ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ДЛЯ ВТУЗОВ

под редакцией
Б. П. ДЕМИДОВИЧА

ИЗДАНИЕ ДЕСЯТОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1978

517.2
Б24
УДК 510 (076.1)

КОЛЛЕКТИВ АВТОРОВ:

Г. С. БАРАНЕНКОВ, Б. П. ДЕМИДОВИЧ, В. А. ЕФИМЕНКО,
С. М. КОГАН, Г. Л. ЛУНЦ, Е. Ф. ПОРШНЕВА, Е. П. СЫЧЕВА,
С. В. ФРОЛОВ, Р. Я. ШОСТАК, А. Р. ЯНПОЛЬСКИЙ

$3\frac{20203-085}{053(02)-78}$ Б3-21-23—78

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В сборнике подобраны задачи и примеры по математическому анализу применительно к максимальной программе общего курса высшей математики высших технических учебных заведений. Сборник содержит свыше 3000 задач, систематически расположенных в главах (I—X), и охватывает все разделы втузовского курса высшей математики (за исключением аналитической геометрии). Особое внимание обращено на важнейшие разделы курса, требующие прочных навыков (нахождение пределов, техника дифференцирования, построение графиков функций, техника интегрирования, приложения определенных интегралов, ряды, решение дифференциальных уравнений).

Учитывая наличие в некоторых втузах дополнительных глав курса математики, авторы включили задачи на теорию поля, метод Фурье и приближенные вычисления. Приведенное количество задач, как показывает практика преподавания, не только с избытком удовлетворяет потребности студентов по практическому закреплению соответствующих разделов курса, но и дает возможность преподавателю разнообразить выбор задач в пределах данного раздела и подбирать задачи для итоговых заданий и контрольных работ.

В основном задачник предназначен для студентов-заочников и студентов вечерних факультетов технических вузов машиностроительных специальностей, а также лиц, занимающихся самообразованием. В начале каждой главы дается краткое теоретическое введение и приводятся основные определения и формулы, относящиеся к соответствующему разделу курса. Здесь же показаны образцы решений особо важных типовых задач. Это обстоятельство, по нашему мнению, в значительной мере облегчит студенту-заочнику пользование задачником в самостоятельной работе. На все вычислительные задачи даны ответы; в задачах, отмеченных звездочкой (*) или двумя звездочками (**), в ответах приведены соответственно краткие указания к решениям или решения. Для наглядности часть задач иллюстрируется чертежами.

Сборник сложился в результате многолетнего преподавания авторами высшей математики в технических учебных заведениях г. Москвы. В нем, кроме оригинальных задач и примеров, помещены многочисленные общеизвестные задачи, а также ряд задач и примеров из существующих руководств. В частности, был широко использован изданный на правах рукописи «Задачник по высшей математике» (Москва, изд. МВТУ, 1944 г.) — коллективный труд преподавателей кафедры высшей математики МВТУ, в числе которых, кроме некоторых авторов настоящего сборника, были также ныне скончавшиеся И. П. Ветчинкин и С. Ф. Шурлапов.

Хотя работа между авторами в основном была распределена по главам, каждый автор, как член авторского коллектива, несет полную ответственность за весь сборник в целом.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Четвертое издание сборника незначительно отличается от предыдущих. Исправлены замеченные опечатки в тексте и ответах. В некоторых местах несущественно изменены формулировки. Добавлено несколько новых задач, номера которых, с целью сохранения старой нумерации, оформлены с помощью дробной десятичной нумерации, например задачи, вставленные непосредственно после № 2016, имеют номера 2016.1, 2016.2 и т. п.

О всех замечаниях и пожеланиях по поводу сборника авторы просят сообщить по адресу: Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ВОСЬМОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание сборника отличается от предыдущего лишь некоторыми исправлениями опечаток в тексте и ответах.

Москва, 1971 г. *Авторы*

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. Понятие функции

1°. Действительные числа. Числа рациональные и иррациональные носят название *действительных*, или *вещественных*, чисел. Под *абсолютной величиной* действительного числа a понимается неотрицательное число $|a|$, определяемое условиями: $|a|=a$, если $a \geqslant 0$, и $|a|=-a$, если $a<0$. Для любых вещественных чисел a и b справедливо неравенство

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

2°. Определение функции. Если каждому значению*) переменной величины x, принадлежащему некоторой совокупности (множеству) E, соответствует одно и только одно конечное значение величины y, то y называется *функцией* (однозначной) от x, или *зависимой переменной*, определенной на множестве E; x называется *аргументом*, или *независимой переменной*. То обстоятельство, что y есть функция от x, кратко выражают записью: $y=f(x)$ или $y=F(x)$ и т. п.

Если каждому значению x, принадлежащему некоторому множеству E, соответствует одно или несколько значений переменной величины y, то y называется *многозначной функцией* от x, определенной на множестве E. В дальнейшем под словом «функция» мы будем понимать только однозначные функции, если явно не оговорено противное.

3°. Область существования функции. Совокупность значений x, для которых данная функция определена, называется *областью существования*, или *областью определения* этой функции.

В простейших случаях область существования функции представляет собой: или *отрезок (сегмент)* $[a, b]$, т. е. множество вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$; или *промежуток (интервал)* (a, b), т. е. множество вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a<x<b$. Но возможна и более сложная структура области существования функции (см., например, задачу 21).

Пример 1. Определить область существования функции

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Решение. Функция определена, если

$$x^2-1>0,$$

---

*) В дальнейшем все рассматриваемые значения величин будут предполагаться вещественными, если явно не оговорено противное.

т. е. если $|x|>1$. Таким образом, область существования функции представляет собой совокупность двух интервалов: $-\infty<x<-1$ и $1<x<+\infty$.

4°. Обратные функции. Если уравнение $y=f(x)$ может быть однозначно разрешено относительно переменного x, т. е. существует функция $x=g(y)$ такая, что $y\equiv f[g(y)]$, то функция $x=g(y)$, или в стандартных обозначениях $y=g(x)$, называется *обратной* по отношению к $y=f(x)$. Очевидно, что $g[f(x)]\equiv x$, т. е. функции $f(x)$ и $g(x)$ являются *взаимно обратными*.

В общем случае уравнение $y=f(x)$ определяет многозначную обратную функцию $x=f^{-1}(y)$ такую, что $y\equiv f(f^{-1}(y))$ для всех y, являющихся значениями функции $f(x)$.

Пример 2. Для функции

$$y=1-2^{-x} \tag{1}$$

определить обратную.

Решение. Решив уравнение (1) относительно x, будем иметь:

$$x=-\frac{\lg(1-y)^{*)}}{\lg 2}. \tag{2}$$

Область определения функции (2), очевидно, следующая: $-\infty<y<1$.

5°. Сложные и неявные функции. Функция y от x, заданная цепью равенств $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$ и т. п., называется *сложной*, или *функцией от функции*.

Функция, заданная уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной, называется *неявной*. Например, уравнение $x^3+y^3=1$ определяет y как неявную функцию от x.

6°. Графическое изображение функции. Множество точек (x, y) плоскости XOY, координаты которых связаны уравнением $y=f(x)$, называется *графиком* данной функции.

1.** Доказать, что если a и b — действительные числа, то

$$||a|-|b||\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|.$$

2. Доказать следующие равенства:

а) $|ab|=|a|\cdot|b|$; в) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$;

б) $|a|^2=a^2$; г) $\sqrt{a^2}=|a|$.

3. Решить неравенства:

а) $|x-1|<3$; в) $|2x+1|<1$;

б) $|x+1|>2$; г) $|x-1|<|x+1|$.

4. Найти $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, если $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$.

5. Найти $f(0)$, $f\left(-\frac{3}{4}\right)$, $f(-x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, если $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

6. Пусть $f(x)=\arccos(\lg x)$. Найти $f\left(\frac{1}{10}\right)$, $f(1)$, $f(10)$.

7. Функция $f(x)$ — линейная. Найти эту функцию, если $f(-1)=2$ и $f(2)=-3$.

---

*) $\lg x=\log_{10}x$, как всегда, обозначает десятичный логарифм числа x.

8. Найти целую рациональную функцию $f(x)$ второй степени, если $f(0)=1$, $f(1)=0$ и $f(3)=5$.

9. Известно, что $f(4)=-2$, $f(5)=6$. Найти приближенное значение $f(4, 3)$, считая функцию $f(x)$ на участке $4 \leqslant x \leqslant 5$ линейной (*линейная интерполяция функции*).

10. Функцию

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x, & \text{если } x>0, \end{cases}$$

записать при помощи одной формулы, пользуясь знаком абсолютной величины.

Определить области существования функций:

11. а) $y=\sqrt{x+1}$; б) $y=\sqrt[3]{x+1}$.

12. $y=\frac{1}{4-x^2}$.

13. а) $y=\sqrt{x^2-2}$; б) $y=x\sqrt{x^2-2}$.

14**. $y=\sqrt{2+x-x^2}$.

15. $y=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{2+x}}$.

16. $y=\sqrt{x-x^3}$.

17. $y=\lg\frac{2+x}{2-x}$.

18. $y=\lg\frac{x^2-3x+2}{x+1}$.

19. $y=\arccos\frac{2x}{1+x}$.

20. $y=\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$.

21. $y=\sqrt{\sin 2x}$.

22. Пусть $f(x)=2x^4-3x^3-5x^2+6x-10$. Найти

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] \text{ и } \psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

23. Функция $f(x)$, определенная в симметричной области $-l<x<l$, называется *четной*, если $f(-x)=f(x)$, и *нечетной*, если $f(-x)=-f(x)$.

Выяснить, какие из данных функций являются четными и какие нечетными:

а) $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$;

б) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$;

в) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$;

г) $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$;

д) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

24*. Доказать, что всякую функцию $f(x)$, определенную в интервале $-l<x<l$, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

25. Доказать, что произведение двух четных функций или двух нечетных функций есть функция четная, а произведение четной функции на нечетную есть функция нечетная.

26. Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует положительное число T *(период функции)* такое, что $f(x+T) \equiv f(x)$ для всех значений x, принадлежащих области существования функции $f(x)$.

Определить, какие из перечисленных ниже функций являются периодическими, и для периодических функций найти наименьший период их T:

а) $f(x) = 10 \sin 3x$;

б) $f(x) = a \sin \lambda x + b \cos \lambda x$;

в) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$;

г) $f(x) = \sin^2 x$;

д) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$.

27. Выразить длину отрезка $y = MN$ и площадь S фигуры AMN как функции от $x = AM$ (рис. 1). Построить графики этих функций.

28. Линейная плотность (т. е. масса единицы длины) стержня $AB = l$ (рис. 2) на участках $AC = l_1$, $CD = l_2$ и $DB = l_3$ $(l_1 + l_2 + l_3 = l)$ равна соответственно q_1, q_2 и q_3. Выразить массу m переменного отрезка $AM = x$ этого стержня как функцию от x. Построить график этой функции.

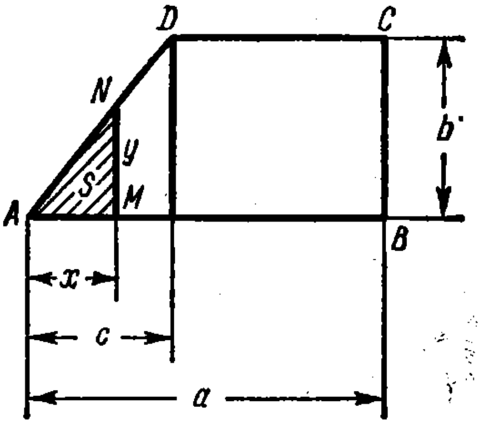

Рис. 1.

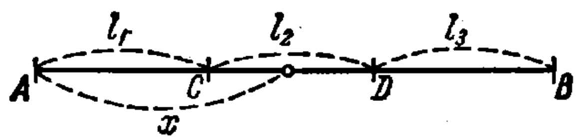

Рис. 2.

29. Найти $\varphi[\psi(x)]$ и $\psi[\varphi(x)]$, если $\varphi(x) = x^2$ и $\psi(x) = 2^x$.

30. Найти $f\{f[f(x)]\}$, если $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

31. Найти $f(x+1)$, если $f(x-1) = x^2$.

32. Пусть $f(n)$ есть сумма n членов арифметической прогрессии. Показать, что

$$f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = 0.$$

33. Показать, что если

$$f(x) = kx + b$$

и числа x_1, x_2, x_3 образуют арифметическую прогрессию, то числа $f(x_1)$, $f(x_2)$ и $f(x_3)$ также образуют арифметическую прогрессию.

Построить графики целых рациональных функций 2-й степени (*параболы*):

47. $y=ax^2$, если $a=1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ -1,\ -2,\ 0$.

48. $y=x^2+c$, если $c=0,\ 1,\ 2,\ -1$.

49. $y=(x-x_0)^2$, если $x_0=0,\ 1,\ 2,\ -1$.

50. $y=y_0+(x-1)^2$, если $y_0=0,\ 1,\ 2,\ -1$.

51*. $y=ax^2+bx+c$, если: 1) $a=1,\ b=-2,\ c=3$; 2) $a=-2,\ b=6,\ c=0$.

52. $y=2+x-x^2$. Найти точки пересечения этой параболы с осью OX.

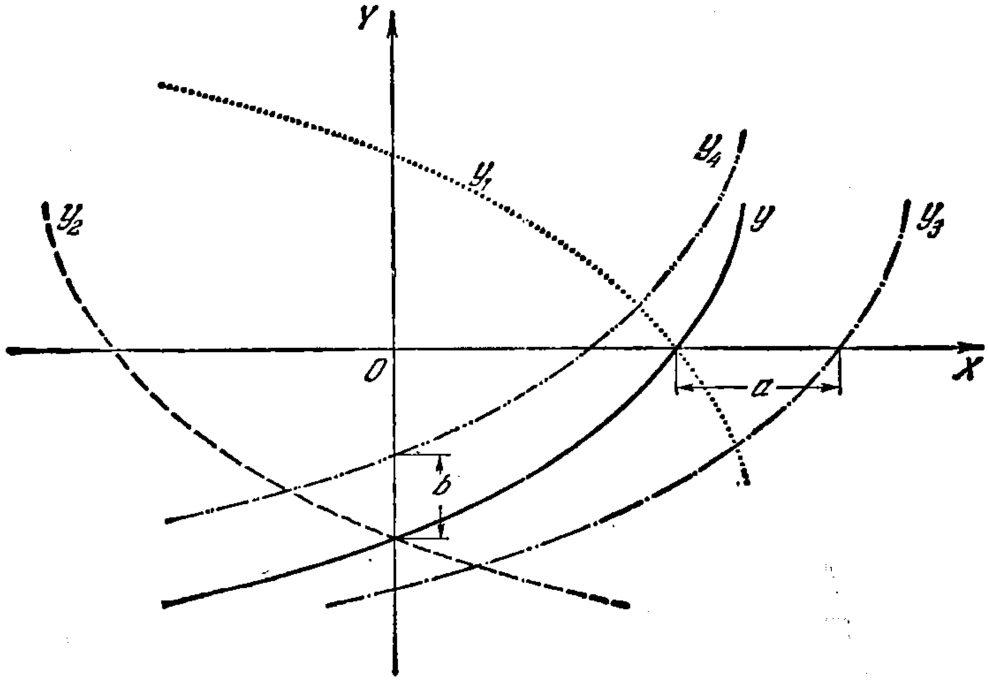

Рис. 3.

