формулы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos \alpha x F(x) dx = -2\pi \text{Im} \left(\sum_{k=1}^N \text{res}_{z=z_k} e^{i\alpha z} F(z) \right);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin \alpha x F(x) dx = 2\pi \text{Re} \left(\sum_{k=1}^N \text{res}_{z=z_k} e^{i\alpha z} F(z) \right).$$

Задача 3.40. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Решение. Заметим, во-первых, что в силу четности подынтегральной функции

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$. Она имеет особые точки $z = \pm i$, каждая из которых является полюсом 3-го порядка. Из них только точка $z_0 = i$ расположена в верхней полуплоскости. Оценим снизу

$$|z^2 + 1| \geq |z^2| - 1 = |z|^2 - 1.$$

Пусть $|z| > 2$. Тогда

$$1 < \frac{|z|}{2} \Rightarrow 1 < \frac{|z|^2}{4} \Rightarrow |z|^2 - 1 \geq |z|^2 - \frac{|z|^2}{4} = \frac{3}{4}|z|^2 \Rightarrow |z^2 + 1| \geq \frac{3}{4}|z|^2.$$

Таким образом, $\forall z \in \mathbf{C}: |z| > 2$ имеем:

$$|f(z)| \leq \left(\frac{4}{3|z|^2}\right)^3 = \frac{M}{|z|^p}, \quad M = \left(\frac{4}{3}\right)^3, \quad p = 6 > 1.$$

Итак, условия следствия 3.1 выполнены. По формулам (3.27) и (3.26) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} &= i\pi \operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{i\pi}{2!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z - z_0)^3 f(z) \right] = \\ &= \frac{i\pi}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \frac{(z - i)^3}{(z - i)^3 (z + i)^3} = \frac{i\pi}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{(z + i)^3} = \\ &= \frac{i\pi}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{12}{(z + i)^5} = \frac{i6\pi}{32i^5} = \frac{3\pi}{16}. \end{aligned}$$

Задача 3.41. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 1}$.

Решение. Поскольку подынтегральная функция четная, то

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 1}.$$

Рассмотрим функцию $F(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$. Она имеет только 2 особые точки $z = \pm i$, каждая из которых является простым полюсом. Из них только $z_0 = i$ лежит в верхней полуплоскости. Как было показано при решении задачи 3.40,

$$|F(z)| \leq \frac{3}{4|z|}, \quad |z| > 2.$$

Отсюда получаем, что $F(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ равномерно относительно $\arg z$, и по следствию 3.2

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 + 1} = i\pi \operatorname{res}_{z=z_0} F(z) e^{iz} = i\pi \left. \frac{e^{iz}}{2z} \right|_{z=i} = \frac{\pi}{2} e^{-1}.$$

Остается заметить, что

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 + 1} \right] = \frac{\pi}{2e}.$$

Примечание. Попутно доказано, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2 + 1} = 0,$$

но это и так очевидно, поскольку подынтегральная функция нечетная.

4. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§4.1. Преобразование Лапласа

Пусть $f(t)$ – комплексно-значная функция действительного переменного, определенная на всей числовой оси. Тогда *преобразованием Лапласа* функции $f(t)$ называется функция комплексного переменного $F(p)$, определяемая формулой

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Для того, чтобы дальнейшее изложение имело смысл, мы должны указать некоторый класс функций $f(t)$, для которых преобразование Лапласа $F(p)$ было бы определено (хотя бы на некотором множестве). В качестве такого класса функций выбирается класс оригиналов.

Определение 4.1. *Оригиналом* называется всякая комплексно-значная функция $f(t)$, $t \in \mathbf{R}$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $f(t) = 0 \forall t < 0$, причем³⁷ $f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = f(+0)$;
- 2) $\exists \sigma \geq 0$ и $M > 0$: $|f(t)| < Me^{\sigma t} \forall t > 0$;
- 3) $\forall T > 0$ $f(t)$ имеет не более конечного числа точек разрыва на $[0; T]$, причем все эти точки разрыва 1-го рода.

Определение 4.2. Если $f(t)$ – оригинал, то величина $\sigma_0 = \inf \sigma$, где \inf берется по всем σ из условия 2) в определении оригинала, называется *показателем роста* функции $f(t)$.

Примечание. Можно показать (см., например, [1, §7.1]), что для любого оригинала $f(t)$ соответствующий ему несобственный интеграл $F(p)$, определяющий преобразование Лапласа, сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq \sigma \forall \sigma > \sigma_0$, где σ_0 – показатель роста функции $f(t)$, причем функция $F(p)$ является аналитической в области $\operatorname{Re} p \geq \sigma_0$.

Определение 4.3. Для всякого оригинала $f(t)$ его преобразование Лапласа $F(p)$ называется *изображением* оригинала $f(t)$. Указанное соответствие (между оригиналом и изображением) обозначается следующим образом:

$$f(t) \doteq F(p), \quad F(p) \doteq f(t).$$

Примечание. Вместо $F(p) \doteq f(t)$ можно использовать запись $F(p) = L[f] = L[f](p)$.

³⁷Здесь и далее мы принимаем обозначение $f(t_0 + 0)$ для одностороннего предела $\lim_{t \rightarrow t_0 + 0} f(t)$ (см. Часть I, п.6.6).

Простейшим примером оригинала является *функция Хевисайда*, определяемая как

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Действительно, условия 1) и 3) для нее выполняются очевидным образом. Кроме того, поскольку $e^0 = 1$ и $e^{\sigma t}$ возрастает по t при условии, что $\sigma > 0$, то понятно, что условие 2) выполняется $\forall \sigma > 0$ при $M = 1$. Выполняется оно также и при $\sigma = 0$, если, например, взять $M = 2$ (или вообще $M > 1$). Таким образом, показателем роста функции $\eta(t)$ является $\sigma_0 = 0$.

Найдем изображение функции Хевисайда

$$\eta(t) \doteq \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{p} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} - e^0 \right) = \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Действительно, положив $\operatorname{Re} p = \alpha$, $\operatorname{Im} p = \beta$, и предполагая, что $\alpha > 0$, получаем:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left| e^{-pt} \right| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| e^{-\alpha t} e^{-i\beta t} \right| = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\alpha t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} = 0.$$

Соглашение. Далее везде под заданной формулой функцией $f(t)$ будем понимать не ту функцию, которая задается этой формулой, а ту, которая получается из нее умножением на функцию Хевисайда. Иными словами, всюду считаем, что $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Пример 4.1. Доказать, что функция $f(t) = t^2$ является оригиналом, и найти ее показатель роста.

Решение. В силу принятого нами соглашения условие 1) из определения оригинала выполняется. Условие 3) тоже выполняется, поскольку данная функция непрерывна при $t \geq 0$. С целью проверки условия 2) заметим, что $\forall \sigma > 0$ согласно правилу Лопиталья

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{e^{\sigma t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t}{\sigma e^{\sigma t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sigma^2 e^{\sigma t}} = 0.$$

Отсюда понятно, что функция $\frac{t^2}{e^{\sigma t}}$ обязана быть ограниченной при $t \geq 0$. Иными словами, $\exists M = M(\sigma) > 0$:

$$\frac{t^2}{e^{\sigma t}} < M(\sigma) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 < M(\sigma) e^{\sigma t} \quad \forall t > 0,$$

то есть условие 2) выполняется $\forall \sigma > 0$. Таким образом, данная функция является оригиналом с показателем роста $\sigma_0 = 0$.

Примечание. Совершенно аналогично можно показать, что всякий многочлен по степеням t с вещественными или комплексными коэффициентами является оригиналом с показателем роста $\sigma_0 = 0$.

Пример 4.2. Найти непосредственно по определению изображение функции $f(t) = t^2$.

Решение. Интегрируя два раза по частям, получаем:

$$\begin{aligned} t^2 &\doteq \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^2 dt = t^2 \left(-\frac{1}{p} \right) e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{p} e^{-pt} 2t dt = \\ &= \frac{2}{p} \left(t \left(-\frac{1}{p} \right) e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{p} e^{-pt} dt \right) = -\frac{2}{p^3} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{p^3} \end{aligned}$$

при условии, что $\operatorname{Re} p > 0$ (только при этом условии верхние подстановки являются конечными величинами, – и более того, зануляются).

Примечание. Аналогично, $t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}$, $\operatorname{Re} p > 0$, $n \in \mathbf{N}$.

Пример 4.3. Найти непосредственно по определению изображение функции $f(t) = e^{\alpha t}$.

Решение. Аналогично изображению функции Хевисайда

$$e^{\alpha t} \doteq \int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = -\frac{1}{p-\alpha} e^{-(p-\alpha)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-\alpha}, \quad \operatorname{Re}(p-\alpha) > 0.$$

Примечание. Используя формулы Эйлера

$$\sin \alpha t = \frac{e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}}{2i}, \quad \cos \alpha t = \frac{e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}}{2},$$

отсюда непосредственно получаем (при $\operatorname{Re}(p \pm i\alpha) > 0$):

$$\sin \alpha t \doteq \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i\alpha} - \frac{1}{p+i\alpha} \right) = \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}, \quad \cos \alpha t \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-i\alpha} + \frac{1}{p+i\alpha} \right) = \frac{p}{p^2 + \alpha^2}.$$

Используя свойства преобразования Лапласа (см. ниже), найденные изображения можно было найти несколько проще, зная лишь только изображение функции Хевисайда.

Свойства преобразования Лапласа

Далее везде предполагается, что $f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, где σ_0 – показатель роста оригинала $f(t)$. Доказательство свойств см., например, в [1, §7.2].

1. Линейность.

Пусть $f_k(t) \doteq F_k(p)$, $\operatorname{Re} p > \sigma_k$, $k = \overline{1, n}$. Тогда $\forall \alpha_k \in \mathbf{C}$, $k = \overline{1, n}$, справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(t) \doteq \sum_{k=1}^n \alpha_k F_k(p), \quad \operatorname{Re} p > \max\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}.$$

2. Теорема подобия.

$\forall \alpha > 0$ справедливо равенство

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \operatorname{Re} p > \alpha \sigma_0.$$

3. Теорема сдвига.

Умножению оригинала на $e^{\alpha t} \forall \alpha \in \mathbf{C}$ соответствует сдвиг аргумента изображения на α :

$$e^{\alpha t} f(t) \doteq F(p - \alpha), \quad \operatorname{Re}(p - \alpha) > \sigma_0.$$

4. Теорема запаздывания.

Запаздыванию оригинала на $\tau > 0$ соответствует умножение изображения на $e^{-p\tau}$:

$$\eta(t - \tau) f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p), \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

5. Дифференцирование оригинала.

Если $f(t)$ и ее производные $f^{(k)}(t)$, $k = \overline{1, n}$, являются оригиналами, то

$$\begin{aligned} f'(t) &\doteq pF(p) - f(0), & f''(t) &\doteq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0), & \dots, \\ f^{(n)}(t) &\doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

6. Интегрирование оригинала.

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}, \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

7. Дифференцирование изображения.

Умножению оригинала на t соответствует умножение изображения на -1 и дифференцирование его по p :

$$t^n f(t) \doteq (-1)^n F^{(n)}(p), \quad n \in \mathbf{N}.$$

8. Интегрирование изображения.

Если функция $\frac{f(t)}{t}$ является оригиналом, то

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(q) dq.$$

9. Дифференцирование и интегрирование по параметру.

