ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА

А.В. Чернов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

КОМПЛЕКС УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Часть 4

Том 2

Рекомендовано Ученым советом Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева в качестве учебно-методического пособия для студентов заочной и дистанционной форм обучения по всем техническим специальностям

Нижний Новгород 2007

УДК 519.2.21, 519.22(075.8)

Чернов А.В. Высшая математика: комплекс учебно-методических материалов: ч.4, т.2 / А.В. Чернов; Нижегород. гос. техн. ун-т. Нижний Новгород, 2007.-96 с.

Изложен опорный конспект лекций, соответствующий рабочей учебной программе. Данный том содержит разделы "Теория вероятностей" и "Математическая статистика". Теоретический материал сопровождается большим количеством примеров решения типовых задач с подробными пояснениями и иллюстрациями. Прилагается глоссарий определяемых терминов и список литературы. Приводятся таблицы распределений, необходимые для решения заданий по теме "Теория вероятностей и математическая статистика".

Рекомендуется для студентов всех технических специальностей заочной и дистанционной форм обучения.

Научный редактор – И.П.Рязанцева

Редактор – О.В.Пугина

Подписано к печати 20.12.2007. Формат 60×84 1/16. Бумага газетная. Печать офсетная. Печ.л. 6. Уч.-изд.л. 7. Тираж 500 экз. Заказ .

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева.
Типография НГТУ.
Адрес университета и полиграфического предприятия:
603950, ГСП-41, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Данный курс является четвертой частью курса высшей математики в рамках комплекса учебно-методических материалов для студентов заочной и дистанционной форм обучения. Этот том содержит следующие разделы:

1. Теория вероятностей.
2. Математическая статистика.

Разделы "Теория вероятностей" и "Математическая статистика" тесно связаны между собой и решают, по сути, взаимно обратные задачи: 1) прогнозирование случайных процессов или явлений на основе известных закономерностей (так называемого закона распределения), а также оценка степени возможности (то есть вероятности) того или иного события; 2) выявление закономерностей в случайных процессах или явлениях на основе опытных (статистических) данных. Оба они имеют многочисленные приложения при решении физических (например, при обработке результатов опытов или наблюдений), инженерных (например, при обработке данных испытаний того или иного вида продукции, оценки срока годности или службы и т.д.), производственных (например, при организации контроля качества продукции, выработке рекомендаций руководству для принятия решений о выборе того или иного образа действий и т.д.), сельскохозяйственных (составление прогнозов о видах на урожай и т.п.), коммерческих (страховое дело, банковские операции, исследование и стимуляция спроса и т.д.) и даже бытовых задач (самого различного вида, например, выработка наиболее оптимального маршрута проезда или стратегии в азартных играх).

Излагаемый достаточно сжато теоретический материал сопровождается большим количеством примеров, практических рекомендаций и иллюстраций.

1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§1.1. Основы теории множеств

Понятие *множества* является одним из базовых понятий математики, а сами множества служат одним из основных инструментов математического исследования. Подобно другим базовым понятиям таким, как, например, точка, натуральное число[1] и т.п., оно является так называемым неопределимым понятием, интуитивный смысл которого очевиден и может быть установлен лишь предметным показом. Слова "совокупность", "набор", "семейство" и т.п. являются синонимами слова "множества". Поэтому выражения типа "множество – это совокупность объектов любой природы", хотя и позволяют некоторым образом уяснить смысл этого понятия, ни в коей мере не могут служить его определением. Примерами множеств являются множество всех натуральных чисел $\mathbf{N}$, множество всех действительных чисел $\mathbf{R}$, множество всех точек координатной плоскости $\mathbf{R}^2$, множество $\mathbf{C}[0;1]$ всех функций, определенных и непрерывных на отрезке $[0;1]$, множество всех студентов в данной группе, множество всех возможных входных сигналов системы автоматического регулирования и т.д. Множества принято обозначать большими латинскими буквами A, B, X, Y и т.п.

Объекты, составляющие множество X, называются его *элементами*, или *точками*. Тот факт, что объект x является элементом множества X, обозначается следующим образом: $x \in X$. В этом случае говорят также, что *x принадлежит множеству X*; иногда для краткости говорят: "x из X". Соответственно, запись $x \notin X$ означает, что *x не является элементом множества X*, или *x не принадлежит множеству X*. Допустима также запись следующего вида: $X \ni x$ (*X содержит x*); $X \not\ni x$ (*X не содержит x*). Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый его элемент является элементом множества B, то есть $x \in B$ $\forall x \in A$. Этот факт обозначается следующим образом: $A \subset B$ (читают: "A содержится в B") или $B \supset A$ (читают: "B содержит A").

Два множества X и Y называются *равными*: $X = Y$, если выполняются два условия: $X \subset Y$ и $Y \subset X$. Иными словами, $X = Y$, если множества X и Y состоят из одних и тех же элементов.

Говорят, что множество X *пусто*, если оно не содержит ни одного элемента. Такое, *пустое множество*, обозначают символом $\emptyset$. Например, если X – множество всех действительных чисел $x \in \mathbf{R}$, удовлетворяющих одновременно двум (противоречивым) условиям: $x > 1$ и $x < 0$, то $X = \emptyset$.

Множество называется *конечным*, если конечно количество составляющих его элементов. В противном случае множество называется *бесконечным*. Бесконечное множество называется *счетным*, если можно установить взаимно однозначное соответствие между элементами множества и натуральными числами, то есть занумеровать элементы множества. В противном случае множество называется *несчетным*. Например, множество $\mathbf{N}_{[1;10]}$ всех натуральных чисел из отрезка $[1;10]$ конечно – состоит из десяти элементов: $1, 2, \ldots, 10$; само множество всех натуральных чисел $\mathbf{N}$ счетно; множество всех рациональных чисел $\mathbf{Q}$ счетно; множество всех действительных чисел $\mathbf{R}$ несчетно.

[1]Любопытно, что Евклид (III в до н.э.) определял натуральное число как "множество, составленное из единиц". Но в таком случае следовало бы добавить, что количество этих единиц должно быть конечно, но конечное количество это и есть число. Получается "замкнутый круг".

Основные способы задания множества

1. *Непосредственное перечисление.* Этот способ используется для конечных и (иногда) счетных множеств и заключается в непосредственном перечислении составляющих его элементов, например:

$$\mathbf{N}_{[1;10]} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \quad X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}.$$

2. *Задание множества указанием характеристического свойства.* Предположим, задано некоторое основное множество T, и указано некоторое свойство $P(x)$ такое, что элемент $x \in T$ ("x из T") принадлежит множеству X тогда и только тогда, когда он обладает свойством $P(x)$. Такое свойство называется *характеристическим свойством множества* X. При этом само множество формально описывается следующим образом:

$$X = \Big\{x \in T : \ P(x)\Big\} \quad \text{или} \quad X = \big\{x \in T \ \big| \ P(x)\big\}$$

Читается эта запись так: X – это множество всех элементов x из множества T таких, что выполнено $P(x)$. Например, множество рациональных чисел $\mathbf{Q}$ можно определить как множество всех действительных чисел $x \in \mathbf{R}$, для каждого из которых найдутся целое число $p \in \mathbf{Z}$ и натуральное число $q \in \mathbf{N}$ такие, что $x = \dfrac{p}{q}$, то есть

$$\mathbf{Q} = \left\{x \in \mathbf{R} \ \middle| \ \exists p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N} : \ x = \frac{p}{q}\right\}.$$

Примечание 1.1. В некоторых случаях, когда само свойство $P(x)$ явным образом указывает, что x принадлежит некоторому набору множеств, основное множество T можно не указывать.

Действия над множествами

Объединением множеств A и B называется множество всех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A или B. Объединение множеств A и B обозначается $A \cup B$. Таким образом,

$$A \cup B = \Big\{x : \ x \in A \ \text{ и/или } \ x \in B\Big\}.$$

Примечание 1.2. Смысл операций над множествами наглядно иллюстрируется с помощью так называемых *диаграмм Эйлера-Венна*, которые строятся следующим образом. Множества A и B, понимаемые как ограниченные множества точек на плоскости, изображаются с помощью ограничивающих их кривых (внутренность множеств A и B не штрихуется и не закрашивается). Штрихуется лишь множество, представляющее собой результат той или иной операции. Так, на рис.1.1 изображена диаграмма Эйлера-Венна, иллюстрирующая понятие объединения множеств $A \cup B$.

Пересечением множеств A и B называется множество всех элементов, каждый из которых принадлежит одновременно тому и другому множеству A и B, см. рис.1.2. Пересечение множеств A и B обозначается $A \cap B$. Таким образом,

$$A \cap B = \Big\{x : \ x \in A \text{ и } x \in B\Big\} = \Big\{x \in A : \ x \in B\Big\} = \Big\{x \in B : \ x \in A\Big\}.$$

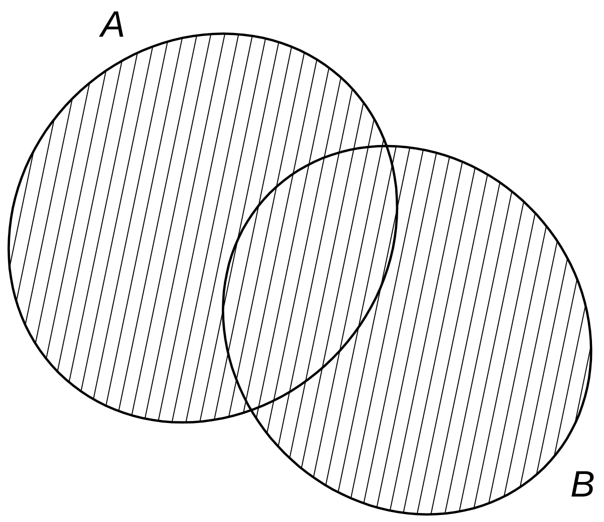


Рис. 1.1 . $A \cup B$.

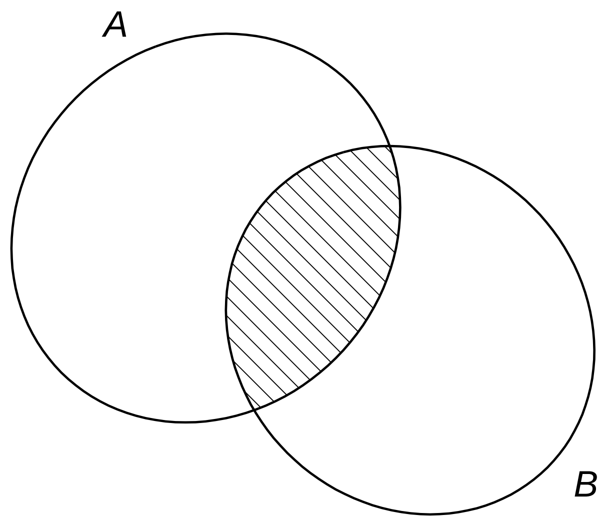


Рис. 1.2 . $A \cap B$.

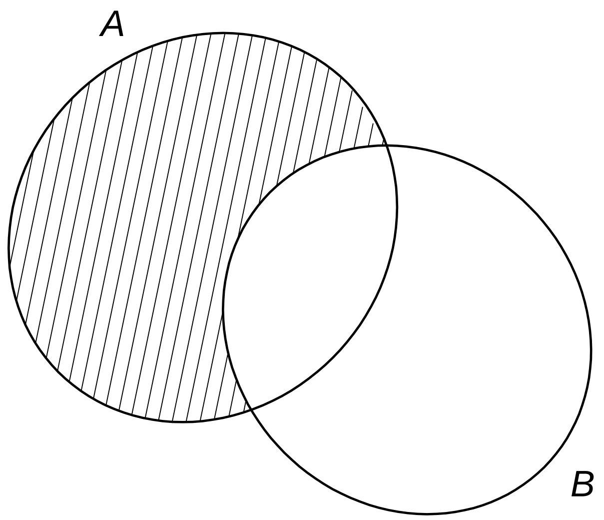


Рис. 1.3 . $A \setminus B$.

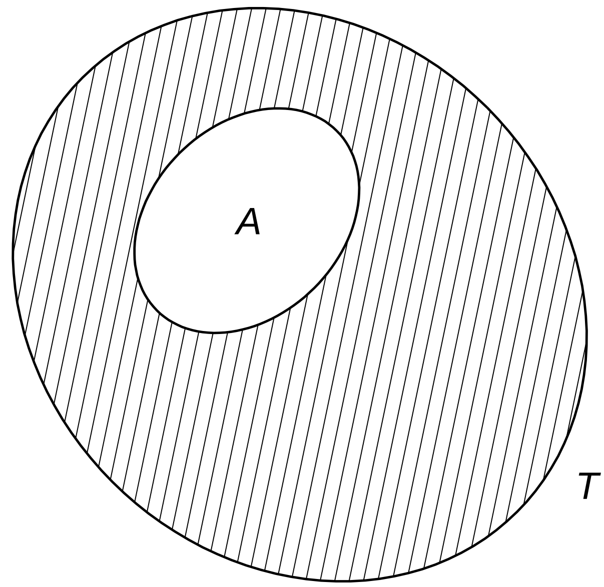


Рис. 1.4 . $\overline{A}$.

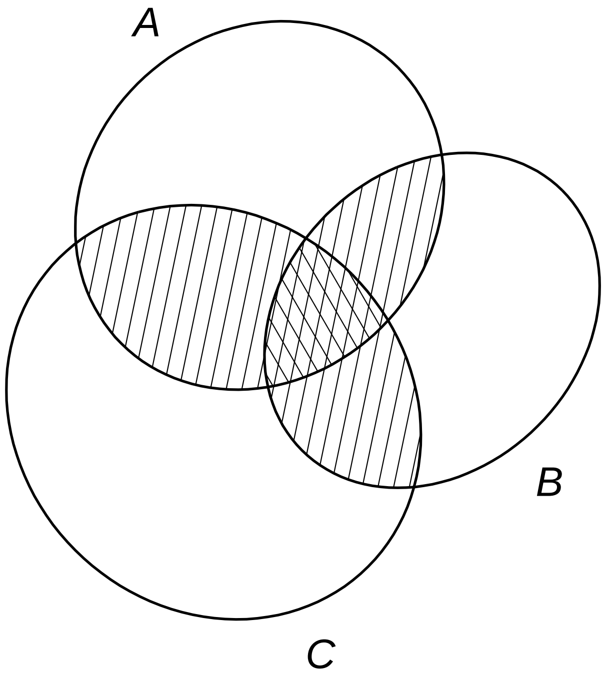
Разностью множеств A и B называется множество всех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, см. рис.1.3.

Разность множеств A и B обозначается $A \setminus B$. Таким образом,

$$A \setminus B = \Big\{ x \in A : \ x \notin B \Big\}.$$

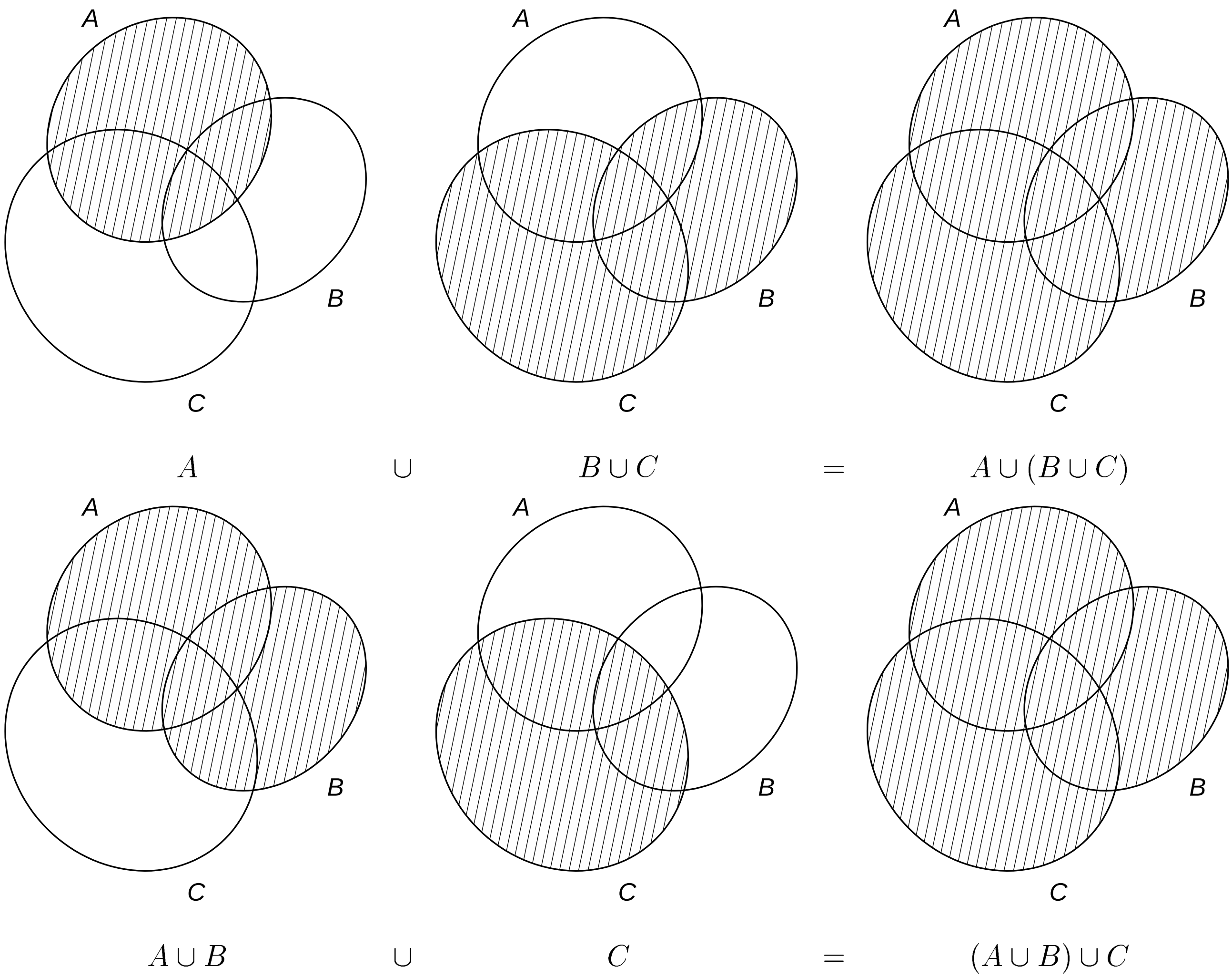
Если при этом $A \subset B$, то разность $B \setminus A$ называется *дополнением множества* A *до множества* B. В частности, если задано некоторое основное множество T и рассматриваются лишь подмножества множества T, то для всякого $A \subset T$ разность $T \setminus A$ называется *дополнением множества* A и обозначается $\overline{A}$, см. рис. 1.4.

Примечание 1.3. Очевидно, что для любых $A, B \subset T$ выполняется равенство $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что для всякого x из T: $x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \notin B$.



A
B
C

Рис. 1.5



A
B
C
$A \qquad \cup \qquad B \cup C \qquad = \qquad A \cup (B \cup C)$
$A \cup B \qquad \cup \qquad C \qquad = \qquad (A \cup B) \cup C$

Рис. 1.6

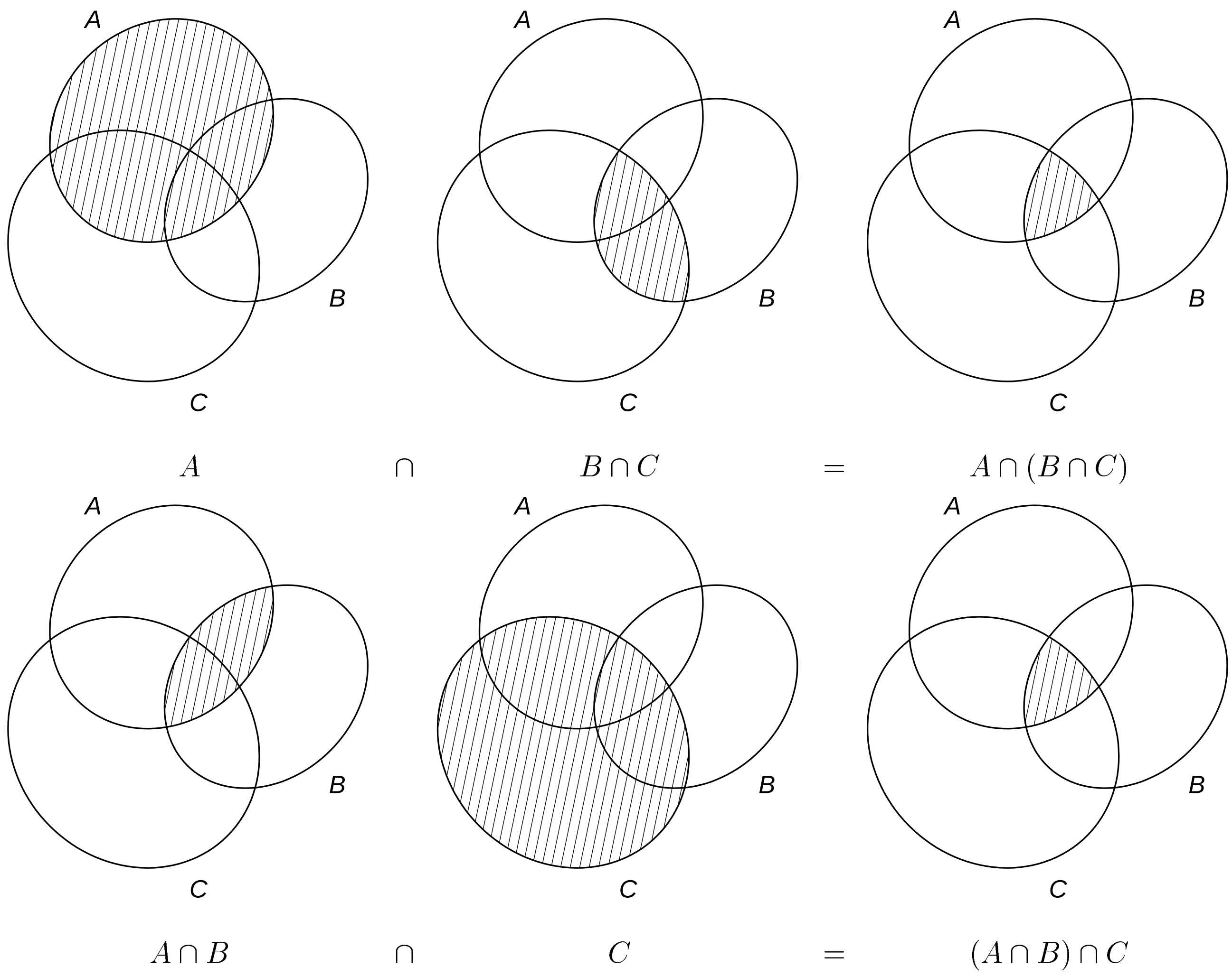


Рис. 1.7

Отметим, что объединение множеств $A \cup B$ некоторые авторы называют суммой множеств и обозначают $A + B$, а пересечение множеств $A \cap B$ – произведением множеств и обозначают AB. Таким образом, определенные выше операции над множествами выступают в роли некоторого аналога арифметических операций (над числами) и называются, соответственно, действиями над множествами. Однако свойства операций над множествами несколько отличаются от свойств арифметических операций, хотя частично и напоминают их. Например, в отличие от чисел, $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ – это очевидно непосредственно из определения операций объединения и пересечения множеств. Упомянем, кроме того, следующие очевидные соотношения:

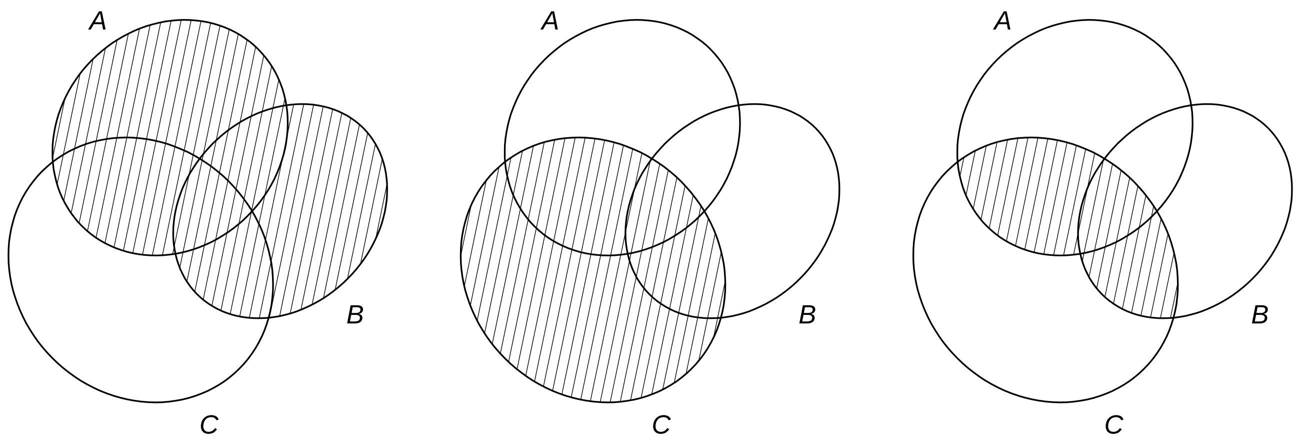
$$A \subset A \cup B, \quad A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B,$$

и если $A \subset B$, то

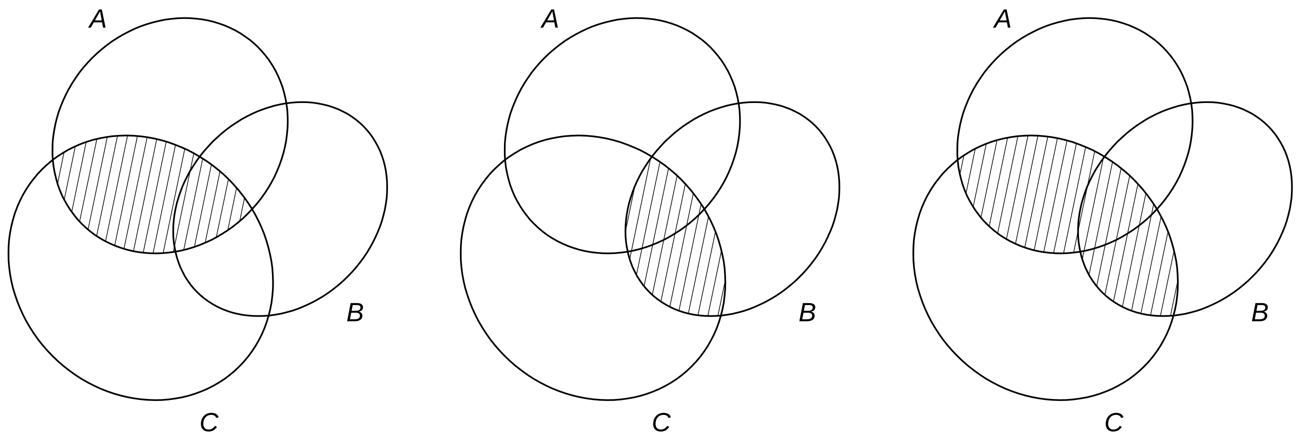
$$A \cap B = A, \quad A \cup B = B.$$

Примечание 1.4. Предположим, имеются два плоских множества A и B. Очевидно, что если эти два множества не пересекаются $A \cap B = \emptyset$, то площадь их объединения

$$S(A \cup B) = S(A) + S(B).$$



$A \cup B \qquad \cap \qquad C \qquad = \qquad (A \cup B) \cap C$



$A \cap C \qquad \cup \qquad B \cap C \qquad = \qquad (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Рис. 1.8

Если же множества A и B пересекаются, то вычисляя площадь объединения по указанной выше формуле, мы сделаем ошибку, поскольку площадь пересечения $A \cap B$ посчитаем дважды (см. рис. 1.2). Устраняя эту ошибку, получаем:

$$S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B).$$

Предположим теперь, что имеются три плоских множества A, B, C. Если эти множества не имеют попарных пересечений, то площадь объединения

$$S(A \cup B \cup C) = S(A) + S(B) + S(C).$$

Если же такие пересечения имеются, то вычисляя площадь объединения по указанной выше формуле, мы сделаем ошибку. Чтобы разобраться с этой ошибкой, обратимся к рисунку 1.5. Из этого рисунка видно, что та часть объединения, которая закрашена одинарной штриховкой, будет посчитана дважды, а та часть, которая закрашена двойной штриховкой, будет посчитана трижды. Таким образом, чтобы устранить ошибку, мы должны, во-первых, вычесть площади всех попарных пересечений. Но тогда часть, которая закрашена двойной штриховкой, будет выброшена трижды, а нам ее нужно выбросить только дважды. Стало быть, еще один раз ее надо будет прибавить. Окончательно получаем:

$$S(A \cup B \cup C) = S(A) + S(B) + S(C) - S(A \cap B) - S(A \cap C) - S(B \cap C) + S(A \cap B \cap C).$$

Свойства операций над множествами

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (*коммутативность*, или *переместительный закон*).

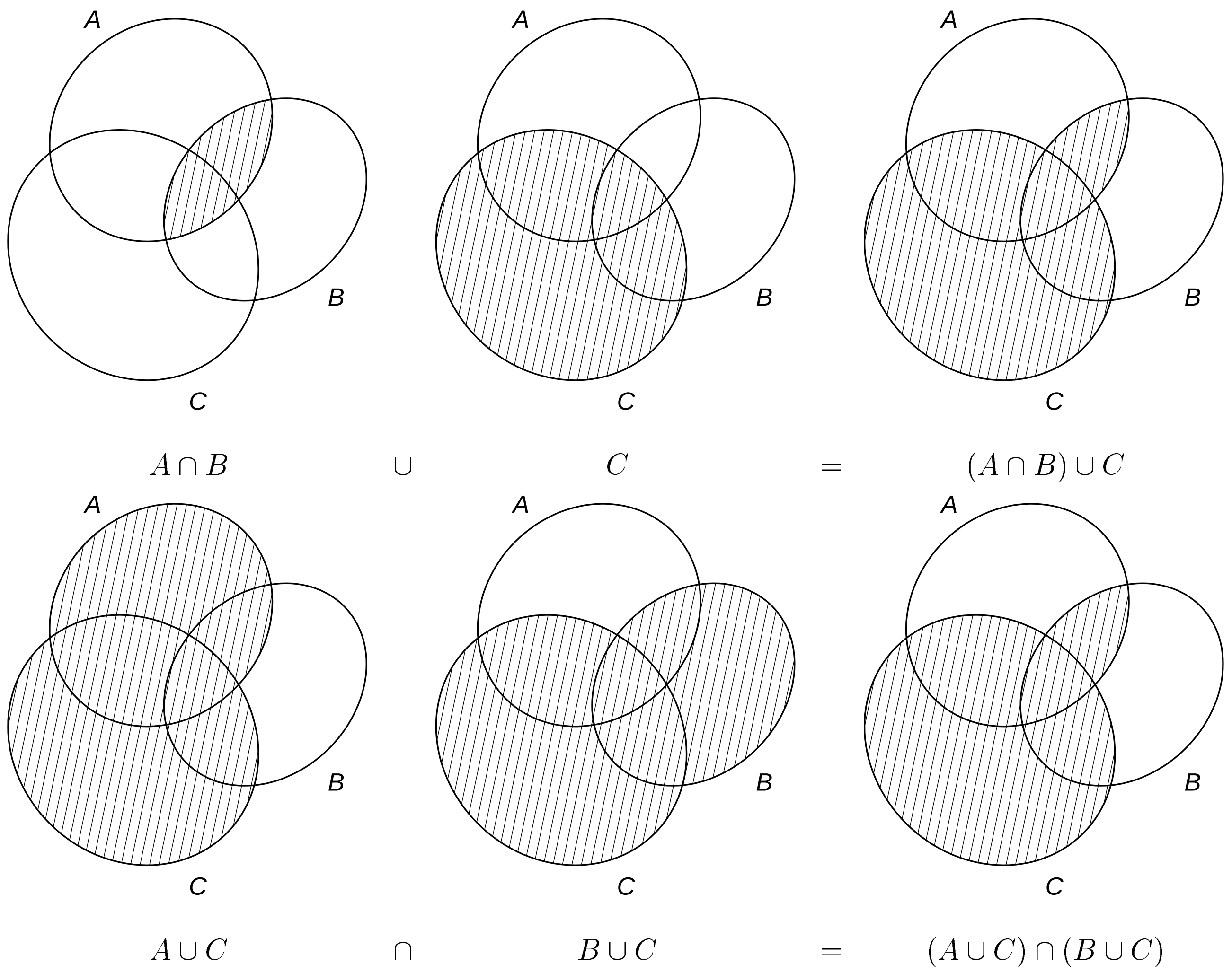


Рис. 1.9

Доказательство – следует непосредственно из определения.

