Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра "Прикладная математика"

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методическое пособие
для студентов всех специальностей и всех форм обучения

Нижний Новгород 2005

Составитель: А.В.Чернов

УДК 517.3

Примеры решения задач по теории функций комплексного переменного: методическое пособие для студентов всех специальностей и всех форм обучения / НГТУ; Сост.: А.В.Чернов. Н.Новгород, 2005 - 62 с.

Дана краткая справка по элементам теории функций комплексного переменного, необходимым для решения задач; разобраны примеры с подробными решениями, пояснениями и иллюстрациями по каждой теме. Методическое пособие предназначено для первоначального знакомства с теорией фу… …го переменного и выработке у студентов необх…

Науч…

Реда…

Подп… Бумага газетная.
Печа… Тираж 300 экз.
Зака…

Ниж… …итет
Типо…

…государственный
…верситет, 2005

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Понятие комплексного числа

Комплексным числом z называется арифметическое выражение вида

$$z = x + iy,$$

где x, y – действительные числа ($x, y \in \mathbf{R}$), а i – специальный символ, для которого по определению считается, что $i^2 = -1$. Этот специальный символ i называется *мнимой единицей*. Соответственно число x называется *действительной частью комплексного числа* z и обозначается $\mathrm{Re}z$, а число y называется *мнимой частью комплексного числа* z и обозначается $\mathrm{Im}z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными* $z_1 = z_2$, если равны их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Число $\overline{z} = x - iy = x + i(-y)$ называется *комплексно сопряженным* к числу $z = x + iy$. Операции сложения и умножения комплексных чисел вводятся по обычным правилам сложения и умножения буквенных выражений в алгебре. В частности,

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

Задача 1. Даны 2 комплексных числа $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 7 + 4i$. Найти: $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Решение.

1) $z_1 + z_2 = 2 - 3i + 7 + 4i = (2 + 7) + (4i - 3i) = 9 + i$.

2) $z_1 - z_2 = 2 - 3i - (7 + 4i) = (2 - 7) - (3i + 4i) = -5 - 7i$.

3) $z_1 \cdot z_2 = (2-3i)(7+4i) = 2\cdot 7 + 2\cdot 4i - 7\cdot 3i - 3\cdot 4\cdot i^2 = 14 + 8i - 21i - 12i^2 = (14 + 12) + (8 - 21)i = 26 - 13i$.

4) Домножая числитель и знаменатель на комплексно сопряженное число к знаменателю, получаем:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{7 + 4i} = \frac{(2 - 3i)(7 - 4i)}{(7 + 4i)(7 - 4i)} = \frac{14 - 8i - 21i + 12i^2}{7^2 - 4^2i^2} =$$

$$= \frac{(14 - 12) - (8 + 21)i}{49 + 16} = \frac{2 - 29i}{65} = \frac{2}{65} - \frac{29}{65}i.$$

Аналогично и в общем случае получаем, что справедливы свойства:

1. $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.
2. $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2)$.
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{y_1x_2 + x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$, если $z_2 \neq 0$.
4. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1z_2 = z_2z_1$.

5. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$.
6. $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$.

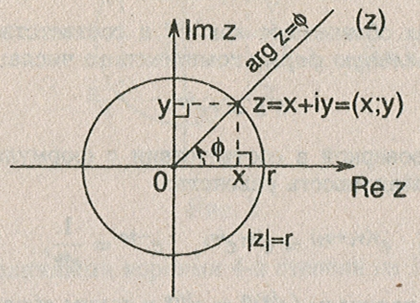


Рис. 1

1.2. Графическое изображение комплексных чисел

Комплексное число $z = x + iy$ можно толковать как упорядоченную пару действительных чисел $(x; y)$, которую, в свою очередь, можно понимать как координаты геометрического вектора или координаты точки $M(x; y)$ на плоскости Oxy. Соответственно эту координатную плоскость Oxy, на которой ось Ox обозначается как $\mathrm{Re}z$ (действительная ось), а ось Oy – как $\mathrm{Im}z$ (мнимая ось), называют *комплексной плоскостью* и обозначают (z). Множество всех комплексных чисел обозначают буквой $\mathbf{C}$ по аналогии с тем, как множество всех действительных чисел – буквой $\mathbf{R}$. При этом расстояние от точки $z = x + iy$ до 0 на комплексной плоскости, т.е. длину вектора $|\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называют *модулем комплексного числа* z и обозначают обычно $r = |z|$. Соответственно угол φ между вектором $\overline{OM}$ и положительным направлением действительной оси, отсчитываемый против часовой стрелки, называют *аргументом комплексного числа* z и обозначают $\varphi = \mathrm{Arg}z$. Очевидно, что $\mathrm{Arg}z$ определяется неоднозначно, а с точностью до $\pm 2\pi k$, где k – целое число ($k \in \mathbf{Z}$). Если же указан какой-то полуинтервал длины 2π и рассматриваются лишь значения φ из этого полуинтервала, то φ называют *аргументом комплексного числа* z *в смысле главного значения* и обозначают $\varphi = \arg z$. Если r и φ известны, то число z на комплексной плоскости можно найти как точку пересечения окружности радиуса r с центром в 0 (она имеет уравнение $|z| = r$) с лучом, исходящим из 0 под углом φ к положительному направлению действительной оси (он имеет уравнение $\arg z = \varphi$), см. рис. 1. Фактически, числа r и φ – это полярные координаты точки $z = x + iy$ на комплексной плоскости. Поэтому справедливы формулы:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x};$$

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Отсюда получаем так называемую *тригонометрическую форму* комплексного числа $z = x + iy$:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Выражение в скобках обозначают как $e^{i\varphi}$ и соответственно получают так называемую *показательную форму* комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Непосредственной проверкой в соответствии с формулами тригонометрии устанавливается справедливость равенств:

$$e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}, \quad e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}},$$

откуда, в частности, получаем $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$ и таким образом

$$z = re^{i\varphi}, \quad n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

(1-я формула Муавра). Поскольку аргумент комплексного числа определяется с точностью до $\pm 2\pi k$, то отсюда получаем обратную формулу:

$$z = re^{i\varphi}, \quad n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

(2-я формула Муавра), где $k = 0, 1, \ldots, n-1$ (при остальных значениях k все повторяется и таким образом существует ровно n различных корней n-й степени из комплексного числа z). Все они расположены на окружности $|z| = \sqrt[n]{r}$ на комплексной плоскости и находятся в вершинах некоторого правильного n-угольника.

Примечания.

1. $\sqrt[n]{r}$ понимается как неотрицательный действительный корень из неотрицательного действительного числа (он только один).

2. По аналогии формально определяется произвольная действительная степень комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi}, \quad p \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad z^p = r^p\left(\cos p(\varphi + 2\pi k) + i\sin p(\varphi + 2\pi k)\right).$$

При этом, если $p = \dfrac{m}{n}$ - рациональное число, то z^p имеет n различных значений. Если же p – иррациональное число, то z^p имеет бесчисленное множество значений.

Задача 2. Найти все различные корни 4-й степени из -1.

Решение. Заметим, что $z = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$, и по 2-й формуле Муавра:

$$\sqrt[4]{z} = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

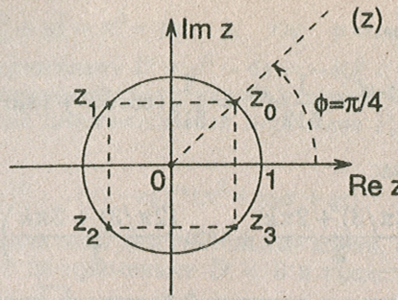


Рис. 2

Таким образом, различными корнями 4-й степени из 1 являются следующие 4 числа:

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i); \quad z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i);$$

$$z_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i); \quad z_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i).$$

Все они лежат на окружности радиуса 1 с центром в 0 и находятся в вершинах квадрата (рис. 2).

Задача 3. Даны 2 комплексных числа $z_1 = i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$. Найти $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^9$, $\sqrt[3]{\dfrac{z_1}{z_2}}$.

Решение. Число $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ можно вычислить так же, как в задаче 1. Но чтобы продемонстрировать использование показательной формы комплексного числа, поступим иначе. Представим оба числа в показательной форме.

Для числа $z_1 = i$: $x_1 = \mathrm{Re} z_1 = 0$, $y_1 = \mathrm{Im} z_1 = 1$, $r_1 = |z_1| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, $\varphi_1 = \pi/2$. Соответственно $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} = e^{i\pi/2}$.

Для числа $z_2 = \sqrt{3} - i$: $x_2 = \mathrm{Re} z_2 = \sqrt{3}$, $y_2 = \mathrm{Im} z_2 = -1$, $r_2 = |z_2| = \sqrt{3 + 1} = 2$, $\mathrm{tg}\varphi_2 = y_2/x_2 = -1/\sqrt{3}$, и поскольку $x_2 > 0$, $y_2 < 0$, то и $\cos\varphi > 0$, $\sin\varphi < 0$, и точка находится в 4-й четверти. Таким образом, $\varphi_2 = -\pi/6$. Соответственно, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} = 2e^{-i\pi/6}$.

Таким образом,

$$z = \frac{z_1}{z_2} = e^{i\pi/2}\frac{1}{2}e^{i\pi/6} = \frac{1}{2}e^{i\pi((1/2)+(1/6))} = \frac{1}{2}e^{i2\pi/3}.$$

По 1-й формуле Муавра:

$$z^9 = \left(\frac{1}{2}\right)^9 e^{9\cdot i2\pi/3} = \frac{1}{512}e^{i6\pi} = \frac{1}{512}(\cos 6\pi + i\sin 6\pi) = \frac{1}{512}.$$

По 2-й формуле Муавра:

$$\sqrt[3]{z} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\frac{(2\pi/3)+2\pi k}{3} + i\sin\frac{(2\pi/3)+2\pi k}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Таким образом, различными корнями 3-й степени являются следующие 3 числа:

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right); \quad z_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right);$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right).$$

1.3. Разложение действительного многочлена n-й степени на множители

Пусть $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$, причем $a_n \neq 0$. Выражение

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

называется *комплексным многочленом n-й степени* или *многочленом n-й степени с комплексными коэффициентами*. Число z_0, вообще говоря, комплексное, называется *корнем многочлена* $P_n(x)$, если $P_n(z_0) = 0$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Многочлен $P_n(x)$ заведомо имеет хотя бы один корень. Более того, если $z_1, \ldots, z_k$ – все различные корни многочлена $P_n(x)$, то он представляется в виде

$$P_n(x) = a_n(x - z_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (x - z_k)^{s_k},$$

где $s_1, \ldots, s_k \in \mathbf{N}$, $s_1 + \ldots + s_k = n$. При этом число s_j называется кратностью корня z_j, $j = \overline{1, k}$.

Многочлен $P_n(x)$, в котором $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, называется *действительным многочленом n-й степени* или *многочленом n-й степени с действительными коэффициентами.* Можно показать, что для всякого комплексного корня z_0 многочлена с действительными коэффициентами комплексно сопряженное число $\overline{z_0}$ тоже является корнем, причем той же кратности. Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ и $\overline{z_0} = x_0 - iy_0$ – два комплексно сопряженных корня такого многочлена, $y_0 \neq 0$. Рассмотрим произведение

$$(x - z_0)(x - \overline{z_0}) = ((x - x_0) - iy_0)((x - x_0) + iy_0) = (x - x_0)^2 + y_0^2 =$$

$$= x^2 - 2x_0 x + x_0^2 + y_0^2 = x^2 + px + q, \quad \text{где} \quad p = -2x_0, \quad q = x_0^2 + y_0^2.$$

Соответственно дискриминант $D = p^2 - 4q = -4y_0^2 < 0$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Всякий действительный многочлен $P_n(x)$, $a_n \neq 0$, представляется в виде:

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{s_1} \ldots (x - x_k)^{s_k}(x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \ldots (x^2 + p_l x + q_l)^{m_l},$$

где $x_1, \ldots, x_k$ – все различные действительные корни, многочлен 2-й степени $(x^2 + p_j x + q_j)$ имеет дискриминант $D < 0$ и представляется в виде $(x - z_j)(x - \overline{z_j})$, а $z_j, \overline{z_j}$, $j = \overline{1, l}$, – все пары различных комплексно сопряженных корней.

Задача 4. Разложить на множители многочлен $x^4 + 1$.

Решение. При решении задачи 2 были найдены корни этого многочлена $z_0, \ldots, z_3$. По теореме 2

$$x^4 + 1 = (x - z_0)(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3) = ((x - \frac{1}{\sqrt{2}}) + i\frac{1}{\sqrt{2}})((x - \frac{1}{\sqrt{2}}) - i\frac{1}{\sqrt{2}})\cdot$$

$$\cdot((x + \frac{1}{\sqrt{2}}) + i\frac{1}{\sqrt{2}})((x + \frac{1}{\sqrt{2}}) - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = ((x - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2})((x + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2}) =$$

$$= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

1.4. Последовательности комплексных чисел

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие комплексное число $z_n = x_n + iy_n$, то говорят, что задана *последовательность комплексных чисел*

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots = \{z_n\}.$$

Комплексное число $z_0 = x_0 + iy_0$ называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$ (т.е. $z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n$), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$: $\forall n > N$ выполняется неравенство $|z_n - z_0| < \varepsilon$.

Нетрудно показать, что $z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n \Leftrightarrow x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ и $y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Задача 5. Вычислить

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{n-1} + i\frac{5n^2 - n + 1}{7n^2 + 2n - 3}\right).$$

Решение. В данном случае

$$x_n = \frac{3n}{n-1} = \frac{3}{1 - 1/n} \to 3;$$

$$y_n = \frac{5n^2 - n + 1}{7n^2 + 2n - 3} = \frac{5 - 1/n + 1/n^2}{7 + 2/n - 3/n^2} \to \frac{5}{7}.$$

Таким образом, искомый предел равен $z_0 = 3 + i\frac{5}{7}$.

Последовательность $\{z_n\}$ называется *неограниченно возрастающей* или *бесконечно большой*, если $\forall E > 0\ \exists N(E) \in \mathbf{N}$: $\forall n > N$ выполняется неравенство $|z_n| > E$. По определению считается, что всякая неограниченно возрастающая последовательность сходится к комплексному числу $z = \infty$ (то есть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$), которое называется *бесконечно удаленной точкой*.

Отметим, что для $z = \infty$ (так же, как и для $z = 0$) $\mathrm{Arg} z$ не имеет смысла, а $|z| = +\infty$. Кроме того, устанавливаются следующие соотношения:

1. $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = \infty$.
2. $z \cdot \infty = \infty$ при $z \neq 0$.
3. $z + \infty = \infty$.
4. $\frac{z}{\infty} = 0$ при $z \neq \infty$.

Комплексная плоскость $\mathbf{C}$, дополненная $z = \infty$, то есть $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, называется *расширенной комплексной плоскостью* и обозначается $\overline{\mathbf{C}}$.

1.5. Числовые ряды с комплексными членами

Для последовательности комплексных чисел $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ выражение вида

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

называется *числовым рядом с комплексными членами*.

Понятие частичной суммы ряда, сходимости ряда и его суммы определяется так же, как и для действительного случая.

