ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

КОМПЛЕКС УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Часть 4

Том 3

Под редакцией А.В. Чернова

Рекомендовано Ученым советом Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева в качестве учебно-методического пособия для студентов заочной и дистанционной форм обучения по всем техническим специальностям

Нижний Новгород 2007

УДК 517

Авторы: В.И. Голинько, И.В. Кольчик, Р.Е. Мазова, Н.В. Полухин, Г.В. Потемин, И.П. Рязанцева, А.В. Чернов

Высшая математика: комплекс учебно-методических материалов: ч.4, т.3 / под ред. А.В. Чернова; Нижегород. гос. техн. ун-т. Нижний Новгород, 2007.-91 с.

Приводятся сопутствующие методические материалы к четвертой части комплекса учебно-методических материалов по курсу высшей математики: контрольные работы 7, 8, 9 со ссылками на образцы решения задач в предыдущих двух томах указанной части, правила выполнения контрольных работ, вопросы для подготовки к экзамену. Формулируются принципы построения комплекса. Даются некоторые дополнения к основному теоретическому курсу (гиперболические функции, понятие собственных чисел и собственных векторов вещественной симметричной матрицы, элементы теории квадратичных форм, используемые для приведения кривых второго порядка к каноническому виду, оператор Гамильтона), полезные в приложениях математики. Дается краткий обзор истории математики и биографический указатель фамилий математиков, упоминавшихся в тексте.

Предназначается для студентов всех технических специальностей заочной и дистанционной форм обучения.

Редактор – О.В.Пугина

Подписано к печати 20.12.2007. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ.л. 5.75. Уч.-изд.л. 5.5. Тираж 500 экз. Заказ .

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева.
Типография НГТУ.
Адрес университета и полиграфического предприятия:
603950, ГСП-41, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

[1]Комплекса учебно-методических материалов.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Данное пособие представляет собой дополнительный, третий том четвертой части курса высшей математики в рамках комплекса учебно-методических материалов для студентов заочной и дистанционной форм обучения и содержит добавления, приложения и комментарии (не только к четвертой части, но и к предыдущим), а именно, следующие разделы:

1. Контрольные работы 7, 8, 9.
2. Правила выполнения контрольных работ.
3. Вопросы к экзамену.
4. Принципы организации комплекса учебно-методических материалов по курсу высшей математики.
5. Краткая справка по истории математики.
6. Биографический указатель.
7. Список замеченных опечаток.
8. Некоторые добавления:
   а) гиперболические функции;
   б) собственные числа и собственные векторы симметричной матрицы;
   в) основы теории квадратичных форм;
   г) оператор Гамильтона.

Добавления, указанные в п.8, полезны при решении практических задач, связанных с математическими расчетами. Гиперболические функции позволяют в некоторых случаях упростить вычисление интегралов и решение (или запись решения) дифференциальных уравнений, а также используются в курсе ТФКП и операционного исчисления. Пункты 8, б) и в) оказываются востребованными в физике, методах вычислений, аналитической геометрии и т.д. В частности, использование методов теории квадратичных форм позволяет существенным образом упростить приведение уравнения алгебраической кривой (или поверхности) второго порядка к каноническому виду (см. задачу 5 из контрольной работы 1, Часть I, с.109; к сожалению, в самой Части I изложение метода квадратичных форм отсутствует). Пункт 8, г) полезен в плане применения теории векторного анализа в физике.

Отметим, наконец, что п.п.1-3 взяты из [6] по списку литературы; п.п.5-6 основаны на выдержках из [1, 2]; п.п. 4, 7, 8 написаны Черновым А.В. Им же произведена общая компоновка текста, а также набор и верстка в системе LaTeX 2_ε.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ[2]

Контрольная работа № 7
ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Задача 1[3]. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), используя формулу Остроградского-Гаусса. Выбрав сторону поверхности, найти непосредственно поток векторного поля $\vec{a}$ через поверхность S_1, являющуюся частью поверхности S и определенную заданным уравнением.

1.1. $\vec{a} = (z-y)\vec{i} + (4y+x^2)\vec{j} + 2x\vec{k};\ \ S: \begin{cases} z = x^2+y^2, \\ z = 1, \end{cases}\ \ S_1: z = x^2+y^2.$

1.2. $\vec{a} = 4x^2y\vec{i} - xy^2\vec{j} + (3xz+1)\vec{k};\ \ S: \begin{cases} z = 1-x^2-y^2, \\ z \geq 0, \end{cases}\ \ S_1: z = 1-x^2-y^2.$

1.3. $\vec{a} = 2x^2\vec{i} + y\vec{j} + (2-x^2y)\vec{k};\ \ S: \begin{cases} x^2+y^2 = 1, \\ z = 0, z = 5, \end{cases}\ \ S_1: x^2+y^2 = 1.$

1.4. $\vec{a} = 3x\vec{i} - 5y\vec{j} + 3z\vec{k};\ \ S: \begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2}, \\ z = 2, \end{cases}\ \ S_1: z = \sqrt{x^2+y^2}.$

1.5. $\vec{a} = 2xz\vec{i} + (4x^2y+3)\vec{j} - 3(y+z)\vec{k};\ \ S: \begin{cases} z = 3-x^2-y^2, \\ z \geq 0, \end{cases}\ \ S_1: z = 3-x^2-y^2.$

1.6. $\vec{a} = x\vec{i} + \cos y\vec{j} + z\vec{k};\ \ S: \begin{cases} x^2+y^2 = 1, \\ z = 1, z = 6, \end{cases}\ \ S_1: x^2+y^2 = 1.$

1.7. $\vec{a} = (3x^2+2y)\vec{i} - (5z+2y)\vec{j} + y\vec{k};\ \ S: \begin{cases} y = z^2+x^2, \\ y = 1, x \geq 0, \end{cases}\ \ S_1: y = z^2+x^2.$

1.8. $\vec{a} = \dfrac{x^2}{2}y\vec{i} - 3xy^2\vec{j} + (3z-x)\vec{k};\ \ S: \begin{cases} z = 4-4x^2-4y^2, \\ z \geq 0, \end{cases}\ \ S_1: z = 4-4x^2-4y^2.$

---

[2] Печатается, в основном, по тексту [6] (в квадратных скобках здесь и далее указывается номер по списку литературы). Отличие состоит в том, что устранены замеченные опечатки.

[3] Автор – И.В.Кольчик. Для образца решения см. задачи 1.6, 1.7 в Части 4, т.1.

1.9. $\vec{a} = -5x\vec{i} + 3y\vec{j} + 3z\vec{k}$; $S : \begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2}, \\ z = 3, \end{cases}$ $S_1 : z = \sqrt{x^2+y^2}$.

1.10. $\vec{a} = (3x^2+2y)\vec{i} - (5z+xy)\vec{j} + y\vec{k}$; $S : \begin{cases} z = x^2+y^2, \\ z = 2, \end{cases}$ $S_1 : z = x^2+y^2$.

1.11. $\vec{a} = x\vec{i} + \cos y\vec{j} + z\vec{k}$; $S : \begin{cases} x^2+z^2 = 1, \\ y = 1, y = 3, \end{cases}$ $S_1 : x^2+z^2 = 1$.

1.12. $\vec{a} = 9z\vec{i} + 7xy\vec{j} - (12z+5)\vec{k}$; $S : \begin{cases} z = 2-x^2-y^2, \\ z \geq 0, \end{cases}$ $S_1 : z = 2-x^2-y^2$.

1.13. $\vec{a} = x^2y\vec{i} + z\vec{j} + xy\vec{k}$; $S : \begin{cases} z = 1-x^2-y^2, \\ z \geq 0, \end{cases}$ $S_1 : z = 1-x^2-y^2$.

1.14. $\vec{a} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 3z\vec{k}$; $S : \begin{cases} y = \sqrt{x^2+z^2}, \\ y = 2, \end{cases}$ $S_1 : y = \sqrt{x^2+z^2}$.

1.15. $\vec{a} = \sin x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $S : \begin{cases} x^2+y^2 = 4, \\ z = 1, z = 2, \end{cases}$ $S_1 : x^2+y^2 = 4$.

1.16. $\vec{a} = 2x^2y\vec{i} + xy^2\vec{j} + (z-2)\vec{k}$; $S : \begin{cases} z = 2-x^2-y^2, \\ z \geq 0, \end{cases}$ $S_1 : z = 2-x^2-y^2$.

1.17. $\vec{a} = (2y+z)\vec{i} + 3y^2\vec{j} - xz\vec{k}$; $S : \begin{cases} z = 4+x^2+y^2, \\ z = 8, \end{cases}$ $S_1 : z = 4+x^2+y^2$.

1.18. $\vec{a} = -3x^2\vec{i} + \dfrac{y^2}{2}\vec{j} + zx\vec{k}$; $S : \begin{cases} y = 3-x^2-z^2, \\ y \geq 0, \end{cases}$ $S_1 : y = 3-x^2-z^2$.

1.19. $\vec{a} = \cos x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$; $S : \begin{cases} x^2+y^2 = 4, \\ z = 1, z = 3, \end{cases}$ $S_1 : x^2+y^2 = 4$.

1.20. $\vec{a} = -4x\vec{i} + 3y\vec{j} + 3z\vec{k}$; $S : \begin{cases} y = \sqrt{x^2+z^2}, \\ y = 1, \end{cases}$ $S_1 : y = \sqrt{x^2+z^2}$.

1.21. $\vec{a} = (x+y)\vec{i} - zy\vec{j} + y^2\vec{k}$; $S : \begin{cases} z = 5-x^2-y^2, \\ z \geq 0, \end{cases}$ $S_1 : z = 5-x^2-y^2$.

1.22. $\vec{a} = x\vec{i} + \sin y\vec{j} + z\vec{k}$; $S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ z = 1, z = 3, \end{cases}$ $S_1: x^2 + y^2 = 2.$

1.23. $\vec{a} = (2y - x)\vec{i} + (z - y)\vec{j} + xy\vec{k}$; $S: \begin{cases} z = 3 - x^2 - y^2, \\ z \geq 0, x \geq 0, \end{cases}$ $S_1: z = 3 - x^2 - y^2.$

1.24. $\vec{a} = 9z\vec{i} + 7xy\vec{j} - xz\vec{k}$; $S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 1, z = 3, \end{cases}$ $S_1: x^2 + y^2 = 9.$

1.25. $\vec{a} = (x + 2)\vec{i} + \cos y\vec{j} - z\vec{k}$; $S: \begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2, \\ z \geq 0, x \geq 0, \end{cases}$ $S_1: z = 1 - x^2 - y^2.$

1.26. $\vec{a} = 5x\vec{i} - 5y\vec{j} + 5z\vec{k}$; $S: \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = 1, \end{cases}$ $S_1: z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

1.27. $\vec{a} = 3y^2\vec{i} - x^2\vec{j} + (z - xy)\vec{k}$; $S: \begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2, \\ z \geq 0, \end{cases}$ $S_1: z = 2 - x^2 - y^2.$

1.28. $\vec{a} = 4x^2y\vec{i} - zx\vec{j} + z\vec{k}$; $S: \begin{cases} y = 1 - x^2 - z^2, \\ y \geq 0, \end{cases}$ $S_1: y = 1 - x^2 - z^2.$

1.29. $\vec{a} = 4x\vec{i} + 6y\vec{j} + 6z\vec{k}$; $S: \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = 2, \end{cases}$ $S_1: z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

1.30. $\vec{a} = \sin x\vec{i} + 3y\vec{j} - (z - 2)\vec{k}$; $S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ z = 1, z = 2, \end{cases}$ $S_1: x^2 + y^2 = 2.$

Задача 2[4]. Вычислить по формуле Стокса и непосредственно циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ вдоль контура Γ, указав на чертеже направление обхода.

2.1. $\vec{a} = (2y + x)\vec{i} + 3x\vec{j} - (z + 1)\vec{k}$; $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2z, \\ z = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

2.2. $\vec{a} = xz\vec{i} + xy\vec{j} + yz\vec{k}$; $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$

2.3. $\vec{a} = -3y\vec{i} + (4x + y)\vec{j} - 5z\vec{k}$; $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = z - 2, \\ z = 3. \end{cases}$

[4] Автор – Р.Е.Мазова. Для образца решения см. задачи 1.4, 1.8 в Части 4, т.1.

2.4. $\vec{a} = (y+x)\vec{i} + (y-x)\vec{j} - (z+2)\vec{k}$; $\quad \Gamma : \begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$

2.5. $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$; $\quad \Gamma : \begin{cases} x^2+y^2-4=0, \\ z=1. \end{cases}$

2.6. $\vec{a} = (2x-3y)\vec{i} - (2y-3x)\vec{j} - 3z^2\vec{k}$; $\quad \Gamma : \begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

2.7. $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$; $\quad \Gamma : \begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ z=3. \end{cases}$

2.8. $\vec{a} = (x+yz)\vec{i} - (xz-y)\vec{j} - (z-xy)\vec{k}$; $\quad \Gamma : \begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ x^2+y^2=16. \end{cases}$

2.9. $\vec{a} = -yz\vec{i} - \vec{j} + 2z\vec{k}$; $\quad \Gamma : \begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ z=2. \end{cases}$

2.10. $\vec{a} = (x-yz)\vec{i} + z(x+1)\vec{j} - y(x-1)\vec{k}$; $\quad \Gamma : \begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ z=4. \end{cases}$

2.11. $\vec{a} = 5z\vec{i} - 3x\vec{j} + y\vec{k}$; $\quad \Gamma : \begin{cases} z=x^2+y^2+1, \\ z=10. \end{cases}$

2.12. $\vec{a} = 2y\vec{i} + (7+x)\vec{j} + 3z\vec{k}$; $\quad \Gamma : \begin{cases} x^2+y^2+z^2-4=0, \\ x^2+y^2-1=0 \quad (z \geq 0). \end{cases}$

2.13. $\vec{a} = (x+yz)\vec{i} + (y-xz)\vec{j} + 2z\vec{k}$; $\quad \Gamma : \begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=2. \end{cases}$

2.14. $\vec{a} = (y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$; $\quad \Gamma : \begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=1. \end{cases}$

2.15. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y(z-2)\vec{j} + (z+x)\vec{k}$; $\quad \Gamma : \begin{cases} x^2+y^2=9, \\ x+y+z=3. \end{cases}$

2.16. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y(z-2)\vec{j} + (z+x)\vec{k}$; $\quad \Gamma : \begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x+y+z=2. \end{cases}$

2.17. $\vec{a} = (xz + y)\vec{i} + yz\vec{j} - z\vec{k}; \qquad \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

2.18. $\vec{a} = (y^2 - xz)\vec{i} + (z + xy)\vec{j} - z^2\vec{k}; \qquad \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

2.19. $\vec{a} = (x - 3z)\vec{i} + (y + 2)\vec{j} - (z - 2y)\vec{k}; \qquad \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - 3y - 2z = 1. \end{cases}$

2.20. $\vec{a} = (x + 3z)\vec{i} + (2 - y)\vec{j} + (2y + z)\vec{k}; \qquad \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ 2x - 3y - 2z = 1. \end{cases}$

2.21. $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + (2 - y)\vec{j} - (z - 1)\vec{k}; \qquad \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 2. \end{cases}$

2.22. $\vec{a} = x\vec{i} + (3x - y)\vec{j} - (3x - z)z\vec{k}; \qquad \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 1. \end{cases}$

2.23. $\vec{a} = (x + y)\vec{i} - (x - 1)\vec{j} - (z + 1)\vec{k}; \qquad \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ z = 16. \end{cases}$

2.24. $\vec{a} = (y - x)\vec{i} + (y - x)\vec{j} + (2 - z)\vec{k}; \qquad \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ z = 9. \end{cases}$

2.25. $\vec{a} = 2(x + y)\vec{i} + 5(y + z)\vec{j} - 3(z - x)\vec{k}; \qquad \Gamma : \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 1, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

2.26. $\vec{a} = (y + x)\vec{i} + (y - x)\vec{j} - (z + 1)\vec{k}; \qquad \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2z, \\ z = 2. \end{cases}$

2.27. $\vec{a} = (x + y)\vec{i} - (x + y)\vec{j} + (2z - 1)\vec{k}; \qquad \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ z = 4. \end{cases}$

2.28. $\vec{a} = (2y + x)\vec{i} - (y + 3x)\vec{j} - z\vec{k}; \qquad \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

2.29. $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} - (z + xy)\vec{k}; \qquad \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ z = 3. \end{cases}$

2.30. $\vec{a} = yz\vec{i} - xz\vec{j} + xy\vec{k}; \qquad \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$

Задача 3[5]. Доказать потенциальность заданного векторного поля и найти его потенциал, используя криволинейный интеграл.

3.1. $\vec{a} = (4x^3 + 3x^2y - 2y^2z)\vec{i} + (x^3 + 4xyz - z^3)\vec{j} + (2xy^2 - 3yz^2)\vec{k}$.

3.2. $\vec{a} = \left(\dfrac{z}{x^2} + 1\right)\vec{i} + \dfrac{2}{z}\vec{j} - \left(\dfrac{2y}{z^2} + \dfrac{1}{x}\right)\vec{k}$.

3.3. $\vec{a} = 2x \sin yz\vec{i} + x^2 z \cos yz\vec{j} + (x^2 y \cos yz + 1)\vec{k}$.

3.4. $\vec{a} = -2y^2z\vec{i} + (-4xyz + 4y^3 - 3y^2z)\vec{j} + (-2xy^2 - y^3 + 7)\vec{k}$.

3.5. $\vec{a} = -\dfrac{2}{y}\vec{i} + \left(\dfrac{2x}{y^2} + \dfrac{1}{z} - 1\right)\vec{j} - \dfrac{y}{z^2}\vec{k}$.

3.6. $\vec{a} = y \cos z\vec{i} + x \cos z\vec{j} + (-xy \sin z + 2)\vec{k}$.

3.7. $\vec{a} = (6x^2y - 1)\vec{i} + (2x^3 - z^3)\vec{j} + (-3yz^2 + 4z^3)\vec{k}$.

3.8. $\vec{a} = \dfrac{3}{y}\vec{i} - \left(\dfrac{3x}{y^2} + \dfrac{1}{z}\right)\vec{j} + \left(\dfrac{y}{z^2} + 2z\right)\vec{k}$.

3.9. $\vec{a} = 2xe^{yz}\vec{i} + (x^2ze^{yz} + 1)\vec{j} + x^2ye^{yz}\vec{k}$.

3.10. $\vec{a} = (-4x^3 + 4xyz - yz^2)\vec{i} + (2x^2z - xz^2)\vec{j} + (2x^2y - 2xyz - 2z)\vec{k}$.

3.11. $\vec{a} = \left(14xy + \dfrac{z}{x^2}\right)\vec{i} + \left(7x^2 + \dfrac{3}{z}\right)\vec{j} + \left(-\dfrac{3y}{z^2} - \dfrac{1}{x}\right)\vec{k}$.

3.12. $\vec{a} = (2x + y^2z \cos xz)\vec{i} + 2y \sin xz\vec{j} + xy^2 \cos xz\vec{k}$.

3.13. $\vec{a} = (9x^2y - y^2z)\vec{i} + (3x^3 - 2xyz + z^3 - 2)\vec{j} + (-xy^2 + 3yz^2)\vec{k}$.

3.14. $\vec{a} = \left(5 - \dfrac{2z}{x^2}\right)\vec{i} - \dfrac{1}{z}\vec{j} + \left(\dfrac{y}{z^2} + \dfrac{2}{z}\right)\vec{k}$.

3.15. $\vec{a} = (y^2ze^{-xz} - 4)\vec{i} - 2ye^{-xz}\vec{j} + xy^2e^{-xz}\vec{k}$.

3.16. $\vec{a} = (2xyz + 7)\vec{i} + (x^2z - 12y^2z)\vec{j} + (x^2y - 4y^3 + 4z^3)\vec{k}$.

3.17. $\vec{a} = \dfrac{2}{y}\vec{i} + \left(-\dfrac{2x}{y^2} - \dfrac{1}{z} + 2\right)\vec{j} + \dfrac{y}{z^2}\vec{k}$.

[5]Автор – Г.В.Потемин. Для образца решения см. задачу 1.9 в Части 4, т.1.

3.18. $\vec{a} = 2\cos yz\vec{i} - 2xz\sin yz\vec{j} + (-2xy\sin yz - 1)\vec{k}$.

3.19. $\vec{a} = (4x^3 - y^2z + 2yz^2)\vec{i} + (-2xyz + 2xz^2 - 3y^2z)\vec{j} + (-xy^2 + 4xyz - y^3)\vec{k}$.

3.20. $\vec{a} = \left(-1 - \dfrac{1}{z}\right)\vec{i} + \dfrac{2}{z}\vec{j} + \left(\dfrac{x}{z^2} - \dfrac{2y}{z^2}\right)\vec{k}$.

3.21. $\vec{a} = (2yz^2e^{2xy} + 2xy)\vec{i} + (x^2 + 2xz^2e^{2xy})\vec{j} + 2ze^{2xy}\vec{k}$.

3.22. $\vec{a} = 2yz^2\vec{i} + (2xz^2 + 6yz^2 + 1)\vec{j} + (4xyz + 6y^2z - 4z^3)\vec{k}$.

3.23. $\vec{a} = \left(-4 + \dfrac{2}{y} - \dfrac{5z}{x^2}\right)\vec{i} - \dfrac{2x}{y^2}\vec{j} + \dfrac{5}{x}\vec{k}$.

3.24. $\vec{a} = y^2z\cos xz\vec{i} + 2y\sin xz\vec{j} + (xy^2\cos xz + 2)\vec{k}$.

3.25. $\vec{a} = 2y^2z\vec{i} + (-4y^3 + 4xyz + 4yz^2)\vec{j} + (2xy^2 + 4y^2z - 3)\vec{k}$.

3.26. $\vec{a} = -\dfrac{1}{y}\vec{i} + \left(3 + \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{7}{z}\right)\vec{j} - \dfrac{7y}{z^2}\vec{k}$.

3.27. $\vec{a} = -2xe^{-yz}\vec{i} + x^2ze^{-yz}\vec{j} + (x^2ye^{-yz} - 2)\vec{k}$.

3.28. $\vec{a} = (-3y^3 + 1)\vec{i} + (-9xy^2 - 6y^2z + 4y^3)\vec{j} - 2y^3\vec{k}$.

3.29. $\vec{a} = \left(\dfrac{5}{y} - \dfrac{3z}{x^2}\right)\vec{i} - \dfrac{5x}{y^2}\vec{j} + \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)\vec{k}$.

3.30. $\vec{a} = -yz^2\sin xy\vec{i} + (-xz^2\sin xy + 3)\vec{j} + 2z\cos xy\vec{k}$.

Контрольная работа № 8[6]
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Задача 1[7].

1.1. Из урны, в которой 30 шаров белых и 4 красных, наудачу вынимаются 3 шара. Найти вероятность того, что среди них есть хотя бы один красный шар.

1.2. В одной урне 5 белых и 8 красных, а в другой 10 белых и 6 красных шаров. Из каждой урны наудачу вынимают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара одного цвета?

1.3. В одной урне 5 белых и 8 красных, а в другой 10 белых и 6 красных шаров. Из каждой урны наудачу вынимают по одному шару. Какова вероятность того, что шары разного цвета?

1.4. В партии из 10 приборов 8 не имеют дефекта. Найти вероятность того, что из двух наудачу взятых приборов хотя бы один без дефекта.

1.5. Из полного набора костей домино наугад берут 3 кости. Какова вероятность того, что хотя бы две из них дубли?

1.6. Открываются одна за другой карты колоды из 36 штук. Какова вероятность того, что первой картой пиковой масти окажется пятая карта?

1.7. В урне 6 белых и 5 красных шаров. Наугад последовательно без возврата вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара красные.

1.8. Найти вероятность того, что при трех подбрасываниях игральной кости выпадет хотя бы один раз единица.

1.9. Партия из 100 изделий содержит 40 изделий первого сорта, а остальные – второго сорта. Найти вероятность того, что взятые наудачу 2 изделия будут одного сорта.

[6]Автор – И.П.Рязанцева.

[7]Для образца см. решение задач 1.8-1.16, 1.19, 1.20 в Части 4, т.2.

1.10. Буквы, составляющие слово "Одесса", написаны по одной на шести карточках. Чему равна вероятность того, что вынимая карточки по одной и складывая их в порядке вынимания, мы получим слово "сад"?

1.11. В электрической цепи 3 элемента, которые выходят из строя независимо друг от друга с вероятностями 0.3, 0.2 и 0.1. Определить вероятность разрыва цепи при последовательном соединении этих элементов.

1.12. В электрической цепи 3 элемента, которые выходят из строя независимо друг от друга с вероятностями 0.3, 0.2 и 0.1. Найти вероятность разрыва цепи при параллельном соединении элементов.