2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*ассоциативность*, или *сочетательный закон*, см. рис.1.6, 1.7).

Доказательство. Докажем, например, ассоциативность объединения. Ассоциативность пересечения доказывается по такому же принципу. Пусть выбран произвольно элемент $x \in A \cup (B \cup C)$. Это означает, что выполнено по крайней мере одно из двух:

1) $x \in A \subset A \cup B \subset (A \cup B) \cup C$;

2) $x \in B \cup C$. Тогда опять же выполняется хотя бы одно из двух:

$$x \in B \subset A \cup B \subset (A \cup B) \cup C,$$

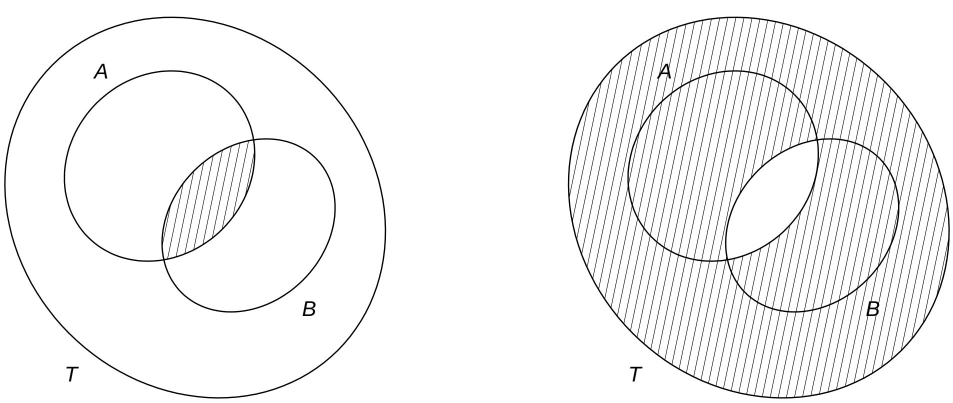
либо

$$x \in C \subset C \cup (A \cup B) = (A \cup B) \cup C.$$

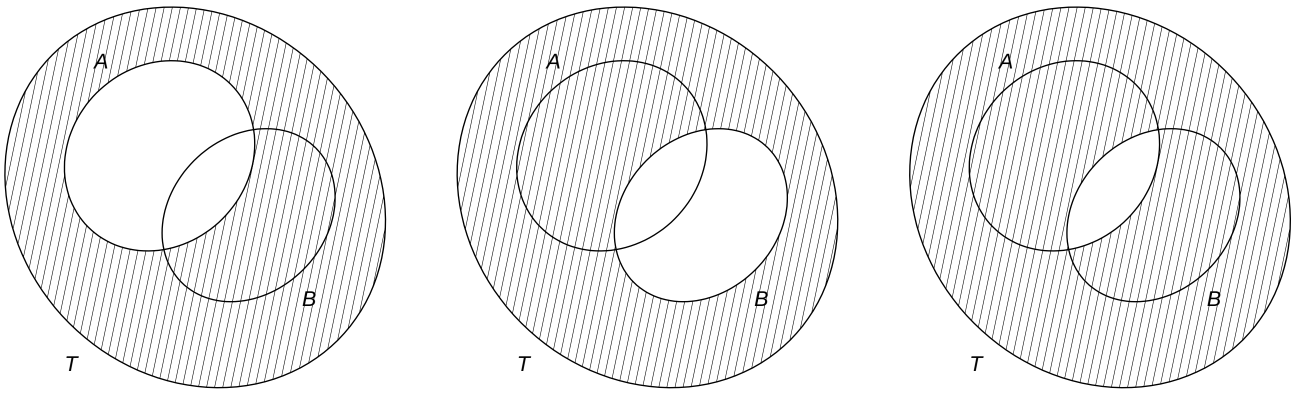
Таким образом, в любом случае $x \in (A \cup B) \cup C$, и в силу произвольности выбора x получаем: $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$. Отсюда и из свойства 1 следует обратное вложение $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$. Стало быть, справедливо доказываемое равенство.

По такому же принципу доказываются следующие свойства.

3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (*дистрибутивность*, или *распределительный закон, объединения относительно пересечения*, см. рис.1.8).



$A \cap B$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\overline{A \cap B}$



$\overline{A}$ $\qquad \cup \qquad$ $\overline{B}$ $\qquad = \qquad$ $\overline{A} \cup \overline{B}$

Рис. 1.10

4. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (*дистрибутивность*, или *распределительный закон, пересечения относительно объединения*, см. рис.1.9).

5. Пусть T – основное множество, и рассматриваются лишь его подмножества. Тогда $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (*принцип двойственности*, или *законы де Моргана*, см. рис.1.10, 1.11).

§1.2. Основные формулы комбинаторики

Комбинаторика[2] – это раздел математики, изучающий количество различных комбинаций, которые можно составить заданным способом из элементов данного множества.

Пусть m и n - некоторые натуральные числа, а X – заданное множество, состоящее из n элементов. Предположим, нам требуется выбрать какие-то m элементов из множества X. Результат такого выбора называется *выборкой* из n элементов по m.

В соответствии с правилом, по которому производится отбор элементов, выборка может иметь ту или иную структуру: быть *стратифицированной* (когда элементы в выборке разделяются на различные типы и группы) или *нестратифицированной* (когда элементы в выборке считаются равноправными); быть *упорядоченной* (когда учитывается порядок отбора элементов) или *неупорядоченной* (когда не учитывается порядок отбора элементов); быть *бесповторной* (когда один и тот же элемент не может участвовать в выборке дважды) или *с повторениями* (когда элементы в выборке могут повторяться).

[2]От слова "*combino*" (лат.) – "соединяю".

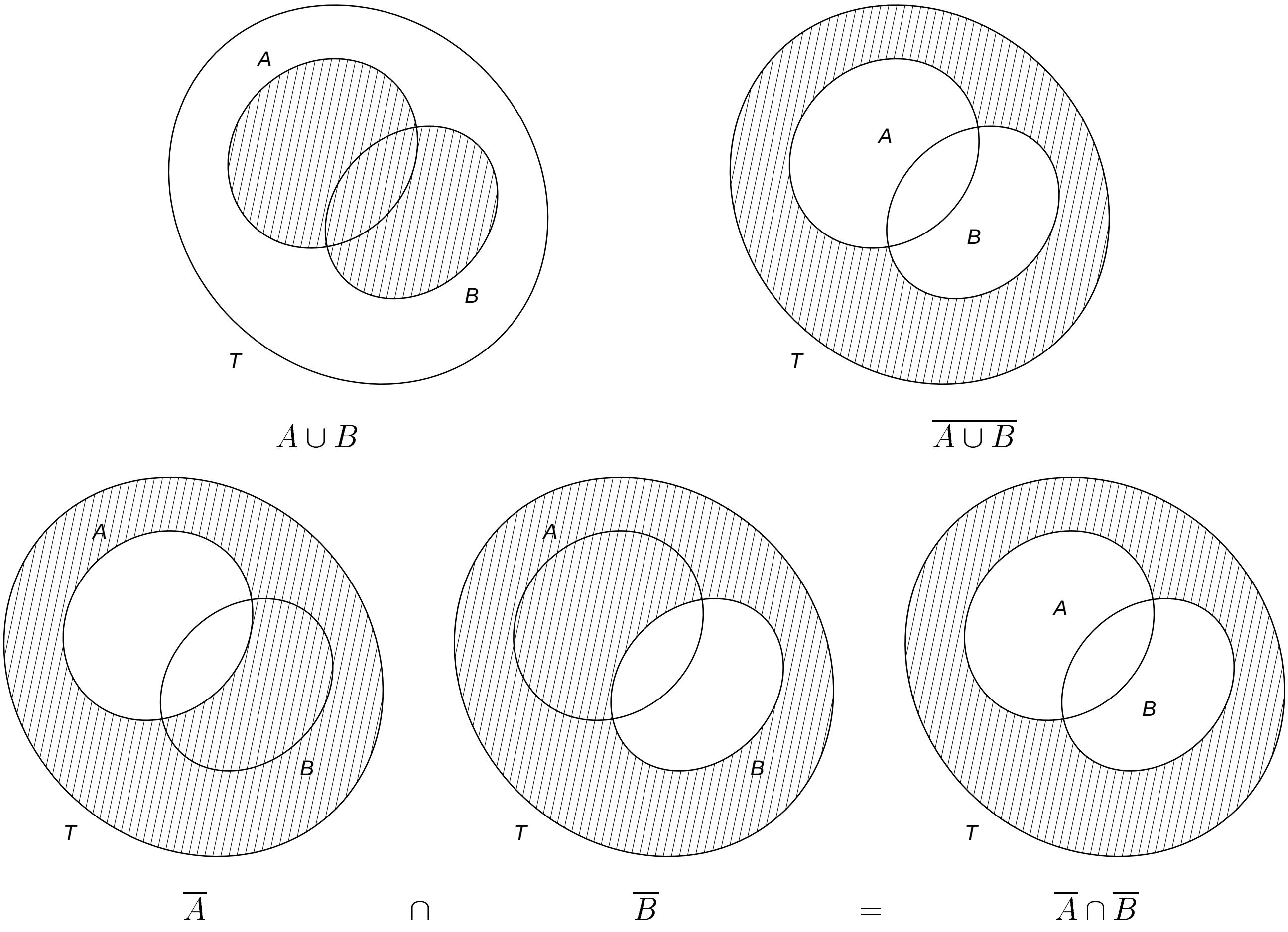


Рис. 1.11

Основной целью комбинаторики является разработка методов, позволяющих вычислить общее количество выборок, которые можно составить по заданному правилу.

Укажем далее основные правила, которые используются при решении комбинаторных задач.

Теорема 1.1 (*Правило суммы*). Пусть множество X содержит непересекающиеся подмножества $X_1, X_2, \ldots, X_k$, причем количество элементов в подмножестве X_i равно n_i, $i = \overline{1,k}$; $n_1 + n_2 + \ldots + n_k \leq n$. Тогда выбор ровно одного элемента, принадлежащего одному из подмножеств X_i, $i = \overline{1,k}$, может быть осуществлен $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ способами.

Доказательство. Пусть $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{k} X_i$. Тогда количество элементов в Y равно $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, и мы можем выбрать любой, но только один элемент из множества Y. Очевидно, что количество способов, которыми это можно сделать, равно количеству элементов множества Y. Теорема доказана.

Пример 1.1. Известно, что в ящике находится 500 деталей, из которых 110 деталей первого сорта, 230 деталей второго сорта, 140 деталей третьего сорта и 20 деталей бракованных. Найдем число всех способов, которыми можно извлечь из ящика бракованную деталь или деталь третьего сорта. В данном случае можем считать, что X – это множество всех деталей в ящике, X_1 – это подмножество бракованных деталей, состоящее, таким образом, из $n_1 = 20$ элементов, а X_2 – подмножество деталей третьего сорта, состоящее соответственно из $n_2 = 140$ элементов. Тогда по правилу суммы существует ровно $n_1 + n_2 = 20 + 140 = 160$ способов извлечения бракованной детали или детали третьего сорта.

Теорема 1.2 (*Правило произведения*). Пусть выборка m элементов из множества X производится по следующему правилу. Сначала выбираем элемент $x_1 \in X_1$, где X_1 – некоторое подмножество множества X, состоящее из n_1 элементов. Далее выбираем элемент $x_2 \in X_2$, где X_2 – подмножество множества X, зависящее или не зависящее от выбора элемента x_1, но состоящее из n_2 элементов, и т.д. На последнем шаге выбираем элемент $x_m \in X_m$, где X_m – подмножество множества X, зависящее или не зависящее от выбора элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, но состоящее из n_m элементов. Таким образом, данная выборка представляет собой упорядоченный набор

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_m\},$$

где элемент x_i может принимать n_i различных значений, $i = \overline{1, m}$. Тогда число всех таких выборок равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$.

Примечание 1.5. В отличие от теоремы 1.1, подмножества X_i, $i = \overline{1, m}$, могут пересекаться. Таким образом, выборка может быть повторной или бесповторной. Поэтому число m может превосходить n.

Для доказательства теоремы 1.2 воспользуемся методом *математической индукции.*

Примечание 1.6. Математическая индукция – это общий способ доказательства соотношения, зависящего от натурального числа n, для любого $n \geq 1$ (или $n \geq n_0$, или $n \in [n_0, n_1]$). Этот способ состоит в следующем. Сначала проверяем справедливость соотношения при $n = 1$. Затем, предполагая, что соотношение справедливо при $n = k$ (это так называемое *предположение индукции*), проверяем его справедливость при $n = k + 1$. Если это удается, делаем вывод, что доказываемое соотношение справедливо для всех натуральных n.

Доказательство теоремы 1.2 проведем методом математической индукции по числу $m \in \mathbf{N}$.

1. Пусть $m = 1$. Тогда выборка состоит ровно из одного элемента, взятого из множества X_1. Очевидно, что число способов, которыми можно выбрать один элемент из множества X_1, равно числу его элементов, то есть n_1. Таким образом, утверждение теоремы справедливо при $m = 1$.

2. Предположим, что утверждение теоремы справедливо при $m = k$, и докажем, что оно справедливо и при $m = k + 1$. Выберем элемент $x_1 \in X_1$ и зафиксируем его. По нему мы можем определить множество X_2, затем выбрать элемент $x_2 \in X_2$, потом – множество X_3 и элемент $x_3 \in X_3$, и т.д. вплоть до элемента x_m. Заметим, что при фиксированном x_1 всякая выборка взаимно однозначно отождествляется с выборкой

$$\{x_2, x_2, \ldots, x_m\},$$

состоящей из $m - 1 = k$ элементов. Поэтому согласно предположению индукции всего таких выборок будет $r = n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_{k+1}$.

Обозначим Z_j, $j = \overline{1, n_1}$, – множество всех интересующих нас выборок, отвечающих j-му способу выбора элемента x_1. Очевидно, что множества Z_j, $j = \overline{1, n_1}$, не пересекаются, и количество элементов в каждом из них по доказанному равно r. При этом каждая выборка представляет собой выбор одного элемента из любого из множеств Z_j, $j = \overline{1, n_1}$. Тогда по правилу суммы получаем, что число всех возможных выборок равно

$$\underbrace{r + r + \ldots + r}_{n_1 \text{ раз}} = n_1 \cdot r = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k+1},$$

то есть утверждение теоремы справедливо при $m = k+1$. По индукции делаем вывод, что оно справедливо и для всех $m \in \mathbf{N}$. Теорема доказана.

Задача 1.1. Имеется кодовый замок, кодирующее устройство которого состоит из четырех барабанов с десятью гранями, на которых изображены цифры от 0 до 9, и трех барабанов с пятью гранями, на которых изображены буквы "A","B","C","D","E". Каково количество возможных кодовых комбинаций для этого замка.

Решение. Каждую кодовую комбинацию можно представить как упорядоченный набор $\{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3\}$, где a_i принимает 10 значений (цифры от 0 до 9), $i = \overline{1, 4}$, а b_j – 5 различных значений (буквы от "A" до "E"), $j = \overline{1, 3}$. По теореме 1.2, общее количество комбинаций равно $n = 10^5 \cdot 5^3 = 12500000$.

Выборки, образованные по тем или иным заданным правилам, называют *комбинациями*. Далее мы рассмотрим основные виды комбинаций.

Комбинации без повторений

Говоря о выборке, будем считать далее, что она бесповторная.

Выборку из n элементов по m, в которой учитывают порядок отбора элементов (то есть упорядоченный набор m элементов множества X) называют *размещением из n элементов по m*. В частности, размещение из n элементов по n называют *перестановкой из n элементов*.

Примечание 1.7. Таким образом, перестановки – это всевозможные отличающиеся друг от друга порядком следования упорядоченные наборы всех элементов множества X.

Выборку из n элементов по m, в которой не учитывают порядок отбора элементов (то есть неупорядоченный набор m элементов множества X) называют *сочетанием из n элементов по m*.

Рассмотрим примеры.

Пример 1.2. Пусть имеется четыре карточки с буквами "A", "E", "M", "P".

1. Располагая эти четыре карточки в ряд различными способами, получаем всевозможные перестановки из этих четырех карточек:

AEMP, AEPM, AMEP, AMPE, APEM, APME,
EAMP, EAPM, EMAP, EMPA, EPAM, EPMA,
MAEP, MAPE, MEAP, MEPA, MPAE, MPEA,
PAEM, PAME, PEAM, PEMA, PMAE, PMEA.

Таким образом, всего перестановок из четырех карточек (то есть размещений из четырех по четыре карточки) получилось 24.

2. Будем отбрасывать по одной букве. Тогда оставшиеся три буквы, не выложенные в ряд, то есть неупорядоченные ("в куче"), можно рассматривать как сочетания из четырех исходных карточек по три. Понятно, что всего таких сочетаний будет 4. Рассмотрим способы, которыми мы можем упорядочить каждое из этих сочетаний, и тем самым, получить всевозможные размещения из четырех исходных карточек по три:

а) "A": EMP, EPM, MEP, MPE, PEM, PME;
б) "E": AMP, APM, MAP, MPA, PAM, PMA;
в) "M": AEP, APE, EAP, EPA, PAE, PEA;

г) "Р": АЕМ, АМЕ, ЕАМ, ЕМА, МАЕ, МЕА.
Таким образом, всего размещений из четырех карточек по три получилось $4 \times 6 = 24$.

3. Размещениями из четырех данных карточек по две будут:

АЕ, АМ, АР, ЕА, ЕМ, ЕР, МА, МЕ, МР, РА, РЕ, РМ.
Таким образом, всего размещений из четырех карточек по две получилось 12.

4. Размещениями из четырех данных карточек по одной будут:

А, Е, М, Р.
Таким образом, всего размещений из четырех карточек по одной получилось 4.

Пример 1.3. В первом туре соревнований по шашкам участвуют 12 человек. Предположим, нам требуется выяснить, сколько партий должно быть сыграно в первом туре, если между каждыми двумя участниками должна состояться ровно одна партия. Заметим, что количество всех партий, которые должны быть сыграны в первом туре, совпадает с количеством всех пар участников, отличающихся друг от друга только составом, а не порядком следования участников. Поэтому каждая пара представляет собой сочетание из 12 участников по 2. Таким образом, количество всех партий будет равно числу сочетаний из 12 элементов по 2.

Примечание 1.8. В комбинаторике приняты следующие обозначения:
P_n – число перестановок из n элементов;
A_n^m – число размещений из n элементов по m;
C_n^m – число сочетаний из n элементов по m.

Исходя из правила произведения, получаем, что справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.3. Число размещений из n элементов по m вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1.1}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.2. Каждое размещение из n элементов по m представляет собой упорядоченный набор $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, где x_1 выбирается из множества $X_1 = X$, состоящего из $n_1 = n$ элементов; элемент x_2 выбирается из множества $X_2 = X \setminus \{x_1\}$, состоящего из $n_2 = n-1$ элементов; элемент x_3 выбирается из множества $X_3 = X \setminus \{x_1, x_2\}$, состоящего из $n_3 = n-2$ элементов, и т.д.; наконец, элемент x_m выбирается из множества $X_m = X \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}\}$, состоящего из $n_m = n-(m-1)$ элементов. Таким образом, по правилу произведения получаем, что число всех размещений равно

$$A_n^m = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

Теорема доказана.

Теорема 1.4. Число перестановок из n элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = n! \tag{1.2}$$

Число сочетаний из n элементов по m вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{1.3}$$

Доказательство. 1. Действительно, как частный случай формулы (1.1) получаем $P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$.

2. Поскольку на каждый неупорядоченный набор m элементов приходится $P_m = m!$ упорядоченных наборов, то очевидно,

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!}.$$

Теорема доказана.

Пример 1.4. В частности (см. пример 1.2),

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, \quad A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24, \quad A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12, \quad A_4^1 = 4,$$

$$C_4^1 = \frac{4}{1!} = 4, \quad C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6, \quad C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4, \quad C_4^4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!} = 1.$$

Примечание 1.9. Для числа сочетаний по определению полагают: $C_n^0 = 1$. При этом очевидно, что $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$, $C_n^n = 1$.

Пример 1.5. Используя формулу (1.3), находим искомое количество партий в примере 1.3:

$$C_{12}^2 = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66.$$

Пример 1.6. Порядок выступления двенадцати участников конкурса по пению определяется жребием. Выясним, сколько возможно вариантов исхода жеребьевки в этом конкурсе. Заметим, что каждый вариант жеребьевки представляет собой упорядоченный набор из всех двенадцати участников конкурса, причем различные варианты отличаются друг от друга только порядком следования участников и совпадают между собой по составу. Иными словами, каждый из вариантов жеребьевки – это перестановка из двенадцати элементов. Таким образом, пользуясь формулой (1.2), получаем искомое количество вариантов:

$$P_{12} = 12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 479001600.$$

Задача 1.2. Имеется 7 конвертов, которые нужно разнести по 7 указанным на них адресам. Сколько возможно маршрутов доставки?

Решение. Занумеруем конверты (а тем самым, и указанные на них адреса). Каждому маршруту взаимно-однозначно соответствует упорядоченный набор различных чисел от 1 до 7, то есть перестановка чисел от 1 до 7. Например, набор $\{5, 2, 6, 7, 1, 3, 4\}$ означает, что сначала доставляем конверт по пятому адресу, затем - по второму, потом - по шестому и т.д. Всего таких наборов, а следовательно, и маршрутов, будет $P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

Задача 1.3. Сколько словарей необходимо издать, чтобы переводить с семи языков на любой другой из этих языков?

Решение. Каждый из словарей можно трактовать как упорядоченную пару $\{$ $Я_1$, $Я_2\}$ различных языков из данных семи (перевод с одного языка $Я_1$ на другой $Я_2$), то есть как размещение из 7 языков по 2. Поэтому общее количество словарей - это $A_7^2 = 7 \cdot 6 = 42$.

Теорема 1.5. Пусть M_i – некоторое множество, состоящее из n_i элементов, $i = \overline{1, k}$. Число различных неупорядоченных наборов из $m = m_1 + \ldots + m_k$ элементов, среди которых ровно m_i элементов множества M_i, $i = \overline{1, k}$, равно произведению $C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot C_{n_k}^{m_k}$.

Как еще один пример использования теоремы 1.2 докажем теорему 1.5 для случая $k = 2$, $m_1 = 3$, $m_2 = 2$ (для произвольных $k, m_1, \ldots, m_k$ доказывается аналогично). Итак, пусть имеются неупорядоченные наборы вида $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\}$, где a_1, a_2, a_3 выбираются из множества n_1 элементов, а b_1, b_2 – из множества n_2 элементов. Каждый из этих неупорядоченных наборов можно отождествить с упорядоченным набором 2-х наборов $\{a, b\}$, где $a = \{a_1, a_2, a_3\}$, $b = \{b_1, b_2\}$. Очевидно, что количество всех возможных неупорядоченных наборов вида a - это по определению $C_{n_1}^3$, а количество всех возможных неупорядоченных наборов вида b - это по определению $C_{n_2}^2$. Тогда по теореме 1.2, количество всех упорядоченных наборов $\{a, b\}$ равно $C_{n_1}^3 \cdot C_{n_2}^2$.

Задача 1.4. Первенство по баскетболу оспаривают 18 команд, которые путем жеребьевки распределяются на 2 подгруппы по 9 команд в каждой. Пять команд из 18 являются лидирующими. Каково количество вариантов жеребьевки, при которых три лидирующие команды попадают в первую подгруппу.

Решение. Можем воспользоваться теоремой 1.5, если обозначить M_1 – множество лидирующих команд ($n_1 = 5$), M_2 – множество команд-аутсайдеров ($n_2 = 18 - 5 = 13$). При интересующих нас вариантах жеребьевки первая подгруппа состоит из $m_1 = 3$ лидирующих подгрупп и $m_2 = 9 - 3 = 6$ команд-аутсайдеров. Соответственно по теореме 1.5, количество всех таких вариантов равно

$$C_5^3 \cdot C_{13}^6 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{6!} = 10 \cdot 1729 = 17290.$$

Комбинации с повторениями

Рассмотрим теперь выборку из n элементов по m с повторениями. Исходя из этого понятия, аналогично тому, как это было сделано выше, определяются *размещения* и *сочетания из n элементов по m с повторениями.*

Примечание 1.10. Грубо говоря, размещения (сочетания) из n элементов по m с повторениями – это размещения (сочетания), в которых некоторые из элементов (вплоть до того, что все элементы) могут быть одинаковыми. Для числа размещений из n элементов по m с повторениями в комбинаторике принято обозначение $\tilde{A}_n^m$. Аналогичным образом, для числа сочетаний из n элементов по m с повторениями используется обозначение $\tilde{C}_n^m$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.6. Число размещений из n элементов по m с повторениями вычисляется по формуле

$$\tilde{A}_n^m = n^m. \tag{1.4}$$

Доказательство. Каждое размещение с повторениями из n элементов по m представляет собой упорядоченный набор вида

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_m\},$$

где каждый из элементов выбирается из множества X независимо от других, то есть может принимать n значений. Стало быть, пользуясь правилом произведения, получаем, что число всех таких наборов равно

$$\tilde{A}_n^m = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m \text{ раз}} = n^m.$$

Теорема доказана.

Теорема 1.7. Число сочетаний из n элементов по m с повторениями вычисляется по формуле

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m. \tag{1.5}$$

Доказательство проведем методом математической индукции по m.

1. Пусть $m = 1$. В этом случае сочетание с повторениями или без повторений – это одно и то же. Поэтому $\tilde{C}_n^1 = C_n^1 = C_{n+m-1}^m$.

2. Предположим, что формула (1.5) справедлива при $m = k$ и докажем ее справедливость при $m = k+1$. Обозначим Z_1 – множество всех интересующих нас сочетаний, в которых хотя бы один раз встречается первый элемент множества X, обозначим его x_1. Всего таких сочетаний будет $n_1 = \tilde{C}_n^k$. Действительно, поскольку порядок следования элементов в сочетании не учитывается, то можем считать, что одно из $m = k+1$ мест (не важно, какое) занято этим элементом x_1 у каждого из этих сочетаний, и стало быть, его можно просто выбросить из рассмотрения и считать, что каждое из сочетаний в Z_1 состоит лишь из k элементов – на количество всех таких сочетаний это никак не повлияет. Далее, обозначим Z_2 – множество всех интересующих нас сочетаний, в которых отсутствует элемент x_1, но хотя бы один раз присутствует элемент $x_2 \in X$. Таким образом, в роли множества X при построении этих сочетаний выступает множество $X_1 = X \setminus \{x_1\}$, состоящее из $n-1$ элемента. Поэтому всего таких сочетаний будет $n_2 = \tilde{C}_{n-1}^k$. Продолжая таким образом отбрасывать один за другим элементы множества X, на последнем шаге получим множество Z_n всех интересующих нас сочетаний, в которых встречается только n-й элемент $x_n \in X$. Понятно, что таких сочетаний только одно, и оно имеет вид $\{x_n, x_n, \ldots, x_n\}$. Но для единообразия можем записать: $n_n = 1 = \tilde{C}_1^k$. Рассмотренные множества Z_j, $j = \overline{1, n}$, не пересекаются и исчерпывают все множество интересующих нас сочетаний. При этом по доказанному, число сочетаний в них $n_j = \tilde{C}_{n-j+1}^k$, $j = \overline{1, n}$. Поэтому согласно правилу суммы получаем:

$$\tilde{C}_n^{k+1} = n_1 + n_2 + \ldots + n_n = \tilde{C}_n^k + \tilde{C}_{n-1}^k + \tilde{C}_{n-2}^k + \ldots + \tilde{C}_1^k,$$

и по предположению индукции,

$$\tilde{C}_n^{k+1} = C_{n+k-1}^k + C_{n+k-2}^k + \ldots + C_k^k. \tag{1.6}$$

Используя формулу (1.3), нетрудно показать, что

$$C_{j+k-1}^k = C_{j+k}^{k+1} - C_{j+k-1}^{k+1}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Тогда формула (1.6) преобразуется к виду:

$$\tilde{C}_n^{k+1} = \left(C_{n+k}^{k+1} - C_{n+k-1}^{k+1}\right) + \left(C_{n+k-1}^{k+1} - C_{n+k-2}^{k+1}\right) + \ldots + \left(C_{k+2}^{k+1} - C_{k+1}^{k+1}\right) + C_k^k.$$

Поскольку $C_{k+1}^{k+1} = C_k^k = 1$, то нетрудно заметить, что все слагаемые в этой сумме, кроме первого, сокращаются, и таким образом,

$$\tilde{C}_n^{k+1} = C_{n+k}^{k+1} = C_{n+m-1}^m,$$

то есть формула (1.5) выполняется и при $m = k + 1$. Отсюда делаем вывод, что она справедлива и при любом $m \in \mathbf{N}$. Теорема доказана.

Задача 1.5. Жюри присяжных из двенадцати человек требуется вынести вердикт обвиняемому из трех вариантов: "виновен", "не виновен", "оправдать за недостаточностью улик". Каждому из присяжных выдано по одной карточке, на которой он должен написать соответственно "В", "Н" или "О" в зависимости от своего решения и опустить свою карточку в урну для тайного голосования. Карточки извлекаются. После этого производится подсчет голосов по каждому из трех вариантов. Сколько различных исходов жеребьевки здесь существует?