Очевидно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится $\Leftrightarrow$ сходятся действительные числовые ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *сходится абсолютно*, если сходится действительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$. Если же сам ряд сходится, а ряд из модулей расходится, то говорят, что ряд *сходится условно*. Так же, как и для действительного случая, из абсолютной сходимости следует сходимость ряда.

Задача 6. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + i\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Решение. Заметим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$, следовательно, исходный ряд расходится.

Задача 7. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n^2}{n^2} + i\frac{\sin n^2}{n^2} \right).$$

Решение. Заметим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n^2}{n^2} + i\frac{\sin n^2}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $\alpha = 2 > 1$, следовательно, исходный ряд сходится и притом абсолютно.

1.6. Множества на комплексной плоскости

Классификация множеств и классификация точек по отношению к множеству на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ вводится так же, как для пространства $\mathbf{R}^2$ (т.е. так же, как на действительной плоскости Oxy). В частности, множество $D \subset \overline{\mathbf{C}}$ называется:

- *открытым*, если содержит каждую свою точку вместе с некоторой окрестностью;
- *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, расположенной целиком в множестве D (т.е. грубо говоря, множество не состоит из обособленных частей);
- *областью*, если является открытым и связным множеством.

Область $D \subset \overline{\mathbf{C}}$ называется *односвязной*, если ее граница связна; иначе область называется *многосвязной*.

Задача 8. Описать множества на комплексной плоскости, заданные соотношениями 1) $0 < |z - i| < 5$; 2) $0 < |z - i| \leq 5$; 3) $|z - i| < 5$. Указать, какие из них являются областью, и если да, то односвязной или многосвязной.

Решение. Заметим, во-первых, что для двух комплексных чисел $z = x + iy$ и $z_0 = x_0 + iy_0$ модуль

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

представляет собой расстояние между точками z и z_0 на комплексной плоскости. Таким образом, множество 1) представляет собой открытый круг радиуса $r = 5$ с выколотым центром в точке $z_0 = i$ (рис. 3). Это открытое связное множество, то есть область. Ее граница представляет собой объединение окружности $|z-i| = 5$ и точки $z_0 = i$, то есть не является связным множеством (состоит из двух обособленных частей). Поэтому данная область не является односвязной (является двухсвязной областью). Аналогично множество 2) представляет собой замкнутый круг с выколотым центром. Это множество связное, но не открытое (никакая окрестность точки, лежащей на окружности $|z-i| = 5$, не содержится в данном множестве), то есть областью не является. Множество 3) представляет собой открытый круг с центром в точке $z_0 = i$ радиуса $r = 5$. Это открытое и связное множество, то есть область. Его граница – окружность $|z-i| = 5$ – связное множество. Поэтому данная область является односвязной.

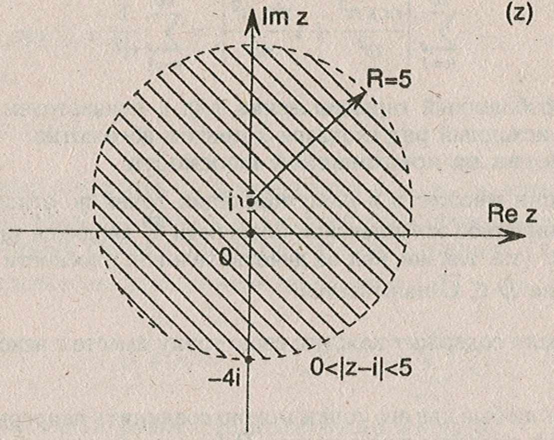


Рис. 3

Задача 9. Указать на комплексной плоскости множества точек, заданных соотношениями 1) $|z-i| + |z+i| < 4$; 2) $\dfrac{\pi}{4} < \arg(z-i) < \dfrac{3\pi}{4}$.

Решение. 1) Рассмотрим, прежде всего, линию, определяемую уравнением $|z-i| + |z+i| = 4$. Эта линия представляет собой геометрическое место точек на комплексной плоскости, для которых сумма расстояний до двух точек $z_1 = i$ и $z_2 = -i$ постоянна и равна 4. Как известно из аналитической геометрии, геометрическое место точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных F_1 и F_2 постоянна и равна величине $2a$, большей, чем расстояние между F_1 и F_2, представляет собой эллипс с фокусами F_1 и F_2 и большой полуосью a. При этом, если расстояние между фокусами равно $2c$, малая полуось b определяется из уравнения $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, то есть $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Поэтому данная линия представляет собой эллипс с фокусами $z_1 = i$ и $z_2 = -i$ и большой полуосью $a = 2$. Расстояние $|z_1 - z_2| = |2i| = 2$,

поэтому $c = 1$. Таким образом, $b = \sqrt{3}$. Указанный эллипс разделяет всю комплексную плоскость на две области – внутренность и внешность эллипса. Каждый из фокусов, например, точка $z_1 = i$, удовлетворяет неравенству, следовательно, данное неравенство определяет внутренность эллипса (рис. 4).

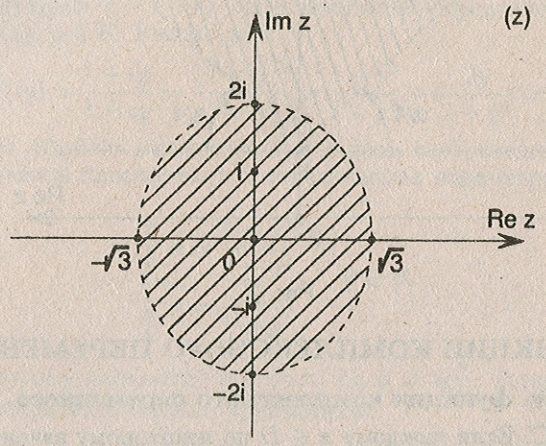


Рис. 4

2) Сделаем замену $z - i = w$. Этой замене соответствует параллельный перенос системы координат в точку $w = 0$, то есть $z = i$. При этом на комплексной плоскости (w) данное множество определяется соотношением: $\dfrac{\pi}{4} < \arg w < \dfrac{3\pi}{4}$, и таким образом на плоскости (w) оно представляет из себя внутренность угла с вершиной в точке $w = 0$ раствора $\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$, симметричного относительно положительной части мнимой оси $\mathrm{Im}w$. Соответственно на комплексной плоскости (z) оно представляет собой внутренность угла с вершиной в точке $z = i$ раствора $\dfrac{\pi}{2}$, симметричного относительно положительной части мнимой оси $\mathrm{Im}z$ (рис. 5).

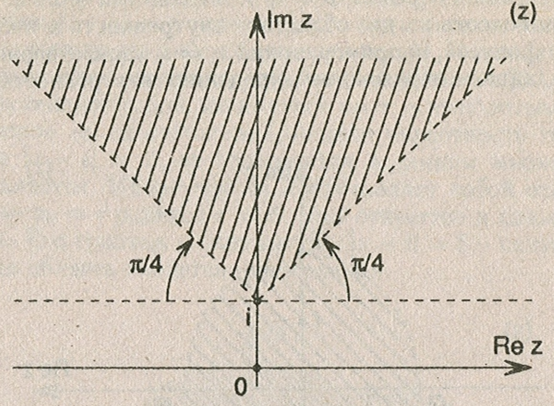


Рис. 5

2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2.1. Понятие функции комплексного переменного

Пусть $D \subset \mathbf{C}$. Если каждому $z \in D$ по некоторому закону f поставлено в соответствие комплексное число $w \in \mathbf{C}$, то говорят, что на множестве D определена *функция комплексного переменного* $w = f(z)$.

Если $z = x + iy$ и $w = u + iv$, то функция комплексного переменного $w = f(z)$ может быть представлена как

$$w = f(z) = u + iv = u(x, y) + iv(x, y),$$

где $u(x, y) = \mathrm{Re} f(z)$, $v(x, y) = \mathrm{Im} f(z)$ – действительные функции двух переменных x и y.

Задача 10. Найти действительную и мнимую части функции $f(z) = z^2 + 2i\bar{z}$.

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$f(z) = (x + iy)^2 + 2i(x - iy) = x^2 + 2ixy + i^2y^2 + 2ix - 2i^2y =$$

$$= (x^2 - y^2 + 2y) + i2(xy + x) = u(x, y) + iv(x, y),$$

откуда получаем:

$$u(x, y) = (x^2 - y^2 + 2y), \quad v(x, y) = 2x(y + 1).$$

Задача 11. Найти образы указанных точек при отображении $f = z^3 - i$: 1) $z_0 = 1 - i$; 2) $z_0 = 2 + 3i$.

Решение. 1) $f(z_0) = (1-i)^3 - i = 1 - 3i + 3i^2 - i^3 - i = 1 - 3i - 3 + i - i = -2 - 3i$.

2) $f(z_0) = f(2+3i) = (2+3i)^3 - i = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 3i + 3 \cdot 2 \cdot 9i^2 + (3i)^3 - i = 8 + 36i - 54 - 27i - i = -46 + 8i$.

Задача 12. Найти образы указанных множеств при отображении $w = \dfrac{1+z}{1-z}$: 1) $\mathrm{Re} z = 0$; 2) $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$; 3) $|z| < 1$.

Решение. 1) Пусть $z = x + iy$. Тогда множество определяется уравнением $x = 0$, или $z = iy$, $y \in \mathbf{R}$. Рассмотрим

$$w = f(iy) = \frac{1+iy}{1-iy} = \frac{(1+iy)^2}{1+y^2} = \frac{1-y^2}{1+y^2} + i\frac{2y}{1+y^2} = u + iv.$$

Соответственно, образом множества при данном отображении является линия на комплексной плоскости (w), определяемая параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1-y^2}{1+y^2}, \\ v = \dfrac{2y}{1+y^2}. \end{cases} \quad y \in \mathbf{R}.$$

Перейдем к другому параметру $t \in (-\pi; \pi)$: $y = \mathrm{tg}\dfrac{t}{2}$. Тогда ту же линию можно задать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} u = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{t}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{t}{2}} = \cos t, \\ v = \dfrac{2\mathrm{tg}\frac{t}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{t}{2}} = \sin t. \end{cases} \quad t \in (-\pi; \pi).$$

Таким образом, линия представляет собой окружность $u^2 + v^2 = 1$, причем точка окружности $(-1; 0)$ соответствует $t = \pm\pi$, или $y = \pm\infty$. Заметим, кроме того, что $w(\pm i) = \pm i$, и, таким образом, точки $z = \pm i$ остаются неподвижными при данном отображении. Поскольку точка $z = 0$ переходит в точку $w = w(0) = 1$, то отрезок $[-i; i]$ переходит в правую полуокружность. А так как точка $w(2i) = -\dfrac{3}{5} + i\dfrac{4}{5}$ расположена в верхней полуплоскости $\mathrm{Im} w > 0$, то луч $\arg(z - i) = \dfrac{\pi}{2}$, то есть луч, исходящий из точки $z = i$ в положительном направлении мнимой оси, переходит в четверть окружности $|w| = 1$, $\mathrm{Im} w > 0$, $\mathrm{Re} w < 0$. Аналогично луч, исходящий из точки $z = -i$ в противоположном направлении, переходит в оставшуюся четверть окружности (рис. 6).

2) Данное множество представляет собой верхнюю полуокружность с центром в 0 на комплексной плоскости (z) $(z = x + iy)$. Эта полуокружность задается параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases} \quad t \in [0; \pi].$$

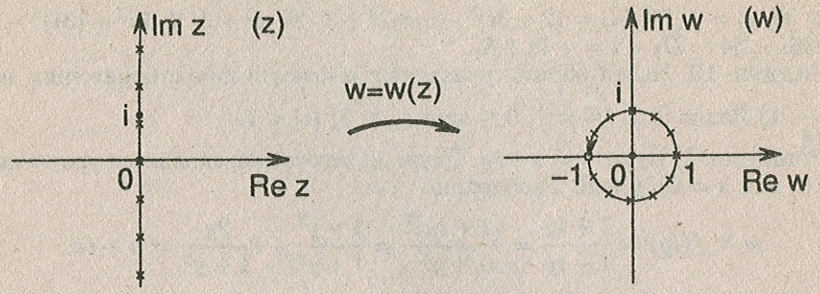


Рис. 6

Найдем образы точек этой полуокружности:

$$w = f(\cos t + i\sin t) = \frac{1+\cos t + i\sin t}{1-\cos t - i\sin t} =$$

$$= \frac{(1+\cos t + i\sin t)(1-\cos t + i\sin t)}{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} =$$

$$= \frac{(1-\cos^2 t) - \sin^2 t + i\sin t(1+\cos t + 1 - \cos t)}{2 - 2\cos t} = i\cdot\frac{\sin t}{1-\cos t} =$$

$$= i\cdot\frac{2\sin(t/2)\cos(t/2)}{2\sin^2(t/2)} = i\cdot \mathrm{ctg}\frac{t}{2} = iv, \quad v \in [+\infty; 0] \quad \text{при } t \in [0;\pi].$$

Соответственно, образом указанной полуокружности при данном отображении является множество всех точек $w = u + iv$ комплексной плоскости (w), для которых $u = 0$, $v \geq 0$, то есть неотрицательная часть мнимой полуоси.

3) Данное множество представляет собой открытый круг радиуса 1 с центром в 0 на комплексной плоскости. Аналогично п.2) показываем, что граница этого круга, то есть окружность $|z| = 1$, переходит при заданном отображении в мнимую ось. Она разделяет всю плоскость на две полуплоскости – правую ($\mathrm{Re}w > 0$) и левую ($\mathrm{Re}w < 0$). Заметим, что 0 принадлежит кругу, и $w(0) = 1 > 0$. Поэтому образом круга является правая полуплоскость – множество всех точек $w = u + iv$ на комплексной плоскости (w), для которых $u > 0$.

2.2. Основные элементарные функции комплексного переменного

Следующие функции называются *основными элементарными*:

1. Дробно-рациональная функция

$$\frac{a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \ldots + b_1 z + b_0}, \quad n, m \in \mathbf{N},$$

в частности,

а) линейная функция

$$az + b, \quad a, b \in \mathbf{C}, \quad a \neq 0;$$

b) степенная функция

$$z^n, \quad n \in \mathbf{N};$$

c) дробно-линейная функция

$$\frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbf{C}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0.$$

2. Показательная функция

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y).$$

3. Тригонометрические функции

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \mathrm{tg}z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \mathrm{ctg}z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Примечания.