1.13. Стрелок делает по мишени 3 выстрела, вероятности поражения мишени при которых соответственно равны 0.7, 0.8 и 0.85. Найти вероятность двух попаданий.

1.14. Стрелок делает по мишени 3 выстрела, вероятности поражения мишени при которых соответственно равны 0.7, 0.8 и 0.85. Найти вероятность одного попадания.

1.15. Стрелок делает по мишени 3 выстрела, вероятности поражения мишени при которых соответственно равны 0.7, 0.8 и 0.85. Найти вероятность хотя бы одного попадания.

1.16. Вероятность работы лампочки до трех месяцев равна 0.9, а от трех до пяти месяцев – 0.6. Определить вероятность того, что лампочка будет в эксплуатации не менее пяти месяцев.

1.17. Вратарь парирует 1/3 ударов. Найти вероятность того, что он возьмет хотя бы 2 из 4 мячей.

1.18. В урне 5 белых и 20 черных шаров. Шары вынимают последовательно без возврата до тех пор, пока не будет вынут белый шар. Вычислить вероятность того, что при этих условиях будет произведено 3 вынимания, т.е. до белого шара будет вынуто 2 черных.

1.19. Вероятность купить сегодня билет на самолет равна 0.7, а на поезд – 0.2, других видов транспорта нет. Какова вероятность уехать сегодня?

1.20. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0.9, на второй – 0.95, на третьей – 0.8, на четвертой – 0.6. Найти вероятность того, что только на одной базе не окажется нужного материала.

1.21. Найти вероятность того, что при четырех подбрасываниях игральной кости выпадет хотя бы один раз четное число очков.

1.22. Из трех колод карт по 36 штук наудачу вынимают по одной карте. Какова вероятность того, что среди них хотя бы один туз?

1.23. Бросают 2 кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков окажется кратной двум или трем.

1.24. Три стрелка производят по одному выстрелу по цели, вероятности попадания в которую равны: для первого – 0.5, для второго – 0.7, для третьего – 0.8. Найти вероятность поражения цели.

1.25. Несколько раз бросают игральную кость. Какова вероятность того, что одно очко появится впервые при четвертом бросании?

1.26. Из колоды в 52 карты наудачу вынимают одну карту. Найти вероятность того, что эта карта пиковая или туз.

1.27. Дети смогут пойти в кино, если мама или папа придут с работы до пяти часов. Папа возвращается с работы до пяти часов в одном из пяти случаев, а мама – в одном из двух случаев. Какова вероятность того, что дети сегодня пойдут в кино?

1.28. В ящике 5 белых, 3 черных и 2 красных шара. Последовательно по одному без возврата вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что они разного цвета.

1.29. Найти вероятность того, что при подбрасывании двух игральных костей на них выпадет одинаковое число очков.

1.30. Из колоды в 36 карт наудачу берут 4 карты. Найти вероятность того, что среди них не менее трех карт пиковой масти.

Задача 2[8].

2.1. Радиолампа, вставленная в телевизор, может принадлежать к одной из партий с вероятностями: 0.3, 0.2, 0.5. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов для этих партий равны соответственно: 0.9, 0.8, 0.6. Найти вероятность того, что лампа проработает заданное число часов, если она выбрана наудачу.

2.2. Имеется 2 партии одинаковых изделий из 10 и 12 штук, причем в каждой партии по одному бракованному изделию. Наудачу взятое изделие из первой партии переложили во вторую, после чего наудачу вынимают изделие из второй партии. Найти вероятность того, что оно бракованное.

2.3. В сосуд, содержащий 10 шаров, опущен белый шар. Какова вероятность извлечь из него белый шар, если предположения о первоначальном присутствии в сосуде от 0 до 5 белых шаров равновозможны?

2.4. Завод получает сырье с трех баз. Вероятность наличия сырья на первой базе равна 0.9, на второй – 0.95, на третьей – 0.8. Автомашина за сырьем послана на случайно выбранную базу. Какова вероятность того, что она вернется с сырьем?

2.5. Студенту нужна книга, которая может находиться в одной из четырех библиотек с вероятностями 0.8, 0.7, 0.9, 0.75. Студент пошел в наудачу выбранную библиотеку. Какова вероятность того, что он получит книгу?

2.6. Участники соревнования разделены на 3 группы: старшая – 5 человек, средняя – 4 человека, младшая – 10 человек. Вероятности занять первое место для членов каждой группы равны соответственно 0.2, 0.15, 0.1. Какова вероятность того, что чемпион – представитель средней группы?

2.7. Индикатор принадлежит с вероятностями 0.2, 0.3, 0.5 к одному из трех типов, для которых вероятности срабатывания при нарушении нормальной работы линии равны соответственно 1.0, 0.9, 0.85. От индикатора получен неправильный сигнал. Найти вероятность того, что он второго типа.

[8] Для образца см. решение задач 1.17, 1.18 в Части 4, т.2.

2.8. Телеграфное сообщение состоит из сигналов "точка" и "тире". "Точка" искажается в 1 из 8 случаев, а "тире" – в 1 из 7. "Точка" и "тире" встречаются в отношении 5:3. Сигнал принят. Какова вероятность того, что он искажен?

2.9. Телеграфное сообщение состоит из сигналов "точка" и "тире". "Точка" искажается в 1 из 8 случаев, а "тире" – в 1 из 7. "Точка" и "тире" встречаются в отношении 5:3. Сигнал принят без искажений. Найти вероятность того, что принята "точка".

2.10. В ящиках находятся соответственно: 1) 2 белых и 3 черных шара; 2) 4 белых и 3 черных шара; 3) 6 белых и 2 черных шара. Из наудачу выбранного ящика вынимают шар. Найти вероятность того, что он белый.

2.11. В ящиках находятся соответственно: 1) 2 белых и 3 черных шара; 2) 4 белых и 3 черных шара; 3) 6 белых и 2 черных шара. Из наудачу выбранного ящика вынимают шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что он вынут из первого или третьего ящика?

2.12. В первом ящике 2 белых и 3 красных шара, а во втором – 10 белых и 5 красных шаров. Из наудачу выбранного ящика извлекают 1 шар, а второй извлекают из другого ящика. Какова вероятность того, что сначала извлечен белый, а потом красный шар?

2.13. В первом ящике 2 белых и 3 красных шара, а во втором – 10 белых и 5 красных шаров. Из наудачу выбранного ящика извлекают 1 шар, а второй извлекают из другого ящика. Первый оказался белым, а второй – красным. Найти вероятность того, что первое извлечение было проведено из второго ящика.

2.14. С поляны ведут 3 дороги, вероятности выхода из леса за час по ним равны соответственно 0.7, 0.3, 0.2. Выбрав наугад дорогу, заблудившийся вышел из леса за час. Какова вероятность того, что он пошел по второй дороге?

2.15. В одной игре используется одна игральная кость, а в другой – две. Счет игры равен числу очков, выпавших на одной или двух костях. Известно, что счет игры равен двум очкам. Найти вероятность того, что игра идет с двумя костями.

2.16. С первого станка на сборку поступает 60% одинаковых деталей, а со второго – 40%. На первом станке брак составляет 1%, а на втором – 4%. Две проверенные детали, изготовленные одним и тем же станком, оказались бракованными. Найти вероятность того, что они изготовлены на первом станке.

2.17. Вероятность выполнить работу без ошибок для десяти студентов равна 0.95, для пятнадцати – 0.7, а для трех – 0.2. Преподаватель берет наудачу одну тетрадь для проверки. Какова вероятность того, что работа выполнена без ошибок?

2.18. В первой коробке находятся буквы М, А, В, Р, С, М, И, А, во второй – А, В, С, К, И, И, Л, М, Р. Из наугад выбранной коробки последовательно без возврата извлекают по одной букве. Найти вероятность того, что будет построено слово МИР.

2.19. Имеются 2 одинаковые колоды по 36 карт. Из одной из них наудачу взята карта и переложена во вторую, затем из второй колоды наудачу извлекается 1 карта. Найти вероятность того, что извлеченная карта – туз.

2.20. Детали изготовляются на двух станках, причем первый производит в 3 раза больше второго. Брак на первом станке составляет 3%, а на втором – 5%. Наудачу взятая деталь оказалась стандартной. Какова вероятность того, что она изготовлена на первом станке?

2.21. Имеются 3 игральные кости, на одной из них на всех гранях изображено 1 очко, на другой – на противоположных гранях одинаковое число очков: 1,2 и 3; третья кость обычная. Бросают наудачу выбранную кость. Найти вероятность того, что выпадет одно очко.

2.22. Имеются 3 игральные кости, на одной из них на всех гранях изображено 1 очко, на другой – на противоположных гранях одинаковое число очков: 1,2 и 3; третья кость обычная. Бросают наудачу выбранную кость. Выпало одно очко. Какова вероятность того, что брошена обычная кость?

2.23. В правом кармане 4 монеты по 20 копеек и 3 по 3 копейки, а в левом – 6 по двадцать копеек и 3 по 3 копейки. Из правого кармана в левый наудачу переложены 2 монеты. Найти вероятность извлечения монеты в 20 копеек из левого кармана после перекладывания.

2.24. На столе 5 полных колод карт по 36 штук и 3 колоды, в которых присутствуют только фигурные карты (дамы, вальты, короли, тузы). Наугад выбирается одна из колод, и из нее случайным образом вынимается одна карта. Найти вероятность того, что вынутая карта туз.

2.25. На столе 5 полных колод карт по 36 штук и 3 колоды, в которых присутствуют только фигурные карты (дамы, вальты, короли, тузы). Наугад выбирается одна из колод, и из нее случайным образом вынимается одна карта, которая оказалась тузом. Найти вероятность того, что она вынута из неполной колоды.

2.26. Характеристика материала, взятого для изготовления продукции, с вероятностями 0.1, 0.4, 0.5 может находиться в одном из трех различных интервалов. В зависимости от материала вероятности получения первосортной продукции равны соответственно 0.3, 0.8, 0.95. Найти вероятность изготовления продукции первого сорта.

2.27. Некто в одном из трех случаев ездит на работу автобусом, а в двух из трех – трамваем. Вероятность не приехать к сроку на автобусе равна 0.05, а на трамвае – 0.2. Сегодня он опоздал. Какова вероятность того, что он ехал на трамвае?

2.28. В ящике 15 мячей, из которых 9 новые. Для первой игры наудачу берут 3 мяча, а после игры возвращают их в ящик. Для второй игры тоже наудачу берут 2 мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые.

2.29. Имеется 5 урн, каждая из которых содержит 10 шаров. Урна с номером k содержит k белых и $10 - k$ красных шаров. Из наудачу выбранной урны вынимают 4 раза с возвратом по 1-му шару. Найти вероятность того, что все шары белые.

2.30. Сборщик получил две коробки деталей с завода № 1 и три с завода № 2. Вероятность того, что деталь с завода № 1 нестандартна, равна 0.8, а для завода № 2 – 0.9. Сборщик извлек деталь из наудачу взятой коробки. Она оказалась стандартной. Какова вероятность того, что она изготовлена на заводе № 1?

Задача 3[9]. По заданному закону распределения случайной величины X найти $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$.

3.1.

-1	0	1
0.4	0.2	0.4

$Y = 3X+8.$

3.2.

0	1	2	3
0.94	0.03	0.02	0.01

$Y = -2X+1.$

3.3.

0.16	0.32	0.64
0.4	0.5	?

$Y = 6X+2.$

3.4.

1	2	3	4
0.2	?	0.4	0.3

$Y = 3X+1.$

3.5.

-2	-1	1
0.45	0.1	0.45

$Y = -X+4.$

3.6.

0.6	0.25	1
0.3	0.5	?

$Y = 3X+2.$

3.7.

650	700	750
0.6	?	0.15

$Y = 2X-3.$

3.8.

-2	-1	0	1	2
0.2	0.1	?	0.3	0.2

$Y = 4X-2.$

3.9.

1	2	3	4
0.1	0.4	0.2	?

$Y = X-1.$

3.10.

1	2	3	4
0.2	0.3	0.1	?

$Y = 3X+1.$

3.11.

-2	-1	1	2
0.1	0.6	0.2	?

$Y = -X+2.$

3.12.

0.32	0.33	0.34	0.35
0.4	0.3	?	0.1

$Y = 2X+1.$

3.13.

7	5	3
0.2	0.3	?

$Y = 4X-7.$

3.14.

-5	1	5
0.4	0.1	?

$Y = 5X+1.$

3.15.

1	4	6
0.7	0.2	?

$Y = 4X-2.$

3.16.

3	2	1	0
0.2	?	0.2	0.3

$Y = -X+7.$

3.17.

0	-1	-2	-3
0.2	0.7	0.05	?

$Y = -2X+1.$

3.18.

100	101	102
0.2	0.3	?

$Y = 3X-6.$

[9]Для образца см. решение задачи 1.39 в Части 4, т.2.

3.19.

6	4	2	0
0.3	0.4	0.1	?

$Y = 7X-9.$

3.20.

8	6	4
0.7	0.1	?

$Y = 3X-2.$

3.21.

0.5	1	1.5
0.7	0.1	?

$Y = 2X-1.$

3.22.

3	2	1	0
0.8	0.05	?	0.05

$Y = 2X+4.$

3.23.

-5	0	5
0.7	0.1	?

$Y = 2X+5.$

3.24.

2	1	0	-1	-2
0.1	?	0.1	0.2	0.4

$Y = 7X+4.$

3.25.

6	8	10
0.6	0.3	?

$Y = 3X+1.$

3.26.

12	10	5
0.3	0.4	?

$Y = X+7.$

3.27.

-2	-1	0	1
0.3	0.3	0.1	?

$Y = 2X-2.$

3.28.

0.6	0.4	0.2
0.5	?	0.3

$Y = 2X+4.$

3.29.

0.3	0.1	-0.1	-0.3
0.2	?	0.1	0.3

$Y = 2X-4.$

3.30.

0.25	0.5	0.75
?	0.6	0.3

$Y = 2X+6.$

Задача 4[10].

Определить, при каком значении параметра C заданная функция $f(x)$ является функцией плотности распределения случайной величины. Найти функцию распределения $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $P(a < X < b)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

4.1.

$$f(x) = \begin{cases} Ce^x, & x \le 0; \quad a = -\infty, \\ 0, & x > 0. \quad b = -1. \end{cases}$$

4.2.

$$f(x) = \begin{cases} C\sin x, & x \in (0;\pi]; \quad a = -\pi/2, \\ 0, & x \notin (0;\pi]. \quad b = \pi/4. \end{cases}$$

[10] Для образца см. решение задач 1.34-1.36, 1.40 в Части 4, т.2.

4.3.

$$f(x)=\begin{cases} C\cos x, & x\in(-\pi/2;\pi/2]; \quad a=-\pi/4,\\ 0, & x\notin(-\pi/2;\pi/2]. \quad b=\pi. \end{cases}$$

4.4.

$$f(x)=\begin{cases} Cx^3, & x\in(0;2]; \quad a=-1,\\ 0, & x\notin(0;2]. \quad b=1. \end{cases}$$

4.5.

$$f(x)=\begin{cases} Cx^5, & x\in(0;1]; \quad a=-1,\\ 0, & x\notin(0;1]. \quad b=1/3. \end{cases}$$

4.6.

$$f(x)=\begin{cases} Ce^{x}, & x\le 0; \quad a=-1,\\ Ce^{-x}, & x>0. \quad b=2. \end{cases}$$

4.7.

$$f(x)=\begin{cases} Cxe^{-x}, & x\ge 0; \quad a=-1,\\ 0, & x<0. \quad b=\infty. \end{cases}$$

4.8.

$$f(x)=\begin{cases} C(x-2)^2, & x\in(2;3]; \quad a=-\infty,\\ 0, & x\notin(2;3]. \quad b=2,5. \end{cases}$$

4.9.

$$f(x)=\begin{cases} x-C, & x\in(1;2]; \quad a=-1,\\ 0, & x\notin(1;2]. \quad b=3/2. \end{cases}$$

4.10.

$$f(x)=\begin{cases} C\sin^2 x, & x\in(0;\pi]; \quad a=-\pi/2,\\ 0, & x\notin(0;\pi]. \quad b=\infty. \end{cases}$$

4.11.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{C}{\sqrt[3]{x-1}}, & x\in(1;2]; \quad a=0,\\ 0, & x\notin(1;2]. \quad b=1,5. \end{cases}$$

4.12.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 3; \quad a=-\infty,\\ Ce^{-2(x-3)}, & x>3. \quad b=4. \end{cases}$$

4.13.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{C}{(x-2)^6}, & x > 3; \quad a = -\infty, \\ 0, & x \le 3. \quad b = 4. \end{cases}$$

4.14.

$$f(x) = \begin{cases} C/x^4, & |x| > 2; \quad a = -\infty, \\ 0, & |x| \le 2. \quad b = 1. \end{cases}$$

4.15.

$$f(x) = \begin{cases} C(x-6)^2, & 6 < x \le 7; \quad a = -\infty, \\ 0, & x \notin (6;7]. \quad b = 6,5. \end{cases}$$

4.16.

$$f(x) = \begin{cases} 2C\cos^2 x, & |x| < \pi/2; \quad a = 0, \\ 0, & |x| \ge \pi/2. \quad b = \pi/4. \end{cases}$$

4.17.

$$f(x) = \begin{cases} 0.5C\cos 2x, & |x| < \pi/4; \quad a = -\infty, \\ 0, & |x| \ge \pi/4. \quad b = 0. \end{cases}$$

4.18.

$$f(x) = \begin{cases} Cx^4, & 0 < x \le 6; \quad a = 5, \\ 0, & x \le 0, x > 6. \quad b = 12. \end{cases}$$

4.19.

$$f(x) = \begin{cases} C/x^3, & x > 4; \quad a = -\infty, \\ 0, & x \le 4. \quad b = 5. \end{cases}$$

4.20.

$$f(x) = \begin{cases} C(2-x), & 0 < x \le 2; \quad a = -7, \\ 0, & x \le 0, x > 2. \quad b = 7. \end{cases}$$

4.21.

$$f(x) = \begin{cases} C/x^4, & x > 1; \quad a = -2, \\ 0, & x \le 1. \quad b = 2. \end{cases}$$

4.22.

$$f(x) = \begin{cases} C\sin 2x, & 0 < x \le \pi/2; \quad a = -2 \\ 0, & x \le 0, x > \pi/2. \quad b = \pi/6. \end{cases}$$

4.23.

$$f(x) = \begin{cases} Ce^{-8x}, & x > 0; \quad a = 1, \\ 0, & x \le 0. \quad b = 8. \end{cases}$$

4.24.

$$f(x) = \begin{cases} C/\sqrt{x-1}, & 1 < x < 2; \quad a = 1,5, \\ 0, & x \le 1, x \ge 2. \quad b = 8. \end{cases}$$

4.25.

$$f(x) = \begin{cases} C/x^6, & x > 1; \quad a = -\infty, \\ 0, & x \le 1. \quad b = 1. \end{cases}$$

4.26.

$$f(x) = \begin{cases} C, & 0 < x \le 10; \quad a = 5, \\ 0, & x \le 0, x > 10. \quad b = 15. \end{cases}$$

4.27.

$$f(x) = \begin{cases} Cx, & 0 < x < 1; \quad a = -2, \\ 0, & x \le 0, x \ge 1. \quad b = 0.5. \end{cases}$$

4.28.

$$f(x) = \begin{cases} C/x^4, & x < -1; \quad a = -5, \\ 0, & x \ge -1. \quad b = +\infty. \end{cases}$$

4.29.

$$f(x) = \begin{cases} C/x^6, & |x| > 1; \quad a = -5, \\ 0, & |x| \le 1. \quad b = 5. \end{cases}$$

4.30.

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2, & 0 < x < 3; \quad a = 2, \\ 0, & x \le 0, x \ge 3. \quad b = +\infty. \end{cases}$$

Задача 5[11]. Случайная величина X распределена по нормальному закону с $M(X) = m$, $D(X) = d$. Найти $P(\alpha < X < \beta)$.

5.1. $m = 1$, $d = 9$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$.

5.2. $m = 0$, $d = 16$, $\alpha = -1$, $\beta = 3$.

5.3. $m = -1$, $d = 4$, $\alpha = -2$, $\beta = 3$.

5.4. $m = 2$, $d = 25$, $\alpha = 3$, $\beta = 5$.

5.5. $m = 0.5$, $d = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1.5$.

[11] Для образца см. решение задачи 1.33 в Части 4, т.2. Нужно только учесть, что математическое ожидание и дисперсия с.в. X, имеющей нормальное распределение с параметрами $\{m, \sigma\}$, вычисляются по формулам: $M(X) = m$, $D(X) = \sigma^2$.

5.6. $m = -2$, $d = 9$, $\alpha = -3$, $\beta = 0$.

5.7. $m = 3$, $d = 4$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$.

5.8. $m = 1$, $d = 16$, $\alpha = -1$, $\beta = 2$.

5.9. $m = 2$, $d = 25$, $\alpha = 0$, $\beta = 4$.

5.10. $m = 4$, $d = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 4.5$.

5.11. $m = -2$, $d = 9$, $\alpha = -3$, $\beta = -1$.

5.12. $m = 0$, $d = 4$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$.

5.13. $m = 1$, $d = 0.25$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

5.14. $m = -1$, $d = 0.04$, $\alpha = -1.5$, $\beta = -0.8$.

5.15. $m = -0.5$, $d = 0.16$, $\alpha = -0.7$, $\beta = -0.2$.

5.16. $m = 0.4$, $d = 0.09$, $\alpha = 0$, $\beta = 0.6$.

5.17. $m = 3$, $d = 0.01$, $\alpha = 2$, $\beta = 3.05$.

5.18. $m = -2$, $d = 0.04$, $\alpha = -3$, $\beta = -1.9$.

5.19. $m = -1$, $d = 0.64$, $\alpha = 0$, $\beta = -0.9$.

5.20. $m = 5$, $d = 0.49$, $\alpha = 4$, $\beta = 5.2$.

5.21. $m = 3$, $d = 0.16$, $\alpha = 2$, $\beta = 3.2$.

5.22. $m = 4$, $d = 4$, $\alpha = 3$, $\beta = 4.5$.

5.23. $m = -1$, $d = 0.04$, $\alpha = -1.5$, $\beta = -0.9$.

5.24. $m = -2$, $d = 0.16$, $\alpha = -3$, $\beta = 1.8$.

5.25. $m = 1$, $d = 4$, $\alpha = 0$, $\beta = 2.4$.

5.26. $m = 3$, $d = 0.09$, $\alpha = 2$, $\beta = 3.1$.

5.27. $m = 0.4$, $d = 9$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 5$.

5.28. $m = 0.7$, $d = 0.09$, $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.9$.

5.29. $m = 0.8$, $d = 16$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 1$.

5.30. $m = -0.2$, $d = 25$, $\alpha = 0$, $\beta = 0.2$.

Задача 6[12]. Даны результаты наблюдений случайной величины X. Разделив интервал значений X на десять равных частей, построить группировку, гистограмму, эмпирическую функцию распределения, найти оценки математического ожидания и дисперсии исследуемой случайной величины. На основе этих построений выдвинуть гипотезу о законе распределения X и на графике гистограммы изобразить выравнивающую кривую. На уровне значимости $\alpha = 0,02$ по критерию Колмогорова установить согласие или несогласие выдвинутой гипотезы с результатами наблюдений.