Решение. Обозначим x_1="В", x_2="Н", x_3="О" и соответственно определим множество $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Каждый исход жеребьевки представляет собой неупорядоченный набор из двенадцати элементов, взятых из множества X, в каковом наборе каждый элемент может повторяться от нуля до двенадцати раз. Иными словами, каждый исход жеребьевки – это сочетание с повторениями из трех элементов по двенадцать: $n = 3$, $m = 12$. Таким образом, согласно формулам (1.5) и (1.3) общее количество исходов жеребьевки равно

$$\tilde{C}_3^{12} = C_{3+12-1}^{12} = C_{14}^{12} = \frac{14!}{12!2!} = \frac{13 \cdot 14}{2} = 13 \cdot 7 = 91.$$

Примечание 1.11. В условиях приведенной выше задачи среди присяжных производится тайное голосование. Если бы голосование не было тайным и фиксировалось бы, какое решение принял каждый из присяжных (скажем, карточки – именные), то набор из двенадцати извлеченных карточек уже нельзя было бы рассматривать как неупорядоченный. Действительно, если мы перенумеруем присяжных и соответственно их номерам выложим карточки в ряд, то, например, исходы вида

ВВВВННННОООО, ВОНВОНВОНВОН, ОВНВНВОНВОНО и т.п.,

совпадающие по количеству голосов, отданных за каждый из вариантов вердикта, но не совпадающие по порядку следования, уже нельзя было бы отождествлять, как мы их отождествляли в условиях тайного голосования. Поэтому в условиях явного голосования каждый исход жеребьевки – это размещение с повторениями из трех элементов по двенадцать, и согласно формуле (1.4), количество всех возможных исходов равно

$$\tilde{A}_3^{12} = 3^{12} = 531441.$$

Впрочем, тот же самый результат можно было бы получить непосредственно из правила умножения (теорема 1.2).

Пусть множество X состоит из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда всякая упорядоченная выборка из m элементов множества X, в которой элемент x_j встречается ровно m_j раз, $j = \overline{1, n}$, $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m$, называется *перестановкой с повторениями* по $m_1, m_2, \ldots, m_n$ раз из m элементов. Число таких перестановок обозначается $P_m(m_1, m_2, \ldots, m_n)$.

Теорема 1.8. Число перестановок с повторениями вычисляется по формуле:

$$P_m(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \frac{m!}{m_1!\mathrm{m}_2!\ldots\mathrm{m}_\mathrm{n}!}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Действительно, если бы все элементы в данной перестановке были различны, то число перестановок было бы равно $m!$. Однако так как все перестановки, в которых m_1 позиций, выделенных для элемента x_1, одни и те же, не различаются, а число перестановок между этими позициями равно $m_1!$, то для того, чтобы учесть тождественность этих перестановок, мы должны полученное количество перестановок поделить на $m_1!$. Продолжая аналогичным образом рассуждать для каждого из остальных элементов $x_2, \dots, x_n$, получаем формулу (1.7). Теорема доказана.

Примечание 1.12. Другой путь доказательства теоремы 1.8 можно проследить в решении следующей задачи, см. I способ.

Задача 1.6. Имеется число 2131213. Сколько всего семизначных чисел можно составить из образующих его цифр?

Решение.

I способ. Интересующие нас числа представляют собой наборы по семь цифр. У нас имеется три "1", две "2" и две "3". Зафиксируем какие-то три позиции и поместим на них цифру "1". Выбор таких трех позиций из семи возможных представляет собой сочетание из семи по три, поэтому всего таких возможностей C_7^3. На две позиции из оставшихся четырех разместим цифру "2". Всего таких возможностей C_4^2. На оставшиеся две позиции разместим цифру "3" - одна возможность. Тогда каждое интересующее нас число можно отождествить с упорядоченным набором $\{s_1, s_2, s_3\}$, где s_1 - номер способа размещения "1", s_2 - номер способа размещения "2", s_3 - номер способа размещения "3". Как показано ранее, s_1 может принимать C_7^3 различных значений, s_2 – C_4^2 различных значений, и s_3 – одно значение. Таким образом, по теореме 1.2, искомое количество будет равно

$$n = C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot 1 = \frac{7 \cdot 5 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2!} = 7 \cdot 5 \cdot 6 = 210.$$

II способ. Рассмотрим множество $X = \{1, 2, 3\}$. Каждое семизначное число, составленное из цифр 1,2,3, то есть из элементов множества X, в которое "1" входит 3 раза, а "2" и "3" – по 2 раза, представляет собой перестановку с повторениями по 3, 2 и 2 раза из семи элементов. Поэтому количество всех интересующих нас чисел равно

$$P_7(3, 2, 2) = \frac{7!}{3!2!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{6 \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210.$$

§1.3. Случайные события

Событием называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Если исход опыта (произойдет событие или не произойдет) однозначно определяется его условиями, то событие называется *детерминированным* (*определенным*). Для недетерминированного события отношение

$$h_n(A) = \frac{m_n(A)}{n},$$

где n – общее количество проведенных опытов, а $m_n(A)$ – количество тех из них, в которых событие A произошло, называется *частотой события* A. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} h_n(A) = P(A)$, то говорят, что событие обладает *статистической устойчивостью*. Недетерминированное событие, обладающее статистической устойчивостью, называется *случайным*. При этом предел $P(A)$ называется *вероятностью события* A. В этом состоит так называемая *частотная интерпретация вероятности*.

Дадим общее определение: *вероятностью* $P(A)$ события A называется количественная мера степени возможности наступления события A в результате серии одинаковых опытов, повторяющихся неограниченное количество раз.

Предмет теории вероятностей – это случайные события и их вероятности.

Далее для краткости под словом "событие" будем понимать "случайное событие". Говорят, что события образуют полную группу событий, если в результате опыта по крайней мере одно из них обязательно должно произойти. События называются равновозможными, если по условиям опыта нет оснований считать одно из них более возможным, чем другое. Говорят, что события *несовместны*, если в результате опыта никакие два из них не могут произойти одновременно. Множеством элементарных исходов называется полная группа равновозможных и несовместных событий. Множество элементарных исходов будем обозначать Ω.

§1.4. Операции над событиями

Заметим, что если множество элементарных исходов Ω задано, то всякое событие A, которое выделяется в данном опыте, можно рассматривать как подмножество множества Ω.

Пример 1.7. Предположим, что опыт заключается в подбрасывании игральной кости, центр тяжести которой совпадает с ее геометрическим центром, с гранями, пронумерованными от 1 до 6. В результате этого опыта может, в частности, произойти 6 событий вида ω_i ="выпала грань номер i", то есть "выпало i очков", $i = \overline{1,6}$. Очевидно, они являются несовместными (2 грани не могут выпасть одновременно), равновозможными (кубик симметричен, с несмещенным центром тяжести) и образуют полную группу (какая-то одна грань должна выпасть). Иными словами, это элементарные исходы, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$. Рассмотрим событие A="выпало четное число очков". Очевидно, наступление события A эквивалетно наступлению одного из элементарных исходов $\omega_2, \omega_4, \omega_6$, соответственно событие A рассматривается как множество всех благоприятных для него элементарных исходов $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \subset \Omega$.

Вложение $A \subset B$ означает, что событие A влечет событие B. Действительно, если событие A происходит, то реализуется один из благоприятных для него элементарных исходов $\omega \in A$, но $A \subset B$, и таким образом, $\omega \in B$, а в таком случае осуществляется событие B.

Объединение множеств

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}$$

(множество всех ω из Ω, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B) называется *суммой событий* $A + B$. Иными словами, $A + B$ – это событие, состоящее в том, что реализуется какой-то элементарный исход, благоприятный какому-то из событий A или B (хотя бы одному), то есть во всяком случае одно из событий A или B происходит.

Пересечение множеств

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ и } \omega \in B\}$$

называется *произведением событий* AB. Иными словами, AB – это событие, состоящее в том, что реализуется какой-то из элементарных исходов, благоприятных одновременно и событию A и событию B, то есть одновременно происходят оба события A и B.

Множество элементарных исходов Ω называется также *достоверным событием.* Таким образом, достоверное событие – это событие, которое заведомо произойдет в результате опыта.

Пустое множество $\emptyset$ (т.е. множество, не содержащее ни одного элемента) называется *невозможным событием.* Несовместность событий A и B можно записать следующим образом: $AB = \emptyset$.

Разность множеств (точнее, дополнение множества A до Ω)

$$\overline{A} = \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$$

называется *отрицанием события* A. Иными словами, это событие, состоящее в том, что не происходит событие A.

Непосредственно из свойств операций над множествами следуют *свойства операций над событиями.* Укажем[3] основные из них:
1) $A + A = A$; $AA = A$; 2) $A + B = B + A$; $AB = BA$;
3) $A + (B + C) = (A + B) + C$; $A(BC) = (AB)C$;
4) $(A + B)C = AC + BC$; 5) $AB + C = (A + C)(B + C)$;
6) $\overline{A + B} = \overline{A}\overline{B}$; 7) $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$;
8) $AB \subset A$; 9) $A \subset B \Rightarrow AB = A$; 10) $A \setminus B = A\overline{B}$;
11) $A + \overline{A} = \Omega$; 12) $A\overline{A} = \emptyset$; 13) $\overline{\overline{A}} = A$;
14) $A\Omega = A$; $A\emptyset = \emptyset$; 15) $A + \Omega = \Omega$; $A + \emptyset = A$.

Задача 1.7. Бросают две игральные кости. Заданы события: A=”сумма очков равна 5”, B=”хотя бы на одной из костей выпало 1”. Описать события AB и $A \setminus B = A\overline{B}$.

Решение. AB – событие, состоящее в том, что реализуются оба события A и B, то есть на одной кости выпало 1 и сумма очков равна 5. Иными словами, AB=”на одной кости выпало 1, а на другой – 4”.

$A\overline{B}$ – событие, состоящее в том, что ни на одной из костей не выпало 1 (отрицание B), а сумма очков равна 5. Иными словами, $A\overline{B}$=”на одной кости выпало 2, а на другой – 3”.

§1.5. Классическое определение вероятности

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ – конечное множество элементарных исходов, из которых m благоприятны событию A, то есть $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_m}\}$. В соответствии с определением элементарных исходов можно ожидать (и так оно и есть на самом деле), что при неограниченном увеличении количества N опытов примерно в N/n из них будет происходить событие ω_{i_1}, и аналогично, примерно в $(mN)/n$ из них будет реализовываться один из исходов $\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_m}$, то есть событие A. Иными словами, $h_N(A)$ будет приближенно равно $(mN)/(nN) = m/n$. Тогда в силу статистической устойчивости получаем:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Эта формула принимается как классическое определение вероятности $P(A)$.

Пример 1.8. Предположим, опыт заключается в подбрасывании игральной кости, с гранями, пронумерованными от 1 до 6. Как установлено ранее, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$, где ω_i =”выпало i очков”, $i = \overline{1, 6}$. Найдем вероятность события A=”выпало четное число очков”.

[3]Проверьте справедливость этих свойств с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Очевидно, $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. Таким образом, общее число элементарных исходов $n = 6$, число благоприятных исходов $m = 3$, следовательно,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Примечание 1.13. Как уже сказано выше, события мы понимаем как множества элементарных исходов, и действия над событиями – это по сути действия над множествами. Стало быть, к ним применима вся теория множеств. В частности, свойства операций над событиями можно иллюстрировать и анализировать с помощью диаграмм Эйлера-Венна. Это означает, что аналогом событий являются плоские множества. При этом роль основного множества T играет множество элементарных исходов Ω. Подобно тому, как количественной характеристикой ("мерой") плоских множеств является площадь, "мерой" события является вероятность (эта связь может проявляться и более конкретным образом, см. ниже геометрическое определение вероятности). Более того, вероятность обладает и совершенно аналогичными свойствами, с той только разницей, что "мера" основного множества, то есть $P(\Omega)$, всегда равна 1. Перечислим их.

Свойства вероятности:

1) $P(A) \in [0,1]$, $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$;
2) если $A_iA_j = \emptyset$, $i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$, то $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$. В частности, если события несовместны $AB = \emptyset$, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$;
3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
4) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;
   $P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$ и т.д.;
5) Если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$, $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Примечание 1.14. Свойство 1) очевидно непосредственно из определения (как из классического, так и из частотной интерпретации). Свойства 2) и 4) можно уяснить с помощью геометрической иллюстрации, см. примечание 1.4 на с.9. Свойство 3) является прямым следствием свойств 1) и 2):

$$A \cap \overline{A} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad 1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}).$$

Геометрическая иллюстрация свойства 5) тоже очевидна: если A и B – плоские множества, причем $A \subset B$, то понятно, что площадь $S(A) \leq S(B)$; $S(B \setminus A) = S(B) - S(A)$.

Задача 1.8. В ящике находится $a + b$ однотипных деталей, из которых b деталей с браком. Наудачу вынимается три детали. Какова вероятность того, что среди них окажется хотя бы одна бракованная?

Решение. Пусть A – интересующее нас событие. Тогда его отрицание $\overline{A}$="все 3 выбранные детали исправны". Элементарными исходами являются упорядоченные наборы вида $\omega = \{d_1, d_2, d_3\}$, где d_i – деталь, вынутая i-й по счету, $i = \overline{1,3}$, а всего деталей $(a+b)$. Таким образом, элементарные исходы представляют собой размещения из $(a+b)$ деталей по три, а их количество равно $n = A^3_{a+b}$. Аналогично, элементарные исходы, благоприятные для события $\overline{A}$, представляют собой размещения из a исправных деталей по три, а их количество равно $m = A^3_a$. Тогда вероятность

$$P(\overline{A}) = \frac{m}{n} = \frac{A^3_a}{A^3_{a+b}} = \frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{(a+b)\cdot(a+b-1)\cdot(a+b-2)}, \text{ и } P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Задача 1.9. Найти вероятность того, что при трех подбрасываниях игральной кости ни разу не выпадет четное число очков.

Решение. Обозначим A – интересующее нас событие, a_i – число очков, выпавших при i-м бросании, $i = \overline{1,3}$. Элементарными исходами являются упорядоченные наборы вида $\omega = \{a_1, a_2, a_3\}$, где каждое a_i может принимать шесть значений (от 1 до 6 очков), $i = \overline{1,3}$. Благоприятными для события A являются те из них, в которых каждое a_i – нечетно, то есть $a_i \in \{1,3,5\}$ и таким образом, может принимать три значения. По теореме 1.2, число элементарных исходов $n = 6\cdot6\cdot6 = 6^3$, а число благоприятных исходов $m = 3\cdot3\cdot3 = 3^3$. Тогда вероятность

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3^3}{6^3} = \frac{1}{8}.$$

Задача 1.10. В урне a белых шаров, b черных и c красных. Шары вынимают до тех пор, пока не появится белый шар. Найти вероятность того, что будет произведено 5 извлечений.

Решение. Обозначим B_i – шар, вынутый i-м по счету, $i = \overline{1,5}$. Элементарные исходы представляют собой упорядоченные наборы вида $\omega = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$, то есть являются размещениями из $(a+b+c)$ шаров по 5. Соответственно всего таких размещений $n = A^5_{a+b+c}$. Благоприятными для интересующего нас события A являются те из них, в которых шары $B_1, \ldots, B_4$ – не белые, а шар B_5 – белый. Тогда благоприятные исходы представляются в виде упорядоченных наборов $\{B, B_5\}$, где $B = \{B_1, \ldots, B_4\}$ – размещение из $(b+c)$ не белых шаров по 4, а всего таких размещений A^4_{b+c}, а B_5 может быть любым из a белых шаров. Отсюда по теореме 1.2 число благоприятных исходов равно $m = A^4_{b+c}\cdot a$. Таким образом, вероятность

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{a\cdot A^4_{b+c}}{A^5_{a+b+c}}.$$

Задача 1.11. Первенство по баскетболу оспаривают 18 команд, которые путем жеребьевки распределяются на 2 подгруппы по 9 команд в каждой. Пять команд из 18 являются лидирующими. Найти вероятность попадания трех лидирующих команд в одну подгруппу, а двух других – в другую.

Решение. Пусть A – интересующее нас событие. Возможны два варианта: 1) A_1=”в первую подгруппу попали три лидирующих команды” (и следовательно, во вторую подгруппу – две лидирующих команды), либо наоборот, 2) A_2=”в первую подгруппу попали две лидирующих команды” (и следовательно, во вторую подгруппу – три лидирующих команды). Соответственно $A = A_1 + A_2$. Очевидно, что события A_1 и A_2 не могут произойти одновременно, то есть являются несовместными: $A_1A_2 = \emptyset$. Тогда $P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$.

Вычислим вероятность $P(A_1)$. Перенумеруем команды. Обозначим через $K_1,\ldots,K_9$ – номера команд, попавших в первую подгруппу. Конкретный состав первой подгруппы – это элементарный исход, то есть элементарные исходы представляют собой неупорядоченные наборы вида $\boldsymbol{\omega} = \{K_1, \ldots K_9\}$, то есть сочетания из 18 команд по 9. Всего таких сочетаний $n = C_{18}^9$. Благоприятными для события A_1 являются те из них, в которых три команды лидирующие, а остальные шесть – аутсайдеры. При решении задачи 1.4 было установлено, что число таких наборов $m = C_5^3 \cdot C_{13}^6$. Поэтому вероятность

$$P(A_1) = \frac{m}{n} = \frac{C_5^3 \cdot C_{13}^6}{C_{18}^9}. \quad \text{Аналогично, } P(A_2) = \frac{C_5^2 \cdot C_{13}^7}{C_{18}^9}.$$

Таким образом,

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{C_5^3 \cdot C_{13}^6 + C_5^2 \cdot C_{13}^7}{C_{18}^9} = \frac{12}{17}.$$

§1.6. Геометрическое определение вероятности

Предположим, возможно установление взаимно-однозначного соответствия между множеством элементарных исходов и некоторым множеством на прямой, на плоскости или в пространстве, которое также будем обозначать Ω. Событие $A \subset \Omega$ аналогичным образом отождествляется с подмножеством этого множества. Соответственно вероятность события A вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{\mathrm{mes}(A)}{\mathrm{mes}(\Omega)},$$

где $\mathrm{mes}(A)$ – это длина для множества на прямой, площадь – на плоскости, и объем – в пространстве[4].

Задача 1.12. Пусть в случайные моменты времени в период с 17 до 18 часов включаются передатчик и приемник и работают 20 минут. Какова вероятность, что переданное сообщение будет принято?

Решение. Обозначим x – время включения передатчика, а y – время включения приемника, отсчитываемые от 17 часов 00 минут, $x, y \in [0, 60]$. Очевидно, что сообщение будет принято в том и только в том случае, когда $|x - y| \leq 20$. Таким образом, множество элементарных исходов Ω можно отождествить с квадратом $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x, y \in [0, 60]\}$, а интересующее нас событие A – с множеством $\{(x, y) \in \Omega : |x - y| \leq 20\}$ (см. рис. 1.12, *a*)). Площадь $S(\Omega) = 60 \cdot 60 = 3600$, $S(A) = S(\Omega) - (40 \cdot 40) = 3600 - 1600 = 2000$. Соответственно, вероятность

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9}.$$

Задача 1.13. Найти вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел из $[0, 1]$ окажется меньше либо равна 1, а произведение – не больше $2/9$.

[4]Все эти понятия объединяются в одном понятии *мера множества*. Отсюда и обозначение – $\mathrm{mes}(A)$ – от английского "measure" (мера).

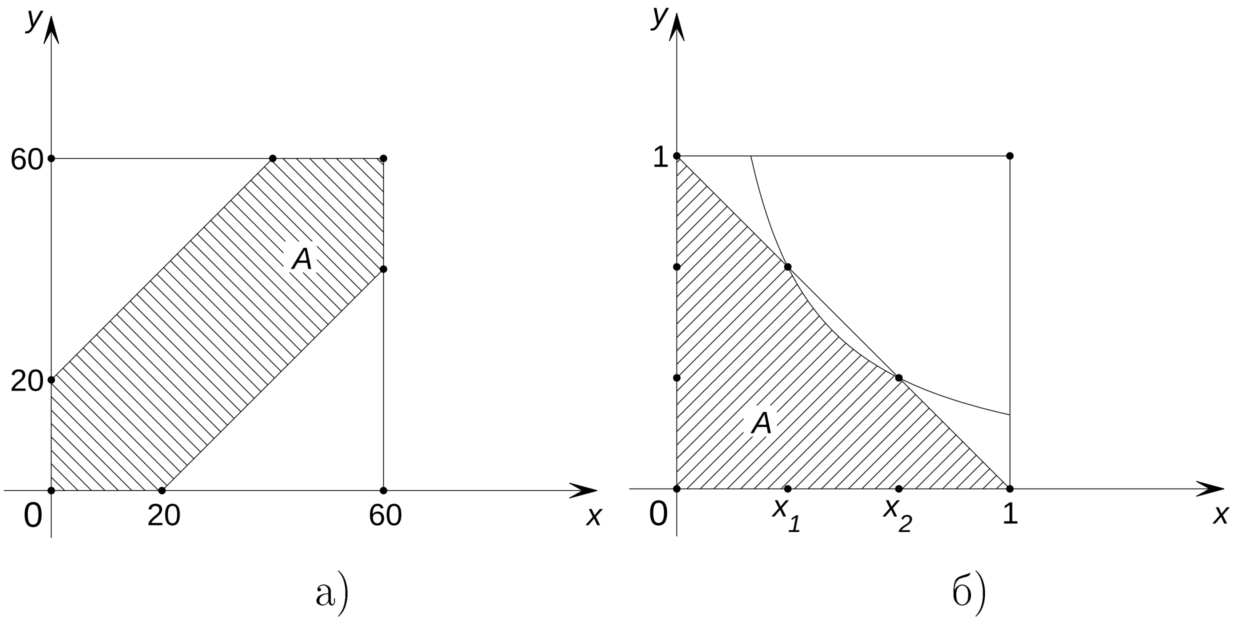


Рис. 1.12

Решение. Обозначим x, y – указанные числа. Тогда множество элементарных исходов можно отождествить с квадратом $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x, y \in [0, 1]\}$, а интересующее нас событие A – с множеством $\{(x, y) \in \Omega : x+y \leq 1, xy \leq 2/9\}$. Очевидно, что $S(\Omega) = 1$. Вычислим $S(A)$. Найдем абсциссы точек пересечения прямой $x + y = 1$ и гиперболы $xy = 2/9$ (рис. 1.12, *б*)):

$$x(1 - x) = 2/9 \Leftrightarrow 9x^2 - 9x + 2 = 0,$$

откуда $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$. Соответственно

$$S(A) = \int\limits_0^{1/3} (1 - x)dx + \int\limits_{1/3}^{2/3} \frac{2}{9x} dx + \int\limits_{2/3}^{1} (1 - x)dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \ln 2,$$

$P(A) = S(A)/S(\Omega) = S(A)$.

§1.7. Условная вероятность и независимость событий

Пусть $P(B) \neq 0$. *Условной вероятностью* $P(A|B)$ (события A при условии B) называется вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло. Условная вероятность вычисляется по формуле:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

События A и B называются *независимыми*, если осуществление одного из них не влияет на вероятность другого, то есть $P(A|B) = P(A)$, $P(B|A) = P(B)$.

Таким образом, если события A и B независимы, то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Пример 1.9. Обратимся еще раз к задаче 1.9. Решим ее другим способом. Определим события: A_i="при i-м подбрасывании выпало нечетное число очков", $i = \overline{1,3}$. Тогда интересующее нас событие $A = A_1A_2A_3$. Очевидно, что $P(A_i) = 0.5$, $i = \overline{1,3}$ (всего 6 элементарных исходов, благоприятных 3). Заметим, что события A_1A_2 и A_3, а также A_1 и A_2 являются независимыми. Тогда

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1A_2) \cdot P(A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

§1.8. Вероятность произведения событий

Непосредственно по определению условной вероятности,

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A),$$

и по индукции,

$$P(A_1A_2 \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1A_2 \cdot A_{n-1}).$$

Соответственно события $A_1, \ldots A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если $\forall\ 1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n$, $k = \overline{2,n}$,

$$P\left(\prod_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}).$$

Задача 1.14. На семи карточках написаны буквы, образующие слово "СОЛОВЕЙ". Наудачу вынимаются по одной три карточки и выкладываются слева направо. Найти вероятность того, что получится слово "ВОЛ".

Решение. Определим события: A_1="первая буква – В", A_2="вторая буква – О", A_3="третья буква – Л". Тогда интересующее нас событие $A = A_1A_2A_3$,

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2).$$

Очевидно, что $P(A_1) = 1/7$ (всего букв $n = 7$, благоприятных $m = 1$); $P(A_2|A_1) = 2/6$ (предполагается, что событие A_1 произошло, то есть всего букв стало на одну меньше, и буквы "В" уже нет, $n = 6$, и имеется две буквы "О": $m = 2$), $P(A_3|A_1A_2) = 1/5$ (события A_1 и A_2 произошли, то есть стало меньше на две буквы: "В" и "О", $n = 5$, $m = 1$). Таким образом,

$$P(A) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{105}.$$

Задача 1.15. Стрелок делает по мишени три выстрела, и с каждого выстрела попадает независимо от результата остальных с вероятностями соответственно p_1, p_2, p_3. Найти вероятность того, что он не попадет ни разу.

Решение. Обозначим: A_i="i-й выстрел попал в цель", $i = \overline{1,3}$. Тогда $A = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$, $P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) = 1 - p_i$, $i = \overline{1,3}$. Поскольку события A_i независимы, то независимы и их отрицания, следовательно,

$$P(A) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3).$$

Задача 1.16. Система управления состоит из четырех узлов и представляет собой электрическую цепь (см. рис. 1.13). Вероятности безотказной работы каждого из узлов равны соответственно $p_1 = 0.7$, $p_2 = 0.6$, $p_3 = 0.8$, $p_4 = 0.9$.

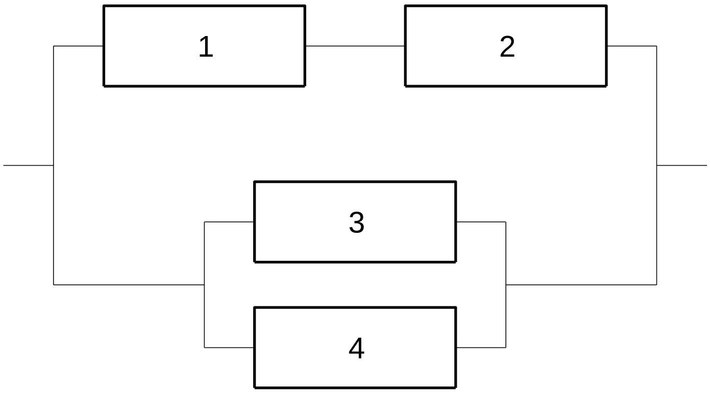


Рис. 1.13

Отказы происходят независимо. Вычислить вероятность безотказной работы системы управления.

Решение. Обозначим A – интересующее нас событие, A_i="i-й узел работает безотказно", $i = \overline{1,4}$, A_{12}="участок из узлов 1,2 работает безотказно", A_{34}="участок из узлов 3,4 работает безотказно". Заметим, что система не работает, если не работают оба участка, то есть $\overline{A} = \overline{A_{12}} \cdot \overline{A_{34}}$. Участок 12 работает, если работают оба узла 1 и 2, то есть $A_{12} = A_1 A_2$; участок 34 не работает, если не работают оба узла 3 и 4, то есть $\overline{A_{34}} = \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}$. Поскольку события A_i независимы, то

$$P(A_{12}) = P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = p_1 p_2, \quad P(\overline{A_{12}}) = 1 - P(A_{12}) = 1 - p_1 p_2,$$

$$P(\overline{A_{34}}) = P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4}) = (1 - p_3)(1 - p_4), \quad P(\overline{A}) = P(\overline{A_{12}}) \cdot P(\overline{A_{34}}),$$

и таким образом,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (1 - p_1 p_2)(1 - p_3)(1 - p_4) = 1 - 0.58 \cdot 0.2 \cdot 0.1 = 0.9884.$$

§1.9. Формула полной вероятности

Если по условиям опыта можно сделать n исключающих друг друга гипотез $H_1, \ldots, H_n$, и событие A может произойти только в том случае, когда реализуется одна из этих гипотез, то справедлива формула полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) P(H_i).$$

Доказательство. Итак, пусть $H_i H_j = \emptyset$, $i, j \in \overline{1,n}$, $i \neq j$, и при этом $A \subset \sum\limits_{i=1}^{n} H_i$. Тогда, используя свойство 9) операций над событиями, а также дистрибутивность умножения событий относительно сложения (см. свойства 4) и 2) операций над событиями), получаем

$$A = A \sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n} (A H_i).$$

Согласно свойствам 1), 3) и 8) $(AH_i)(AH_j) = A(H_iH_j) \subset H_iH_j = \emptyset$, и таким образом, $(AH_i)(AH_j) = \emptyset$. Тогда, используя формулу вероятности суммы несовместных событий, находим

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i).$$

Остается заметить, что по определению условной вероятности

$$P(AH_i) = P(A|H_i)P(H_i), \quad i = \overline{1,n}.$$

Теорема доказана.

Примечание 1.15. Требование "событие A может произойти только в том случае, когда реализуется одна из гипотез H_i, $i = \overline{1,n}$", можно заменить следующим:

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1. \tag{1.8}$$

Действительно, это означает, что сумма гипотез отличается от достоверного события Ω не более, чем на событие нулевой вероятности, и очевидно, что $A \subset \Omega$. Поэтому доказательство останется в силе. Указанное требование, хотя и является более жестким, удобно тем, что человеку неопытному в ТВ его легче проверить.

Задача 1.17. Известно, что в ящике находится 70% деталей, произведенных на первом станке; 20% деталей, произведенных на втором станке, и 10% деталей, произведенных на третьем станке, причем первый станок дает 0.3% брака, второй – 1.5%, и третий – 2.5%. Наудачу вынимается одна деталь из ящика. Какова вероятность, что она окажется бракованной?

Решение. Пусть A – интересующее нас событие. Выдвинем следующие три исключающие друг друга гипотезы: H_i="выбранная деталь произведена на i-м станке", $i = \overline{1,3}$. Предположим, всего деталей n. Поскольку на первом станке произведено 70% деталей, то рассматривая выбор каждой конкретной детали как элементарный исход, получаем, что благоприятных для H_1 элементарных исходов $m = 0.7n$. Соответственно $P(H_1) = m/n = 0.7$. Аналогичным образом, $P(H_2) = 0.2$, $P(H_3) = 0.1$. Отметим, что условие (1.8) выполняется:

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 0.7 + 0.2 + 0.1 = 1.$$

Предположим, деталь произведена на первом станке. Тогда вероятность того, что она бракованная, то есть $P(A|H_1)$ равна 0.003. Аналогично,

$$P(A|H_2) = 0.015, \quad P(A|H_3) = 0.025.$$

Тогда по формуле полной вероятности,

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + P(A|H_3) \cdot P(H_3),$$

то есть

$$P(A) = 0.003 \cdot 0.7 + 0.015 \cdot 0.2 + 0.025 \cdot 0.1 = 0.0076.$$

§1.10. Формула Байеса

Предположим опять, что по условиям опыта можно сделать n исключающих друг друга гипотез $H_1, \ldots, H_n$, и событие A может произойти только в том случае, когда реализуется одна из этих гипотез. Тогда, если до опыта вероятности гипотез были $P(H_i)$, $i=\overline{1,n}$, и в результате опыта произошло событие A, то с учетом этого события "новые", то есть условные вероятности гипотез, вычисляются по формуле Байеса:

$$P(H_j|A)=\frac{P(A|H_j)P(H_j)}{P(A)}=\frac{P(A|H_j)P(H_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A|H_i)P(H_i)},\quad j=\overline{1,n}.$$

Доказательство. По определению условной вероятности получаем:

$$P(H_j|A)=\frac{P(AH_j)}{P(A)},\quad P(AH_j)=P(A|H_j)P(H_j).$$

Остается воспользоваться формулой полной вероятности. Теорема доказана.

Задача 1.18. Пусть имеют место условия задачи 1.17. Из ящика вынута деталь, и она оказалась бракованной. На каком станке она вероятнее всего была произведена?