1. По определению,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2i} = u(x,y) + iv(x,y),$$

где

$$u(x,y) = \sin x\frac{e^y + e^{-y}}{2} = \sin x \mathrm{ch} y, \quad v(x,y) = \cos x\frac{e^y - e^{-y}}{2} = \cos x \mathrm{sh} y,$$

откуда получаем:

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \mathrm{ch} y + i\cos x \mathrm{sh} y. \tag{2.1}$$

Аналогично доказывается, что

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \mathrm{ch} y - i\sin x \mathrm{sh} y. \tag{2.2}$$

2. По формулам (2.1) и (2.2),

$$\mathrm{tg}z = \frac{\sin x\mathrm{ch}y + i\cos x\mathrm{sh}y}{\cos x\mathrm{ch}y - i\sin x\mathrm{sh}y} =$$

$$= \frac{(\sin x\mathrm{ch}y + i\cos x\mathrm{sh}y)(\cos x\mathrm{ch}y + i\sin x\mathrm{sh}y)}{\cos^2 x\mathrm{ch}^2 y + \sin^2 x\mathrm{sh}^2 y} =$$

$$= \frac{(\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y)\sin x\cos x + i(\cos^2 x + \sin^2 x)\mathrm{ch}y\mathrm{sh}y}{\cos^2 x\mathrm{ch}^2 y + \sin^2 x\mathrm{sh}^2 y},$$

то есть
$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x + i\operatorname{sh} 2y}{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y}.$$
По формулам двойного аргумента получаем:
$$\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y = \frac{1+\cos 2x}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} 2y + 1}{2} + \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} 2y - 1}{2} =$$
$$= \frac{1}{4}(1 + \cos 2x \operatorname{ch} 2y + 2\cos 2x + 2\operatorname{ch} 2y - 1 - \cos 2x \operatorname{ch} 2y) = \frac{1}{2}(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y).$$
Таким образом,
$$\operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(x+iy) = \frac{\sin 2x + i\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}. \tag{2.3}$$
Аналогично доказывается, что
$$\operatorname{ctg} z = \operatorname{ctg}(x+iy) = \frac{\sin 2x - i\operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}. \tag{2.4}$$

3. Как видно из доказательства формулы (2.3),
$$|\cos z|^2 = \cos z \cdot \overline{\cos z} = \frac{1}{2}(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y),$$
и таким образом, в отличие от действительного случая, $|\cos z|$ может принимать сколь угодно большие значения. Заметим, что $\operatorname{ch} 2y > 1$ при $y \neq 0$, $\operatorname{ch} 0 = 1$. При этом $|\cos 2x| \leq 1$. Поэтому $|\cos z| = 0$ только в том случае, когда $y \neq 0$, $\cos 2x = -1$, то есть при $2x = \pi + 2\pi k$, или $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Аналогичные рассуждения можно провести для $|\sin z|$.

4. Гиперболические функции
$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

5. Логарифмическая функция
$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z}.$$
Данная функция является многозначной. Наряду с ней рассматривается однозначная функция
$$\ln z = \ln|z| + i\arg z,$$
которая называется логарифмической функцией в смысле главного значения.

Примечания.

1. Пусть $z = re^{i\varphi}$. Рассмотрим
$$e^{\operatorname{Ln} z} = e^{\ln r + i(\varphi + 2k\pi)} = e^{\ln r} \cdot e^{i(\varphi+2k\pi)} =$$
$$= r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} = z.$$
Таким образом, функция $z = \operatorname{Ln} w$ представляет все множество решений уравнения $w = e^z$, то есть является обратной по отношению к показательной функции.

2. Через суперпозицию показательной и логарифмической функции определяются:
   a) общая степенная функция $z^a = e^{a\operatorname{Ln} z}$, $a \in \mathbf{C}$;
   b) общая показательная функция $a^z = e^{z\operatorname{Ln} a}$, $a \in \mathbf{C}$.

6. Обратные тригонометрические и гиперболические функции: $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$, $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$, $\operatorname{Arcth} z$.

Примечание. Указанные функции можно выразить в виде суперпозиции предыдущих функций.

Задача 13. Найти формулу, выражающую $\operatorname{Arcsin} z$.

Решение. Пусть $w = \operatorname{Arcsin} z$, то есть
$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}.$$
Положим $x = e^{iw}$, $b = iz$. Тогда получаем уравнение:
$$x^2 - 2bx - 1 = 0, \quad \text{откуда } x = b + \sqrt{b^2+1}$$
(здесь $\sqrt{b^2+1}$ – это комплексный корень, то есть 2-значная функция комплексного переменного, поэтому $\pm$ перед ним ставить не нужно), и, таким образом,
$$w = \frac{1}{i}\operatorname{Ln}(b + \sqrt{1+b^2}), \quad \text{то есть} \quad w = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}).$$

2.3. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Определение 1. Число $w_0 \neq \infty$ называется *пределом функции* $w = f(z)$ *при* $z \to z_0$ ($\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$), если
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0: \quad \forall z \neq z_0, \ |z - z_0| < \delta, \quad \text{имеем } |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$
Можно дать равносильное определение.

Определение 2. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$, если для любой последовательности $\{z_n\} \to z_0$, $z_n \neq z_0$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w_0$.

Примечание. Если $w_0 = u_0 + iv_0$, $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v_0.$$

Определение 3. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, если
$$\forall R > 0 \quad \exists \delta = \delta(R, z_0) > 0: \quad \forall z \neq z_0, \ |z - z_0| < \delta, \quad \text{имеем } |f(z)| > R.$$

Равносильное определение:

Определение 4. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, если для любой последовательности $\{z_n\} \to z_0$, $z_n \neq z_0$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$.

Далее, функция $w = f(z)$ называется *непрерывной в точке* z_0, если она определена в этой точке и $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Примечание. Если $w_0 = u_0 + iv_0$, $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то функция $w = f(z)$ непрерывна в точке z_0 тогда и только тогда, когда функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в точке $(x_0; y_0)$.

Таким образом, все свойства непрерывных функций двух переменных переносятся на функции комплексной переменной.

Задача 14. Вычислить

$$\lim_{z\to i} \frac{z^2 + iz + 2}{z - i}.$$

Решение.

$$\lim_{z\to i} \frac{z^2 + iz + 2}{z - i} = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)(z+2i)}{z - i} = \lim_{z\to i}(z + 2i) = 3i.$$

В последнем равенстве используется тот факт, что $z + 2i = x + iy + 2i = x + i(y+2) = u(x,y) + iv(x,y)$, где функции $u(x,y) = x$ и $v(x,y) = y + 2$ непрерывны на всей плоскости, а следовательно, и функция $f(z) = z + 2i$ непрерывна.

Задача 15. Исследовать на непрерывность функцию $w = f(z) = e^{\bar z}$.

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$w = e^{x-iy} = e^x e^{-iy} = e^x(\cos y - i\sin y) = u(x,y) + iv(x,y),$$

где функции $u(x,y) = e^x\cos y$, $v(x,y) = -e^x \sin y$ непрерывны на всей плоскости, следовательно, функция $f(z) = e^{\bar z}$ непрерывна на всей комплексной плоскости.

Задача 16. Исследовать на непрерывность функцию $w = f(z) = \dfrac{\bar z}{|z|}$.

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$w = \frac{x - iy}{\sqrt{x^2+y^2}} = u(x,y) + iv(x,y),$$

где

$$u(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad v(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Заметим, что функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны всюду, кроме начала координат $(x;y) = (0;0)$. В точке $(0;0)$ они не определены, следовательно,

разрывны. Более того,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y), \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} v(x,y) \ \nexists.$$

Действительно, например, для функции $u(x,y)$ можно указать 2 пары последовательностей: $x_n = 1/n$, $y_n = 0$ и $x'_n = -1/n$, $y'_n = 0$, сходящихся к 0, и таких, что последовательности соответствующих значений функции $u(x_n, y_n) \to 1$, $u(x'_n, y'_n) \to -1$ стремятся к разным числам. Следовательно, предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$$

не существует (ни конечный, ни бесконечный). Таким образом, $z = 0$ является существенно особой точкой разрыва исходной функции.

2.4. Аналитические функции. Условия Коши-Римана

Если функция $w = f(z)$ определена в области $D \subset \mathbf{C}$, и в точке $z \in D$ существует

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

то он называется *производной функции* $f(z)$ *в точке* z и обозначается $f'(z)$ или $\dfrac{df(z)}{dz}$.

Если для $z \in D$ $\exists f'(z)$, то говорят, что функция $f(z)$ *дифференцируема в точке* z. Если функция дифференцируема в каждой точке области D, то говорят, что она является *аналитической в области* D. Функция называется *аналитической в точке* z_0, если она аналитична в некоторой окрестности этой точки.

Для того, чтобы функция $w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ была аналитической в области D, необходимо и достаточно, чтобы существовали непрерывные частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в этой области и выполнялись *условия Коши-Римана* (*CR-условия*):

$$u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x,$$

или в полярных координатах ($z = re^{i\varphi}$):

$$u'_r = \frac{1}{r}v'_\varphi, \quad v'_r = -\frac{1}{r}u'_\varphi.$$

Соответственно, производная выражается по формулам:

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y = u'_x - iu'_y = v'_y + iv'_x$$

или

$$f'(z) = \frac{r}{z}(u'_r + iv'_r) = \frac{1}{z}(v'_\varphi - iu'_\varphi).$$

Правила дифференцирования функций действительной переменной переносятся на функции комплексной переменной. В частности, справедливы свойства:

1. Если $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в области D, то функции $f(z) \pm g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$, а также $f(z)/g(z)$ при условии, что $g(z) \neq 0$, аналитичны в области D, и при этом справедливы формулы:

$$\Big(f(z) \pm g(z)\Big)' = f'(z) \pm g'(z),$$

$$\Big(f(z) \cdot g(z)\Big)' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}.$$

2. Если функция $f(z)$ аналитична в области D, а функция $\varphi(w)$ аналитична в области $G = \{f(z) | z \in D\}$, то их суперпозиция $F(z) = \varphi(f(z))$ аналитична в области D и справедлива формула:

$$F'(z) = \varphi'(f(z))f'(z).$$

3. Если функция $w = f(z)$ аналитична в области D и $f'(z) \neq 0$ в окрестности точки $z_0 \in D$, то в окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ определена обратная функция $z = f^{-1}(w_0)$, причем она тоже аналитична и справедлива формула

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Примечание. Формулы производных элементарных функций комплексного переменного аналогичны соответствующим формулам производных функций действительного переменного.

Задача 17. Доказать, что функция $f(z) = e^{3z}$ аналитична и найти $f'(z)$.

Решение. По определению $e^{3z} = e^{3(x+iy)} = e^{3x}(\cos 3y + i \sin 3y)$. Поэтому $u(x,y) = e^{3x} \cos 3y$, $v(x,y) = e^{3x} \sin 3y$. Таким образом,

$$u'_x = 3e^{3x} \cos 3y = v'_y, \quad u'_y = -3e^{3x} \sin 3y = -v'_x,$$

то есть CR-условия выполнены на всей комплексной плоскости. Соответственно

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = 3e^{3x}(\cos 3y + i \sin 3y) = 3e^{3z}.$$

Задача 18. Доказать, что функция $f(z) = z^2$ аналитична и найти $f'(z)$.

Решение. Пусть $z = re^{i\varphi}$. Тогда $f(z) = z^2 = r^2 e^{i2\varphi} = r^2 \cos 2\varphi + ir^2 \sin 2\varphi$, и $u(r,\varphi) = r^2 \cos 2\varphi$, $v(r,\varphi) = r^2 \sin 2\varphi$, откуда получаем:

$$u'_r = 2r \cos 2\varphi, \quad v'_r = 2r \sin 2\varphi, \quad u'_\varphi = -2r^2 \sin 2\varphi, \quad v'_\varphi = 2r^2 \cos 2\varphi.$$

Таким образом,

$$u'_r = \frac{1}{r} v'_\varphi, \quad v'_r = -\frac{1}{r} u'_\varphi,$$

то есть выполнены CR-условия в полярных координатах. Соответственно функция аналитична и

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(u'_r + iv'_r\right) = \frac{r}{z} 2r(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) = 2\frac{r^2 e^{i2\varphi}}{z} = 2\frac{z^2}{z} = 2z.$$

Задача 19. Доказать, что функция $f(z) = \ln z$ аналитична во всей комплексной плоскости, кроме точки $z = 0$, и найти $f'(z)$.

Решение. Пусть $z = re^{i\varphi}$. По определению $\ln z = \ln r + i\varphi$. Поэтому $u(r,\varphi) = \ln r$, $v(r,\varphi) = \varphi$, откуда получаем при $r \neq 0$:

$$u'_r = \frac{1}{r}, \quad v'_r = 0, \quad u'_\varphi = 0, \quad v'_\varphi = 1, \quad \text{то есть} \quad u'_r = \frac{1}{r} v'_\varphi, \quad v'_r = -\frac{1}{r} u'_\varphi.$$

Таким образом, выполнены CR-условия в полярных координатах. Соответственно функция аналитична и

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(u'_r + iv'_r\right) = \frac{r}{z}\left(\frac{1}{r} + i0\right) = \frac{1}{z}.$$

Задача 20. Доказать, что функция $f(z) = \sin z$ аналитична во всей комплексной плоскости, и найти $f'(z)$. Задачу решить двумя способами: с помощью CR-условий и с помощью свойств аналитических функций.

Решение. 1) По формуле (2.1) $\sin z = u(x,y) + iv(x,y)$, где

$$u(x,y) = \sin x \operatorname{ch} y, \quad v(x,y) = \cos x \operatorname{sh} y,$$

откуда получаем:

$$u'_x = \cos x \operatorname{ch} y = v'_y, \quad u'_y = \sin x \operatorname{sh} y = -v'_x,$$

то есть CR-условия выполнены на всей комплексной плоскости. Соответственно

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$

и по формуле (2.2), $f'(z) = \cos z$.

2) По определению

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

и по правилам дифференцирования аналитических функций получаем, что функция аналитическая как суперпозиция аналитических функций и справедливы равенства

$$f'(z) = \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} + ie^{-iz}\right) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

Задача 21. Найти область аналитичности функции $f(z) = \mathrm{tg} z$ и вычислить $f'(z)$. Задачу решить двумя способами: с помощью CR-условий и с помощью свойств аналитических функций.

Решение. 1) По формуле (2.3) $\mathrm{tg} z = u(x,y) + iv(x,y)$, где

$$u(x,y) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \mathrm{ch}2y}, \quad v(x,y) = \frac{\mathrm{sh}2y}{\cos 2x + \mathrm{ch}2y},$$

откуда получаем:

$$u'_x = \frac{2\cos 2x(\cos 2x + \mathrm{ch}2y) + 2\sin^2 2x}{(\cos 2x + \mathrm{ch}2y)^2} = \frac{2(\mathrm{ch}2y\cos 2x + 1)}{(\cos 2x + \mathrm{ch}2y)^2},$$

$$u'_y = -\frac{2\mathrm{sh}2y\sin 2x}{(\cos 2x + \mathrm{ch}2y)^2},$$

$$v'_x = \frac{2\sin 2x\mathrm{sh}2y}{(\cos 2x + \mathrm{ch}2y)^2},$$

$$v'_y = \frac{2\mathrm{ch}2y(\cos 2x + \mathrm{ch}2y) - 2\mathrm{sh}^2 2y}{(\cos 2x + \mathrm{ch}2y)^2} = \frac{2(\mathrm{ch}2y\cos 2x + 1)}{(\cos 2x + \mathrm{ch}2y)^2},$$

то есть CR-условия выполнены на всей комплексной плоскости, кроме точек, в которых $\cos 2x + \mathrm{ch}2y = 0$, то есть $y = 0$, $2x = \pi + 2\pi k$, или $z = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Соответственно

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = \frac{2(\mathrm{ch}2y\cos 2x + 1) + i2\sin 2x\mathrm{sh}2y}{(\cos 2x + \mathrm{ch}2y)^2}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\cos^2 z} = \frac{(\overline{\cos z})^2}{|\cos z|^4} = \frac{4(\cos x\mathrm{ch}y + i\sin x\mathrm{sh}y)^2}{(\cos 2x + \mathrm{ch}2y)^2} =$$

$$= \frac{4(\cos^2 x\mathrm{ch}^2 y - \sin^2 x\mathrm{sh}^2 y) + 8i\cos x\mathrm{ch}y\sin x\mathrm{sh}y}{(\cos 2x + \mathrm{ch}2y)^2} =$$

$$= \frac{2(\mathrm{ch}2y\cos 2x + 1) + i2\sin 2x\mathrm{sh}2y}{(\cos 2x + \mathrm{ch}2y)^2}.$$

Таким образом, $f'(z) = \dfrac{1}{\cos^2 z}$.