6.1. 19.3, 6.3, 23.1, 5.9, 0.4, 0.9, 7.4, 1.6, 21.0, 6.0, 3.8, 3.1, 6.4, 17.1, 3.3, 0.4, 0.5, 19.4, 19.1, 0.6, 2.8, 1.6, 0.2, 16.9, 11.1, 6.4, 5.1, 16.1, 5.1, 10.3, 11.3, 0.8, 9.4, 10.2, 3.0, 0.1, 7.1, 3.9, 8.4, 2.4, 8.7, 15.5, 4.5, 4.7, 20.6, 9.4, 23.5, 17.0, 4.5, 14.9, 8.4, 12.6, 13.6

6.2. 4.1, 13.3, 1.2, 1.9, 1.8, 1.7, 18.1, 14.3, 21.6, 7.7, 1.2, 0.5, 14.2, 5.6, 26.5, 5.5, 32.5, 6.7, 7.0, 3.0, 11.1, 10.0, 21.9, 9.1, 18.1, 10.6, 16.4, 6.6, 26.7, 31.0, 16.3, 28.5, 3.5, 12.2, 24.9, 4.6, 6.9, 9.0, 34.2, 27.5, 21.5, 0.4, 21.5, 28.9, 21.0, 22.1, 14.1, 8.8, 11.2, 15.6, 20.7, 20.8, 18.0, 9.6, 0.1, 15.7, 4.5, 1.1, 15.6, 9.7, 5.6, 14.8, 1.1, 27.5, 3.9, 11.7

6.3. 21.1, 19.6, 15.7, 15.6, 24.2, 12.4, 12.1, 10.0, 9.2, 4.9, 6.8, 8.9, 8.3, 6.7, 5.9, 17.7, 8.4, 19.2, 11.5, 12.5, 22.9, 11.3, 13.9, 8.5, 6.3, 23.5, 11.1, 12.0, 16.4, 7.0, 14.2, 15.3, 10.8, 10.2, 26.5, 20.8, 14.6, 12.0, 8.8, 16.4, 6.2, 10.1, 16.6, 13.1, 21.1, 16.7, 10.2, 20.0, 7.1, 9.0, 13.7, 12.7, 24.1, 14.8, 19.5, 5.7

6.4. 5.1, 12.9, 8.9, 14.4, 9.8, 11.8, 24.6, 11.2, 20.0, 7.2, 15.2, 16.8, 15.5, 6.5, 17.0, 12.5, 7.5, 20.3, 17.0, 20.9, 12.7, 20.5, 22.0, 17.0, 8.5, 12.6, 7.0, 27.1, 13.5, 10.7, 15.0, 23.0, 8.7, 15.1, 10.9, 7.5, 14.2, 16.0, 9.0, 11.7, 9.5, 10.3, 7.8, 11.5, 25.7

6.5. 12.0, 14.0, 19.0, 8.5, 6.5, 9.6, 7.6, 16.1, 6.4, 11.9, 15.6, 12.5, 15.6, 20.7, 13.4, 14.0, 11.4, 6.5, 11.4, 11.8, 15.1, 18.9, 10.6, 26.0, 13.2, 10.6, 5.5, 9.9, 6.0, 10.1,

[12] Для образца см. решение задач 2.1-2.3, а также пример 2.4 в Части 4, т.2.

4.3, 21.5, 6.2, 15.5, 14.6, 13.2, 23.8, 22.7, 19.5, 9.3, 9.6, 8.8, 7.8, 14.3, 23.5, 15.2, 7.8, 8.1

6.6. 13.5, 15.4, 15.5, 15.6, 24.0, 11.5, 30.0, 19.0, 13.8, 16.5, 23.2, 19.1, 18.3, 20.5, 10.2, 15.0, 20.5, 13.1, 19.1, 13.6, 19.9, 7.4, 17.5, 12.1, 29.5, 16.5, 21.3, 23.0, 19.5, 16.6, 8.3, 17.8, 17.6, 21.5, 21.7, 6.5, 19.5, 12.6, 11.0, 10.0, 22.9, 25.0, 21.1, 15.1, 19.7, 16.2, 15.3, 24.0, 14.5, 24.3, 8.4, 24.4, 27.1, 16.5

6.7. 22.0, 20.9, 24.5, 13.1, 16.8, 16.1, 12.4, 20.5, 23.8, 17.0, 15.0, 21.7, 13.1, 13.4, 22.0, 18.0, 30.5, 18.8, 20.2, 7.1, 21.5, 20.3, 19.5, 15.7, 19.6, 19.5, 12.5, 8.8, 20.2, 17.1, 25.0, 13.6, 18.3, 24.4, 8.8, 19.5, 24.1, 15.9, 23.4, 16.1, 17.0, 14.3, 20.9, 27.0, 10.3, 10.5

6.8. 9.2, 8.8, 1.5, 2.7, 19.0, 2.3, 0.1, 0.6, 6.3, 11.0, 10.4, 3.2, 15.4, 3.8, 2.1, 3.1, 10.1, 16.2, 0.6, 5.0, 7.1, 9.4, 13.3, 14.5, 12.3, 11.3, 0.2, 8.6, 13.5, 4.6, 4.4, 9.5, 15.5, 14.8, 23.8, 19.1, 17.0, 5.1, 6.1, 8.5, 6.2, 3.0, 5.0, 0.1, 3.7, 20.3, 19.2, 5.8, 21.4, 0.8, 0.3, 3.1, 16.8, 0.5

6.9. 7.1, 16.2, 22.1, 30.0, 20.3, 15.2, 12.5, 21.0, 17.0, 15.8, 24.2, 10.8, 21.8, 25.1, 13.0, 15.8, 16.2, 21.9, 16.8, 8.8, 27.7, 13.0, 20.3, 14.4, 20.4, 19.6, 13.7, 30.5, 13.6, 18.2, 19.6, 23.5, 16.8, 10.5, 19.6, 22.1, 24.3, 8.9, 18.7, 19.5, 17.2, 25.3, 20.0, 18.1, 21.1, 12.6

6.10. 19.9, 11.8, 15.2, 20.4, 13.1, 13.8, 27.0, 20.4, 11.8, 25.0, 23.5, 19.5, 17.7, 10.5, 16.5, 18.4, 30.0, 16.3, 21.4, 23.7, 17.5, 22.8, 10.1, 6.6, 15.5, 29.6, 21.6, 8.4, 19.1, 15.6, 21.4, 16.5, 24.5, 16.6, 23.1, 13.0, 19.1, 15.2, 24.6, 12.5, 19.6, 19.0, 19.6, 21.7, 7.5, 11.0, 14.4, 23.8, 15.5, 16.3, 8.3, 17.7, 17.9

6.11. 16.0, 7.8, 11.6, 6.4, 10.5, 20.7, 12.0, 8.8, 6.3, 13.1, 8.1, 16.1, 15.1, 16.0, 6.1, 6.5, 14.0, 9.6, 13.2, 22.6, 14.3, 15.8, 12.2, 19.5, 6.1, 26.7, 10.1, 13.5, 14.7, 4.3, 23.7, 8.0, 20.9, 12.0, 8.2, 13.4, 19.1, 15.0, 8.8, 9.7, 23.8, 10.3, 11.9, 19.1, 5.6, 10.9, 9.8, 9.7

6.12. 0.5, 2.9, 0.7, 11.7, 0.8, 3.3, 21.8, 9.6, 5.8, 0.8, 13.7, 14.8, 9.5, 10.3, 4.6, 4.7, 15.6, 0.3, 6.0, 0.3, 5.1, 19.2, 9.5, 8.5, 14.7, 4.9, 16.8, 23.8, 0.5, 0.4, 6.5, 1.3, 7.1, 6.5, 9.3, 20.7, 3.3, 6.4, 1.7, 5.5, 2.5, 2.4, 3.3, 8.9, 3.2, 6.9, 6.1, 3.8, 0.6, 8.6, 1.1, 8.6, 7.2, 5.2, 0.4, 2.5, 3.9, 23.1, 1.5, 3.5

6.13. 15.6, 14.3, 8.9, 6.7, 6.6, 32.4, 1.8, 8.8, 29.0, 34.2, 4.9, 6.8, 12.6, 6.1, 6.6, 4.1, 11.5, 16.2, 7.6, 3.1, 14.4, 26.5, 1.0, 26.4, 27.5, 0.9, 21.4, 14.7, 5.3, 9.4, 15.3, 11.2, 15.5, 20.9, 20.8, 0.4, 18.1, 9.5, 0.2, 4.0, 13.4, 1.0, 1.7, 1.8, 20.0, 1.7, 18.1, 7.2, 32.4, 5.6, 26.5, 5.5, 14.1, 28.5, 0.2, 0.9, 9.8, 10.9, 21.8, 9.0, 18.0, 10.3, 20.3, 16.2, 21.5, 32.1, 6.7, 4.4, 24.7, 12.2, 3.3, 19.5

6.14. 25.1, 14.8, 9.3, 11.1, 20.9, 14.6, 8.3, 8.2, 19.2, 8.3, 22.4, 10.4, 17.6, 13.5, 7.9, 6.4, 9.5, 6.3, 10.1, 11.5, 19.2, 11.8, 8.2, 8.1, 8.6, 4.0, 6.3, 17.8, 17.2, 9.1, 15.7, 7.1, 6.9, 2.8, 13.5, 14.6, 12.5, 17.4, 8.2, 18.8, 3.8, 4.8, 13.0, 3.9, 5.1, 4.5, 14.4, 13.3, 10.4, 4.8, 12.1, 6.7, 21.6, 7.1, 4.6, 22.2, 10.2, 8.1, 10.5

6.15. 10.1, 8.7, 9.1, 11.2, 6.9, 16.7, 13.2, 24.1, 5.5, 5.6, 10.0, 14.0, 23.5, 5.5, 8.3, 21.1, 12.5, 11.8, 9.0, 8.8, 16.4, 9.9, 12.1, 24.3, 12.3, 27.8, 11.3, 27.1, 19.7, 20.9, 13.6, 12.6, 14.7, 6.8, 16.1, 10.5, 8.2, 5.9, 17.6, 6.5, 15.4, 18.9, 10.0, 4.6, 14.5, 15.4, 15.0, 12.1, 8.2, 13.7, 21.1, 11.4, 10.0, 19.5, 16.5, 6.2

6.16. 1.7, 1.7, 26.6, 20.7, 15.4, 10.0, 18.1, 3.9, 15.3, 29.0, 1.1, 6.8, 27.7, 1.2, 22.0, 14.3, 5.7, 6.8, 1.5, 20.5, 9.0, 18.8, 24.6, 4.0, 8.7, 27.5, 16.2, 34.2, 6.0, 14.0, 12.2, 3.3, 0.3, 12.6, 0.9, 0.2, 16.2, 4.8, 10.8, 7.1, 22.0, 15.5, 26.4, 32.0, 18.1, 21.4, 22.0, 21.5, 4.4, 8.7, 20.6, 9.5, 5.3, 1.6, 6.5, 14.2, 32.4, 3.2, 11.1, 26.6, 32.5, 6.6, 0.3, 7.5, 9.6, 28.9, 1.1, 14.9, 13.3, 5.5, 11.5, 3.0, 6.6, 10.4

6.17. 13.2, 11.6, 13.0, 13.7, 13.8, 20.8, 15.8, 15.0, 7.6, 16.1, 12.1, 24.0, 15.1, 11.4, 19.9, 16.9, 21.1, 26.4, 23.1, 17.5, 12.5, 29.3, 12.5, 5.9, 18.5, 12.6, 17.3, 9.3, 9.6, 16.0, 19.3, 21.0, 20.9, 14.5, 24.0, 15.9, 18.4, 28.8, 15.7, 18.3, 19.0, 19.8, 14.8, 22.3, 13.2, 15.9, 19.0, 20.3

6.18. 8.8, 17.4, 3.5, 6.8, 15.5, 3.5, 11.5, 6.8, 16.2, 9.6, 6.7, 5.5, 16.5, 5.5, 1.2, 8.0, 19.7, 0.7, 3.4, 9.3, 1.9, 1.0, 0.6, 17.2, 24.1, 20.8, 21.9, 23.3, 11.0, 2.1, 15.3, 19.7, 6.3, 6.4, 0.9, 4.2, 16.1, 9.8, 11.5, 3.2, 4.8, 4.9, 13.8, 8.9, 7.5, 9.8, 13.8, 15.0, 0.9, 19.5, 12.9, 11.7, 5.4, 0.6, 10.6, 3.5, 2.8, 4.1, 0.5, 2.8

6.19. 18.1, 10.0, 15.4, 20.7, 26.6, 1.8, 1.7, 6.5, 2.5, 5.4, 0.9, 6.6, 27.5, 1.0, 21.8, 14.1, 5.5, 1.6, 2.8, 3.3, 16.1, 27.4, 8.6, 3.9, 24.5, 17.9, 8.9, 0.2, 14.8, 7.5, 16.0, 0.1, 0.8, 12.4, 0.2, 3.1, 12.2, 10.3, 9.5, 0.8, 2.8, 15.2, 26.2, 31.2, 17.5, 2.4, 21.7, 28.9, 11.3, 6.4, 32.1, 14.5, 11.0, 26.2, 34.1, 4.9, 7.0, 2.5, 9.2, 1.6, 6.6, 2.5, 34.0, 14.1, 32.3, 3.7, 6.5, 28.9, 6.1, 15.4

6.20. 16.5, 3.4, 15.4, 2.5, 12.4, 10.7, 3.7, 7.0, 8.1, 6.0, 12.2, 1.5, 6.5, 9.1, 18.1, 12.6, 16.4, 7.2, 2.8, 3.1, 13.5, 16.7, 5.2, 8.7, 16.1, 6.9, 9.3, 8.3, 8.8, 11.0, 24.0, 6.8, 14.7, 5.4, 9.1, 6.1, 17.9, 20.6, 13.5, 8.2, 3.7, 7.3, 2.4, 10.4, 7.3, 21.3, 7.7, 13.2, 9.1, 9.6, 5.5, 5.3, 7.1, 13.6, 10.1, 5.7, 18.1, 21.0, 19.6, 4.0, 11.7

6.21. 15.0, 9.0, 21.8, 14.8, 14.5, 12.4, 16.1, 16.0, 17.3, 12.0, 18.5, 22.5, 7.3, 21.3, 14.5, 23.8, 15.9, 12.3, 26.0, 8.7, 11.6, 17.9, 12.8, 25.4, 15.0, 18.6, 9.4, 13.2, 13.4, 14.6, 10.8, 14.5, 11.7, 16.9, 26.6, 18.5, 14.8, 23.5, 11.1, 29.5, 10.6, 14.8, 16.3, 10.5, 12.4, 13.8, 14.4, 13.7, 9.5, 17.6, 8.5, 9.2, 21.5, 18.5

6.22. 17.1, 14.8, 10.0, 13.9, 22.8, 0.1, 15.0, 12.3, 9.8, 23.3, 9.9, 10.9, 11.5, 7.8, 10.1, 9.1, 13.0, 13.3, 1.6, 9.0, 12.4, 6.6, 13.0, 7.7, 14.3, 7.0, 20.4, 6.5, 12.5, 8.8, 11.3, 9.9, 16.3, 5.4, 3.3, 5.6, 9.7, 6.1, 8.5, 15.1, 7.2, 18.0, 6.0, 13.8, 18.0, 3.6, 7.2, 14.9

6.23. 12.4, 5.8, 6.1, 0.6, 15.4, 3.9, 10.5, 16.8, 2.9, 8.5, 15.0, 8.1, 7.5, 8.3, 20.3, 10.6, 10.4, 10.0, 6.0, 20.1, 0.7, 1.4, 8.1, 2.6, 8.2, 17.5, 5.1, 2.8, 1.6, 4.6, 4.3, 18.7, 12.5, 4.2, 11.2, 2.1, 12.5, 12.6, 9.8, 4.4, 7.2, 1.5, 5.1, 7.2, 19.6, 6.1, 15.5, 24.0, 6.6, 17.2, 15.9, 5.1, 7.2, 12.2, 9.5, 10.8

6.24. 3.2, 1.7, 3.2, 3.8, 3.9, 10.8, 5.7, 13.2, -0.4, 2.1, 13.8, 5.0, 1.4, 9.9, 6.9, 11.1, -2.3, 5.8, 2.5, 19.4, -4.0, 2.1, 8.4, 2.5, 7.2, 9.1, 10.4, 9.2, 10.9, 20.8, 4.6, 14.5, 6.1, 8.6, 18.5, 6.3, 8.4, 9.2, 9.8, 4.8, 12.3, 3.2, 5.9, -0.5, 7.5, 5.0, 16.5, -2.5, 13.4, 9.1, 7.8, 1.5, 8.7, 6.2

6.25. 1.9, 19.8, 5.5, 9.2, 9.7, 6.6, 9.0, 12.7, 3.1, -2.4, 19.5, 6.4, 9.7, 2.6, 14.5, -1.7, 5.7, 10.4, 3.1, 13.1, -1.7, 1.1, 14.7, 6.5, 5.4, 13.7, 5.2, 11.7, 11.6, 7.6, 4.5, 5.3, 11.4, -3.5, 11.4, 1.8, 6.5, 7.9, 10.4, 13.9, 9.2, 5.6, 0.0, 8.4, 9.7, 6.3, 0.2, 7.5, 9.0, 13.5, 14.6, 17.1, 3.9

6.26. 5.0, 14.1, 20.2, 27.9, 18.3, 13.0, 15.1, 18.9, 21.4, 11.1, 13.7, 22.3, 8.7, 19.8, 23.0, 14.1, 20.0, 10.4, 12.3, 14.8, 6.9, 25.5, 11.2, 18.3, 17.5, 11.3, 17.5, 18.8, 28.4, 11.5, 16.3, 14.5, 8.5, 17.7, 20.3, 16.9, 10.5, 22.1, 6.9, 17.6, 15.1, 23.2, 18.1, 6.0, 14.0, 18.2

6.27. 10.8, 6.7, 13.3, 15.1, 11.8, 2.4, 9.4, 20.3, 19.8, 9.5, 0.6, 3.1, 4.2, 5.6, 11.9, 8.7, 7.9, 9.5, 10.9, 6.9, 14.9, 14.2, -3.1, 9.4, 10.0, 12.1, 7.0, 5.7, 6.1, 6.1, -1.4, 3.0, 3.5, 14.5, 10.7, 17.5, 10.3, 10.1, 3.4, 10.1, 2.4, -1.3, 8.5, 11.9, 0.4, 4.9

6.28. 5.4, 5.3, 5.5, 13.7, 1.8, 19.7, 8.8, 4.4, 14.5, 6.4, 13.3, 8.7, 8.3, 10.3, 0.1, 5.2, 11.4, 9.7, 10.3, 9.0, 3.0, 9.7, -2.5, 7.5, 1.9, 14.4, 17.1, 19.4, 6.4, 12.9, 9.1, 6.5, -1.8, 7.7, -3.5, 3.9, 7.6, 11.6, 11.5, 9.6, 2.5, 1.0, -0.1, -1.8, 3.2, 12.8, 14.6, 11.3, 5.2, 6.4, 5.7, 13.9, 6.5

6.29. 6.8, 8.9, 14.1, 3.7, 1.3, 4.6, 2.8, 11.1, 14.4, 3.0, 7.2, 10.7, 15.8, 8.3, 8.0, 6.4, 10.0, 14.0, 6.8, 6.7, 5.7, 21.5, 8.3, 5.7, 0.4, -0.8, 15.5, 1.1, 5.2, 0.9, 10.8, 9.5, 8.2, 18.7, 4.4, 4.6, 3.7, 2.9, 1.5, 2.5, 9.2, 19.7, 10.1, 11.1, 1.2, 4.8, 17.5, 5.4

6.30. 1.2, -3.1, 6.7, 3.2, 6.5, 1.9, 2.3, 9.6, 0.1, 2.6, 0.1, 1.5, 11.2, 0.2, 4.1, 13.6, -3.4, -1.6, 3.6, 17.2, 11.2, 9.6, -1.1, -4.3, -3.5, 5.2, -4.0, 9.9, 1.3, 12.7, -0.7, -4.4, 6.7, 4.6, -5.2, 4.9, -3.0, 6.3, 2.7, 14.5, 0.7, -2.5, 7.8, -3.3, 5.6, 5.5, 2.3, -1.7, 3.9, 0.1, -0.9, -1.4, 14.2, 0.0, 2.1, 9.2

Контрольная работа № 9
ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Задача 1[13]. Пользуясь условиями Коши-Римана, установить дифференцируемость функции $f(z)$ и найти $f'(z_0)$.

1.1.	$f(z)=z^2+e^z$,	$z_0=0$.	1.2.	$f(z)=e^z$,	$z_0=0$.
1.3.	$f(z)=z+\sin z$,	$z_0=0$.	1.4.	$f(z)=\sin z$,	$z_0=0$.
1.5.	$f(z)=z^{-1}$,	$z_0=1$.	1.6.	$f(z)=z^2e^z$,	$z_0=0$.
1.7.	$f(z)=\dfrac{z^3-2iz+i}{z}$,	$z_0=i$.	1.8.	$f(z)=z^2+2z$,	$z_0=i$.
1.9.	$f(z)=\dfrac{i}{z}+iz$,	$z_0=1$.	1.10.	$f(z)=ze^{iz}$,	$z_0=0$.
1.11.	$f(z)=z\sin z$,	$z_0=-1$.	1.12.	$f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$,	$z_0=i$.
1.13.	$f(z)=\dfrac{1}{z}\ln z$,	$z_0=i$.	1.14.	$f(z)=e^z$,	$z_0=i$.
1.15.	$f(z)=z\cos z$,	$z_0=0$.	1.16.	$f(z)=\dfrac{z^2(3+2i)}{2(z-1)}$,	$z_0=0$.
1.17.	$f(z)=z^4$,	$z_0=i$.	1.18.	$f(z)=z\cos z+z$,	$z_0=0$.
1.19.	$f(z)=\dfrac{1}{z}(\sin z+1)$,	$z_0=1$.	1.20.	$f(z)=z+\dfrac{1}{z}$,	$z_0=1$.
1.21.	$f(z)=z^2\sin z$,	$z_0=0$.	1.22.	$f(z)=\dfrac{\cos z}{z}$,	$z_0=1$.
1.23.	$f(z)=\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}$,	$z_0=1$.	1.24.	$f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^2+1}$,	$z_0=-2i$.
1.25.	$f(z)=\operatorname{tg} z$,	$z_0=-i$.	1.26.	$f(z)=\sin z+\cos z$,	$z_0=\pi$.
1.27.	$f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$,	$z_0=\dfrac{\pi}{2}$.	1.28.	$f(z)=\dfrac{\cos z}{\sin^2 z}$,	$z_0=\dfrac{\pi}{2}$.
1.29.	$f(z)=\dfrac{z}{\operatorname{tg} z}$,	$z_0=\pi$.	1.30.	$f(z)=\dfrac{\operatorname{tg} z}{z}$,	$z_0=i$.

Задача 2[14]. Вычислить интеграл, используя вычеты.

2.1. $$\oint\limits_{|z+2i|=3}\left(e^{1/(z+i)}+\frac{7}{z(z^2+4)}\right)dz.$$

[13] Автор – Н.В.Полухин. Для образца см. решение задач 3.8-3.13, а также задачи 3.2 в Части 4, т.1.

[14] Автор – В.И.Голинько. Для образца см. решение задач 3.37-3.38, а также задач 3.32-3.36 в Части 4, т.1.