Решение. При решении задачи 1.17 было установлено, что $P(H_1)=0.7$, $P(H_2)=0.2$, $P(H_3)=0.1$, $P(A|H_1)=0.003$, $P(A|H_2)=0.015$, $P(A|H_3)=0.025$, $P(A)=0.0076$. По формуле Байеса, вероятность того, что деталь, оказавшаяся бракованной (состоялось событие A), была произведена на первом станке, равна

$$P(H_1|A)=\frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)}=\frac{0.003\cdot 0.7}{0.0076}=0.276316.$$

Аналогично,

$$P(H_2|A)=\frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)}=\frac{0.015\cdot 0.2}{0.0076}=0.394737,$$

$$P(H_3|A)=\frac{P(A|H_3)P(H_3)}{P(A)}=\frac{0.025\cdot 0.1}{0.0076}=0.328947,$$

или

$$P(H_3|A)=1-P(H_1|A)-P(H_2|A)=1-0.276316-0.394737=0.328947.$$

Сравнивая вероятности, заключаем, что деталь вероятнее всего была произведена на втором станке.

§1.11. Последовательные испытания. Схема Бернулли

Последовательные испытания – это последовательное проведение n раз одного и того же опыта или одновременное проведение n одинаковых опытов.

Говорят, что последовательные испытания удовлетворяют схеме Бернулли, если выполняются три условия:

1) при каждом испытании различают лишь два исхода: событие A, трактуемое как успех (A произошло), и его отрицание $\overline{A}$, трактуемое как неудача (A не произошло);

2) испытания являются *независимыми*, то есть $P(A)$ в k-м испытании не зависит от исходов ни одного из испытаний до k-го;
3) в каждом испытании вероятность успеха одна и та же: $P(A) = p = \text{const}$.

Вероятность неудачи в каждом испытании обозначают обычно буквой q, то есть $P(\overline{A}) = 1 - p = q$. Вероятность того, что из n испытаний по схеме Бернулли в k испытаниях произойдет успех, обозначают $P_n(k)$. Вероятность того, что из n испытаний по схеме Бернулли успех произойдет не менее l раз и не более m раз, обозначают $P_n(l, m)$. В условиях схемы Бернулли справедливы формулы:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{1.9}$$

(первая формула Бернулли),

$$P_n(l, m) = \sum_{k=l}^{m} P_n(k) = \sum_{k=l}^{m} C_n^k p^k q^{n-k} \tag{1.10}$$

(вторая формула Бернулли),

$$P_n(l, m) = 1 - \sum_{k=0}^{l-1} P_n(k) - \sum_{k=m+1}^{n} P_n(k) = 1 - \sum_{k=0}^{l-1} C_n^k p^k q^{n-k} - \sum_{k=m+1}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} \tag{1.11}$$

(третья формула Бернулли),

$$P_n(1, n) = 1 - P_n(0) = 1 - q^n \tag{1.12}$$

(четвертая формула Бернулли).

Доказательство. 1. Обозначим A_k – событие, состоящее в том, что в n испытаниях по схеме Бернулли успех произойдет ровно k раз. Заметим, что событие A_k представляется в виде суммы несовместных событий вида

$$\omega = R_1 R_2 \ldots R_n,$$

где R_i – результат i-го испытания, причем R_i может принимать только два значения $R_i = A$ ("успех") и $R_i = \overline{A}$ ("неудача"), и в каждом произведении ω "успех" A встречается ровно k раз, а "неудача" $\overline{A}$ – соответственно, ровно $n - k$ раз. Поскольку события R_i, $i = \overline{1, n}$, по условиям схемы Бернулли являются независимыми (в совокупности), то согласно формуле вероятности произведения независимых событий получаем:

$$P(\omega) = P(A)^k P(\overline{A})^{n-k} = p^k q^{n-k}.$$

Пусть m – общее количество всевозможных произведений вида ω; перенумеруем все такие произведения: ω_j, $j = \overline{1, m}$. Каждое произведение ω_j, $j = \overline{1, m}$, можно отождествить с упорядорядоченным набором из нулей и единиц, в который 1 ("успех") входит ровно k раз, а 0 ("неудача") входит ровно $n - k$ раз. Тогда число m совпадает с количеством всевозможных способов выбора k позиций из данного набора n позиций для размещения цифры 1, то есть с числом сочетаний C_n^k. Таким образом, получаем:

$$P(A_k) = P(\sum_{j=1}^{m} \omega_j) = \sum_{j=1}^{m} P(\omega_j) = \sum_{j=1}^{m} p^k q^{n-k} = m p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k},$$

то есть справедлива формула (1.9).

2. Обозначим $A_{l,m}$ – событие, состоящее в том, что в n испытаниях по схеме Бернулли успех произойдет не менее l раз и не более m раз. Тогда

$$A_{l,m} = \sum_{k=l}^{m} A_k.$$

Поскольку события A_k, $k = \overline{l,m}$, являются несовместными, то по формуле вероятности суммы несовместных событий получаем:

$$P(A_{l,m}) = \sum_{k=l}^{m} P(A_k) = \sum_{k=l}^{m} C_n^k p^k q^{n-k},$$

то есть справедлива формула (1.10).

3. Для доказательства формулы (1.11) достаточно заметить, что

$$P(A_{l,m}) = 1 - P(\overline{A_{l,m}}), \quad \overline{A_{l,m}} = A_{0,l-1} + A_{m+1,n},$$

и воспользоваться формулой (1.10).

4. Для доказательства формулы (1.12) достаточно заметить, что

$$P(A_{1,n}) = 1 - P(A_0), \quad A_0 = \prod_{j=1}^{n} R_j, \quad R_j = \overline{A}, \quad j = \overline{1,n},$$

а стало быть, в силу независимости событий R_j, $j = \overline{1,n}$,

$$P(A_0) = \prod_{j=1}^{n} P(R_j) = \prod_{j=1}^{n} P(\overline{A}) = \prod_{j=1}^{n} q = q^n.$$

Задача 1.19. Симметричную монету подбрасывают 10 раз. Определить вероятность выпадения герба не более пяти раз.

Решение. Имеем последовательное проведение 10 раз одного опыта (подбрасывание монеты), вероятность выпадения герба ("успеха") в каждом опыте не зависит от исхода других опытов и равна $p = 0.5$. Соответственно $q = 1 - p = 0.5$. Таким образом, имеем схему Бернулли. Искомая вероятность

$$P_{10}(0,5) = \sum_{k=0}^{5} C_{10}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \frac{1}{1024}\left(C_{10}^0 + \ldots + C_{10}^5\right) = \frac{638}{1024}.$$

Задача 1.20. Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0.3 независимо от заявок других магазинов. Найти вероятность того, что в день поступит хотя бы одна заявка.

Решение. Поступление или непоступление заявки можно рассматривать как одно испытание по схеме Бернулли. Вероятность успеха $p = 0.3$, вероятность неудачи $q = 1 - p = 0.7$. Искомая вероятность

$$P_{10}(1,10) = 1 - q^{10} = 1 - 0.7^{10} = 0.9718.$$

Задача 1.21. Известно, что на 200 лотерейных билетов приходится 1 выигрышный. Сколько билетов нужно купить, чтобы вероятность хотя бы одного выигрыша была не менее 95%?

Решение. Пусть весь тираж лотереи равен N, а число билетов, которые необходимо купить, равно n. Естественно предположить, что N много больше n. Тогда можем считать, что каждый билет выигрывает независимо от остальных с вероятностью $p = 1/200 = 0.005$, то есть находимся в условиях схемы Бернулли, $q = 1 - p = 0.995$. Тогда вероятность выиграть хотя бы на 1 билет равна $P_n(1, n) = 1 - q^n$ и должна быть больше либо равна 0.95, или

$$q^n \leq 1 - 0.95 = 0.05, \text{ или } n \geq \frac{\ln 0.05}{\ln 0.995} = 597.6473...,$$

то есть необходимо купить как минимум 598 билетов.

§1.12. Приближенные формулы для схемы Бернулли

При больших значениях числа n испытаний по схеме Бернулли применение формул (1.9-1.12) §1.11 затруднительно в вычислительном плане. В этом случае используют одну из приведенных далее приближенных формул[5] (в каждой из них предполагается, что n велико):

1. Если число $\lambda = np$ достаточно мало (а следовательно, мала и вероятность успеха p), то справедлива *формула Пуассона*:

$$P_n(k) \approx P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Аналогично, если число $\lambda' = nq$ достаточно мало, то для вероятности того, что число неудач по схеме Бернулли равно k, справедлива формула

$$P'_n(k) \approx P(k; \lambda') = \frac{(\lambda')^k}{k!} e^{-\lambda'}, \quad k = \overline{0, n};$$

соответственно

$$P_n(k) \approx P(n - k; \lambda') = \frac{(\lambda')^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda'}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Примечание 1.16. Совокупность вероятностей $P(k; \lambda)$, $k = 0, 1, \ldots$, называется распределением Пуассона. Для него существуют специальные таблицы (см. табл. 1 в приложении), которыми и пользуются на практике.

2. Если вероятности успеха p и q неудачи велики, то справедлива *локальная формула Муавра-Лапласа* (стандартное нормальное приближение):

$$\sqrt{npq} \cdot P_n(k) \approx \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \text{где} \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Примечание 1.17. Функцию $\varphi(x)$ называют *функцией Гаусса*, или *функцией плотности стандартного нормального распределения*. Для нее существуют специальные таблицы (см. табл. 3 в приложении), которыми и пользуются на практике.

[5] Их доказательство можно найти, например, в [1, §9].

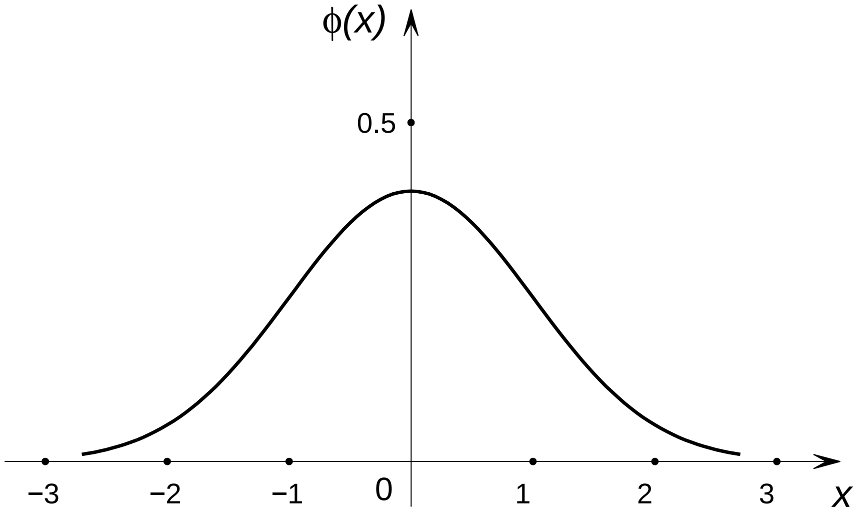
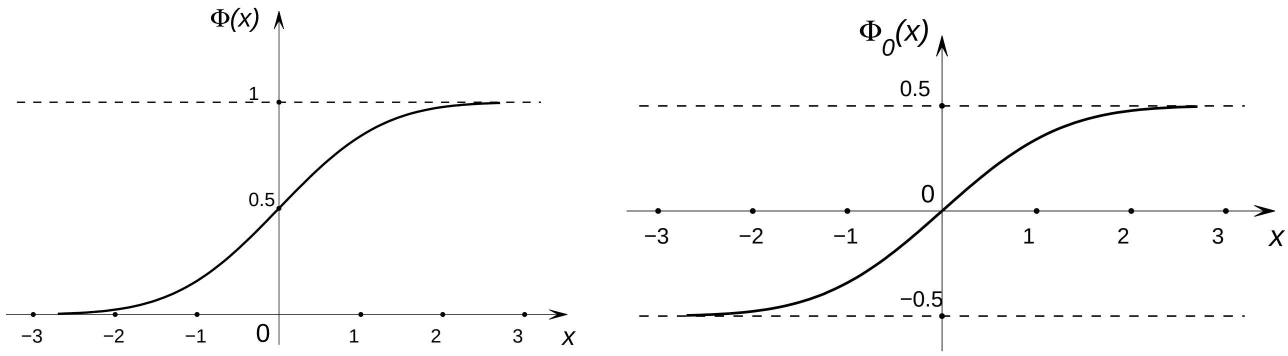


Рис. 1.14 . Функция Гаусса $\varphi(x)$. Масштаб по осям различен



Функция $\Phi(x)$ Интеграл Лапласа $\Phi_0(x)$

Рис. 1.15 . Масштаб по осям различен

Свойства функции Гаусса

1) Функция $\varphi(x)$ определена на всей числовой оси.
2) Функция $\varphi(x)$ четная: $\varphi(x) = \varphi(-x)\ \forall x \in \mathbf{R}$.
3) Функция $\varphi(x)$ достигает глобального максимума при $x = 0$, $\varphi(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
4) Функция $\varphi(x)$ строго убывает на полуинтервале $[0; +\infty)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.
5) Функция $\varphi(x)$ положительна на всей числовой оси.
6) Функция $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные любого порядка.
7) Первообразная функции $\varphi(x)$ не выражается в элементарных функциях. При этом

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1, \quad \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(x)dx = \frac{1}{2}.$$

График функции Гаусса см. на рис. 1.14.

3. Если вероятности успеха p и q неудачи велики, то справедлива *интегральная формула Муавра-Лапласа*:

$$P_n(l,m) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1), \quad \text{где}$$

$$x_1 = \frac{l - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt, \quad \Phi_0(x) = \int\limits_{0}^{x} \varphi(t)dt,$$

то есть

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt, \quad \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-t^2/2}dt.$$

Примечание 1.18. Функцию $\Phi(x)$ называют *функцией стандартного нормального распределения*, а функцию $\Phi_0(x)$ – *интегралом Лапласа*. Для них существуют специальные таблицы (см. табл. 2 в приложении), которыми и пользуются на практике.

Свойства функции $\Phi(x)$

1) Функция $\Phi(x)$ определена на всей числовой оси.
2) $\Phi(x) \in (0;1)$ $\forall x \in \mathbf{R}$.
3) Функция $\Phi(x)$ гладкая, имеет производные любого порядка на всей числовой оси.
4) Функция $\Phi(x)$ строго возрастает на всей числовой оси.
5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$; $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.
6) График функции имеет горизонтальные асимптоты $y = 0$ и $y = 1$ и симметричен относительно точки $M_0(0; 0.5)$.

Свойства интеграла Лапласа $\Phi_0(x)$

1) Функция $\Phi_0(x)$ определена на всей числовой оси. При этом

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

2) Функция $\Phi_0(x)$ является нечетной: $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$.
3) $\Phi_0(x) \in (-1/2; 1/2)$ $\forall x \in \mathbf{R}$. При этом $\Phi_0(x) \approx \dfrac{1}{2}$ уже при $x \geq 3$.
4) Функция $\Phi_0(x)$ гладкая, имеет производные любого порядка на всей числовой оси.

5) Функция $\Phi_0(x)$ строго возрастает на всей числовой оси.

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi_0(x)=-\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi_0(x)=\dfrac{1}{2}$; $\Phi_0(0)=0$.

7) График функции имеет горизонтальные асимптоты $y=-0.5$ и $y=0.5$ и симметричен относительно начала координат.

Графики функций $\Phi(x)$ и $\Phi_0(x)$ см. на рис. 1.15.

Рекомендации по применению приближенных формул

1. Если $n=\overline{10,20}$, то приближенные формулы используются для грубых, прикидочных расчетов. Формулу Пуассона применяют, когда $\lambda\in[0,2]$ или $\lambda'\in[0,2]$ при $n=10$ и соответственно, $\lambda\in[0,3]$ или $\lambda'\in[0,3]$ при $n=20$. Иначе используют формулы Муавра-Лапласа.

2. При $n=\overline{20,100}$ приближенные формулы можно применять для прикладных инженерных расчетов, в частности, при $n=100$ формулу Пуассона используют, когда $\lambda\in[0,7]$ или $\lambda'\in[0,7]$ (иначе пользуются формулами Муавра-Лапласа).

3°. Если $n=\overline{100,1000}$, то практически при любых инженерных расчетах можно применять приближенные формулы, в частности, при $n=1000$ формулу Пуассона используют, когда $\lambda\in[0,15]$ или $\lambda'\in[0,15]$.

4°. При $n>1000$ даже специальные таблицы рассчитываются с помощью приближенных формул (но применяются специальные поправки для увеличения точности); формулу Пуассона используют, когда $\lambda\in[0,\alpha(n)]$ или $\lambda'\in[0,\alpha(n)]$, где $\alpha(1000)=15$ и $\alpha(n)\nearrow$.

Задача 1.22. Вероятность выпуска бракованного сверла $p=0.005$. Сверла упаковываются в коробки по 100 штук. Какова вероятность того, что в коробке, выбранной наудачу, окажется не более одного бракованного сверла?

Решение. Имеем схему Бернулли при $n=100$, $p=0.005$, $l=0$, $m=1$, $\lambda=np=100\cdot0.005=0.5$. Поскольку $n=100$, $\lambda\in[0,7]$, то в соответствии с рекомендациями по применению приближенных формул воспользуемся формулой Пуассона. Искомая вероятность

$$P_{100}(0,1)=P_{100}(0)+P_{100}(1)\approx P(0;0.5)+P(1;0.5).$$

По табл. 1 из приложения находим: $P(0;0.5)=0.60653$, $P(1;0.5)=0.30327$. Таким образом, $P_{100}(0,1)\approx0.9098$.

Задача 1.23. Электронный прибор состоит из 2500 элементов. Вероятность отказа одного элемента за год $p=0.0008$. Найти вероятность того, что в течение года откажут не менее трех элементов.

Решение. Имеем схему Бернулли при $n=2500$, $p=0.0008$, $l=3$, $m=2500$, $\lambda=np=2500\cdot0.0008=2$. Поскольку

$$n=2500,\quad \lambda\in[0,15]\subset[0,\alpha(2500)],$$

то в соответствии с рекомендациями по применению приближенных формул воспользуемся формулой Пуассона. Искомая вероятность

$$P_{2500}(3,2500)=1-P_{2500}(0)-P_{2500}(1)-P_{2500}(2),$$

откуда

$$P_{2500}(3,2500)\approx1-P(0;2)-P(1;2)-P(2;2).$$

По табл. 1 находим:

$$P(0;2) = 0.13534, \quad P(1;2) = 0.27067, \quad P(2;2) = 0.27067.$$

Таким образом, $P_{2500}(3, 2500) \approx 0.3233$.

Задача 1.24. Два человека заключают пари о том, что при 150 подбрасываниях симметричной монеты герб выпадет ровно 75 раз. Какое соотношение ставок следует считать справедливым?

Решение. Пусть первый игрок ставит на то, что указанное событие A произойдет, а другой – на то, что не произойдет. Тогда если z – сумма ставок, x – ставка первого игрока, а y – ставка второго игрока, то соотношение ставок следует считать справедливым, если $x = P(A) \cdot z$, $y = (1 - P(A)) \cdot z$. Найдем $P(A)$.

Имеем схему Бернулли при $n = 150$, $p = q = 0.5$, $\lambda = np = 150 \cdot 0.5 = 75$, $k = 75$. Искомая вероятность $P(A) = P_{150}(75)$. В соответствии с рекомендациями по применению приближенных формул воспользуемся локальной формулой Муавра-Лапласа:

$$P_{150}(75) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{37.5}} = \frac{\varphi(x)}{6.1237},$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 75}{\sqrt{37.5}} = 0.$$

По табл. 3 (см. приложение) находим, что $\varphi(x) \approx 0.39894$. Таким образом, $P_{150}(75) \approx 0.0651$.

Задача 1.25. При социологическом опросе каждый человек может дать неискренний ответ независимо от других с вероятностью 0.2. Какова вероятность того, что из 500 опрошенных не более 75 дадут неискренний ответ?

Решение. Имеем схему Бернулли при $n = 500$, $p = 0.2$, $q = 1 - p = 0.8$, $l = 0$, $m = 75$, $\lambda = np = 500 \cdot 0.2 = 100$. В соответствии с рекомендациями по применению приближенных формул воспользуемся интегральной формулой Муавра-Лапласа:

$$P_{500}(0, 75) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1),$$

$$x_1 = \frac{l - np}{\sqrt{npq}} = \frac{-100}{\sqrt{80}} = -11.18, \quad x_2 = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100}{\sqrt{80}} = -2.8.$$

По таблице 2 (см. приложение) находим

$$\Phi_0(x_1) = -\Phi_0(11.18) = -0.5, \quad \Phi_0(x_2) = -\Phi_0(2.8) = -0.49745.$$

Таким образом, $P_{500}(0, 75) \approx 0.0025$.

§1.13. Случайные величины и их распределения

До сих пор мы рассматривали методы определения степени возможности (вероятности) того или иного конкретного события в результате проведения опыта, исход которого неоднозначен (случаен), но относительно которого известны все возможные (элементарные) исходы. Однако основной задачей теории вероятностей всегда было изучение тех или иных величин, зависящих тем или иным образом от результата случайного эксперимента, а не сам по себе исход этого эксперимента.

Пример 1.10. Предположим, например, что нам требуется измерить высоту некоторой гладкой трубы (или дерева, или монумента и т.п.), на которую трудно или невозможно взобраться. Для этого мы можем поступить следующим образом. Пусть точка O – это центр основания трубы. На земле, на некотором фиксированном расстоянии L от нее выберем точку A. Верхнюю точку трубы обозначим B. Таким образом, мы получим прямоугольный треугольник ΔAOB, катет OA которого нам известен, а угол $\angle OAB$ мы можем измерить с помощью угломера. Тогда высоту $H = OB$ мы можем найти по формуле:

$$H = OA \cdot \mathrm{tg}\widehat{OAB}.$$

Однако показания угломера всегда будут содержать некоторую случайную ошибку (погрешность), то есть измерение угла с помощью угломера – это случайный эксперимент. Стало быть, результат измерения высоты H – это случайная величина.

Случайной величиной называется числовая величина X, значение которой зависит от того, какой именно элементарный исход реализовался в результате проведения случайного опыта. Иными словами случайная величина (с.в.) X – это функция $X = X(\omega)$, определенная на множестве Ω всех элементарных исходов.

Пример 1.11. В опыте с однократным выбрасыванием игральной кости число X выпавших очков является с.в.. Здесь множество элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$, ω_i="выпадение i очков", $X(\omega_i) = i$, $i = \overline{1,6}$.

Любое правило, позволяющее вычислить вероятность того, что с.в. X примет значение из некоторого подмножества множества ее значений E_X, называется *законом распределения* вероятностей (или просто *распределением*) с.в. X.

Закон распределения с.в. может быть задан, в частности, с помощью *функции распределения* $F(x) = P(X < x)$, $x \in \mathbf{R}$.

Свойства функции распределения:

1) $F(x) \in [0,1]$, $\forall x \in \mathbf{R}$;
2) $F(x_1) \le F(x_2)$, $\forall x_1 \le x_2$;
3) $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$; $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$;
4) $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$;
5) $F(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0)$, $\forall x_0 \in \mathbf{R}$ (*непрерывность слева*).

Можно показать, что любая неубывающая и непрерывная слева функция, обладающая свойством 3), является функцией распределения некоторой с.в. X.

Примечание 1.19. Эти свойства достаточно очевидны и следуют из свойств вероятности. Доказательство можно найти, например, в [1, §10].

§1.14. Дискретные случайные величины

Случайная величина X называется *дискретной*, если дискретно (то есть конечно или счетно) множество ее значений E_X.

Пусть $E_X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $P(X = x_i) = p_i$, $i = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Тогда закон распределения с.в. X можно задать с помощью таблицы, которая называется *рядом распределения* с.в.:

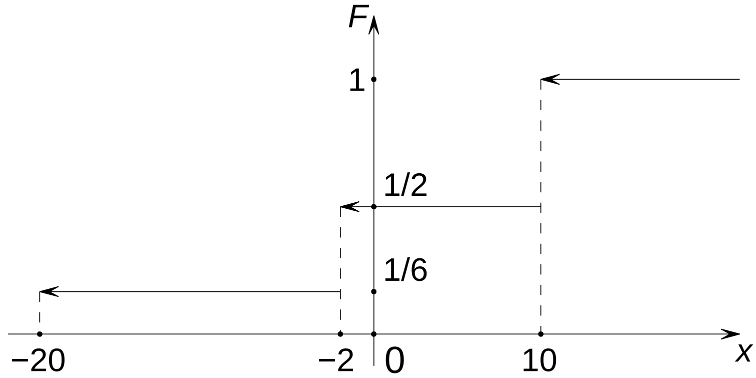


Рис. 1.16

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Соответственно функция распределения:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ p_1, & x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3, \\ \dots & \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{m-1} p_i, & x_{m-1} < x \le x_m, \quad m = \overline{2, n} \\ 1, & x > x_n. \end{cases}$$

Задача 1.26. Игральную кость бросают один раз. Если выпало четное число очков, игрок выигрывает \$10, если нечетное, но меньше пяти, проигрывает \$2, если выпало пять очков, проигрывает \$20. Найти распределение величины выигрыша X.

Решение. Здесь $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$, $P(\omega_i) = 1/6$, $i = \overline{1, 6}$, $E_X = \{-20, -2, 10\}$. Заметим, что $\{X = 10\} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $\{X = -2\} = \{\omega_1, \omega_3\}$, $\{X = -20\} = \{\omega_5\}$. Тогда $P(X = -20) = 1/6$, $P(X = -2) = 2/6 = 1/3$, $P(X = 10) = 3/6 = 1/2$. Соответственно ряд распределения:

X	-20	-2	10
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Проверим, что сумма всех вероятностей равна единице:

$$p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1.$$

Функция распределения (рис. 1.16):

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le -20, \\ p_1 = \frac{1}{6}, & -20 < x \le -2, \\ p_1 + p_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}, & -2 < x \le 10, \\ p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1, & x > 10. \end{cases}$$

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся распределения дискретных с.в.

1. *Биномиальное распределение.* Говорят, что дискретная с.в. X распределена по биномиальному закону, если она принимает значения из набора $\overline{0, n}$ с вероятностями

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = \overline{0, n}, \quad p, q \in (0, 1) \quad q = 1 - p.$$

Фактически это число успехов в n испытаниях по схеме Бернулли.

Покажем, что сумма всех вероятностей $P_n(k)$, $k = \overline{0, n}$, равна единице. Действительно, пользуясь формулой *бинома Ньютона*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}, \tag{1.13}$$

получаем:

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p + q)^n = (p + 1 - p)^n = 1.$$

2. *Распределение Пуассона.* Говорят, что дискретная с.в. X распределена по закону Пуассона, если она принимает значения $k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$ с вероятностями

$$P(X = k) = P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \ldots, \quad \lambda > 0.$$

В некотором смысле это тоже распределение числа успехов в испытаниях по схеме Бернулли, но при неограниченно большом количестве испытаний и малой вероятности успеха при одном испытании (закон редких событий).

Покажем, что сумма всех вероятностей $P(k; \lambda)$, $k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$, равна единице. Действительно, пользуясь разложением функции e^λ в ряд Маклорена, получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k; \lambda) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

3. *Геометрическое распределение.* Говорят, что дискретная с.в. X подчиняется геометрическому закону распределения, если она принимает значения $k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$ с вероятностями

$$P(X = k) = pq^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \ldots, \quad p, q \in (0, 1) \quad q = 1 - p.$$

Это распределение количества (неудачных) испытаний по схеме Бернулли, проведенных до первого успеха.

Покажем, что сумма всех вероятностей $P(X = k) = pq^k$, $k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$, равна единице. Действительно, используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q, получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = p \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{p}{1 - q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Задача 1.27. Найти распределение числа гербов X, выпавших при четырех бросаниях симметричной монеты.

Решение. Имеем схему Бернулли при $n = 4$, $p = q = 0.5$; X – число успехов (выпадение герба). Соответственно $E_X = \{0, \ldots, 4\}$,

$$P(X = k) = C_4^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} = \frac{1}{16} C_4^k, \quad k = \overline{0, 4},$$

то есть имеет место биномиальное распределение. Ряд распределения:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Задача 1.28. Известно, что количество звонков, поступивших в течение часа на телефонную станцию, подчиняется распределению Пуассона с параметром $\lambda = 3$. Какова вероятность, что в течение часа позвонит 1 или 2 абонента?

Решение. Пусть X – число звонков, поступивших в течение часа на телефонную станцию. По условию,

$$P(X = k) = P(k; 3) = \frac{3^k}{k!} e^{-3}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \ldots.$$

Пусть A – интересующее нас событие. Тогда

$$P(A) = P(1 \leq X < 3) = F(3) - F(1) = P(1; 3) + P(2; 3).$$

По табл. 1 (см. приложение) находим: $P(1; 3) = 0.14936$, $P(2; 3) = 0.22404$, и таким образом, $P(A) = 0.3734$.

Задача 1.29. Пусть проводятся испытания по схеме Бернулли, $p \in (0, 1)$ - вероятность успеха в одном испытании, $q = 1 - p$, X – число испытаний, которые пришлось провести до первого успеха. Тогда $X \in \overline{0, +\infty}$. При этом $X = 0$, если первое же испытание оказалось успешным, откуда $P(X = 0) = p$. Пусть A="испытание завершилось успешно". Тогда элементарные исходы имеют вид $\omega_k = \underbrace{\overline{A} \cdot \overline{A} \cdot \ldots \cdot \overline{A}}_{k \text{ раз}} \cdot A$. Соответственно $X(\omega_k) = k$. Поскольку испытания независимы, то

$$P(X = k) = P(\omega_k) = P(\overline{A})^k P(A) = q^k p,$$

то есть X подчиняется геометрическому распределению.

Задача 1.30. Монету бросают до первого появления герба, X – количество раз, которое выпала решка до первого появления герба. Найти распределение X.

Решение. Находимся в условиях задачи 1.29 при $p = q = 0.5$ (вероятность выпадения герба или решки). Тогда

$$P(X = k) = q^k p = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Ряд распределения:

X	0	1	2	3	$\dots$
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\dots$

§1.15. Непрерывные случайные величины

Если существует неотрицательная интегрируемая на $(-\infty, +\infty)$ функция $f(t)$ такая, что функция распределения $F(x)$ с.в. X представляется в виде

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

то функция $f(t)$ называется *плотностью распределения* с.в. X, и поскольку функция распределения $F(x)$ в этом случае непрерывна, то и с.в. X называется *непрерывной*.

Следующие свойства достаточно очевидны и вытекают непосредственно из определения плотности распределения и свойств функции распределения.