Если $f(t, \alpha) \doteq F(p, \alpha)$ и функции $\frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha}$ и $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t, \alpha) d\alpha$, рассматриваемые как функции переменной t , являются оригиналами, то

$$\frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha} \doteq \frac{\partial F(p, \alpha)}{\partial \alpha}, \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t, \alpha) d\alpha \doteq \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(p, \alpha) d\alpha.$$

10. **Теорема Бореля об изображении свертки.**

Свертке оригиналов

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t - \tau)d\tau$$

соответствует произведение изображений:

$$f(t) \doteq F(p), \quad g(t) \doteq G(p) \quad \Rightarrow \quad f * g \doteq F(p)G(p).$$

11. **Интеграл Дюамеля.**

Если $f(t) \doteq F(p)$, $g(t) \doteq G(p)$ и функции $f'(t)$ и $g'(t)$ – оригиналы, то

$$pF(p)G(p) \doteq f(0)g(t) + (f' * g)(t) = g(0)f(t) + (g' * f)(t).$$

12. **Теорема о связи начальных и конечных значений оригинала и изображения.**

1. Начальное значение оригинала находится по формуле:

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p).$$

2. Если существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f(+\infty)$, то

$$f(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p).$$

13. **Изображение периодической функции.** Если $f(t)$ – периодическая функция с периодом $T > 0$, то

$$f(t) \doteq \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}},$$

где

$$F_0(p) \doteq f_0(t) = \eta(T - t)f(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0, T], \\ 0, & t > T, \quad t < 0, \end{cases}$$

или $f_0(t) = f(t)[1 - \eta(t - T)]$.

Примечание. Если известно изображение функции $f_1(t) = f(t+T) \doteq F_1(p)$, то функцию $f_0(t)$ в свойстве 13 можно выразить следующим образом:

$$f_0(t) = f(t) - \eta(t - T)f(t - T + T) = f(t) - \eta(t - T)f_1(t - T),$$

и согласно свойству 4 (теорема запаздывания)

$$F_0(p) = F(p) - e^{-pT}F_1(p).$$

Например, для $f(t) = t$, $t \in [0, 1]$, $T = 1$ имеем: $f_1(t) = t + 1 \doteq \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} = F_1(p)$. Соответ-

ственно, $F_0(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p}$.

Отметим, что найденное выше изображение функции $e^{\alpha t}$ можно теперь легко получить с помощью теоремы смещения (свойство 3) непосредственно из изображения функции Хевисайда. Изображения функций $\sin \beta t$ и $\cos \beta t$ можно получить из их представления по формулам Эйлера и свойства линейности (свойство 1) преобразования Лапласа. Точно так же получают изображения функций $\text{sh} \beta t$ и $\text{ch} \beta t$. Аналогичным образом, отправляясь от изображения функции Хевисайда, а также от полученных ранее изображений, и на основе свойств преобразования Лапласа, получают следующую *таблицу изображений основных оригиналов*.

\mathcal{N}°	f(t)	F(p)	\mathcal{N}°	f(t)	F(p)
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	6	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$
2	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	7	$\text{ch} \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$	8	$\text{sh} \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$
4	$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p - \alpha)^{n+1}}$	9	$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$
5	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	10	$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$

Действительно, изображение $\mathcal{N}^\circ 2$ получаем из изображения функции Хевисайда ($\mathcal{N}^\circ 1$) и свойства 7 (дифференцирование изображения). Из изображения $\mathcal{N}^\circ 2$ и свойства 3 (теорема смещения) получаем изображение $\mathcal{N}^\circ 4$. Из изображения $\mathcal{N}^\circ 5$ и свойства 3 получаем изображение $\mathcal{N}^\circ 9$. Из изображения $\mathcal{N}^\circ 6$ и свойства 3 получаем изображение $\mathcal{N}^\circ 10$. Об остальных изображениях таблицы уже сказано ранее. Эту таблицу обычно дополняют следующими изображениями, которые уже совсем легко можно получить из нее на основе свойств преобразования Лапласа.

\mathcal{N}°	f(t)	F(p)	\mathcal{N}°	f(t)	F(p)
11	$e^{\alpha t} \text{ch} \beta t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 - \beta^2}$	16	$t \text{ch} \beta t$	$\frac{p^2 + \beta^2}{(p^2 - \beta^2)^2}$
12	$e^{\alpha t} \text{sh} \beta t$	$\frac{\beta}{(p - \alpha)^2 - \beta^2}$	17	$t e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{2(p - \alpha)\beta}{((p - \alpha)^2 + \beta^2)^2}$
13	$t \sin \beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2 + \beta^2)^2}$	18	$t e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{2(p - \alpha)\beta}{[(p - \alpha)^2 + \beta^2]^2}$
14	$t \cos \beta t$	$\frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}$	19	$t e^{\alpha t} \text{sh} \beta t$	$\frac{2(p - \alpha)\beta}{[(p - \alpha)^2 - \beta^2]^2}$
15	$t \text{sh} \beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2 - \beta^2)^2}$	20	$t e^{\alpha t} \text{ch} \beta t$	$\frac{(p - \alpha)^2 + \beta^2}{[(p - \alpha)^2 - \beta^2]^2}$

Действительно, изображения $\mathcal{N}^\circ 11, 12$ – это следствия изображений $\mathcal{N}^\circ 7, 8$ и теоремы смещения. Изображения $\mathcal{N}^\circ 13-16$ – это следствия изображений $\mathcal{N}^\circ 5-8$ и свойства 7 (дифференцирование изображения, при $n = 1$). Изображения $\mathcal{N}^\circ 17-20$ – это следствия изображений $\mathcal{N}^\circ 13-16$ и теоремы смещения.

Пример 4.4. Найти изображение функции $f(t) = t \cos^3 t + 3$.

Решение. Как известно из школьного курса тригонометрии³⁸,

$$\cos^3 t = \frac{1}{4} (\cos 3t + 3 \cos t).$$

Заметим, кроме того, что в соответствии с нашим соглашением функция $g(t) = 1$ понимается как функция Хевисайда. Поэтому, пользуясь далее свойством линейности преобразования Лапласа, можем записать:

$$L[t \cos^3 t + 3] = \frac{1}{4} L[t \cos 3t] + \frac{3}{4} L[t \cos t] + 3L[\eta].$$

Пользуясь формулой 14 из таблицы основных изображений, получаем:

$$L[t \cos 3t] = \frac{p^2 - 9}{(p^2 + 9)^2}, \quad L[t \cos t] = \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Используя наконец формулу 1 из таблицы основных изображений, окончательно находим:

$$f(t) \doteq \frac{1}{4} \cdot \frac{p^2 - 9}{(p^2 + 9)^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2} + \frac{3}{p}.$$

Пример 4.5. Найти изображение функции $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.

Решение. Проверим, что данная функция является оригиналом. Заметим, во-первых, что $t = 0$ – устранимая точка разрыва, так как (1-й замечательный предел)

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

а других точек разрыва нет. Таким образом, условия 1 и 3 выполняются. Условие 2 тоже выполняется $\forall \sigma \geq 0$, поскольку данная функция является ограниченной:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| = 0.$$

Стало быть, функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста $\sigma_0 = 0$. Пользуясь свойством 8 (интегрирование изображения) и формулой 6 из таблицы основных изображений, получаем:

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \int_p^\infty \frac{dq}{q^2 + 1} = \operatorname{arctg} q \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

³⁸Как показывает опыт, далеко не все студенты ее помнят, но эта формула довольно легко получается из формулы Эйлера:

$$\cos^3 t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 = \frac{e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}}{8} = \frac{1}{4} (\cos 3t + 3 \cos t).$$

Пример 4.6. Найти изображение функции $f(t) = \frac{\sin 5t}{t}$.

Решение. Пользуясь результатом предыдущего примера, а также свойством 2 (теорема подобия), получаем:

$$f(t) = 5 \cdot \frac{\sin 5t}{5t} \doteq 5 \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{5} \right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{5}.$$

Пример 4.7. Найти изображение функции $f(t) = \int_0^t \frac{e^{\alpha\tau} - e^{\beta\tau}}{\tau} d\tau$, $\alpha, \beta > 0$.

Решение. Заметим, что функция $f(t)$ представляется в виде

$$f(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau, \quad g(t) = \frac{z(t)}{t}, \quad z(t) = e^{\alpha t} - e^{\beta t}.$$

Проверим, во-первых, что функция $g(t)$ является оригиналом. Она имеет только одну точку разрыва $t = 0$. Заметим, что согласно правилу Лопиталя

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{z(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\alpha e^{\alpha t} - \beta e^{\beta t}}{1} = \alpha - \beta,$$

и таким образом, $t = 0$ – устранимая точка разрыва, а функция $g(t)$ ограничена на $[0; 1]$. При $t > 1$ имеем:

$$|g(t)| < e^{\alpha t} + e^{\beta t} \leq 2e^{\sigma_0 t}, \quad \sigma_0 = \max\{\alpha, \beta\}.$$

Поэтому все условия из определения оригинала выполнены и показатель роста равен σ_0 . Пользуясь формулой 3 из таблицы основных изображений и свойством 8 (интегрирование изображения), получаем:

$$g(t) \doteq \int_p^\infty \left(\frac{1}{q - \alpha} - \frac{1}{q - \beta} \right) dq = \ln \frac{q - \alpha}{q - \beta} \Bigg|_p^\infty = -\ln \frac{p - \alpha}{p - \beta} = \ln \frac{p - \beta}{p - \alpha}.$$

Пользуясь наконец свойством 6 (интегрирование оригинала), находим:

$$f(t) \doteq \frac{1}{p} \ln \frac{p - \beta}{p - \alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

Пример 4.8. Найти изображение функции $f(t) = \sin t + t \cos t$.

Решение.

I способ. Пользуясь формулами 5 и 6 из таблицы основных изображений, а также свойством 7 (дифференцирование изображения), получаем:

$$\sin t + t \cos t \doteq \frac{1}{p^2 + 1} - \left(\frac{p}{p^2 + 1} \right)' = \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2} = \frac{2p^2}{(p^2 + 1)^2}.$$

II способ. Согласно свойству 7

$$g(t) = t \sin t \doteq - \left(\frac{1}{p^2 + 1} \right)' = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} = G(p).$$

Пользуясь свойством 5 (дифференцирование оригинала), получаем

$$f(t) = g'(t) \doteq pG(p) - g(0) = \frac{2p^2}{(p^2 + 1)^2}.$$

Пример 4.9. Найти изображение функции $\varphi(t) = \int_0^t (t - \tau)^3 \sin 3\tau d\tau$.

Решение. Обозначим $f(t) = t^3$, $g(t) = \sin 3t$. Тогда $\varphi(t) = (f * g)(t)$, и по свойству 10 (изображение свертки)

$$f * g \doteq F(p)G(p), \quad \text{где } F(p) \doteq f(t), \quad G(p) \doteq g(t).$$

По формулам 2 и 6 из таблицы основных изображений

$$f(t) = t^3 \doteq \frac{6}{p^4} = F(p), \quad g(t) = \sin 3t \doteq \frac{3}{p^2 + 9}.$$

Таким образом, $\varphi(t) \doteq \frac{18}{p^4(p^2 + 9)}$.

Пример 4.10. Найти изображение функции $\varphi(t) = \int_0^t (\sin \tau + \tau \cos \tau) e^{-\tau} d\tau$.