2) По определению

$$\mathrm{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

и по правилам дифференцирования аналитических функций получаем, что в области тех z, для которых $|\cos z| \neq 0$, то есть при $z \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, функция является аналитической как частное аналитических функций и справедливы равенства

$$f'(z) = \frac{(\sin z)'\cos z - \sin z(\cos z)'}{\cos^2 z} = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z}.$$

Рассмотрим

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}\} - \{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}\}\right) = \frac{2+2}{4} = 1.$$

Таким образом, $f'(z) = \dfrac{1}{\cos^2 z}$.

Задача 22. Найти область аналитичности функции $f(z) = (\overline{z})^2$.

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда $f(z) = (x - iy)^2 = x^2 - 2ixy - y^2 = u(x,y) + iv(x,y)$, где $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = -2xy$. При этом

$$u'_x = 2x, \quad v'_y = -2x,$$

то есть $u'_x \neq v'_y$ ни при каком z, если $x \neq 0$. Аналогично, $u'_y \neq -v'_x$ при $y \neq 0$. Таким образом, CR-условие нигде не выполнено, кроме $z = 0$, и $f(z)$ не является аналитической ни в одной точке комплексной плоскости.

2.5. Интеграл от функции комплексного переменного

Пусть $\gamma \subset \mathbf{C}$ – дуга кусочно гладкой кривой с выбранным направлением обхода, а $f(z)$ – функция комплексного переменного, определенная и ограниченная на дуге γ. Разобьем дугу γ точками $z_k \in \gamma$, $k = \overline{0,n}$, так что переход от z_{k-1} к z_k соответствует направлению обхода. Положим $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $k = \overline{1,n}$. Назовем число $\lambda = \max\limits_{k=\overline{1,n}} |\Delta z_k|$ *мелкостью данного разбиения дуги* γ. На каждой из частичных дуг $z_{k-1}z_k$ выберем произвольно среднюю точку c_k, $k = \overline{1,n}$ (рис. 7). Составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta z_k.$$

Назовем ее *интегральной суммой функции* $f(z)$ *по дуге* γ, отвечающей данному разбиению дуги и данному выбору средних точек. Если существует конечный $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma = I \in \mathbf{C}$, не зависящий ни от способа разбиения дуги, ни от выбора средних точек, то говорят, что *функция* $f(z)$ *интегрируема вдоль дуги* γ, а само число I называется *интегралом функции* $f(z)$ *по дуге* γ и обозначается следующим образом

$$I = \int_\gamma f(z)dz.$$

При этом γ называется *контуром интегрирования*, а $f(z)$ – *подынтегральной функцией*.

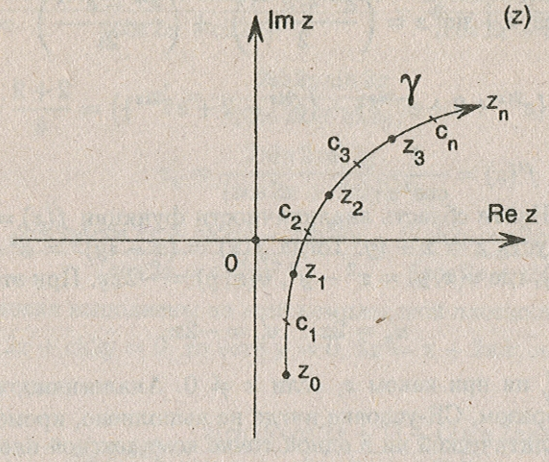


Рис. 7

Примечания.

1. Если $z = x + iy$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то $dz = dx + idy$ и

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \{u(x,y) + iv(x,y)\}(dx + idy),$$

или

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy, \qquad (2.5)$$

где справа стоят обычные криволинейные интегралы 2-го рода от функций двух действительных переменных. Отсюда понятно, что если функция $f(z)$ непрерывна вдоль дуги γ, то она интегрируема вдоль нее.

2. Если дуга γ задана параметрическим уравнением

$$z = z(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

(при $z(t) = x(t) + iy(t)$ можно считать, что γ – дуга на плоскости Oxy, заданная параметрическими уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$), причем начальной и конечной точкам дуги соответствуют значения параметра $t = \alpha$ и $t = \beta$, то

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f\left(z(t)\right)z'(t)dt. \qquad (2.6)$$

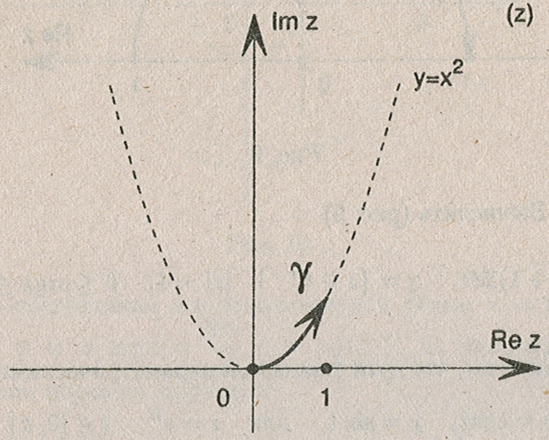


Рис. 8

Задача 23. Вычислить (рис. 8)

$$\int_\gamma \operatorname{Im}(\overline{z})^2 dz, \quad \gamma = \{z = x + iy \;\mid\; y = x^2, \quad x \in [0,1]\}.$$

Решение. Заметим, что $(\overline{z})^2 = (x - iy)^2 = x^2 - 2ixy - y^2$, следовательно, $\operatorname{Im}(\overline{z})^2 = -2xy$. Вдоль дуги γ имеем: $\operatorname{Im}(\overline{z})^2 = -2x \cdot x^2 = -2x^3$, $dz = d(x + iy) = d(x + ix^2) = dx + 2ixdx$, и таким образом, переходя к интегралу по параметру $x \in [0,1]$, получаем:

$$\int_\gamma \operatorname{Im}(\overline{z})^2 dz = \int_0^1 (-2x^3)(dx + 2ixdx) =$$

$$= -2\int_0^1 x^3dx - 4i\int_0^1 x^4dx = -\frac{x^4}{2} - i\frac{4}{5}x^5\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} - i\frac{4}{5}.$$

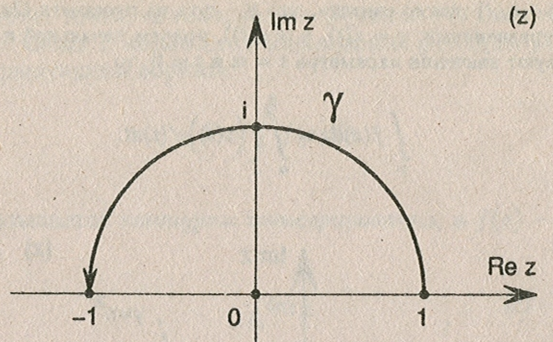


Рис. 9

Задача 24. Вычислить (рис. 9)

$$\int_\gamma (2z+1)\overline{z}dz, \quad \gamma = \{z \in \mathbf{C} \quad | \quad |z| = 1, \quad 0 \leq \arg z \leq \pi\}.$$

Решение. Заметим, что дуга γ задается параметрическими уравнениями

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad \text{или} \quad z = e^{it}, \quad t \in [0, \pi]$$

и, следовательно, $dz = ie^{it}dt$, $\overline{z} = x - iy = \cos t - i\sin t = e^{-it}$. Таким образом, получаем:

$$\int_\gamma (2z+1)\overline{z}dz = \int_0^\pi (2e^{it}+1)e^{-it}ie^{it}dt = i\int_0^\pi (2e^{it}+1)dt = i\left(\frac{2}{i}e^{it}+t\right)\Bigg|_0^\pi =$$

$$= i\left(\frac{2}{i}e^{i\pi} - \frac{2}{i} + \pi\right) = 2\cos\pi + 2i\sin\pi - 2 + i\pi = -4 + i\pi.$$

Задача 25. Вычислить (рис. 10)

$$\int_\gamma (2z+1)\overline{z}dz, \quad \gamma = \{z \in \mathbf{C} \quad | \quad \arg z = \frac{3\pi}{4}, \quad 1 \leq |z| \leq 3\}.$$

Решение. Заметим, что дуга γ задается параметрическим уравнением:

$$z = te^{i3\pi/4} = t\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), \quad t \in [1, 3].$$

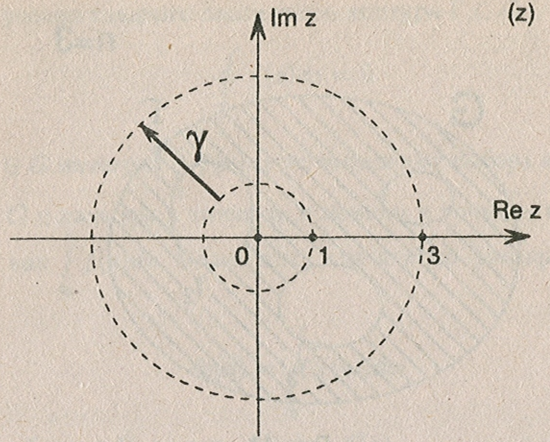


Рис. 10

Действительно, представляя z в показательной форме $z = re^{i\varphi}$, получаем, что вдоль дуги γ: $\varphi = \arg z = \dfrac{3\pi}{4}$, $r = |z| \in [1,3]$. Поэтому $dz = e^{i3\pi/4}dt$, $\overline{z} = te^{-i3\pi/4}$. Таким образом, получаем:

$$\int_\gamma (2z+1)\overline{z}dz = \int_1^3 (2te^{i3\pi/4}+1)te^{-i3\pi/4}e^{i3\pi/4}dt = \int_1^3 (2t^2e^{i3\pi/4}+t)dt =$$

$$= \left(\frac{2}{3}t^3e^{i3\pi/4} + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 = \left(\frac{2}{3}e^{i3\pi/4}(27-1) + \frac{1}{2}(9-1)\right) = \frac{52}{3\sqrt{2}}(-1+i) + 4.$$

2.6. Теорема Коши. Интегральная формула Коши

Далее для замкнутого кусочно гладкого контура $\gamma \subset \mathbf{C}$ ограниченную им область будем обозначать $\mathrm{int}\gamma$ и называть ее *внутренностью контура* γ. Соответственно, область $\mathbf{C} \setminus \overline{\mathrm{int}\gamma}$ будем называть *внешностью контура* γ и обозначать $\mathrm{ext}\gamma$.

Теорема Коши для односвязной области. Если $G \subset \mathbf{C}$ – односвязная область и функция $f(z)$ аналитична в G, то для любого кусочно гладкого замкнутого контура $\gamma \subset G$

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0. \tag{2.7}$$

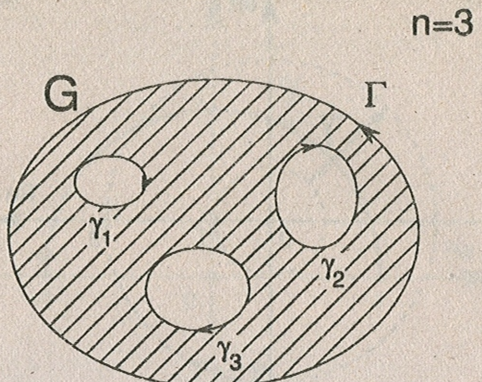


Рис. 11

Если, кроме того, $f(z)$ непрерывна в замыкании $\overline{G}$, то

$$\oint\limits_{\partial G} f(z)dz = 0, \tag{2.8}$$

где ∂G – граница области G.

Примечание. Формула (2.7) останется справедливой и для многосвязной области при том, однако, условии, что $\mathrm{int}\gamma \subset G$. Действительно, чтобы убедиться в этом, достаточно взять в качестве области G односвязную область $D = \mathrm{int}\gamma$ – тогда функция $f(z)$ аналитична в D и непрерывна в замыкании $\overline{D}$, причем $\partial D = \gamma$ – и воспользоваться формулой (2.8).

Пусть $G \subset \mathbf{C}$ – $(n+1)$-связная область. Это означает, что $\partial G = \Gamma \cup \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n$, где Γ – внешний замкнутый контур, а $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ – внутренние, не пересекающиеся и не вложенные друг в друга замкнутые контуры. Положительным направлением обхода ∂G условимся называть такое, при котором область G остается слева от наблюдателя, двигающегося в этом направлении. Это соответствует положительному направлению обхода контура Γ и отрицательному направлению обхода контуров $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Далее ∂G, проходимую в положительном направлении, будем обозначать ∂G^+ (рис. 11).

Теорема Коши для многосвязной области. Если $G \subset \mathbf{C}$ – $(n+1)$-связная область и функция $f(z)$ аналитична в G и непрерывна в замыкании $\overline{G}$, то

$$\int\limits_{\partial G^+} f(z)dz = 0, \quad \text{то есть} \quad \oint\limits_{\Gamma^+} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_k^+} f(z)dz. \tag{2.9}$$

Теорема о независимости интеграла от пути интегрирования. Пусть $G \subset \mathbf{C}$ – односвязная область, а функция $f(z)$ непрерывна в G и

для любого кусочно гладкого замкнутого контура $\Gamma \subset G$

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Тогда $\forall z_0, z_1 \in G$ интеграл $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$ не зависит от выбора кусочно гладкого контура $\gamma \subset G$ с началом в точке z_0 и концом в точке z_1 и соответственно обозначается как $\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz$. Более того, для любого фиксированного $z_0 \in G$ функция

$$\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(w)dw$$

аналитична в области G, причем $\Phi'(z) = f(z)$.

Примечание. Функция $\Phi(z)$ называется *первообразной функции* $f(z)$. Заметим, что если $F(z)$ – одна из первообразных функции $f(z)$, то в условиях теоремы справедлива обобщенная формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0).$$

Отсюда и из теоремы Коши получаем, что справедливо следующее утверждение.

Следствие теоремы Коши. Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области G, а $\gamma \subset G$ – любой кусочно гладкий контур, соединяющий точки $z_0, z_1 \in G$ и ориентированный в направлении от z_0 к z_1. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0), \tag{2.10}$$

где $F(z)$ – любая первообразная, то есть аналитическая в G функция такая, что $F'(z) = f(z)$.