Свойства плотности распределения:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$;

2) если $F(x)$ дифференцируема, то $F'(x) = f(x)$;

3) $P(x_1 \le X < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)dt$;

Примечание 1.20. Поскольку функция распределения $F(x)$ непрерывной с.в. X непрерывна, то по свойству 4) функции распределения получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} P(x \le X < x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \Big\{ F(x + \Delta x) - F(x) \Big\} = 0.$$

Отсюда понятно, что

$$0 \le P(X = x) \le P(x \le X < x + \Delta x) \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0,$$

а стало быть, $P(X = x) = 0$. Таким образом, *непрерывная с.в. X принимает любое фиксированное значение $x \in \mathbf{R}$ с нулевой вероятностью*! Поэтому

$$P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 < X < x_2). \tag{1.14}$$

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся распределения непрерывных с.в.:

1. *Равномерное распределение* – распределение, определяемое плотностью (см. рис. 1.17):

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & t \in [a, b], \\ 0, & t \notin [a, b]. \end{cases}$$

Соответственно, функция распределения (см. рис. 1.18):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b), \\ 1, & x \ge b. \end{cases}$$

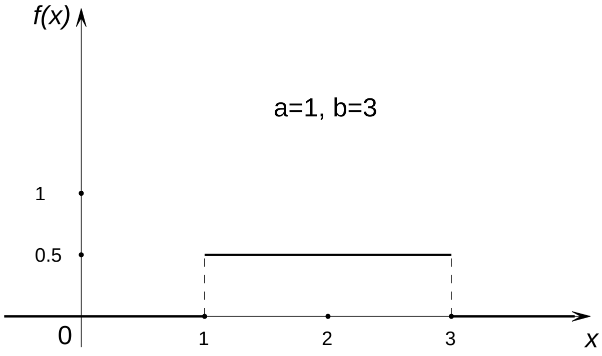


Рис. 1.17 . Плотность равномерного распределения на $[a;b]$

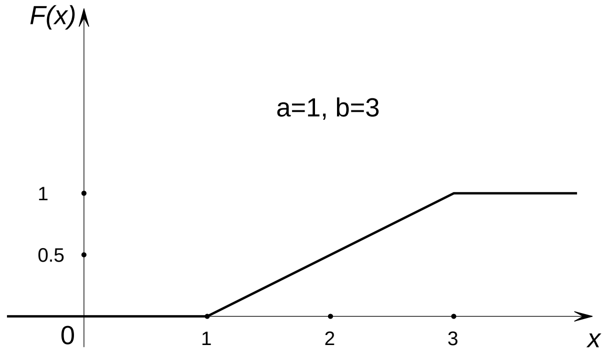


Рис. 1.18 . Функция равномерного распределения на $[a;b]$

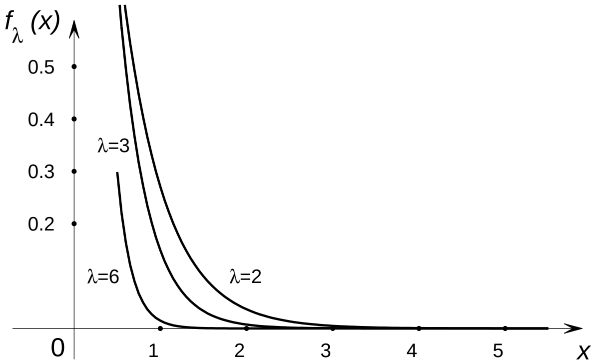


Рис. 1.19 . Плотность показательного распределения

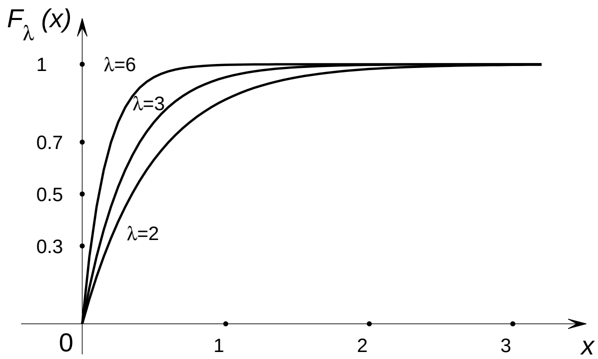


Рис. 1.20 . Функция показательного распределения

Пользуясь свойством 4) функции распределения, а также (с учетом непрерывности) соотношением (1.14), вычислим вероятность $P(\alpha < X < \beta)$ для с.в. X, имеющей равномерное распределение. Здесь возможны следующие случаи.
а) $\beta \le a$. Тогда

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = 0 - 0 = 0.$$

б) $\alpha \le a < \beta \le b$. Тогда

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{\beta - a}{b - a}.$$

в) $a < \alpha < \beta \le b$. Тогда

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{\beta - a}{b - a} - \frac{\alpha - a}{b - a} = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

г) $\alpha \le a < b \le \beta$. Тогда

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = 1 - 0 = 1.$$

д) $a < \alpha \le b < \beta$. Тогда

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = 1 - \frac{\alpha - a}{b - a} = \frac{b - \alpha}{b - a}.$$

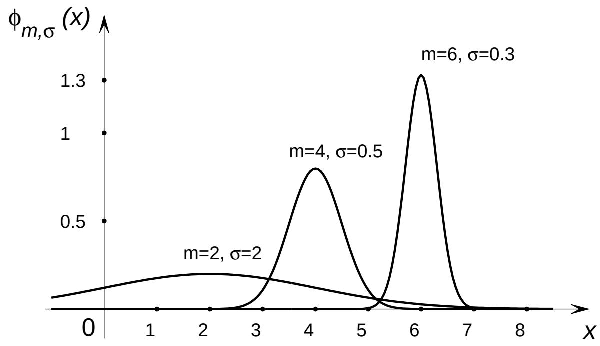


Рис. 1.21 . Плотность нормального распределения

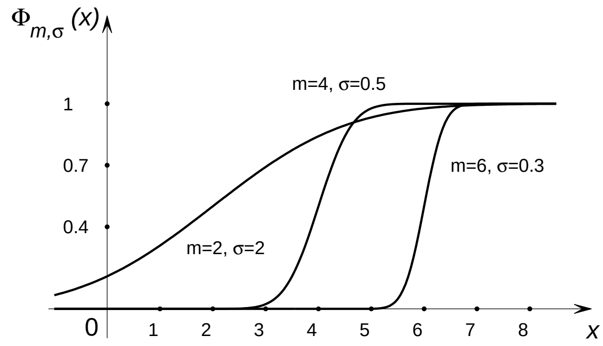


Рис. 1.22 . Функция нормального распределения

е) $b \leq \alpha < \beta$. Тогда

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = 1 - 1 = 0.$$

Примечание 1.21. Равномерное распределение довольно часто возникает и используется на практике. Например, при проведении численных расчетов считают, как правило, что ошибка округления, рассматриваемая как случайная величина, подчинена равномерному закону распределения, например, ошибку округления дробного числа до целого считают равномерно распределенной на отрезке $[-0.5; 0.5]$. Другим примером использования равномерного закона распределения является способ составления статистических таблиц, рассматриваемых в качестве таблицы реализации случайной величины, имеющей то или иное требуемое распределение, равномерное или отличное от такового (см., например, таблицу 8 из [8]). Исходным материалом для составления таких таблиц служит с.в. X, распределенная равномерно на $[0; 1]$ и называемая "случайным числом от 0 до 1". См. также задачу 1.31.

2. *Показательное распределение* – распределение, определяемое плотностью (см. рис. 1.19):

$$f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Функция распределения (см. рис. 1.20):

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Пользуясь свойством 4) функции распределения, а также (с учетом непрерывности) соотношением (1.14), вычислим вероятность $P(\alpha < X < \beta)$ для с.в. X, имеющей показательное распределение. Здесь возможны следующие случаи.

а) $\beta \leq 0$. Тогда

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = 0 - 0 = 0.$$

б) $\alpha \leq 0 \leq \beta$. Тогда

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = 1 - \exp\{-\lambda\beta\}.$$

в) $0 \leq \alpha$. Тогда

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \exp\{-\lambda\alpha\} - \exp\{-\lambda\beta\}.$$

Примечание 1.22. Показательное распределение имеет большое значение для теории массового обслуживания и теории надежности, которые, к сожалению, выходят за рамки данного курса[6]. Хрестоматийным примером с.в., имеющей показательное распределение, является время распада радиоактивных элементов – см., например, [6].

3. *Нормальное распределение* с параметрами $\{m, \sigma\}$ – распределение, определяемое плотностью (см. рис. 1.21):

$$f(t) = \varphi_{m,\sigma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

При $m = 0$, $\sigma = 1$ – это так называемое *стандартное нормальное распределение*, плотностью которого является уже встречавшаяся ранее *функция Гаусса*

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Можно показать, что при произвольных значениях параметров m, σ для функции нормального распределения (см. рис. 1.22) справедлива формула

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x-m}{\sigma}\right),$$

где

$$\Phi_0(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt$$

– *интеграл Лапласа* (см. табл. 2 в приложении).

Пользуясь свойством 4) функции распределения, а также (с учетом непрерывности) соотношением (1.14), вычислим вероятность $P(\alpha < X < \beta)$ для с.в. X, имеющей нормальное распределение:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi_{m,\sigma}(\beta) - \Phi_{m,\sigma}(\alpha) = \Phi_0\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right).$$

Примечание 1.23. Нормальное распределение весьма часто возникает на практике. А именно, если некоторая с.в. является результатом суммарного воздействия большого числа малых случайных возмущений, то как правило ее распределение оказывается практически неотличимым от нормального. Обоснование этого феномена можно найти, например, в [1, §17]. Примерами таких с.в. являются радиопомехи, диффузии в жидкостях и газах, рост числа бактерий и т.д.

Задача 1.31. Однородная проволока длиной 1 метр растягивается за концы и рвется. Найти распределение расстояния X от точки разрыва до левого конца проволоки.

Решение. Отождествим множество элементарных исходов Ω с отрезком $[0, 1]$. Тогда событие $A = \{x_1 \le X < x_2\}$ отождествляется с полуинтервалом $[x_1, x_2) \subset [0, 1]$. В соответствии с геометрическим определением вероятности имеем:

$$P\{x_1 \le X < x_2\} = P(A) = \frac{x_2 - x_1}{1 - 0} = x_2 - x_1 = F(x_2) - F(x_1),$$

[6]См., например, [2, 8], а также [*Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. - 448 с.*].

откуда заключаем, что

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & x \in [0,1], \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

Эта функция имеет плотность распределения

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1], \\ 0, & t \notin [0,1]. \end{cases}$$

Таким образом, с.в. X подчиняется равномерному распределению при $a = 0$, $b = 1$.

Задача 1.32. Время ожидания некоторого события A распределено по показательному закону с параметром $\lambda > 0$. К моменту времени t_0 событие A не произошло. Найти вероятность того, что от момента времени t_0 ждать осуществления события A придется не меньшее время, чем Δt.

Решение. Пусть X – время ожидания A с самого начального момента времени. По условию, X подчиняется показательному закону, и таким образом,

$$P(X \ge t) = 1 - P(X < t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t} \quad \forall t \ge 0.$$

Нам требуется вычислить условную вероятность

$$P(X \ge t_0 + \Delta t | X \ge t_0) = \frac{P(X \ge t_0 + \Delta t)}{P(X \ge t_0)} = \frac{e^{-\lambda(t_0 + \Delta t)}}{e^{-\lambda t_0}} = e^{-\lambda \Delta t}.$$

Примечание 1.24. Таким образом, в условиях задачи информация о том, что событие не наступило к данному моменту времени t_0, не повышает шансы его наступления в дальнейшем. Таким свойством (называемым отсутствием последействия) обладает только показательное распределение.

Задача 1.33. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $m = 20$, $\sigma = 30$. Найти вероятность попадания с.в. X в отрезок $[10, 70]$.

Решение. Поскольку распределение непрерывно, то

$$P(10 \le X \le 70) = P(10 \le X < 70) = \Phi_{m=20,\sigma=30}(70) - \Phi_{m=20,\sigma=30}(10),$$

откуда

$$P(10 \le X \le 70) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1),$$

где

$$x_1 = \frac{10 - 20}{30} = -\frac{1}{3} \approx -0.33, \quad x_2 = \frac{70 - 20}{30} = \frac{5}{3} \approx 1.66.$$

По табл. 2 из приложения находим:

$$\Phi_0(x_1) = -\Phi_0(0.33) = -0.12930, \quad \Phi_0(x_2) = \Phi_0(1.66) = 0.45154,$$

и таким образом, $P(10 \le X \le 70) \approx 0.58084$.

Задача 1.34. Определить, при каком значении параметров α и β функция

$$F(x) = \alpha \cdot \mathrm{arctg} x + \beta$$

является функцией распределения непрерывной с.в. X. Найти плотность распределения $f(x)$ и вычислить вероятность $P(1 \le X < \sqrt{3})$.

Решение. 1. По свойствам функции распределения

$$0 = \lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} (\alpha \cdot \mathrm{arctg} x + \beta) = \alpha \cdot (-\frac{\pi}{2}) + \beta,$$

$$1 = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} (\alpha \cdot \mathrm{arctg} x + \beta) = \alpha \cdot \frac{\pi}{2} + \beta.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha \cdot (-\frac{\pi}{2}) + \beta = 0, \\ \alpha \cdot \frac{\pi}{2} + \beta = 1, \end{cases}$$

получаем: $\beta = 1/2$, $\alpha = 1/\pi$.

2. По свойствам плотности распределения

$$f(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg} x + \frac{1}{2}\right)' = \frac{1}{\pi(x^2+1)}.$$

3. По свойствам функции распределения

$$P(1 \le X < \sqrt{3}) = F(\sqrt{3}) - F(1) = \frac{1}{\pi}\left(\mathrm{arctg}\sqrt{3} - \mathrm{arctg} 1\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{12}.$$

Задача 1.35. Дана плотность распределения некоторой с.в. X

$$f(x) = \begin{cases} C/(x^2-1), & x > 2; \\ 0, & x \le 2. \end{cases}$$

Найти параметр C, функцию распределения $F(x)$ и $P(0 < X < 5)$.

Решение. 1. По свойствам плотности распределения

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{Cdx}{x^2-1} = \frac{C}{2}\int\limits_{2}^{+\infty}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{C}{2}\left(\ln|x-1| - \ln|x+1|\right)\Big|_{2}^{+\infty} = \frac{C}{2}\lim_{b\to+\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_{2}^{b} =$$

$$= \frac{C}{2}\left(\ln 1 - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{C\ln 3}{2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2}{\ln 3}.$$

2. По определению плотности распределения

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

откуда при $x \le 2$ имеем $F(x) = 0$, и при $x > 2$

$$F(x) = \frac{2}{\ln 3}\int\limits_2^x \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{\ln 3}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\,\Bigg|_2^x = \frac{1}{\ln 3}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \ln\frac{1}{3}\right),$$

и таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln 3}\ln\frac{3(x-1)}{x+1}, & x > 2; \\ 0, & x \le 2. \end{cases}$$

3. По свойству 4) функции распределения и соотношению (1.14) (с учетом непрерывности с.в. X)

$$P(0 < X < 5) = P(0 \le X < 5) = F(5) - F(0) = F(5) = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Задача 1.36. Дана плотность распределения некоторой с.в. X

$$f(x) = \begin{cases} C/\sqrt[3]{x}, & x \in (0, 8]; \\ 0, & x \notin (0, 8]. \end{cases}$$

Найти параметр C, функцию распределения $F(x)$, вычислить $P(-1 < X < 1)$ и построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

Решение. 1. По свойствам плотности распределения

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_0^8 \frac{Cdx}{\sqrt[3]{x}}.$$

Поскольку подынтегральная функция неограничена в окрестности точки $x = 0$ и непрерывна на полуинтервале $(0; 8]$, полученный справа интеграл является несобственным интегралом второго рода с единственной особенностью в точке $x = 0$. Согласно определению такого интеграла имеем:

$$1 = C\lim_{a\to+0}\int\limits_a^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3C}{2}\lim_{a\to+0} x^{2/3}\Bigg|_a^8 = \frac{3C}{2}\lim_{a\to+0}(4 - a^{\frac{2}{3}}) = \frac{3C}{2}(4-0) = 6C,$$

и стало быть, $C = \dfrac{1}{6}$.

2. По определению плотности распределения

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Здесь возможны следующие три принципиально различных случая:
а) $x \le 0$. Тогда переменная интегрирования $t \le x \le 0$, и таким образом, согласно условию $f(t) = 0$ на всем промежутке интегрирования. Стало быть, при $x \le 0$ функция распределения $F(x) = 0$;

б) $x \in (0;8]$. Тогда промежуток интегрирования распадается на два промежутка $(-\infty;x] = (-\infty;0] \cup (0;x]$, где $(0;x] \subset (0;8]$, и согласно условию

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int\limits_{0}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \frac{1}{6}\int\limits_{0}^{x} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}}.$$

Первый интеграл зануляется. Что касается второго интеграла, то поскольку подынтегральная функция неограничена в окрестности точки $t = 0$ и непрерывна на полуинтервале $(0;x]$, это несобственный интеграл второго рода с единственной особенностью в точке $t = 0$. Согласно определению такого интеграла имеем:

$$F(x) = \frac{1}{6}\int\limits_{0}^{x} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{6}\lim_{a\to+0}\int\limits_{a}^{x} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\lim_{a\to+0} t^{2/3}\Big|_{a}^{x} = \frac{1}{4}\lim_{a\to+0}\left(x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{x^{2/3}}{4};$$

в) $x > 8$. Тогда

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{8} f(t)dt + \int\limits_{8}^{x} f(t)dt,$$

и учитывая, что $f(t) = 0$ при $t \in (8,x]$, согласно определению плотности распределения получаем:

$$F(x) = F(8) = \frac{1}{4}8^{2/3} = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{4}x^{2/3}, & x \in (0,8]; \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

3. В силу непрерывности с.в. X и по соответствующему свойству функции распределения вероятность

$$P(-1 < X < 1) = P(-1 \le X < 1) = F(1) - F(-1) = \frac{1}{4}1^{2/3} - 0 = \frac{1}{4}.$$

4. Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ см. на рис. 1.23, 1.24.

Примечания 1.25.

1. При вычислении несобственного интеграла можно было сразу использовать формулу Ньютона-Лейбница, если понимать нижнюю подстановку в предельном смысле.
2. Если оказалось, что функция распределения постоянна при $x > x_0$ (в примере при $x > 8$), или иными словами, плотность распределения $f(x) = 0$ при $x > x_0$, то можно сразу сделать вывод, что $F(x) = 1$ при $x > x_0$. Это следует непосредственно из того, что $F(+\infty) = 1$ по свойствам функции распределения.

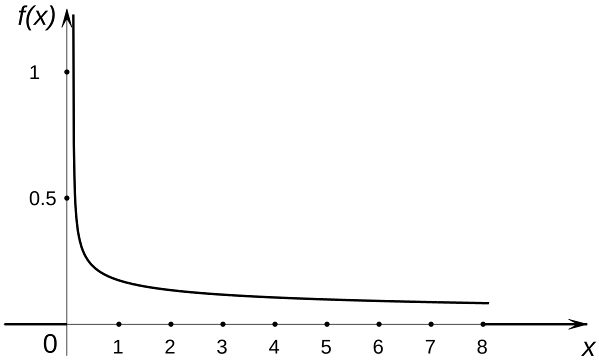


Рис. 1.23

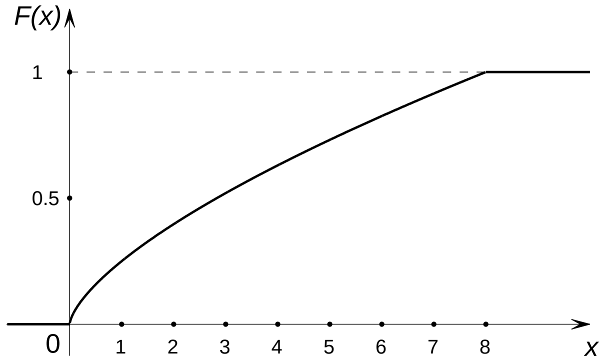


Рис. 1.24

§1.16. Числовые характеристики случайных величин

1. **Математическое ожидание**

Пусть J – конечное или счетное множество индексов.

Математическим ожиданием (*средним значением*) дискретной с.в. X, принимающей значения x_i, $i \in J$, с вероятностями $p_i = P(X = x_i)$, $i \in J$, называется сумма

$$M(X) = \sum_{i \in J} x_i p_i$$

(если справа – числовой ряд, а не конечная сумма, то предполагается, что он сходится абсолютно).

Математическим ожиданием (*средним значением*) непрерывной с.в. X с плотностью распределения $f(x)$ называется интеграл

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

(предполагается, что этот несобственный интеграл сходится абсолютно, в противном случае считается, что $M(X)$ не существует).

Примечание 1.26. При неограниченном увеличении числа испытаний среднее арифметическое всех значений, принятых с.в. X в этих испытаниях, стремится к $M(X)$.

Свойства математического ожидания:

1) если $P(X = c) = 1$, то $M(X) = c$;
2) $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $\forall$ с.в. X: $M(aX + b) = aM(X) + b$;
3) $\forall$ с.в. X, Y: $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;
4) если с.в. X и Y независимы[7], то $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$;
5) если $X \geq 0$, то $M(X) \geq 0$;
6) если $X \geq Y$, то $M(X) \geq M(Y)$;
7) $\forall$ с.в. X: $\Big|M(X)\Big| \leq M\Big(|X|\Big)$.

Примечание 1.27. Все указанные свойства, за исключением свойства 4), достаточно очевидны и следуют непосредственно из определения математического ожидания и соответствующих свойств суммы и интеграла. Доказательство всех этих свойств можно найти, например, в [1, §12].

[7]Две случайные величины X и Y называются *независимыми*, если $\forall x, y \in \mathbf{R}$ события $A = \{X < x\}$ и $B = \{Y < y\}$ являются независимыми.

Две с.в. могут иметь одинаковые средние значения, но их возможные значения могут быть по-разному разбросаны вокруг средних значений. Разброс значений с.в. характеризует дисперсия.

2. **Дисперсия**

Дисперсией с.в. X называется число

$$D(X) = M\Big(X - M(X)\Big)^2,$$

то есть *дисперсия с.в. X – это математическое ожидание квадрата отклонения с.в. X от ее математического ожидания.* Соответственно, если X – дискретная с.в., то

$$D(X) = \sum_{i \in J} \Big(x_i - M(X)\Big)^2 p_i;$$

если X – непрерывная с.в., то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(x - M(X)\Big)^2 f(x)dx.$$

На практике для вычисления дисперсии используется более простая формула:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Если X – дискретная с.в., то

$$M(X^2) = \sum_{i \in J} (x_i)^2 p_i;$$

если X – непрерывная с.в., то

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx.$$

Число $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ называется *средним квадратичным отклонением* случайной величины X. Эта величина имеет смысл, поскольку согласно определению дисперсии $D(X) \geq 0$.

Примечания 1.28.

1. При неограниченном увеличении количества испытаний большинство значений, принимаемых случайной величиной, попадает в интервал $(M(X) - \sigma(X), M(X) + \sigma(X))$.

2. Если с.в. X имеет нормальное распределение с параметрами $\{m, \sigma\}$, то можно показать, что $M(X) = m$, $D(X) = \sigma^2$. При этом очевидно, что

$$P\Big(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma\Big) = \Phi_{m,\sigma}(m + 3\sigma) - \Phi_{m,\sigma}(m - 3\sigma) =$$

$$= \Phi\left(\frac{m + 3\sigma - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m - 3\sigma - m}{\sigma}\right) = \Phi_0(3) - \Phi_0(-3) = 2\Phi_0(3) = 0.9973.$$

Иными словами, с.в. X практически достоверно принимает значения из интервала $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$. В этом заключается так называемое *правило трех* σ.

3. Пусть $k \in \mathbf{N}$. Величина $m_k(X) = M(X^k)$, если она существует, называется *начальным моментом* порядка k с.в. X. Величина $\mu_k(X) = M\Big(X - M(X)\Big)^k$, если она существует, называется *центральным моментом* порядка k с.в. X. Таким образом, $M(X)$ можно рассматривать как начальный момент первого порядка, $M(X^2) = m_2(X)$ – начальный момент второго порядка, а $D(X) = \mu_2(X)$ – центральный момент второго порядка. Очевидно, что центральный момент первого порядка $\mu_1(X) = M\Big(X - M(X)\Big) = M(X) - M(X) = 0$. Понятие моментов с.в. X используется в математической статистике, в частности, в методе моментов (см. глоссарий).

Свойства дисперсии:
1) если $P(X = c) = 1$, то $D(X) = 0$;
2) $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $\forall$ с.в. X: $D(aX + b) = a^2 D(X)$;
3) $\forall$ независимых с.в. X, Y: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Примечание 1.29. Свойства 1) и 2) следуют непосредственно из определения дисперсии и свойств математического ожидания. Доказательство всех свойств можно найти, например, в [1, §12].

Числовые характеристики для основных распределений

1. **Биномиальное распределение**:

$$P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad M(X) = np, \quad D(X) = npq.$$

Доказательство проведем двумя способами.
I способ (методом производящих функций).
А) Заметим, что

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} = q^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k k \left(\frac{p}{q}\right)^k = q^n \varphi\left(\frac{p}{q}\right),$$

где

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k k t^k = t \sum_{k=0}^{n} C_n^k k t^{k-1} = t \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Big(t^k\Big)',$$

или по формуле бинома Ньютона, см. с.41,

$$\varphi(t) = t\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k\right)' = t\Big((1+t)^n\Big)' = nt(1+t)^{n-1}.$$

И поскольку $p + q = 1$, то стало быть,

$$M(X) = \frac{p}{q} \cdot nq \cdot \left[q\left(1 + \frac{p}{q}\right)\right]^{n-1} = \frac{p}{q} \cdot n \cdot q(p+q)^{n-1} = pn.$$

Б) Аналогичным образом,

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = q^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k k^2 \left(\frac{p}{q}\right)^k = q^n \psi\left(\frac{p}{q}\right),$$

где

$$\psi(t)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k k^2 t^k = t\sum_{k=0}^{n}C_n^k k^2 t^{k-1} = t\sum_{k=0}^{n}C_n^k k\Big(t^k\Big)' = t\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k k t^k\right)',$$

то есть

$$\psi(t)=t\varphi'(t)=nt\cdot\Big[(1+t)^{n-1}+t\cdot(n-1)(1+t)^{n-2}\Big]=n\cdot t(1+t)^{n-2}\cdot[1+tn].$$

Таким образом,

$$M(X^2)=q^n\cdot n\cdot\frac{p}{q}\left(1+\frac{p}{q}\right)^{n-2}\left[1+n\cdot\frac{p}{q}\right]=n\cdot p\cdot\left(q\left(1+\frac{p}{q}\right)\right)^{n-2}\cdot[q+np],$$

или, учитывая, что $p+q=1$, $M(X^2)=np\cdot[q+np]$, а стало быть,

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=npq+(np)^2-(np)^2=npq.$$

II способ (методом приведения).

А) Заметим, что согласно формуле (1.3) на с.16)

$$C_n^{m+1}=\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{n-m}{m+1}=C_n^m\cdot\frac{n-m}{m+1},$$

Поэтому, делая в следующей сумме замену $k=m+1$, $m=\overline{0,n-1}$, получаем:

$$M(X)=\sum_{k=0}^{n}kC_n^kp^kq^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}kC_n^kp^kq^{n-k}=\sum_{m=0}^{n-1}(n-m)C_n^mp^{m+1}q^{n-m-1}=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}(n-m)C_n^mp^{m+1}q^{n-m-1}=\frac{p}{q}\Big(n\sum_{m=0}^{n}C_n^mp^mq^{n-m}-\sum_{m=0}^{n}mC_n^mp^mq^{n-m}\Big).$$

Отсюда находим $M(X)=\dfrac{p}{q}\Big(n-M(X)\Big)$, или $\left(1+\dfrac{p}{q}\right)M(X)=\dfrac{np}{q}$, то есть $M(X)=np$.

Б) Аналогично,

$$M(X^2)=\frac{p}{q}\sum_{m=0}^{n}(m+1)(n-m)C_n^mp^mq^{n-m}=$$

$$=\frac{p}{q}\left(\sum_{m=0}^{n}(n-m)C_n^mp^mq^{n-m}+n\sum_{m=0}^{n}mC_n^mp^mq^{n-m}-\sum_{m=0}^{n}m^2C_n^mp^mq^{n-m}\right),$$

или $M(X^2)=\left(1+\dfrac{np}{q}\right)M(X)-\dfrac{p}{q}M(X^2)$, откуда

$$\left(1+\frac{p}{q}\right)M(X^2)=\left(1+\frac{np}{q}\right)M(X)\quad\Rightarrow\quad M(X^2)=np\cdot(q+np),$$

и таким образом, $D(X) = M(X^2) - M^2(X) = npq$.

2. **Распределение Пуассона**:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad M(X) = D(X) = \lambda.$$

Доказательство. Воспользуемся методом приведения[8].

А) Заметим, что

$$M(X) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}k = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.$$

Б) Аналогичным образом,

$$M(X^2) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}k^2 = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}k = \lambda e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}(m+1),$$

и стало быть, в силу п. А) находим: $M(X^2) = \lambda\Big[M(X)+1\Big] = \lambda^2 + \lambda$, откуда $D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

3. **Геометрическое распределение**:

$$P(X = k) = q^k p, \quad M(X) = q/p, \quad D(X) = q/p^2.$$

Доказательство. Воспользуемся методом приведения[9].

А) Заметим, что

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kq^k p = q\sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = q\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)pq^m = q\cdot\Big[M(X)+1\Big],$$

откуда

$$(1-q)M(X) = q \quad \Rightarrow \quad M(X) = \frac{q}{1-q} = \frac{q}{p}.$$

Б) Аналогично,

$$M(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 q^k p = q\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p = q\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)^2 q^m p =$$

$$= q\cdot\left[\sum_{m=0}^{\infty} m^2 q^m p + 2\sum_{m=0}^{\infty} mq^m p + \sum_{m=0}^{\infty} q^m p\right] = q\cdot\Big[M(X^2) + 2M(X) + 1\Big],$$

откуда

$$(1-q)M(X^2) = 2q\cdot\frac{q}{p} + q = q\cdot\left[\frac{2q}{p}+1\right] \quad \Rightarrow \quad M(X^2) = \frac{q}{p}\cdot\left[\frac{2q}{p}+1\right],$$

[8] Сходимость рядов устанавливается по признаку Даламбера, см. Часть 3, теорема 3.6, с.80.

[9] Сходимость рядов устанавливается по признаку Коши, см. Часть 3, теорема 3.5, с.80.