Решение. Заметим, что

$$e^t \varphi(t) = \int_0^t (\sin \tau + \tau \cos \tau) e^{t-\tau} d\tau = \int_0^t f'(\tau) g(t - \tau) d\tau = f(0)g(t) + (f' * g)(t),$$

где $f(t) = t \sin t$, $g(t) = e^t$. По формулам 3 и 6 из таблицы основных изображений, а также по свойству 7 (дифференцирование изображения) получаем:

$$f(t) \doteq - \left(\frac{1}{p^2 + 1} \right)' = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} = F(p), \quad g(t) \doteq \frac{1}{p - 1} = G(p).$$

Тогда по свойству 11 (интеграл Дюамеля) получаем

$$e^t \varphi(t) \doteq pF(p)G(p) = \frac{2p^2}{(p^2 + 1)^2(p - 1)} = \Phi(p).$$

Пользуясь наконец свойством 3 (теорема смещения), находим

$$\varphi(t) = e^{-t} e^t \varphi(t) \doteq \Phi(p + 1) = \frac{2(p + 1)^2}{((p + 1)^2 + 1)^2 p}.$$

Пример 4.11. Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & t \in [0; \pi), \\ 0, & t \geq \pi. \end{cases}$$

Решение. В соответствии с формулой приведения $\cos(t - \pi) = -\cos t$. Поэтому, учитывая, что $\eta(t - \pi) = 1$ при $t \geq \pi$ и $\eta(t - \pi) = 0$ при $t < \pi$, можем представить функцию $f(t)$ в виде

$$f(t) = \cos t + \eta(t - \pi) \cos(t - \pi).$$

Пользуясь далее формулой 5 из таблицы основных изображений, а также свойством 4 (теорема запаздывания), получаем

$$f(t) \doteq \frac{p}{p^2 + 1} + e^{-p\pi} \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{p(1 + e^{-p\pi})}{p^2 + 1}.$$

§4.2. Нахождение изображения функций, заданных графически

При решении прикладных задач часто требуется найти изображение оригинала, заданного графически. В качестве такого оригинала может выступать, например, входной сигнал, действующий на систему автоматического регулирования. В таких случаях следует сначала 1) записать аналитическое выражение оригинала с помощью функции Хевисайда, а затем уже 2) привести полученное выражение к виду, удобному для применения формул из таблицы основных изображений и свойств преобразования Лапласа. Нередко бывает так, что график оригинала состоит как бы из нескольких "всплесков", каждый из которых является графиком функции вида $f_0(t)$, имеющей аналитическое выражение на некотором отрезке $[T_1, T_2]$, то есть

$$f_0(t) = \begin{cases} g(t), & t \in [T_1, T_2], \\ 0, & t \notin [T_1, T_2]. \end{cases}$$

Предполагается, что эти отрезки не пересекаются (или хотя бы не имеют парно общих внутренних точек - для следующего далее алгоритма этого достаточно). Тогда исходный оригинал $f(t)$ является суммой оригиналов вида $f_0(t)$. И соответственно, его изображение является суммой изображений вида $F_0(p) \doteq f_0(t)$. При этом изображение $F_0(p)$ можно найти следующим образом. Заметим, во-первых, что $f_0(t) = g(t)[\eta(t - T_1) - \eta(t - T_2)]$. Предположим теперь, что нам известны изображения $G_1 = L[g_1]$ и $G_2 = L[g_2]$, где $g_1(t) = g(t + T_1)$, $g_2(t) = g(t + T_2)$. Тогда по свойству 4 (теорема запаздывания)

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \eta(t - T_1)g(t - T_1 + T_1) - \eta(t - T_2)g(t - T_2 + T_2) = \\ &= \eta(t - T_1)g_1(t - T_1) - \eta(t - T_2)g_2(t - T_2) \doteq e^{-pT_1}G_1(p) - e^{-pT_2}G_2(p). \end{aligned}$$

Пример 4.12. Найти изображение функции $f(t)$, заданной графически (см. рис. 4.1).

Решение. Заметим, что $f(t) = f_0(t) + f_1(t) + f_2(t)$, где

$$f_0(t) = \begin{cases} t, & t \in (0, 1], \\ 0, & t \notin (0, 1], \end{cases} \quad f_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in (1, 2], \\ 0, & t \notin (1, 2], \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} (3 - t), & t \in (2, 3], \\ 0, & t \notin (2, 3], \end{cases}$$

или

$$f_0(t) = t[1 - \eta(t - 1)] = t - (t - 1 + 1)\eta(t - 1) = t - (t - 1)\eta(t - 1) - \eta(t - 1),$$

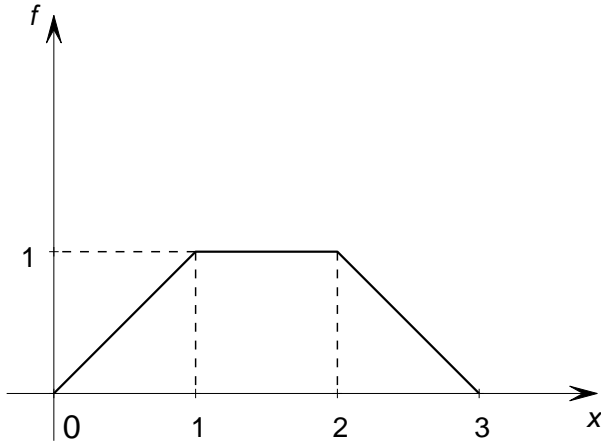


Рис. 4.1

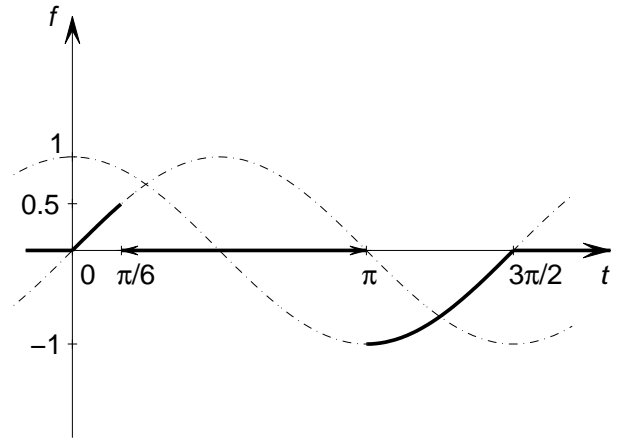


Рис. 4.2

$$f_1(t) = \eta(t-1) - \eta(t-2),$$

$$f_2(t) = (3-t)[\eta(t-2) - \eta(t-3)] = -(t-2-1)\eta(t-2) + (t-3)\eta(t-3) = \eta(t-2) - (t-2)\eta(t-2) + (t-3)\eta(t-3).$$

Таким образом,

$$f(t) = t - (t-1)\eta(t-1) - (t-2)\eta(t-2) + (t-3)\eta(t-3).$$

Пользуясь свойством 4 (теорема запаздывания) и таблицей основных изображений, находим

$$f(t) \doteq \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-2p}}{p^2} + \frac{e^{-3p}}{p^2}.$$

Пример 4.13. Найти изображение функции (см. рис. 4.2 на с.117)

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right], \\ \cos t, & t \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Заметим, что $f(t) = f_0(t) + g_0(t)$, где

$$f_0(t) = \sin t \left(1 - \eta\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin t - f_1\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\eta\left(t - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$f_1(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t \doteq \frac{\sqrt{3} + p}{2(p^2 + 1)} = F_1(p);$$

$$g_0(t) = \cos t \left(\eta\left(t - \pi\right) - \eta\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)\right) = g_1(t - \pi)\eta(t - \pi) - g_2\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)\eta\left(t - \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$g_1(t) = \cos(t + \pi) = -\cos t \doteq -\frac{p}{p^2 + 1} = G_1(p),$$

$$g_2(t) = \cos\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1} = G_2(p).$$

Тогда согласно свойству 4 (теорема запаздывания) получаем:

$$f_0(t) \doteq \frac{1}{p^2 + 1} - e^{-p\pi/6} F_1(p), \quad g_0(t) \doteq e^{-p\pi} G_1(p) - e^{-3p\pi/2} G_2(p).$$

Суммируя эти изображения, окончательно находим

$$f(t) \doteq \frac{1}{p^2 + 1} \left[1 - e^{-p\pi/6} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{p}{2} \right) - pe^{-p\pi} - e^{-3p\pi/2} \right].$$

§4.3. Восстановление оригинала по изображению

На практике используются, в основном, следующие методы.

1. **Непосредственное восстановление.** Этот метод состоит в использовании свойств преобразования Лапласа и таблицы основных изображений. При этом, если изображение представляет собой рациональную дробь (отношение двух многочленов по степеням p), то во многих случаях бывает удобно предварительно разложить ее в сумму простейших дробей. Рассмотрим примеры.

Пример 4.14. Найти оригинал изображения $F(p) = \frac{p}{p^2 + 4p + 13}$.

Решение. Выделяя полный квадрат в знаменателе, получаем

$$F(p) = \frac{p}{(p+2)^2 + 9} = \frac{p+2}{(p+2)^2 + 9} - \frac{2}{(p+2)^2 + 9}.$$

Вспомним, что (см. таблицу основных изображений и свойство 3 – теорему запаздывания)

$$\frac{p}{p^2 + \beta^2} \doteq \cos \beta t, \quad \frac{\beta}{p^2 + \beta^2} \doteq \sin \beta t, \quad F(p - \alpha) \doteq e^{\alpha t} f(t).$$

Подгоняя полученное выражение под эти формулы, можем записать

$$F(p) = \frac{p+2}{(p+2)^2 + 3^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(p+2)^2 + 9} \doteq e^{-2t} \cos 3t - \frac{2}{3} e^{-2t} \sin 3t.$$

Пример 4.15. Найти оригинал изображения $F(p) = \frac{e^{-3p} p}{(p^2 - 1)^3}$.

Решение. Согласно свойству 4 (теорема запаздывания), нам достаточно найти оригинал функции

$$G(p) = \frac{p}{(p^2 - 1)^3} = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{(p^2 - 1)^2} \right)' = -\frac{1}{4} Z'(p), \quad Z(p) = \frac{1}{(p^2 - 1)^2}.$$

Оригинал изображения $Z(p)$ мы можем найти, например, следующими двумя способами.

I способ. Пользуясь свойством 10 (теорема Бореля о произведении изображений) и формулой 8 из таблицы основных изображений, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 - 1)^2} &= \frac{1}{p^2 - 1} \cdot \frac{1}{p^2 - 1} \doteq \text{sh } t * \text{sh } t = \int_0^t \text{sh}(t - \tau) \text{sh } \tau d\tau = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^t (e^{t-\tau} - e^{-t+\tau}) (e^\tau - e^{-\tau}) d\tau = \\ &= \frac{1}{4} \left(e^t t - e^t \int_0^t e^{-2\tau} d\tau - e^{-t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau + e^{-t} t \right) = \\ &= \frac{t}{2} \text{ch } t + \frac{1}{8} (e^t [e^{-2t} - 1] - e^{-t} [e^{2t} - 1]) = \frac{t}{2} \text{ch } t - \frac{1}{2} \text{sh } t. \end{aligned}$$

II способ. Раскладывая под квадратом на простейшие дроби, получаем

$$Z(p) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(p-1)^2} - \frac{2}{p^2-1} + \frac{1}{(p+1)^2} \right).$$

Используя далее формулы 4 и 8 из таблицы основных изображений, находим

$$Z(p) \doteq \frac{1}{4} (te^t - 2 \text{sh } t + te^{-t}) = \frac{1}{4} (2t \text{ch } t - 2 \text{sh } t).$$

Итак, $Z(p) \doteq \frac{1}{2} (t \text{ch } t - \text{sh } t)$, откуда, используя свойство 7 (дифференцирование изображения), получаем

$$G(p) = -\frac{1}{4} Z'(p) \doteq \frac{1}{8} \cdot t \cdot (t \text{ch } t - \text{sh } t).$$

Пользуясь наконец свойством 4 (теорема запаздывания), заключаем, что

$$F(p) \doteq \frac{1}{8} \eta(t-3)(t-3) \left((t-3) \text{ch}(t-3) - \text{sh}(t-3) \right).$$

2. Использование первой теоремы разложения.