Примечание. Предположим, функции $u(z), v(z)$ аналитичны в односвязной области G. Функция $F(z) = u(z)v(z)$ является, очевидно, первообразной для функции $F'(z) = u'(z)v(z) + u(z)v'(z)$. Отсюда и из формулы (2.10) получаем, что для любого кусочно гладкого контура $\gamma \subset G$ с началом в точке $z_0 \in G$ и концом в точке $z_1 \in G$ справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_{\gamma} u(z)v'(z)dz = u(z)v(z)\Big|_{z_0}^{z_1} - \int\limits_{\gamma} v(z)u'(z)dz. \tag{2.11}$$

Теорема (интегральная формула Коши). Пусть функция $f(z)$ аналитична в области G. Тогда функция $f(z)$ имеет всюду в области G производные любого порядка. Более того, $\forall z_0 \in G$ справедливы формулы:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz; \qquad (2.12)$$

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad k \in \mathbf{N}, \qquad (2.13)$$

где $\gamma \subset G$ – любой кусочно гладкий замкнутый контур такой, что

$$z_0 \in \text{int}\gamma \subset G.$$

Если, кроме того, функция $f(z)$ непрерывна в замыкании $\overline{G}$, то $\forall z_0 \in G$ справедливы формулы

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz; \qquad (2.14)$$

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial G^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad k \in \mathbf{N}. \qquad (2.15)$$

Задача 26. Вычислить

$$\int_\gamma e^{2iz} dz, \quad \gamma = \{z = x + iy \quad | \quad y = x^2, \quad x \in [0,1]\}.$$

Решение. Заметим, что функция e^{2iz} аналитическая и имеет первообразную $\dfrac{1}{2i} e^{2iz}$. Поэтому применима формула (2.10). Найдем начальную и конечную точки пути интегрирования:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0^2 = 0, \quad z_0 = x_0 + iy_0 = 0,$$

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 1^2 = 1, \quad z_1 = x_1 + iy_1 = 1 + i.$$

По обобщенной формуле Ньютона-Лейбница (2.10) получаем:

$$\int_\gamma e^{2iz} dz = \frac{1}{2i} e^{2iz} \Bigg|_0^{1+i} = \frac{1}{2i}\left(e^{2i(1+i)} - e^0\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{-2+2i} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{-2}\cos 2 + ie^{-2}\sin 2 - 1\right) = \frac{e^{-2}}{2}\sin 2 + \frac{i}{2}\left(1 - e^{-2}\cos 2\right).$$

Задача 27. Вычислить

$$\int_\gamma z \sin z dz, \quad \gamma = \{z = t + it^2 \quad | \quad t \in [1,2]\}.$$

Решение. Заметим, что функции z и $-\cos z$, являющаяся первообразной для функции $\sin z$, аналитичны во всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Поэтому можем воспользоваться формулой интегрирования по частям (2.11). Найдем начальную и конечную точки контура интегрирования:

$$z_0 = z(1) = 1 + i, \quad z_1 = z(2) = 2 + 4i.$$

По формуле (2.11) получаем:

$$\int_\gamma z \sin z dz = -\int_\gamma z(\cos z)' dz = -\left(z \cos z \Bigg|_{z_0}^{z_1} - \int_\gamma \cos z dz\right).$$

Далее, поскольку $(\sin z)' = \cos z$, то по обобщенной формуле Ньютона-Лейбница (2.10), получаем:

$$\int_\gamma z \sin z dz = (-z\cos z + \sin z)\Bigg|_{z_0}^{z_1} = \sin z_1 - z_1 \cos z_1 - \sin z_0 + z_0 \cos z_0.$$

По формулам (2.1) и (2.2) получаем:

$$\sin z_0 = \sin 1\text{ch}1 + i\cos 1\text{sh}1, \quad \sin z_1 = \sin 2\text{ch}4 + i\cos 2\text{sh}4,$$

$$\cos z_0 = \cos 1\text{ch}1 - i\sin 1\text{sh}1, \quad \cos z_1 = \cos 2\text{ch}4 - i\sin 2\text{sh}4,$$

откуда находим

$$\int_\gamma z \sin z dz = (\sin 2\text{ch}4 - \sin 1\text{ch}1) + i(\cos 2\text{sh}4 - \cos 1\text{sh}1) +$$

$$(\cos 1\text{ch}1 + \sin 1\text{sh}1) + i(\cos 1\text{ch}1 - \sin 1\text{sh}1) +$$

$$+ (2\cos 2\text{ch}4 + 4\sin 2\text{sh}4) + i(4\cos 2\text{ch}4 - 2\sin 2\text{sh}4) =$$

$$(\sin 2\text{ch}4 - \sin 1\text{ch}1 + \cos 1\text{ch}1 + \sin 1\text{sh}1 + 2\cos 2\text{ch}4 + 4\sin 2\text{sh}4) +$$

$$+ i(\cos 2\text{sh}4 - \cos 1\text{sh}1 + \cos 1\text{ch}1 - \sin 1\text{sh}1 + 4\cos 2\text{ch}4 - 2\sin 2\text{sh}4).$$

Задача 28. Вычислить интеграл по замкнутому контуру (обход контура – в положительном направлении)

$$\oint_\gamma \frac{z}{z^2 + 1} dz,$$

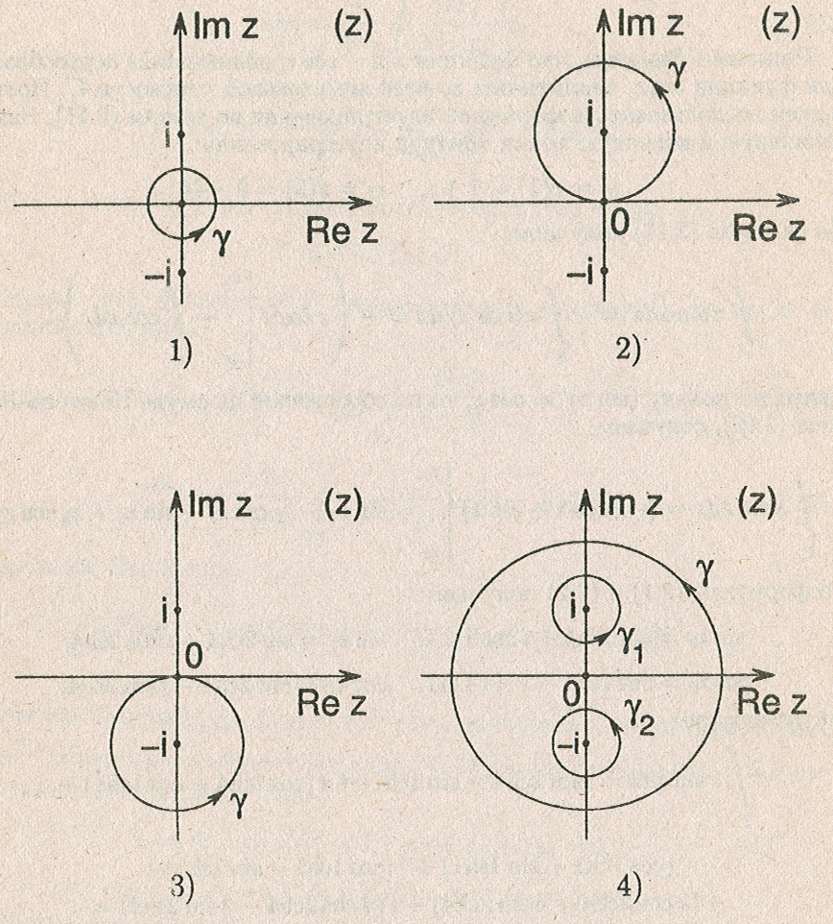


Рис. 12

если: 1) γ: $|z| = \frac{1}{2}$; 2) γ: $|z - i| = 1$; 3) γ: $|z + i| = 1$; 4) γ: $|z| = 2$ (см. рис. 12).

Решение. 1) Контур γ представляет собой окружность с центром в $z = 0$ радиуса $\frac{1}{2}$. Рассмотрим подынтегральную функцию

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1} = \frac{z}{(z-i)(z+i)}.$$

Она имеет только 2 особые точки $z = \pm i$. Тогда $G = \{z \in \mathbf{C} | \quad z \neq \pm i\}$ – область аналитичности этой функции. При этом $\mathrm{int}\gamma = \{z \in \mathbf{C} | \quad |z| < \frac{1}{2}\}$ целиком содержится в области G так же, как и сам контур γ. Поэтому по формуле (2.7) получаем, что

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{z}{z^2+1} dz = 0.$$

2) Контур γ представляет собой окружность с центром в $z = i$ радиуса 1. Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{z}{z+i}$. Она имеет единственную особую точку $z = -i$, которая принадлежит внешности $\mathrm{ext}\gamma$. При этом $z_0 = i \in \mathrm{int}\gamma \subset G$, где $G = \{z \in \mathbf{C} | \quad z \neq -i\}$ – область аналитичности функции $f(z)$. По формуле (2.12) получаем:

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{z}{z^2+1} dz = \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z-i} dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{i}{i+i} = \pi i.$$

3) Контур γ представляет собой окружность с центром в $z = -i$ радиуса 1. Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{z}{z-i}$. Она имеет единственную особую точку $z = i$, которая принадлежит внешности $\mathrm{ext}\gamma$. При этом $z_0 = -i \in \mathrm{int}\gamma \subset G$, где $G = \{z \in \mathbf{C} | \quad z \neq i\}$ – область аналитичности функции $f(z)$. По формуле (2.12) получаем:

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{z}{z^2+1} dz = \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z+i} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i \frac{-i}{-i-i} = \pi i.$$

4) Контур γ представляет собой окружность с центром в $z = 0$ радиуса 2. Он содержит внутри себя обе особые точки $z = \pm i$ подынтегральной функции. Рассмотрим 3-связную область G, ограниченную контуром γ, а также двумя внутренними контурами

$$\gamma_1 = \left\{z \in \mathbf{C} | \quad |z - i| = \frac{1}{2}\right\} \quad \text{и} \quad \gamma_2 = \left\{z \in \mathbf{C} | \quad |z + i| = \frac{1}{2}\right\},$$

каждый из которых содержит внутри себя по одной особой точке, и все контуры не пересекаются. Очевидно, что подынтегральная функция аналитична в области G и непрерывна в замыкании $\overline{G}$. Тогда по формуле (2.9) получаем:

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{z}{z^2+1}dz = \oint\limits_{\gamma_1} \frac{z}{z^2+1}dz + \oint\limits_{\gamma_2} \frac{z}{z^2+1}dz.$$

Аналогично п.п. 2, 3 находим, что

$$\oint\limits_{\gamma_1} \frac{z}{z^2+1}dz = \pi i, \quad \oint\limits_{\gamma_2} \frac{z}{z^2+1}dz = \pi i.$$

Таким образом,

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{z}{z^2+1}dz = 2\pi i.$$

Задача 29. Вычислить интеграл по замкнутому контуру (обход контура – в положительном направлении)

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z-2)^2},$$

если: 1) γ: $|z| = 1$; 2) γ: $|z-2| = 1$; 3) γ: $|z| = 5$.

Решение. 1) Контур γ представляет собой окружность с центром в $z = 0$ радиуса 1. Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2}$. Она имеет единственную особую точку $z = 2$, которая принадлежит внешности extγ. При этом $z_0 = 0 \in \mathrm{int}\gamma \subset G$, где $G = \{z \in \mathbf{C} |\quad z \neq 2\}$ – область аналитичности функции $f(z)$. По формуле (2.13) при $k = 2$ имеем:

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z-2)^2} = \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}f''(0).$$

Учитывая, что $f''(z) = \dfrac{6}{(z-2)^4}$, получаем:

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z-2)^2} = \frac{6\pi i}{16} = \frac{3\pi i}{8}.$$

2) Контур γ представляет собой окружность с центром в $z = 2$ радиуса 1. Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{1}{z^3}$. Она имеет единственную особую точку $z = 0$, которая принадлежит внешности extγ. При этом $z_0 = 2 \in \mathrm{int}\gamma \subset G$, где $G = \{z \in \mathbf{C} |\quad z \neq 0\}$ – область аналитичности функции $f(z)$. По формуле (2.13) при $k = 1$ имеем:

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z-2)^2} = \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-2)^2}dz = \frac{2\pi i}{1!}f'(2).$$

Учитывая, что $f'(z) = -\dfrac{3}{z^4}$, получаем:

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z-2)^2} = -\frac{6\pi i}{16} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

3) Контур γ представляет собой окружность с центром в $z = 0$ радиуса 5. Он содержит внутри себя обе особые точки $z = 0$ и $z = 2$ подынтегральной функции. Рассмотрим 3-связную область G, ограниченную контуром γ, а также двумя внутренними контурами

$$\gamma_1 = \left\{z \in \mathbf{C} |\quad |z| = \frac{1}{2}\right\} \quad \text{и} \quad \gamma_2 = \{z \in \mathbf{C} |\quad |z-2| = 1\},$$

каждый из которых содержит внутри себя по одной особой точке, и все контуры не пересекаются. Очевидно, что подынтегральная функция аналитична в области G и непрерывна в замыкании $\overline{G}$. Тогда по формуле (2.9) имеем:

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z-2)^2} = \oint\limits_{\gamma_1} \frac{dz}{z^3(z-2)^2} + \oint\limits_{\gamma_2} \frac{dz}{z^3(z-2)^2}.$$

Аналогично п.п. 1, 2 находим, что

$$\oint\limits_{\gamma_1} \frac{dz}{z^3(z-2)^2} = \frac{3\pi i}{8}, \quad \oint\limits_{\gamma_2} \frac{dz}{z^3(z-2)^2} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

Таким образом,

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z-2)^2} = 0.$$

2.7. Степенные ряды

Пусть функции $f_n(z)$, $n \in \mathbf{N}$ определены в области D. Выражение

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad z \in D \tag{2.16}$$

называется *функциональным рядом*. Понятие точки сходимости, области сходимости и области равномерной сходимости функционального ряда определяются точно так же, как для вещественного случая. Так же, как и для вещественного случая, доказывается, что справедливо следующее достаточное условие равномерной сходимости.

Признак Вейерштрасса. Пусть $G \subset D$ и существует последовательность вещественных неотрицательных чисел $\{c_n\}$ такая, что $\forall n \in \mathbf{N}$ (или хотя бы начиная с некоторого номера) выполняются неравенства

$$|f_n(z)| \le c_n, \quad \forall z \in G.$$

Тогда если вещественный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то ряд (2.16) сходится абсолютно и равномерно в области G. При этом числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ называется мажорирующим для исходного функционального ряда.

Важнейший частный случай функциональных рядов – это степенные ряды. Пусть $\{c_n\}$ – последовательность комплексных чисел, $z_0 \in \mathbf{C}$. Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{2.17}$$

называется *степенным рядом в окрестности точки* z_0. При $z_0 = 0$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{2.18}$$

степенной ряд в окрестности 0.

Все факты теории вещественных степенных рядов переносятся на случай комплексных степенных рядов. В частности, справедлива следующая теорема, основная в теории таких рядов.