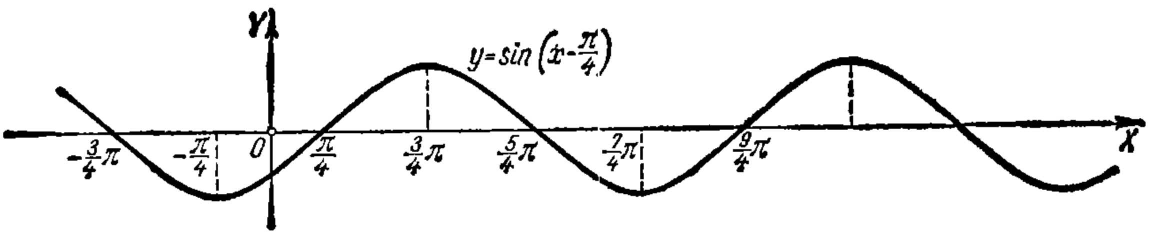

Рис. 4.

Построить графики целых рациональных функций степени выше второй:

53*. $y=x^3$ (*кубическая парабола*).

54. $y=2+(x-1)^3$.

55. $y=x^3-3x+2$.

56. $y=x^4$.

57. $y=2x^2-x^4$.

Построить графики дробно-линейных функций (*гиперболы*):

58*. $y=\frac{1}{x}$.

59. $y=\frac{1}{1-x}$.

60. $y=\frac{x-2}{x+2}$.

61*. $y=y_0+\frac{m}{x-x_0}$, если $x_0=1$, $y_0=-1$, $m=6$.

62*. $y=\frac{2x-3}{3x+2}$.

Построить графики дробных рациональных функций:

63. $y=x+\frac{1}{x}$. 64. $y=\frac{x^2}{x+1}$.

65*. $y=\frac{1}{x^2}$. 66. $y=\frac{1}{x^3}$.

67*. $y=\frac{10}{x^2+1}$ (*локон Аньези*).

68. $y=\frac{2x}{x^2+1}$ (*серпентин Ньютона*).

69. $y=x+\frac{1}{x^2}$.

70. $y=x^2+\frac{1}{x}$ (*трезубец Ньютона*).

Построить графики иррациональных функций:

71*. $y=\sqrt{x}$. 72*. $y=\sqrt[3]{x}$.

73*. $y=\sqrt[3]{x^2}$ (*парабола Нейля*).

74. $y=\pm x\sqrt{x}$ (*полукубическая парабола*).

75*. $y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$ (*эллипс*).

76. $y=\pm\sqrt{x^2-1}$ (*гипербола*).

77. $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

78*. $y=\pm x\sqrt{\frac{x}{4-x}}$ (*циссоида Диоклеса*).

79. $y=\pm x\sqrt{25-x^2}$.

Построить графики тригонометрических функций:

80*. $y=\sin x$. 81*. $y=\cos x$.

82*. $y=\operatorname{tg} x$. 83*. $y=\operatorname{ctg} x$.

84*. $y=\sec x$. 85*. $y=\operatorname{cosec} x$.

Так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \quad \text{и} \quad \left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1,$$

то при любом x имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Следовательно, функция $\sin x$ непрерывна при $-\infty < x < +\infty$.

2°. Точки разрыва функции. Говорят, что функция $f(x)$ терпит *разрыв непрерывности* при значении $x = x_0$ (или в точке x_0), принадлежащем

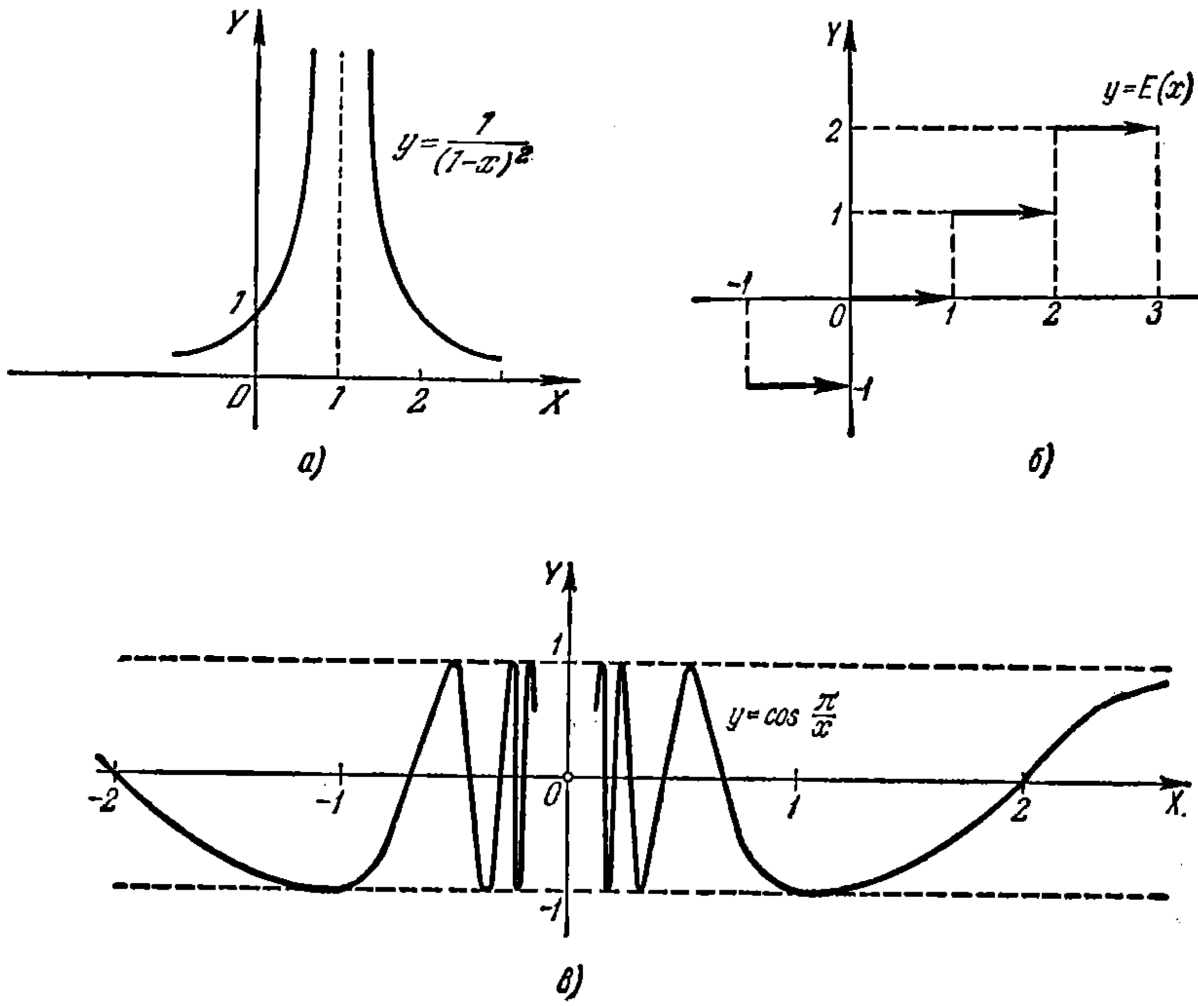

Рис. 10.

области определения функции или являющемся граничным для этой области если в этой точке нарушается условие непрерывности функции.

Пример 2. Функция $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ (рис. 10, *а*) разрывна при $x = 1$. Эта функция не определена в точке $x = 1$, и как бы мы ни выбрали число $f(1)$, пополненная функция $f(x)$ не будет непрерывной при $x = 1$.

Если для функции $f(x)$ существуют конечные пределы:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0),$$

причем не все три числа $f(x_0)$, $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ равны между собой, то x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода*. В частности, если

$$f(x_0-0)=f(x_0+0),$$

то x_0 называется *устранимой точкой разрыва*.

Для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0).$$

Пример 3. Функция $f(x)=\frac{\sin x}{|x|}$ имеет разрыв 1-го рода при $x=0$. В самом деле, здесь

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=+1$$

и

$$f(-0)=\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{-x}=-1.$$

Пример 4. Функция $y=E(x)$, где $E(x)$ обозначает целую часть числа x (т. е. $E(x)$ есть целое число, удовлетворяющее равенству $x=E(x)+q$, где $0\leqslant q<1$), разрывна (рис. 10, *б*) в каждой целочисленной точке: $x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, причем все точки разрыва 1-го рода.

В самом деле, если n — целое, то $E(n-0)=n-1$ и $E(n+0)=n$. Во всех остальных точках эта функция, очевидно, непрерывна.

Точки разрыва функции, не являющиеся точками разрыва 1-го рода, называются *точками разрыва 2-го рода*.

К точкам разрыва 2-го рода относятся *точки бесконечного разрыва*, т. е. такие точки x_0, для которых хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$ или $f(x_0+0)$ равен ∞ (см. пример 2).

Пример 5. Функция $y=\cos\frac{\pi}{x}$ (рис. 10, *в*) в точке $x=0$ имеет разрыв 2-го рода, так как здесь не существуют оба односторонних предела:

$$\lim_{x\to-0}\cos\frac{\pi}{x} \text{ и } \lim_{x\to+0}\cos\frac{\pi}{x}.$$

3°. **Свойства непрерывных функций.** При исследовании функции на непрерывность нужно иметь в виду следующие теоремы:

1) сумма и произведение ограниченного числа функций, непрерывных в некоторой области, есть функция, непрерывная в этой же области;

2) частное от деления двух непрерывных в некоторой области функций есть непрерывная функция при всех значениях аргумента из этой области, не обращающих делителя в нуль;

3) если функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b), причем множество ее значений содержится в интервале (A, B), и функция $\varphi(x)$ непрерывна в интервале (A, B), то сложная функция $\varphi[f(x)]$ непрерывна в интервале (a, b).

Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, обладает следующими свойствами:

1) $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, т. е. существует некоторое число M такое, что $|f(x)|\leqslant M$ при $a\leqslant x\leqslant b$;

2) $f(x)$ имеет на $[a, b]$ наименьшее и наибольшее значения;

а) $x_1=1,\ x_2=2$;
б) $x_1=1,\ x_2=0{,}9$;
в) $x_1=1,\ x_2=1+h$.

К какому пределу стремится угловой коэффициент секущей в последнем случае, если $h \to 0$?

347. Какова средняя скорость изменения функции $y=x^3$ в промежутке $1 \leqslant x \leqslant 4$?

348. Закон движения точки есть $s=2t^2+3t+5$, где расстояние s дается в сантиметрах и время t—в секундах. Чему равна средняя скорость точки за промежуток времени от $t=1$ до $t=5$?

349. Найти средний подъем кривой $y=2^x$ на отрезке $1 \leqslant x \leqslant 5$.

350. Найти средний подъем кривой $y=f(x)$ на отрезке $[x,\ x+\Delta x]$.

351. Что понимают под подъемом кривой $y=f(x)$ в данной точке x?

352. Дать определение: а) средней скорости вращения; б) мгновенной скорости вращения.

353. Нагретое тело, помещенное в среду с более низкой температурой, охлаждается. Что следует понимать под: а) средней скоростью охлаждения; б) скоростью охлаждения в данный момент?

354. Что следует понимать под скоростью реагирования вещества в химической реакции?

355. Пусть $m=f(x)$—масса неоднородного стержня на отрезке $[0,\ x]$. Что следует понимать под: а) средней линейной плотностью стержня на отрезке $[x,\ x+\Delta x]$; б) линейной плотностью стержня в точке x?

356. Найти отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для функции $y=\frac{1}{x}$ в точке $x=2$, если: а) $\Delta x=1$; б) $\Delta x=0{,}1$; в) $\Delta x=0{,}01$. Чему равна производная y' при $x=2$?

357.** Найти производную от функции $y=\operatorname{tg} x$.

358. Найти $y'=\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ для функций:

а) $y=x^3$; в) $y=\sqrt{x}$;
б) $y=\frac{1}{x^2}$; г) $y=\operatorname{ctg} x$.

359.** Вычислить $f'(8)$, если $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

360. Найти $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$, если $f(x)=x(x-1)^2(x-2)^3$.

361*. В каких точках производная от функции $f(x)=x^3$ численно совпадает со значением самой функции, т. е. $f(x)=f'(x)$?

362. Закон движения точки есть $s=5t^2$, где расстояние s дано в метрах, а время t—в секундах. Найти скорость движения в момент времени $t=3$.

363. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=0{,}1x^3$, проведенной в точке с абсциссой $x=2$.

364. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=\sin x$ в точке $(\pi;\ 0)$.

365. Найти значение производной от функции $f(x)=\frac{1}{x}$ в точке $x=x_0$ $(x_0\neq 0)$.

366*. Чему равны угловые коэффициенты касательных к кривым $y=\frac{1}{x}$ и $y=x^2$ в точке их пересечения? Найти угол между этими касательными.

367.** Показать, что следующие функции не имеют конечных производных в указанных точках:

а) $y=\sqrt[3]{x^2}$ в точке $x=0$;

б) $y=\sqrt[5]{x-1}$ в точке $x=1$;

в) $y=|\cos x|$ в точках $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

§ 2. Табличное дифференцирование

1°. Основные правила нахождения производной. Если c — постоянная и $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$ — функции, имеющие производные, то

1) $(c)'=0$;

2) $(x)'=1$;

3) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;

4) $(cu)'=cu'$;

5) $(uv)'=u'v+v'u$;

6) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ $(v\neq 0)$;

7) $\left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{cv'}{v^2}$ $(v\neq 0)$.