Исходя из свойства линейности преобразования Лапласа и пользуясь изображением номер 2 из таблицы основных изображений, можно показать, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. Если функция $F(p)$ аналитична в некоторой окрестности точки $p = \infty$ и ее разложение в ряд Лорана по степеням $\frac{1}{p}$ имеет вид

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}},$$

то сумма ряда

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}, \quad t \geq 0,$$

продолженная нулем при $t < 0$, является оригиналом изображения $F(p)$.

Указанный метод основан на использовании стандартных разложений в ряд Маклорена для разложения в ряд Лорана изображения $F(p)$ и последующем применении теоремы 4.1, которое фактически состоит в почленном применении преобразования Лапласа к указанному ряду (см. формулу 2 из таблицы основных изображений).

Пример 4.16. Найти оригинал изображения $F(p) = \frac{1}{p} \cos \frac{1}{\sqrt{p}}$.

Решение. Вспомним, что разложение $\cos z$ в ряд Маклорена имеет вид:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Подставляя вместо $z = \frac{1}{\sqrt{p}}$, получаем

$$F(p) = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p^n (2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p^{n+1} (2n)!} \Rightarrow c_n = (-1)^n \frac{1}{(2n)!}.$$

Применяя первую теорему разложения, находим

$$F(p) \doteq f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(2n)! n!}.$$

3. Использование второй теоремы разложения.

Теорема 4.2. Если изображение $F(p)$ является однозначной функцией и имеет лишь конечное число особых точек $p_k \neq \infty$, $k = \overline{1, r}$, то оригинал этого изображения имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^r \operatorname{res}_{p=p_k} [e^{pt} F(p)].$$

Примечание. Напомним, что если $F(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, где $P_m(p)$ и $Q_n(p)$ многочлены по переменной p , причем степени многочленов $\deg P(p) = m < n = \deg Q(p)$, и корни знаменателя p_1, \dots, p_r имеют кратности s_1, \dots, s_r , $s_1 + \dots + s_r = n$, то вычит

$$\operatorname{res}_{p=p_k} [e^{pt} F(p)] = \frac{1}{(s_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{s_k - 1}}{dp^{s_k - 1}} [(p - p_k)^{s_k} e^{pt} F(p)],$$

и таким образом,

$$f(t) = \sum_{k=1}^r \frac{1}{(s_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{s_k - 1}}{dp^{s_k - 1}} [(p - p_k)^{s_k} e^{pt} F(p)].$$

В частности, если $s_k = 1$, то есть корень $p = p_k$ простой, то соответствующий вычет можно вычислить по более простой формуле:

$$\operatorname{res}_{p=p_k} [e^{pt} F(p)] = \frac{P_m(p_k)}{Q'_n(p_k)} e^{p_k t}.$$

Заметим, наконец, что если все коэффициенты многочленов $P_m(p)$ и $Q_n(p)$ вещественны, то³⁹ для каждой пары комплексно сопряженных корней p_l и p_k справедливо равенство

$$\operatorname{res}_{p=p_k} [e^{pt} F(p)] + \operatorname{res}_{p=p_l} [e^{pt} F(p)] = 2\operatorname{Re} \operatorname{res}_{p=p_k} [e^{pt} F(p)].$$

Пример 4.17. Найти оригинал изображения $F(p) = \frac{p}{(p^2 - 1)^3}$.

Решение. Поскольку $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$, то понятно, что знаменатель $Q = (p^2 - 1)^3$ имеет два корня $p_{1,2} = \pm 1$ кратности $s_{1,2} = 3$. Иными словами, функция $F(p)$ имеет только две особые точки $p_1 = -1$ и $p_2 = 1$, которые являются полюсами 3-го порядка. Согласно второй теореме разложения оригинал этой функции имеет вид

$$f(t) = \operatorname{res}_{p=-1} \frac{e^{pt} p}{(p^2 - 1)^3} + \operatorname{res}_{p=1} \frac{e^{pt} p}{(p^2 - 1)^3}.$$

По формуле вычета в полюсе 3-го порядка имеем

$$\operatorname{res}_{p=-1} \frac{e^{pt} p}{(p^2 - 1)^3} = \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow -1} \left((p + 1)^3 \frac{e^{pt} p}{(p^2 - 1)^3} \right)'' = \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow -1} \left(\frac{e^{pt} p}{(p - 1)^3} \right)''.$$

Используя формулу Лейбница

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}, \quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

можем выражение $R_1 = \left(\frac{e^{pt} p}{(p - 1)^3} \right)''$ записать в виде

$$R_1 = (e^{pt})'' \frac{p}{(p - 1)^3} + 2(e^{pt})' \left(\frac{p}{(p - 1)^3} \right)' + e^{pt} \left(\frac{p}{(p - 1)^3} \right)''.$$

Учитывая, что

$$\frac{p}{(p - 1)^3} = \frac{(p - 1) + 1}{(p - 1)^3} = \frac{1}{(p - 1)^2} + \frac{1}{(p - 1)^3},$$

получаем

$$R_1 = e^{pt} \left(\frac{t^2 p}{(p - 1)^3} + 2t \left[\frac{-2}{(p - 1)^3} + \frac{-3}{(p - 1)^4} \right] + \left[\frac{6}{(p - 1)^4} + \frac{12}{(p - 1)^5} \right] \right),$$

³⁹Отсюда, в частности, следует, что для каждого комплексного корня многочлена $Q_n(p)$ существует корень той же кратности, который является для него комплексно сопряженным.

и таким образом,

$$\lim_{p \rightarrow -1} R_1 = e^{-t} \left(\frac{t^2}{8} + 2t \left[\frac{1}{4} - \frac{3}{16} \right] + \left[\frac{3}{8} - \frac{3}{8} \right] \right),$$

откуда

$$\operatorname{res}_{p=-1} \frac{e^{pt} p}{(p^2 - 1)^3} = \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow -1} R_1 = \frac{e^{-t}}{16} (t^2 + t).$$

Аналогичным образом,

$$\operatorname{res}_{p=1} \frac{e^{pt} p}{(p^2 - 1)^3} = \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow 1} R_2,$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \left[\frac{(p-1)^3 e^{pt} p}{(p^2-1)^3} \right]'' = \left[\frac{e^{pt} p}{(p+1)^3} \right]'' = \left[e^{pt} \left\{ \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{(p+1)^3} \right\} \right]'' = \\ &= e^{pt} \left(\frac{t^2 p}{(p+1)^3} + 2t \left[\frac{-2}{(p+1)^3} + \frac{3}{(p+1)^4} \right] + \left[\frac{6}{(p+1)^4} - \frac{12}{(p+1)^5} \right] \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\lim_{p \rightarrow 1} R_2 = e^t \left(\frac{t^2}{8} - 2t \left[\frac{1}{4} - \frac{3}{16} \right] + \left[\frac{3}{8} - \frac{3}{8} \right] \right),$$

или

$$\lim_{p \rightarrow 1} R_2 = \frac{e^t}{8} (t^2 - t),$$

и окончательно,

$$f(t) = \frac{t}{8} (t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t).$$

Пример 4.18. Найти оригинал изображения $F(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^2}$.

Решение. Заметим, что знаменатель $Q = (p^2 + 1)^2$ имеет всего два корня $p_{1,2} = \pm i$ кратности $s_{1,2} = 2$. Иными словами, функция $F(p)$ имеет лишь две особые точки $p_1 = i$ и $p_2 = -i$, которые являются полюсами 2-го порядка, причем p_2 является комплексно сопряженным к p_1 , а $F(p)$ представляет собой отношение двух многочленов с вещественными коэффициентами. Поэтому согласно второй теореме разложения оригинал изображения $F(p)$ можно найти по формуле:

$$f(t) = \operatorname{res}_{p=i} \frac{e^{pt}}{(p^2 + 1)^2} + \operatorname{res}_{p=-i} \frac{e^{pt}}{(p^2 + 1)^2} = 2 \operatorname{Re} \operatorname{res}_{p=i} \frac{e^{pt}}{(p^2 + 1)^2},$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{p=i} \frac{e^{pt}}{(p^2 + 1)^2} &= \frac{1}{1!} \lim_{p \rightarrow i} \frac{d}{dp} \left((p-i)^2 \frac{e^{pt}}{(p^2 + 1)^2} \right) = \lim_{p \rightarrow i} \left(\frac{e^{pt}}{(p+i)^2} \right)' = \\ &= \lim_{p \rightarrow i} e^{pt} \left(\frac{t}{(p+i)^2} - \frac{2}{(p+i)^3} \right) = e^{it} \left(-\frac{t}{4} - \frac{i}{4} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $e^{it} = (\cos t + i \sin t)$, отсюда находим

$$f(t) = 2\operatorname{Re} \operatorname{res}_{p=i} \frac{e^{pt}}{(p^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2}(t \cos t - \sin t) = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t).$$

Пример 4.19. Найти оригинал изображения $F(p) = \frac{1}{p^4 + 1}$.

Решение. Находя по второй формуле Муавра (см. с.56) 4 корня четвертой степени из -1 , получаем, что функция $F(p)$ имеет всего 4 особых точки:

$$p_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm i \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p_{3,4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i \frac{1}{\sqrt{2}},$$

каждая из которых является простым полюсом, причем p_2 является комплексно сопряженным к p_1 , p_4 является комплексно сопряженным к p_3 , а $F(p)$ представляет собой отношение двух многочленов с вещественными коэффициентами. Поэтому согласно второй теореме разложения оригинал изображения $F(p)$ можно найти по формуле:

$$f(t) = 2\operatorname{Re} \operatorname{res}_{p=p_1} \frac{e^{pt}}{(p^4 + 1)} + 2\operatorname{Re} \operatorname{res}_{p=p_3} \frac{e^{pt}}{(p^4 + 1)},$$

где

$$\operatorname{res}_{p=p_k} \frac{e^{pt}}{(p^4 + 1)} = \frac{e^{pt}}{(p^4 + 1)' } \Big|_{p=p_k} = \frac{e^{p_k t}}{4p_k^3} = \frac{e^{p_k t} p_k}{4p_k^4} = -\frac{1}{4} e^{p_k t} p_k, \quad k = 1, 3.$$

Заметим, что

$$\operatorname{Re} e^{(x+iy)t}(x+iy) = \operatorname{Re} e^{xt}(\cos yt + i \sin yt)(x+iy) = e^{xt}(x \cos yt - y \sin yt),$$

откуда

$$f(t) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \left(\cos \frac{t}{\sqrt{2}} - \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}} \left(-\cos \frac{t}{\sqrt{2}} - \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \right),$$

или

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{t}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} \frac{t}{\sqrt{2}} - \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} \frac{t}{\sqrt{2}} \right).$$

§4.4. Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t). \quad (4.1)$$

Далее мы везде предполагаем, что $f(t)$ – оригинал. Зададим начальные условия для этого уравнения:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \quad (4.2)$$

Для того, чтобы решить задачу Коши (4.1), (4.2), можно поступить следующим образом. Пусть $F(p) \doteq f(t)$ – изображение правой части, а $X(p) \doteq x(t)$ – изображение искомого решения. Применим к обеим частям уравнения (4.1) преобразование Лапласа. Тогда, учитывая, что согласно свойству 5 (дифференцирование оригинала)

$$x'(t) \doteq pX(p) - x_0, \quad x''(t) \doteq p^2X(p) - px_0 - x_1, \quad x'''(t) \doteq p^3X(p) - p^2x_0 - px_1 - x_2, \\ \dots, \quad x^{(n)}(t) \doteq p^nX(p) - p^{n-1}x_0 - \dots - px_{n-2} - x_{n-1},$$

а также пользуясь свойством 1 (линейность) преобразования Лапласа, мы получим операторное уравнение вида

$$L(p)X(p) + Q(p) = F(p) \quad (4.3)$$

относительно неизвестного изображения $X(p)$, где

$$L(p) = p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n$$

– характеристический многочлен уравнения (4.1), а $Q(p)$ – некоторый многочлен степени $\deg Q(p) = n - 1$ с коэффициентами, зависящими от начальных данных x_0, x_1, \dots, x_{n-1} .