и стало быть,

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{q}{p} \cdot \left[\frac{2q}{p} + 1\right] - \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} = \frac{q(q+p)}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

4. **Равномерное распределение**:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}, \quad M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Доказательство.
Непосредственным интегрированием получаем:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Bigg|_a^b = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2};$$

$$M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Bigg|_a^b = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^3 - a^3}{b-a},$$

откуда

$$D(X) = M(X^2) - M(X) = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{12}\Big(4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3b^2 - 6ab - 3a^2\Big) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

5. **Показательное распределение**:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \lambda \int\limits_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} u = x & \Rightarrow & du = dx \\ \lambda e^{-\lambda x} dx = dv & \Rightarrow & v = -e^{-\lambda x} \end{array} \right] = -x e^{-\lambda x} \Bigg|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx.$$

Действуя по правилу Лопиталя, получаем

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} = 0.$$

Таким образом, подстановка в предыдущем равенстве зануляется, и используя свойство 1) плотности распределения (а можно и непосредственно вычислить), имеем:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Аналогично, производя два раза интегрирование по частям, нетрудно получить, что

$$M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \lambda\int\limits_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2},$$

и стало быть,

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

6. **Нормальное распределение**:

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad M(X) = m, \quad D(X) = \sigma^2.$$

Доказательство. Как уже было сказано ранее, справедливо равенство

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – это функция стандартного нормального распределения ($m = 0$, $\sigma = 1$). Это означает, что с.в. $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ имеет стандартное нормальное распределение. Действительно, $\forall y \in \mathbf{R}$

$$P(Y < y) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} < y\right) = P\Big(X < m + \sigma y\Big) =$$

$$= \Phi_{m,\sigma}(m+\sigma y) = \Phi\left(\frac{[m+\sigma y] - m}{\sigma}\right) = \Phi(y).$$

Тогда по свойствам математического ожидания и дисперсии получаем:

$$M(X) = m + \sigma M(Y), \quad D(X) = \sigma^2 D(Y).$$

Таким образом, нам достаточно найти $M(Y)$ и $D(Y)$. Плотностью распределения с.в. Y является функция Гаусса $\varphi(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}$. Внося y под знак дифференциала, получаем:

$$M(Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ye^{-y^2/2}dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} d\left(\frac{y^2}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Производя интегрирование по частям[10], получаем:

$$M(Y^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 \varphi(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-y^2/2} dy =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} u = y & \Rightarrow & du = dy \\ ye^{-y^2/2} dy = dv & \Rightarrow & v = -e^{-y^2/2} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-ye^{-y^2/2} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy \right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy = 1$$

по свойству 1) плотности распределения. Таким образом,

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = 1 - 0^2 = 1.$$

Окончательно получаем:

$$M(X) = m + \sigma M(Y) = m + \sigma \cdot 0 = m, \quad D(X) = \sigma^2 D(Y) = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2.$$

Задача 1.37. Вероятность того, что в течение часа на станцию скорой помощи не поступит ни одного вызова, равна 0.00248. Известно, что число вызовов X имеет распределение Пуассона. Вычислить $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. Найдем параметр λ распределения Пуассона. По условию,

$$P(X = 0) = P(0; \lambda) = 0.00248.$$

По табл. 1 из приложения имеем: $\lambda = 6$. Отсюда $M(X) = D(X) = \lambda = 6$. Таким образом, в среднем в течение часа поступает $6 \pm \sqrt{6}$ вызовов.

Задача 1.38. Из хорошо перетасованной колоды карт слева направо последовательно выкладываются карты лицевой стороной вверх. На карты первой колоды аналогично кладут карты второй колоды. Найти среднее число совпадений верхней и нижней колоды.

Решение. Пусть n – число карт в колоде. Число совпадений $X = X_1 + \ldots + X_n$, где

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я пара совпала}, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Для i-й пары элементарные исходы имеют вид $\{K_1, K_2\}$ (произвольная пара карт из 1-й и 2-й колоды) – всего $n \times n = n^2$ вариантов; благоприятные исходы: $\{K_1, K_1\}$ (карты совпадают) – всего n вариантов. Тогда

$$P(X_i = 1) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad P(X_i = 0) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n},$$

[10] При вычислении подстановки опять используется правило Лопиталя.

откуда

$$M(X_i) = x_1p_1 + x_2p_2 = 0 \cdot \frac{n-1}{n} + 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n};$$

$$M(X) = M(X_1) + \ldots + M(X_n) = \frac{n}{n} = 1.$$

Таким образом, в среднем будет одно совпадение.

Задача 1.39. По заданному закону распределения с.в. X для с.в. $Y = 3X + 5$ найти $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$

X	-2	0	3	5
P	0.3	0.1	?	0.4

Решение. Имеем ряд распределения с.в. X при $n = 4$, $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.1$, $p_3 =?$, $p_4 = 0.4$. Поскольку должно быть

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

то $p_3 = 0.2$. По определению,

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i = (-2) \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.4 = 2,$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2p_i = 4 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.1 + 9 \cdot 0.2 + 25 \cdot 0.4 = 13,$$

следовательно,

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 13 - 2^2 = 13 - 4 = 9.$$

По свойствам математического ожидания и дисперсии получаем:

$$M(Y) = M(3X + 5) = 3M(X) + 5 = 3 \cdot 2 + 5 = 6 + 5 = 11,$$

$$D(Y) = D(3X + 5) = 3^2D(X) = 9 \cdot 9 = 81, \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{81} = 9.$$

Задача 1.40. Плотность распределения с.в. X:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^9}, & x > 1; \\ 0, & x \le 1. \end{cases}$$

Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

Решение. По определению,

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 8 \cdot \int_{1}^{+\infty} \frac{x}{x^9}dx = 8 \cdot \int_{1}^{+\infty} x^{-8}dx = \frac{-8}{7}x^{-7}\Big|_1^{+\infty} = \frac{8}{7},$$

$$M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = 8\cdot\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x^2}{x^9}dx = 8\cdot\int\limits_{1}^{+\infty} x^{-7}dx = \frac{-8}{6}x^{-6}\Big|_1^{+\infty} = \frac{4}{3},$$

следовательно,

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\frac{4}{3}-\frac{64}{49}=\frac{196-192}{3\cdot 49}=\frac{4}{147},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{2}{7\sqrt{3}}.$$

Примечание 1.30. В условиях задачи 1.35 $M(X)$ (а тем более $M(X^2)$ и $D(X)$) не существуют:

$$M(|X|)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx = C\cdot\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2-1}=$$

$$=\frac{C}{2}\cdot\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{d(x^2-1)}{x^2-1}=\frac{C}{2}\cdot\ln|x^2-1|\Big|_2^{+\infty}=+\infty.$$

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА.

§2.1. Основы выборочного метода

Математическая статистика (МС) – это раздел математики, который изучает так называемые обратные задачи по отношению к задачам теории вероятностей.

Вся подлежащая изучению совокупность объектов или всех возможных наблюдений называется *генеральной совокупностью.*

Предположим, имеются данные наблюдений $x_1, \ldots, x_n$ за некоторой с.в. X, функция распределения $F(x)$ которой неизвестна. МС, в частности, разрабатывает методы, позволяющие по этим данным приближенно восстановить $F(x)$. При этом с.в. X можно понимать как случайно отобранный представитель генеральной совокупности. Для краткости условимся именовать с.в. X самой генеральной совокупностью. Далее мы ограничимся только этой простейшей ситуацией.

Та часть объектов, которая отобрана из генеральной совокупности для непосредственного изучения, или результаты произведенных наблюдений, которые трактуются как значения некоторых с.в. $X_1, \ldots, X_n$, называется *выборкой.* Число n объектов в выборке называется *объемом выборки.*

Основной метод МС – исследование генеральной совокупности с помощью выборки. Однако для этого выборка должна быть *репрезентативной* (представительной), то есть должна сохранять пропорции генеральной совокупности.

Пример 2.1. Предположим, генеральная совокупность – это некоторый большой набор однотипных деталей, из которых M исправных и N неисправных; выборка содержит m исправных и n неисправных деталей. Если $N/M = n/m$, то выборка репрезентативна (причем идеально). Во всяком случае N/M и n/m не должны сильно отличаться.

Простейший способ построения репрезентативной выборки – это так называемая *собственно случайная выборка* с *повторным отбором*, получаемая путем случайного выбора элементов без расчленения их на типы и группы, с возвращением каждого обследованного объекта выборки в генеральную совокупность.

Ограничимся только этим простейшим случаем. Тогда определение выборки можно конкретизировать следующим образом.

Случайной выборкой объема n, отвечающей с.в. X с функцией распределения $F(x)$, называется набор n независимых с.в. $X_1, \ldots, X_n$, каждая из которых имеет распределение $F(x)$. При этом $F(x)$ называется *теоретической функцией распределения.*

§2.2. Простой статистический ряд и статистический ряд

Итак, пусть $\vec{X}_n = \left\{X_1, \ldots, X_n\right\}$ – это выборка, полученная из генеральной совокупности X. Для краткости мы обозначаем ее как арифметический вектор. Соответственно, с.в. $X_1, \ldots, X_n$ будем называть *компонентами выборки.* Практически можно считать, что n независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ – это n независимых измерений с.в. X, проведенных при одинаковых условиях. Выборка, понимаемая как совокупность наблюденных значений с.в. X, представляет собой первичный статистический материал, подлежащий обработке, осмыслению и научному анализу. Обычно этот материал оформляется в виде таблицы, в первой строке которой стоит номер опыта, а во второй – наблюденное (то есть измереннное) значение с.в. X:

№ опыта	1	2	...	n
значение X	X_1	X_2	...	X_n

Такая таблица называется *простым статистическим рядом.*

Пример 2.2. Данный станок произвел за смену 1235 деталей. Из них для исследования качества работы станка было отобрано 14 деталей. Результаты измерения длины каждой детали были сведены в таблицу

№ детали	1	2	3	4	5	6	7
длина детали, мм	15.03	15.02	15.04	15.03	15.03	15.04	15.02

№ детали	8	9	10	11	12	13	14
длина детали, мм	15.01	15.03	15.00	14.99	15.05	15.02	15.01

Приведенная здесь таблица является примером простого статистического ряда. В качестве с.в. X выступает длина детали. Генеральной совокупностью является совокупность длин всех деталей, произведенных станком. Отметим, что числа, стоящие во второй строке таблицы, не являются, собственно говоря, выборкой, а являются, как говорят, *реализацией выборки* $\vec{X}_{14}$ объема $n = 14$. В данном случае X_i – это длина отобранной детали, измеряемой i-й по счету. Поскольку детали отбираются случайным образом, то X_i – это случайная величина. Если мы повторим этот опыт еще раз, то она уже примет другое значение, и стало быть, мы получим другую реализацию выборки. В дальнейшем конкретную реализацию выборки условимся обозначать следующим образом: $\vec{x}_n = \left\{x_1, \ldots, x_n\right\}$. В данном случае $x_1 = 15.03$, $x_2 = 15.02$, …, $x_n = 15.01$, $n = 14$.

Так же, как и в приведенном выше примере, некоторые компоненты в конкретной реализации выборки могут совпадать. Поэтому запись статистического материала в виде простого статистического ряда является неэкономной, и более того, малоинформативной, поскольку не дает никакого наглядного представления о его характере. Поэтому на следующем этапе обработки простой статистический ряд преобразуется в статистический ряд (см. ниже).

Пусть в данной реализации выборки $\vec{x}_n = \left\{x_1, \ldots, x_n\right\}$ оказалось, что n_1 компонент приняло значение x_1^*, n_2 компонент приняло значение $x_2^*, \ldots$, n_k компонент приняло значение x_k^*, $\sum\limits_{j=1}^{k} n_j = n$. Тогда значения $x_1^*, \ldots, x_k^*$ называются *вариантами*, а их последовательность, записанная в порядке возрастания, – *вариационным рядом*; числа n_j называются *частотами*, а отношения $\omega_j = n_j/n$ – *относительными частотами*, или *частостями*. Очевидно, что сумма всех относительных частот должна быть равна единице. Оформленный в виде таблицы перечень вариант и соответствующих им частот и (или) относительных частот называется *статистическим рядом*, или *статистическим распределением*.

Для приведенного выше примера статистический ряд имеет вид

x_j^*	14.99	15.00	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05
n_j	1	1	2	3	4	2	1
ω_j	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{14}$

Объем выборки: $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_7 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 2 + 1 = 14$; $x^*_{\min} = 14.99$, $x^*_{\max} = 15.05$. Статистический ряд дает уже значительно больше информации о длине деталей, производимых станком. Можно, например, предположить, что большая часть деталей имеет длину 15.03 мм. Однако достаточно ли отобрать 14 деталей, чтобы об этом судить? Очевидно, что нет. Стало быть, объем выборки должен быть больше (порядка 50 или даже 100 деталей). Но при большом объеме выборки, у которой в каждой реализации количество различных компонент тоже велико[11], работать со статистическим рядом в силу его чрезмерной громоздкости было бы неудобно, и информативность его тоже была бы не слишком высока. В такой ситуации переходят к следующему этапу обработки статистического материала – получают так называемую группировку (см. ниже).

§2.3. Группировка, гистограмма и эмпирическая функция распределения

Предположим, что у нас имеются результаты наблюдений над непрерывной с.в. X, оформленные в виде статистического ряда. Разделим весь диапазон наблюденных значений X, то есть $[x^*_{\min}; x^*_{\max}]$ на отрезки равной длины

[11]Так, например, будет обстоять дело для непрерывно распределенной с.в. X.

– так называемые *разряды*[12] $\Delta_j = [z_{j-1}; z_j]$, $j = \overline{1,m}$; $z_0 = x^*_{\min}$, $z_m = x^*_{\max}$. Обозначим m_j – количество компонент выборки (или иными словами, сумму частот вариант), попавших в j-й разряд, $j = \overline{1,m}$, и назовем его *частотой разряда*. При этом мы должны определиться с тем, куда относить варианту, попавшую на границу разряда – к левому или правому от нее разряду, а как именно мы это сделаем, совершенно не важно. Главное, чтобы сумма частот всех разрядов равнялась объему выборки. Соответственно, отношение $\pi_j = \dfrac{m_j}{n}$ будем называть *относительной частотой разряда* Δ_j, $j = \overline{1,m}$. Очевидно, что сумма всех относительных частот должна быть равна единице. Середины разрядов будем обозначать z^*_j, $j = \overline{1,m}$.

Оформленный в виде таблицы перечень всех разрядов (в порядке их расположения на числовой оси) и соответствующих им частот называется *группировкой*.

Иногда для удобства в группировку третьей строкой включают также и перечень относительных частот[13].

Примечание 2.1. Очевидно, что число интервалов m следует брать не очень большим, чтобы группировка была не слишком громоздкой, но и не слишком маленьким, чтобы не потерять и не исказить пропорции генеральной совокупности. Как показывает практика, в большинстве случаев рационально выбирать число разрядов в пределах от 10 до 20.

Группировка часто оформляется графически в виде так называемой *гистограммы*, которая строится следующим образом. По оси абсцисс откладывают разряды, и на каждом из них как на основании строится прямоугольник, площадь которого равна относительной частоте данного разряда. Иными словами, высота каждого прямоугольника должна быть равна относительной частоте соответствующего разряда, деленной на длину разряда h. Из способа построения гистограммы следует, что полная площадь ее равна единице.

Примечание 2.2. Очевидно, что при увеличении числа опытов количество вариант будет увеличиваться (если, конечно, речь идет о непрерывной с.в. X). Тогда, если выбирать все более и более мелкие разряды, "верхняя" граница гистограммы будет приближаться к некоторой кривой, ограничивающей площадь, равную единице. Можно показать[14], что функция, определяемая этой кривой, является плотностью распределения непрерывной с.в. X, то есть, как говорят, *теоретической плотностью распределения*. Соответственно, функция, равная нулю вне диапазона значений $[x^*_{\min}; x^*_{\max}]$ и определяемая на нем "верхней" границей гистограммы, называется *эмпирической плотностью распределения*[15].

Пользуясь данными группировки, можно получить также некоторое представление о неизвестной функции распределения с.в. X, то есть так называемой *теоретической функции распределения*. Ее аппроксимация (приближение) $F_n(x)$, получаемое на основе этих данных, называется *эмпирической*

[12] Это требование не является обязательным. Длины разрядов можно брать и различными. Это имеет смысл в том случае, когда, например, с.в. X имеет чрезмерно неравномерное распределение; тогда в какие-то части множества значений будет попадать очень много компонент выборки, и дробление этих частей должно быть более мелким, а в какие-то - очень мало, и дробление этих частей должно быть более крупным.

[13] При необходимости получения выборочных оценок математического ожидания и дисперсии (см. ниже) разумно включать в эту же таблицу отдельной строкой также и перечень середин разрядов.

[14] Точную формулировку этого утверждения и его доказательство можно найти, например, в [1, §18, теорема 3].

[15] Это нестрогое определение. Строгое определение см., например, [1].

функцией распределения [16], и строится следующим образом. В точках z_j, $j=\overline{0,m}$, являющихся границами разрядов, полагают

$$F_n(z_0)=0,\quad F_n(z_1)=\pi_1=\pi_1^\star,\quad F_n(z_2)=\pi_1+\pi_2=\pi_2^\star,\ldots,$$

$$F_n(z_{m-1})=\sum_{j=1}^{m-1}\pi_j=\pi_{m-1}^\star\quad F_n(z_m)=\sum_{j=1}^{m}\pi_j=\pi_m^\star=1.$$

Участвующие здесь величины $\pi_j^\star$, $j=\overline{1,m}$, называются *накопленными частостями разрядов*. Наряду с ними нам будет удобно также использовать термин *накопленные частоты разрядов* для величин $m_j^\star=m_1+\ldots+m_j$, $j=\overline{1,m}$.

Примечание 2.3. Аналогичные понятия вводятся и для статистического ряда. А именно, величины $n_j^\star=\sum\limits_{i=1}^{j}n_i$ называются *накопленными частотами*, а величины $\mu_j=\dfrac{n_j}{n}$ – *накопленными частостями*. Впрочем, мы в данном пособии эти термины не используем.

Исходя из данных группировки, мы можем ожидать, что теоретическая функция распределения в указанных точках совпадает со значениями $F_n(x)$, определенных указанным образом, либо не слишком сильно от них отличается. Что касается остальных точек, мы, вообще говоря, не располагаем никакой информацией (если использовать только группировку), за исключением двух обстоятельств: 1) теоретическая функция распределения является неубывающей; 2) согласно нашим предположениям, она является непрерывной. Таким образом, возникает задача интерполяции[17] теоретической функции распределения. Простейший способ интерполяции, которым мы и ограничимся, – это линейная интерполяция, то есть интерполяция ломаной. Соединяя точки $\Big(z_j;F_n(z_j)\Big)$ ломаной линией[18], получаем график эмпирической функции распределения.

Теорема Гливенко[19]. С вероятностью единица при $n\to\infty$

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\Big|F_n(x)-F(x)\Big|\to 0.$$

Задача 2.1. Даны результаты наблюдений случайной величины X. Разбив интервал значений на 10 равных частей, построить группировку, гистограмму и эмпирическую функцию распределения.
3.46, 3.14, 5.46, 2.68, 2.93, 3.30, 2.71, 4.31, 3.06, 0.70, 2.47, 2.81, 3.54, 1.44, 3.19, 2.81, 4.49, 2.65, 2.37, 2.30, 3.93, 4.38, 3.79, 2.04, 4.02, 2.53, 4.28, 6.70, 3.57, 1.15, 3.19, 4.19, 4.39, 2.45, 3.05, 3.32, 5.95, 4.97, 2.74, 3.41, 3.91, 2.49, 2.48, 3.60, 3.88, 2.07, 4.58, 3.16, 4.18, 1.95.

Решение. В данном случае $x^*_{\min}=0.70$, $x^*_{\max}=6.70$, $n=50$. Длина всего интервала значений равна 6, соответственно, шаг разбиения при делении

[16] В случае дискретной с.в. X, а также при небольшом количестве вариант эмпирическая функция распределения определяется несколько иначе – см., например, [1]. Впрочем, это определение нетрудно получить, если рассматривая перечень вариант и соответствующих им относительных частот как ряд распределения дискретной с.в., записать определение ее функции распределения.

[17] В простейшем понимании интерполяция – это восстановление функции (точное или приближенное) по известным ее значениям или значениям ее производных в заданных точках.

[18] Ошибки не будет, если соединить их некоторой плавной кривой.

[19] Доказательство см., например, [1, §18, теорема 1].

этого интервала на 10 равных частей $h = 0.6$. Распределим компоненты выборки[20] по десяти разрядам длины h.

$\Delta_1 = [0.70; 1.3]$: 0.70, 1.15;
$\Delta_2 = [1.3; 1.9]$: 1.44;
$\Delta_3 = [1.9; 2.5]$: 1.95, 2.04, 2.07, 2.30, 2.37, 2.45, 2.47, 2.48, 2.49;
$\Delta_4 = [2.5; 3.1]$: 2.53, 2.65, 2.68, 2.71, 2.74, 2.81, 2.81, 2.93, 3.05, 3.06;
$\Delta_5 = [3.1; 3.7]$: 3.14, 3.16, 3.19, 3.19, 3.30, 3.32, 3.41, 3.46, 3.54, 3.57, 3.60;
$\Delta_6 = [3.7; 4.3]$: 3.79, 3.88, 3.91, 3.93, 4.02, 4.18, 4.19, 4.28;
$\Delta_7 = [4.3; 4.9]$: 4.31, 4.38, 4.39, 4.49, 4.58;
$\Delta_8 = [4.9; 5.5]$: 4.97, 5.46;
$\Delta_9 = [5.5; 6.1]$: 5.95;
$\Delta_{10} = [6.1; 6.7]$: 6.70.

Построим группировку (в некотором расширенном виде для удобства дальнейших построений).

Δ_j	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7	Δ_8	Δ_9	Δ_{10}
z_j^*	1.0	1.6	2.2	2.8	3.4	4.0	4.6	5.2	5.8	6.4
m_j	2	1	9	10	11	8	5	2	1	1
$\frac{m_j}{nh}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{10}{30}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$
$\frac{m_j}{nh} \approx 10^{-3} *$	067	033	300	333	367	267	167	067	033	033
$m_j^\star$	2	3	12	22	33	41	46	48	49	50
$\pi_j^\star$	$\frac{2}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{12}{50}$	$\frac{22}{50}$	$\frac{33}{50}$	$\frac{41}{50}$	$\frac{46}{50}$	$\frac{48}{50}$	$\frac{49}{50}$	1
$\pi_j^\star \approx$	0.04	0.06	0.24	0.44	0.66	0.82	0.92	0.96	0.98	1

Гистограмма изображена на рис. 2.1. График эмпирической функции распределения см. на рис. 2.2.

§2.4. Точечные оценки параметров распределения

Пусть дана выборка $\{X_1, \ldots, X_n\}$ объема n. Будем для краткости обозначать ее вектором $\vec{X}_n$, а реализацию выборки – соответственно, $\vec{x}_n$.

Определение 2.1. Любую функцию выборки $g(\vec{X}_n)$ называют *статистикой*, или *выборочной характеристикой*.

Предположим, что вид функции распределения известен, но зависит от r-мерного вектора неизвестных параметров $\vec{\theta}_r = \{\theta_1, \ldots, \theta_r\}$, то есть неизвестная (теоретическая) функция распределения принадлежит некоторому множеству функций $\{F(x; \vec{\theta}_r) | \vec{\theta}_r \in \Theta\}$. В этом случае говорят, что принята *параметрическая модель* неизвестного закона распределения. Например, известно, что подлежащая изучению с.в. имеет нормальный закон распределения, но неизвестны параметры m, σ, здесь $r = 2$, $\vec{\theta}_2 = \{m; \sigma\}$.

[20] При выполнении контрольных работ такая запись не требуется. Мы приводим ее только для удобства читателя.

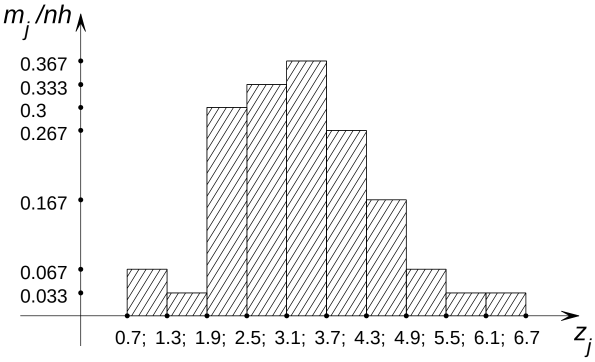


Рис. 2.1

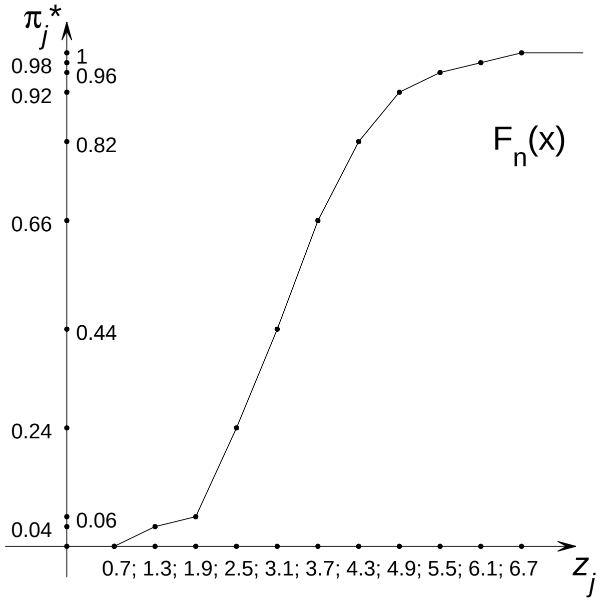


Рис. 2.2

Далее для простоты будем считать, что $r = 1$, то есть $\vec{\theta}_r = \theta$ – число. В этом случае, чтобы приближенно найти неизвестную функцию распределения, достаточно, исходя из результатов наблюдений $x_1, \ldots, x_n$, найти приближенное значение неизвестного параметра θ.

Статистику $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$, выборочное значение которой $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\vec{x}_n)$ для произвольной реализации выборки $\vec{x}_n$ можно считать приближенным значением параметра θ, называют *точечной оценкой* неизвестного параметра θ.

Точечные оценки можно, вообще говоря, строить различными способами. Например, в качестве точечной оценки математического ожидания естественно предложить статистики вида

$$\hat{\theta}(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \quad \frac{1}{2}\left(X_{\min} + X_{\max}\right) \quad \text{и т.п.}$$

Здесь возникают следующие вопросы. Каким требованиям должна удовлетворять статистика, чтобы ее можно было принять в качестве точечной оценки? Какую из предложенных оценок следует предпочесть?

Определение 2.2. Статистика $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ называется *состоятельной* оценкой неизвестного параметра θ, если с ростом объема выборки n она сходится по вероятности к оцениваемому параметру, то есть $\hat{\theta}(\vec{X}_n) \xrightarrow{P} \theta$ при $n \to \infty$, или

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\theta}(\vec{X}_n) - \theta\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Примечание 2.4. Это означает, что отклонение $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ от θ на заданную величину ε (и более) маловероятно при большом объеме выборки n. Это требование для оценки является совершенно необходимым, так как несостоятельная оценка не имеет никакого практического смысла.

Определение 2.3. Оценка $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ неизвестного параметра θ называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание $M\left(\hat{\theta}(\vec{X}_n)\right) = \theta \ \forall n \in \mathbf{N}$.

Примечание 2.5. Несмещенность оценки означает, что она не дает систематической погрешности в сторону завышения (или занижения) истинного значения параметра θ.

Определение 2.4. Если на некотором множестве Θ несмещенных оценок параметра θ, имеющих конечную дисперсию, существует оценка $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ такая, что для всех оценок $\overline{\theta}(\vec{X}_n)$ из класса Θ выполняется неравенство

$$D\Big(\hat{\theta}(\vec{X}_n)\Big) \le D\Big(\overline{\theta}(\vec{X}_n)\Big),$$

то оценка $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ называется *эффективной* (на этом множестве).

Примечание 2.6. Естественно, что эффективную оценку $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ следует предпочесть всем другим оценкам, так как разброс ее значений около истинного значения θ является наименьшим. Можно показать, что эффективная оценка единственна.

Рассмотрим способы построения наилучших (в смысле указанных требований) оценок математического ожидания и дисперсии.

В качестве *оценки математического ожидания* берут так называемое *выборочное среднее*

$$M_n = M_n(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j, \tag{2.1}$$

а в качестве *оценки дисперсии* – так называемую *выборочную дисперсию* (выборочный центральный момент 2-го порядка)

$$S_n^{(2)} = S_n^{(2)}(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - M_n)^2. \tag{2.2}$$

При малом объеме выборки $n \le 30$ рекомендуется для оценки дисперсии использовать другую величину

$$S_n^2 = S_n^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - M_n)^2, \tag{2.3}$$

называемую *исправленной выборочной дисперсией*.

Для конкретной реализации выборки можно использовать статистический ряд:

$$M_n = M_n(\vec{x}_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j x_j^*,$$

$$S_n^{(2)} = S_n^{(2)}(\vec{x}_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j (x_j^* - M_n)^2.$$

Доказательство следующих теорем можно найти, например, в [1, §19].

Теорема 2.1. Выборочное среднее M_n является несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой (на множестве всех линейных оценок) для математического ожидания $M(X)$ генеральной совокупности X.

Теорема 2.2. Выборочная дисперсия $S_n^{(2)}$ является смещенной состоятельной оценкой, а исправленная выборочная дисперсия S_n^2 – несмещенной состоятельной оценкой дисперсии $D(X) = \sigma^2(X)$ генеральной совокупности X.

Примечание 2.7. При большом количестве опытов ($n \geq 30$) вычисление выборочного среднего и выборочной дисперсии по указанным выше формулам (2.1)-(2.3) оказывается довольно громоздким. С другой стороны, учитывая, что компоненты выборки определяются все равно случайным образом и на практике измеряются всегда с некоторой погрешностью, указанная громоздкость абсолютно ничем не оправдана. Поэтому в такой ситуации вместо статистического ряда используют группировку, а вместо компонент выборки – середины разрядов и вычисляют выборочные характеристики по следующим (приближенным) формулам:

$$M_n = M_n(\vec{x}_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} m_j z_j^*, \quad S_n^{(2)} = S_n^{(2)}(\vec{x}_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} m_j (z_j^* - M_n)^2.$$

Иными словами, компоненты реализации выборки, попавшие в один и тот же разряд, перестают различать и считают их равными постоянной – середине разряда. Отметим, наконец, что при большом объеме выборки ($n \geq 30$) величины $S_n^{(2)}$ и S_n^2 отличаются весьма незначительно.

Задача 2.2. В условиях задачи 2.1 найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Решение. Имеем: $n = 50 \geq 30$. Поэтому используем приближенные формулы. Исходя из данных группировки, получаем:

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} m_j z_j^* = \frac{1}{50}\,(2\cdot 1 + 1\cdot 1.6 + 9\cdot 2.2 + 10\cdot 2.8 + 11\cdot 3.4 +$$

$$+8\cdot 4.0 + 5\cdot 4.6 + 2\cdot 5.2 + 1\cdot 5.8 + 1\cdot 6.4) = \frac{1664}{500} = 3.328;$$

$$S_n^{(2)} = \frac{1}{50}\sum_{j=1}^{m} m_j (z_j^* - M_n)^2 = \frac{1}{50}\Big(2\cdot[1-3.328]^2 + 1\cdot[1.6-3.328]^2 +$$

$$+9\cdot[2.2-3.328]^2 + 10\cdot[2.8-3.328]^2 + 11\cdot[3.4-3.328]^2 +$$

$$+8\cdot[4.0-3.328]^2 + 5\cdot[4.6-3.328]^2 + 2\cdot[5.2-3.328]^2 +$$

$$+1\cdot[5.8-3.328]^2 + 1\cdot[6.4-3.328]^2\Big) = \frac{1}{50}\,(10.839168 + 2.985984 +$$

$$+11.451456 + 2.78784 + 0.057024 + 3.612672 + 8.08992 + 7.008768 +$$

$$+6.110784 + 9.437184) = \frac{62.3808}{50} = 1.247616.$$

Отметим, что в МС такие подробные выкладки выписывать не принято (и при выполнении контрольных работ это тоже не требуется). Вместо этого результаты промежуточных вычислений заносятся в таблицу:

Δ_j	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7	Δ_8	Δ_9	Δ_{10}
z_j^*	1.0	1.6	2.2	2.8	3.4	4.0	4.6	5.2	5.8	6.4
m_j	2	1	9	10	11	8	5	2	1	1
$m_j z_j^*$	2	1.6	19.8	28	37.4	32	23	10.4	5.8	6.4
$\Sigma\ m_j z_j^*$	166.4									
M_n	3.328									
$z_j^* - M_n$	2.328	1.728	1.128	0.528	0.072	0.672	1.272	1.872	2.472	3.072
$(z_j^* - M_n)^2$	5.420	2.986	1.272	0.279	0.005	0.452	1.618	3.504	6.111	9.437
$m_j(\ldots)^2$	10.839	2.986	11.451	2.788	0.057	3.613	8.090	7.009	6.111	9.437
$\Sigma\ m_j(\ldots)^2$	62.3808									
$S_n^{(2)}$	1.247616									

Примечание 2.8. Уже в этом примере вычисления оказались довольно громоздкими. Но их можно существенно упростить (вплоть до устного счета), если использовать следующие далее свойства.