2°. Таблица производных основных функций

I. $(x^n)'=nx^{n-1}$.

II. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$.

III. $(\sin x)'=\cos x$.

IV. $(\cos x)'=-\sin x$.

V. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

VI. $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.

VII. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$.

VIII. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$.

IX. $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

X. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{x^2+1}$.

XI. $(a^x)'=a^x\ln a$.

XII. $(e^x)'=e^x$.

XIII. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ $(x>0)$.

XIV. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}=\frac{\log_a e}{x}$ $(x>0,\ \ a>0)$.

XV. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

XVI. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

XVII. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

XVIII. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

XIX. $(\operatorname{Arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

XX. $(\operatorname{Arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad (|x| > 1)$.

XXI. $(\operatorname{Arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$ $\quad (|x| < 1)$.

XXII. $(\operatorname{Arcth} x)' = -\dfrac{1}{x^2-1}$ $\quad (|x| > 1)$.

3°. Правило дифференцирования сложной функции. Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, т. е. $y = f[\varphi(x)]$, где функции y и u имеют производные, то

$$y'_x = y'_u u'_x \tag{1}$$

или в других обозначениях

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций.

Пример 1. Найти производную функции

$$y = (x^2 - 2x + 3)^5.$$

Решение. Полагая $y = u^5$, где $u = x^2 - 2x + 3$, согласно формуле (1) будем иметь:

$$y' = (u^5)'_u (x^2 - 2x + 3)'_x = 5u^4 (2x - 2) = 10(x-1)(x^2 - 2x + 3)^4.$$

Пример 2. Найти производную функции

$$y = \sin^3 4x.$$

Решение. Полагая

$$y = u^3; \qquad u = \sin v; \qquad v = 4x,$$

находим:

$$y' = 3u^2 \cdot \cos v \cdot 4 = 12 \sin^2 4x \cos 4x.$$

Найти производные следующих функций (в №№ 368—408 правило дифференцирования сложной функции не используется).

А. Алгебраические функции

368. $y=x^5-4x^3+2x-3.$

369. $y=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}x+x^2-0{,}5x^4.$

370. $y=ax^2+bx+c.$

371. $y=-\frac{5x^3}{a}.$

372. $y=at^m+bt^{m+n}.$

373. $y=\frac{ax^6+b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

374. $y=\frac{\pi}{x}+\ln 2.$

375. $y=3x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{5}{2}}+x^{-3}.$

376*. $y=x^2\sqrt[3]{x^2}.$

377. $y=\frac{a}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{b}{x\sqrt[3]{x}}.$

378. $y=\frac{a+bx}{c+dx}.$

379. $y=\frac{2x+3}{x^2-5x+5}.$

380. $y=\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x}.$

381. $y=\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}.$

Б. Функции тригонометрические и обратные круговые

382. $y=5\sin x+3\cos x.$

383. $y=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x.$

384. $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}.$

385. $y=2t\sin t-(t^2-2)\cos t.$

386. $y=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x.$

387. $y=x\operatorname{ctg} x.$

388. $y=x\arcsin x.$

389. $y=\frac{(1+x^2)\operatorname{arctg} x-x}{2}.$

В. Функции показательные и логарифмические

390. $y=x^7\cdot e^x.$

391. $y=(x-1)e^x.$

392. $y=\frac{e^x}{x^2}.$

393. $y=\frac{x^5}{e^x}.$

394. $f(x)=e^x\cos x.$

395. $y=(x^2-2x+2)e^x.$

396. $y=e^x\arcsin x.$

397. $y=\frac{x^2}{\ln x}.$

398. $y=x^3\ln x-\frac{x^3}{3}.$

399. $y=\frac{1}{x}+2\ln x-\frac{\ln x}{x}.$

400. $y=\ln x\lg x-\ln a\log_a x.$

Г. Гиперболические и обратные гиперболические функции

401. $y=x\operatorname{sh} x.$

402. $y=\frac{x^2}{\operatorname{ch} x}.$

403. $y=\operatorname{th} x-x.$

404. $y=\frac{3\operatorname{cth} x}{\ln x}.$

405. $y=\operatorname{arctg} x-\operatorname{Arth} x$. **406.** $y=\arcsin x \operatorname{Arsh} x$.

407. $y=\dfrac{\operatorname{Arch} x}{x}$. **408.** $y=\dfrac{\operatorname{Arcth} x}{1-x^2}$.

Д. Сложные функции

Найти производные следующих функций (в №№ 409—466 необходимо использовать правило дифференцирования сложной функции с одним промежуточным аргументом):

409. $y=(1+3x-5x^2)^{30}$.

Решение. Обозначим $1+3x-5x^2=u$; тогда $y=u^{30}$. Имеем:

$$y'_u=30u^{29},\quad u'_x=3-10x;$$

$$y'_x=30u^{29}\cdot(3-10x)=30\,(1+3x-5x^2)^{29}\cdot(3-10x).$$

410. $y=\left(\dfrac{ax+b}{c}\right)^3$.

411. $f(y)=(2a+3by)^2$.

412. $y=(3+2x^2)^4$.

413. $y=\dfrac{3}{56\,(2x-1)^7}-\dfrac{1}{24\,(2x-1)^6}-\dfrac{1}{40\,(2x-1)^5}$.

414. $y=\sqrt{1-x^2}$. **415.** $y=\sqrt[3]{a+bx^3}$.

416. $y=(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}$. **417.** $y=(3-2\sin x)^5$.

Решение. $y'=5\,(3-2\sin x)^4\cdot(3-2\sin x)'=5\,(3-2\sin x)^4\,(-2\cos x)=$
$=-10\cos x\,(3-2\sin x)^4$.

418. $y=\operatorname{tg} x-\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$.

419. $y=\sqrt{\operatorname{ctg} x}-\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}$. **420.** $y=2x+5\cos^3 x$.

421*. $x=\operatorname{cosec}^2 t+\sec^2 t$. **422.** $f(x)=-\dfrac{1}{6\,(1-3\cos x)^2}$.

423. $y=\dfrac{1}{3\cos^3 x}-\dfrac{1}{\cos x}$. **424.** $y=\sqrt{\dfrac{3\sin x-2\cos x}{5}}$.

425. $y=\sqrt[3]{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^3 x}$. **426.** $y=\sqrt{1+\arcsin x}$.

427. $y=\sqrt{\operatorname{arctg} x}-(\arcsin x)^3$.

428. $y=\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}$. **429.** $y=\sqrt{xe^x+x}$.

430. $y=\sqrt[3]{2e^x-2^x+1}+\ln^5 x$. **431.** $y=\sin 3x+\cos\dfrac{x}{5}+\operatorname{tg}\sqrt{x}$.

Решение. $y'=\cos 3x\cdot(3x)'-\sin\dfrac{x}{5}\left(\dfrac{x}{5}\right)'+\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\,(\sqrt{x})'=$

$$=3\cos 3x-\frac{1}{5}\sin\frac{x}{5}+\frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}.$$

432. $y=\sin(x^2-5x+1)+\operatorname{tg}\dfrac{a}{x}$.

433. $f(x)=\cos(\alpha x+\beta)$. **434.** $f(t)=\sin t\sin(t+\varphi)$.

435. $y=\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$. **436.** $f(x)=a\operatorname{ctg}\dfrac{x}{a}$.

437. $y=-\dfrac{1}{20}\cos(5x^2)-\dfrac{1}{4}\cos x^2$.

438. $y=\arcsin 2x$.

Решение. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot(2x)'=\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$.

439. $y=\arcsin\dfrac{1}{x^2}$. **440.** $f(x)=\arccos\sqrt{x}$.

441. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$. **442.** $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1+x}{1-x}$.

443. $y=5e^{-x^2}$. **444.** $y=\dfrac{1}{5^{x^2}}$.

445. $y=x^2 10^{2x}$. **446.** $f(t)=t\sin 2^t$.

447. $y=\arccos e^x$. **448.** $y=\ln(2x+7)$.

449. $y=\lg\sin x$. **450.** $y=\ln(1-x^2)$.

451. $y=\ln^2 x-\ln(\ln x)$.

452. $y=\ln(e^x+5\sin x-4\arcsin x)$.

453. $y=\operatorname{arctg}(\ln x)+\ln(\operatorname{arctg} x)$.

454. $y=\sqrt{\ln x+1}+\ln(\sqrt{x}+1)$.

Е. Разные функции

455.** $y=\sin^3 5x\cos^2\dfrac{x}{3}$.

456. $y=-\dfrac{11}{2(x-2)^2}-\dfrac{4}{x-2}$.

457. $y=-\dfrac{15}{4(x-3)^4}-\dfrac{10}{3(x-3)^3}-\dfrac{1}{2(x-3)^2}$.

458. $y=\dfrac{x^8}{8(1-x^2)^4}$. **459.** $y=\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$.

460. $y=\dfrac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$. **461.** $y=\dfrac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

462. $y=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{18}{7}x\sqrt[6]{x}+\dfrac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}$.

463. $y=\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}$.

464. $y=\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}$.

465. $y=x^4(a-2x^3)^2$.

466. $y=\left(\dfrac{a+bx^n}{a-bx^n}\right)^m$.

467. $y=\dfrac{9}{5(x+2)^5}-\dfrac{3}{(x+2)^4}+\dfrac{2}{(x+2)^3}-\dfrac{1}{2(x+2)^2}$.

468. $y=(a+x)\sqrt{a-x}$.

469. $y=\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}$.

545. $y=\operatorname{Arth}\frac{2x}{1+x^2}$. **546.** $y=\frac{1}{2}(x^2-1)\operatorname{Arth}x+\frac{1}{2}x$.

547. $y=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\right)\operatorname{Arsh}x-\frac{1}{4}x\sqrt{1+x^2}$.

548. Найти y', если:

а) $y=|x|$;

б) $y=x|x|$.

Построить графики функций y и y'.

549. Найти y', если

$$y=\ln|x| \quad (x\neq 0).$$

550. Найти $f'(x)$, если

$$f(x)=\begin{cases} 1-x & \text{при } x\leqslant 0, \\ e^{-x} & \text{при } x>0. \end{cases}$$

551. Вычислить $f'(0)$, если

$$f(x)=e^{-x}\cos 3x.$$

Решение.

$$f'(x)=e^{-x}(-3\sin 3x)-e^{-x}\cos 3x;$$
$$f'(0)=e^0(-3\sin 0)-e^0\cos 0=-1.$$

552. $f(x)=\ln(1+x)+\arcsin\frac{x}{2}$. Найти $f'(1)$.

553. $y=\operatorname{tg}^3\frac{\pi x}{6}$. Найти $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2}$.

554. Найти $f'_+(0)$ и $f'_-(0)$ для функций:

а) $f(x)=\sqrt{\sin(x^2)}$;

б) $f(x)=\arcsin\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$;

в) $f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $x\neq 0$; $f(0)=0$;

г) $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$; $f(0)=0$;

д) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$; $f(0)=0$;

555. Для функции $f(x)=e^{-x}$ найти $f(0)+xf'(0)$.

556. Для функции $f(x)=\sqrt{1+x}$ найти $f(3)+(x-3)f'(3)$.

557. Даны функции $f(x)=\operatorname{tg}x$ и $\varphi(x)=\ln(1-x)$, найти $\frac{f'(0)}{\varphi'(0)}$.

558. Для функций $f(x)=1-x$ и $\varphi(x)=1-\sin\frac{\pi x}{2}$ найти $\frac{\varphi'(1)}{f'(1)}$.

559. Доказать, что производная четной функции — функция нечетная, а производная нечетной функции — функция четная.

560. Доказать, что производная периодической функции есть функция также периодическая.

561.** Показать, что функция $y=xe^{-x}$ удовлетворяет уравнению $xy'=(1-x)y$.

562. Показать, что функция $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ удовлетворяет уравнению $xy'=(1-x^2)y$.

563. Показать, что функция $y=\frac{1}{1+x+\ln x}$ удовлетворяет уравнению $xy'=y(y\ln x-1)$.

Ж. Логарифмическая производная

Логарифмической производной функции $y=f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т. е.

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Применение предварительного логарифмирования функции иногда упрощает нахождение ее производной.

Пример. Найти производную сложно-показательной функции

$$y=u^v,$$

где $u=\varphi(x)$ и $v=\psi(x)$.

Решение. Логарифмируя, получим:

$$\ln y=v\ln u.$$

Дифференцируем обе части последнего равенства по x

$$(\ln y)'=v'\ln u+v(\ln u)',$$

или

$$\frac{1}{y}y'=v'\ln u+v\frac{1}{u}u',$$

отсюда

$$y'=y\left(v'\ln u+\frac{v}{u}u'\right),$$

или

$$y'=u^v\left(v'\ln u+\frac{v}{u}u'\right).$$

564. Найти y', если

$$y=\sqrt[3]{x^2}\,\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3 x\cos^2 x.$$

Решение. $\ln y=\frac{2}{3}\ln x+\ln(1-x)-\ln(1+x^2)+3\ln\sin x+2\ln\cos x;$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{2}{3}\frac{1}{x}+\frac{(-1)}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}+3\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{2\sin x}{\cos x},$$

откуда $y'=y\left(\frac{2}{3x}-\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}+3\operatorname{ctg}x-2\operatorname{tg}x\right).$

565. Найти y', если $y=(\sin x)^x$.

Решение. $\ln y = x \ln \sin x$; $\frac{1}{y}y' = \ln \sin x + x \operatorname{ctg} x$;

$$y' = (\sin x)^x (\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x).$$

Найти y', применяя предварительно логарифмирование функции $y=f(x)$:

566. $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)$.

567. $y=\frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$.

568. $y=\sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$.

569. $y=x\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$.

570. $y=\frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$.

571. $y=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$.

572. $y=x^x$.

573. $y=x^{x^2}$.

574. $y=\sqrt[x]{x}$.

575. $y=x^{\sqrt{x}}$.

576. $y=x^{x^x}$.

577. $y=x^{\sin x}$.

578. $y=(\cos x)^{\sin x}$.

579. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

580. $y=(\operatorname{arctg} x)^x$.

§ 3. Производные функций, не являющихся явно заданными

1°. Производная обратной функции. Если для функции $y=f(x)$ производная $y'_x \neq 0$, то производная обратной функции $x=f^{-1}(y)$ есть

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

или

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Пример 1. Найти производную x'_y, если

$$y = x + \ln x.$$

Решение. Имеем $y'_x = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$; следовательно, $x'_y = \frac{x}{x+1}$.