Уравнение (4.3) решается тривиальным образом:

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{L(p)}.$$

После этого остается лишь восстановить оригинал $x(t)$ по изображению $X(p)$.

В следующей таблице приведен общий вид многочлена $Q(p)$ для $n = \overline{1, 4}$:

n	$Q(p)$
1	$Q = -x_0$
2	$Q = -x_0(p + a_1) - x_1$
3	$Q = -x_0(p^2 + a_1p + a_2) - x_1(p + a_1) - x_2$
4	$Q = -x_0(p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3) - x_1(p^2 + a_1p + a_2) - x_2(p + a_1) - x_3$

Примечание. Уже из этой таблицы видно (при данных значениях n , но так будет и в общем случае), что $Q(p) \equiv 0$ при нулевых начальных данных, то есть когда

$$x_0 = x_1 = \dots = x_{n-1} = 0.$$

Кроме того, можно заметить еще одну закономерность. Определим на классе всех многочленов оператор понижения степени D , действие которого состоит в том, что показатели всех степеней p многочлена понижаются на единицу, а нулевые степени отбрасываются. В частности, для характеристического многочлена $L(p)$ будем иметь

$$DL(p) = D[p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n] = p^{n-1} + a_1p^{n-2} + \dots + a_{n-1}.$$

Например, при $n = 3$: $DL(p) = D[p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3] = p^2 + a_1p + a_2$. Тогда в общем случае

$$Q(p) = -x_0DL(p) - x_1D^2L(p) - x_2D^3L(p) - \dots - x_{n-1}D^nL(p). \quad (4.4)$$

Впрочем, при небольших значениях n многочлен $Q(p)$ всегда можно найти непосредственно (см. ниже пример 4.21).

Преимущества операционного метода по сравнению с классическим методом решения задачи Коши (4.1), (4.2)

1. Решение дифференциального уравнения сводится к решению алгебраического уравнения достаточно простого вида.
2. В отличие от классического метода, при котором сначала ищут общее решение линейного однородного дифференциального уравнения, а затем находят частное решение методом неопределенных коэффициентов, либо методом вариации произвольных постоянных, потом записывают общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения, и только после этого выражают неизвестные постоянные из начальных условий (а для этого еще надо вычислить необходимое количество производных полученного решения), в операционном методе начальные условия учитываются автоматически. Однако операционный метод позволяет найти также и общее решение уравнения (4.1). Для этого достаточно просто считать начальные условия произвольными постоянными, то есть положить $x_0 = C_1, \dots, x_{n-1} = C_n$.
3. Операционный метод применим для широкого класса кусочно-непрерывных правых частей $f(t)$, а также правых частей, заданных графически, как это и бывает довольно часто в прикладных задачах (см. ниже пример 4.20). Кроме того, операционный метод можно аналогичным образом использовать также и для решения линейных уравнений с переменными коэффициентами. Существуют операционные методы и для решения уравнений в частных производных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, для вычисления несобственных интегралов и суммирования рядов.

Пример 4.20. Решить задачу Коши

$$x'' + x = f(t), \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0,$$

где правая часть $f(t)$ – разрывная функция из примера 4.11 на с.115.

Решение. Прежде всего, перейдем от исходной задачи Коши к уравнению в изображениях (4.3). Пользуясь результатом примера 4.11, находим изображение правой части:

$$f(t) \doteq \frac{p(1 + e^{-p\pi})}{p^2 + 1} = F(p).$$

Далее, выписываем характеристический многочлен: $L(p) = p^2 + 1$. И наконец, по таблице для многочлена начальных условий $Q(p)$ при $n = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, находим: $Q(p) = -x_0p - x_1 = p$. Таким образом, получаем уравнение в изображениях:

$$L(p)X(p) + Q(p) = F(p) \quad \Leftrightarrow \quad (p^2 + 1)X(p) + p = \frac{p(1 + e^{-p\pi})}{p^2 + 1},$$

решая которое, находим

$$X(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2} + e^{-p\pi} \frac{p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Пользуясь изображениями $\mathcal{N}^\circ 13$ и 5 из таблицы основных изображений, а также свойством линейности, получаем:

$$\frac{p}{(p^2 + 1)^2} \doteq \frac{t}{2} \sin t, \quad \frac{p}{p^2 + 1} \doteq \cos t.$$

Пользуясь свойством 4 (теорема запаздывания), находим:

$$e^{-p\pi} \frac{p}{(p^2 + 1)^2} \doteq \eta(t - \pi) \varphi(t - \pi), \text{ где } \varphi(t) = \frac{t}{2} \sin t \doteq \frac{p}{(p^2 + 1)^2}.$$

Согласно известной формуле приведения $\sin(t - \pi) = -\sin t$. Стало быть, решение исходной задачи Коши

$$x(t) = \frac{t}{2} \sin t - \eta(t - \pi) \frac{t - \pi}{2} \sin t - \cos t,$$

или

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} \sin t - \cos t, & t \in [0; \pi), \\ \frac{t}{2} \sin t - \frac{t - \pi}{2} \sin t - \cos t = \frac{\pi}{2} \sin t - \cos t, & t \geq \pi. \end{cases}$$

Проверка. Находим производные:

$$x'(t) = \begin{cases} \frac{3}{2} \sin t + \frac{t}{2} \cos t, & t \in [0; \pi), \\ \frac{\pi}{2} \cos t + \sin t, & t \geq \pi; \end{cases}$$

$$x''(t) = \begin{cases} 2 \cos t - \frac{t}{2} \sin t, & t \in [0; \pi), \\ -\frac{\pi}{2} \sin t + \cos t, & t \geq \pi. \end{cases}$$

Таким образом,

$$x''(t) + x(t) = \begin{cases} \cos t, & t \in [0; \pi), \\ 0, & t \geq \pi, \end{cases} \quad \text{то есть } x'' + x = f(t).$$

При этом очевидно, что $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$, и тем самым, полученная нами функция $x(t)$ является решением исходной задачи Коши.

Примечание. Такой подробной проверки обычно не делают, ограничиваясь проверкой выполнения начальных условий $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$.

Пример 4.21. Решить задачу Коши

$$x'' - 2x' + x = t^2 e^{-3t}, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 1.$$

Решение. Прежде всего, перейдем от исходной задачи Коши к уравнению в изображениях (4.3). Мы сделаем это двумя способами.

I способ. По формуле 4 из таблицы основных изображений находим

$$f(t) = t^2 e^{-3t} \doteq \frac{2}{(p+3)^3}.$$

Обозначая $x(t) \doteq X(p)$ и пользуясь свойством 5 (дифференцирование оригинала), находим

$$x'(t) \doteq pX(p) - x_0 = pX(p) + 1, \quad x''(t) \doteq p^2 X(p) - px_0 - x_1 = p^2 X(p) + p - 1.$$

Таким образом, применяя преобразование Лапласа к обеим частям исходного уравнения, получаем

$$p^2 X(p) + p - 1 - 2(pX(p) + 1) + X(p) = \frac{2}{(p+3)^3},$$

или

$$(p^2 - 2p + 1)X(p) + p - 3 = \frac{2}{(p+3)^3}.$$

II способ. Изображение правой части находим так же, как и выше:

$$f(t) = t^2 e^{-3t} \doteq \frac{2}{(p+3)^3} = F(p).$$

Непосредственно по виду левой части исходного уравнения выписываем характеристический многочлен

$$L(p) = p^2 - 2p + 1.$$

Действуем на него два раза оператором понижения степени:

$$DL(p) = D[p^2 - 2p + 1] = p - 2 \quad \Rightarrow \quad D^2 L(p) = D[p - 2] = 1.$$

Пользуясь формулой (4.4), выписываем многочлен начальных условий

$$Q(p) = -x_0 DL(p) - x_1 D^2 L(p) = (p - 2) - 1 = p - 3.$$

Записываем уравнение в изображениях (4.3):

$$(p^2 - 2p + 1)X(p) + (p - 3) = \frac{2}{(p+3)^3}.$$

Получив уравнение в изображениях (способом I или II), выражаем из него изображение решения

$$(p-1)^2 X(p) = \frac{2}{(p+3)^3} - (p-3),$$

$$X(p) = \frac{2}{(p+3)^3(p-1)^2} - \frac{p-3}{(p-1)^2} = \frac{2}{(p+3)^3(p-1)^2} - \frac{1}{p-1} + \frac{2}{(p-1)^2}.$$

По таблице основных изображений находим

$$\frac{1}{p-1} \doteq e^t, \quad \frac{2}{(p-1)^2} \doteq 2te^t.$$

Чтобы восстановить оригинал изображения $G(p) = \frac{1}{(p+3)^3(p-1)^2}$, удобно воспользоваться второй теоремой разложения. Функция $G(p)$ имеет только две особые точки: $p_1 = -3$ – полюс 3-го порядка и $p_2 = 1$ – полюс 2-го порядка. По формулам вычета в полюсах 3-го и 2-го порядка получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{p=-3} e^{pt} G(p) &= \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow -3} ((p+3)^3 e^{pt} G(p))'' = \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow -3} \left(\frac{e^{pt}}{(p-1)^2} \right)'' = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow -3} e^{pt} \left(\frac{t^2}{(p-1)^2} - \frac{4t}{(p-1)^3} + \frac{6}{(p-1)^4} \right) = \frac{1}{2} e^{-3t} \left(\frac{t^2}{16} + \frac{t}{16} + \frac{3}{128} \right); \\ \operatorname{res}_{p=1} e^{pt} G(p) &= \frac{1}{1!} \lim_{p \rightarrow 1} ((p-1)^2 e^{pt} G(p))' = \lim_{p \rightarrow 1} \left(\frac{e^{pt}}{(p+3)^3} \right)' = \\ &= \lim_{p \rightarrow 1} e^{pt} \left(\frac{t}{(p+3)^3} - \frac{3}{(p+3)^4} \right) = e^t \left(\frac{t}{64} - \frac{3}{256} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, согласно второй теореме разложения оригинал

$$2G(p) \doteq 2g(t) = 2 \sum_{k=1}^2 \operatorname{res}_{p=p_k} e^{pt} G(p) = \frac{e^{-3t}}{16} \left(t^2 + t + \frac{3}{8} \right) + \frac{e^t}{32} \left(t - \frac{3}{4} \right),$$

и следовательно, решение исходной задачи Коши

$$x(t) = 2g(t) - e^t + 2te^t = -\frac{131}{128}e^t + \frac{65}{32}te^t + \frac{e^{-3t}}{16} \left(t^2 + t + \frac{3}{8} \right).$$

Проверим выполнение начальных условий:

$$\begin{aligned} x(0) &= -\frac{131}{128} + \frac{3}{128} = -\frac{128}{128} = -1; \\ x'(t) &= \left(-\frac{131}{128} + \frac{65}{32} \right) e^t + \frac{65}{32} te^t - 3 \frac{e^{-3t}}{16} \left(t^2 + t + \frac{3}{8} \right) + \frac{e^{-3t}}{16} (2t + 1); \\ x'(0) &= \frac{260 - 131}{128} - \frac{9}{128} + \frac{1}{16} = \frac{260 - 131 - 9 + 8}{128} = \frac{128}{128} = 1. \end{aligned}$$

§4.5. Применение операционного исчисления к решению линейных систем дифференциальных уравнений

Линейные системы дифференциальных уравнений n -го порядка с постоянными коэффициентами решаются с применением операционного исчисления совершенно аналогично линейным дифференциальным уравнениям n -го порядка с постоянными коэффициентами. Единственное отличие состоит лишь в том, что вместо одного уравнения в изображениях мы получим систему

таких уравнений, линейную относительно изображений искомых функций. Рассмотрим для простоты случай $n = 2$.