Теорема Абеля. Если степенной ряд (2.17) сходится в точке $z = z_1 \ne z_0$, то он абсолютно сходится $\forall z \in \mathbf{C}$: $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, причем эта сходимость равномерна в любом замкнутом круге $|z - z_0| \le r < |z_1 - z_0|$. Если же ряд (2.17) расходится в точке $z = z_2$, то он расходится $\forall z \in \mathbf{C}$: $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$.

Из теоремы Абеля следует, что существует число $R \in [0, +\infty]$ такое, что ряд (2.17) сходится, и притом абсолютно, в открытом круге (рис. 13)

$$B_R(z_0) = \{z \in \mathbf{C} | \quad |z - z_0| < R\}$$

и расходится $\forall z \in \mathbf{C}$: $|z - z_0| > R$. Так же, как и в вещественном случае, число R называется *радиусом сходимости степенного ряда* (2.17). Соответственно открытый круг $B_R(z_0)$ называется *кругом сходимости* этого ряда.

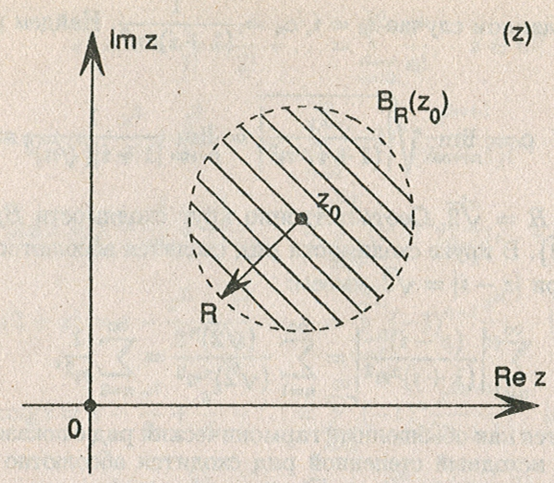


Рис. 13

Так же, как и в вещественном случае, радиус сходимости вычисляется по формулам:

$$R = \frac{1}{\rho}, \quad \text{где} \quad \rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \quad (\text{если } \exists), \quad \text{или} \quad \rho = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Аналогично вещественному случаю доказывается, что справедливы свойства:

1. В круге сходимости $B_R(z_0)$ функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ – сумма ряда (2.17) – является аналитической.
2. В круге сходимости $B_R(z_0)$ степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз, причем все полученные таким образом ряды имеют тот же радиус сходимости R.
3. Ряд (2.17) можно почленно интегрировать по любой кривой, лежащей в круге сходимости $B_R(z_0)$, причем интеграл зависит лишь от начальной и конечной точек пути интегрирования z_0 и z, и полученный таким образом ряд имеет тот же радиус сходимости R.

Задача 30. Найти область сходимости, абсолютной сходимости и равномерной сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - i)^n}{(1 + i)^n n^2}.$$

Решение. В данном случае $z_0 = i$, $c_n = \dfrac{1}{(1+i)^n n^2}$. Найдем радиус сходимости:

$$R = \frac{1}{\rho}, \quad \rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{(1+i)^n n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|1+i|(\sqrt[n]{n})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, $R = \sqrt{2}$. Соответственно круг сходимости $B_R(z_0) = \{z \in \mathbf{C} | \ |z-i| < \sqrt{2}\}$. В круге сходимости ряд сходится абсолютно. На границе круга, то есть при $|z-i| = \sqrt{2}$, имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(z-i)^n}{(1+i)^n n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{(\sqrt{2})^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

а этот ряд сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $\alpha = 2$. Таким образом, исходный степенной ряд сходится абсолютно в замкнутом круге $\overline{B_R(z_0)} = \{z \in \mathbf{C} | \ |z-i| \le \sqrt{2}\}$. Вне этого круга степенной ряд расходится. Кроме того, данный степенной ряд удовлетворяет условиям признака Вейерштрасса на множестве $\overline{B_R(z_0)}$ с мажорирующим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. Поэтому он сходится равномерно в замкнутом круге $\overline{B_R(z_0)}$.

Справедлива следующая теорема о представлении аналитической функции степенным рядом.

Теорема Тейлора. Функция $f(z)$, аналитическая в круге $B_R(z_0)$, однозначно представима в этом круге своим *рядом Тейлора*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\gamma = \{z \in \mathbf{C} | \ |z - z_0| = r\}, \quad r < R$$

(в качестве γ можно взять любой кусочно-гладкий замкнутый контур, содержащийся в круге $B_R(z_0)$ и содержащий внутри точку z_0).

Примечания.

1. При $z_0 = 0$ ряд Тейлора называют также *рядом Маклорена*.
2. При разложении функций в ряд Тейлора удобно использовать известные разложения основных элементарных функций:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbf{C};$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbf{C};$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbf{C};$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1;$$

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1;$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n,$$

$$|z| < 1, \quad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N},$$

в частности, при $\alpha = -1$:

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1.$$

При $\alpha = k \in \mathbf{N}$ справедливо разложение по биному Ньютона:

$$(1+z)^k = \sum_{n=0}^{k} C_k^n z^n, \quad z \in \mathbf{C}, \quad C_k^n = \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}.$$

Задача 31. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(z) = \operatorname{sh} z$.

Решение. По определению, $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$. Используя разложение функции e^z, получаем:

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Задача 32. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(z) = \frac{4z^2 - (4i+1)z + 2}{(z-3)(2z-i)^2}.$$

Решение. Раскладывая функцию $f(z)$ на простейшие дроби, получаем:

$$f(z) = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{(2z-i)^2}.$$

Используя стандартное разложение, находим:

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}, \quad \left|\frac{z}{3}\right| < 1, \quad \text{то есть} \quad |z| < 3.$$

Заметим, что

$$-\frac{1}{(2z-i)^2} = \frac{1}{(\frac{2z}{i}-1)^2} = \frac{1}{(1-w)^2}, \quad \text{где} \quad w = \frac{2z}{i}.$$

Пользуясь свойством 2 степенных рядов, имеем:

$$\frac{1}{(1-w)^2} = \left(\frac{1}{1-w}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} w^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(w^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} nw^{n-1}, \quad |w| < 1.$$

Отсюда

$$-\frac{1}{(2z-i)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2z}{i}\right)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{2^n z^n}{i^n}, \quad |z| < \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)\frac{2^n}{i^n} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n, \quad |z| < \frac{1}{2}.$$

Задача 33. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(z) = \ln\left(z + \sqrt{1+z^2}\right).$$

Решение. Заметим, что

$$f(z) = \ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right) = \int_0^z \frac{dw}{\sqrt{1+w^2}}.$$

Получим разложение в ряд Маклорена функции

$$\frac{1}{\sqrt{1+w^2}} = (1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad t = w^2.$$

Используя стандартное разложение, получаем:

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{1-2n}{2}\right)}{n!}t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}t^n, \quad |t| < 1.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\sqrt{1+w^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}w^{2n}, \quad |w| < 1.$$

Пользуясь свойством 3 степенных рядов, находим:

$$f(z) = \int_0^z \frac{dw}{\sqrt{1+w^2}} = \int_0^z \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}w^{2n}\right)dw =$$

$$= z + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^z \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}w^{2n}dw = z + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n(2n+1)n!}z^{2n+1}, \quad |z| < 1.$$

Таким образом,

$$f(z) = \ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right) = z + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n(2n+1)n!}z^{2n+1}, \quad |z| < 1.$$

2.8. Ряды Лорана

Пусть $c_0 \in \mathbf{C}$, а $\{c_n\}, \{c_{-n}\}, n \in \mathbf{N}$, – две последовательности комплексных чисел; $z_0 \in \mathbf{C}$. Функциональный ряд (точнее говоря, сумма двух функциональных рядов) вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = f_1(z) + f_2(z) \qquad (2.19)$$

называется *рядом Лорана по степеням* $z - z_0$. При этом ряд $f_1(z)$ называется *главной частью ряда Лорана*, а ряд $f_2(z)$ – *правильной частью ряда Лорана*.

Заметим, что $f_2(z)$ – это обычный степенной ряд. Ряд $f_1(z)$ тоже можно представить как степенной, если сделать замену

$$w = \frac{1}{z-z_0} \quad \Rightarrow \quad f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}w^n.$$

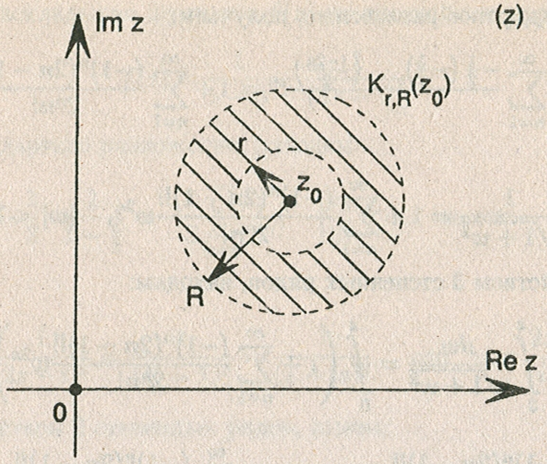


Рис. 14

Радиус сходимости последнего ряда вычисляется по формуле

$$R' = \frac{1}{r}, \quad r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|},$$

соответственно круг сходимости:

$$|w| < R', \quad \text{или} \quad |z - z_0| > \frac{1}{R'} = r.$$

Таким образом, ряд Лорана сходится, и притом абсолютно, в кольце (рис. 14)

$$K_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbf{C} | \quad r < |z - z_0| < R\}, \quad R = \frac{1}{\rho}, \quad \rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

По аналогии со степенными рядами $K_{r,R}(z_0)$ называется *кольцом сходимости ряда Лорана*.

Примечание. В случае $R = \infty$ и $z_0 = 0$ кольцо сходимости представляет собой внешность круга $|z| \le r$ и рассматривается как *окрестность бесконечно удаленной точки* $z = \infty$. Соответственно в этом случае ряд Лорана называется рядом Лорана в окрестности $z = \infty$. При этом, в отличие от общего случая, главной частью ряда Лорана называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, а правильной – ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{0} c_n z^n$. Если сделать замену $t = \dfrac{1}{z}$, то из ряда Лорана в окрестности $z = \infty$ получается ряд Лорана $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} t^n$ в окрестности $t = 0$.

Пусть $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ – сумма ряда Лорана (2.19). Так же, как и для степенных рядов, коэффициенты ряда Лорана c_n связаны с ней формулами:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{2.20}$$

$$\gamma = \{z \in \mathbf{C} | \quad |z - z_0| = r'\}, \quad r < r' < R$$

(в качестве γ можно взять любой кусочно-гладкий замкнутый контур, содержащийся в круге $B_R(z_0)$ и содержащий внутри замкнутый круг $\overline{B_r(z_0)}$).

Теорема Лорана. Пусть $0 \le r < R \le +\infty$. Если функция $f(z)$ аналитична в кольце $K_{r,R}(z_0)$, то в этом кольце она единственным образом представима в виде ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

причем коэффициенты ряда определяются по формулам (2.20).

Задача 34. Найти область сходимости и сумму ряда Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1)(-i)^n (z+i)^n.$$

Решение. Обозначим $t = (-i)(z+i) = 1 - iz$. Тогда исследуемый ряд принимает вид

$$\sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1) t^n = \begin{bmatrix} n+2 = -m \\ n = -(m+2) \\ n+1 = -(m+1) \end{bmatrix} = -\sum_{m=0}^{+\infty} (m+1) \frac{1}{t^{m+2}}.$$

Переобозначая $\dfrac{1}{t} = \tau$, получаем степенной ряд

$$-\tau^2 \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1)\tau^m = -\tau^2 \sum_{m=1}^{+\infty} m\tau^{m-1} = -\tau^2 \sum_{m=1}^{+\infty} (\tau^m)' = -\tau^2 \sum_{m=0}^{+\infty} (\tau^m)'.$$

Для данного степенного ряда $\rho = \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|c_m|} = \lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{m+1} = 1$, и соответственно радиус сходимости $R = \dfrac{1}{\rho} = 1$ – так же, как для ряда $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} \tau^m$. По свойствам степенных рядов возможно почленное дифференцирование ряда $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} \tau^m$ в круге сходимости $\{\tau \in \mathbf{C} : |\tau| < 1\}$ (в данном случае он совпадает с областью сходимости, так как при $|\tau| = 1$ ряд расходится, поскольку общий член ряда не стремится к нулю). Таким образом, используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем:

$$-\tau^2 \sum_{m=0}^{+\infty} (\tau^m)' = -\tau^2 \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \tau^m \right)' = -\tau^2 \left(\frac{1}{1-\tau} \right)' = -\frac{\tau^2}{(1-\tau)^2},$$

где

$$|\tau| < 1 \Leftrightarrow |t| > 1 \Leftrightarrow |1 - iz| > 1 \Leftrightarrow |z + i| > 1.$$

Соответственно, сумма исходного ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1)(-i)^n (z+i)^n = -\frac{\tau^2}{(1-\tau)^2} = -\frac{1}{t^2(1-\frac{1}{t})^2} =$$

$$= -\frac{1}{(t-1)^2} = -\frac{1}{(iz)^2} = \frac{1}{z^2}, \quad \text{где } |z+i| > 1.$$

Задача 35. Разложить в ряд Лорана в окрестности 0 функцию

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2i)}.$$

Решение. *I способ.* Особыми точками данной функции являются $z = 0$ и $z = -2i$. Наибольшее кольцо с центром в 0, не содержащее этих точек (и $z = \infty$), – $K_{0,2}(0) = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z| < 2\}$ является кольцом сходимости соответствующего ряда Лорана. По формулам (2.20) находим

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^{n+2}(z+2i)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Поскольку при $n \leq -2$ подынтегральная функция аналитична в круге $|z| \leq 1$, то по теореме Коши $c_n = 0$ при $n \leq -2$. В случае $n > -2$, применяя формулу Коши для функции $g(z) = \frac{1}{z+2i}$ при $z_0 = 0$ и $k = n+1$, получаем:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^{k+1}} dz = \frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{k!(-1)^k}{(2i)^{k+1}} = \frac{(i)^{2k}}{2^{k+1}(i)^{k+1}} = \frac{(i)^{k-1}}{2^{k+1}} = \frac{(i)^n}{2^{n+2}}.$$

Таким образом,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(i)^n}{2^{n+2}} z^n = \frac{1}{2iz} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{2^{n+2}} z^n, \quad 0 < |z| < 2.$$

II способ. Раскладывая на простейшие дроби, получаем

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2i)} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2i} \right) = \frac{1}{2i} (g_1(z) + g_2(z)).$$

Функция $g_1(z) = \frac{1}{z}$ уже является своим разложением в ряд Лорана по степеням z при $|z| > 0$. Рассмотрим функцию

$$g_2(z) = \frac{1}{z+2i} = \frac{1}{2i(1 - \frac{iz}{2})}.$$

Обозначая $\frac{iz}{2} = t$ и используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем

$$g_2(z) = \frac{1}{2i(1-t)} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad |t| < 1,$$

то есть

$$g_2(z) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{2^n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^{n-1}}{2^{n+1}} z^n, \quad |z| < 2,$$