2°. Производные функций, заданных параметрически. Если зависимость функции y и аргумента x задана посредством параметра t

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

или в других обозначениях

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Пример 2. Найти $\frac{dy}{dx}$, если

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t. \end{cases}$$

Решение. Находим $\frac{dx}{dt}=-a\sin t$ и $\frac{dy}{dt}=a\cos t$. Отсюда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\cos t}{-a\sin t}=-\operatorname{ctg} t.$$

3°. Производная неявной функции. Если зависимость между x и y задана в неявной форме

$$F(x, y)=0, \tag{1}$$

то для нахождения производной $y'_x=y'$ в простейших случаях достаточно: 1) вычислить производную по x от левой части уравнения (1), считая y функцией от x; 2) приравнять эту производную нулю, т. е. положить

$$\frac{d}{dx}F(x, y)=0, \tag{2}$$

и 3) решить полученное уравнение относительно y'.

Пример 3. Найти производную y'_x, если

$$x^3+y^3-3axy=0. \tag{3}$$

Решение. Составляя производную левой части равенства (3) и приравнивая ее нулю, получим:

$$3x^2+3y^2y'-3a(y+xy')=0,$$

отсюда

$$y'=\frac{x^2-ay}{ax-y^2}.$$

581. Найти производную x'_y, если

а) $y=3x+x^2$;

б) $y=x-\frac{1}{2}\sin x$;

в) $y=0,1x+e^{\frac{x}{2}}$.

Определить производную $y'=\frac{dy}{dx}$ для функций y, заданных параметрически:

удовлетворяет уравнению

$$y=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

599. При $x=2$ справедливо равенство

$$x^2=2x.$$

Следует ли отсюда, что

$$(x^2)'=(2x')$$

при $x=2$?

600. Пусть $y=\sqrt{a^2-x^2}$. Можно ли почленно дифференцировать равенство

$$x^2+y^2=a^2?$$

Найти производную $y'=\frac{dy}{dx}$ от неявных функций y:

601. $2x-5y+10=0$.

602. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

603. $x^3+y^3=a^3$.

604. $x^3+x^2y+y^2=0$.

605. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

606. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$.

607. $y^3=\frac{x-y}{x+y}$.

608. $y-0{,}3\sin y=x$.

609. $a\cos^2(x+y)=b$.

610. $\operatorname{tg} y=xy$.

611. $xy=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

612. $\operatorname{arctg}(x+y)=x$.

613. $e^y=x+y$.

614. $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=c$.

615. $\ln y+\frac{x}{y}=c$.

616. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

617. $\sqrt{x^2+y^2}=c\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

618. $x^y=y^x$.

619. Найти y' в точке $M(1;\ 1)$, если

$$2y=1+xy^3.$$

Решение. Дифференцируя, имеем $2y'=y^3+3xy^2y'$. Полагая $x=1$ и $y=1$, получим $2y'=1+3y'$, откуда $y'=-1$.

620. Найти производные y' заданных функций y в указанных точках:

а) $(x+y)^3=27(x-y)$ при $x=2$ и $y=1$;

б) $ye^y=e^{x+1}$ при $x=0$ и $y=1$;

в) $y^2=x+\ln\frac{y}{x}$ при $x=1$ и $y=1$.

§ 4. Геометрические и механические приложения производной

1°. Уравнения касательной и нормали. Из геометрического смысла производной следует, что *уравнение касательной* к кривой $y=f(x)$ или $F(x, y)=0$ в точке $M(x_0, y_0)$ будет

$$y-y_0=y'_0(x-x_0),$$

где y'_0 есть значение производной y' в точке $M(x_0, y_0)$. Прямая, проходящая

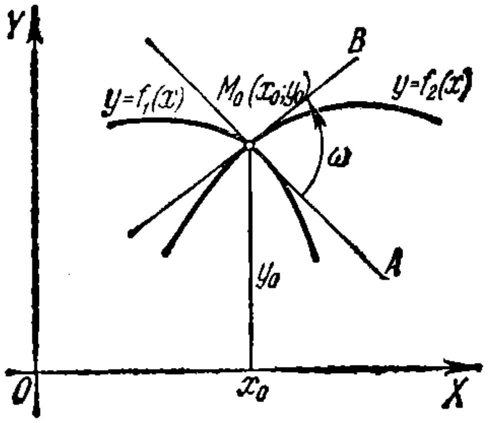

Рис. 12.

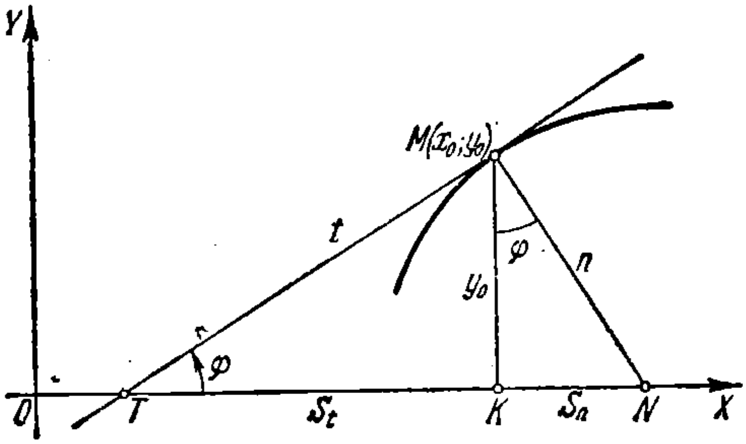

Рис. 13.

через точку касания перпендикулярно к касательной, называется *нормалью к кривой*. Для нормали получаем уравнение

$$x-x_0+y'_0(y-y_0)=0.$$

2°. Угол между кривыми. Под углом между кривыми

$$y=f_1(x)$$

и

$$y=f_2(x)$$

в их общей точке $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 12) понимается угол ω между касательными M_0A и M_0B к этим кривым в точке M_0.

По известной формуле аналитической геометрии получаем:

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{f'_2(x_0)-f'_1(x_0)}{1+f'_1(x_0)\cdot f'_2(x_0)}.$$

3°. Отрезки, связанные с касательной и нормалью, для случая прямоугольной системы координат. Касательная и нормаль определяют следующие четыре отрезка (рис. 13):

$t=TM$ — так называемый *отрезок касательной*,
$S_t=TK$ — *подкасательная*,
$n=NM$ — *отрезок нормали*,
$S_n=KN$ — *поднормаль*.

Так как $KM=|y_0|$ и $\operatorname{tg}\varphi=y'_0$, то

$$t=TM=\left|\frac{y_0}{y'_0}\sqrt{1+(y'_0)^2}\right|; \quad n=NM=\left|y_0\sqrt{1+(y'_0)^2}\right|;$$

$$S_t=TK=\left|\frac{y_0}{y'_0}\right|; \quad S_n=|y_0y'_0|.$$

4°. **Отрезки, связанные с касательной и нормалью, для случая полярной системы координат.** Если кривая задана в полярных координатах уравнением $r=f(\varphi)$, то угол μ, образованный касательной MT и полярным радиусом $r=OM$ (рис. 14), определяется следующей формулой:

$$\operatorname{tg}\mu = r\frac{d\varphi}{dr}=\frac{r}{r'}.$$

Касательная MT и нормаль MN в точке M вместе с полярным радиусом точки

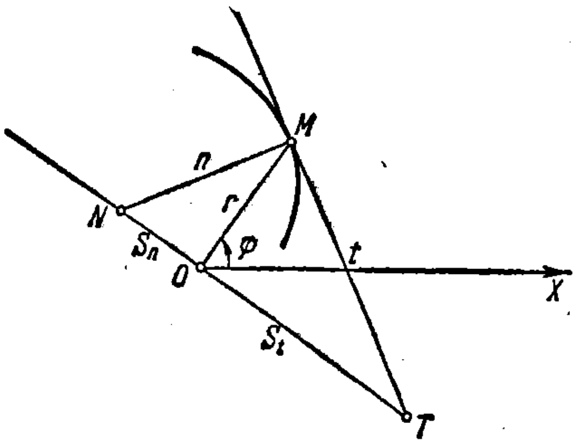

Рис. 14.

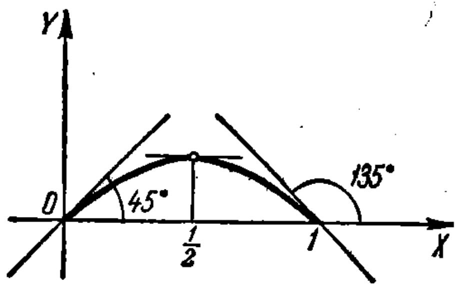

Рис. 15.

касания и перпендикуляром к полярному радиусу, проведенным через полюс O, определяют следующие четыре отрезка (см. рис. 14):

$t=MT$ — *отрезок полярной касательной*,
$n=MN$ — *отрезок полярной нормали*,
$S_t=OT$ — *полярная подкасательная*,
$S_n=ON$ — *полярная поднормаль*.

Эти отрезки выражаются следующими формулами:

$$t=MT=\frac{r}{|r'|}\sqrt{r^2+(r')^2};\qquad S_t=OT=\frac{r^2}{|r'|};$$
$$n=MN=\sqrt{r^2+(r')^2};\qquad S_n=ON=|r'|.$$

621. Какие углы φ образуют с осью OX касательные к кривой $y=x-x^2$ в точках с абсциссами: а) $x=0$; б) $x=\frac{1}{2}$; в) $x=1$?

Решение. Имеем $y'=1-2x$. Отсюда: а) $\operatorname{tg}\varphi=1$, $\varphi=45°$; б) $\operatorname{tg}\varphi=0$ $\varphi=0°$; в) $\operatorname{tg}\varphi=-1$, $\varphi=135°$ (рис. 15).

622. Под какими углами синусоиды $y=\sin x$ и $y=\sin 2x$ пересекают ось абсцисс в начале координат?

623. Под каким углом тангенсоида $y=\operatorname{tg} x$ пересекает ось абсцисс в начале координат?

624. Под каким углом кривая $y=e^{0,5x}$ пересекает прямую $x=2$?

625. Найти точки, в которых касательные к кривой $y=3x^4+4x^3-12x^2+20$ параллельны оси абсцисс.

626. В какой точке касательная к параболе

$$y=x^2-7x+3$$

параллельна прямой $5x+y-3=0$?

627. Найти уравнение параболы $y=x^2+bx+c$, касающейся прямой $x=y$ в точке $(1;\ 1)$.

628. Определить угловой коэффициент касательной к кривой $x^3+y^3-xy-7=0$ в точке $(1;\ 2)$.

629. В какой точке кривой $y^2=2x^3$ касательная перпендикулярна к прямой $4x-3y+2=0$?

630. Написать уравнения касательной и нормали к параболе

$$y=\sqrt{x}$$

в точке с абсциссой $x=4$.

Решение. Имеем $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; отсюда угловой коэффициент касательной $k=[y']_{x=4}=\frac{1}{4}$. Так как точка касания имеет координаты $x=4$, $y=2$, то уравнение касательной есть $y-2=\frac{1}{4}(x-4)$, или $x-4y+4=0$.

В силу условия перпендикулярности угловой коэффициент нормали

$$k_1=-4,$$

откуда уравнение нормали $y-2=-4(x-4)$, или $4x+y-18=0$.

631. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y=x^3+2x^2-4x-3$ в точке $(-2;\ 5)$.

632. Найти уравнения касательной и нормали к кривой

$$y=\sqrt[3]{x-1}$$

в точке $(1;\ 0)$.

633. Составить уравнения касательной и нормали к кривым в указанных точках:

а) $y=\operatorname{tg}2x$ в начале координат;

б) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$ в точке пересечения с осью OX;

в) $y=\arccos 3x$ в точке пересечения с осью OY;

г) $y=\ln x$ в точке пересечения с осью OX;

д) $y=e^{1-x^2}$ в точках пересечения с прямой $y=1$.

634. Написать уравнения касательной и нормали в точке $(2;\ 2)$ к кривой

$$\begin{cases} x=\dfrac{1+t}{t^3}, \\ y=\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{1}{2t}. \end{cases}$$

635. Написать уравнения касательной к кривой

$$x=t\cos t,\quad y=t\sin t$$

в начале координат и в точке $t=\frac{\pi}{4}$.

636. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $x^3+y^2+2x-6=0$ в точке с ординатой $y=3$.

637. Написать уравнение касательной к кривой $x^5+y^5-2xy=0$ в точке $(1;\ 1)$.

638. Написать уравнения касательных и нормалей к кривой $y=(x-1)(x-2)(x-3)$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.

639. Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$y^4=4x^4+6xy \text{ в точке } (1;\ 2).$$

640*. Показать, что отрезок касательной к гиперболе $xy=a^2$, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

641. Показать, что у астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ отрезок касательной, содержащийся между координатными осями, имеет постоянную величину, равную a.

642. Показать, что нормали к развертке окружности

$$x=a(\cos t+t\sin t),\quad y=a(\sin t-t\cos t)$$

являются касательными к окружности $x^2+y^2=a^2$.

643. Найти угол, под которым пересекаются параболы $y=(x-2)^2$ и $y=-4+6x-x^2$.

644. Под каким углом пересекаются параболы $y=x^2$ и $y=x^3$?

645. Показать, что кривые $y=4x^2+2x-8$ и $y=x^3-x+10$ касаются друг друга в точке $(3;\ 34)$. Будет ли то же самое в точке $(-2;\ 4)$?

646. Показать, что гиперболы

$$xy=a^2 \text{ и } x^2-y^2=b^2$$

пересекаются под прямым углом.

647. Дана парабола $y^2=4x$. Вычислить в точке $(1;\ 2)$ длины отрезков касательной, нормали, подкасательной и поднормали.

648. Найти подкасательную кривой $y=2^x$ в любой ее точке.

649. Показать, что у равносторонней гиперболы $x^2-y^2=a^2$ длина отрезка нормали в любой точке равна полярному радиусу этой точки.

650. Показать, что поднормаль гиперболы $x^2-y^2=a^2$ в любой ее точке равна абсциссе этой точки.

651. Показать, что подкасательные эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и окружности $x^2+y^2=a^2$ в точках, имеющих одинаковые абсциссы, равны между собой. Какой прием построения касательной к эллипсу отсюда вытекает?

652. Найти длины отрезков касательной, нормали, подкасательной и поднормали у циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

в произвольной точке.