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + f(t), \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + g(t), \end{cases} \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Пусть $X(p), Y(p)$ – изображения функций $x(t), y(t)$, дающих решение поставленной задачи Коши, а $F(p), G(p)$ – изображения функций $f(t), g(t)$. Применим к обоим уравнениям системы преобразование Лапласа. Тогда, учитывая, что согласно свойству 5 (дифференцирование оригинала)

$$x'(t) \doteq pX(p) - x_0, \quad y'(t) \doteq pY(p) - y_0,$$

мы получим линейную систему операторных уравнений вида

$$\begin{cases} (p - a_{11})X(p) - a_{12}Y(p) = x_0 + F(p), \\ -a_{21}X(p) + (p - a_{22})Y(p) = y_0 + G(p). \end{cases}$$

Решая эту систему относительно неизвестных изображений $X(p), Y(p)$ (например, методом Гаусса или по правилу Крамера), и восстанавливая затем их оригиналы $x(t), y(t)$, получаем решение исходной задачи Коши.

Пример 4.22. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x - 3y, \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 1.$$

Решение. Пусть $X(p), Y(p)$ – изображения функций $x(t), y(t)$. По свойству 5 (дифференцирование оригинала)

$$x'(t) \doteq pX(p) - x(0) = pX(p) + 1, \quad y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) - 1.$$

Таким образом, применяя к уравнениям системы преобразование Лапласа, получим

$$\begin{cases} pX(p) + 1 = 2X(p) + Y(p), \\ pY(p) - 1 = X(p) - 3Y(p), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p - 2)X(p) - Y(p) = -1, \\ -X(p) + (p + 3)Y(p) = 1. \end{cases}$$

Домножая первое уравнение на $(p + 3)$ и прибавляя к нему второе, находим

$$X(p) = -\frac{p + 2}{p^2 + p - 7} = -\left[\frac{p + \frac{1}{2}}{(p + \frac{1}{2})^2 - \frac{29}{4}} + \frac{\frac{3}{2}}{(p + \frac{1}{2})^2 - \frac{29}{4}} \right].$$

Используя свойство 3 (теорему смещения) и формулы 7 и 8 из таблицы основных изображений и учитывая, что $\frac{3}{2} = \frac{3}{\sqrt{29}} \cdot \frac{\sqrt{29}}{2}$, получаем

$$X(p) \doteq -e^{-t/2} \left(\operatorname{ch} \frac{\sqrt{29}}{2}t + \frac{3}{\sqrt{29}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{29}}{2}t \right) = x(t).$$

Аналогичным образом, домножая второе уравнение на $(p - 2)$ и прибавляя к нему первое, находим

$$Y(p) = \frac{p - 3}{p^2 + p - 7} = \frac{p + \frac{1}{2}}{(p + \frac{1}{2})^2 - \frac{29}{4}} - \frac{\frac{7}{2}}{(p + \frac{1}{2})^2 - \frac{29}{4}},$$

$$Y(p) \doteq e^{-t/2} \left(\operatorname{ch} \frac{\sqrt{29}}{2} t - \frac{7}{\sqrt{29}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{29}}{2} t \right) = y(t).$$

Проверим выполнение начальных условий:

$$x(0) = -e^0 \left(\operatorname{ch} 0 + \frac{3}{\sqrt{29}} \operatorname{sh} 0 \right) = -1; \quad y(0) = e^0 \left(\operatorname{ch} 0 - \frac{7}{\sqrt{29}} \operatorname{sh} 0 \right) = 1.$$

Пример 4.23. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x' = x + y + e^t, \\ y' = y - x + \sin t, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

Решение. По таблице основных изображений находим

$$e^t \doteq \frac{1}{p - 1}, \quad \sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Пусть $X(p), Y(p)$ – изображения функций $x(t), y(t)$, дающих решение поставленной задачи Коши. Тогда согласно свойству 5 (дифференцирование оригинала)

$$x'(t) \doteq pX(p) - x_0 = pX(p) - 1, \quad y'(t) \doteq pY(p) - y_0 = pY(p) + 1.$$

Таким образом, применяя к обоим уравнениям системы преобразование Лапласа, получаем линейную систему операторных уравнений

$$\begin{cases} (p - 1) X(p) - Y(p) = 1 + \frac{1}{p-1}, \\ X(p) + (p - 1) Y(p) = -1 + \frac{1}{p^2+1}. \end{cases}$$

Домножая первое уравнение на $(p - 1)$ и прибавляя к нему второе, получаем

$$((p - 1)^2 + 1) X(p) = p - 1 + 1 - 1 + \frac{1}{p^2 + 1},$$

откуда

$$X(p) = \frac{p - 1}{(p - 1)^2 + 1} + \frac{1}{((p - 1)^2 + 1)(p^2 + 1)}.$$

Домножая второе уравнение на $(p - 1)$ и вычитая из него первое, получаем

$$((p - 1)^2 + 1) Y(p) = \frac{p - 1}{p^2 + 1} - (p - 1) - 1 - \frac{1}{p - 1},$$

откуда находим выражение для $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{p-1}{((p-1)^2+1)(p^2+1)} - \frac{p-1}{(p-1)^2+1} - \frac{1}{(p-1)^2+1} - \frac{1}{((p-1)^2+1)(p-1)}.$$

Используя формулы 5, 6 из таблицы основных изображений, а также свойство 3 (теорему смещения), получаем:

$$\frac{p-1}{(p-1)^2+1} \doteq e^t \cos t, \quad \frac{1}{(p-1)^2+1} \doteq e^t \sin t, \\ \frac{1}{((p-1)^2+1)(p-1)} \doteq e^t z(t), \quad z(t) \doteq Z(p),$$

где

$$Z(p) = \frac{1}{(p^2+1)p} = \frac{(1+p^2)-p^2}{(p^2+1)p} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} \doteq \eta(t) - \cos t = z(t).$$

Далее, раскладывая на простейшие дроби (в множестве действительных чисел), получаем

$$\frac{1}{((p-1)^2+1)(p^2+1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{3-2p}{(p-1)^2+1} + \frac{2p+1}{p^2+1} \right) = \\ = \frac{1}{5} \left(-2 \cdot \frac{p-1}{(p-1)^2+1} + \frac{1}{(p-1)^2+1} + 2 \cdot \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} \right) \doteq \\ \doteq \frac{1}{5} (-2e^t \cos t + e^t \sin t + 2 \cos t + \sin t); \\ \frac{p-1}{((p-1)^2+1)(p^2+1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{p+1}{(p-1)^2+1} - \frac{p+3}{p^2+1} \right) = \\ = \frac{1}{5} \left(\frac{p-1}{(p-1)^2+1} + 2 \cdot \frac{1}{(p-1)^2+1} - \frac{p}{p^2+1} - 3 \cdot \frac{1}{p^2+1} \right) \doteq \\ \doteq \frac{1}{5} (e^t \cos t + 2e^t \sin t - \cos t - 3 \sin t).$$

Таким образом, приходим к решению исходной задачи Коши:

$$x(t) = \frac{1}{5} (3e^t \cos t + e^t \sin t + 2 \cos t + \sin t), \\ y(t) = \frac{1}{5} (e^t \cos t - 3e^t \sin t - \cos t - 3 \sin t) - e^t.$$

Проверим выполнение начальных условий:

$$x(0) = \frac{1}{5} (3e^0 \cos 0 + e^0 \sin 0 + 2 \cos 0 + \sin 0) = \frac{3+2}{5} = 1;$$

$$y(0) = \frac{1}{5} (e^0 \cos 0 - 3e^0 \sin 0 - \cos 0 - 3 \sin 0) - e^0 = \frac{1}{5} (1 - 0 - 1 - 0) - 1 = -1.$$

Примечания.

1. В выражении $Y(p)$ вторую и четвертую дробь можно было привести к общему знаменателю. Тогда сразу получаем:

$$-\frac{p-1}{(p-1)^2+1} - \frac{1}{((p-1)^2+1)(p-1)} = -\frac{(p-1)^2+1}{((p-1)^2+1)(p-1)} = -\frac{1}{p-1} \doteq -e^t.$$

2. Для восстановления оригиналов следующих изображений можно было использовать свойство 10 (теорему Бореля о произведении изображений):

$$\frac{1}{((p-1)^2+1)(p^2+1)} \doteq e^t \sin t * \sin t = \int_0^t e^\tau \sin \tau \sin(t-\tau) d\tau,$$

$$\frac{p-1}{((p-1)^2+1)(p^2+1)} \doteq e^t \cos t * \sin t = \int_0^t e^\tau \cos \tau \sin(t-\tau) d\tau.$$

5. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

§5.1. Понятие интеграла Фурье. Преобразование Фурье

Пусть функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси и кусочно непрерывна на каждом конечном отрезке $[a; b] \subset \mathbf{R}$. Тогда $\forall t \in \mathbf{R}$ имеет смысл следующий несобственный интеграл

$$\mathcal{F}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos s(\tau-t) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos s(\tau-t) d\tau.$$

Примечание. Несобственный интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt$$

здесь и далее понимаем в смысле главного значения, то есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b \varphi(t) dt.$$

Определение 5.1. Интеграл $\mathcal{F}(t)$ называется *интегралом Фурье* функции $f(t)$ (в действительной форме).

Пользуясь формулой Эйлера $e^{it} = \cos t + i \sin t$, а также учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin s(\tau-t) d\tau \equiv 0,$$

интеграл Фурье можно преобразовать к виду

$$\mathcal{F}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{is(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} ds \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-is\tau} d\tau,$$

который называется *комплексной* (или *экспоненциальной*) *формой* интеграла Фурье.

Примечание. Можно показать, что интеграл $\mathcal{F}(t)$ представляется в виде

$$\mathcal{F}(t) = \int_0^{+\infty} \{a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t\} d\omega, \quad (5.1)$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Если переобозначить $\omega = 2\pi\nu$, то понятно, что интеграл Фурье является в некотором смысле аналогом ряда Фурье⁴⁰ (формально получается из него предельным переходом, когда длина промежутка $h \rightarrow +\infty$). Стало быть, (5.1) можно рассматривать как *разложение непериодической функции на гармоники*, поскольку разложения в виде ряда Фурье для нее не существует.