и окончательно,

$$f(z) = \frac{1}{2iz} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{2^{n+2}} z^n, \quad 0 < |z| < 2.$$

Задача 36. Разложить в ряд Лорана в окрестности $z = \infty$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2i)}.$$

Решение. *I способ.* Особыми точками данной функции являются $z = 0$ и $z = -2i$. Наибольшая окрестность точки $z = \infty$, не содержащая этих точек, $K_{2,\infty}(0) = \{z \in \mathbf{C} : |z| > 2\}$ является кольцом сходимости соответствующего ряда Лорана. По формулам (2.20) находим

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=5} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=5} \frac{dz}{z^{n+2}(z+2i)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Рассмотрим 2 случая:

1) $n > -2$. Тогда подынтегральная функция имеет внутри контура $|z| = 5$ две особые точки $z = 0$ и $z = -2i$ и, в частности, аналитична в замыкании трехсвязной области (рис. 15, *а*)

$$G = \{z \in \mathbf{C} : \quad |z| > \frac{1}{2}, \quad |z + 2i| > 1, \quad |z| < 5\}.$$

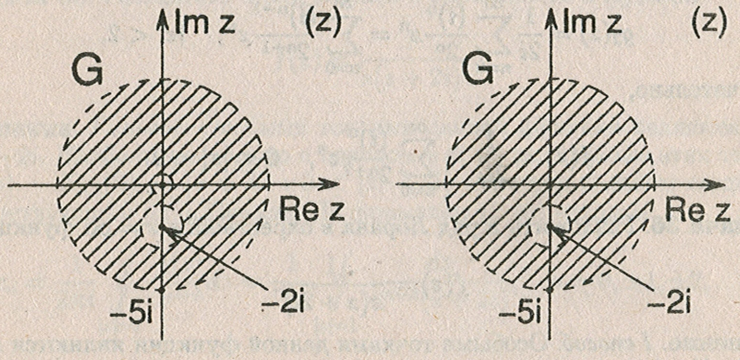
По теореме Коши для многосвязных областей получаем:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint\limits_{|z|=\frac12}\frac{dz}{z^{n+2}(z+2i)} + \oint\limits_{|z+2i|=1}\frac{dz}{z^{n+2}(z+2i)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\oint\limits_{|z|=\frac12}\frac{g_1(z)dz}{z^{n+2}} + \oint\limits_{|z+2i|=1}\frac{g_2(z)dz}{(z+2i)}\right).$$

Далее, по формуле Коши для функций $g_1(z) = \frac{1}{z+2i}$ и $g_2(z) = \frac{1}{z^{n+2}}$ при $k=n+1$, $z_0=0$ и $k=0$, $z_0=-2i$ соответственно, находим

$$c_n = \frac{g_1^{(k)}(0)}{k!} + g_2(-2i) = \frac{1}{k!}\cdot\frac{(-1)^k k!}{(2i)^{k+1}} + \frac{1}{(-2i)^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2i)^{n+2}}(1+(-1)) = 0.$$



а) б)

Рис. 15

2) $n \le -2$. Подынтегральная функция имеет внутри контура $|z|=5$ одну особую точку $z=-2i$ и, в частности, аналитична в замыкании двухсвязной области (рис. 15, *б*))

$$G = \{z \in \mathbf{C}: \quad |z+2i| > 1, \quad |z| < 5\}.$$

По теореме Коши для многосвязных областей получаем:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z+2i|=1}\frac{dz}{z^{n+2}(z+2i)} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z+2i|=1}\frac{g(z)dz}{(z+2i)}.$$

Далее, по формуле Коши для функции $g(z) = \frac{1}{z^{n+2}}$ при $k=0$, $z_0=-2i$ находим $c_n = g_2(-2i) = \frac{1}{(-2i)^{n+2}}$. Таким образом,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2}\frac{z^n}{(-2i)^{n+2}} = \left[\begin{array}{c} n+2=-m \\ n=-(m+2)\end{array}\right] = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m(i)^m 2^m}{z^{m+2}}, \quad |z|>2.$$

II способ. Фактически требуется получить разложение функции в ряд Лорана по степеням $\frac{1}{z}$. Заметим, что

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2i)} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2i}{z}}.$$

Обозначая $t = \frac{2i}{z}$ и используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем:

$$\frac{1}{1+\frac{2i}{z}} = \frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(i)^n 2^n}{z^n}, \quad |t| = \left|\frac{2i}{z}\right| < 1,$$

откуда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(i)^n 2^n}{z^{n+2}}, \quad |z|>2.$$

Задача 37. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ в ряд Лорана а) по степеням $(z-i)$; б) в окрестности $z=\infty$.

Решение. а) Обозначим $z-i=t$. Тогда

$$f(z) = \frac{t+i}{(t+i)^2+1} = \frac{t+i}{t(t+2i)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+2i}\right).$$

Данная функция имеет особые точки $t=0$ и $t=-2i$. По теореме Лорана она допускает разложение в ряд Лорана по степеням t в кольце $0<|t|<2$, а также во внешности круга $|t|\le 2$, то есть при $|t|>2$.

1) Используя результат задачи 35 (разложение функции $g_2(z)$), получаем

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^{n-1}}{2^{n+1}}t^n\right), \quad 0<|t|<2,$$

откуда

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i} - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^{n+1}(z-i)^n\right), \quad 0<|z-i|<2.$$

2) Заметим, что

$$\frac{1}{t+2i} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1+\frac{2i}{t}}.$$

Используя результат задачи 36, получаем

$$f(z) = \frac{1}{2t}\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(i)^n 2^n}{t^n},\right) = \frac{1}{2t} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(i)^n 2^{n-1}}{t^{n+1}}, \quad |t| > 2,$$

или

$$f(z) = \frac{1}{2t} + \frac{1}{2t} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(i)^n 2^{n-1}}{t^{n+1}} = \begin{bmatrix} n-1=m \\ n=m+1 \\ n+1=m+2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{t} - i\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{(i)^m 2^m}{t^{m+2}} = \frac{1}{z-i} - i\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2i)^m}{(z-i)^{m+2}}, \quad |z-i| > 2.$$

б) Заметим, что

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^2}{z^2+1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}.$$

Обозначая $\frac{1}{z} = t$ и используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем

$$f(z) = t \cdot \frac{1}{1+t^2} = t \cdot \frac{1}{1-(-t^2)} = t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n+1}, \quad t^2 < 1,$$

откуда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+1}}, \quad |z| > 1.$$

Задача 38. Разложить функцию $f(z) = \cos\frac{1}{z-i}$ в ряд Лорана по степеням $(z-i)$.

Решение. Обозначая $\frac{1}{z-i} = t$ и используя разложение $\cos t$ в ряд Маклорена получаем

$$f(z) = \cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!(z-i)^n}, \quad |z-i| > 0.$$

2.9. Изолированные особые точки и их классификация

Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце

$$K_{0,R}(z_0) = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < R\}.$$

Тогда z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$.

Функция $f(z)$ при сделанных предположениях в кольце $K_{0,R}(z_0)$ разлагается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = f_1(z) + f_2(z).$$

При этом возможны следующие случаи.

1) $f(z) = f_2(z)$. Тогда полагая $f(z_0) = f_2(z_0) = c_0$, получаем, что $f(z)$ становится аналитической во всем круге $|z - z_0| < R$. Соответственно точка z_0 называется *устранимой особой точкой* функции $f(z)$.

2) $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{m} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + f_2(z)$. Тогда z_0 называется *полюсом* (при $m=1$ *простым полюсом*) *функции $f(z)$ кратности (или порядка) m.*

Примечания.

1. Фактически это означает, что функция $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ имеет в точке $z = z_0$ нуль порядка m. Таким образом, если оказалось, что $g(z) = \varphi(z)\psi(z)$, где $\psi(z_0) \neq 0$,

$$\varphi(z_0) = \varphi'(z_0) = \ldots = \varphi^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad \varphi^{(m)}(z_0) \neq 0,$$

то z_0 – полюс кратности m. В частности, так будет, если

$$g(z) = (z-z_0)^m \psi(z), \quad \psi(z_0) \neq 0.$$

2. В соответствии с формулой Коши получаем, что если z_0 – полюс, то

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i c_{-1}, \text{ где } \gamma \subset K_{0,R}(z_0), \quad z_0 \in \operatorname{int}\gamma. \tag{2.21}$$

3) В остальных случаях z_0 называется *существенно особой точкой функции $f(z)$.*

Примечание. Фактически это означает, что ряд $f_1(z)$ содержит бесконечное число членов, не равных нулю. Можно показать, что в этом случае $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует, ни конечный, ни бесконечный. Поскольку для случая 1) существует конечный предел, а для 2) – бесконечный, то справедливо и обратное. Таким образом, z_0 – существенно особая точка $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \not\exists$. Что касается равенства (2.21), оно остается справедливым.

Бесконечно удаленная точка z_0 по определению называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ аналитична во внешности некоторого круга $|z| \leq r$, то есть при $|z| > r$. Ее классификация строится в соответствии с тем, какой характер имеет особая точка $t = 0$ функции $g(t) = f(\frac{1}{t})$, которая получается, если сделать замену $t = \frac{1}{z}$.

Задача 39. Для указанных функций определить все конечные изолированные особые точки и установить их характер:

1) $\dfrac{2z}{(z-i)^2(z+1)^3(z+i)}$; 2) $\dfrac{1}{z\sin(z-i)}$; 3) $\dfrac{z^2(z-\pi)}{\sin 2z}$; 4) $\cos\dfrac{1}{z-i}$.

Решение. 1) Данная функция $f(z)$ аналитична всюду, за исключением точек $z=i$, $z=-1$, $z=-i$. Они, таким образом, являются изолированными особыми точками. Установим характер $z=i$. Заметим, что функция $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ представляется в виде $g(z)=(z-i)^2\psi(z)$, где

$$\psi(z)=\frac{(z+1)^3(z+i)}{2z},\quad \psi(i)=(i+1)^3\neq 0.$$

Таким образом, $z=i$ – полюс 2-го порядка. Аналогично $z=-1$ – полюс 3-го порядка, $z=-i$ – простой полюс.

2) Данная функция $f(z)$ аналитична всюду, за исключением счетного набора точек $z=0$, $z_k=i+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Каждая из них имеет проколотую окрестность $0<|z|<\dfrac{1}{2}$, $0<|z-z_k|<\dfrac{1}{2}$, в которой функция аналитична, следовательно, все они являются изолированными особыми точками. Аналогично 1) точка $z=0$ – простой полюс. Установим характер точек z_k. Заметим, что $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ представляется в виде

$$g(z)=\varphi(z)\psi(z),\quad \psi(z)=z,\quad \psi(z_k)=z_k\neq 0,\quad \varphi(z)=\sin(z-i),$$

$$\varphi'(z)=\cos(z-i),\quad \varphi(z_k)=\sin(\pi k)=0,\quad \varphi'(z_k)=\cos(\pi k)=(-1)^k\neq 0.$$

Таким образом, z_k – простой полюс, $k\in\mathbf{Z}$.

2) Данная функция $f(z)$ аналитична всюду, за исключением счетного набора точек $z=0$, $z_k=\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. Каждая из них имеет проколотую окрестность $0<|z|<\dfrac{1}{2}$, $0<|z-z_k|<\dfrac{1}{2}$, в которой функция аналитична, следовательно, все они являются изолированными особыми точками. Заметим, что

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z}{2}\cdot\frac{2z}{\sin 2z}\cdot(z-\pi)=0\cdot 1\cdot(-\pi)=0,$$

то есть существует и конечен. Таким образом, $z=0$ – устранимая особая точка. Аналогично

$$\lim_{z\to\pi}f(z)=\begin{bmatrix} z-\pi=t\\ z=t+\pi\\ t\to 0\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0}(t+\pi)^2\cdot\frac{2t}{\sin(2t+2\pi)}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\lim_{t\to 0}(t+\pi)^2\cdot\frac{2t}{\sin(2t)}\cdot\frac{1}{2}=\pi^2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi^2}{2},$$

следовательно, $z=\pi$ – устранимая особая точка. Что касается точек $z_k=\dfrac{\pi k}{2}$, $k\neq 2$, аналогично 2) показывается, что каждая из них – простой полюс.

4) Данная функция $f(z)$ аналитична всюду, за исключением точки $z=i$. Это существенно особая точка, поскольку предел $\lim\limits_{z\to i}f(z)$ не существует, ни конечный, ни бесконечный. Покажем это.

а) Рассмотрим последовательность z_n такую, что

$$\frac{1}{z_n-i}=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \text{ то есть }\ z_n=i+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}.$$

Очевидно, что $z_n\to i$, и при этом $f(z_n)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)=0$.

б) Рассмотрим последовательность z_n такую, что

$$\frac{1}{z_n-i}=2\pi n,\ \text{ то есть }\ z_n=i+\frac{1}{2\pi n}.$$

Очевидно, что $z_n\to i$, и при этом $f(z_n)=\cos(2\pi n)=1$.

Таким образом, нашлись две последовательности комплексных чисел, сходящиеся к точке $z=i$, для которых соответствующие последовательности значений функции стремятся к разным числам. Это означает, что рассматриваемый предел не существует.

Задача 40. Для указанных функций установить характер бесконечно удаленной особой точки:

1) $f(z)=5+z-3z^2$; 2) $f(z)=\cos\dfrac{z}{1-iz}$.

Решение. 1) Сделаем замену $z=\dfrac{1}{t}$. Тогда исследуемая функция принимает вид

$$g(t)=5+\frac{1}{t}-\frac{3}{t^2}=5+\frac{t-3}{t^2}=5+\tilde{g}(t).$$

Соответственно

$$\frac{1}{\tilde{g}(t)}=t^2\cdot\frac{1}{t-3}=\varphi(t)\cdot\psi(t),$$

где функция $\varphi(t)$ имеет в точке $t=0$ нуль 2-го порядка, $\psi(0)\neq 0$. Поэтому $t=0$ – полюс 2-го порядка функции $\tilde{g}(t)$, а следовательно, и функции $g(t)$. Таким образом, $z=\infty$ – полюс 2-го порядка функции $f(z)$.

2) Сделаем замену $z=\dfrac{1}{t}$. Тогда исследуемая функция принимает вид:

$$g(t)=f\left(\frac{1}{z}\right)=\cos\frac{1}{t(1-i\frac{1}{t})}=\cos\frac{1}{t-i}.$$

Функция справа определена при $t \neq i$ и является непрерывной (и более того, аналитической) в этой области как элементарная функция в своей области определения. Поэтому существует

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} \cos\frac{1}{t-i} = \cos\frac{1}{-i} = \cos i = \frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1}+e}{2} = \text{ch}1.$$

Таким образом, $t = 0$ – устранимая особая точка функции $g(t)$, а следовательно, $z = \infty$ – устранимая особая точка функции $f(z)$.

2.10. Вычеты

Пусть z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$, то есть $f(z)$ аналитична в некотором кольце

$$K_{0,R}(z_0) = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < R\}, \quad z_0 \neq \infty.$$

Тогда для любого кусочно-гладкого замкнутого контура $\gamma \subset K_{0,R}(z_0)$ такого, что $z_0 \in \text{int}\gamma$, интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)dz$$

(его значение не зависит от выбора такого контура) называется *вычетом функции* $f(z)$ *в точке* z_0 и обозначается следующим образом: $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z)$.