2.2. $$\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \left(\sin\frac{2}{z} + \frac{z-2}{(z-i)^2(z^2+z-2)}\right) dz.$$

2.3. $$\oint\limits_{|z+i|=2} \left(\cos\left(1+\frac{1}{z}\right) + \frac{z}{(z^2-z-2)^2} + \frac{e^z}{z+i}\right) dz.$$

2.4. $$\oint\limits_{|z|=2} \left(z^2\sin\frac{1}{z^3} + \frac{z+4}{z^2(z^2+2z-3)}\right) dz.$$

2.5. $$\oint\limits_{|z-i|=2} \left(e^{1/(z-1)} + \frac{\sin z}{z^3(z^2+4)}\right) dz.$$

2.6. $$\oint\limits_{|z-\pi|=3} \left(\operatorname{sh}\frac{1}{z-1} + \frac{z+3}{(z^2+4z)^2} + \frac{z}{1+\cos z}\right) dz.$$

2.7. $$\oint\limits_{|z-1-i|=\frac{3}{2}} \left(z\operatorname{ch}\frac{1}{z-2} + \frac{2}{z(z^2-4)^2}\right) dz.$$

2.8. $$\oint\limits_{|z|=3} \left(\frac{2}{z+i}\cos\frac{1}{z+i} + \frac{z+i\pi}{e^z+1} + \frac{z}{(z^2+6z+8)^2}\right) dz.$$

2.9. $$\oint\limits_{|z+2|=2} \left((z+3)\sin\frac{1}{z-1} + \frac{z-4}{(z+1+i)(z^2-z)^2}\right) dz.$$

2.10. $$\oint\limits_{|z+1+i|=\dfrac{3}{2}} \left(z\operatorname{sh}\frac{1}{z-i} + \frac{\sin z}{z^2(z^2-4)^2}\right) dz.$$

2.11. $$\oint\limits_{|z-1|=2} \left(z\operatorname{ch}\frac{1}{z-1-i} + \frac{z+3}{(z^2-4)(1-e^z)^2}\right) dz.$$

2.12. $$\oint\limits_{|z|=2} \left(z \sin\left(1 + \frac{1}{z}\right) + \frac{4}{z(z^2 - 2z - 3)^2} \right) dz.$$

2.13. $$\oint\limits_{|z-1|=3} \left(e^{i/(z-1-i)} + \frac{z}{\sin^2 z} + \frac{2z+3}{z^2+25} \right) dz.$$

2.14. $$\oint\limits_{|z+2i|=3} \left(z \cos\frac{1}{z} + \frac{z-2}{(z-i+1)^2(z^2+3z-4)} \right) dz.$$

2.15. $$\oint\limits_{|z-2|=3} \left(e^{1-\frac{1}{z+i}} + \frac{z}{(\cos z - 1)^2} \right) dz.$$

2.16. $$\oint\limits_{|z-i|=3} \left(\cos\left(1 - \frac{1}{z}\right) + \frac{z+2}{(z+i)^2(z^2-2z-3)} \right) dz.$$

2.17. $$\oint\limits_{|z+i|=2} \left((z+2)e^{1/z} + \frac{\cos 2z}{(z+1)^2(z^2+4)} \right) dz.$$

2.18. $$\oint\limits_{|z+i|=\frac{3}{2}} \left(\sin\left(2 - \frac{1}{z+1}\right) + \frac{2}{z^2(z^2+z-2)} \right) dz.$$

2.19. $$\oint\limits_{|z+2|=\frac{3}{2}} \left(ze^{3/(z+2)} + \frac{4}{(z+1)^2(4z^2-9)} \right) dz.$$

2.20. $$\oint\limits_{|z-1|=2} \left(\operatorname{sh}\left(1 + \frac{1}{z-2}\right) + \frac{e^z+1}{(z+i)^2(z^2-4z)} \right) dz.$$

2.21. $$\oint\limits_{|z-3i|=5} \left(\operatorname{ch}\left(2 + \frac{i}{z-i}\right) + \frac{\cos^2 z}{z^2(z^2+3z)-10} \right) dz.$$

2.22. $$\oint\limits_{|z+5i|=7}\left(\frac{3}{z}e^{1/z^2}+\frac{\sin z}{(z^2-8z+15)(z-i)^2}\right)dz.$$

2.23. $$\oint\limits_{|z-i|=3}\left(\sin\frac{1}{z+i}+\frac{z+2}{(e^z-1)^2(z^2+z-12)}\right)dz.$$

2.24. $$\oint\limits_{|z+1|=3}\left(\cos\frac{1}{z-2i}+\frac{e^{iz}}{z(z^2-2z-8)^2}\right)dz.$$

2.25. $$\oint\limits_{|z+i|=3}\left(\frac{2}{z}\operatorname{ch}\frac{1}{z}+\frac{2z+3}{(z^2+9)^2(z^2-4z-5)}\right)dz.$$

2.26. $$\oint\limits_{|z-1|=3}\left(z^2\sin\frac{3}{z}+\frac{\cos z}{(z^2-9)^2(z-1-i)}\right)dz.$$

2.27. $$\oint\limits_{|z-i\pi|=4}\left(e^{2/(z-i\pi)}+\frac{z+6}{z(z+1+i)\sin z}\right)dz.$$

2.28. $$\oint\limits_{|z|=2}\left(\frac{3}{z}+z\cos\frac{1}{z}+\frac{e^z+z}{(z-1)(z^2+2z-3)^2}\right)dz.$$

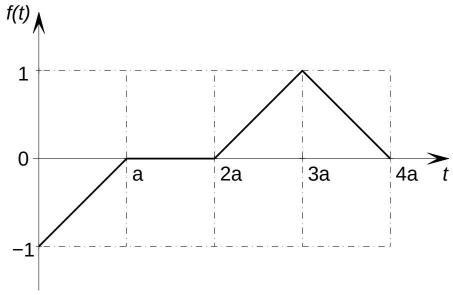
2.29. $$\oint\limits_{|z-1+i|=2}\left(\operatorname{sh}\frac{1}{z+i}+\frac{z-2}{(z^4-16)^2}\right)dz.$$

2.30. $$\oint\limits_{|z-2|=3}\left((z+1)e^{1/z}+\frac{z-\pi}{\sin z(z^2-8z+12)^2}\right)dz.$$

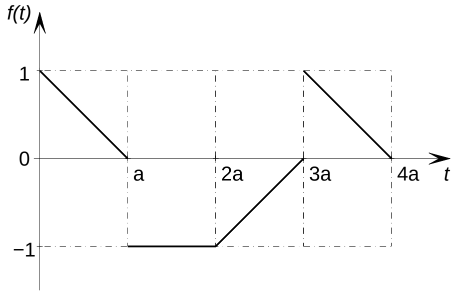
Задача 3[15]. Найти изображение функции, заданной графически.

[15] Автор – Н.В.Полухин. Для образца решения см. пример 4.12 в Части 4, т.1.

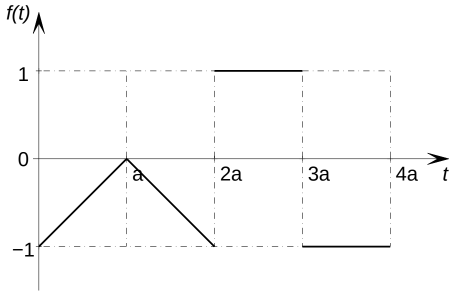
3.1.



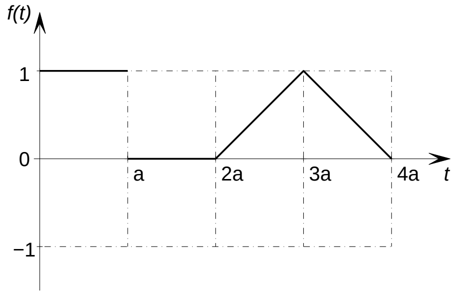
3.2.



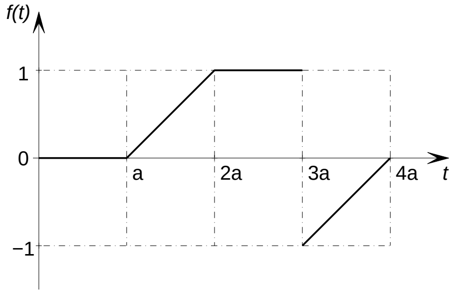
3.3.



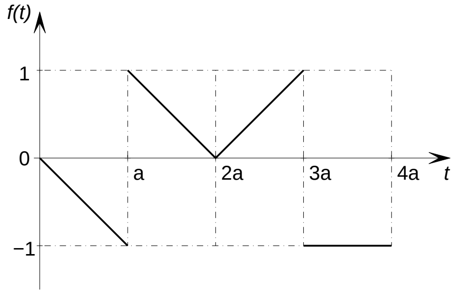
3.4.



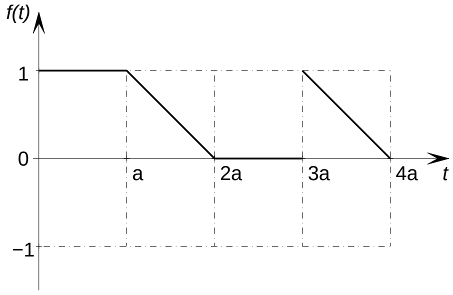
3.5.



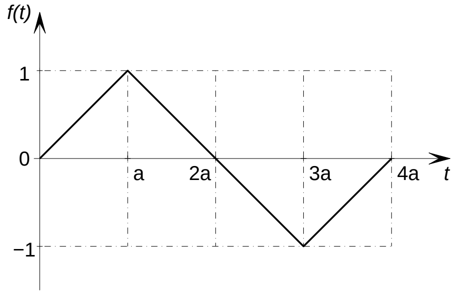
3.6.



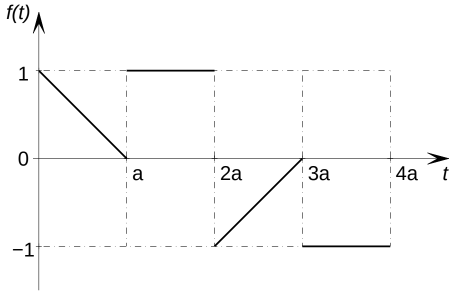
3.7.



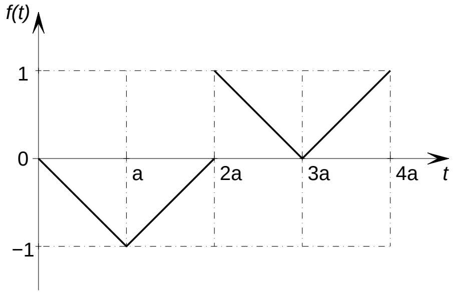
3.8.



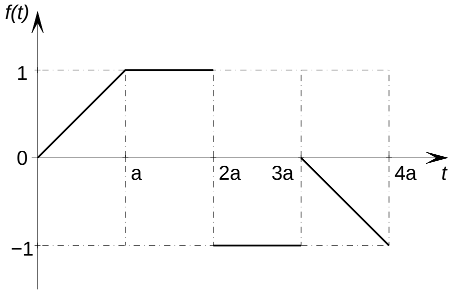
3.9.



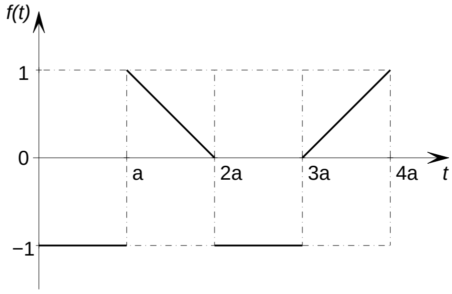
3.10.



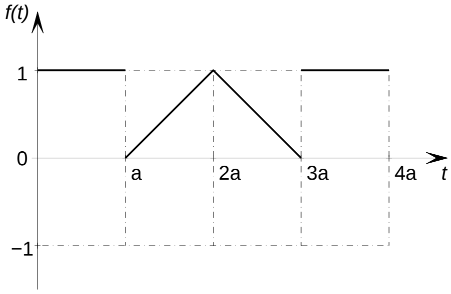
3.11.



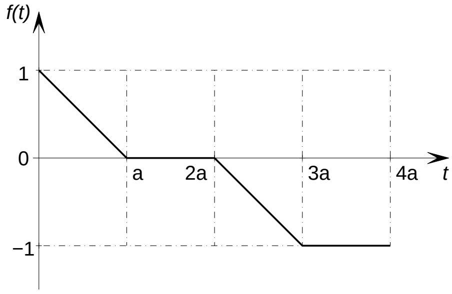
3.12.



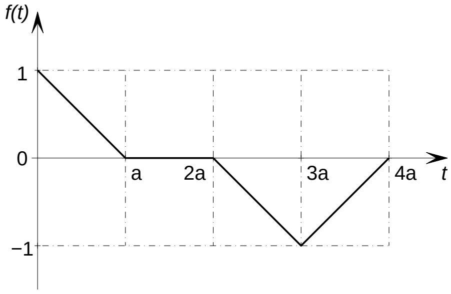
3.13.



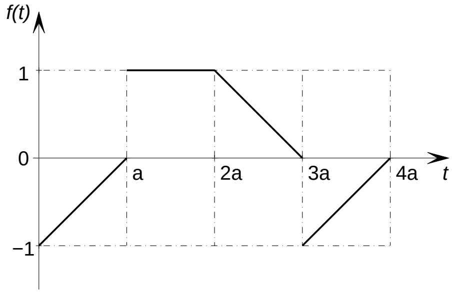
3.14.



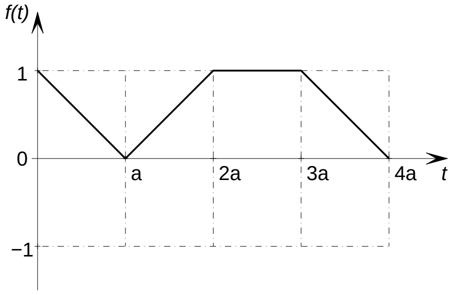
3.15.



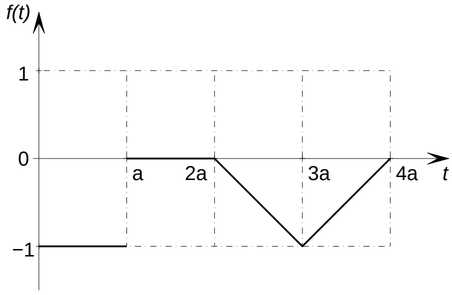
3.16.



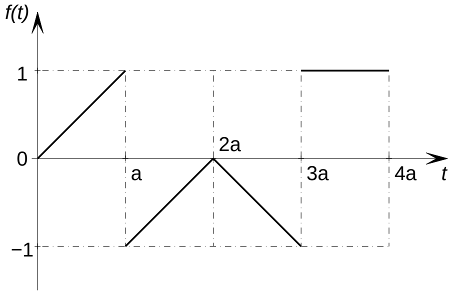
3.17.



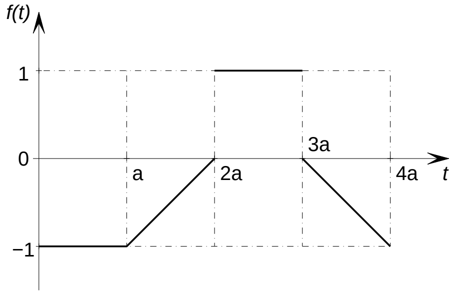
3.18.



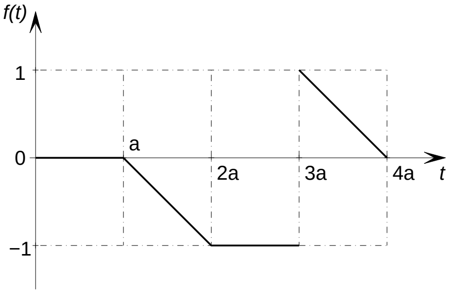
3.19.



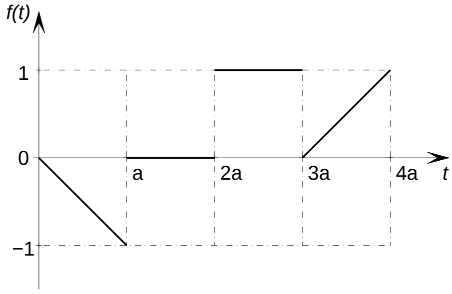
3.20.



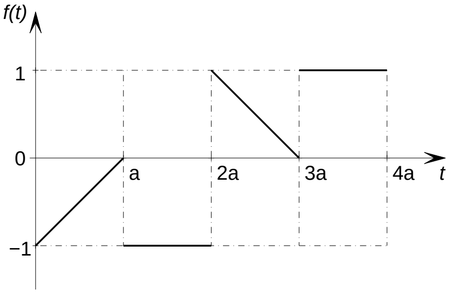
3.21.



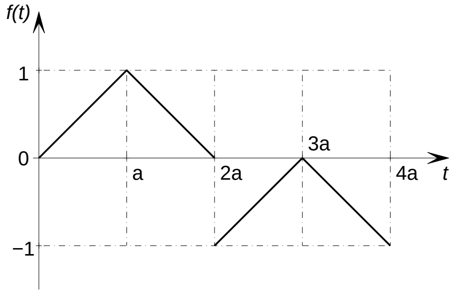
3.22.



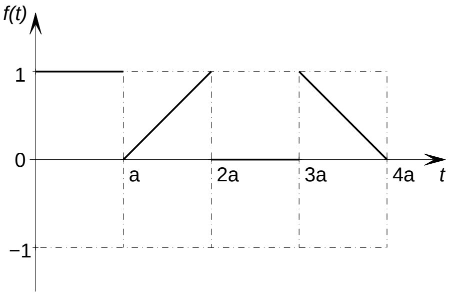
3.23.



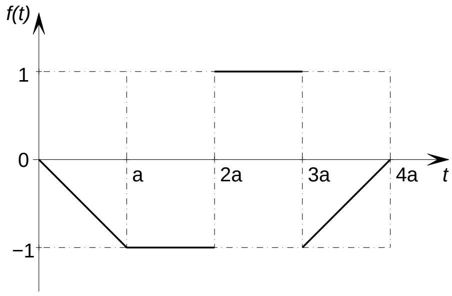
3.24.



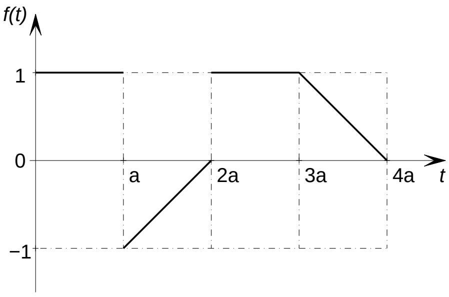
3.25.



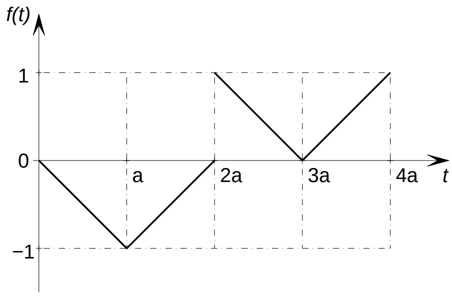
3.26.



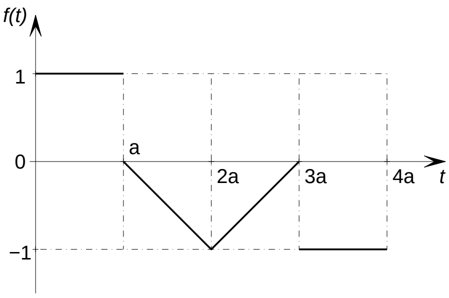
3.27.



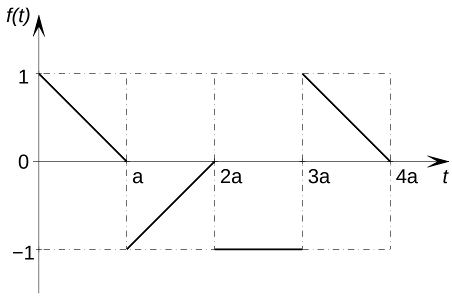
3.28.



3.29.



3.30.



Задача 4[16]. Методом операционного исчисления найти решение задачи Коши.

4.1. $x''+4x = \cos t, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = 2.$

4.2. $x''-4x = t^2 + 6t - 2, \qquad x(0) = 0, \qquad x'(0) = 0.$

[16]Автор – И.П.Рязанцева. Для образца решения см. пример 4.21 в Части 4, т.1.

4.3. $x''-7x'+6x = 5e^t, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = -1.$

4.4. $x''+2x'+5x = 3\cos t, \qquad x(0) = 0, \qquad x'(0) = 0.$

4.5. $x''+4x'+4x = 5e^{-2t}, \qquad x(0) = -1, \qquad x'(0) = 1.$

4.6. $x''+x = t, \qquad x(0) = 0, \qquad x'(0) = 2.$

4.7. $x''+6x' = t^2 - 5t - 1, \qquad x(0) = 2, \qquad x'(0) = -2.$

4.8. $x''-x = te^t, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = -1.$

4.9. $x''-2x'+2x = te^t, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = 1.$

4.10. $x''-3x'+2x = te^{2t}, \qquad x(0) = -2, \qquad x'(0) = -2.$

4.11. $x''-2x'+5x = \cos 3t, \qquad x(0) = 2, \qquad x'(0) = 2.$

4.12. $x''+6x'+9x = 5e^{-3t}, \qquad x(0) = -1, \qquad x'(0) = -2.$

4.13. $x''+4x'-12x = 5\sin 3t, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = 1.$

4.14. $x''-2x' = t^2 - 3t, \qquad x(0) = 3, \qquad x'(0) = 3.$

4.15. $x''+2x' = te^{-2t}, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = -1.$

4.16. $x''-4x'+4x = 5te^{-2t}, \qquad x(0) = 0, \qquad x'(0) = 0.$

4.17. $x''+2x'+x = 5e^{-t}, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = 3.$

4.18. $x''+2x'+5x = te^{-t}, \qquad x(0) = 0, \qquad x'(0) = 0.$

4.19. $x''-2x'+5x = \sin 2t, \qquad x(0) = 0, \qquad x'(0) = 1.$

4.20. $x''-4x' = t^2 - 3, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = 0.$

4.21. $x''+4x' = 3e^t, \qquad x(0) = 0, \qquad x'(0) = 0.$

4.22. $x''-6x'+9x = \cos 3t, \qquad x(0) = 0, \qquad x'(0) = 1.$

4.23. $x''-7x'-8x = t^2 + 3t, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = 1.$

4.24. $x''+7x'-8x = 2e^{-t}, \qquad x(0) = -1, \qquad x'(0) = 1.$

4.25. $x''-5x'+4x = e^{-t}, \qquad x(0) = 2, \qquad x'(0) = 0.$

4.26. $x''+5x'+4x = e^{-t}, \qquad x(0) = 0, \qquad x'(0) = 2.$

4.27. $x''-9x'+20x = t^2 - 5, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = 0.$

4.28. $x''-x'-20x = t^2 + 5t, \qquad x(0) = 0, \qquad x'(0) = -1.$

4.29. $x''-9x = \cos 3t, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = -1.$

4.30. $x''+9x = \sin 2t, \qquad x(0) = 0, \qquad x'(0) = 2.$

Задача 5[17]. Методом операционного исчисления найти частное решение заданной системы дифференциальных уравнений.

5.1.
$$\begin{cases} x' = 8x-6y, \\ y' = 7x-5y, \end{cases} \qquad x(0) = 0, \qquad y(0) = 1.$$

5.2.
$$\begin{cases} x' = -7x+y, \\ y' = -2x-5y, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \qquad y(0) = 0.$$

5.3.
$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2x+2y, \end{cases} \qquad x(0) = -1, \qquad y(0) = 0.$$

5.4.
$$\begin{cases} x' = x+y, \\ y' = x-y, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \qquad y(0) = 1.$$

5.5.
$$\begin{cases} x' = 4x+4y, \\ y' = 6x+2y, \end{cases} \qquad x(0) = 2, \qquad y(0) = 0.$$

5.6.
$$\begin{cases} x' = 3x+8y, \\ y' = x+y, \end{cases} \qquad x(0) = -3, \qquad y(0) = 1.$$

5.7.
$$\begin{cases} x' = -5x-2y, \\ y' = -4x-3y, \end{cases} \qquad x(0) = 4, \qquad y(0) = 2.$$

[17] Автор – И.П.Рязанцева. Для образца решения см. пример 4.22 в Части 4, т.1.

5.8.

$$\begin{cases} x' = 6x - 8y, \\ y' = 3x - 5y, \end{cases} \qquad x(0) = -2, \qquad y(0) = 1.$$

5.9.

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = -2x + 8y, \end{cases} \qquad x(0) = 2, \qquad y(0) = -1.$$

5.10.

$$\begin{cases} x' = -4x - 4y, \\ y' = -6x - 2y, \end{cases} \qquad x(0) = -1, \qquad y(0) = 4.$$

5.11.

$$\begin{cases} x' = -x - 7y, \\ y' = -5x - 3y, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \qquad y(0) = 3.$$

5.12.

$$\begin{cases} x' = -5x - 3y, \\ y' = -8x - 3y, \end{cases} \qquad x(0) = 0, \qquad y(0) = 2.$$

5.13.

$$\begin{cases} x' = -7x + 4y, \\ y' = 5x - 8y, \end{cases} \qquad x(0) = 0, \qquad y(0) = 5.$$

5.14.

$$\begin{cases} x' = 2x + 6y, \\ y' = 4x + 4y, \end{cases} \qquad x(0) = 2, \qquad y(0) = 2.$$

5.15.

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 8x + 3y, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \qquad y(0) = 1.$$

5.16.

$$\begin{cases} x' = 3x + 5y, \\ y' = x - y, \end{cases} \qquad x(0) = 3, \qquad y(0) = 1.$$

5.17.

$$\begin{cases} x' = -3x - 4y, \\ y' = -2x - 5y, \end{cases} \qquad x(0) = 4, \qquad y(0) = 2.$$

5.18.

$$\begin{cases} x' = -5x + 3y, \\ y' = -8x + 6y, \end{cases} \qquad x(0) = -4, \qquad y(0) = 1.$$

5.19.
$$\begin{cases} x' = 8x-2y, \\ y' = 2x+3y, \end{cases} \qquad x(0) = 0, \qquad y(0) = 4.$$

5.20.
$$\begin{cases} x' = -2x-6y, \\ y' = -4x-4y, \end{cases} \qquad x(0) = -1, \qquad y(0) = -2.$$

5.21.
$$\begin{cases} x' = -3x-5y, \\ y' = -7x-y, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \qquad y(0) = 2.$$

5.22.
$$\begin{cases} x' = -3x-8y, \\ y' = -3x-5y, \end{cases} \qquad x(0) = -3, \qquad y(0) = 3.$$

5.23.
$$\begin{cases} x' = -5x+y, \\ y' = -2x-7y, \end{cases} \qquad x(0) = -2, \qquad y(0) = 4.$$

5.24.
$$\begin{cases} x' = 4x+4y, \\ y' = -6x-7y, \end{cases} \qquad x(0) = -1, \qquad y(0) = 3.$$

5.25.
$$\begin{cases} x' = -7x+4y, \\ y' = -6x+4y, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \qquad y(0) = -2.$$

5.26.
$$\begin{cases} x' = 5x, \\ y' = 2x-8y, \end{cases} \qquad x(0) = 3, \qquad y(0) = -1.$$

5.27.
$$\begin{cases} x' = -8x, \\ y' = 4x+5y, \end{cases} \qquad x(0) = 2, \qquad y(0) = 1.$$

5.28.
$$\begin{cases} x' = 5x-5y, \\ y' = 6x-8y, \end{cases} \qquad x(0) = 0, \qquad y(0) = 5.$$

5.29.
$$\begin{cases} x' = -8x-5y, \\ y' = 6x+5y, \end{cases} \qquad x(0) = -1, \qquad y(0) = -3.$$

5.30.
$$\begin{cases} x' = 5x - 11y, \\ y' = 2x - 8y, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \qquad y(0) = -3.$$

Задача 6[18]. Найти спектральную функцию, построить амплитудный и фазовый спектры функции $f(t)$.