653. Найти угол между касательной и полярным радиусом точки касания у логарифмической спирали

$$r = ae^{k\varphi}.$$

654. Найти угол между касательной и полярным радиусом точки касания у лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

655. Найти длины отрезков полярных касательной, нормали, подкасательной и поднормали, а также угол между касательной и полярным радиусом точки касания у спирали Архимеда

$$r = a\varphi$$

в точке с полярным углом $\varphi = 2\pi$.

656. Найти длины отрезков полярных подкасательной, поднормали, касательной и нормали; а также угол между касательной и полярным радиусом у гиперболической спирали $r = \frac{a}{\varphi}$ в произвольной точке $\varphi = \varphi_0$; $r = r_0$.

657. Закон движения точки по оси OX есть

$$x = 3t - t^3.$$

Найти скорость движения точки для моментов времени: $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$ (x дается в сантиметрах, t — в секундах).

658. По оси OX движутся две точки, имеющие законы движения

$$x = 100 + 5t$$

и

$$x = \frac{1}{2} t^2,$$

где $t \geqslant 0$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи (x дается в сантиметрах, t — в секундах)?

659. Концы отрезка $AB = 5$ *м* скользят по перпендикулярным прямым OX и OY (рис. 16). Скорость перемещения конца A равна 2 *м/сек*. Какова скорость перемещения конца B в тот момент, когда конец A находится от начала координат на расстоянии $OA = 3$ *м*?

660*. Закон движения материальной точки, брошенной в вертикальной плоскости XOY (рис. 17) под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0, дается формулами (без учета сопротивления воздуха)

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2},$$

где t — время, g — ускорение силы тяжести. Найти траекторию движения и дальность полета. Определить также величину скорости движения и ее направление.

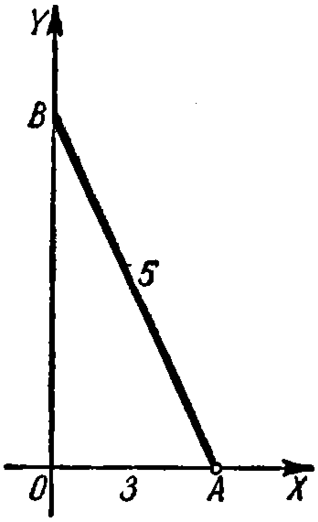

Рис. 16.

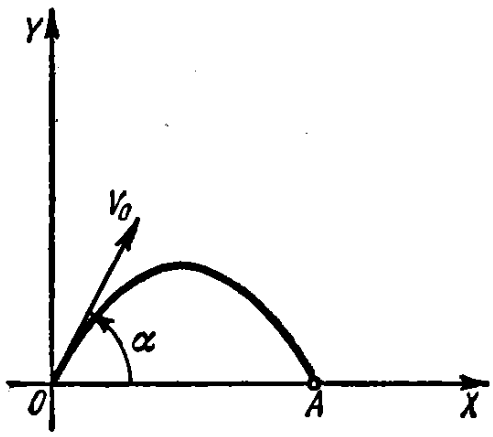

Рис. 17.

661. Точка движется по гиперболе $y = \frac{10}{x}$ так, что ее абсцисса x растет равномерно со скоростью 1 единица в секунду. С какой скоростью изменяется ее ордината, когда точка проходит положение (5; 2)?

662. В какой точке параболы $y^2 = 18x$ ордината возрастает вдвое скорее, чем абсцисса?

663. Одна сторона прямоугольника имеет постоянную величину $a = 10$ *см*, а другая b изменяется, возрастая с постоянной скоростью 4 *см/сек*. С какой скоростью растут диагональ прямоугольника и его площадь в тот момент, когда $b = 30$ *см*?

664. Радиус шара возрастает равномерно со скоростью 5 *см/сек*. С какой скоростью растут площадь поверхности шара и объем шара в момент, когда радиус его становится равным 50 *см*?

665. Точка движется по архимедовой спирали

$$r = a\varphi$$

($a = 10$ *см*) так, что угловая скорость вращения ее полярного радиуса постоянна и равна 6° в секунду. Определить скорость удлинения полярного радиуса r в момент, когда $r = 25$ *см*.

666. Неоднородный стержень AB имеет длину 12 *см*. Масса его части AM растет пропорционально квадрату расстояния текущей точки M от конца A и равна 10 *г* при $AM=2$ *см*. Найти массу всего стержня AB и линейную плотность в любой его точке M. Чему равна линейная плотность стержня в точках A и B?

§ 5. Производные высших порядков

1°. Определение высших производных. *Производной второго порядка* или *второй производной* функции $y=f(x)$ называется производная от ее производной, т. е.

$$(y')'.$$

Обозначается вторая производная так:

$$y'', \text{ или } \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ или } f''(x).$$

Если $x=f(t)$ — закон прямолинейного движения точки, то $\frac{d^2x}{dt^2}$ есть ускорение этого движения.

Вообще, *производной n-го порядка* от функции $y=f(x)$ называют производную от производной порядка $(n-1)$. Для n-й производной употребляются обозначения

$$y^{(n)}, \text{ или } \frac{d^ny}{dx^n}, \text{ или } f^{(n)}(x).$$

Пример 1. Найти производную 2-го порядка от функции

$$y=\ln(1-x).$$

Решение. $y'=\frac{-1}{1-x}$; $y''=\left(\frac{-1}{1-x}\right)'=-\frac{1}{(1-x)^2}$.

2°. Формула Лейбница. Если функции $u=\varphi(x)$ и $v=\psi(x)$ имеют производные до n-го порядка включительно, то для вычисления n-й производной произведения этих функций можно пользоваться *формулой Лейбница*

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\ldots+uv^{(n)}.$$

3°. Производные высших порядков функций, заданных параметрически. Если

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

то производные $y'_x=\frac{dy}{dx}$, $y''_{xx}=\frac{d^2y}{dx^2}$, ... последовательно могут быть вычислены по формулам:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx}=(y'_x)'_x=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad y'''_{xxx}=\frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} \text{ и т. д.}$$

Для производной 2-го порядка имеет место формула

$$y''_{xx}=\frac{x'_t y''_{tt}-x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Пример 2. Найти y'', если

$$\begin{cases} x=a\cos t,\\ y=b\sin t.\end{cases}$$

Решение. Имеем

$$y'=\frac{(b\sin t)'_t}{(a\cos t)'_t}=\frac{b\cdot\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$$

и

$$y''=\frac{\left(-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t\right)'_t}{(a\cos t)'_t}=\frac{-\frac{b}{a}\cdot\frac{-1}{\sin^2 t}}{-a\sin t}=-\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

А. Производные высших порядков явных функций

Найти производные 2-го порядка от следующих функций:

667. $y=x^8+7x^6-5x+4$. **668.** $y=e^{x^2}$.

669. $y=\sin^2 x$. **670.** $y=\ln\sqrt[3]{1+x^2}$.

671. $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$. **672.** $f(x)=(1+x^2)\operatorname{arctg} x$.

673. $y=(\arcsin x)^2$. **674.** $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

675. Показать, что функция $y=\frac{x^2+2x+2}{2}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $1+y'^2=2yy''$.

676. Показать, что функция $y=\frac{1}{2}x^2e^x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''-2y'+y=e^x$.

677. Показать, что функция $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$ при любых постоянных C_1 и C_2 удовлетворяет уравнению $y''+3y'+2y=0$.

678. Показать, что функция $y=e^{2x}\sin 5x$ удовлетворяет уравнению $y''-4y'+29y=0$.

679. Найти y''', если $y=x^3-5x^2+7x-2$.

680. Найти $f'''(3)$, если $f(x)=(2x-3)^5$.

681 Найти y^{V} от функции $y=\ln(1+x)$.

682. Найти y^{VI} от функции $y=\sin 2x$.

683. Показать, что функция $y=e^{-x}\cos x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y^{VI}+4y=0$.

684. Найти $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ и $f'''(0)$, если

$$f(x)=e^x\sin x.$$

685. Уравнение движения точки по оси OX есть

$$x=100+5t-0{,}001t^3.$$

Найти скорость и ускорение точки для моментов времени $t_0=0$, $t_1=1$; $t_2=10$.

686. По окружности $x^2+y^2=a^2$ движется точка M с постоянной угловой скоростью ω. Найти закон движения ее проекции M_1 на ось OX, если в момент $t=0$ точка занимает положение $M_0(a, 0)$ (рис. 18). Найти скорость и ускорение движения точки M_1.

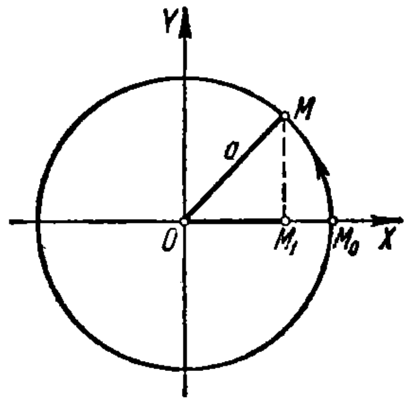

Рис. 18.

Чему равны скорость и ускорение точки M_1 в начальный момент и в момент прохождения начала координат?

Каковы максимальные значения абсолютной величины скорости и абсолютной величины ускорения точки M_1?

687. Найти производную n-го порядка от функции $y=(ax+b)^n$ (n — натуральное число).

688. Найти производные n-го порядка от функций:

а) $y=\dfrac{1}{1-x}$; б) $y=\sqrt{x}$.

689. Найти n-ю производную от функций:

а) $y=\sin x$; д) $y=\dfrac{1}{1+x}$;

б) $y=\cos 2x$; е) $y=\dfrac{1+x}{1-x}$;

в) $y=e^{-3x}$; ж) $y=\sin^2 x$;

г) $y=\ln(1+x)$; з) $y=\ln(ax+b)$.

690. Применяя формулу Лейбница, найти $y^{(n)}$, если:

а) $y=xe^x$; г) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$;

б) $y=x^2e^{-2x}$; д) $y=x^3\ln x$.

в) $y=(1-x^2)\cos x$;

691. Найти $f^{(n)}(0)$, если $f(x)=\ln\dfrac{1}{1-x}$.

Б. Производные высших порядков функций, заданных параметрически, и неявных функций

Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ от следующих функций:

692. а) $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=t^3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t, \\ y=\ln(1+t^2); \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

693. а) $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t); \end{cases}$ г) $\begin{cases} x=a(\sin t-t\cos t), \\ y=a(\cos t+t\sin t). \end{cases}$

694. а) $\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=\sin^2 t; \end{cases}$ **695.** а) $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t, \\ y=\frac{1}{2}t^2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x=e^{-at}, \\ y=e^{at}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=\frac{1}{1-t}. \end{cases}$

696. Найти $\frac{d^2x}{dy^2}$, если $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t. \end{cases}$

697. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ при $t=0$, если $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t^2. \end{cases}$

698. Показать, что y, как функция от x, определяемая уравнениями $x=\sin t$, $y=ae^{t\sqrt{2}}+be^{-t\sqrt{2}}$, при любых постоянных a и b удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=2y.$$

Найти $y'''=\frac{d^3y}{dx^3}$ от следующих функций:

699. $\begin{cases} x=\sec t, \\ y=\operatorname{tg} t. \end{cases}$ **700.** $\begin{cases} x=e^{-t}\cos t. \\ y=e^{-t}\sin t. \end{cases}$

701. $\begin{cases} x=e^{-t}, \\ y=t^3. \end{cases}$ **702.** Найти $\frac{d^ny}{dx^n}$, если $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=t^m. \end{cases}$

703. Зная функцию $y=f(x)$, найти производные x'', x''' обратной функции $x=f^{-1}(y)$.

704. Найти y'', если $x^2+y^2=1$.

Решение. На основании правила дифференцирования сложной функции имеем $2x+2yy'=0$; отсюда $y'=-\frac{x}{y}$ и $y''=-\left(\frac{x}{y}\right)'_x=-\frac{y-xy'}{y^2}$. Подставляя вместо y' его значение, окончательно получим:

$$y''=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}.$$

Определить производные y'' от следующих функций $y=f(x)$, заданных неявно:

705. $y^2=2px$.

706. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

707. $y=x+\operatorname{arctg} y$.

708. Имея уравнение $y=x+\ln y$, найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ и $\frac{d^2x}{dy^2}$.

709. Найти y'' в точке (1; 1), если

$$x^2+5xy+y^2-2x+y-6=0.$$

710. Найти y'' в точке (0; 1), если

$$x^4-xy+y^4=1.$$

711. а) Функция y задана неявно уравнением

$$x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0.$$

Найти $\frac{d^3y}{dx^3}$ в точке (1; 1).

б) Найти $\frac{d^3y}{dx^3}$, если $x^2+y^2=a^2$.

§ 6. Дифференциалы первого и высших порядков

1°. Дифференциал первого порядка. *Дифференциалом (первого порядка) функции* $y=f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения $\Delta x=dx$ независимой переменной x. Дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал независимой переменной

$$dy=y'\,dx.$$

Отсюда

$$y'=\frac{dy}{dx}.$$

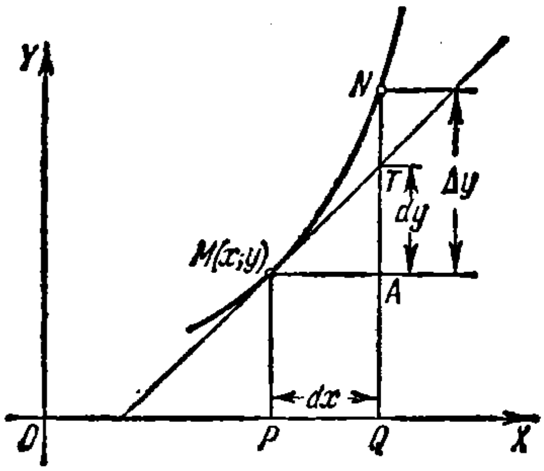

Рис. 19.

Если MN — дуга графика функции $y=f(x)$ (рис. 19), MT — касательная в точке $M(x, y)$ и

$$PQ=\Delta x=dx,$$

то приращение ординаты касательной

$$AT=dy$$

и отрезок $AN=\Delta y$.

Пример 1. Найти приращение и дифференциал функции $y=3x^2-x$.