Следующие свойства достаточно очевидны и вытекают непосредственно из определения выборочного среднего и выборочной дисперсии и свойств суммы.

Свойства выборочного среднего

1. $M_n(\vec{x}_n) = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_j = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{k} n_j x_j^*$.

2. Если $x_i = C$, $i = \overline{1,n}$, то $M_n(\vec{x}_n) = C$.

3. Если $x_i = ay_i + b$, $i = \overline{1,n}$ (а следовательно, $x_i^* = ay_i^* + b$, $i = \overline{1,k}$), то $M_n(\vec{x}_n) = aM_n(\vec{y}_n) + b$.

4. Если $y_i = x_i - M_n(\vec{x}_n)$, $i = \overline{1,n}$, то $M_n(\vec{y}_n) = 0$.

5. Если $x_i = y_i + z_i$, $i = \overline{1,n}$, то $M_n(\vec{x}_n) = M_n(\vec{y}_n) + M_n(\vec{z}_n)$.

Свойства выборочной дисперсии

1. $S_n^{(2)}(\vec{x}_n) = M_n^{(2)}(\vec{x}_n) - \Big[M_n(\vec{x}_n)\Big]^2, \quad M_n^{(2)}(\vec{x}_n) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{k} n_j (x_j^*)^2$.

2. $S_n^{(2)}(\vec{x}_n) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{k} n_j \left(x_j^* - M_n(\vec{x}_n)\right)^2$.

3. Если $x_i = C$, $i = \overline{1,n}$, то $S_n^{(2)}(\vec{x}_n) = 0$.

4. Если $x_i = ay_i + b$, $i = \overline{1,n}$ (а следовательно, $x_i^* = ay_i^* + b$, $i = \overline{1,k}$), то $S_n^{(2)}(\vec{x}_n) = a^2 S_n^{(2)}(\vec{y}_n)$.

Примечание 2.9. Таким образом, свойства выборочных моментов аналогичны свойствам их теоретических аналогов. Свойства $S_n^{(2)}$ тоже аналогичны свойствам дисперсии, но соответствующие равенства выглядят несколько сложнее. Их можно найти, например, в [1].

Решение задачи 2.2: *второй способ.* Заметим, что $z_j^* = 1 + 0.6 \cdot y_j^*$, $j = \overline{1,10}$, где

y_j^*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_j	2	1	9	10	11	8	5	2	1	1
$m_j y_j^*$	0	1	18	30	44	40	35	14	8	9
$\sum$	194									
$\left(y_j^*\right)^2$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
$m_j\left(y_j^*\right)^2$	0	1	36	90	176	200	180	98	64	81
$\sum$	926									

Исходя из этой таблицы, получаем:

$$M_n(\vec{y}_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} m_j y_j^* = \frac{194}{50} = 3.88; M_n^{(2)}(\vec{y}_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} m_j \left(y_j^*\right)^2 = \frac{926}{50} = 18.52;$$

$$S_n^{(2)}(\vec{y}_n) = M_n^{(2)}(\vec{y}_n) - \left[M_n(\vec{y}_n)\right]^2 = 18.52 - (3.88)^2 = 3.4656.$$

Таким образом,

$$M_n(\vec{x}_n) = 1 + 0.6 \cdot M_n(\vec{y}_n) = 1 + 0.6 \cdot 3.88 = 3.328;$$

$$S_n^{(2)}(\vec{x}_n) = (0.6)^2 S_n^{(2)}(\vec{y}_n) = 0.36 \cdot 3.4656 = 1.247616.$$

§2.5. Выборочные моменты

Вспомним, что для с.в. X величина $m_k = M(X^k)$ называется начальным моментом порядка k, а величина $\mu_k = M\left[\left(X - M(X)\right)^k\right]$ – центральным моментом порядка k, $k \in \mathbf{N}$. Рассмотрим их выборочные аналоги.

Определение 2.5. *Выборочным начальным моментом* порядка k, построенным по выборке $\vec{X}_n$, называется величина

$$M_n^{(k)} = M_n^{(k)}(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k.$$

Определение 2.6. *Выборочным центральным моментом* порядка k, $k \geq 2$, построенным по выборке $\vec{X}_n$, называется величина

$$S_n^{(k)} = S_n^{(k)}(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - M_n(\vec{X}_n)\right)^k.$$

Доказательство следующих теорем можно найти, например, в [1, §19].

Теорема 2.3. Выборочный начальный момент $M_n^{(k)}(\vec{X}_n)$ является состоятельной несмещенной оценкой начального момента $m_k(X)$ (если таковой существует).

Теорема 2.4. Выборочный центральный момент $S_n^{(k)}(\vec{X}_n)$ является состоятельной (смещенной) оценкой центрального момента $\mu_k(X)$ (если таковой существует).

Свойства выборочных моментов

1. Пусть $x_i = ay_i$, $i = \overline{1,n}$. Тогда

$$M_n^{(k)}(\vec{X}_n) = a^k M_n^{(k)}(\vec{Y}_n).$$

2. Пусть $x_i = ay_i + b$, $i = \overline{1, n}$, $b \neq 0$. Тогда

$$M_n^{(k)}(\vec{X}_n) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j a^j b^{k-j} M_n^{(j)}(\vec{Y}_n).$$

3. Пусть $x_i = ay_i + b$, $i = \overline{1, n}$. Тогда $S_n^{(k)}(\vec{X}_n) = a^k S_n^{(k)}(\vec{Y}_n)$.

§2.6. Понятие выравнивающей кривой

Определение 2.7. *Выравнивающей кривой* для данного статистического распределения называется гладкая кривая, наилучшим (в некотором смысле) образом аппроксимирующая (приближающая) график теоретической плотности или функции распределения.

Примечание 2.10. В соответствии с этим определением говорят либо о *выравнивающей кривой гистограммы*, либо о *выравнивающей кривой эмпирической функции распределения.*

Задача об отыскании выравнивающей кривой в общем случае является неопределенной, поскольку слова "в некотором смысле"требуют уточнения. Однако в случае параметрической модели неизвестного распределения можно действовать, например, следующим образом[21]. Выберем неизвестные параметры распределения с таким расчетом, чтобы соответствующее количество теоретических моментов предполагаемого распределения совпало с их выборочными аналогами. Предположим, например, что исследуемая с.в. X – это ошибка измерения, возникающая в результате наложения воздействий большого количества независимых малых ошибок. Тогда можно доказать, что с.в. X будет подчиняться нормальному закону, то есть иметь плотность распределения вида

$$f(x) = \varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

с некоторыми, вообще говоря, неизвестными параметрами $\{m; \sigma\}$. Но как известно, для такого распределения математическое ожидание и дисперсия равны соответственно $M(X) = m$, $D(X) = \sigma^2$. Заменяя в этих равенствах теоретические моменты их выборочными аналогами, получаем оценки параметров неизвестного теоретического распределения:

$$m = M_n(\vec{x}_n), \quad \sigma = \sqrt{S_n^{(2)}(\vec{x}_n)}.$$

Тогда график функции $\varphi_{m,\sigma}(x)$ при данном выборе параметров будет являться выравнивающей кривой гистограммы. Соответственно, график функции

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{m,\sigma}(t)dt = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

будет выравнивающей кривой эмпирической функции распределения.

[21] Соответствующий метод называется *методом моментов*. Мы приводим здесь только суть этого метода. Подробнее см., например, [1].

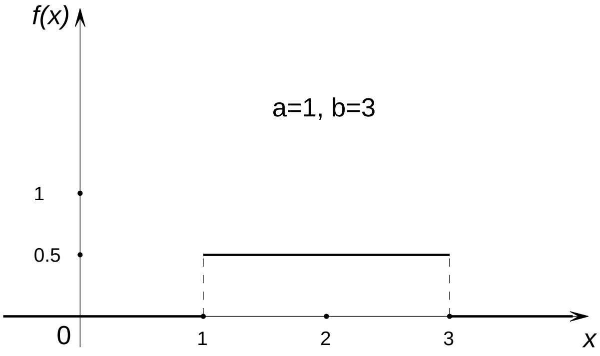


Рис. 2.3 . Плотность равномерного распределения на $[a; b]$

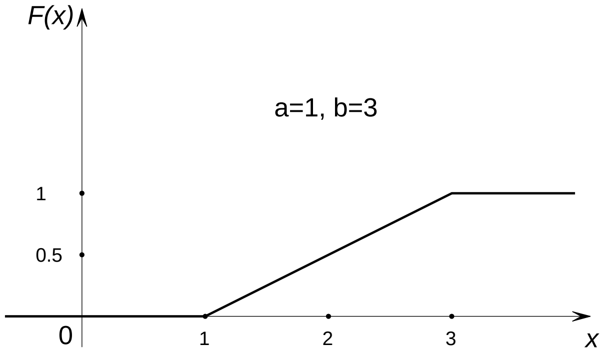


Рис. 2.4 . Функция равномерного распределения на $[a; b]$

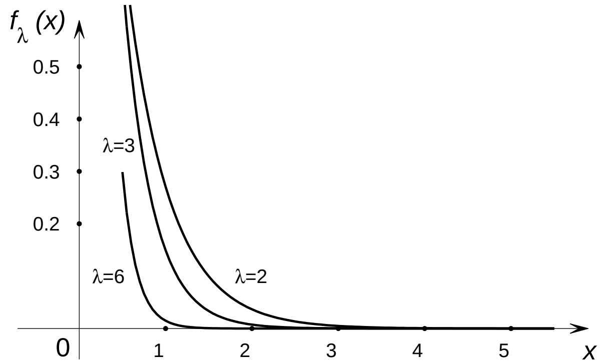


Рис. 2.5 . Плотность показательного распределения

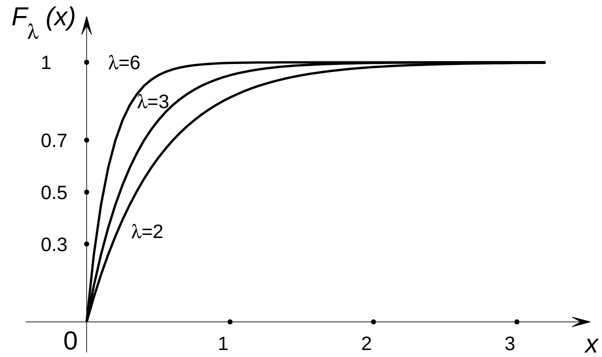


Рис. 2.6 . Функция показательного распределения

Примечание 2.11. При построении выравнивающих кривых (по методу моментов) не рекомендуется пользоваться моментами порядка выше четвертого, так как точность вычисления этих моментов резко падает с увеличением их порядка.

Бывают случаи, когда по виду гистограммы или графика эмпирической функции распределения можно выдвинуть предположение о типе неизвестного закона распределения. Вспомним в связи с этим графики наиболее часто возникающих на практике распределений – см. рис. 2.3-2.8.

Если график эмпирической функции распределения не согласуется ни с одним из известных распределений[22], можно в качестве предполагаемой плотности распределения выбрать любую функцию $f(x)$, обладающую свойствами плотности распределения и такую, что график ее достаточно хорошо аппроксимирует (выравнивает) верхнюю границу гистограммы. Аналогичным образом можно подобрать и гладкую функцию $F(x)$, обладающую свойствами функции распределения для выравнивания эмпирической функции распределения. При этом можно использовать так называемый метод наименьших квадратов (см., например, [2]), считая, что наилучшим приближением к эмпирической зависимости в данном классе функций является такое, при котором сумма квадратов отклонений в точках деления на разряды обращается в минимум.

[22]В этом случае можно использовать различные специальные подходы, разработанные в МС. Укажем, например, метод кривых Пирсона (см. В.И. Романовский. *Математическая статистика.* М: ОНТИ, 1939), а также метод кривых Бородачева (см. Н.А. Бородачев. *Основные вопросы теории точности производства.* М.-Л.: АН СССР, 1950).

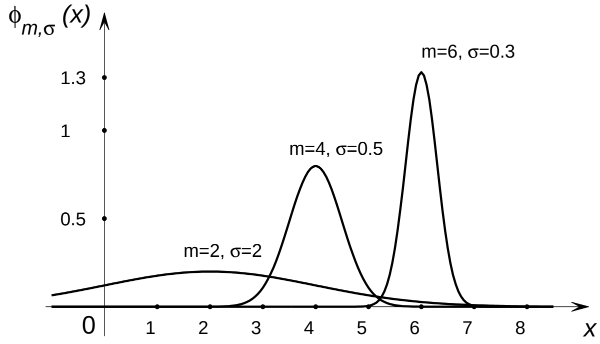


Рис. 2.7 . Плотность нормального распределения

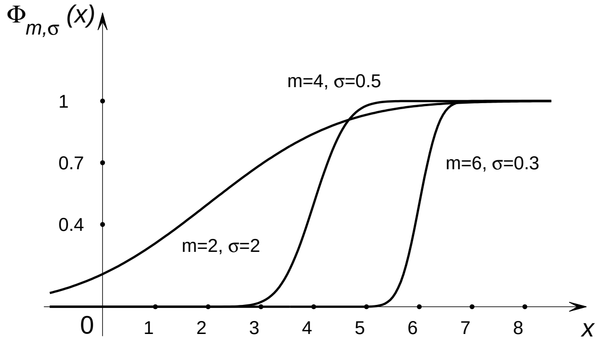


Рис. 2.8 . Функция нормального распределения

Задача 2.3. Построить выравнивающие кривые гистограммы и эмпирической функции распределения в условиях задачи 2.2.

Решение. Исходя из вида гистограммы и графика эмпирической функции распределения, мы вправе предположить, что неизвестное распределение с.в. X подчиняется нормальному закону[23] с некоторыми неизвестными параметрами $\{m = M(X); \sigma = \sqrt{D(X)}\}$. При решении предыдущей задачи было найдено, что

$$M_n(\vec{x}_n) = 3.328, \quad S_n^{(2)}(\vec{x}_n) = 1.247616.$$

Поскольку указанные выборочные моменты являются оценками математического ожидания $M(X)$ и дисперсии $D(X)$, то естественно выдвинуть гипотезу, что

$$m = 3.328, \quad \sigma = \sqrt{1.247616} \approx 1.116967323,$$

и соответственно, теоретическая плотность распределения

$$f(x) = \varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

а теоретическая функция распределения

$$F(x) = \Phi_{m,\sigma}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_{m,\sigma}(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Строя график функции $f(x) = \varphi_{m,\sigma}(x)$ при данном выборе параметров и накладывая его на гистограмму, получаем выравнивающую кривую гистограммы, см. рис. 2.9. Строя график функции $F(x) = \Phi_{m,\sigma}(x) = \Phi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)$ и накладывая его на график эмпирической функции распределения, получаем выравнивающую кривую эмпирической функции распределения, см. рис. 2.10. По поводу конкретных способов построения указанных графиков см. примечание на с. 82.

[23]Из графиков можно даже предположить, что $m \approx 3.5$, $\sigma \approx 1$.

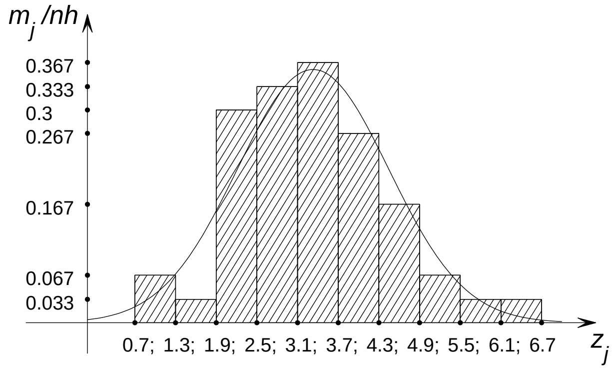


Рис. 2.9

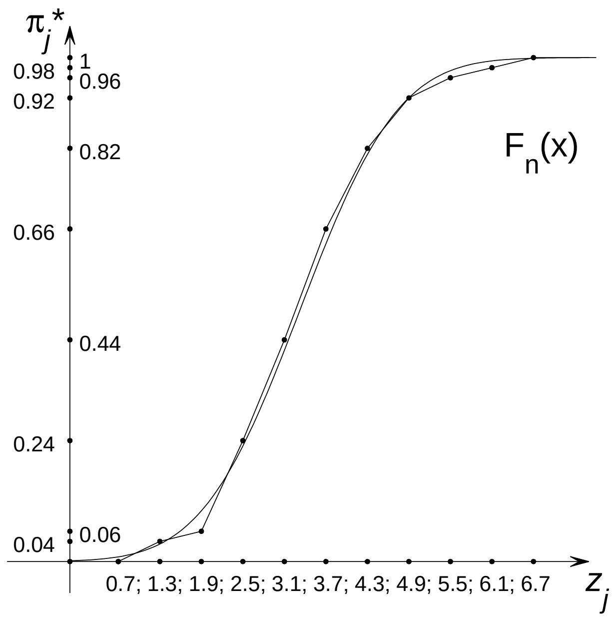


Рис. 2.10

§2.7. Понятие доверительного интервала

При решении практических задач вместо точечной оценки неизвестного параметра распределения с.в. важнее бывает знать границы, в которых этот параметр находится, тем более, что точечные оценки все равно носят приближенный характер. Иными словами, требуются *интервальные оценки* неизвестных параметров распределения. Вместе с тем, следует иметь в виду, что для определения границ интервала, содержащего, или, как говорят, накрывающего неизвестный параметр, мы располагаем лишь случайной выборкой ограниченного объема. Поэтому мы никогда не сможем стопроцентно гарантировать, что неизвестный параметр действительно попадет в этот интервал. Но мы можем гарантировать, что это произойдет с некоторой долей вероятности. Эта вероятность будет тем больше, а границы интервала тем точнее, чем больше объем выборки.

Определение 2.8. Пусть θ – неизвестный параметр распределения с.в. X (генеральной совокупности), $\vec{X}_n$ – выборка, $\alpha \in (0,1)$ – некоторое число, а $\theta_0(\vec{X}_n)$, $\theta_1(\vec{X}_n)$ – две статистики такие, что $\theta_0(\vec{X}_n) \le \theta_1(\vec{X}_n)$. Тогда интервал $\Big(\theta_0(\vec{X}_n), \theta_1(\vec{X}_n)\Big)$ называется *интервальной оценкой* параметра θ, если он содержит этот параметр с заданной вероятностью α, то есть

$$P\Big(\theta_0(\vec{X}_n) < \theta < \theta_1(\vec{X}_n)\Big) = \alpha. \qquad (2.4)$$

При этом α называется *доверительной вероятностью*, или *надежностью*, интервальной оценки. Соответственно, для любой конкретной реализации выборки $\vec{x}_n$ интервал $\Big(\theta_0(\vec{x}_n), \theta_1(\vec{x}_n)\Big)$ называется *доверительным интервалом* для параметра θ с *коэффициентом доверия* α, или коротко α-*доверительным интервалом.*

Примечания 2.12.

1. Довольно часто вместо равенства (2.4) удается обеспечить лишь неравенство

$$P\Big(\theta_0(\vec{X}_n) < \theta < \theta_1(\vec{X}_n)\Big) \geq \alpha,$$

то есть построить интервальную оценку с надежностью, не меньшей α.

2. С.в. $\theta_0(\vec{X}_n)$ называется *нижней доверительной границей*, а $\theta_1(\vec{X}_n)$ – *верхней доверительной границей* для параметра θ.

§2.8. Некоторые свойства нормального распределения

Лемма 2.1. Если X_1, X_2 – независимые с.в. с плотностями $p_1(x)$, $p_2(x)$, то плотность распределения с.в. $Y = X_1 + X_2$ вычисляется по *формуле свертки*:

$$p(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_1(x)p_2(y-x)dx.$$

Примечание 2.13. Доказательство указанной формулы можно найти, например, в [6, §6.4].

Применяя формулу свертки к нормально распределенным с.в., получаем, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.2. Если X_1, X_2 – независимые с.в., имеющие нормальное распределение с параметрами $\{m_i, \sigma_i\}$, $i = 1, 2$, то с.в. $Y = X_1 + X_2$ тоже имеет нормальное распределение с параметрами $\{m, \sigma\}$, где $m = m_1 + m_2$, $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

Лемма 2.2 легко обобщается на случай n слагаемых.

Лемма 2.3. Если $X_1, \ldots, X_n$ – независимые с.в., имеющие нормальное распределение с параметрами $\{m_i, \sigma_i\}$, $i = \overline{1, n}$, то с.в. $Y = X_1 + \ldots + X_n$ тоже имеет нормальное распределение с параметрами $\{m, \sigma\}$, где $m = m_1 + \ldots + m_n$, $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2}$.

Лемма 2.4. С.в. X подчиняется нормальному распределению с параметрами $\{m, \sigma\}$ тогда и только тогда, когда с.в. $Z = \dfrac{X - m}{\sigma}$ имеет стандартное нормальное распределение[24].

Доказательство. Предположим, с.в. X имеет нормальное распределение с параметрами $\{m, \sigma\}$. Найдем функцию распределения с.в. Z:

$$F(z) = P(Z < z) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} < z\right) = P(-\infty < X < m + z\sigma) =$$

$$= \Phi\left(\frac{m + z\sigma - m}{\sigma}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi(z).$$

В обратную сторону доказывается аналогично. Лемма доказана.

Примечание 2.14. Отсюда, в частности, видно, что если две с.в. X и Y связаны линейным образом: $Y = aX + b$, $a > 0$, то с.в. X имеет нормальное распределение тогда и только тогда, когда с.в. Y имеет нормальное распределение.

[24] См. с. 46.

Лемма 2.5.[25] Если генеральная совокупность X имеет нормальное распределение с параметрами $\{m, \sigma\}$, то выборочное среднее $M_n(\vec{X}_n)$ также имеет нормальное распределение с параметрами $\left\{m, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}$.

Доказательство. Для выборки $\vec{X}_n$ определим с.в. $Y_i = \dfrac{X_i - m}{\sigma}$, $i = \overline{1, n}$. Тогда, как известно, эти новые с.в. будут иметь стандартное нормальное распределение, то есть нормальное распределение с параметрами $\{0, 1\}$. Кроме того, очевидно, что они являются независимыми в силу независимости с.в. X_i, $i = \overline{1, n}$. Рассмотрим с.в.

$$Z = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Согласно леммам 2.3, 2.4 с.в Z имеет нормальное распределение с некоторыми параметрами $\{m_z, \sigma_z\}$. При этом по свойствам математического ожидания и дисперсии

$$m_z = M(Z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} M(Y_i) = 0,$$

$$\sigma_z^2 = D(Z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} D(Y_i) = \frac{n}{n} = 1.$$

Стало быть, с.в. Z тоже имеет стандартное нормальное распределение. При этом

$$Z = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - m}{\sigma} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - m \right) = \frac{M_n(\vec{X}_n) - m}{\sigma_n},$$

где $\sigma_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. А это по лемме 2.4 означает, что с.в. $M_n(\vec{X}_n)$ имеет нормальное распределение с параметрами $\{m, \sigma_n\}$. Лемма доказана.

§2.9. Построение доверительного интервала для математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии

Будем предполагать, что генеральная совокупность X имеет нормальное распределение с параметрами $\{m, \sigma\}$, где параметр σ (а следовательно, и дисперсия $D(X) = \sigma^2$) известен, а для параметра m требуется построить доверительный интервал с коэффициентом доверия[26] α. Воспользуемся тем, что согласно лемме 2.5 выборочное среднее $M_n(\vec{X}_n)$ имеет нормальное распределение с параметрами $\left\{m, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}$, а стало быть, по лемме 2.4 с.в. $\dfrac{M_n - m}{\sigma}\sqrt{n}$ имеет стандартное нормальное распределение, то есть

$$P\left(\frac{M_n - m}{\sigma}\sqrt{n} < x \right) = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

[25]Это утверждение известно как следствие теоремы Фишера.

[26]См. с. 74.

Тогда

$$P\left(-x < \frac{M_n - m}{\sigma}\sqrt{n} < x\right) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi_0(x) - \Phi_0(-x),$$

или, пользуясь нечетностью интеграла Лапласа $\Phi_0(x)$,

$$P\left(M_n - \frac{x\sigma}{\sqrt{n}} < m < M_n + \frac{x\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi_0(x).$$

Выбирая $x = z_\alpha$ из условия: $\Phi_0(z_\alpha) = \dfrac{\alpha}{2}$, получаем:

$$P\left(M_n - \frac{z_\alpha\sigma}{\sqrt{n}} < m < M_n + \frac{z_\alpha\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \alpha.$$

Определение 2.9. Число z_α такое, что $\Phi_0(z_\alpha) = \alpha$, называется *квантилью* [27] порядка α интеграла Лапласа $\Phi_0(x)$. Аналогично определяется квантиль для произвольной функции $F(x)$.

Вывод. Таким образом, интервал $\left(M_n(\vec{x}_n) - \dfrac{z_\alpha\sigma}{\sqrt{n}}, M_n(\vec{x}_n) + \dfrac{z_\alpha\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, где z_α – квантиль порядка $\dfrac{\alpha}{2}$ интеграла Лапласа $\Phi_0(x)$, является α-доверительным интервалом для математического ожидания $M(X) = m$ нормальной генеральной совокупности при известной дисперсии $D(X) = \sigma^2$.

Примечание 2.15. Квантиль z_α можно найти по таблице значений интеграла Лапласа (см. приложение).

§2.10. Проверка статистических гипотез. Понятие критерия и критической области

Принцип практической уверенности. Если в данном испытании вероятность[28] $P(A) \ll 1$, то при *однократном выполнении испытания* принимают на веру, что событие A не произойдет, и ведут себя так, будто событие A невозможно.

Примечания 2.16.

1. Этот принцип не может быть доказан математически, но он оправдывается всем опытом человеческой деятельности, и на практике все действуют в соответствии с ним. Например, отправляясь поездом в другой город, обычно не расчитывают погибнуть в железнодорожной катастрофе, хотя некоторая вероятность этого существует.

2. Требование однократности проведения испытания весьма существенно. Например, в условиях серии испытаний, проводимых по схеме Бернулли, даже если в отдельном испытании $P(A) = p \ll 1$, вероятность того, что событие A произойдет хотя бы один раз, равна $P(B) = 1 - q^n \to 1$ при $n \to \infty$, и таким образом, возможностью реализации события A в этой серии уже нельзя пренебрегать.

[27] От латинского слова "quantum" – "сколько". Ударение, тем не менее, следует делать на второй слог.

[28] Символ "$\ll$" означает "много меньше". В данном случае имеется в виду, что вероятность $P(A)$ очень маленькая.

3. Вопрос о том, насколько должна быть мала вероятность $P(A)$ для того, чтобы можно было полагаться на принцип практической уверенности, решается исключительно из практических соображений, и в первую очередь, исходя из масштаба последствий этого события. Например, когда речь идет о разрушении сооружений, гибели судна, авиакатастрофе и т.п., совершенно недопустимо пренебрегать событиями с вероятностью $P(A) \geq 0.001$.

Определение 2.10. *Статистической гипотезой* называется любое предположение о виде или параметрах неизвестного закона распределения.

Примечание 2.17. Проверка статистических гипотез должна проводиться всякий раз, когда необходим обоснованный вывод о преимуществах того или иного образа действий.

Определение 2.11. Гипотеза называется *простой*, если она полностью определяет теоретическую функцию распределения; в противном случае гипотеза называется *сложной*.

Пример 2.3. Гипотезы "вероятность успеха в схеме Бернулли $p = \dfrac{1}{2}$", "закон распределения с.в. нормальный с параметрами $m = 1$, $\sigma = 3$" и т.п. являются простыми; гипотезы "вероятность успеха в схеме Бернулли $p \in [0.2; 0.7]$, "закон распределения с.в. не является нормальным" – сложные.

Определение 2.12. Если характер закона распределения известен (биномиальный, нормальный и т.п.), а гипотеза представляет собой предположение о значении участвующих в этом законе параметров, то гипотеза называется *параметрической*, в противном случае – *непараметрической*.

Соглашение. Проверяемую гипотезу называют *нулевой* и обозначают H_0. Всякую гипотезу, которая ей противоречит, называют *альтернативой*, или *альтернативной гипотезой*, или *конкурирующей гипотезой*, и обозначают H_1.

Основное *правило проверки статистической гипотезы* состоит в следующем. По выборке $X_1, \ldots, X_n$ составляется некоторая выборочная характеристика $\theta(x_1, \ldots, x_n)$, точное или приближенное распределение которой известно. Затем по этому распределению определяют *критическое значение* θ^* из условия: $P\Big(\theta \geq \theta^* | H_0\Big) = \alpha \ll 1$. После этого в соответствии с принципом практической уверенности событие "$\theta \geq \theta^*$" при условии истинности гипотезы H_0 можно считать практически невозможным. Поэтому если в опыте оказывается, что $\theta \geq \theta^*$, то гипотеза H_0 отвергается, в противном случае принимается (до следующего опыта).

Определение 2.13. Всякое конкретное правило, по которому H_0 отвергается или принимается, называется *статистическим критерием*. При этом указанная выше характеристика θ называется *статистикой критерия*.

Примечание 2.18. Множество возможных значений случайной выборки $\vec{X}_n$ называют *выборочным пространством*. Таким образом, если задана статистика критерия θ, то все выборочное пространство разбивается на два непересекающихся множества:

$$W = \left\{\vec{x}_n \;\middle|\; \theta(\vec{x}_n) \geq \theta^*\right\}, \quad \overline{W} = \left\{\vec{x}_n \;\middle|\; \theta(\vec{x}_n) < \theta^*\right\}.$$

Определение 2.14. Множество W называется *критической областью*[29] (данного критерия), а $\overline{W}$ – *областью допустимых значений*.

[29]Мы определили ее как *правостороннюю критическую область*. Аналогично определяется понятие *левосторонней* и *двусторонней критической области*.

Примечание 2.19. Мы рассмотрели способ задания критерия с помощью статистики. На самом деле критическая область может, вообще говоря, иметь произвольный вид. При этом, если указан способ построения критической области W, то тем самым определен соответствующий ей статистический критерий, который определяется следующим правилом. Если очередная реализация выборки $\vec{x}_n \in W$, то гипотеза H_0 отвергается, в противном случае принимается (до следующего опыта).

Ошибки первого и второго рода

Определение 2.15. Отлонение H_0 в случае, когда она верна, называется *ошибкой первого рода*; принятие H_0 в случае, когда она неверна (принятие ложной гипотезы), называется *ошибкой второго рода*.

Определение 2.16. Вероятность α ошибки первого рода, то есть вероятность отвергнуть истинную гипотезу, называется *уровнем значимости критерия*. Вероятность $(1-\beta)$ не допустить ошибку второго рода, то есть отвергнуть ложную гипотезу (здесь β – это вероятность принять ложную гипотезу), называется *мощностью*, или *функцией мощности* критерия.

Примечание 2.20. Очевидно, следует стремиться к тому, чтобы сделать сколь угодно малыми и α, и β. Но это противоречивые требования. При фиксированном объеме выборки можно уменьшить либо то, либо другое. Поэтому желательно, чтобы по крайней мере было $\alpha + \beta \leq 1$, то есть $1 - \beta \geq \alpha$.