6.1. $f(t) = \begin{cases} -2, & t \in (-2;0), \\ 2, & t \in (0;2), \\ 0, & t \notin (-2;2). \end{cases}$ 6.2. $f(t) = \begin{cases} 2, & |t| < 4, \\ 0, & |t| > 4. \end{cases}$

6.3. $f(t) = \begin{cases} 3, & t \in (0;4), \\ 0, & t \notin (0;4). \end{cases}$ 6.4. $f(t) = \begin{cases} |t|, & |t| < 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$

6.5. $f(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$ 6.6. $f(t) = \begin{cases} 0, & t > 0, \\ e^{3t}, & t < 0. \end{cases}$

6.7. $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1, \\ 2, & 1 < |t| < 2, \\ 0, & |t| > 2. \end{cases}$ 6.8. $f(t) = \begin{cases} \cos 3t, & |t| < \pi/3, \\ 0, & |t| > \pi/3. \end{cases}$

6.9. $f(t) = \begin{cases} \sin 4t, & |t| < \pi/4, \\ 0, & |t| > \pi/4. \end{cases}$ 6.10. $f(t) = \begin{cases} 1 + t, & t \in (-1;0), \\ 1 - t, & t \in (0;1), \\ 0, & t \notin (-1;1). \end{cases}$

6.11. $f(t) = \begin{cases} 2, & t \in (-3;0), \\ 0, & t \notin (-3;0). \end{cases}$ 6.12. $f(t) = \begin{cases} 2, & t \in (2;4), \\ 0, & t \notin (2;4). \end{cases}$

6.13. $f(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{3}, & |t| < 3, \\ 0, & |t| > 3. \end{cases}$ 6.14. $f(t) = \begin{cases} 2, & |t| \in (1;2), \\ 0, & |t| < 1, |t| > 2. \end{cases}$

6.15. $f(t) = \begin{cases} 2, & t \in (1;2), \\ -2, & t \in (-2;-1), \\ 0, & |t| < 1, |t| > 2. \end{cases}$ 6.16. $f(t) = \begin{cases} 2 - 3|t|, & |t| < 1/3, \\ 0, & |t| > 1/3. \end{cases}$

6.17. $f(t) = \begin{cases} 3, & t \in (-2;0), \\ -3, & t \in (0;2), \\ 0, & t \notin (-2;2). \end{cases}$ 6.18. $f(t) = \begin{cases} -1, & 2 < |t| < 3, \\ 0, & |t| < 2, |t| > 3. \end{cases}$

6.19. $f(t) = \begin{cases} 4, & t \in (-4;0), \\ 0, & t \notin (-4;0). \end{cases}$ 6.20. $f(t) = \begin{cases} 2, & t \in (-4;-2), \\ 0, & t \notin (-4;-2). \end{cases}$

[18]Автор – И.П.Рязанцева. Для образца решения см. пример 5.2 в Части 4, т.1.

6.21. $f(t) = \begin{cases} 2+3t, & t \in (-\frac{1}{3}; 0), \\ 2-3t, & t \in (0; \frac{1}{3}), \\ 0, & |t| > \frac{1}{3}. \end{cases}$ 6.22. $f(t) = \begin{cases} -2|t|, & |t| < 1/2, \\ 0, & |t| > 1/2. \end{cases}$

6.23. $f(t) = \begin{cases} 2, & t \in (-1; 0), \\ -1, & t \in (0; 1), \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$ 6.24. $f(t) = \begin{cases} \cos 2t, & t \in (0; \pi/2), \\ 0, & t \notin (0; \pi/2). \end{cases}$

6.25. $f(t) = \begin{cases} \sin 3t, & t \in (-\pi/3; 0), \\ 0, & t \notin (-\pi/3; 0). \end{cases}$ 6.26. $f(t) = e^{-|t|}$.

6.27. $f(t) = \begin{cases} 1+\cos 2t, & |t| < \pi/2, \\ 0, & |t| > \pi/2. \end{cases}$ 6.28. $f(t) = \begin{cases} -3, & t \in (-2; 0), \\ 2, & t \in (0; 2), \\ 0, & |t| > 2. \end{cases}$

6.29. $f(t) = \begin{cases} \sin 4t, & t \in (0; \pi/4), \\ 0, & t \notin (0; \pi/4). \end{cases}$ 6.30. $f(t) = \begin{cases} \cos 2t, & t \in (-\frac{\pi}{2}; 0), \\ 0, & t \notin (-\frac{\pi}{2}; 0). \end{cases}$

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставить поля шириной 4-5 см для замечаний рецензента.

2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, шифр, номер контрольной работы, название дисциплины. В конце работы следует проставить дату ее выполнения.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

4. Решения задач должны располагаться в порядке возрастания номеров задач.

5. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условия.

6. После получения прорецензированной незачтенной работы студент должен исправить все ошибки и выполнить все рекомендации рецензента в той же тетради.

7. Номер варианта контрольной работы определяется по последним двум цифрам номера зачетной книжки студента и соответствует этим цифрам, если они образуют число от 01 до 30. Если же число больше 30, то номер варианта равен остатку после деления этого числа на 30. Если же в остатке получился ноль, тогда ваш вариант 30.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

Векторный анализ

1. Векторное поле. Векторные линии и их дифференциальные уравнения.

2. Односторонние и двухсторонние поверхности. Поток векторного поля через поверхность. Физический смысл потока в поле скоростей жидкости. Формула Остроградского-Гаусса.

3. Дивергенция векторного поля, ее физический смысл. Вычисление дивергенции. Соленоидальные поля.

4. Работа силового поля. Циркуляция векторного поля. Формула Стокса. Ротор поля. Физический смысл ротора в поле скоростей. Условия независимости криволинейного интеграла от формы линии интегрирования.

5. Потенциальное поле. Условия потенциальности поля. Вычисление криволинейного интеграла от полного дифференциала. Нахождение потенциала.

Функции комплексного переменного

1. Элементарные функции комплексного переменного.

2. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Дифференцируемость элементарных функций.

3. Интегрирование по комплексному аргументу. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.

4. Ряды Тейлора и Лорана. Изолированные особые точки функций, их классификация.

5. Вычеты. Основная теорема о вычетах. Применение вычетов к вычислению интегралов.

Операционное исчисление.

1. Преобразование Лапласа. Основные теоремы об оригиналах и изображениях. Формулы обращения интеграла Лапласа. Свертка функций. Интеграл Дюамеля. Решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений операционным методом.

Теория вероятностей

1. Предмет теории вероятностей. Статистическое определение вероятности. Аксиома сложения вероятностей. Классическое определение вероятности. Аксиома умножения вероятностей. Элементы комбинаторики.

2. Формула полной вероятности, формула Байеса.

3. Формула Бернулли. Формула Пуассона. Локальная теорема Муавра-Лапласа. Интегральная теорема Лапласа.

4. Понятие случайной величины. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины. Функция распределения вероятностей. Функция плотности распределения вероятностей.

5. Числовые характеристики случайных величин, их свойства.

6. Основные законы распределения непрерывных случайных величин: равномерный, показательный, нормальный.

Интеграл Фурье

1. Интеграл Фурье в действительной и комплексной форме. Достаточные условия представимости функции в виде интеграла Фурье. Амплитудный и фазовый спектры функции.

Математическая статистика

1. Предмет математической статистики. Простой статистический ряд. Группировка. Гистограмма.

2. Статистические оценки параметров распределения. Несмещенность и состоятельность оценок. Оценки математического ожидания и дисперсии. Доверительный интервал. Построение доверительного интервала для математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии.

3. Понятие критерия. Построение критических областей. Правило принятия гипотезы. Понятие выравнивающей кривой. Критерий Пирсона. Критерий Колмогорова.

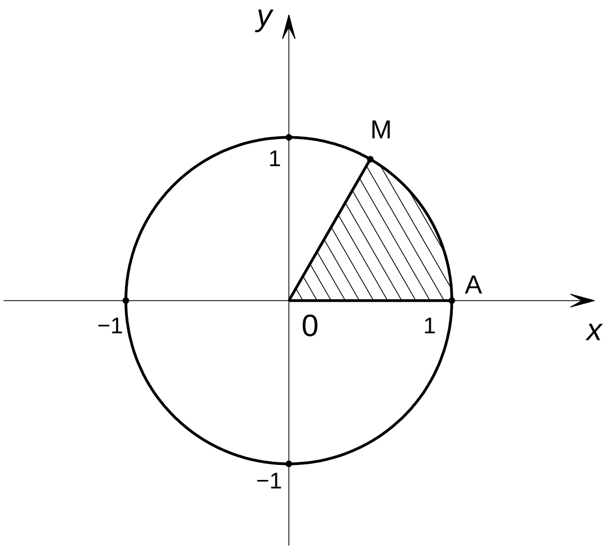


Рис. 1.1

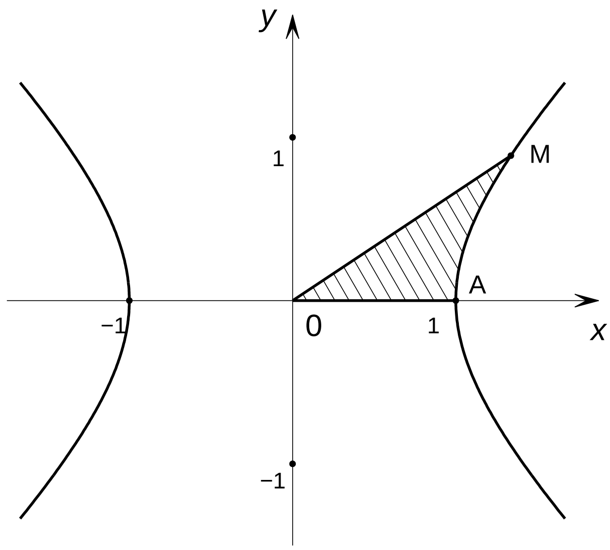


Рис. 1.2

ДОПОЛНЕНИЕ I. Гиперболические функции

В данном курсе (см. Часть 4, т.1, с.66, 112) уже упоминались функции *косинус гиперболический* и *синус гиперболический*

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tag{1.1}$$

а также *тангенс гиперболический* и *котангенс гиперболический*

$$\mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}, \quad \mathrm{cth}x = \frac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}}.$$

Как уже было показано в курсе ТФКП (см. Часть 4, т.1, с.66), между гиперболическими и тригонометрическими функциями существует следующая связь:

$$\cos(ix) = \mathrm{ch}x, \quad \sin(ix) = i\mathrm{sh}x, \tag{1.2}$$

$$\cos x = \mathrm{ch}(ix), \quad \sin x = \frac{1}{i}\mathrm{sh}(ix) = -i\mathrm{sh}(ix). \tag{1.3}$$

1. О названии. Покажем, что $\mathrm{ch}x$ и $\mathrm{sh}x$ соотносятся с гиперболой так же (в указанном ниже смысле), как $\cos x$ и $\sin x$ соотносятся с окружностью.

Заметим, во-первых, что

$$\mathrm{ch}^2 x = \frac{1}{4}\Big(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\Big) = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2},$$

то есть

$$\mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}2x + 1}{2}. \tag{1.4}$$

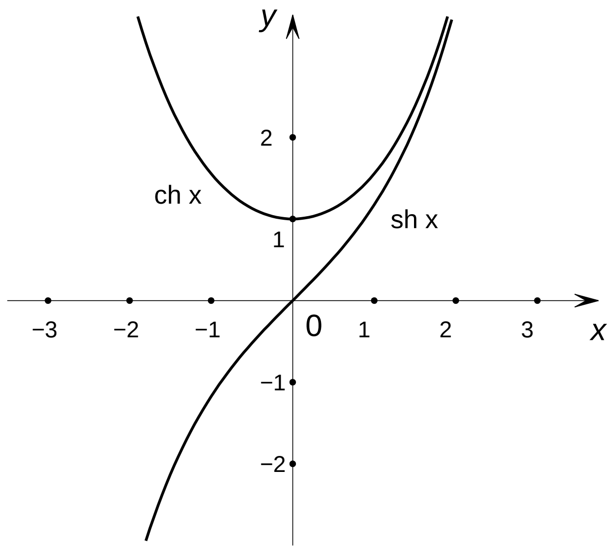


Рис. 1.3

И аналогично,

$$\mathrm{sh}^2 x = \frac{1}{4}\Big(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\Big) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} - \frac{1}{2},$$

то есть

$$\mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch} 2x - 1}{2}. \tag{1.5}$$

Стало быть,

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1. \tag{1.6}$$

Таким образом, правая[19] ветвь гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ может быть задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \mathrm{ch} t, \\ y = \mathrm{sh} t, \end{cases} \quad t \in \mathbf{R},$$

подобно тому, как окружность задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi).$$

Однако название "гиперболические косинус и синус" оправдывается не одним только этим обстоятельством. Чтобы указать еще одно такое обстоятельство, заметим следующее. Пусть имеется окружность $x^2 + y^2 = 1$, см. рис. 1.1, а

[19]Поскольку $x = \mathrm{ch} t > 0$.

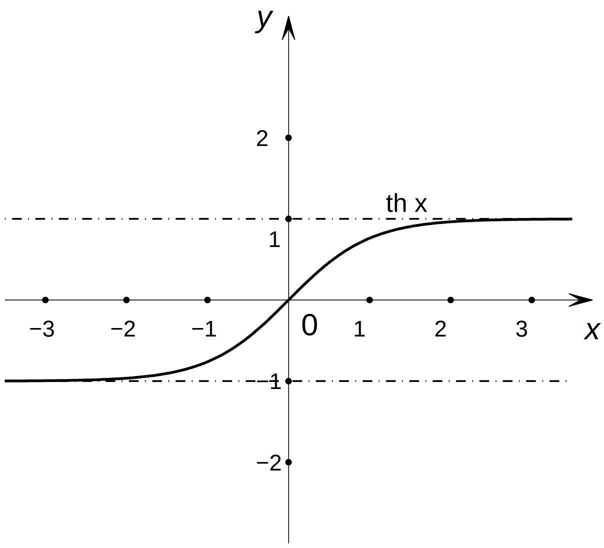


Рис. 1.4

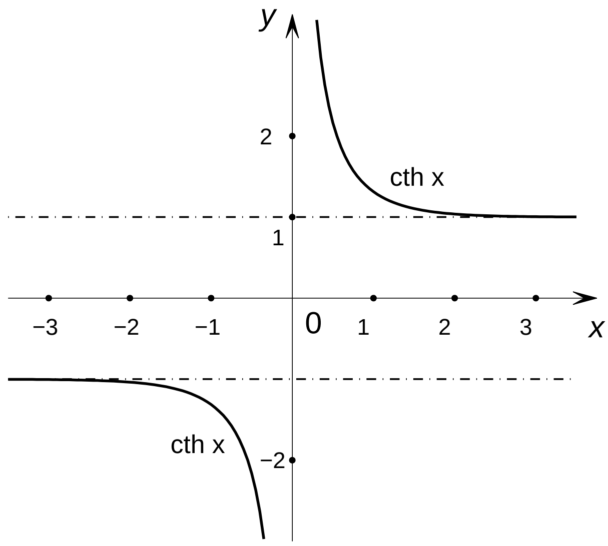


Рис. 1.5

также точка $A(1;0)$ и точка $M(\cos t; \sin t)$, лежащие на окружности (в первой четверти). Как известно, угол $\widehat{AOM} = t$, и соответственно, площадь сектора AOM равна $S_{AOM} = \dfrac{t}{2}$.

Рассмотрим теперь правую ветвь гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, а также точки $A(1;0)$ и $M(\mathrm{ch}t; \mathrm{sh}t)$, лежащие на этой ветви, предполагая, что $t > 0$. Оказывается[20], что и в этом случае, см. рис.1.2, площадь сектора AOM равна $S_{AOM} = \dfrac{t}{2}$. Впрочем, что касается угла, то такого соответствия нет:

$$\widehat{AOM} = \mathrm{arctg}(\mathrm{th}t) \neq t.$$

2. О графиках. Проведя исследование гиперболических функций методами дифференциального исчисления, нетрудно убедиться, что их графики имеют такой вид, как изображено на рис.1.3-1.5.

3. Об одной механической задаче, в которой возникает гиперболическая функция. Пусть имеются две точки A и B, заданные в вертикальной плоскости Oxy и лежащие выше оси Ox. Рассмотрим цепь, концы которой закреплены в точках A и B. Оказывается[21], линия провиса цепи будет совпадать с графиком функции вида

$$y = \gamma\,\mathrm{ch}\frac{x - x_0}{\gamma} + \beta. \tag{1.7}$$

[20]Это нетрудно показать непосредственным вычислением

[21]Чтобы убедиться в этом, необходимо владеть методами специальной математической дисциплины – вариационного исчисления, которая, однако, выходит за рамки данного курса.

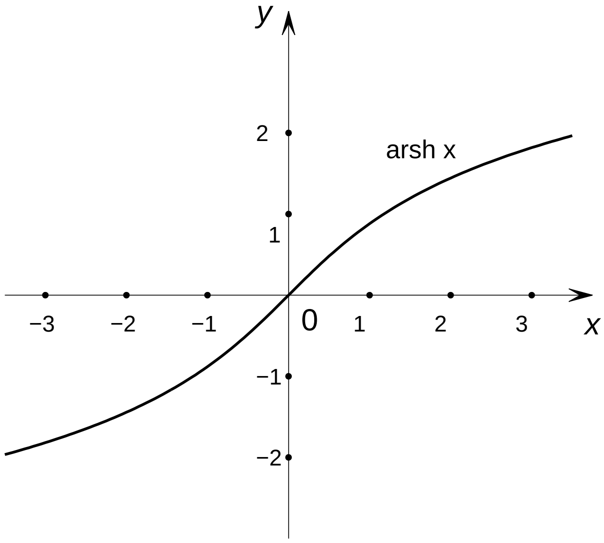


Рис. 1.6

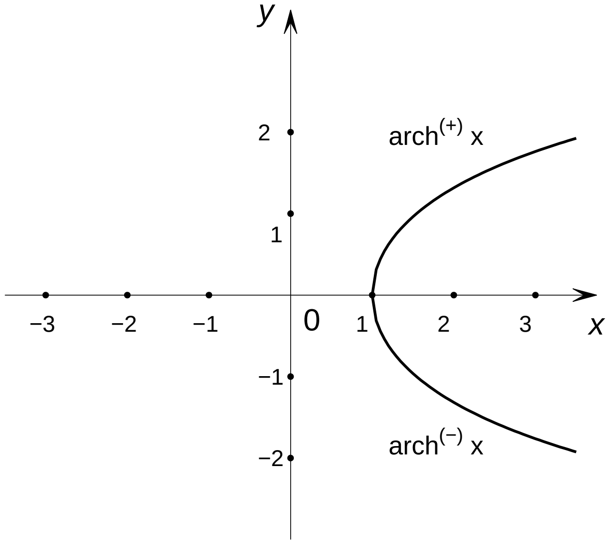


Рис. 1.7

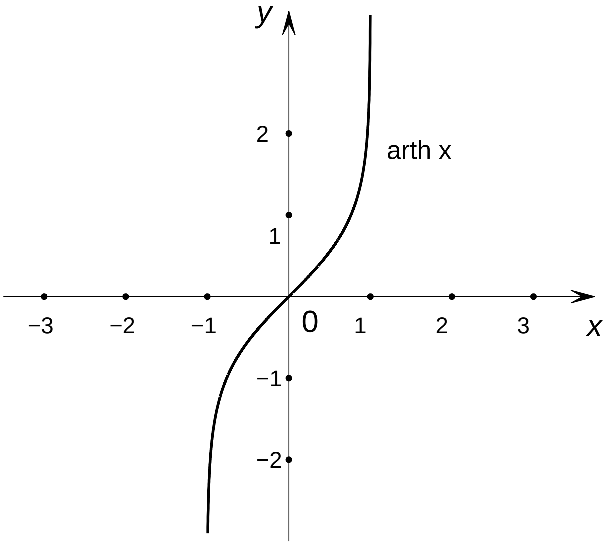


Рис. 1.8

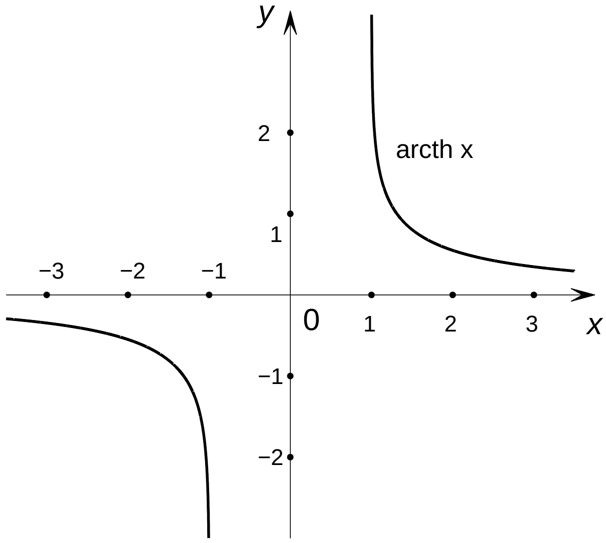


Рис. 1.9

В соответствии с этим график такой функции, и в частности, график функции $y = \mathrm{ch} x$, называют *цепной линией*.

4. Об одной геометрической задаче, в которой возникает гиперболическая функция. Пусть имеется некоторая гладкая линия с концами в точках A и B в плоскости Oxy, причем уравнение линии имеет вид $y = f(x)$. Будем вращать эту линию вокруг оси Ox. Тогда получим некоторую поверхность вращения. Оказывается, если мы захотим найти такую функцию $f(x)$, для которой площадь указанной поверхности была бы наименьшей из всех возможных, то искомая функция $f(x)$ будет иметь вид (1.7) при $\beta = 0$. В математике такие поверхности называются *катеноидами*.

Примечание. Следует отметить, что на самом деле гиперболические функции возникают во многих инженерных приложениях. Кроме того, они оказываются полезными и в различных математических расчетах. В частности, они позволяют в некоторых случаях существенно упростить вычисление интегралов вида

$$\int R\Big(x, \sqrt{x^2 + a^2}\Big) dx, \quad \int R\Big(x, \sqrt{x^2 - a^2}\Big) dx,$$

где $R(u, v)$ – рациональное выражение от переменных u, v; облегчают запись результата вычисления интегралов от функции комплексного переменного (см. Часть 4, т.1, задача 3.18), а также решение и запись решения некоторых дифференциальных уравнений (в том числе с частными производными) и т.д.

5. О различных соотношениях между гиперболическими функциями. Подобно тому[22], как были получены соотношения (1.4)-(1.6), либо используя уже полученные соотношения, нетрудно получить следующие соотношения (мы приведем их в сравнении с аналогичными соотношениями между тригонометрическими функциями).

[22]Собственно говоря, их можно получить и из соответствующих тригонометрических соотношений, если использовать формулы перехода (1.2)-(1.3). Например,

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = \cos^2(ix) - \frac{\sin^2(ix)}{i^2} = \cos^2(ix) + \sin^2(ix) = 1.$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$
$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$	$\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}2x$
$\sin 2x = 2\sin x\cos x$	$\mathrm{sh}2x = 2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x$
$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$	$\mathrm{ch}^2 x = \dfrac{\mathrm{ch}2x + 1}{2}$
$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$	$\mathrm{sh}^2 x = \dfrac{\mathrm{ch}2x - 1}{2}$
$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$	$\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}x\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}x\mathrm{sh}y$
$\sin(x+y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$	$\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}x\mathrm{ch}y + \mathrm{ch}x\mathrm{sh}y$
$\mathrm{tg}^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$1 - \mathrm{th}^2 x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
$\mathrm{ctg}^2 x + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\mathrm{cth}^2 x - 1 = \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$
$\cos(-x) = \cos x$	$\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}x$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}x$
$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0$	$\mathrm{ch}0 = 1, \quad \mathrm{sh}0 = 0$
$\Big(\sin x\Big)' = \cos x$	$\Big(\mathrm{sh}x\Big)' = \mathrm{ch}x$
$\Big(\cos x\Big)' = -\sin x$	$\Big(\mathrm{ch}x\Big)' = \mathrm{sh}x$
$\Big(\mathrm{tg}x\Big)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\Big(\mathrm{th}x\Big)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
$\Big(\mathrm{ctg}x\Big)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\Big(\mathrm{cth}x\Big)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$
$e^{ix} = \cos x + i\sin x$	$e^x = \mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x$

6. Об обратных гиперболических функциях. Непосредственно из графиков гиперболических синуса и косинуса видно, что обратные к ним функции $\mathrm{Arsh}x = \mathrm{arsh}x$ и $\mathrm{Arch}x$ имеют графики, изображенные на рис.1.6, 1.7. Отсюда видно, что $\mathrm{Arsh}x$ – однозначная функция, определенная на всей числовой оси, тогда как $\mathrm{Arch}x$ – двухзначная функция, определенная лишь при $x \geq 1$ и имеющая две ветви – верхнюю $\mathrm{arch}^{(+)}x = \mathrm{arch}x$ (ее мы считаем главной ветвью и называем *арккосинусом гиперболическим в смысле главного значения*) и нижнюю $\mathrm{arch}^{(-)}x = -\mathrm{arch}x$.