Решение. 1-й способ:

$$\Delta y=3(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)-3x^2+x$$

или

$$\Delta y=(6x-1)\Delta x+3(\Delta x)^2.$$

Следовательно,

$$dy=(6x-1)\Delta x=(6x-1)\,dx.$$

2-й способ:

$$y'=6x-1; \qquad dy=y'\,dx=(6x-1)\,dx.$$

Пример 2. Вычислить Δy и dy функции $y=3x^2-x$ при $x=1$ и $\Delta x=0{,}01$.

Решение.

$$\Delta y=(6x-1)\cdot\Delta x+3\,(\Delta x)^2=5\cdot 0{,}01+3\cdot(0{,}01)^2=0{,}0503$$

и

$$dy=(6x-1)\,\Delta x=5\cdot 0{,}01=0{,}0500.$$

2°. Основные свойства дифференциалов:

1) $dc=0$, где $c=\text{const}$.
2) $dx=\Delta x$, где x — независимая переменная.
3) $d\,(cu)=c\,du$.
4) $d\,(u\pm v)=du\pm dv$.
5) $d\,(uv)=u\,dv+v\,du$.
6) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\,du-u\,dv}{v^2}\quad(v\neq 0)$.
7) $df\,(u)=f'\,(u)\,du$.

3°. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Если приращение Δx аргумента x мало по абсолютной величине, то дифференциал dy функции $y=f\,(x)$ и приращение Δy функции приближенно равны между собой

$$\Delta y\approx dy,$$

т. е.

$$f\,(x+\Delta x)-f\,(x)\approx f'\,(x)\,\Delta x,$$

откуда

$$f\,(x+\Delta x)\approx f\,(x)+f'\,(x)\,\Delta x. \qquad (1)$$

Пример 3. Насколько приблизительно изменится сторона квадрата, если площадь его увеличилась от 9 $м^2$ до 9,1 $м^2$?

Решение. Если x — площадь квадрата и y — сторона его, то

$$y=\sqrt{x}.$$

По условию задачи: $x=9$; $\Delta x=0{,}1$.

Приращение Δy стороны квадрата вычисляем приближенно:

$$\Delta y\approx dy=y'\Delta x=\frac{1}{2\sqrt{9}}\cdot 0{,}1=0{,}016\ м.$$

4°. Дифференциалы высших порядков. *Дифференциалом второго порядка* называется дифференциал от дифференциала первого порядка:

$$d^2y=d\,(dy).$$

Аналогично определяются *дифференциалы третьего* и т. д. порядков.

Если $y=f\,(x)$ и x — независимая переменная, то

$$\begin{aligned} d^2y&=y''\,(dx)^2\\ d^3y&=y'''\,(dx)^3,\\ &\dots\dots\dots\\ &\dots\dots\dots\\ d^ny&=y^{(n)}\,(dx)^n. \end{aligned}$$

Если же $y=f\,(u)$, где $u=\varphi\,(x)$, то

$$d^2y=y''\,(du)^2+y'\,d^2u,\qquad d^3y=y'''\,(du)^3+3y''\,du\cdot d^2u+y'\,d^3u$$

и т. д. (Здесь штрихами обозначено дифференцирование по u.)

712. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y=5x+x^2$ при $x=2$ и $\Delta x=0{,}001$.

713. Не вычисляя производной, найти

$$d(1-x^3)$$

при $x=1$ и $\Delta x=-\frac{1}{3}$.

714. Площадь квадрата S со стороной, равной x, выражается по формуле $S=x^2$. Найти приращение и дифференциал этой функции и выяснить геометрическое значение последнего.

715. Дать геометрическую интерпретацию приращения и дифференциала следующих функций:

а) площадь круга $S=\pi x^2$; б) объем куба $v=x^3$.

716. Показать, что при $\Delta x \to 0$ приращение функции $y=2^x$, соответствующее приращению x на величину Δx, при всяком x эквивалентно выражению $2^x \Delta x \ln 2$.

717. При каком значении x дифференциал функции $y=x^2$ не эквивалентен приращению этой функции при $\Delta x \to 0$?

718. Имеет ли функция $y=|x|$ дифференциал при $x=0$?

719. Пользуясь производной, найти дифференциал функции $y=\cos x$ при $x=\frac{\pi}{6}$ и $\Delta x=\frac{\pi}{36}$.

720. Найти дифференциал функции

$$y=\frac{2}{\sqrt{x}}$$

при $x=9$ и $\Delta x=-0{,}01$.

721. Вычислить дифференциал функции

$$y=\operatorname{tg} x$$

при $x=\frac{\pi}{3}$ и $\Delta x=\frac{\pi}{180}$.

Найти дифференциалы следующих функций для произвольных значений аргумента и его приращения:

722. $y=\frac{1}{x^m}$.

723. $y=\frac{x}{1-x}$.

724. $y=\arcsin\frac{x}{a}$.

725. $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

726. $y=e^{-x^2}$.

727. $y=x\ln x-x$.

728. $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

729. $r=\operatorname{ctg}\varphi+\operatorname{cosec}\varphi$.

730. $s=\operatorname{arcctg} e^t$.

731. Найти dy, если $x^2+2xy-y^2=a^2$.

Решение. Пользуясь инвариантностью формы дифференциала, получим: $2x\,dx+2(y\,dx+x\,dy)-2y\,dy=0$. Отсюда

$$dy=-\frac{x+y}{x-y}dx.$$

746. Показать, что относительная погрешность в 1% при определении длины радиуса влечет за собой относительную погрешность приблизительно в 2% при вычислении площади круга и поверхности шара.

747. Вычислить d^2y, если $y=\cos 5x$.

Решение. $d^2y=y''(dx)^2=-25\cos 5x\,(dx)^2$.

748. $u=\sqrt{1-x^2}$, найти d^2u.

749. $y=\arccos x$, найти d^2y.

750. $y=\sin x \ln x$, найти d^2y.

751. $z=\frac{\ln x}{x}$, найти d^2z.

752. $z=x^2e^{-x}$, найти d^3z.

753. $z=\frac{x^4}{2-x}$, найти d^4z.

754. $u=3\sin(2x+5)$, найти d^nu.

755. $y=e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$, найти d^ny.

§ 7. Теоремы о среднем

1°. Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$, имеет производную $f'(x)$ в каждой внутренней точке этого отрезка и

$$f(a)=f(b),$$

то для аргумента x существует по меньшей мере одно значение ξ, где $a<\xi<b$, такое, что

$$f'(\xi)=0.$$

2°. Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ и имеет производную в каждой внутренней точке этого отрезка, то

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi),$$

где $a<\xi<b$.

3°. Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $F(x)$ непрерывны на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ и при $a<x<b$ имеют производные, не обращающиеся в нуль одновременно, причем $F(b)\neq F(a)$, то

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}, \text{ где } a<\xi<b.$$

756. Показать, что функция $f(x)=x-x^3$ на отрезках $-1\leqslant x\leqslant 0$ и $0\leqslant x\leqslant 1$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Найти соответствующие значения ξ.

Решение. Функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема для всех значений x; кроме того, $f(-1)=f(0)=f(1)=0$. Следовательно, теорема Ролля применима на отрезках $-1\leqslant x\leqslant 0$ и $0\leqslant x\leqslant 1$. Для нахождения числа ξ составляем уравнение: $f'(x)=1-3x^2=0$. Отсюда $\xi_1=-\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\xi_2=\sqrt{\frac{1}{3}}$, причем $-1<\xi_1<0$; $0<\xi_2<1$.

757. Функция $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ на концах отрезка $[0, 4]$ принимает равные значения $f(0)=f(4)=\sqrt[3]{4}$. Справедлива ли для этой функции теорема Ролля на отрезке $[0, 4]$?

758. Выполнены ли условия теоремы Ролля для функции

$$f(x)=\operatorname{tg} x$$

на отрезке $[0, \pi]$?

759. Пусть

$$f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3).$$

Показать, что уравнение

$$f'(x)=0$$

имеет три действительных корня.

760. Уравнение

$$e^x=1+x,$$

очевидно, имеет корень $x=0$. Показать, что это уравнение не может иметь другого действительного корня.

761. Проверить выполнение условий теоремы Лагранжа для функции

$$f(x)=x-x^3$$

на отрезке $[-2, 1]$ и найти соответствующее промежуточное значение ξ.

Решение. Функция $f(x)=x-x^3$ непрерывна и дифференцируема для всех значений x, причем $f'(x)=1-3x^2$. Отсюда по формуле Лагранжа имеем $f(1)-f(-2)=0-6=[1-(-2)]\,f'(\xi)$, т. е. $f'(\xi)=-2$. Следовательно, $1-3\xi^2=-2$ и $\xi=\pm 1$; годится только значение $\xi=-1$, для которого справедливо неравенство $-2<\xi<1$.

762. Проверить выполнение условий теоремы Лагранжа и найти соответствующую промежуточную точку ξ для функции $f(x)=x^{4/3}$ на отрезке $[-1, 1]$.

763. Для отрезка параболы $y=x^2$, заключенного между точками $A(1; 1)$ и $B(3; 9)$, найти точку, касательная в которой параллельна хорде AB.

764. Пользуясь теоремой Лагранжа, доказать формулу

$$\sin(x+h)-\sin x=h\cos\xi,$$

где $x<\xi<x+h$.

765. а) Для функций $f(x)=x^2+2$ и $F(x)=x^3-1$ проверить выполнение условий теоремы Коши на отрезке $[1, 2]$ и найти ξ;

б) то же для $f(x)=\sin x$ и $F(x)=\cos x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

998. $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1-\cos t)$ (циклоида).

999. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ (астроида).

Найти дифференциал дуги, а также косинус и синус угла, образованного полярным радиусом и касательной к каждой из следующих кривых:

1000. $r=a\varphi$ (архимедова спираль).

1001. $r=\frac{a}{\varphi}$ (гиперболическая спираль).

1002. $r=a\sec^2\frac{\varphi}{2}$ (парабола).

1003. $r=a\cos^2\frac{\varphi}{2}$ (кардиоида).

1004. $r=a^\varphi$ (логарифмическая спираль).

1005. $r^2=a^2\cos 2\varphi$ (лемниската).

Вычислить кривизну данных кривых в указанных точках:

1006. $y=x^4-4x^3-18x^2$ в начале координат.

1007. $x^2+xy+y^2=3$ в точке $(1;\ 1)$.

1008. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в вершинах A $(a,\ 0)$ и B $(0,\ b)$.

1009. $x=t^2$, $y=t^3$ в точке $(1;\ 1)$.

1010. $r^2=2a^2\cos 2\varphi$ в вершинах с полярными углами $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$.

1011. В какой точке параболы $y^2=8x$ кривизна равна 0,128?

1012. Найти вершину кривой $y=e^x$.

Найти радиусы кривизны (в любой точке) данных линий:

1013. $y=x^3$ (кубическая парабола).

1014. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (эллипс).

1015. $x=\frac{y^2}{4}-\frac{\ln y}{2}$.

1016. $x=a\cos^3 t$; $y=a\sin^3 t$ (астроида).

1017. $x=a(\cos t+t\sin t)$; $y=a(\sin t-t\cos t)$ (эвольвента окружности).

1018. $r=ae^{k\varphi}$ (логарифмическая спираль).

1019. $r=a(1+\cos\varphi)$ (кардиоида).

1020. Найти наименьшее значение радиуса кривизны параболы $y^2=2px$.

1021. Доказать, что радиус кривизны цепной линии $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ равен длине отрезка нормали.

Вычислить координаты центра кривизны данных кривых в указанных точках:

1022. $xy=1$ в точке $(1;\ 1)$.

1023. $ay^2=x^3$ в точке $(a,\ a)$.

Написать уравнения окружностей кривизны данных кривых в указанных точках:

1024. $y=x^2-6x+10$ в точке (3; 1).

1025. $y=e^x$ в точке (0; 1).

Найти эволюты кривых:

1026. $y^2=2px$ (парабола).

1027. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (эллипс).

1028. Доказать, что эволютой циклоиды

$$x=a(t-\sin t);\quad y=a(1-\cos t)$$

является смещенная циклоида.

1029. Доказать, что эволютой логарифмической спирали

$$r=ae^{k\varphi}$$

является также логарифмическая спираль с тем же полюсом.

1030. Показать, что кривая *(развертка окружности)*

$$x=a(\cos t+t\sin t);\quad y=a(\sin t-t\cos t)$$

является эвольвентой окружности $x=a\cos t$; $y=a\sin t$.

ГЛАВА IV

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Непосредственное интегрирование

1°. Основные правила интегрирования.

1) Если $F'(x)=f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

где C — произвольная постоянная.

2) $\int Af(x)\,dx=A\int f(x)\,dx$, где A — постоянная величина.

3) $\int [f_1(x)\pm f_2(x)]\,dx=\int f_1(x)\,dx\pm\int f_2(x)\,dx$.

4) Если $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ и $u=\varphi(x)$, то

$$\int f(u)\,du=F(u)+C.$$

В частности,

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C \qquad (a\neq 0).$$

2°. Таблица простейших интегралов.

I. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C, \qquad n\neq -1.$

II. $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$

III. $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C=-\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}+C_1 \ (a\neq 0).$

IV. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \qquad (a\neq 0).$

$\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C \qquad (a\neq 0).$

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C \qquad (a\neq 0).$

VI. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C=-\arccos\frac{x}{a}+C_1 \qquad (a>0).$

VII. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0); \quad \int e^x dx = e^x + C.$

VIII. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

IX. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

X. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

XI. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

XII. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x| + C.$

XIII. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C.$

XIV. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$

XV. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$

XVI. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

XVII. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Пример 1. $\int (ax^2 + bx + c)\, dx = \int ax^2\, dx + \int bx\, dx + \int c\, dx =$

$$= a\int x^2\, dx + b\int x\, dx + c\int dx = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx + C.$$

Применяя основные правила 1), 2), 3) и формулы интегрирования, найти следующие интегралы:

1031. $\int 5a^2x^6\, dx.$

1032. $\int (6x^2 + 8x + 3)\, dx.$

1033. $\int x(x+a)(x+b)\, dx.$

1034. $\int (a + bx^3)^2\, dx.$

1035. $\int \sqrt{2px}\, dx.$

1036. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}.$

1037. $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}}\, dx.$

1038. $\int \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx.$

1039. $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)\, dx.$

1040. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx.$

1041. $\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}}\, dx.$

1042. $\int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}}\, dx.$

1043. $\int \frac{dx}{x^2 + 7}.$

1044. $\int \frac{dx}{x^2 - 10}.$

1045. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}.$

1046. $\int \frac{dx}{\sqrt{8 - x^2}}.$

1047. $\int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\, dx.$

1048*. а) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$; б) $\int \operatorname{th}^2 x\,dx$.