Перепишем комплексную форму интеграла Фурье в виде

$$\mathcal{F}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(s) e^{ist} ds = \Phi^{-1}[\hat{f}](t),$$

где

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ist} dt = \Phi[f](s).$$

Определение 5.2. Выражение $\Phi[f]$ называется *прямым*, а $\Phi^{-1}[\hat{f}]$ – *обратным преобразованием Фурье* соответственно функций f и \hat{f} .

Если функция $f(t)$ четная, то интеграл Фурье этой функции можно переписать в виде

$$\mathcal{F}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}_c(\omega) \cos \omega t d\omega = \Phi_c[\hat{f}_c](t),$$

$$\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt = \Phi_c[f](\omega).$$

Аналогичным образом, если функция $f(t)$ нечетная, то интеграл Фурье этой функции можно переписать в виде

$$\mathcal{F}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}_s(\omega) \sin \omega t d\omega = \Phi_s[\hat{f}_s](t),$$

⁴⁰См. Часть 3, §4.8.

$$\hat{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt = \Phi_s[f](\omega).$$

Определение 5.3. Выражение $\Phi_c[f]$ называется *косинус-преобразованием*, а $\Phi_s[f]$ – *синус-преобразованием Фурье* функции $f(t)$.

§5.2. Достаточные условия представимости функции интегралом Фурье

Теорема 5.1⁴¹. Пусть функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси и является кусочно гладкой на каждом конечном отрезке $[a; b] \subset \mathbf{R}$. Тогда $\forall t \in \mathbf{R}$ ее интеграл Фурье $\mathcal{F}(t)$ сходится. При этом для каждой точки непрерывности функции f справедливо равенство $f(t) = \mathcal{F}(t)$. Если же t – точка разрыва функции f , то⁴²

$$\mathcal{F}(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}.$$

Определение 5.4. Говорят, что функция $f(t)$, определенная на всей числовой оси, удовлетворяет *условиям Дирихле*, если она

- 1) кусочно непрерывна, то есть на каждом конечном отрезке может иметь лишь конечное число точек разрыва, и только I-го рода;
- 2) кусочно монотонна, то есть кусочно монотонна на любом конечном отрезке⁴³.

Теорема 5.2⁴⁴. Пусть функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси и удовлетворяет условиям Дирихле. Тогда имеет место утверждение теоремы 5.1.

§5.3. Спектральные характеристики периодических функций⁴⁵

Рассмотрим ряд Фурье периодической с периодом $2h$ функции $f(t)$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{h} + b_n \sin \frac{n\pi t}{h} \right),$$

$$a_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^h f(t) \cos \frac{n\pi t}{h} dt, \quad b_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^h f(t) \sin \frac{n\pi t}{h} dt.$$

Используя формулы Эйлера

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, \quad \sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i},$$

⁴¹Доказательство см., например, в [Е.А. Власова. Ряды. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. - 612 с.], теорема 4.3 и следствие 4.1.

⁴²См. сноску на с.107.

⁴³Функцию $f(t)$ называют *кусочно монотонной* на отрезке $[\alpha; \beta]$, если существует конечное число точек $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ таких, что на каждом из интервалов $(t_{j-1}; t_j)$, $j = \overline{1, n}$, функция $f(t)$ монотонна (хотя бы нестрого, то есть не убывает или не возрастает).

⁴⁴См. [Е.А. Власова. Ряды. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. - 612 с.], теорема 4.4.

⁴⁵Данный параграф может быть включен в раздел "Ряды Фурье", поскольку излагается независимо от понятия интеграла Фурье. Мы помещаем его здесь по двум причинам: 1) в настоящем пособии, Часть 3, §§4.7, 4.8 ("Ряды Фурье") такой раздел отсутствует; 2) на его основе существенно удобнее изучать спектральные характеристики непериодических функций, см. ниже §5.4.

можем записать ряд Фурье в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{n\pi t}{h}},$$

где для $n \geq 0$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \bar{c}_n,$$

или

$$c_n = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(t) e^{-i \frac{n\pi t}{h}} dt.$$

Примечание. С физической точки зрения функция $f(t)$ описывает некоторое периодическое колебательное движение, например, звуковое колебание. Разложение этой функции в ряд Фурье отражает тот факт, что это колебание является суммой конечного или бесконечного числа гармонических колебаний (гармоник). При этом частота n -й гармоники равна

$$\nu_n = \frac{n}{2h}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Соответственно, приращение частоты

$$\Delta \nu_n = \frac{n+1}{2h} - \frac{n}{2h} = \frac{1}{2h}.$$

Коэффициент Фурье c_n характеризует вклад n -й гармоники в суммарное колебание $f(t)$. Совокупность всех гармоник в физике принято называть *спектром*.

Коэффициенты Фурье можно переписать в виде:

$$c_n = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(t) e^{-2\pi i \nu_n t} dt, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

В физике вводится следующее понятие.

Определение 5.5. Функция $S(\nu_n)$, определенная на множестве всех частот $\{\nu_n, n \in \mathbf{Z}\}$ как отношение коэффициента Фурье c_n к приращению частоты $\Delta \nu_n$, называется *спектральной плотностью*, или *спектральной функцией* колебания $f(t)$. При этом модуль спектральной функции $\rho(\nu_n) = |S(\nu_n)|$ называется *амплитудным спектром*, а взятый со знаком минус аргумент $\varphi(\nu_n) = -\arg S(\nu_n)$ — *фазовым спектром* $f(t)$.

Таким образом,

$$S(\nu_n) = \frac{c_n}{\Delta \nu_n} = \int_{-h}^h f(t) e^{-2\pi i \nu_n t} dt, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (5.2)$$

Примечание. Поскольку $c_{-n} = \bar{c}_n$, то достаточно искать спектральные характеристики только для $n \geq 0$.

Пример 5.1. Найти спектральную функцию, построить амплитудный и фазовый спектры функции

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; 1], \\ 0, & t \in (1; 2), \end{cases} \quad f(t+2) = f(t).$$

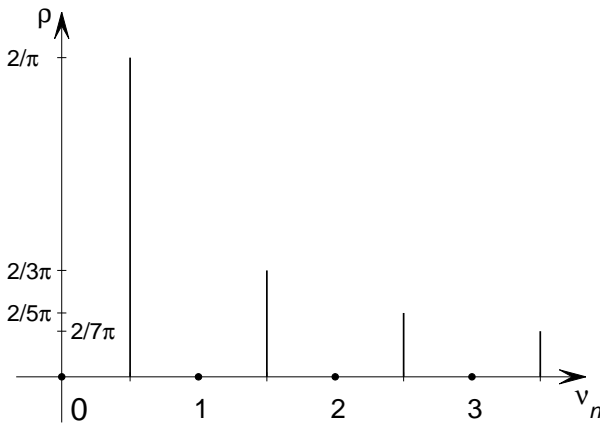


Рис. 5.1

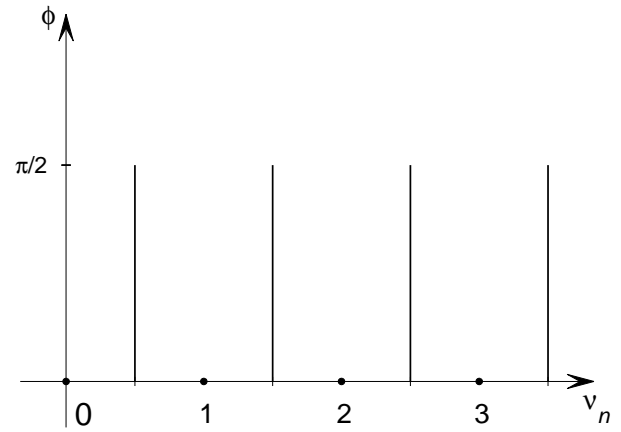


Рис. 5.2

Решение. Поскольку функция периодическая с периодом $2h = 2$, пользуемся формулой (5.2). Имеем $h = 1 \Rightarrow \nu_n = \frac{n}{2h} = \frac{n}{2}$,

$$S(\nu_n) = \int_{-1}^1 f(t) e^{-2\pi i \nu_n t} dt = \int_0^1 e^{-i\pi n t} dt = -\frac{e^{-i\pi n t}}{i\pi n} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{i\pi n} (1 - e^{-i\pi n}) = \frac{1 - \cos \pi n}{i\pi n}.$$

Таким образом,

$$S(\nu_n) = \begin{cases} \frac{2}{i\pi n} = -\frac{2i}{\pi n}, & n = 2k - 1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

Соответственно,

$$\rho(\nu_n) = |S(\nu_n)| = \begin{cases} \frac{2}{\pi n}, & n = 2k - 1, \\ 0, & n = 2k, \end{cases}$$

$$\varphi(\nu_n) = -\arg S(\nu_n) = \begin{cases} -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, & n = 2k - 1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

Графики амплитудного и фазового спектра см. на рис. 5.1, 5.2.

Примечание. Процессы, не имеющие строгой периодичности или непериодические, представляются в виде суммы бесконечного числа гармонических компонент со сколь угодно близкими частотами (непрерывный спектр), то есть в виде интеграла, который формально можно получить в результате предельного перехода при $h \rightarrow +\infty$. Например, звуки, полученные при сложении нескольких периодических волн, обладают дискретным спектром. Акустические шумы, одиночные импульсы, затухающие звуки имеют непрерывный спектр⁴⁶.

⁴⁶Физика. Большой энциклопедический словарь. - М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. - 944 с.

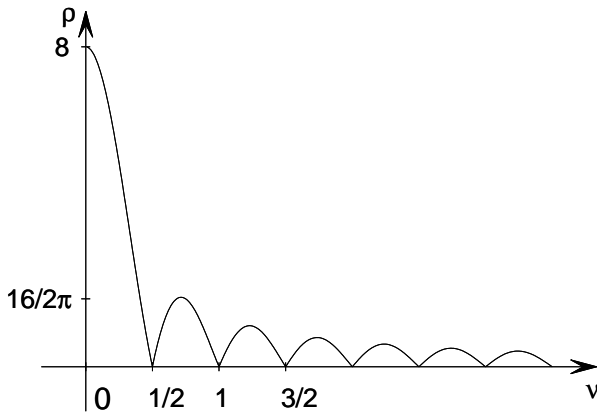


Рис. 5.3

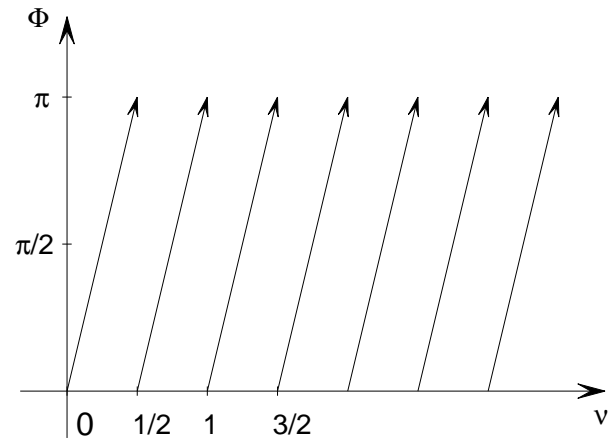


Рис. 5.4

§5.4. Спектральные характеристики непериодических функций

Рассмотрим интеграл Фурье функции $f(t)$ в комплексной форме

$$\mathcal{F}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Делая замену $\omega = 2\pi\nu$, можем переписать его в виде

$$\mathcal{F}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) e^{2\pi i\nu t} d\nu,$$

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i\nu t} dt. \quad (5.3)$$

Определение 5.6. Функция $S(\nu)$ называется *спектральной функцией* интеграла Фурье. Величина $\rho(\nu) = |S(\nu)|$ называется *амплитудным спектром*, а величина $\varphi(\nu) = -\arg S(\nu)$ – *фазовым спектром* интеграла Фурье.