Получим аналитические выражения для этих функций. Итак, пусть

$$y = \mathrm{arsh}x \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{sh}y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right),$$

где $t = e^y > 0$. Тогда t можно найти как решение квадратного уравнения:

$$t^2 - 2xt - 1 = 0, \quad \text{откуда} \quad t = x \pm \sqrt{x^2+1},$$

и поскольку $t > 0$, то $t = x + \sqrt{x^2+1}$, а $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, то есть

$$\mathrm{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Пусть

$$y = \mathrm{arch} x, \quad x \geq 1, \quad y \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right),$$

где $t = e^y \geq 1$. Тогда t можно найти как решение квадратного уравнения:

$$t^2 - 2xt + 1 = 0, \quad \text{откуда} \quad t = x \pm \sqrt{x^2-1},$$

и поскольку $t \geq 1$, то $t = x + \sqrt{x^2-1}$, а $y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$. Действительно, если выбрать знак "$-$", получится

$$y = \ln(x - \sqrt{x^2-1}) = \ln\frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} = -\ln(x + \sqrt{x^2+1}) < 0.$$

Стало быть,

$$\mathrm{arsh} x = \mathrm{arsh}^{(+)} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad \mathrm{arsh}^{(-)} x = -\mathrm{arsh}^{(+)} x = \ln(x - \sqrt{x^2-1}).$$

Пусть (см. рис.1.8)

$$y = \mathrm{arth} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{th} y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{t^2-1}{t^2+1} = 1 - \frac{2}{t^2+1} \in (-1;1),$$

где $t = e^y > 0$. Тогда, выражая t через x, получаем:

$$t^2 = \frac{1+x}{1-x}, \quad t > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

откуда заключаем, что

$$\mathrm{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Аналогичным образом (см. рис.1.9),

$$\mathrm{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1.$$

7. Производные обратных гиперболических функций.

Пусть $y = \mathrm{arsh} x$. В таком случае

$$x = \mathrm{sh} y(x) \quad \Bigg| \frac{d}{dx} \quad \Rightarrow \quad 1 = \mathrm{ch} y \cdot y'(x).$$

Тогда[23]

$$y'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch} y(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 y(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Аналогичным образом получаем таблицу всех производных обратных гиперболических функций (приведем для сравнения и производные обратных тригонометрических функций):

$\Big(\arcsin x\Big)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\Big(\mathrm{arsh} x\Big)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\Big(\arccos x\Big)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\Big(\mathrm{arch} x\Big)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\Big(\mathrm{arctg} x\Big)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\Big(\mathrm{arth} x\Big)' = \dfrac{1}{1-x^2}$
$\Big(\mathrm{arcctg} x\Big)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$\Big(\mathrm{arcth} x\Big)' = \dfrac{1}{1-x^2}$

8. Приложение к вычислению интегралов. А) Рассмотрим интеграл (это табличный интеграл, но соответствующая формула приводилась без доказательств):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}, \quad a > 0.$$

Интеграл имеет смысл при $x > a$ и при $x < -a$. Рассмотрим эти два случая по отдельности.

1) $x > a$. Сделаем замену $x = a\mathrm{ch} t$. Тогда

$$dx = a\mathrm{sh} t dt, \quad x^2 - a^2 = a^2(\mathrm{ch}^2 t - 1) = a^2 \mathrm{sh}^2 t,$$

и стало быть,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\mathrm{sh} t}{a\mathrm{sh} t} dt = \int dt = t + C = \mathrm{arch}\frac{x}{a} + C.$$

[23]Это можно было получить сразу, используя формулу производной обратной функции.

Собственно говоря, можно на этом остановиться. Но мы получим табличное выражение:

$$\operatorname{arch}\frac{x}{a} = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right) = \ln\frac{1}{a}\Big(x + \sqrt{x^2 - a^2}\Big) = \ln\Big(x + \sqrt{x^2 - a^2}\Big) - \ln a,$$

и константу $-\ln a$ можно отнести к произвольной постоянной C.

2) $x < -a$. Сделаем замену $x = -a\operatorname{ch}t$. Тогда

$$dx = -a\operatorname{sh}t dt, \quad x^2 - a^2 = a^2(\operatorname{ch}^2 t - 1) = a^2\operatorname{sh}^2 t,$$

и стало быть,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = -\int \frac{a\operatorname{sh}t}{a\operatorname{sh}t}dt = -\int dt = -t + C = -\operatorname{arch}\left(-\frac{x}{a}\right) + C.$$

Получим табличное выражение:

$$-\operatorname{arch}\left(-\frac{x}{a}\right) = -\ln\left(-\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right) = -\ln\frac{1}{a}\Big|x - \sqrt{x^2 - a^2}\Big| =$$

$$= \ln a\left|\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - a^2}}\right| = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| - \ln a,$$

и константу $-\ln a$ можно отнести к произвольной постоянной C.

Примечание. Конечно, можно сделать замену $x = \dfrac{a}{\cos t}$. Однако выкладки будут длиннее, и более того, после возврата к старой переменной для того, чтобы получить табличное выражение, придется еще преодолеть некоторые технические трудности.

Б) Рассмотрим интеграл

$$\int \sqrt{x^2 + 1}dx = \left[\begin{array}{c} x = \operatorname{sh}t \quad \Rightarrow \quad dx = \operatorname{ch}t dt \\ x^2 + 1 = \operatorname{sh}^2 t + 1 = \operatorname{ch}^2 t \end{array}\right] = \int \operatorname{ch}^2 t dt =$$

$$= \int (\operatorname{ch}2t + 1)dt = \frac{1}{2}\operatorname{sh}2t + t + C = \frac{1}{2}\operatorname{sh}2\operatorname{arsh}x + \operatorname{arsh}x + C.$$

Примечание. Если использовать интегрирование по частям, то можно, конечно, прийти к линейному уравнению, решая которое можно выразить искомый интеграл через табличный $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Однако вычисления займут несколько большее время. Впрочем, можно привести и такой пример, в котором интегрирование по частям уже не поможет. Если использовать подстановку $x = \operatorname{tg}t$, то вычисления будут гораздо более сложными. Использование гиперболической подстановки $x = \operatorname{sh}t$ позволяет, таким образом, получить решение наиболее легким способом.

ДОПОЛНЕНИЕ II. Понятие собственных чисел и собственных векторов симметричной матрицы

Пусть $n \in \mathbf{N}$. Столбец высоты n

$$a = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ \dots \\ a^{(n)} \end{pmatrix} = \{a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}\}^T$$

условимся называть *n-мерным арифметическим вектором*[24], а элементы этого столбца – компонентами вектора. Множество всех n-мерных арифметических векторов будем обозначать $\mathbf{R}^n$. Как уже было сказано в Части 3, с.6, в случае $n = 2, 3$ вектор $a \in \mathbf{R}^n$ можно понимать как набор координат геометрического вектора $\vec{a}$ в заданном базисе на плоскости или в пространстве и отождествлять его с этим вектором. Пусть теперь A – вещественная квадратная матрица n-го порядка. Заметим, что $\forall a \in \mathbf{R}^n$ произведение $Aa \in \mathbf{R}^n$, то есть матрица A осуществляет *отображение* арифметического вектора $a \in \mathbf{R}^n$ в арифметический вектор $b = Aa \in \mathbf{R}^n$. Отображение пространства $\mathbf{R}^n$ в себя называется его *преобразованием.* Поскольку произведение матрицы A на столбец обладает свойством линейности:

$$A(\alpha a + \beta b) = \alpha Aa + \beta Ab \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}^n,$$

то преобразование, порождаемое матрицей A, называется *линейным преобразованием.*

Пример 2.1. Пусть $n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad e_1 = \{1, 0\}^T, \quad e_2 = \{0, 1\}^T.$$

Тогда

$$e_1' = Ae_1 = \{\cos\varphi, \sin\varphi\},$$

[24]В Части 3, с.6, n-мерный арифметический вектор определяется как строка длины n. Для теории функций многих переменных строка или столбец – это не имеет принципиального значения, главное, что это упорядоченный набор n чисел. Здесь нам удобнее понимать арифметический вектор как столбец, поскольку далее будет рассматриваться произведение матрицы на этот столбец.

$$e_2' = Ae_2 = \{-\sin\varphi, \cos\varphi\} = \left\{\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

С геометрической точки зрения это означает, что линейное преобразование плоскости, определяемое матрицей A, производит поворот базисных векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ на угол φ (против часовой стрелки, если $\varphi > 0$). Но поскольку преобразование линейно, то на такой же угол поворачиваются и все остальные векторы в плоскости, ибо координаты их образов при отображении A в новом базисе $\vec{e_1'}$, $\vec{e_2'}$ будут такими же, как координаты исходных векторов в исходном базисе. Поэтому преобразование плоскости, осуществляемое данной матрицей A, называется *преобразованием поворота на угол* φ.

Определение. Столбец $a \in \mathbf{R}^n$ называется *собственным вектором* матрицы A, если выполняются два условия: 1) столбец $a \neq 0$ (ненулевой); 2) $\exists \lambda \in \mathbf{R}$:

$$Aa = \lambda a. \tag{2.1}$$

При этом число λ называется *собственным числом* матрицы A, отвечающим собственному вектору a.

Примечание. С геометрической точки зрения, ненулевой вектор $a \in \mathbf{R}^n$, $n = 2, 3$, является собственным вектором матрицы A, если преобразование, порождаемое матрицей A, переводит геометрический вектор $\vec{a}$ в некоторый коллинеарный ему вектор.

Заметим, что уравнение (2.1) для отыскания собственных векторов матрицы A можно переписать в виде следующего уравнения $(A - \lambda E)a = 0$, которое фактически представляет собой однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора a. Но как известно, такая система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\left|A - \lambda E\right| = 0. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) представляет собой алгебраическое уравнение n-й степени относительно неизвестного λ и служит для отыскания всех собственных чисел матрицы A. Это уравнение называется *характеристическим.*

Далее нас будет интересовать случай симметричной матрицы A, то есть такой, что $A = A^T$.

Лемма 2.1. Пусть $n = 2$, $A = A^T$, и кроме того, матрица не представима в виде $A = \mu E$, $\mu \in \mathbf{R}$. Тогда оба корня характеристического уравнения (2.2) вещественны и различны.

Доказательство. Итак, пусть матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = 0,$$

или

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения

$$\mathcal{D} = a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2,$$

или

$$\mathcal{D} = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$$

и может равняться нулю только в одном случае: $a_{11} = a_{22} = \mu$, $a_{12} = 0$, то есть $A = \mu E$, а это противоречит условию. Таким образом, $\mathcal{D} > 0$, а значит, корни характеристического уравнения вещественны и различны. Лемма доказана.

Лемма 2.2. Пусть $A = A^T$ и все собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A вещественны и различны, а $v_1, \ldots, v_n$ – отвечающие им собственные векторы. Тогда $v_i^T v_j = 0$ для $i \neq j$.

Доказательство. Действительно, по свойствам операции умножения матриц получаем:

$$\lambda_i v_i^T v_j = (Av_i)^T v_j = v_i^T (A^T v_j) = v_i^T (Av_j) = \lambda_j v_i^T v_j,$$

и стало быть,

$$(\lambda_i - \lambda_j) v_i^T v_j = 0.$$

Остается заметить, что по условию $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Лемма доказана.

Заметим, что собственный вектор матрицы A, отвечающий данному собственному числу λ, определяется с точностью до ненулевого множителя. Поэтому в условиях леммы 2.2 можем считать, что

$$v_i^T v_j = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{если} \quad i = j. \end{cases} \tag{2.3}$$

При этом для соответствующих им геометрических векторов $\vec{v}_i$, $\vec{v}_j$, заданных столбцами координат v_i и v_j в ортонормированном[25] базисе скалярное произведение $(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = v_i^T v_j$. Стало быть, в условиях данной леммы совокупность всех единичных собственных (геометрических) векторов матрицы A образует ортонормированный базис (на плоскости, если $n = 2$, или в пространстве, если $n = 3$).

Далее будем считать, что соотношение (2.3) выполнено. Составим матрицу V из единичных собственных векторов v_i, $i = \overline{1, n}$. Тогда по свойствам операции умножения матриц получаем: $V^T v_i = E_i$, где E_i – i-й столбец единичной матрицы E, но это означает, что

$$V^T V = E. \tag{2.4}$$

Примечание. Всякая квадратная матрица V, обладающая свойством (2.4), называется *ортогональной.* Для примера заметим, что матрица преобразования поворота на угол φ является ортогональной. Ортогональность, собственно говоря, означает, что обратная матрица равна транспонированной $V^{-1} = V^T$. В случае матрицы поворота это всего лишь выражает тот очевидный факт, что обратное преобразование представляет собой поворот на угол $(-\varphi)$.

Рассмотрим далее матрицу $D = V^T A V$. По свойствам умножения матриц ее i-й столбец будет равен

$$D_i = V^T(Av_i) = \lambda_i V^T v_i = \lambda_i E_i,$$

а стало быть, матрица D имеет диагональный вид: на главной диагонали расположены собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, а на остальных местах – нули. Например, для $n = 3$:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Именно это обстоятельство позволяет достаточно легко приводить к каноническому виду уравнения кривых и поверхностей второго порядка. Однако, чтобы изложить соответствующую методику, необходимо сначала привести некоторые элементарные сведения из теории квадратичных форм.

[25] Его еще называют прямоугольным.

ДОПОЛНЕНИЕ III. Понятие квадратичной формы и ее приведение к каноническому виду

Определение. *Квадратичной формой* F переменных x_1, x_2 называется однородный многочлен второй степени

$$F(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Заметим, что квадратичная форма $F(x_1, x_2)$ полностью определяется (симметричной) матрицей своих коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

которая называется *матрицей квадратичной формы*. Определим арифметический вектор переменных $x = \{x_1, x_2\}^T \in \mathbf{R}^2$. Тогда квадратичная форма может быть записана (проверьте!) в следующей компактной матричной форме:

$$F(x) = x^T A x.$$

Говорят, что квадратичная форма имеет *канонический вид*, если $a_{12} = 0$. Заметим, что если матрица $A = \mu E$, то квадратичная форма уже имеет канонический вид. Если же это не так, то в соответствии с леммой 3.2 и последующими к ней комментариями собственные числа λ_1, λ_2 вещественны и различны, и более того, им отвечают единичные собственные векторы v_1, v_2, образующие ортогональную матрицу V. При этом матрица $D = V^T A V$ диагональна:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Сделаем замену переменных $x = Vx'$. Тогда по свойствам умножения матриц получаем:

$$F(x) = x^T A x = (Vx')^T A (Vx') = (x')^T (V^T A V) x' = (x')^T D x',$$

или

$$F(x) = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2,$$

то есть квадратичная форма в новых переменных x' принимает канонический вид.

Примечание. Заметим, что ортогональная матрица V так же, как и всякая квадратная матрица второго порядка, является линейным преобразованием плоскости. Выясним, в чем состоит осуществляемое ею преобразование. Поскольку оно линейно, то достаточно выяснить, что происходит при этом преобразовании с базисными векторами. Обозначим $\vec{e_1'}$, $\vec{e_2'}$ – новые базисные векторы. Координатами первого из них в этом новом базисе является столбец: $e_1' = \{1; 0\}^T = E_1$. Преобразование координат нам известно: $x = Vx'$. Поэтому в старом базисе координатами этого вектора будет столбец $VE_1 = v_1$. Таким образом, геометрический вектор $\vec{v_1}$, определяемый координатами v_1 в старом базисе, в результате произведенной замены переменных становится новым первым базисным вектором. Аналогично, геометрический вектор $\vec{v_2}$, определяемый координатами v_2 в старом базисе, в результате произведенной замены переменных становится новым вторым базисным вектором. Поскольку матрица V ортогональна, то векторы $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ образуют ортонормированный базис. Стало быть, исходная декартова прямоугольная система координат преобразуется в новую декартову прямоугольную систему координат. В соответствии с этим матрица V называется матрицей перехода от старого базиса к новому. Заметим, кроме того, что нулевой столбец переходит в нулевой. А это означает, что начало координат остается в той же точке. Поэтому происходит либо поворот системы координат на некоторый угол, либо поворот плюс перемена местами осей координат. Из сказанного понятно также, что указанное преобразование (подобно преобразованию поворота) можно использовать для приведения уравнения алгебраической кривой второго порядка (а также и поверхности второго порядка) к каноническому виду.

Пример 3.1. Дано уравнение алгебраической кривой второго порядка в декартовой прямоугольной системе координат. Используя теорию квадратичных форм, выполнить следующие задания: 1) привести уравнение кривой к каноническому виду; 2) указать декартову прямоугольную систему координат, в которой уравнение кривой имеет канонический вид; 3) записать формулы преобразования координат, приводящее уравнение кривой к каноническому виду; 4) построить кривую в исходной системе координат.

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - 20 = 0.$$

Решение. Данное уравнение содержит квадратичную форму

$$F(x, y) = 17x^2 + 12xy + 8y^2,$$

имеющую неканонический вид. Для того, чтобы привести ее к каноническому виду, выпишем, во-первых, матрицу этой квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение для отыскания собственных чисел матрицы A:

$$|A - \lambda E| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0.$$

Решая это уравнение, находим два корня – собственные числа $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = 20$.

Найдем все собственные векторы матрицы A, отвечающие числу λ_1. Составим матрицу

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 17-5 & 6 \\ 6 & 8-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, компоненты x и y всех собственных векторов матрицы A, отвечающих собственному числу $\lambda_1 = 5$, определяются как решение однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 12x + 6y = 0, \\ 6x + 3y = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение системы является следствием первого. Поэтому, выбирая в качестве параметрической переменной переменную x и полагая $x = C$, где C – произвольная постоянная (параметр), непосредственно из первого уравнения выражаем переменную y, откуда находим все множество решений данной системы, и соответственно, множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу λ_1:

$$\begin{cases} x = C, \\ y = -2C, \end{cases} \quad C \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad v_1(C) = C\{1; -2\}^T, \quad C \in \mathbf{R}.$$

Соответствующий каждому из них геометрический вектор $\vec{v}_1(C)$ – это вектор, который в исходном базисе (то есть в системе координат Oxy) имеет координаты $v_1(C)$. Нормируя вектор $\vec{v}_1(1)$, то есть производя деление этого вектора на его длину, получаем единичный собственный вектор[26], отвечающий собственному числу λ_1:

$$\vec{e_1'} = \frac{\vec{v}_1(1)}{|\vec{v}_1(1)|} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}} \right\}.$$

Аналогичным образом находим и единичный собственный вектор, отвечающий собственному числу $\lambda_2 = 20$:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 17-20 & 6 \\ 6 & 8-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -3x + 6y = 0, \\ 6x - 12y = 0. \end{cases},$$

$$v_2(C) = C\{2; 1\}^T, \quad C \in \mathbf{R},$$

$$\vec{e_2'} = \frac{\vec{v}_2(1)}{|\vec{v}_2(1)|} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}.$$

Поскольку скалярное произведение

$$\left(\vec{e_1'}, \vec{e_2'}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,$$

то векторы $\vec{e_1'}$, $\vec{e_2'}$ ортогональны, и будучи единичными, образуют ортонормированный базис. Соответствующие им арифметические векторы – это столбцы их координат в старом базисе:

$$e_1' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad e_2' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Записывая эти два столбца в матрицу, получаем матрицу перехода[27] V от старого базиса $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ к новому базису $\vec{e_1'}$, $\vec{e_2'}$:

$$V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, производя замену переменных по формуле

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x' + 2y'\right), \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2x' + y'\right), \end{cases}$$

[26] Вообще говоря, таких векторов два: $\vec{e_1'}$ и $-\vec{e_1'}$.

[27] Если сравнить ее с матрицей из примера 1.1, то нетрудно понять, что V – это матрица преобразования поворота на угол φ, определяемый условиями: $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

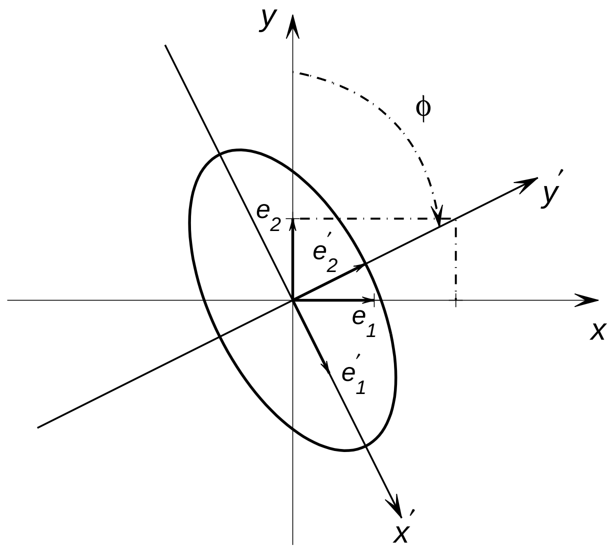


Рис. 3.1

приводим квадратичную форму к каноническому виду

$$F = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 5(x')^2 + 20(y')^2.$$

Соответственно, уравнение кривой тоже приводится к каноническому виду:

$$5(x')^2 + 20(y')^2 - 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{1} = 1.$$

Это уравнение эллипса с полуосями $a = 2$ и $b = 1$. Таким образом, канонической системой координат для данной кривой является декартова прямоугольная система координат $Ox'y'$ с началом координат в той же точке O, что и исходная система координат, и базисом $\vec{e_1'}$, $\vec{e_2'}$. Чтобы изобразить кривую в исходной системе координат, откладываем новые базисные векторы $\vec{e_1'}$, $\vec{e_2'}$ от начала координат, проводим через них новые оси координат Ox' и Oy' соответственно, и уже в новой системе координат $Ox'y'$, канонической для данной кривой, строим эллипс с полуосями $a = 2$ и $b = 1$ по новым осям координат и с центром в точке O, см. рис. 3.1.

Примечание. Если опустить в приведенном решении все комментарии и пояснения, то формальный расчет по описанной выше методике производится достаточно быстро и не приводит к громоздким вычислениям, что является существенным преимуществом по сравнению с методом поворота (см. Часть I, с. 67-68). Такой же метод можно использовать и для приведения уравнения алгебраической поверхности второго порядка к каноническому виду. Там его преимущества еще более очевидны. Отметим, наконец, что если уравнение кривой второго порядка содержит лишь квадратичную часть и не содержит линейной части (так и было в приведенном выше примере), то формулы перехода от старых координат к новым, как это видно из решения, нигде не используются. Если же линейная часть присутствует, то они, конечно, понадобятся. Более того, данный метод позволит лишь избавиться от слагаемого вида xy (так же, как и метод поворота). Для того, чтобы затем привести уравнение кривой к каноническому виду, потребуется еще выделить полные квадраты по переменным и затем произвести параллельный перенос системы координат (см. Часть I, с. 64-67).

ДОПОЛНЕНИЕ IV. Оператор Гамильтона

Такие характеристики векторного поля[28], как градиент, дивергенция и ротор, а также операции над ними в физике принято записывать с помощью так называемого *оператора Гамильтона*, формально определяемого как вектор (читается "набла")

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right\} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

При этом под произведением каждой из компонент этого вектора на скалярную функцию $u(x, y, z)$ понимается частная производная этой функции по соответствующей переменной:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \left\{ u'_x; u'_y; u'_z \right\},$$

то есть ∇u – это градиент скалярного поля u.