1049. а) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$; б) $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx$.

1050. $\int 3^x e^x\,dx$.

3°. Интегрирование путем подведения под знак дифференциала. Правило 4) значительно расширяет таблицу простейших интегралов. А именно, в силу этого правила таблица интегралов оказывается справедливой независимо от того, является переменная интегрирования независимой переменной или дифференцируемой функцией.

Пример 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5}\int (5x-2)^{-\frac{1}{2}}\,d(5x-2) =$

$$= \frac{1}{5}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{5}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{5}\,\frac{(5x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C,$$

где было положено $u = 5x-2$. Использовалось правило 4) и табличный интеграл I.

Пример 3. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1+(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right) + C.$

Неявно подразумевалось $u = x^2$, причем применялось правило 4) и табличный интеграл V.

Пример 4. $\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}\,d(x^3) = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$ в силу правила 4) и табличного интеграла VII.

В примерах 2, 3, 4, прежде чем использовать тот или иной табличный интеграл, мы приводили данный интеграл к виду

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du, \text{ где } u = \varphi(x).$$

Такого рода преобразование называется *подведением под знак дифференциала.*

Полезно отметить часто применяемые преобразования дифференциалов, которые, в частности, использовались в примерах 2 и 3:

а) $dx = \frac{1}{a}\,d(ax+b)$ $(a \neq 0)$; б) $x\,dx = \frac{1}{2}\,d(x^2)$ и т. п.

Применяя основные правила и формулы интегрирования, найти следующие интегралы:

1051.** $\int \frac{a\,dx}{a-x}$.

1052.** $\int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx$.

1053. $\int \frac{1-3x}{3+2x}\,dx$.

1054. $\int \frac{x\,dx}{a+bx}$.

1055. $\int \frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\,dx$.

1056. $\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx$.

1057. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}\,dx$.

1058. $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}\,dx$.

1059. $\int\left(a+\frac{b}{x-a}\right)^2 dx$.

1060*. $\int\frac{x}{(x+1)^2}\,dx$.

1061. $\int\frac{b\,dy}{\sqrt{1-y}}$.

1062. $\int\sqrt{a-bx}\,dx$.

1063**. $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

1064. $\int\frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}\,dx$.

1065. $\int\frac{dx}{3x^2+5}$.

1066. $\int\frac{dx}{7x^2-8}$.

1067. $\int\frac{dx}{(a+b)-(a-b)x^2}$ $(0<b<a)$.

1068. $\int\frac{x^2}{x^2+2}\,dx$.

1069. $\int\frac{x^3}{a^2-x^2}\,dx$.

1070. $\int\frac{x^2-5x+6}{x^2+4}\,dx$.

1071. $\int\frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$.

1072. $\int\frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$.

1073. $\int\frac{2x-5}{3x^2-2}\,dx$.

1074. $\int\frac{3-2x}{5x^2+7}\,dx$.

1075. $\int\frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}\,dx$.

1076. $\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$.

1077. $\int\frac{x\,dx}{x^2-5}$.

1078. $\int\frac{x\,dx}{2x^2+3}$.

1079. $\int\frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}\,dx$.

1080. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$.

1081. $\int\frac{x^2}{1+x^6}\,dx$.

1082. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6-1}}$.

1083. $\int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$.

1084. $\int\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{4+x^2}\,dx$.

1085. $\int\frac{x-\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}\,dx$.

1086. $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}$.

1087. $\int ae^{-mx}\,dx$.

1088. $\int 4^{2-3x}\,dx$.

1089. $\int(e^t-e^{-t})\,dt$.

1090. $\int\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx$.

1091. $\int\frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}\,dx$.

1092. $\int\frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}}\,dx$.

1093. $\int e^{-(x^2+1)}\,x\,dx$.

1094. $\int x\cdot 7^{x^2}\,dx$.

1095. $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$.

1096. $\int 5^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

1097. $\int\frac{e^x}{e^x-1}\,dx$.

1098. $\int e^x\sqrt{a-be^x}\,dx$.

1099. $\int \left(e^{\frac{x}{a}}+1\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{x}{a}}\,dx.$

1100*. $\int \frac{dx}{2^x+3}.$

1101. $\int \frac{a^x\,dx}{1+a^{2x}}.$

1102. $\int \frac{e^{-bx}}{1-e^{-2bx}}\,dx.$

1103. $\int \frac{e^t\,dt}{\sqrt{1-e^{2t}}}.$

1104. $\int \sin(a+bx)\,dx.$

1105. $\int \cos\frac{x}{\sqrt{2}}\,dx.$

1106. $\int (\cos ax+\sin ax)^2\,dx.$

1107. $\int \cos\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

1108. $\int \sin(\lg x)\,\frac{dx}{x}.$

1109*. $\int \sin^2 x\,dx.$

1110*. $\int \cos^2 x\,dx.$

1111. $\int \sec^2(ax+b)\,dx.$

1112. $\int \operatorname{ctg}^2 ax\,dx.$

1113. $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{a}}.$

1114. $\int \frac{dx}{3\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)}.$

1115. $\int \frac{dx}{\sin(ax+b)}.$

1116. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}.$

1117. $\int x\sin(1-x^2)\,dx.$

1118. $\int \left(\frac{1}{\sin x\sqrt{2}}-1\right)^2 dx.$

1119. $\int \operatorname{tg} x\,dx.$

1120. $\int \operatorname{ctg} x\,dx.$

1121. $\int \operatorname{ctg}\frac{x}{a-b}\,dx.$

1122. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}\frac{x}{5}}.$

1123. $\int \operatorname{tg}\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

1124. $\int x\operatorname{ctg}(x^2+1)\,dx.$

1125. $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}.$

1126. $\int \cos\frac{x}{a}\sin\frac{x}{a}\,dx.$

1127. $\int \sin^3 6x\cos 6x\,dx.$

1128. $\int \frac{\cos ax}{\sin^5 ax}\,dx.$

1129. $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}\,dx.$

1130. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}}\,dx.$

1131. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\sin 2x\,dx.$

1132. $\int \operatorname{tg}^3\frac{x}{3}\sec^2\frac{x}{3}\,dx.$

1133. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx.$

1134. $\int \frac{\operatorname{ctg}^{\frac{2}{3}} x}{\sin^2 x}\,dx.$

1135. $\int \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}\,dx.$

1136. $\int \frac{(\cos ax+\sin ax)^2}{\sin ax}\,dx.$

1137. $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 3x}{b-a\operatorname{ctg} 3x}\,dx.$

1138. $\int (2\operatorname{sh} 5x-3\operatorname{ch} 5x)\,dx.$

1177. $\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax}$.

1178. $\int \sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right) dt$.

1179. $\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}$.

1180. $\int \frac{\arccos \frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

1181. $\int e^{-\operatorname{tg} x} \sec^2 x\, dx$.

1182. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}} dx$.

1183. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

1184. $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

1185. $\int \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{\sqrt{\sec^2 x+1}} dx$.

1186. $\int \frac{\cos 2x}{4+\cos^2 2x} dx$.

1187*. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

1188. $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{1+x^2}}\, dx$.

1189. $\int x^2 \operatorname{ch}(x^3+3)\, dx$.

1190. $\int \frac{3^{\operatorname{th} x}}{\operatorname{ch}^2 x} dx$.

§ 2. Метод подстановки

1°. Замена переменной в неопределенном интеграле. Полагая

$$x=\varphi(t),$$

где t — новая переменная и φ — непрерывно дифференцируемая функция, будем иметь:

$$\int f(x)\, dx = \int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt. \tag{1}$$

Функцию φ стараются выбирать таким образом, чтобы правая часть формулы (1) приобрела более удобный для интегрирования вид.

Пример 1. Найти

$$\int x\sqrt{x-1}\, dx.$$

Решение. Естественно положить $t=\sqrt{x-1}$, отсюда $x=t^2+1$, и $dx=2t\, dt$. Следовательно,

$$\int x\sqrt{x-1}\, dx = \int (t^2+1)\, t\cdot 2t\, dt = 2\int (t^4+t^2)\, dt =$$

$$=\frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+C=\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Иногда применяются подстановки вида

$$u=\varphi(x).$$

Допустим, что нам удалось подынтегральное выражение $f(x)\, dx$ преобразовать к такому виду:

$$f(x)\, dx = g(u)\, du, \text{ где } u=\varphi(x).$$

Если $\int g(u)\,du$ известен, т. е.

$$\int g(u)\,du = F(u) + C,$$

то

$$\int f(x)\,dx = F[\varphi(x)] + C.$$

Этим способом мы уже, собственно говоря, пользовались в § 1, 3°.

Примеры 2, 3, 4 (§ 1) можно было решить следующим образом:

Пример 2. $u = 5x - 2$; $du = 5\,dx$; $dx = \frac{1}{5}\,du$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{5}\,\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C.$$

Пример 3. $u = x^2$; $du = 2x\,dx$; $x\,dx = \frac{du}{2}$.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{2}\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + \sqrt{1+x^4}\right) + C.$$

Пример 4. $u = x^3$; $du = 3x^2\,dx$; $x^2\,dx = \frac{du}{3}$.

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

2°. Тригонометрические подстановки. Пусть $a > 0$, тогда:

1) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{a^2 - x^2}$, то обычно полагают $x = a\sin t$; отсюда

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t.$$

2) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2 - a^2}$, то полагают $x = a\sec t$; отсюда

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\,\mathrm{tg}\,t.$$

3) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2 + a^2}$, то полагают $x = a\,\mathrm{tg}\,t$; отсюда

$$\sqrt{x^2 + a^2} = a\sec t.$$

Заметим, что тригонометрические подстановки не всегда оказываются выгодными.

Иногда вместо тригонометрических подстановок удобнее пользоваться *гиперболическими подстановками*, которые имеют аналогичный характер (см. пример 1209).

О тригонометрических и гиперболических подстановках более подробно см. в § 9.

Пример 5. Найти

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx.$$

Решение. Полагаем $x=\operatorname{tg} t$. Следовательно, $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$.

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx=\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}}{\operatorname{tg}^2 t}\,\frac{dt}{\cos^2 t}=\int \frac{\sec t\cos^2 t}{\sin^2 t}\,\frac{dt}{\cos^2 t}=$$

$$=\int \frac{dt}{\sin^2 t\cos t}=\int \frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^2 t\cdot\cos t}\,dt=\int \frac{dt}{\cos t}+\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt=$$

$$=\ln|\operatorname{tg} t+\sec t|-\frac{1}{\sin t}+C=\ln|\operatorname{tg} t+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}|-$$

$$-\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}{\operatorname{tg} t}+C=\ln|x+\sqrt{x^2+1}|-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C.$$

1191. Применяя указанные подстановки, найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$, $x=\frac{1}{t}$;

б) $\int \frac{dx}{e^x+1}$, $x=-\ln t$;

в) $\int x(5x^2-3)^7\,dx$, $5x^2-3=t$;

г) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$, $t=\sqrt{x+1}$;

д) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$, $t=\sin x$.

Применяя подходящие подстановки, найти интегралы:

1192. $\int x(2x+5)^{10}\,dx$.

1193. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

1194. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$.

1195. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

1196. $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x}\,\frac{dx}{x}$.

1197. $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1198. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$.

1199. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$.

1200*. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Применяя тригонометрические подстановки, найти интегралы:

1201. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1202. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{2-x^2}}$.

1203. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$.

1204*. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

1205. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$.

1206*. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

1207. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$

1208. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

с помощью подстановки $x=\sin^2 t$.

1209. Найти

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx,$$

применяя гиперболическую подстановку $x=a\operatorname{sh} t$.

Решение. Имеем: $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\operatorname{sh}^2 t}=a\operatorname{ch} t$ и $dx=a\operatorname{ch} t\,dt$. Отсюда

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx=\int a\operatorname{ch} t\cdot a\operatorname{ch} t\,dt = a^2\int \operatorname{ch}^2 t\,dt=a^2\int \frac{\operatorname{ch} 2t+1}{2}dt=$$
$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t+t\right)+C=\frac{a^2}{2}(\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t+t)+C.$$

Так как

$$\operatorname{sh} t=\frac{x}{a},\quad \operatorname{ch} t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$$

и

$$e^t=\operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t=\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a},$$

то окончательно получаем:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C_1,$$

где $C_1=C-\frac{a^2}{2}\ln a$ — новая произвольная постоянная.

1210. Найти

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

полагая $x=a\operatorname{ch} t$.

§ 3. Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям. Если $u=\varphi(x)$ и $v=\psi(x)$ — дифференцируемые функции, то

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Пример 1. Найти

$$\int x\ln x\,dx.$$

Пример 1.

$$\int\frac{dx}{2x^2-5x+7}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2-2\cdot\frac{5}{4}x+\frac{25}{16}\right)+\left(\frac{7}{2}-\frac{25}{16}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{5}{4}\right)}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{\sqrt{31}}{4}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{31}}{4}}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4x-5}{\sqrt{31}}+C.$$

Если $m\neq 0$, то из числителя выделяется производная $2ax+b$ квадратного трехчлена

$$\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx=\int\frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\,dx=$$

$$=\frac{m}{2a}\ln|ax^2+bx+c|+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

и таким образом, мы приходим к интегралу, разобранному выше.

Пример 2.

$$\int\frac{x-1}{x^2-x-1}\,dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}}{x^2-x-1}\,dx=\frac{1}{2}\ln|x^2-x-1|-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=\frac{1}{2}\ln|x^2-x-1|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C.$$

2°. Интегралы вида $\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$. Методы вычислений аналогичны разобранным выше. В конечном итоге интеграл приводится к табличному интегралу V, если $a>0$, и VI, если $a<0$.

Пример 3.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C.$$

Пример 4.

$$\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx+2\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=$$

$$=\sqrt{x^2+2x+2}+2\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C.$$

2°. Метод Остроградского. Если $Q(x)$ имеет кратные корни, то

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{X(x)}{Q_1(x)}+\int \frac{Y(x)}{Q_2(x)}dx, \tag{6}$$

где $Q_1(x)$ — наибольший общий делитель многочлена $Q(x)$ и его производной $Q'(x)$,

$$Q_2(x)=Q(x):Q_1(x),$$

$X(x)$ и $Y(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами, степени которых соответственно на единицу меньше степеней $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$.