Пример 5.2. Найти спектральную функцию, построить амплитудный и фазовый спектры функции

$$f(t) = \begin{cases} 4, & t \in [0; 2], \\ 0, & t \notin [0; 2]. \end{cases}$$

Решение. Заметим, прежде всего, что функция $f(t)$ очевидным образом удовлетворяет условиям теоремы 5.2 (а также и условиям теоремы 5.1). Поэтому интеграл Фурье данной функции сходится. Спектральная функция по определению равна

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i\nu t} dt = 4 \int_0^2 e^{-2\pi i\nu t} dt = -\frac{2}{i\pi\nu} e^{-2\pi i\nu t} \Big|_0^2 = \frac{2i}{\pi\nu} (e^{-4\pi i\nu} - 1) =$$

$$= \frac{2i}{\pi v} (\cos 4\pi v - 1 - i \sin 4\pi v) = 2 \frac{\sin 4\pi v + i(\cos 4\pi v - 1)}{\pi v}.$$

Соответственно, амплитудный спектр

$$\begin{aligned} \rho(v) = |S(v)| &= \frac{2}{\pi|v|} \sqrt{\sin^2 4\pi v + \cos^2 4\pi v - 2 \cos 4\pi v + 1} = \\ &= \frac{2}{\pi|v|} \sqrt{2(1 - \cos 4\pi v)} = \frac{4|\sin 2\pi v|}{\pi|v|}. \end{aligned}$$

Пусть $\varphi = \arg S(v)$, $x = \operatorname{Re} S(v) = \sin 4\pi v$, $y = \operatorname{Im} S(v) = \cos 4\pi v - 1$. Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = -\frac{2 \sin^2 2\pi v}{2 \sin 2\pi v \cdot \cos 2\pi v} = -\frac{\sin 2\pi v}{\cos 2\pi v} = -\operatorname{tg} 2\pi v.$$

Исходя из этого, получаем, что $\varphi = -2\pi v$. Здесь мы учитываем, что

$$\varphi\left(v + \frac{1}{2}\right) = \varphi(v), \quad y = y(v) < 0, \quad \sin \varphi(v) < 0 \text{ при } v \in \left(0; \frac{1}{2}\right),$$

$$x = x(v) > 0, \quad \cos \varphi(v) > 0 \text{ при } v \in \left(0; \frac{1}{4}\right),$$

$$x = x(v) < 0, \quad \cos \varphi(v) < 0 \text{ при } v \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, согласно определению получаем, что фазовый спектр

$$\Phi(v) = -\arg S(v) = -\varphi(v) = 2\pi v \text{ при } v \in \left[0; \frac{1}{2}\right), \quad \Phi\left(v + \frac{1}{2}\right) = \Phi(v).$$

Графики амплитудного и фазового спектра см. на рис. 5.3, 5.4.

Примечание. Приводимый далее глоссарий можно использовать для самоконтроля: попробуйте вспомнить, как определяется каждое из перечисленных ниже понятий. Если забыли, откройте указанную рядом страницу.

ГЛОССАРИЙ

Векторный анализ

Вектор-функция с.6

- гладкая с.8
- годограф с.6
- секущая с.8
- непрерывная с.6
- предел с.6
- производная с.7

Вихрь векторного поля с.41

Дивергенция векторного поля с.31
- физический смысл с.36

Интеграл

- криволинейный
- второго рода с.18
- независимость от пути интегрирования с.49
- первого рода с.13
- по замкнутому контуру с.14
- поверхностный
- второго рода с.27
- первого рода с.23

Интегральная сумма скалярного поля

- по контуру с.13
- по поверхности с.23

Контур интегрирования с.14

Контура

- внутренность с.20
- направление обхода с.19
- отрицательное с.20
- положительное с.20
- ориентация с.20

Кривая

- пространственная
- гладкая с.8
- кусочно гладкая с.13
- непрерывная с.8
- спрямляемая с.10

Линия

- векторная с.11
- интегрирования с.14
- силовая с.11
- уравнение с.12

Лист Мебиуса с.26

Мелкость разбиения

- дуги с.13
- поверхности с.23

Натуральный параметр с.14

Область

- двусвязная с.49
- многосвязная с.49
- односвязная с.49
- поверхностно с.50
- простая с.36

Оператор Гамильтона с.42

Ориентация

- контура
- поверхности с.25
- согласованная с.39

Плотность источников или стоков с.36

Поверхность

- гладкая с.22
- двусторонняя с.25
- замкнутая с.31
- квадрируемая с.22
- кусочно гладкая с.22
- односторонняя с.25
- ориентируемая с.25

Поверхности

- ориентация с.25
- сторона с.25

Поле

- векторное с.11
- безвихревое с.48
- интегрируемое
- по дуге с.18
- по поверхности с.26
- потенциальное с.44
- соленоидальное с.36
- трубчатое с.36
- величины с.10
- нестационарное с.10
- неустановившееся с.10
- скалярное с.11
- интегрируемое
- по дуге с.13
- по поверхности с.23
- стационарное с.10
- установившееся с.10

Полный дифференциал с.45

Потенциал векторного поля с.44

Потенциальность векторного поля

- необходимое условие с.48
- необходимое и достаточное условие с.45

Поток

- векторного поля с.26
- через замкнутую поверхность с.31
- поля скоростей жидкости с.31
- физический смысл с.30

Пространственной кривой
- дифференциал дуги с.10
- длина дуги с.10
- касательная с.9
- нормальная плоскость с.9
- секущая с.8

Путь интегрирования с.14

Ротор векторного поля с.41

Тело с.31
- простое с.31

Теорема
- Грина с.36
- Остроградского-Гаусса с.31
- Стокса с.39

Формула
- Грина с.36
- Остроградского-Гаусса с.31
- Стокса с.39

Циркуляция с.18

Теория функций комплексного переменного

Бесконечно удаленная точка с.59

Комплексная плоскость с.55
- расширенная с.59

Комплексного числа
- аргумент с.55
-- в смысле главного значения с.55
- действительная часть с.54
- изображение с.55
- комплексно сопряженное с.54
- мнимая часть с.54
- модуль с.55
- определение с.54
-- равенства с.54
- показательная форма с.56
- тригонометрическая форма с.55

Контур интегрирования с.73

Контура
- внешность с.76
- внутренность с.76

Мелкость разбиения дуги с.73

Мнимая единица с.54

Многочлен
- действительный n -й степени с.58
- комплексный n -й степени с.58
- n -й степени с действительными коэффициентами с.58
- n -й степени с комплексными коэффициентами с.58

Многочлена
- корень с.58
- степень с.58

Множество
- открытое с.60
- связное с.60

Область с.60
- многосвязная с.60
- односвязная с.60

Последовательность комплексных чисел с.59
- бесконечно большая с.59
- неограниченно возрастающая с.59
- предел с.59

Теорема
- Абеля с.83
- Лорана с.89
- Коши
-- для односвязной области с.76
-- для многосвязной области с.76
-- следствие с.77
- о вычетах
-- вторая с.101
-- первая с.101
- о независимости интеграла от пути интегрирования с.76
- Тейлора с.85

Точка на комплексной плоскости:
- окрестность с.60
-- бесконечно удаленной точки с.89

Условия Коши-Римана (CR-условия) с.69

Формула
- интегральная Коши с.77
- Муавра
-- вторая с.56
-- первая с.56
- обобщенная
-- интегрирования по частям с.77
-- Ньютона-Лейбница с.77

Функция комплексного переменного с.62
- аналитическая
-- в области с.69
-- в точке с.69
- дифференцируемая в точке с.69
- дробно-линейная с.65
- дробно-рациональная с.64
- интегрируемая вдоль дуги с.73
- как отображение: с.62
-- образ точки с.62
-- образ множества с.62
- линейная с.65
- логарифмическая с.66
- непрерывная в точке с.68
- основная элементарная с.64
- подынтегральная с.73
- показательная с.65
- степенная функция с.65

Функции комплексного переменного
- вычет с.98
- гиперболические с.66
- дифференцируемость с.69

- интеграл по дуге с.73
- интегральная сумма по дуге с.73
- множество значений с.62
- область определения с.62
- обратные гиперболические с.67
- обратные тригонометрические с.67
- особая точка с.69
- изолированная с.95
- полюс
- простой с.95
- кратности или порядка m с.95
- существенно с.96
- устранимая с.95
- первообразная с.77
- пределом с.67
- производная с.69
- ряд
- Маклорена с.85
- Тейлора с.85
- тригонометрические с.65
- Функциональный ряд с.83
- Лорана с.88
- главная часть с.88
- правильная часть с.88
- кольцо сходимости с.89
- степенной с.83
- круг сходимости с.83
- радиус сходимости с.83
- Числовой ряд с комплексными членами с.59
- сходящийся с.59
- абсолютно с.60
- условно с.60

Операционное исчисление

- Изображение периодической функции с.111
- Изображения
 - дифференцирование с.110
 - по параметру с.110
 - интегрирование с.110
 - по параметру с.110
 - определение с.107
- Интеграл Дюамеля с.111
- Оригинала
 - дифференцирование с.110
 - изображение
 - интегрирование с.110
 - определение с.107
- Показателем роста функции с.107
- Преобразования Лапласа
 - линейность с.109
 - определение с.107
- Произведение изображений с.111
- Свертка оригиналов с.111
- Функция Хевисайда с.108

Таблица основных изображений с.112

Теорема

- подобия с.109
- смещения с.110
- запаздывания с.110
- Бореля об изображении свертки с.111
- о связи начальных и конечных значений оригинала и изображения с.111
- разложения
- вторая с.120
- первая с.119

Интеграл Фурье

Интеграл Фурье с.132

- в комплексной форме с.133
- в экспоненциальной форме с.133

Непериодической функции

- спектральная плотность с.137
- спектральная функция с.137
- амплитудный спектр с.137
- фазовый спектр с.137

Периодической функции

- спектр с.135
- спектральная плотность с.135
- спектральная функция с.135
- амплитудный спектр с.135
- фазовый спектр с.135

Преобразование Фурье с.133

- косинус-преобразование с.134
- обратное с.133
- прямое с.133
- синус-преобразование с.134

Теорема

- о представимости функции интегралом Фурье
- первая с.134
- вторая (Дирихле) с.134

Условия Дирихле с.134

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бугров, Я.С., Никольский, С.М.** Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский - Ростов н/Д: Феникс, 1998. – 512 с.
2. **Пискунов, Н.С.** Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т. Т.1 / Н.С. Пискунов - М.: Наука, 1985. – 432 с.
3. **Пискунов, Н.С.** Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т. Т.2 / Н.С. Пискунов - М.: Наука, 1985. – 560 с.
4. **Свешников, А.Г., Тихонов, А.Н.** Теория функций комплексной переменной / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов - М.: Наука. Физматлит, 1999. – 320 с.
5. Примеры решения задач по теории функций комплексного переменного: Методическое пособие / Сост.: **А.В.Чернов**; НГТУ. Н.Новгород, 2005. – 62 с.
6. Сборник задач по математике для вузов, Ч.2. Специальные разделы математического анализа. Под ред. **А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича.** - М.: Наука, 1986. – 368 с.
7. Высшая математика: контрольные работы 7, 8, 9 для студентов-заочников/Сост.: **В.И.Голинько, И.В.Кольчик, Р.Е.Мазова, Н.В.Полухин, Г.В.Потемин, И.П.Рязанцева**; НГТУ. Н.Новгород, 2003. – 39 с.