Пусть $\vec{F} = \{P; Q; R\}$ – векторное поле, непрерывно дифференцируемое по каждой компоненте. Поскольку скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами в стандартном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов, то, стало быть, получаем:

$$\left(\nabla, \vec{F}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \mathrm{div}\vec{F}.$$

Вспоминая формулу, выражающую векторное произведение через координаты сомножителей, получаем:

$$\left[\nabla, \vec{F}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \mathrm{rot}\vec{F}.$$

С помощью оператора Гамильтона удобно производить так называемые операции второго порядка, а именно, попарные комбинации указанных выше операций. Рассмотрим примеры[29].

1. $\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\ \vec{F} = 0$.

[28] См. Часть 4, т.1, глава 1, а также Часть 3, с.19.

[29] Все приводимые ниже доказательства являются, вообще говоря, формальными. Подобный способ рассуждений позволяет лишь упростить расчеты. Попробуйте проверить справедливость этих равенств непосредственным вычислением.

Доказательство.

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F} = \Big(\nabla, [\nabla, \vec{F}]\Big) = \Big(\nabla, \nabla, \vec{F}\Big) = 0$$

как смешанное произведение трех компланарных векторов.

2. $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \vec{0}$.

Доказательство.

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \Big[\nabla, \nabla u\Big] = \Big[\nabla, \nabla\Big] u = \vec{0}$$

как векторное произведение двух коллинеарных векторов.

В физике довольно часто используется также *оператор Лапласа*, определяемый как скалярный квадрат оператора Гамильтона:

$$\Delta = \Big(\nabla, \nabla\Big) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3. $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u$.

Доказательство.

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Big(\nabla, \nabla u\Big) = \Big(\nabla, \nabla\Big) u = \Delta u.$$

Примечание. Большое значение для физики имеет так называемое *уравнение Лапласа*

$$\Delta u = 0,$$

поскольку оно описывает стационарные процессы различной физической природы: распределение теплоты, электростатическое поле точечных зарядов, установившееся движение несжимаемой жидкости внутри некоторой области и т.д.

КРАТКАЯ СПРАВКА ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ[30]

Наши первоначальные представления о числе и форме относятся к очень отдаленной эпохе древнего каменного века - палеолита. В условиях ледникового периода почти вся энергия людей уходила на добывание пищи самым примитивным способом – собирательством, охотой и рыбалкой. Только около десяти тысяч лет назад ледяной покров в Европе и Азии начал таять, и произошел переход от простого собирания пищи к активному ее производству, от охоты и рыболовства к земледелию, и человечество вступило в новый каменный век, неолит. Вместе с земледелием стали появляться деревни, потребовалось строительство сооружений, между деревнями завязалась торговля. Потребовалось производить какие-то несложные расчеты. В результате появились числовые термины, поначалу весьма примитивные. Древнейшая земледельческая цивилизация постепенно сложилась в Египте. Источником большей части наших сведений о египетской математике являются два математических папируса достаточно древнего происхождения, один из которых содержит 25 задач, а другой – 84 задачи с решениями. Интересно, что папирусы более позднего времени, даже римских времен, мало отличаются по своему содержанию и приемам решения задач от этих двух. Это говорит о том, что математика в Египте оставалась в неизменном состоянии в течение тысячелетий. Математика, которая изложена в указанных двух папирусах, основана на десятичной непозиционной (родственной римской) системе счисления. На основе такой системы египтяне построили математику преимущественно аддитивного (от английского "add" – складывать, прибавлять) характера. Например, для того, чтобы умножить 13 на 11, записывали в первую строку 11, во вторую – 11+11=22, в третью – 22+22=44, в четвертую – 44+44=88, затем складывали числа в первой, третьей и четвертой строке, получая 143. Соответствующее решение излагалось по принципу: "сделай то, затем то, затем то, получишь это", без всяких пояснений, почему именно так следует делать. Самой замечательной чертой египетской математики являются действия с дробями. Все дроби у них сводились к сумме так называемых "основных" дробей, у которых числителем была единица. Существовали соответствующие таблицы разложений. Такие действия

[30] Текст построен на основе выдержек из [2].

с дробями придавали египетской математике тяжеловесность и растянутость. Однако этот подход применялся в течение тысячелетий. Большинство задач были очень простыми и сводились к линейному уравнению с одним неизвестным. Однако есть задачи, в которых присутствуют арифметическая и геометрическая прогрессии. В задачах речь идет о количестве хлеба и сортов пива, о кормлении животных и хранении зерна, и это указывает на практическое происхождение такой запутанной арифметики. Ни одно из приведенных решений не опирается на какие-либо утверждения, а построено по принципу кулинарных рецептов: "сделай то, затем то, потом то, получишь это". На гораздо более высоком уровне находилась математика Двуречья (Вавилон). Одним из главных ее достижений была позиционная (только не десятичная, как у нас, а 60-чная) система счисления[31]. Подобная система позволяет существенным образом упростить вычисления. По-видимому, явилась она непосредственным результатом развития техники управления, что засвидетельствовано в тысячах текстов, где речь идет о поставках скота, зерна и т.п. и о связанных с ними арифметических вычислениях. Как позиционность, так и 60-чность этой системы оказались достоянием всего человечества. Тому свидетельствует наше современное деление часа на 60 минут, минуты – на 60 секунд, окружности – на 360 градусов, градуса – на 60 минут, и минуты – на 60 секунд. Около 2000 г. до нашей эры (с восшествием на престол царя Хаммурапи) семитское население Вавилона подчинило себе исконных жителей – шумеров. Семитский алфавит абсолютно не был похож на шумерский. Поэтому символы чуждого им шумерского алфавита семитам было удобно использовать для записи математических выражений. В результате[32] довольно быстро после этого арифметика развилась в хорошо разработанную алгебру, а астрономия приобрела подлинно научный характер. Алгебра стала способна решать линейные и квадратные уравнения с двумя неизвестными, а также кубические и биквадратные уравнения, и производить сложные вычисления, в том числе вычисление корней с хорошей степенью точности (по некоторым косвенным данным, они фактиче-

[31]Впрочем, у них не было ничего похожего на нашу десятичную точку. Поэтому одна и та же запись могла обозначать и большие числа, и маленькие – было не ясно, где целая часть, а где дробная. Об этом им приходилось догадываться из контекста.

[32]Это объяснение Д. Стройка. Не имея всех исторических данных, трудно судить о том, насколько оно удовлетворительно.

ски пользовались формулой $\sqrt{a^2+h} \approx a + \frac{h}{2a}$), а также приближенно решать задачи, которые мы сейчас решаем логарифмированием (они это делали путем линейной интерполяции). Их геометрия строилась уже на алгебраических принципах. Есть указания на то, что им была известна теорема Пифагора. При всем при этом руководства к решению задач писались у них так же, как и у египтян, по принципу кулинарных рецептов. Нет никаких доказательств, доводов, пояснений, имеются лишь жесткие предписания. Нам весь этот восточный способ кажется странным и неудовлетворительным. Но даже и сейчас зачастую большая часть математики, которой обучают современных инженеров и техников, строится по схожему принципу, без большого стремления к строгости доказательств, либо вообще без оных. Однако такой способ может порождать слепых исполнителей, вряд ли способных привнести что-то новое.

В VI в. до н.э. на развалинах Ассирийской империи (в которой, что интересно, математика продолжала развиваться непрерывно и после поражения семитов), возникла новая держава – Персия, которая завоевала часть греческих городов. Персидское нашествие было отражено в исторических битвах при Марафоне, Саламине и Платее. Главным результатом этой победы стала экспансия Афин. Здесь, в Афинах, существовал своеобразный общественный строй, который можно охарактеризовать как аристократическая (рабовладельческая) демократия. Влияние этих демократических элементов все время возрастало, они были движущей силой экономической и военной экспансии, и около 430 г. они сделали Афины центром Греческой империи и совершенно новой цивилизации. Впервые в истории группа критически мыслящих людей, "софистов", менее скованная традицией, чем какая-либо иная группа предшествовавших ей ученых, стала рассматривать проблемы математического характера – скорее с целью уяснения их сути, чем ради пользы (ибо все они были люди достаточно обеспеченные, имели досуг и не были никому подотчетны). Такой подход позволил им дойти до основ точного мышления и привел к появлению *математических доказательств*. Такое случилось впервые за всю историю человечества. Отметим, что греческая математика решала в основном геометрические задачи, либо задачи, возникающие из геометрии. Именно в рамках греческой цивилизации появился первый дошедший до нас научный трактат по математике – "Начала" Евклида (см. биографический указатель; были до него и другие, но они дошли лишь во фрагментах). Название связано с тем, что изложение математики строится в нем на аксиоматических принципах (свои аксиомы Евклид называл "началами"; мы их называем постулатами), хотя Евклид и пытается доказывать эти аксиомы.

В послеантичный период и Средние века математика если и развивалась, то весьма незначительно. Интерес к ней вернулся уже лишь в эпоху Возрождения, когда стали строить машины и механизмы. От машин путь вел к теоретической механике и к научному изучению движения и изменения вообще. Античность уже дала трактаты по статике, и исследования периода Возрождения опирались на них. Тарталья (1537) рассматривал конструкцию часов и траекторию снарядов, однако парабола была открыта лишь Галилеем. Математики, изучая труды Архимеда, пришли к методам, в которых уже появились зародыши математического анализа; в частности, им стал доступен интеграционный метод Архимеда (метод исчерпывания) для вычисления площадей. Постепенное развитие анализа получило мощный импульс после издания (1637) "Геометрии" Декарта (см. биографический указатель). Что касается других авторов 1630-1660 г.г., почти все они ограничивались вопросами, касавшимися алгебраических кривых и находили, каждый по-своему, формулы, равносильные формуле $\int\limits_0^a x^m dx = \frac{a^{m+1}}{m+1}$. Дальнейшее развитие математического анализа связано с именами Ферма, Лейбница и Ньютона (см. биографический указатель). Следует отметить, что вплоть до конца XVIII в. математика была занятием достаточно узкого круга лиц. Переломный момент был связан с открытием Политехнической школы во Франции. Дадим соответствующее пояснение, которым мы и ограничимся.

Политехническая школа (Ecole Politechnique) – основанное в 1794 г. в Париже специальное высшее учебное заведение военной направленности, которое в начале XIX века стало ведущим учебным заведением по подготовке инженеров вообще и образцом для технических и военных школ Европы и Америки. Обучение в Политехнической школе длилось два года и являлось единственным путем к получению высших технических государственных должностей во Франции первой половины XIX в. В течение следующих двух лет выпускник этой школы продолжал обучение в одном из нескольких специальных учебных заведений. Эти заведения были неодинаковы по своему статусу и выбор выпускника не был свободным, а зависел от отметок в выпускном свидетельстве. Наиболее престижным являлся Институт путей сообщения. Важной составной частью учебного плана Политехнической школы было преподавание, причем в неразрывном единстве, теоретической и прикладной математики. Почти все крупные французские математики первой половины XIX в. либо привлекались к работе в этой школе в качестве преподавателей или экзаменаторов, либо сами окончили ее. Основным организатором школы и (долгое время) ее директором был математик и инженер Гаспар Монж (1746 - 1818), создатель начертательной геометрии. Именно с Политехнической школой связано появление нового типа учебной литературы. Кроме ученых трактатов для подготовленных читателей, характерных для высшего образования в XVIII в., потребовались специальные учебные руководства. Был издан закон, обязывающий публиковать лекции, читаемые в Политехнической школе. В результате возникло подавляющее большинство ведущих учебников по математике начала XIX в. Их влияние можно проследить вплоть до наших дней.

БИОГРАФИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ[33]

Абель (Abel) Нильс Хенрик (1802 - 1829) – норвежский математик. Работы Абеля оказали большое влияние на развитие всей математики, и в частности, алгебры, теории интерполирования функций, теории функциональных уравнений, теории чисел; содействовали всеобщему признанию теории функций комплексного переменного.

Байес[34] (Bayes) Томас (1702 - 1761) – английский математик, член Лондонского королевского общества. Основные труды относятся к теории вероятностей.

Бернулли (Bernoulli) Якоб (1654 - 1705) – швейцарский математик, проф. математики Базельского ун-та. Ему принадлежит применение полярных координат, исследование цепной линии (это линия провиса цепи под действием собственной тяжести), лемнискаты, логарифмической спирали и изохроны,

[33]Текст построен на основе выдержек из [1,2].

[34]Иногда пишут *Бейес*.

возникших в результате решения механических задач (например, изохрона – это линия, вдоль которой тело падает с постоянной скоростью). Он был одним из первых исследователей по теории вероятностей. В своем трактате "Искусство предположения" он исследовал, в частности, перестановки и сочетания, последовательные испытания (по схеме Бернулли), получил формулу Бернулли и доказал теорему Бернулли о биномиальных распределениях. Интересно, что первоначально Якоб Бернулли изучал теологию, а его брат Иоганн Бернулли (см. ниже) – медицину, но познакомившись со статьями Лейбница, оба решили стать математиками.

Бернулли (Bernoulli) Иоганн (1667 - 1748) – швейцарский математик, проф. математики Гронингенского (с 1695) и Базельского (с 1705) ун-тов, иностранный почетный чл. Петербургской АН (1725). Был деятельным сотрудником Лейбница в разработке дифференциального и интегрального исчислений, впервые дал их систематическое изложение, продвинул разработку методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, поставил задачу о геодезических линиях. Иоганну Бернулли принадлежат также исследования по механике: теория удара, движение тел в сопротивляющейся среде, учение о живой силе и др.

Больцано (Bolzano) Бернард (1781 - 1848) – чешский математик, философ, теолог. За вольнодумство был уволен с кафедры истории религии Пражского ун-та (1820), после чего стал работать в области логики и математики. В его сочинениях можно найти ряд фундаментальных понятий и теорем анализа, обычно связываемых с более поздними исследованиями других математиков.

Борель (Borel) Феликс Эдуар Жюстен Эмиль (1871 - 1956) – французский математик, чл. Парижской АН (1921), проф. Нормальной школы в Париже и Парижского ун-та, иностранный чл.-корр. АН СССР (1929). Создатель нескольких отраслей современного математического анализа (расходящиеся ряды, расширение понятия аналитической функции, теория меры множеств), оказал существенное влияние на развитие теории функций. Ряд работ посвящен математической физике и теории вероятностей.

Вейерштрасс (Weierstraß) Карл Теодор Вильгельм (1815-1897) – немецкий математик, с 1856 г. проф. Берлинского ун-та. Продолжил начатую Больцано и Коши "реформу наведения строгости" в математическом анализе. Создал язык "$\varepsilon - \delta$", который позволил дать определениям основных понятий анализа численное представление и уменьшить в них роль нестрогих, интуитивных соображений. Тем самым математическому анализу была придана его современная форма.

Венн (Venn) Джон (1834-1923) – английский логик. Создал особый логический аппарат (*диаграммы Венна*), нашедший применение в логико-математической теории "формальных нейронных сетей". Венну принадлежит обоснование обратных логических операций. Занимался также вероятностной логикой.

Вронский[35] (Wronski) Юзеф Мария (1776 - 1853) – польский математик и философ-мистик. Его работы по математике отличались сложностью обозначений и своеобразным стилем, склоняющимся к мистицизму, и в результате были не поняты современными ему математиками. Только позднее, уже после его смерти, выяснилось, что они содержали значительное число методов и отдельных фактов, которые к тому времени в основном уже были открыты заново другими математиками.

Гамильтон (Hamilton) Уильям Роуан (1805 - 1865) – ирландский математик и астроном, чл. Ирландской королевской АН, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1837), с 1827 г. проф. астрономии в Дублинском ун-те и директор университетской астрономической обсерватории. Впервые дал точное формальное изложение теории комплексных чисел (1833-35), построил своеобразную систему чисел, т.н. *кватернионов*. Это учение было одним из источников развития векторного исчисления. В механике открыл принцип наименьшего действия. Некоторые из его результатов нашли применение в теории оптических инструментов.

Гаусс (Gauss) Карл Фридрих (1777-1855) – немецкий математик, внесший фундаментальный вклад также в астрономию и геодезию. С 1807 г. директор Геттингенской астрономической обсерватории и проф. математики и астрономии Геттингенского ун-та. Удивительна широта исследований Гаусса, от сугубо теоретических (теория чисел, анализ, геометрия, теория вероятностей, методы вычислений и др.) до самых прикладных (в частности, совместно с физиком Вильгельмом Вебером в 1833 г. им был сконструирован первый в Германии электромагнитный телеграф). Теоретические и прикладные иссле-

[35]Иногда пишут *Вроньский*. Впрочем, настоящая его фамилия *Хене*.

дования в творчестве Гаусса тесно переплетаются. По влиянию на дальнейшее развитие науки Гаусса часто ставят в один ряд с такими титанами как Архимед и Ньютон.

Гессе (Hesse) Людвиг Отто (1811 - 1874) – немецкий математик, с 1869 г. проф. Политехнической школы в Мюнхене. Основные работы относятся к геометрии (аналитической, проективной и дифференциальной), алгебре и теории оптимизации.

Гливенко Валерий Иванович (1896 - 1940) – советский математик, с 1928 проф. Московского гор. пед. ин-та. Основные труды по основаниям математики и мат. логике, теории функций действительного переменного и теории вероятностей.

Грин (Green) Джордж (1793 - 1841) – английский математик и физик. Развил теорию электричества и магнетизма, опираясь на открытые им соотношения, известные теперь как формулы Грина (1828). В 1839 г. получил важные результаты об отражении и преломлении света в кристаллических средах, а также вывел основные уравнения теории упругости.

Даламбер[36] (d'Alembert) Жан Лерон (1717 - 1783) – французский математик и философ, чл. Парижской АН (1741), иностранный почетный чл. Петербургской АН (1764) и др. академий. Впервые сформулировал (1743) общие правила составления дифференциальных уравнений движения любых материальных систем, сведя задачи динамики к статике – т.н. *принцип Даламбера*. Этот принцип был применен им (1774) для обоснования гидродинамики и аэродинамики (доказал существование наряду с океанскими воздушных приливов). В астрономии Даламбер обосновал теорию возмущения планет. Основные математические труды относятся к теории дифференциальных уравнений (открыл и исследовал уравнение колебаний струны) и составили основу математической физики. Он впервые применил функции комплексного переменного к исследованию уравнений в частных производных и получил условия аналитичности, известные также как условия Коши-Римана. Поскольку такие же условия встречаются и в работах Эйлера, их еще называют условиями Даламбера-Эйлера. Имеются работы и по теории рядов (признак Даламбера). Даламберу принадлежат также работы по теории музыки.

[36] Иногда пишут *д'Аламбер*.

Декарт (Descartes) Рене (1596 - 1650) – французский философ и математик. Декарт заложил основы аналитической геометрии, ввел многие современные алгебраические обозначения. Высказал закон сохранения движения, дал понятие импульса силы. Изобрел метод координат (декартовы координаты), позволивший впервые решать геометрические задачи аналитически (алгебраическими методами), ввел понятие алгебраической кривой (но это уже по терминологии Лейбница) как линии, которую можно описать движениями шарнирных механизмов, изложил способ построения нормалей и касательных к плоским кривым (в связи с исследованием линз). Его основной труд "Геометрия" оказал огромное влияние на развитие всей математики.

Дирихле (Dirichlet) Петер Густав Лежен (1805 - 1859) – немецкий математик, чл. Берлинской АН, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1837), чл. Лондонского королевского общества (1855), чл. Парижской АН (1854), проф. Берлинского (1831-55) и Геттингенского ун-тов (с 1855). Основные труды по теории чисел и математическому анализу. Впервые точно сформулировал и исследовал понятие условной сходимости ряда, установил один признак сходимости ряда (признак Дирихле), дал строгое доказательство возможности разложения в ряд Фурье функции, имеющей конечное число максимумов и минимумов (условия Дирихле). Большое число работ Дирихле посвящено механике и математической физике.

Дюамель (Duhamel) Жан Мари Констан (1797 - 1872) – французский математик, чл. Парижской АН (1840), иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1859), проф. Политехнической школы в Париже (1830-69). Автор учебников по математическому анализу и механике. Основные труды по математическому анализу и геометрии.

Евклид (Eυκλειδηζ) – древнегреческий математик, живший в Александрии в 3 в. до н.э.. Автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике. Его главная работа "Начала" (или "Элементы") содержит изложение планиметрии, стереометрии и ряда вопросов теории чисел и подводит итог предшествующему развитию греческой математики.

Кантор (Cantor) Георг (1845 - 1918) – немецкий математик, проф. ун-та в Галле (1879-1913). Основоположник теории (бесконечных) множеств. Идеи Кантора встретили со стороны современников резкое сопротивление, в частности, со стороны Кронекера, но впоследствии оказали большое влияние на развитие математики.

Капелли (Capelli) Альфредо (1855 - 1910) – итальянский математик, чл. Национальной академии деи Линчеи в Риме (1901), проф. ун-тов в Палермо (1881) и Неаполе (1886). Основные труды по алгебре (теорема Кронекера-Капелли).

Колмогоров Андрей Николаевич (1903 - 1987) – советский математик, акад. АН СССР (1939) и Академии педагогических наук СССР (1966), с 1931 г. проф. МГУ, почетный чл. многих иностранных академий. Ему принадлежат фундаментальные работы по тригонометрическим рядам, теории меры, теории множеств, теории интеграла, теории приближений функции, логики, механики (теория турбулентности), теории дифференциальных уравнений, функционального анализа и др. Колмогоров является одним из основоположников современной теории вероятностей, что стало возможным благодаря применению в теории вероятностей методов теории функций.

Коши (Cauchy) Огюстен Луи (1789-1857) – французский математик. В 1807 г. окончил Политехническую школу, в 1810 г. – Институт путей сообщения. В 1816 - 1830 г.г. преподавал в Политехнической школе и Коллеж де Франс, с 1848 г. – в Сорбонне и Коллеж де Франс. Первым, рассматривая предел как чисто арифметическое понятие, Коши дал строгое понятие бесконечно малой величины (1821), а на его основе – определения непрерывной функции и производной, близкие к современным. В 1821 г. вышел знаменитый "Курс анализа (алгебраический анализ)", написанный Коши на основе лекций, читавшихся им в Политехнической школе. Основанный на систематическом использовании понятия предела, он послужил образцом для большинства курсов позднейшего времени. Коши первым дал строгие определения сходимости ряда (1821) и интеграла как предела интегральных сумм (1823), первым доказал существование решения "задачи Коши" для дифференциального уравнения (1844). Он – основоположник теории функций комплексного переменного, а также математической теории упругости (на основе понятия предела ввел понятия напряжения и деформации в точке).

Крамер (Cramer) Габриель (1704 - 1752) – швейцарский математик, с 1734 г. проф. Женевской кальвинистской академии. Заложил основы теории определителей.

Кронекер (Kronecker) Леопольд (1823 - 1891) - немецкий математик, чл. Берлинской АН (1861), иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1872), проф. Берлинского ун-та (с 1883). Основные труды по алгебре и теории чисел. Считал возможным и необходимым свести всю математику к арифметике, полагая лишь последнюю подлинно реальной. Защищая эти односторонние взгляды, вел упорную борьбу с теоретико-функциональным подходом Вейерштрасса и теоретико-множественным подходом Кантора.

Лагранж (Lagrange) Жозеф Луи (1736 - 1813) – французский математик и механик, чл. Парижской АН (1772), иностранный почетный чл. Петербургской АН (1776) и др. академий. С 1795 г. проф. Нормальной школы, а с 1797 - проф. Политехнической школы в Париже. Стремясь установить всеобщие принципы механики, в основу всей статики положил "общую формулу", являющуюся принципом возможных перемещений (вариаций; это определенным образом соотносится с принципом наименьшего действия Гамильтона: из всех возможных движений действительным является то, которое минимизирует действие, определяемое как интеграл по времени от разности кинетической и потенциальной энергии), а в основу всей динамики "общую формулу", являющуюся сочетанием принципа возможных перемещений с принципом Даламбера. Этот вариационный принцип получил свое развитие в математике при решении оптимизационных задач (в частности, задач на отыскание минимума и максимума функций многих переменных при ограничениях). Ввел обобщенные координаты и придал уравнениям движения форму, называемую его именем. Строя свои "всеобщие принципы механики", исходил из характерных для прогрессивных ученых XVIII в. представлений о том, что только такие принципы могут быть истинными, соответствующими объективной реальности.