Примечания.

1. При сделанных предположениях, согласно теореме Лорана, функция $f(z)$ разлагается в кольце $K_{0,R}(z_0)$ в ряд Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}},$$

причем $c_{-1} = \operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z)$.

2. Непосредственно из интегрального представления вычета видно, что если в соответствующем интеграле сделать замену $(z - z_0) = t$, то получим равенство

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{res}_{t=0} g(t), \quad \text{где} \quad g(t) = f(t + z_0). \tag{2.22}$$

Если же $z_0 = \infty$ – изолированная особая точка функции $f(z)$, то $f(z)$ аналитична в ее окрестности $K_{R,+\infty}(0) = \{z \in \mathbf{C} : |z| > R\}$, и соответственно вычет функции $f(z)$ в точке $z_0 = \infty$ определяется как

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma^-} f(z)dz,$$

где контур $\gamma \subset K_{R,+\infty}(0)$, $0 \in \text{int}\gamma$, в отличие от предыдущего случая, обходится по часовой стрелке (γ^-). При этом $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$.

Примечание. Если в соответствующем интеграле сделать замену $z = \frac{1}{t}$ ($\Rightarrow dz = -\frac{dt}{t^2}$), то нетрудно убедиться, что

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{res}_{t=0} g(t), \quad \text{где } g(t) = \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right). \tag{2.23}$$

Для $z_0 \neq \infty$ возможны следующие случаи:
1) z_0 – устранимая особая точка. Тогда $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z) = 0$.
2) z_0 – простой полюс. Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z). \tag{2.24}$$

В частности, если

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \text{где} \quad \varphi(z_0) \neq 0, \quad \psi(z_0) = 0, \quad \psi'(z_0) \neq 0,$$

то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{2.25}$$

3) z_0 – полюс порядка $m \geq 2$. Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z - z_0)^m f(z)\right]. \tag{2.26}$$

4) z_0 – существенно особая точка. Тогда в некоторых случаях можно воспользоваться 2-й теоремой о вычетах (см. далее). Если это затруднительно, то остается использовать разложение функции в ряд Лорана, а затем коэффициент c_{-1} из этого разложения.

Примечание. В случае $z_0 = \infty$ можно действовать, как указано в п.4.

1-я теорема о вычетах. Пусть функция $f(z)$ аналитична всюду в области G, за исключением изолированных особых точек $z_1, \ldots, z_N \in G$. Тогда для любого кусочно-гладкого замкнутого контура $\gamma \subset G$ такого, что $z_1, \ldots, z_N \in \text{int}\gamma$, справедливо равенство

$$\oint\limits_{\gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

2-я теорема о вычетах. Пусть функция $f(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$, за исключением изолированных особых точек $z_1, \ldots, z_{N-1}$ и $z_N = \infty$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{N} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = 0.$$

Задача 41. Вычислить $\operatorname*{res}_{z=i} \dfrac{\cos 5z}{z^2+1}$.

Решение. Заметим, что $z^2+1=(z-i)(z+i)$. Поэтому $z_0 = i$ – простой полюс, и по формуле (2.24)

$$\operatorname*{res}_{z=i} \frac{\cos 5z}{z^2+1} = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{\cos 5z}{(z-i)(z+i)} = \lim_{z\to i}\frac{\cos 5z}{z+i} = \frac{\cos 5i}{2i} = -\frac{i}{2}\operatorname{ch}5.$$

Задача 42. Вычислить

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{6}} \frac{z^2}{\sqrt{3}-2\cos z}.$$

Решение. Пусть $\varphi(z) = z^2$, $\psi(z) = \sqrt{3} - 2\cos z$. Заметим, что

$$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) \neq 0, \quad \psi\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0, \quad \psi'(z) = 2\sin z, \quad \psi'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \neq 0.$$

Таким образом, $z_0 = \dfrac{\pi}{6}$ – простой полюс, и по формуле (2.25)

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{6}} \frac{z^2}{\sqrt{3}-2\cos z} = \frac{\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\psi'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\pi^2}{36}.$$

Задача 43. Вычислить $\operatorname*{res}_{z=i} \dfrac{\sin 3z}{(z-i)^3}$.

Решение. Поскольку $z_0 = i$ – полюс порядка $m = 3$, то по формуле (2.26)

$$\operatorname*{res}_{z=i} \frac{\sin 3z}{(z-i)^3} = \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-i)^3\frac{\sin 3z}{(z-i)^3}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left(\sin 3z\right)'' = -\frac{9}{2}\sin 3i = -\frac{9}{4i}(e^{-3}-e^{3}) = \frac{9}{2i}\operatorname{sh}3 = -i\frac{9}{2}\operatorname{sh}3.$$

Задача 44. Вычислить $\operatorname*{res}_{z=i} \sin\dfrac{5}{z-i}$.

Решение. В соответствии с формулой (2.22)

$$\operatorname*{res}_{z=i} \sin\frac{5}{z-i} = \operatorname*{res}_{z=0} f(z), \quad \text{где} \quad f(z) = \sin\frac{5}{z}.$$

Заметим, что $z = 0$ – существенно особая точка функции $f(z)$. Найдем $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)$ двумя способами.

I способ. Раскладывая функцию $f(z)$ в ряд Лорана

$$f(z) = \sin\frac{5}{z} = \left[\frac{5}{z} = t\right] = \sin t = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{5^{2n-1}}{(2n-1)!z^{2n-1}} = \frac{5}{z} - \frac{5^3}{3!z^3} + \ldots, \quad |z| > 0,$$

заключаем, что $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = 5$ (коэффициенту при $\dfrac{1}{z}$).

II способ. Функция $f(z)$ имеет только 2 особые точки $z = 0$ и $z = \infty$, следовательно, по 2-й теореме о вычетах $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)$. Далее согласно формуле (2.23) получаем

$$-\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname*{res}_{t=0} g(t), \quad \text{где} \quad g(t) = \frac{\sin 5t}{t^2} = \frac{\sin 5t}{5t}\cdot\frac{5}{t}.$$

Из последнего представления видно, что $t = 0$ – простой полюс функции $g(t)$, и по формуле (2.24)

$$\operatorname*{res}_{t=0} g(t) = \lim_{t\to 0} t\cdot\frac{\sin 5t}{5t}\cdot\frac{5}{t} = 5.$$

Задача 45. Вычислить $\operatorname*{res}_{z=\infty} \dfrac{e^z}{z^2+1}$.

Решение. Функция $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+1}$ имеет 3 особые точки: $z = \pm i$ и $z = \infty$. По 2-й теореме о вычетах

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=i} f(z) - \operatorname*{res}_{z=-i} f(z).$$

Каждая из точек $z = \pm i$ является простым полюсом. По формуле (2.25)

$$\operatorname*{res}_{z=\pm i} f(z) = \left.\frac{e^z}{(z^2+1)'}\right|_{z=\pm i} = \left.\frac{e^z}{2z}\right|_{z=\pm i} = \pm\frac{e^{\pm i}}{2i}.$$

Таким образом,

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{e^i - e^{-i}}{2i} = -\sin 1.$$

2.11. Применение вычетов к вычислению интегралов

Вычисление интегралов основывается на 1-й теореме о вычетах.

Задача 46. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{\gamma^+} \frac{\cos z dz}{z(z^2+1)}, \quad \gamma = \left\{ z \in \mathbf{C} : |z - i| = \frac{3}{2} \right\}.$$

Решение. Функция $f(z) = \dfrac{\cos z}{z(z^2+1)}$ имеет 3 конечных особых точки $z = \pm i$ и $z = 0$. Две из них $z_1 = 0$ и $z_2 = i$ расположены внутри контура γ, тогда как $z_3 = -i$ и $z_4 = \infty$ – снаружи. Согласно 1-й теореме о вычетах получаем

$$\oint\limits_{\gamma^+} \frac{\cos z dz}{z(z^2+1)} = 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Каждая из точек $z_1 = 0$ и $z_2 = i$ является простым полюсом, поэтому по формуле (2.25)

$$\oint\limits_{\gamma^+} \frac{\cos z dz}{z(z^2+1)} = 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \left. \frac{\cos z}{(z^3+z)'} \right|_{z=z_k} = 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \left. \frac{\cos z}{3z^2+1} \right|_{z=z_k} =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{\cos 0}{3 \cdot 0^2 + 1} + \frac{\cos i}{3i^2+1} \right) = 2\pi i \left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{ch}1 \right) = i\pi \Big(2 - \mathrm{ch}1 \Big).$$

Задача 47. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{\gamma^+} \frac{z^3 dz}{5z^4 + i}, \quad \gamma = \{ z \in \mathbf{C} : |z| = 1 \}.$$

Решение. Очевидно, что конечные особые точки подынтегральной функции $f(z) = \dfrac{z^3}{5z^4+i}$ определяются как 4 корня $\sqrt[4]{-\dfrac{i}{5}}$, обозначим их z_k, $k = \overline{1,4}$. Все они расположены на окружности $|z| = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$ и, таким образом, находятся внутри контура γ. В таком случае, непосредственно по определению вычета в бесконечно удаленной точке имеем

$$\oint\limits_{\gamma^+} f(z) dz = -\oint\limits_{\gamma^-} f(z) dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z).$$

При этом по формуле (2.23)

$$-\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname*{res}_{t=0} g(t), \quad \text{где} \quad g(t) = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{t^3(5\frac{1}{t^4} + i)} = \frac{1}{t(5 + it^4)}.$$

Поскольку $t = 0$ является простым полюсом функции $g(t)$, то по формуле (2.24)

$$\operatorname*{res}_{t=0} g(t) = \lim_{t \to 0} t \cdot g(t) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{5 + it^4} = \frac{1}{5}$$

и окончательно,

$$\oint\limits_{\gamma^+} f(z) dz = \frac{2\pi i}{5}.$$

Задача 48. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \sin x}.$$

Решение. Сделаем замену

$$z = e^{ix} \Rightarrow dz = ie^{ix} dx = izdx \Rightarrow dx = \frac{dz}{iz},$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \sin x} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(2 + \frac{z^2-1}{2iz}\right)} = 2 \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 4iz - 1} = 2 \oint\limits_{|z|=1} f(z) dz.$$

Конечные особые точки функции $f(z)$ определяются как корни уравнения

$$z^2 + 4iz - 1 = 0, \quad \text{то есть} \quad z_{0,1} = \frac{-4i \pm \sqrt{-16+4}}{2} = (-2 \pm \sqrt{3})i$$

и являются простыми полюсами. Из них только точка $z_0 = (-2 + \sqrt{3})i$ удовлетворяет условию $|z| < 1$, то есть находится внутри контура γ, тогда как точка $z_1 = (-2 - \sqrt{3})i$ – снаружи. Согласно 1-й теореме о вычетах получаем

$$2 \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 4iz - 1} = 2 \oint\limits_{|z|=1} f(z) dz = 4\pi i \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \left. \frac{4\pi i}{2z + 4i} \right|_{z=z_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Примечание. Аналогичным образом можно вычислять интегралы вида

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx,$$

где $R(u,v)$ – рациональная функция.

Исходя из 1-й теоремы о вычетах, можно получить, что справедливы следующие утверждения.

Следствие 1. Пусть $M > 0$, $p > 1$; функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}z > 0$, за исключением конечного числа лежащих в этой полуплоскости особых точек $z_1, \dots, z_N \neq \infty$, непрерывна на вещественной оси и для всех достаточно больших $|z|$ удовлетворяет условию

$$|f(z)| \le \frac{M}{|z|^p}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{2.27}$$

Следствие 2. Пусть $f(z) = e^{i\alpha z}F(z)$, где $\alpha > 0$, а функция $F(z)$ аналитична на действительной оси, в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}z > 0$ имеет лишь конечное число особых точек $z_1, \dots, z_N \neq \infty$ и удовлетворяет условию $F(z) \to 0$ при $z \to \infty$ равномерно относительно $\arg z$. Тогда справедливо равенство (2.27).

Задача 49. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Решение. Заметим, во-первых, что в силу четности подынтегральной функции

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$. Она имеет особые точки $z = \pm i$, каждая из которых является полюсом 3-го порядка. Из них только точка $z_0 = i$ расположена в верхней полуплоскости. Оценим снизу

$$|z^2+1| \ge |z^2| - 1 = |z|^2 - 1.$$

Пусть $|z| > 2$. Тогда

$$1 < \frac{|z|}{2} \Rightarrow 1 < \frac{|z|^2}{4} \Rightarrow |z|^2 - 1 \ge |z|^2 - \frac{|z|^2}{4} = \frac{3}{4}|z|^2 \Rightarrow |z^2+1| \ge \frac{3}{4}|z|^2.$$

Таким образом, $\forall z \in \mathbf{C}$: $|z| > 2$ имеем:

$$|f(z)| \le \left(\frac{4}{3|z|^2}\right)^3 = \frac{M}{|z|^p}, \quad M = \left(\frac{4}{3}\right)^3, \quad p = 6 > 1.$$

Итак, условия следствия 1 выполнены. По формулам (2.27) и (2.26) получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = i\pi \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{i\pi}{2!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-z_0)^3 f(z)\right] =$$

$$= \frac{i\pi}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\frac{(z-i)^3}{(z-i)^3(z+i)^3} = \frac{i\pi}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{(z+i)^3} =$$

$$= \frac{i\pi}{2}\lim_{z\to i}\frac{12}{(z+i)^5} = \frac{i6\pi}{32i^5} = \frac{3\pi}{16}.$$

Задача 50. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+1}.$$

Решение. Поскольку подынтегральная функция четная, то

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+1}.$$

Рассмотрим функцию $F(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$. Она имеет только 2 особые точки $z = \pm i$, каждая из которых является простым полюсом. Из них только $z_0 = i$ лежит в верхней полуплоскости. Как было показано при решении задачи 49,

$$|F(z)| \le \frac{3}{4|z|}, \quad |z| > 2.$$

Отсюда получаем, что $F(z) \to 0$ при $z \to \infty$ равномерно относительно $\arg z$, и по следствию 2

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}dx}{x^2+1} = i\pi \operatorname*{res}_{z=z_0} F(z)e^{iz} = i\pi \left.\frac{e^{iz}}{2z}\right|_{z=i} = \frac{\pi}{2}e^{-1}.$$

Остается заметить, что

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}dx}{x^2+1}\right]=\frac{\pi}{2e}.$$

Примечание. Попутно доказано, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x dx}{x^2+1}=0,$$

но это и так очевидно, поскольку подынтегральная функция нечетная.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бугров, Я.С., Никольский, С.М.** Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. / Я.С.Бугров, С.М.Никольский. - Ростов н/Д: Феникс, 1998. – 512 с.

2. **Свешников, А.Г., Тихонов, А.Н.** Теория функций комплексной переменной. / А.Г.Свешников, А.Н.Тихонов. - М.: Наука, 1999. – 320 с.

3. Сборник задач по математике для втузов, Ч.2. Специальные разделы математического анализа; под ред. **А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича**. - М.: Наука, 1986. – 368 с.