Определение 2.17. Критерий называется *несмещенным*, если его мощность не меньше уровня значимости, то есть $1 - \beta \geq \alpha$. Критерий называется *состоятельным*, если при заданном уровне значимости α его мощность $1 - \beta \to 1$ при $n \to \infty$.

Примечание 2.21. Таким образом, состоятельность критерия означает, что ложная гипотеза отвергается практически достоверно. Из стремления к состоятельности критерия получаем следующее требование к критической области:

$$P\Big\{\vec{x}_n \in W|H_1\Big\} \to \max \quad \text{при ограничении} \quad P\Big\{\vec{x}_n \in W|H_0\Big\} = \alpha \ll 1.$$

Критерии согласия

Далее мы рассмотрим критерии только одного типа – так называемые критерии согласия, которые позволяют принимать или отвергать гипотезы о виде неизвестного закона распределения.

Определение 2.18. *Критериями согласия* называются статистические критерии, позволяющие обнаружить расхождения между предполагаемым законом распределения и результатами наблюдений.

Сделать вывод о согласии предполагаемого закона распределения с экспериментальными данными на основе информации о наблюденных частотах позволяют, например, следующие далее критерии Колмогорова и Пирсона (его еще называют *критерием* χ^2, или *критерием* χ^2 *Пирсона*).

§2.11. Критерий Колмогорова

Пусть $\vec{X}_n$ – случайная выборка объема n из непрерывно распределенной генеральной совокупности X. Рассмотрим задачу проверки простой статистической гипотезы H_0 о том, что неизвестная функция распределения $F(x)$ с.в. X совпадает с данной функцией $F_0(x)$, обладающей свойствами непрерывной функции распределения, то есть

$$H_0 = \Big\{F(x) = F_0(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}\Big\}.$$

В качестве альтернативной гипотезы примем ее отрицание

$$H_1 = \Big\{ \exists x \in \mathbf{R}: \quad F(x) \neq F_0(x) \Big\}.$$

Пусть $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения. Статистика Колмогорова определяется следующим образом:

$$\theta_K(\vec{x}_n) = \sup_{x \in \mathbf{R}} \Big| F_n(x) - F_0(x) \Big|.$$

Примечание 2.22. Согласно теореме Гливенко при условии истинности гипотезы H_0 статистика $\theta_K(\vec{x}_n) \to 0$ при $n \to \infty$ с вероятностью 1. В противном случае с вероятностью 1 $\theta_K(\vec{x}_n) \to \sup_{x \in \mathbf{R}} \Big| F(x) - F_0(x) \Big| > 0$. Таким образом, если $\theta_K(\vec{x}_n)$ приняла достаточно большое значение, то гипотезу H_0 естественно отклонить в пользу гипотезы H_1. Если же статистика $\theta_K(\vec{x}_n)$ приняла достаточно малое значение, то H_0 следует принять. Критическое значение (обозначим его c_α) на уровне значимости α в соответствии с определением уровня значимости будет определяться из условия

$$P\Big\{ \theta_K(\vec{X}_n) \geq c_\alpha | H_0 \Big\} = \alpha, \quad \text{или} \quad P\Big\{ \theta_K(\vec{X}_n) < c_\alpha | H_0 \Big\} = 1 - \alpha.$$

Отсюда получаем следующий критерий.

Критерий Колмогорова на заданном уровне значимости α. Пусть $K_{n,1-\alpha}$ – квантиль порядка $1-\alpha$ распределения с.в. $\theta_k(\vec{X}_n)$. Тогда при условии $\theta_K(\vec{x}_n) \geq K_{n,1-\alpha}$ гипотеза H_0 отклоняется, в противном случае принимается (до следующего опыта).

Примечание 2.23. Оказывается, при истинности гипотезы H_0 распределение с.в. $\theta_K(\vec{X}_n)$ не зависит от функции $F_0(x)$ (хотя зависит от объема выборки n). Поэтому достаточно составить таблицы распределения $\theta_K(\vec{X}_n)$ только для случайной выборки $\vec{X}_n$ из генеральной совокупности X с равномерным законом распределения. Для $n \leq 100$ такие таблицы существуют. Однако при $n \geq 20$ можно действовать иначе, основываясь на следующих далее асимптотических свойствах $\theta_K(\vec{X}_n)$.

Определим так называемую *функцию распределения Колмогорова*

$$\mathcal{K}(z) = \begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \exp\{-2k^2 z^2\}, & \text{при } z > 0, \\ 0, & \text{при } z \leq 0. \end{cases}$$

Теорема Колмогорова.[30] Если функция распределения $F_0(x)$ непрерывна, то $\forall z \in \mathbf{R}$ вероятность

$$P\Big\{ \sqrt{n}\,\theta_K(\vec{X}_n) < z \Big\} \to \mathcal{K}(z) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Без доказательства.

Примечание 2.24. Таким образом, если n достаточно велико, то

$$K_{n,1-\alpha} \approx \frac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}},$$

[30] См. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1992. - 304 с.*.

где $z_{1-\alpha}$ – квантиль порядка $1-\alpha$ функции $\mathcal{K}(z)$, то есть $\mathcal{K}(z_{1-\alpha}) = 1-\alpha$. Как показывает практика, данным приближением можно пользоваться уже при $n \geq 20$. Для функции распределения Колмогорова существует таблица (см. приложение), которой обычно и пользуются на практике. Это связано с тем, что таблица распределения Колмогорова намного компактнее, чем таблица распределения $\theta_K(\vec{X}_n)$, поскольку во второй, в отличие от первой, присутствует зависимость от n.

Пример 2.4. В условиях задачи 2.2 проверим с помощью критерия Колмогорова на уровне значимости $\alpha = 0.02$ гипотезу о том, что с.в. X подчиняется нормальному распределению с параметрами $m = 3.328$, $\sigma = 1.116967$. Из сравнения графика эмипирической функции распределения и выравнивающей ее кривой, см. рис. 2.10, видим, что максимум отклонения между ними достигается в точке $x = 1.9$. Таким образом, статистика Колмогорова

$$\theta_K(\vec{x}_n) = \Big|F_n(1.9) - \Phi_{m,\sigma}(1.9)\Big| = \left|F_n(1.9) - \Phi\left(\frac{1.9-m}{\sigma}\right)\right|.$$

Находим

$$\Phi\left(\frac{1.9-m}{\sigma}\right) = 0.5 + \Phi_0\left(\frac{1.9-m}{\sigma}\right) = 0.5 + \Phi_0\left(\frac{1.9-3.328}{1.116967}\right) =$$
$$= 0.5 - \Phi_0(1.28) = 0.5 - 0.39973 = 0.10027, \quad F_n(1.9) \approx 0.06.$$

Таким образом, $\theta_K(\vec{x}_n) = \Big|0.06 - 0.10027\Big| = 0.04027$. Найдем критическое значение статистики Колмогорова на уровне значимости $\alpha = 0.02$:

$$c_\alpha = K_{n,1-\alpha} = K_{50,0.98} \approx \frac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} = \frac{z_{0.98}}{\sqrt{50}} \approx \frac{z_{0.98}}{7.071068}.$$

По таблице значений функции Колмогорова (см. приложение) находим $z_{0.98}$ из условия $K(z_{0.98}) = 0.98$, откуда $z_{0.98} = 1.51$. Стало быть,

$$c_\alpha \approx \frac{1.51}{7.071068} \approx 0.2135.$$

Поскольку

$$\theta_K(\vec{x}_n) = 0.04027 < 0.2135 = c_\alpha,$$

заключаем, что выдвинутая нами гипотеза не противоречит опытным данным, и стало быть, принимается (до следующего опыта).

Примечание 2.25. Заметим, что значения эмпирической функции распределения $F_n(x)$ в точках, являющихся внутренними точками разрядов, выбирались нами по сути дела произвольным образом (все зависело только от способа интерполяции). Поэтому при вычислении статистики Колмогорова можно ограничиться вычислением значений отклонения $F_n(x)$ от $F_0(x)$ лишь в граничных точках разрядов, то есть считать, что[31]

$$\theta_K(\vec{x}_n) = \theta'_K(\vec{x}_n) = \max_{j=\overline{0,m}} \delta_j, \quad \delta_j = \Big|F_n(z_j) - F_0(z_j)\Big|.$$

[31] $\theta'_K(\vec{x}_n)$ – это на самом деле нижняя оценка статистики Колмогорова. Использование ее, вообще говоря, сужает критическую область и соответственно, уменьшает строгость критерия. Чтобы получить верхнюю оценку, и тем самым, возможно, расширить критическую область, увеличив строгость критерия, мы должны рассмотреть наиболее неблагоприятные способы интерполяции, при которых $F_n(x)$ принимается постоянной на некотором интервале, содержащемся внутри разряда и достаточно мало отличающемся от него. Тогда максимум отклонения на данном разряде Δ_j можно оценить сверху через $\max\{\delta_j, \beta_j, \gamma_j\}$, где $\beta_j = F_0(z_j) - F_n(z_{j-1})$, $\gamma_j = F_n(z_j) - F_0(z_{j-1})$, и верхняя оценка статистики Колмогорова принимает вид: $\theta''_K(\vec{x}_n) = \max_{j=\overline{1,m}} \max\{\delta_0, \delta_j, \beta_j, \gamma_j\}$. При этом $\theta'_K(\vec{x}_n) \leq \theta_K(\vec{x}_n) \leq \theta''_K(\vec{x}_n)$.

Для приведенного выше примера имеем:

j	z_j	$\frac{z_j-m}{\sigma}$	$\Phi_0\left(\frac{z_j-m}{\sigma}\right)$	$\Phi_{m,\sigma}(z_j)=0.5+\Phi_0(\ldots)$	$F_n(z_j)$	δ_j
0	0.7	−2.35	−0.49061	0.00939	0.00	0.00939
1	1.3	−1.82	−0.46562	0.03438	0.04	0.00562
2	1.9	−1.28	−0.39973	0.10027	0.06	0.04027
3	2.5	−0.74	−0.27035	0.22965	0.24	0.01035
4	3.1	−0.20	−0.07926	0.42074	0.44	0.01926
5	3.7	0.33	0.12930	0.62930	0.66	0.03070
6	4.3	0.87	0.30785	0.80785	0.82	0.01215
7	4.9	1.41	0.42073	0.92073	0.92	0.00073
8	5.5	1.94	0.47381	0.97381	0.96	0.01381
9	6.1	2.48	0.49343	0.99343	0.98	0.01343
10	6.7	3.02	0.49874	0.99874	1.00	0.00126

Таким образом,

$$\theta'_K(\vec{x}_n) = \max\Big\{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{10}\Big\} = \delta_2 = 0.04027.$$

Отметим, что полученные выше значения $\Phi_{m,\sigma}(x)$ в граничных точках разрядов можно использовать для построения графика этой функции "по точкам", то есть для построения выравнивающей кривой эмпирической функции распределения. Выравнивающую кривую гистограммы можно строить аналогичным образом. Более качественный способ построения этих кривых – использование, например, системы MATLAB.

§2.12. Распределение Пирсона (χ^2-распределение)

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые с.в., имеющие стандартное нормальное распределение. Тогда распределение с.в. $X = \chi^2_n$, где $\chi^2_n = X_1^2 + \ldots + X_n^2$, называется *распределением Пирсона с n степенями свободы*, или *распределением χ^2 (хи-квадрат) с n степенями свободы*.

Это распределение используется в следующем далее критерии Пирсона.

§2.13. Критерий согласия Пирсона

При использовании критерия Колмогорова предполагалось, что генеральная совокупность X имеет непрерывное распределение. Пусть теперь X – дискретная с.в., принимающая значения $u_1, \ldots, u_r$ с вероятностями $P\Big\{X = u_k\Big\} = p_k > 0$, $k = \overline{1,r}$, $\sum\limits_{k=1}^{r} p_k = 1$. Предположим, что для конкретной реализации выборки $\vec{x}_n$ частота n_k равна $n_k(\vec{x}_n)$, $k = \overline{1,r}$. Обозначим

$$\Delta_n(\vec{x}_n) = \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k(\vec{x}_n) - np_k)^2}{np_k}.$$

Рассмотрим задачу проверки простой гипотезы

$$H_0 = \Big\{p_k = p_k^0, \quad k = \overline{1,r}\Big\}$$

против альтернативной гипотезы

$$H_1 = \Big\{\exists k \in \overline{1,r}: \quad p_k \neq p_k^0\Big\}.$$

Для предполагаемого закона распределения обозначим соответственно

$$\Delta_n^0(\vec{x}_n) = \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k(\vec{x}_n) - np_k^0)^2}{np_k^0}.$$

Примечание 2.26. Если гипотеза H_0 верна, то в соответствии с частотной интерпретацией вероятности[32]

$$\frac{n_k(\vec{X}_n)}{n} \to p_k^0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad k = \overline{1,r}.$$

Поэтому естественно ожидать, что величина $\Delta_n^0(\vec{x}_n)$ будет достаточно мала. Таким образом, если она оказалась достаточно велика, то гипотезу H_0 следует отклонить. В противном случае можно сделать вывод о том, что гипотеза H_0 не противоречит опытным данным (согласуется с ними). Критическое значение (обозначим его c_α) на уровне значимости α в соответствии с определением уровня значимости будет определяться из условия

$$P\Big\{\Delta_n^0(\vec{X}_n) \geq c_\alpha | H_0\Big\} = \alpha.$$

Проверить это условие непосредственно затруднительно. Но можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема Пирсона.[33] Пусть $\mathcal{P}_{r-1}(x)$ – функция распределения Пирсона с $r-1$ степенью свободы. Тогда

$$\sup_{x\in(0,+\infty)} \Big| P\Big\{\Delta_n(\vec{X}_n) < x\Big\} - \mathcal{P}_{r-1}(x)\Big| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Примечание 2.27. В соответствии с теоремой Пирсона (при достаточно большом n)

$$1 - \alpha = P\Big\{\Delta_n^0(\vec{X}_n) < c_\alpha | H_0\Big\} \approx P\Big\{\chi^2_{r-1} < c_\alpha\Big\} = \mathcal{P}_{r-1}(c_\alpha).$$

Таким образом, c_α приближенно можно найти из условия $\mathcal{P}_{r-1}(c_\alpha) = 1-\alpha$, то есть считать, что $c_\alpha \approx \chi^2_{r-1,1-\alpha}$ – квантиль порядка $1-\alpha$ распределения Пирсона с $r-1$ степенью свободы. Отсюда мы и получаем следующий критерий.

Критерий χ^2 Пирсона при заданном уровне значимости α. Пусть $\chi^2_{r-1,1-\alpha}$ – квантиль порядка $1-\alpha$ распределения Пирсона с $r-1$ степенью свободы. Тогда при условии $\Delta_n^0(\vec{x}_n) \geq \chi^2_{r-1,1-\alpha}$ гипотеза H_0 отклоняется, в противном случае принимается (до следующего опыта).

Примечание 2.28. При малом объеме выборки n и малых np_k, $k = \overline{1,r}$, *пользоваться критерием Пирсона нельзя*! Практически это означает, что при $r < 20$ применение критерия Пирсона возможно лишь в том случае, когда $np_k \geq 10$, $k = \overline{1,r}$. Если же $r \geq 20$, достаточно, чтобы $np_k \geq 5$, $k = \overline{1,r}$.

Для того, чтобы применить критерий Пирсона в случае, когда генеральная совокупность X непрерывна с плотностью распределения $p(t)$, можно поступить следующим образом. Пусть E – множество значений с.в. X. Разобъем

[32] В соответствии с так называемым законом больших чисел это стремление имеет место как стремление в среднеквадратичном, по вероятности и почти наверное.

[33] См. *Крамер Г. Математические методы статистики. - М.: Мир, 1975. - 648 с..*

его на непересекающиеся множества $E_1, \ldots, E_r$. Определим дискретную с.в. $Y = \Big\{k,$ если $X \in E_k$, $k = \overline{1, r}\Big\}$. Тогда

$$P\Big\{Y = k\Big\} = p_k = \int\limits_{E_k} p(t)dt, \quad k = \overline{1, r}.$$

Если $p_0(t)$ – предполагаемая плотность распределения, то соответственно принимаем $p_k^0 = \int\limits_{E_k} p_0(t)dt$, $k = \overline{1, r}$. После этого можно использовать критерий Пирсона. Если построена группировка, то в качестве множеств E_k при $r = m$ удобно выбрать разряды Δ_k, расширив крайние разряды Δ_0 и Δ_m до левой и правой границы множества значений E. При этом вместо частот $n_k(\vec{x}_n)$ следует использовать частоты разрядов m_k, $k = \overline{1, m}$.

Аналогичным образом поступают и в том случае, когда X – дискретная с.в., но принимающая счетное множество значений с положительными вероятностями.

Пример 2.5. Пусть выборка $\vec{x}_{1000}$ из дискретной генеральной совокупности X имеет статистическое распределение вида

x_j^*	0	1	2	3	≥ 4
n_j	343	372	201	68	16

Проверим на уровне значимости $\alpha = 0.05$ гипотезу H_0 о том, что с.в. X имеет распределение Пуассона

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

с параметром $\lambda = 1$. Предполагая истинность основной гипотезы H_0, по таблице распределения Пуассона (см. приложение) находим

$$p_1^0 = P\{X = 0\} = 0.368, \quad p_2^0 = P\{X = 1\} = 0.368,$$

$$p_3^0 = P\{X = 2\} = 0.184, \quad p_4^0 = P\{X = 3\} = 0.061,$$

$$p_5^0 = P\{X \geq 4\} = 1 - p_1^0 - \ldots - p_4^0 = 0.013.$$

Рассмотрим с.в. Y, принимающую только пять различных значений $0, \ldots, 4$ с вероятностями $p_1^0, \ldots, p_5^0$. Для $r = 5$, $n = 1000$ получаем

$$\Delta_n^0(\vec{y}_n) = \sum_{k=1}^{5} \frac{(n_k - 1000 \cdot p_k^0)^2}{1000 \cdot p_k^0} = 4.58.$$

По таблице распределения Пирсона находим $\chi^2_{r-1,1-\alpha} = \chi^2_{4,0.95} = 9.49$. Так как $4.58 < 9.49$, то в соответствии с критерием Пирсона делаем вывод, что гипотеза H_0 не противоречит результатам наблюдений, и стало быть, принимается до следующего опыта.

ПРИЛОЖЕНИЕ
Таблицы распределений
1. *Приближенные значения распределения Пуассона*

$$P(m;\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},$$

домноженные на 10^5.

Таблица 1, *а*

m	λ									
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	90484	81873	74082	67032	60653	54881	49659	44933	40657	36788
1	09048	16375	22225	26813	30327	32929	34761	35946	36591	36788
2	00452	01637	03334	05363	07582	09879	12166	14379	16466	18394
3	00015	00109	00333	00715	01264	01976	02839	03834	04940	06131
4		00005	00025	00072	00158	00296	00497	00767	01111	01533
5			00002	00006	00016	00036	00070	00123	00200	00307
6					00001	00004	00008	00016	00030	00051
7							00001	00002	00004	00007
8										00001

Таблица 1, *б*

m	λ									
	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0
0	22313	13534	08208	04979	03020	01832	01111	00674	00409	00248
1	33470	27067	20521	14936	10569	07326	04999	03369	02248	01487
2	25102	27067	25652	22404	18496	14653	11248	08422	06181	04462
3	12551	18045	21376	22404	21579	19537	16872	14037	11332	08924
4	04707	09022	13360	16803	18881	19537	18981	17547	15582	13385
5	01412	03609	06680	10082	13217	15629	17083	17547	17140	16062
6	00353	01203	02783	05041	07710	10420	12812	14622	15712	16062
7	00076	00344	00994	02160	03855	05954	08236	10444	12345	13768
8	00014	00086	00311	00810	01687	02977	04633	06528	08487	10326
9	00002	00019	00086	00270	00656	01323	02316	03627	05187	06884
10		00004	00022	00081	00230	00529	01042	01813	02853	04130
11		00001	00005	00022	00073	00192	00426	00824	01426	02253
12			00001	00006	00021	00064	00160	00343	00654	01126
13				00001	00006	00020	00055	00132	00277	00520
14					00001	00006	00018	00047	00109	00223
15						00002	00005	00016	00040	00089
16							00002	00005	00014	00033
17								00001	00004	00012
18									00001	00004
19										00001

2. *Приближенные значения интеграла Лапласа*

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt,$$

домноженные на 10^5.

Таблица 2

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0.1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06750	07142	07535
0.2	07926	08317	08706	09095	09484	09871	10257	10642	11026	11409
0.3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0.4	15542	15910	16276	16640	17003	17365	17724	18082	18439	18793
0.5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22241
0.6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0.7	25804	26115	26424	26731	27035	27337	27637	27935	28231	28524
0.8	28815	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0.9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1.0	34135	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1.1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1.2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40148
1.3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1.4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1.5	43319	43448	43575	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1.6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1.7	45544	45637	45728	45819	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1.8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1.9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47671
2.0	47725	47778	47831	47882	47933	47982	48030	48077	48124	48169
2.1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2.2	48610	48645	48679	48713	48746	48778	48809	48840	48870	48899
2.3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2.4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2.5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2.6	49534	49547	49560	49573	49586	49598	49609	49621	49632	49643
2.7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49737
2.8	49745	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2.9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3.0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900

Окончание табл. 2

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.1	49903	49907	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3.2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3.3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3.4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3.5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49982	49982	49983	49984
3.6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3.7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49993
3.8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3.9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997

Примечания: 1. $\Phi_0(x)$ – нечетная функция, то есть

$$\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x).$$

2. Значения функции стандартного нормального распределения $\Phi(x)$ определяются по формуле

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x).$$

3. *Приближенные значения плотности стандартного нормального распределения (функции Гаусса)*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad ,$$

домноженные на 10^5.

Таблица 3

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	39894	39892	39886	39876	39862	39844	39823	39797	39767	39733
0.1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0.2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38252
0.3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0.4	36827	36678	36526	36371	36214	36053	35889	35723	35553	35381
0.5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0.6	33323	33122	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0.7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29660	29431	29200
0.8	28969	28737	28504	28269	28034	27799	27562	27324	27086	26848
0.9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1.0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1.2	19419	19186	18954	18723	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1.3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15823	15608	15395	15183
1.4	14973	14764	14556	14351	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1.5	12952	12758	12567	12376	12188	12001	11816	11632	11451	11270
1.6	11092	10916	10741	10568	10396	10227	10059	09893	09728	09566
1.7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1.8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1.9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2.0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2.1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2.2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02966	02898
2.3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2.4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2.5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2.6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2.7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2.8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2.9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00471	00457
3.0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3.1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3.2	00238	00231	00224	00217	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3.3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00128
3.4	00123	00119	00115	00111	00108	00104	00100	00097	00094	00090
3.5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3.6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3.7	00043	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00032	00030
3.8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00022	00021
3.9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00015	00014
4.0	00013	00013	00012	00012	00011	00011	00011	00010	00010	00009

4. *Приближенные значения квантилей $\chi^2_{n,\alpha}$ порядка α для распределения Пирсона с n степенями свободы*

$$\mathcal{P}_n(x) = \int_0^x \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} t^{(n-2)/2} \exp(-t/2)dt.$$

Таблица 4

n	α														
	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.2	0.3	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
1	$3.9E-5$	0.0002	0.001	0.004	0.02	0.1	0.1	1.1	1.6	2.7	3.8	5.0	6.6	7.9	10.8
2	0.010	0.02	0.051	0.10	0.21	0.45	0.71	2.41	3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82
3	0.072	0.11	0.22	0.35	0.58	1.01	1.42	3.66	4.64	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	1.65	2.19	4.88	5.99	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	2.34	3.00	6.06	7.29	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	3.07	3.83	7.23	8.56	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	3.82	4.67	8.38	9.80	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	4.59	5.53	9.52	11.03	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.38	6.39	10.66	12.24	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.18	7.27	11.78	13.44	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	6.99	8.15	12.90	14.63	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	7.81	9.03	14.01	15.81	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	8.63	9.93	15.12	16.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	9.47	10.82	16.22	18.15	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	10.31	11.72	17.32	19.31	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.15	12.62	18.42	20.47	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.00	13.53	19.51	21.61	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	12.86	14.44	20.60	22.76	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	13.72	15.35	21.69	23.90	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	14.58	16.27	22.77	25.04	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31

Окончание табл. 4

n	α														
	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.2	0.3	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	15.44	17.18	23.86	26.17	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	16.31	18.10	24.94	27.30	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	17.19	19.02	26.02	28.43	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	18.06	19.94	27.10	29.55	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	18.94	20.87	28.17	30.68	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	19.82	21.79	29.25	31.79	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	20.70	22.72	30.32	32.91	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	21.59	23.65	31.39	34.03	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	22.48	24.58	32.46	35.14	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	23.36	25.51	33.53	36.25	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70
35	17.19	18.51	20.57	22.47	24.80	27.84	30.18	38.86	41.78	46.06	49.80	53.20	57.34	60.27	66.62
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	32.34	34.87	44.16	47.27	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40
45	24.31	25.90	28.37	30.61	33.35	36.88	39.58	49.45	52.73	57.51	61.66	65.41	69.96	73.17	80.08
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	41.45	44.31	54.72	58.16	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66
75	47.21	49.48	52.94	56.05	59.79	64.55	68.13	80.91	85.07	91.06	96.22	100.84	106.39	110.29	118.60
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	87.95	92.13	106.91	111.67	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17	149.45

Примечание: $\Gamma(x)$ - это гамма-функция, которая, как известно, определяется формулой

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

и обладает свойствами ($\forall n \in \mathbf{N}$):

$$\Gamma(n+1) = n!; \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) 2^{-n} \sqrt{\pi}.$$

5. *Приближенные значения функции распределения Колмогорова*

$$\mathcal{K}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \exp(-2k^2x^2) \quad ,$$

домноженные на 10^5.

Таблица 5

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.2	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000
0.3	00001	00002	00005	00009	00017	00030	00051	00083	00129	00193
0.4	00281	00397	00548	00738	00973	01259	01600	02002	02468	03002
0.5	03605	04281	05031	05853	06750	07718	08758	09866	11040	12276
0.6	13573	14923	16323	17775	19268	20799	22364	23958	25578	27219
0.7	28877	30547	32227	33911	35598	37283	38964	40637	42300	43951
0.8	45586	47204	48803	50381	51937	53468	54974	56455	57907	59332
0.9	60727	62093	63429	64734	66008	67252	68464	69645	70794	71913
1.0	73000	74057	75083	76078	77043	77979	78886	79764	80613	81434
1.1	82228	82995	83736	84450	85139	85804	86444	87061	87655	88226
1.2	88775	89303	89810	90297	90765	91213	91643	92056	92451	92829
1.3	93191	93537	93868	94185	94487	94776	95051	95314	95565	95804
1.4	96032	96249	96455	96652	96838	97016	97185	97345	97479	97641
1.5	97778	97908	98031	98148	98258	98362	98461	98554	98643	98726
1.6	98805	98879	98949	99015	99078	99136	99192	99244	99293	99339
1.7	99383	99423	99461	99497	99531	99563	99592	99620	99646	99670
1.8	99693	99715	99735	99753	99771	99787	99802	99815	99830	99842
1.9	99854	99864	99874	99884	99892	99900	99908	99915	99921	99927
2.0	99933	99938	99943	99947	99952	99955	99959	99962	99965	99968
2.1	99971	99972	99975	99977	99979	99981	99982	99984	99985	99986
2.2	99987	99989	99990	99990	99991	99992	99993	99993	99994	99994
2.3	99995	99995	99996	99996	99997	99997	99997	99997	99998	99998
2.4	99998	99998	99998	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999
2.5	99999	99999	99999	99999	99999	10^5	10^5	10^5	10^5	10^5

6. ***Приближенные значения квантилей*** $t_{n,\alpha}$ ***порядка*** $(1+\alpha)/2$ ***для распределения Стьюдента с*** n ***степенями свободы***

$$S_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} dt.$$

Таблица 6

n	α									
	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
1	0.727	1.000	1.376	1.963	3.080	6.310	12.71	31.80	63.70	63.70
2	0.617	0.816	1.061	1.336	1.886	2.920	4.300	6.960	9.920	31.60
3	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.350	3.180	4.540	5.840	12.94
4	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.130	2.770	3.750	4.600	8.610
5	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.020	2.570	3.360	4.030	6.860
6	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.450	3.140	4.710	5.960
7	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.360	3.000	3.500	5.400
8	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.310	2.900	3.360	5.040
9	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.260	2.820	3.250	4.780
10	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.230	2.760	3.170	4.590
11	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.200	2.720	3.110	4.490
12	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.180	2.680	3.060	4.320
13	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.010	4.220
14	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.140	2.620	2.980	4.140
15	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.130	2.600	2.950	4.070
16	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.580	2.920	4.020
17	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.570	2.900	3.960
18	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.100	2.550	2.880	3.920
19	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.090	2.540	2.860	3.880
20	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.090	2.530	2.840	3.850
21	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.520	2.830	3.820
22	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.070	2.510	2.820	3.790
23	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.070	2.500	2.810	3.770
24	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.060	2.490	2.800	3.740
25	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.480	2.790	3.720
26	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.060	2.480	2.780	3.710
27	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.050	2.470	2.770	3.690
28	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.050	2.470	2.760	3.670
29	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.040	2.460	2.760	3.660
30	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.040	2.460	2.750	3.650
40	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.020	2.420	2.700	3.550
60	0.527	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.360	2.620	3.370
∞	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.330	2.580	3.290

Примечание. Приводимый далее глоссарий можно использовать для самоконтроля: попробуйте вспомнить, как определяется каждое из перечисленных ниже понятий. Если забыли, откройте указанную рядом страницу.

ГЛОССАРИЙ

Теория множеств

Комбинаторика

Теория вероятностей

Математическая статистика

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бородин, А.Н.** Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики / А.Н. Бородин - СПб.: Лань, 1999. – 224 с.

2. **Вентцель, Е.С.** Теория вероятностей / Е.С. Вентцель - М.: Высшая школа, 2001. – 575 с.

3. **Вентцель, Е.С.**, **Овчаров, Л.А.** Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров - М.: Высшая школа, 2000. – 366 с.

4. **Виленкин, Н.Я.** Комбинаторика / Н.Я. Виленкин - М.: Наука, 1969. – 328 с.

5. **Гмурман, В.Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман - М.: Высшая школа, 2000. – 400 с.

6. **Печинкин, А.В.**, **Тескин, О.И.** и др. Теория вероятностей / А.В. Печинкин, О.И. Тескин и др. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999. – 456 с.

7. **Пугачев, В.С.** Теория вероятностей и математическая статистика / В.С. Пугачев - М.: Наука, 1979. – 496 с.

8. **Чистяков, В.П.** Курс теории вероятностей / В.П. Чистяков - М.: Агар, 2000. – 256 с.

9. Примеры решения задач по теории вероятностей и математической статистике: Методическая разработка / Сост.: **А.В.Чернов**; НГТУ. Нижний Новгород, 2004. – 40 с.

10. Сборник задач по математике для втузов, Ч.3. Теория вероятностей и математическая статистика. Под ред. **А.В.Ефимова**. - М.: Наука, 1990. – 428 с.

11. Высшая математика: контрольные работы 7, 8, 9 для студентов-заочников/Сост.: **В.И.Голинько, И.В.Кольчик, Р.Е.Мазова, Н.В.Полухин, Г.В.Потемин, И.П.Рязанцева**; НГТУ. Н.Новгород, 2003. – 39 с.