Лаплас (Laplace) Пьер Симон (1749 - 1827) – французский астроном, математик и физик, чл. Парижской АН (1785), чл. Французской академии (1816), иностранный почетный чл. Петербургской АН (1802). Деятельно участвовал в организации системы высшего образования во Франции, создании Нормальной и Политехнической школ. В 1790 г. был назначен председателем Палаты мер и весов, руководил введением в жизнь новой метрической системы мер. Основные работы относятся к области небесной механики, математики и математической физики. Фундаментальными являются его работы по дифференциальным уравнениям в частных производных (исследование уравнения Лапласа; интегрирование уравнений в частных производных "методом каскадов"). В алгебре Лапласу принадлежит важная теорема о разложении определителей по строке и по столбцу и ее обобщения. В теории вероятностей ввел т.н. производящие функции и широко применял преобразование, носящее его имя (преобразование Лапласа), вывел формулы, известные как формулы Муавра-Лапласа, развил теорию ошибок и метод наименьших квадратов, позволяющие находить наивероятнейшие значения измеренных величин и степень достоверности этих подсчетов. Вместе с Лавуазье занимался физикой (1779-84), в частности, вопросом о скрытой теплоте плавления тел и работами с созданным им ледяным калориметром. Опубликовал ряд работ по теории капиллярности и установил закон, носящий его имя. Занимаясь акустикой, вывел формулу для скорости распространения звука в воздухе. Занимался также геодезией. Развил методы небесной механики, объяснил движение тел Солнечной системы на основе закона всемирного тяготения Ньютона. Последнее удалось ему за счет представления взаимного возмущения планет в виде рядов. И это еще не все, список его результатов по небесной механике можно перечислять долго. В философии пытался объяснить весь мир, в т.ч. физиологические, психические и социальные явления, механическими принципами (это т.н. детерминизм Лапласа). Образец окончательной формы научного познания видел в своей небесной механике. Любопытна неустойчивость политических взглядов Лапласа. При всяком политическом перевороте он всегда переходил на сторону победивших. Например, при Наполеоне был министром внутренних дел, получил титул графа империи, а в 1814 г. подал голос за его низложение; после реставрации Бурбонов получил пэрство и титул маркиза.

Лейбниц (Leibniz) Готфрид Вильгельм (1646 - 1716) – немецкий философ-идеалист, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед, чл. Лондонского королевского общества (1673), чл. Парижской АН (1700), основатель Берлинской АН. В 1711, 1712 и 1716 г.г. встречался с Петром I и разработал по его просьбе ряд проектов по развитию образования и государственного управления в России. В философии Лейбница важным является представление о том, что существующий мир создан богом как наилучший из всех возможных миров, о прирожденной способности ума к познанию высших категорий бытия как всеобщих и необходимых истин логики и математики. В физике развивал учение об относительности пространства, времени и движения, ввел понятие кинетической энергии (которую называл "живой силой" в полемике с Декартом, который определял ее иначе; то, что определил Декарт, Лейбниц называл "мертвой силой"), впервые открыл закон сохранения энергии, высказал идею о превращении одних видов энергии в другие. Исходя из своего представления о том, что этот мир наилучший из всех возможных, сформулировал принцип наименьшего действия, называемый теперь принципом Гамильтона (который открыл его много позже вслед за Мопертюи). Лейбницу принадлежит также ряд открытий в теории упругости, теории колебаний, формула для расчета прочности балок и т.д. В логике Лейбниц развил учение об анализе и синтезе, предвосхитил некоторые моменты современной математической логики, предложил использовать двоичную систему счисления для целей вычислительной математики. Впервые высказал мысль о возможности машинного моделирования человеческих функций, ввел термин "модель". В математике важнейшей заслугой Лейбница является разработка (вместе с Ньютоном) дифференциального и интегрального исчисления, имевшая огромное значение для развития математики и естествознания. Однако он сделал ряд важных открытий и в других областях математики: в комбинаторике, алгебре (начала теории определителей), геометрии (например, теория огибающей семейства кривых). На основе собранного им материала по палеонтологии высказал мысль об эволюции земли. В биологию ввел идею целостности органических систем, принцип несводимости органического к механическому. Эволюцию он понимал как непрерывное развертывние преформированных зародышей. В психологии развил учение о бессознательной психической жизни. В языкознании создал теорию исторического развития языков, дал их генеалогическую классификацию. В области политики и права защищал концепцию естественного права и теорию общественного договора. Был талантливым изобретателем: проектировал оптические приборы и гидравлические машины, работал над созданием "пневматического двигателя", изобрел уникальную для того времени счетную машину. Оказал значительное влияние на последующее развитие философии и науки.

Лопиталь (l'Hospital) Гийом Франсуа Антуан (1661 - 1704) – французский математик. Автор первого печатного учебника по дифференциальному исчислению (1696). Исследовал ряд трудных задач математического анализа. Открыл так называемое "правило Лопиталя".

Лоран (Laurent) Пьер Альфонс (1813 - 1854) – французский математик. По профессии военный инженер. Ему принадлежит теорема Лорана о разложении функции в ряд Лорана.

Маклорен (Maclaurin) Колин (1698 - 1746) – шотландский математик, чл. Лондонского королевского общества (1719). Основные труды по теории рядов, исчислению конечных разностей и теории плоских кривых высших порядков; работ по механике (равновесие тяжелой вращающейся жидкости, притяжение однородным эллипсоидом вращения тяжелой точки).

Мебиус (Möbius) Август Фердинанд (1790 - 1868) – немецкий математик, с 1816 г. проф. Лейпцигского ун-та. Основные труды по геометрии. Установил существование односторонних поверхностей (лист Мебиуса).

Муавр (Moivre) Абрахам де (1667 - 1754) – английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1697), чл. Парижской и Берлинской АН. Открыл формулы, носящие его имя. Исследовал степенные ряды, названные им возвратными. Первым пользовался возведением в степень бесконечных рядов. В теории вероятностей доказал частный случай теоремы Лапласа.

Ньютон (Newton) Исаак (1643 - 1727) – английский физик и математик, создавший теоретические основы механики и астрономии, открывший закон всемирного тяготения, разработавший наряду с Лейбницем дифференциальное и интегральное исчисление, изобретатель зеркального телескопа и автор важнейших экспериментальных работ по оптике; чл. Лондонского королевского общества (с 1672) и его президент с 1703 г.; иностранный чл. Парижской АН (1699); в 1705 г. он (сын бедного фермера) за научные достижения был возведен в дворянское звание. В оптике высказал гипотезу о сочетании волновых и корпускулярных (от слова "корпускула" – частица) свойств света, открыл кольца Ньютона и установил периодичность света, открыл дисперсию, интерференцию и дифракцию света, первым измерил длину световой волны. Высказал взгляды на строение вещества, в которых присутствовали атомы и молекулы, а также идея иерархии строения вещества. Вершиной научного творчества Ньютона явились "Математические начала натуральной философии", в которой он впервые создал единую стройную систему земной и небесной механики, которая легла в основу всей классической физики. Задачи естествознания, рассматриваемые Ньютоном, потребовали разработки принципиально новых математических методов. Математика для Ньютона была главным орудием в физических изысканиях. Он считал, что понятия математики заимствуются извне и возникают как абстракция явлений и процессов физического мира. Разработка дифференциального и интегрального исчисления явилась важной вехой в развитии математики. Большое значение имели также работы Ньютона по алгебре, интерполированию и геометрии, фундаментальные открытия в области бесконечных рядов (обобщение бинома Ньютона, который, собственно говоря, для натурального показателя был открыт до него, на случай любого действительного показателя). Метод вычисления и изучения функций их приближением бесконечными рядами, предложенный Ньютоном, приобрел огромное значение для всего математического анализа и его приложений.

Остроградский Михаил Васильевич (1801 - 1861) – русский математик, акад. Петербургской АН (1830), иностранный чл. Национальной АН США (1834), Туринской АН (1841), Национальной академии деи Линчеи в Риме (1853), иностранный чл.-корр. Парижской АН (1856); проф. офицерских классов Морского кадетского корпуса (с 1828), Ин-та корпуса инженеров путей сообщения (с 1830), Главного пед. ин-та (с 1832), Главного инженерного училища (с 1840), Главного артиллерийского училища (с 1841) в Петербурге. Основные труды относятся к математическому анализу, теоретической механике, математической физике, теории чисел, алгебре и теории вероятностей. Развил теорию вычетов (1824), обобщил метод Фурье разделения переменных для решения уравнений математической физики, попутно доказав знаменитую формулу Остроградского; подробно рассмотрел задачу о распространении тепла в прямой призме и распределении волн в цилиндрическом бассейне; поставил общую проблему доказательства сходимости решения (дифференциального уравнения), представляемого бесконечным рядом и решил ее в важном частном случае; построил теорию распространения тепла в жидкости. В теоретической механике ему принадлежат фундаментальные результаты, связанные с развитием принципа возможных перемещений; им построена общая теория удара. Большой интерес у современников вызвали его работы по теории движения сферических снарядов в воздухе и по исследованию влияния выстрела на лафет орудия. Критерием ценности математических исследований для Остроградского служила возможность использования полученных результатов на практике. Характерны в этом отношении его исследования по теории вероятностей. Одно из них, в частности, возникло с целью облегчения работы по проверке товаров, поставляемых армии и послужило началом развитию статистических методов браковки.

Пеано (Peano) Джузеппе (1858-1932) – итальянский математик, с 1890 г. проф. Туринского ун-та. Занимался вопросом о возможно более широких условиях существования решения дифференциальных уравнений, различными вопросами, связанными с понятием кривой (построил непрерывную кривую, проходящую через каждую точку квадрата как пример неспрямляемой кривой – кривая Пеано). Во всеобщее употребление вошла его аксиоматика натурального ряда чисел (аксиомы Пеано).

Пирсон (Pearson) Чарльз (1857 - 1936) – английский математик, биолог, философ, чл. Лондонского королевского общества (1896), с 1884 г. проф. Лондонского ун-та. Основные труды по математической статистике (кривые Пирсона, распределение Пирсона). Разработал теорию корреляции, тесты математической статистики и критерии согласия.

Пуассон (Poisson) Симеон Дени (1781 - 1840) – французский механик, физик, математик, чл. Парижской АН (1812), иностранный почетный чл. Петербургской АН (1826); проф. Политехнической школы в Париже (с 1806), проф. Парижского ун-та (с 1809). Основные труды по теоретической и небесной механике, математике и математической физике. Впервые записал уравнения аналитической механики в составляющих импульса. В гидромеханике исследовал уравнение движения сжимаемой вязкой жидкости с учетом теплопередачи. Решил ряд задач теории упругости. Исследовал устойчивость движения планет Солнечной системы. Ввел т.н. уравнение Пуассона и применил его к решению задач по гравитации и электростатике. Ему принадлежат работы по интегральному исчислению (интеграл Пуассона), теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории вероятностей (теорема Пуассона, распределение Пуассона). Исследовал вопросы теплопроводности, магнетизма, капиллярности, распространения звуковых волн и баллистики.

Риман (Riemann) Георг Фридрих (1826 - 1866) – немецкий математик, проф. Геттингенского ун-та (с 1857). Лекции Римана легли в основу ряда курсов (математической физики, теории тяготения, электричества и магнетизма). Ввел в математику т.н. римановы поверхности, используемые при исследовании многозначных отображений. Исследовал разложимость функций в тригонометрические ряды и в связи с этим определил необходимые и достаточные условия существования определенного интеграла (который в связи с этим называют *интегралом Римана*). Предложил методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными (метод инвариантов Римана). Является одним из основоположников неевклидовой геометрии. Предложенные Риманом идеи и методы раскрыли новые пути в развитии математики и нашли множество применений в механике и физике.

Ролль (Rolle) Мишель (1652 - 1719) – французский математик, чл. Парижской АН (1685). Развил метод отделения действительных корней алгебраических уравнений, основанный на частном случае т.н. теоремы Ролля. Занимался также решением в целых числах неопределенных линейных уравнений с двумя неизвестными. Выступал с критикой исчисления бесконечно малых Лейбница.

Сильвестр (Sylvester) Джеймс Джозеф (1814-1897) – английский математик, проф. Королевской академии в Вулидже (1855-1870), ун-та Джона Хопкинса в Балтиморе (США) (1876-1883), Оксфордского ун-та (с 1883). Основал первый американский математический журнал.

Стокс (Stokes) Джордж Габриель (1819 - 1903) – английский физик и математик, чл. Лондонского королевского общества (1851) и его президент (1885-90), чл. Парижской АН (1900), проф. Кембриджского ун-та (с 1849). Основные труды по физике. В математике ввел (1848) понятие равномерной сходимости функциональной последовательности и ряда. В 1854 г. вывел одну из важнейших формул векторного анализа (формулу Стокса).

Тейлор (Taylor) Брук (1685-1731) – английский математик. В 1712 г. нашел общую формулу (формула Тейлора) для разложения функций в степенные ряды (ряды Тейлора) и опубликовал ее в 1715 г. Однако только Коши в 1823 г. установил точные условия сходимости ряда Тейлора и провел четкое различие между сходимостью этого ряда вообще и сходимостью к данной функции.

Ферма (Fermat) Пьер (1601-1665) – французский математик. По профессии юрист, с 1631 г. советник парламента в Тулузе. Математике посвящал все свободное от службы время. Отправной точкой к открытию теоремы Ферма (Часть 2, с.33) послужил предложенный Ферма метод построения касательных к кривым. Имя Ферма широко известно благодаря следующему высказанному им (1637) утверждению, известному как "Великая теорема Ферма": для любого натурального $n > 2$ не существует натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению $x^n + y^n = z^n$. В своих записках Ферма указал, что "нашел этому поистине удивительное доказательство", но не привел его. Теорема была доказана в 1995 г. английским математиком Эндрю Уайлсом (род. в 1953 г.; с 80-х годов живет в США, проф. Принстонского ун-та). Впрочем, доказательство Уайлса основано на довольно изощренных современных методах и достаточно велико по объему. Элементарное доказательство (каким, видимо, обладал Ферма) не найдено до сих пор.

Фурье (Fourier) Жан Батист Жозеф (1768 - 1830) – французский математик, чл. Парижской АН (1817), иностранный почетный чл. Петербургской АН (1829), преподаватель Политехнической школы в Париже (1796-1798). Основные труды Фурье относятся к математической физике. В своих исследованиях по теории распространения тепла в твердом теле Фурье вывел дифференциальное уравнение теплопроводности и использовал для его решения разложение функций в тригонометрический ряд (ряд Фурье), что явилось новым методом решения дифференциальных уравнений вместе с предложенным им же методом разделения переменных для решения таких уравнений (метод Фурье). Они, в свою очередь, положили начало большому циклу исследований о представимости функций тригонометрическими рядами и интегралами (интеграл Фурье). С этими исследованиями было связано возникновение теории множеств и теории функций действительного переменного.

Хевисайд (Heaviside) Оливер (1850 - 1925) – английский физик и инженер, чл. Лондонского королевского общества (1891). Разработал (1892) метод символического (операционного) исчисления, позволяющий достаточно просто решать многие сложные математические задачи механики, электротехники, автоматического регулирования и т.д. Объединил векторные представления Гамильтона и Грассмана в векторное исчисление в его современном виде. Ввел (1892) термин "орт" и название "набла" для оператора Гамильтона ∇. Предложил (1891) обозначать векторы жирными буквами.

Эйлер (Euler) Леонард (1707 - 1783) – математик, механик и физик, швейцарского происхождения, но долгое время живший и работавший в Петербурге; акад. Петербургской АН (1725-41, 1766-83) и Берлинской АН (1741-66). Жизнь Эйлера почти целиком была посвящена работе в области чистой и прикладной математики. Хотя он потерял в 1735 г. один глаз, а в 1766 – второй, ничто не могло остановить или ослабить его удивительной творческой продуктивности. Слепой Эйлер, пользуясь своей феноменальной памятью, продолжал диктовать свои открытия. В течение его жизни увидели свет 530 его книг и статей. Умирая, он оставил много рукописей, которые Петербургская академия продолжала публиковать в течение 47 лет. Это довело число его работ до 771, но Густав Энестрем дополнил этот список до 886. Эйлеру принадлежат заметные результаты во всех областях математики его времени. В некоторых областях изложение Эйлера было почти окончательным. Например, наша нынешняя тригонометрия вместе с принятыми в ней обозначениями восходит к Эйлеру. Ряд его обозначений утвердился также в алгебре и анализе. У Эйлера имеются книги по астрономии, гидравлике, кораблестроению, артиллерии, оптике и даже теории музыки. Можно составить длинный список открытий, приоритет в которых принадлежит Эйлеру, и перечень его идей, которые еще заслуживают разработки. Великие математики всегда признавали, что они обязаны Эйлеру многим. "Читайте Эйлера, - обычно говорил молодым математикам Лаплас, - читайте Эйлера, это наш общий учитель". А Гаусс выразился еще более определенно: "Изучение работ Эйлера остается наилучшей школой во всех областях математики, и ничто другое не может это заменить".

Якоби (Jacobi) Карл Густав Якоб (1804 - 1851) – немецкий математик, чл. Берлинской АН (1836), иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1830), чл. Лондонского королевского общества (1833), чл. Парижской АН (1846), проф. Кенигсбергского ун-та (1829-42). Якоби принадлежат открытия в области теории чисел, алгебры, вариационного исчисления, интегрального исчисления и теории дифференциальных уравнений. Ввел в употребление функциональные определители (якобианы) и указал на их роль при замене переменных в кратных интегралах и при решении уравнений с частными производными.

ПРИНЦИПЫ ОРГАНИЗАЦИИ КОМПЛЕКСА УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

1. Курс "Высшая математика" излагается как базовый курс для студентов инженерно-технических специальностей.

2. Основу курса составляет опорный конспект лекций, соответствующий рабочей учебной программе. Вместе с тем, изложение курса в данном пособии расширено за счет привлечения большего (по сравнению с лекциями) количества примеров и задач с решениями, что по замыслу авторов должно способствовать лучшему усвоению материала, а также создавать возможность для студента-заочника самостоятельно разобраться в материале и успешно выполнить задания контрольных работ.

3. Далеко не все теоретические утверждения приводятся с доказательствами. Это связано с ограниченностью количества часов, отводимых на изучение дисциплины. Изложение доказательств тех или иных утверждений проводилось при наличии следующих условий: 1) краткость, либо простота рассуждения; 2) наглядная иллюстрация работы определяемых понятий; 3) возможность использования тех или иных моментов доказательства при решении задач; 4) пояснение интуитивно не очевидных моментов формулировки утверждения.

4. Довольно часто то или иное понятие, утверждение, пример, решение задачи и т.д. сопровождаются развернутыми комментариями, пояснениями и рекомендациями практического или методического толка. Приводится большое количество рисунков и иллюстраций, поясняющих то или иное понятие или решение.

5. Там, где это было достаточно просто сделать (кратные интегралы, векторный анализ, операционное исчисление, интеграл Фурье, теория вероятностей и математическая статистика), подчеркивалась связь излагаемой теории с приложениями.

6. Некоторые вспомогательные разделы (элементы теории множеств и основы комбинаторики) были добавлены с целью помочь студенту выработать

так называемое "вероятностное мышление", необходимое для грамотного решения задач по теории вероятностей, ибо столь специфический способ рассуждений дается, как правило, студентам с большим трудом.

7. Основной текст дополняется необходимыми методическими материалами, как то: 1) контрольные вопросы к экзамену для самопроверки усвоения теоретического материала в соответствии с разделами учебной программы; 2) правила выполнения контрольных работ; 3) сами контрольные работы; 4) глоссарий определяемых терминов; 5) список литературы. *Следует особо подчеркнуть*, что часть этих материалов, а именно пункты 1)-3) согласно требованиям, предъявляемым к составлению данного комплекса, были взяты из методических пособий, уже изданных ранее – см. [3-6] по списку литературы. При этом, однако, были устранены некоторые замеченные неточности и опечатки в формулируемых заданиях контрольных работ.

8. Завершающий, третий том последней, четвертой части в определенном смысле рассматривается как завершение всего комплекса. В связи с этим в него включены некоторые добавления (см. пояснительную записку).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математический энциклопедический словарь / М.: Изд-во "Большая Российская энциклопедия", 1995. - 847 с.

2. **Стройк, Д.Я.** Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк - М.: Наука, 1990. – 256 с.

3. Высшая математика: контрольные работы 1, 2 для студентов-заочников / Сост.: **Р.П.Зюзина, М.Г.Ефимова**; НГТУ. Н.Новгород, 2003. - 20 с.

4. Высшая математика: контрольные работы 3, 4 для студентов-заочников / Сост.: **Т.А.Горева, М.Г.Ефимова, Р.П.Зюзина, А.Н.Мошкова, Е.А.Чернова**; НГТУ. Н.Новгород, 2003. - 23 с.

5. Высшая математика: контрольные работы 5, 6 для студентов-заочников / Сост.: **М.Г.Ефимова, Р.П.Зюзина, А.В.Лебедева, С.В.Решетняк, И.П.Рязанцева, Д.Н.Туляков**; НГТУ. Н.Новгород, 2003. - 18 с.

6. Высшая математика: контрольные работы 7, 8, 9 для студентов-заочников / Сост.: **В.И.Голинько, И.В.Кольчик, Р.Е.Мазова, Н.В.Полухин, Г.В.Потемин, И.П.Рязанцева**; НГТУ. Н.Новгород, 2003. – 39 с.

Список замеченных опечаток

Следующий далее список охватывает весь курс. Цифры в скобках вида (p) и (p.v) означают: p – номер части, v – номер тома.

Расположение	Напечатано	Следует читать
с.(1)2, 7 строка сверху	контроля заданий	контроля знаний
с.(1)13, 5 строка сверху	отличный от нуля	отличных от нуля
с.(1)17, 11 строка сверху	возникающем	возникающим
с.(1)49, 1-2 строка сверху	$\overline{\ell}_1\overline{\ell}_2\overline{M}_1,\overline{M}_2$	$\overline{\ell}_1\overline{\ell}_2\overline{M_1M_2}$
с.(1)54, 3 строка снизу	имеет формулу	имеет форму
с.(1)55, 6 строка снизу	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
с.(1)56, 2 строка сверху	от каждой из них	от каждой из которых
с.(1)57, 5 строка снизу	проходящей	проходящий
с.(1)69, 10 строка сверху	будет обозначать	будем обозначать
с.(1)88, 11 строка сверху	в которые	в которых
с.(1)88, 11 строка сверху	будем использовать записью	будем пользоваться записью
с.(1)106, 3 строка сверху	уравнения пирамиды	уравнения высоты пирамиды
с.(2)2, 7 строка сверху	контроля заданий	контроля знаний
с.(2)4, 20 строка снизу	длинны	длины
с.(2)14, 11 строка сверху	двух функции	двух функций
с.(2)16, 7-10 строка сверху	U	u
с.(2)17, 4 и 6 строки сверху	U, V	u, v
с.(2)21, 6 и 7 строки сверху	$\Big(\varphi(x)\cdot\ln f(x)\Big)$	$\Big(\varphi(x)\cdot\ln f(x)\Big)'$
с.(2)22, 1 строка снизу	относительность	относительно
с.(2)27, 13 строка сверху	производной точки	произвольной точки
с.(2)27, 15 строка снизу	$d^ny=f^{(n-1)}(x)dx^n$	$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n$
с.(2)31, 12 строка сверху	в точка	в точках
с.(2)34, 6 строка снизу	к рассмотрению которые	которые

Расположение	Напечатано	Следует читать
с.(2)35, 5 строка снизу	для функции	для функций
с.(2)36, 4 строка снизу	откуда $f'(\xi) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$	откуда $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
с.(2)41, 5 строка сверху	e^k	e^x
с.(2)50, 10 строка сверху	$y = f(x)$ в точке	$y = f(x)$ имеет перегиб в точке
с.(2)50, 15 строка сверху	имеет перегиб $y = f(x)$	имеет перегиб
с.(2)63, 3 строка снизу	$\alpha = a + bi$	$\overline{\alpha} = a - bi$
с.(2)64, 11 строка сверху	элементарные дроби	простейшие дроби
с.(2)71, 2 строка снизу	конечно число	конечное число
с.(2)77, 5 строка сверху	$\varphi(x)$ и $v(x)$	$u(x)$ и $v(x)$
с.(2)83, 8 строка снизу и дальше	длинны	длины
с.(2)91, 6 строка сверху	производная постоянная	произвольная постоянная
с.(2)93, 4 строка сверху	Примеры функций	Примеры однородных функций
с.(2)95, 8 и 9 строка сверху	полагая с новой неизвестной функции	полагая c новой неизвестной функцией
с.(2)102, 10 строка сверху	производные постоянные	произвольные постоянные
с.(2)109, 15 строка сверху	$-16e^x$	$-16e^{3x}$
с.(2)113, 14 строка сверху	Теорема Роля	Теорема Ролля
с.(2)114, 5 строка сверху	плоскостей кривой	плоской кривой
с.(3)41, 7 строка сверху	интегирования	интегрирования
с.(3)105, 7 строка снизу	остаточный член формулы Лагранжа	остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа
с.(4.1)86, 1 строка снизу	$\cos z =$	$\mathrm{ch} z =$

Примечание. Отметим, кроме того, что имеется некоторое разночтение в обозначениях скалярного, векторного и смешанного произведений. В связи с этим укажем, что следующие обозначения эквиваленты:

$$\vec{a}\,\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}), \quad \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}], \quad \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$