Неопределенные коэффициенты многочленов $X(x)$ и $Y(x)$ вычисляются при помощи дифференцирования тождества (6).

Пример 4. Найти

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}.$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1}+\int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}dx.$$

Дифференцируя это тождество, получим:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2}=\frac{(2Ax+B)(x^3-1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)}{(x^3-1)^2}+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}$$

или

$$1=(2Ax+B)(x^3-1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)+(Dx^2+Ex+F)(x^3-1).$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x, будем иметь:

$$D=0;\ E-A=0;\ F-2B=0;\ D+3C=0;\ E+2A=0;\ B+F=-1;$$

отсюда

$$A=0;\ B=-\frac{1}{3};\ C=0;\ D=0;\ E=0;\ F=-\frac{2}{3}$$

и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}=-\frac{1}{3}\frac{x}{x^3-1}-\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3-1}. \tag{7}$$

Для вычисления интеграла в правой части равенства (7) разлагаем дробь $\frac{1}{x^3-1}$ на элементарные дроби:

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{L}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1},$$

т. е.

$$1=L(x^2+x+1)+Mx(x-1)+N(x-1). \tag{8}$$

Полагая $x=1$, получим $L=\frac{1}{3}$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях равенства (8), находим:

$$L+M=0;\qquad L-N=1,$$

т. е.

$$M=-\frac{1}{3};\quad N=-\frac{2}{3}.$$

Поэтому

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx=$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

и

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=-\frac{x}{3(x^3-1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Найти интегралы:

1280. $\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

1281. $\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$.

1282. $\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$.

1283. $\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$.

1284. $\int\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$.

1285. $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$.

1286. $\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$.

1287. $\int\frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx$.

1288. $\int\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$.

1289. $\int\frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}dx$.

1290. $\int\frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}dx$.

1291. $\int\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx$.

1292. $\int\frac{x^4}{x^4-1}dx$.

1293. $\int\frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$.

1294. $\int\frac{dx}{x^3+1}$.

1295. $\int\frac{dx}{x^4+1}$.

1296. $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

1297. $\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

1298. $\int\frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx$.

1299. $\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$.

1300. $\int\frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx$.

Применяя метод Остроградского, найти следующие интегралы:

1301. $\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$.

1302. $\int\frac{dx}{(x^4-1)^2}$.

1303. $\int\frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

1304. $\int\frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}dx$.

Применяя различные приемы, найти интегралы:

1305. $\int\frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)}dx$.

1306. $\int\frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1}dx$.

1307. $\int\frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}dx$.

1308. $\int\frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$.

1309. $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}$.

1310*. $\int \frac{dx}{x(x^7+1)}$.

1311. $\int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}$.

1312. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}$.

1313. $\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^{10}}$.

1314. $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$.

§ 6. Интегрирование некоторых иррациональных функций

1°. Интегралы вида

$$\int R\left[x,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}},\ \ldots\right]dx, \qquad (1)$$

где R—рациональная функция и p_1, q_1, p_2, q_2, ...—целые числа.

Интегралы вида (1) находятся с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d}=z^n,$$

где n—наименьшее общее кратное чисел q_1, q_2, ...

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$.

Решение. Подстановка $2x-1=z^4$ приводит интеграл к виду

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}=\int \frac{2z^3\,dz}{z^2-z}=2\int \frac{z^2\,dz}{z-1}=2\int\left(z+1+\frac{1}{z-1}\right)dz=$$

$$=(z+1)^2+2\ln|z-1|+C=\left(1+\sqrt[4]{2x-1}\right)^2+\ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2+C.$$

Найти интегралы:

1315. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

1316. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{ax+b}}$.

1317. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

1318. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

1319. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$.

1320. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$.

1321. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx$.

1322. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

1323. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$.

1324. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$.

1325. $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx$.

2°. Интегралы вида

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \qquad (2)$$

где $P_n(x)$—многочлен степени n.

Полагают

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (3)$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $(n-1)$ с неопределенными коэффициентами и λ — число.

Коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ находятся при помощи дифференцирования тождества (3).

Пример 2. $\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx = \int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx =$

$$=(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+4}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Отсюда

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}=(3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+4}+\frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\,x}{\sqrt{x^2+4}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Умножая на $\sqrt{x^2+4}$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$A=\frac{1}{4};\quad B=0;\quad C=\frac{1}{2};\quad D=0;\quad \lambda=-2.$$

Следовательно,

$$\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx=\frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+C.$$

3°. Интегралы вида

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad (4)$$

приводятся к интегралам вида (2) с помощью подстановки

$$\frac{1}{x-\alpha}=t.$$

Найти интегралы:

1326. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$.

1327. $\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1328. $\int\frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

1329. $\int\frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$.

1330. $\int\frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$.

1331. $\int\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$.

4°. Интегралы от дифференциальных биномов

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx, \qquad (5)$$

где m, n и p — рациональные числа.

1) Если $m=2k+1$ — нечетное положительное число, то полагают

$$I_{m,\,n}=-\int \sin^{2k} x\cos^n x\, d(\cos x)=-\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x\, d(\cos x).$$

Аналогично поступают, если n — нечетное положительное число.

Пример 1. $\int \sin^{10} x\cos^3 x\,dx=\int \sin^{10} x\,(1-\sin^2 x)\,d(\sin x)=$

$$=\frac{\sin^{11} x}{11}-\frac{\sin^{13} x}{13}+C.$$

2) Если m и n — четные положительные числа, то подынтегральное выражение (1) преобразуют с помощью формул:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),$$
$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 2.

$$\int \cos^2 3x\sin^4 3x\,dx=\int (\cos 3x\sin 3x)^2\sin^2 3x\,dx=$$
$$=\int \frac{\sin^2 6x}{4}\,\frac{1-\cos 6x}{2}\,dx=\frac{1}{8}\int (\sin^2 6x-\sin^2 6x\cos 6x)\,dx=$$
$$=\frac{1}{8}\int\left(\frac{1-\cos 12x}{2}-\sin^2 6x\cos 6x\right)dx=$$
$$=\frac{1}{8}\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 12x}{24}-\frac{1}{18}\sin^3 6x\right)+C.$$

3) Если $m=-\mu$ и $n=-\nu$ — целые отрицательные числа одинаковой четности, то

$$I_{m,\,n}=\int\frac{dx}{\sin^{\mu} x\cos^{\nu} x}=\int \operatorname{cosec}^{\mu} x\sec^{\nu-2} x\,d(\operatorname{tg} x)=$$
$$=\int\left(1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right)^{\frac{\mu}{2}}(1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{\nu-2}{2}}\,d(\operatorname{tg} x)=\int\frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{\mu+\nu}{2}-1}}{\operatorname{tg}^{\mu} x}\,d(\operatorname{tg} x).$$

В частности, к этому случаю сводятся интегралы

$$\int\frac{dx}{\sin^{\mu} x}=\frac{1}{2^{\mu-1}}\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^{\mu}\frac{x}{2}\cos^{\mu}\frac{x}{2}}\quad\text{и}\quad\int\frac{dx}{\cos^{\nu} x}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^{\nu}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Пример 3.

$$\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\int \sec^2 x\,d(\operatorname{tg} x)=\int (1+\operatorname{tg}^2 x)\,d(\operatorname{tg} x)=\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C.$$

Пример 4.

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2^3}\int \frac{dx}{\sin^3\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}} = \frac{1}{8}\int \operatorname{tg}^{-3}\frac{x}{2}\sec^6\frac{x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)^2}{\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}}\sec^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{2}{8}\int\left[\operatorname{tg}^{-3}\frac{x}{2} + \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2}\right] + C.$$

4) Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x\,dx$ $\left(\text{или } \int \operatorname{ctg}^m x\,dx\right)$, где m — целое положительное число, вычисляются с помощью формулы

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$$

(или соответственно $\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$).

Пример 5.

$$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x(\sec^2 x - 1)\,dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int \operatorname{tg}^2 x\,dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

5) В общем случае интегралы $I_{m,n}$ вида (1) вычисляются с помощью *формул приведения* (*рекуррентных формул*), выводимых обычно интегрированием по частям.

Пример 6.

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \sin x\cdot\frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx + \int \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \sin x\cdot\frac{1}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C.$$

Найти интегралы:

1338. $\int \cos^3 x\,dx.$

1339. $\int \sin^5 x\,dx.$

1340. $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx.$

1341. $\int \sin^3\frac{x}{2}\cos^5\frac{x}{2}\,dx.$

1342. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx.$

1343. $\int \sin^4 x\,dx.$

1344. $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx.$

1345. $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx.$

1346. $\int \cos^6 3x\,dx.$

1347. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$

1348. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}.$

1349. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx.$

1350. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}.$

1351. $\int \frac{dx}{\sin^5 x\cos^3 x}.$

1352. $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}$.

1353. $\int \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x\cos x}\,dx$.

1354. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$.

1355. $\int \sec^5 4x\,dx$.

1356. $\int \mathrm{tg}^2\, 5x\,dx$.

1357. $\int \mathrm{ctg}^3\, x\,dx$.

1358. $\int \mathrm{ctg}^4\, x\,dx$.

1359. $\int \left(\mathrm{tg}^3\frac{x}{3}+\mathrm{tg}^4\frac{x}{3}\right)dx$.

1360. $\int x\sin^2 x^2\,dx$.

1361. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx$.

1362. $\int \sin^5 x\sqrt[3]{\cos x}\,dx$.

1363. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}$.

1364. $\int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{tg}\, x}}$.

2°. Интегралы вида $\int \sin mx\cos nx\,dx$, $\int \sin mx\sin nx\,dx$ и $\int \cos mx\cos nx\,dx$.

В этих случаях применяются формулы:

1) $\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]$;

2) $\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x]$;

3) $\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x]$.

Пример 7.

$$\int \sin 9x\sin x\,dx=\int \frac{1}{2}[\cos 8x-\cos 10x]\,dx=\frac{1}{16}\sin 8x-\frac{1}{20}\sin 10x+C.$$

Найти интегралы:

1365. $\int \sin 3x\cos 5x\,dx$.

1366. $\int \sin 10x\sin 15x\,dx$.

1367. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx$.

1368. $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}\,dx$.

1369. $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)\,dx$.

1370. $\int \sin\omega t\sin(\omega t+\varphi)\,dt$.

1371. $\int \cos x\cos^2 3x\,dx$.

1372. $\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$.

3°. Интегралы вида

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx, \tag{2}$$

где R—рациональная функция.

1) С помощью подстановки

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,$$

откуда

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

интегралы вида (2) приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной t.

Пример 8. Найти

$$\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=I.$$

Решение. Полагая $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, будем иметь:

$$I=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{1+t}=\ln|1+t|+C=\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

2) Если имеет место тождество

$$R(-\sin x,\ -\cos x)\equiv R(\sin x,\ \cos x),$$

то для приведения интеграла (2) к рациональному виду можно применить подстановку $\operatorname{tg} x=t$.

Здесь

$$\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

и

$$x=\operatorname{arctg} t, \qquad dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 9. Найти

$$\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}=I. \tag{3}$$

Решение. Полагая

$$\operatorname{tg} x=t, \quad \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}, \quad dx=\frac{dt}{1+t^2},$$

будем иметь:

$$I=\int\frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)}=\int\frac{dt}{1+2t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(t\sqrt{2})}{1+(t\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(t\sqrt{2})+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)+C.$$

С помощью определенных интегралов найти пределы сумм:

1518.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

1519.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$.

1520. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$.

Вычислить интегралы:

1521. $\int\limits_1^2 (x^2-2x+3)\,dx$.

1522. $\int\limits_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})\,dx$.

1523. $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\,dy$.

1524. $\int\limits_2^6 \sqrt{x-2}\,dx$.

1525. $\int\limits_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$.

1526. $\int\limits_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1}$.

1527. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$.

1528. $\int\limits_{-1}^1 \frac{y^5\,dy}{y+2}$.

1529. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

1530. $\int\limits_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

1531. $\int\limits_0^1 \frac{z^3}{z^8+1}\,dz$.

1532. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\alpha\,d\alpha$.

1533. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1534. $\int\limits_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

1535. $\int\limits_0^1 \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^6+4}}$.

1536. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\alpha\,d\alpha$.

1537. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\,d\varphi$.

1538. $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

1539. $\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$.

1540. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx$.

1541. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg}^4 \varphi\, d\varphi.$

1542. $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx.$

1543. $\int\limits_0^1 \operatorname{ch} x\, dx.$

1544. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}.$

1545. $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{sh}^2 x\, dx.$

§ 3. Несобственные интегралы

1°. Интегралы от неограниченных функций. Если функция $f(x)$ не ограничена в любой окрестности точки c отрезка $[a, b]$ и непрерывна при $a \leqslant x < c$ и $c < x \leqslant b$, то по определению полагают:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\, dx + \lim_{\eta \to 0} \int\limits_{c+\eta}^{b} f(x)\, dx. \tag{1}$$

Если пределы в правой части равенства (1) существуют и конечны, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*. При $c = a$ или $c = b$ определение соответствующим образом упрощается.

Если существует непрерывная на $[a, b]$ функция $F(x)$ такая, что $F'(x) = f(x)$ при $x \neq c$ *(обобщенная первообразная)*, то

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a). \tag{2}$$

Если $|f(x)| \leqslant \Phi(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$ и $\int\limits_a^b \Phi(x)\, dx$ сходится, то интеграл (1) также сходится *(признак сравнения)*.

Если $f(x) \geqslant 0$ и $\lim\limits_{x \to c} \{f(x)\, |c-x|^m\} = A \neq \infty$, $A \neq 0$, т. е. $f(x) \sim \frac{A}{|c-x|^m}$ при $x \longrightarrow c$, то: 1) при $m < 1$ интеграл (1) сходится, 2) при $m \geqslant 1$ интеграл (1) расходится.

2°. Интегралы с бесконечными пределами. Если функция $f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x < \infty$, то полагают

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int\limits_a^b f(x)\, dx \tag{3}$$

и в зависимости от существования или несуществования конечного предела в правой части равенства (3) соответствующий интеграл называется *сходящимся* или *расходящимся*.

Аналогично

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)\, dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Если $|f(x)| \leqslant F(x)$ и интеграл $\int\limits_a^\infty F(x)\,dx$ сходится, то интеграл (3) тоже сходится.

Если $f(x) \geqslant 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \{f(x)\,x^m\} = A \neq \infty$, $A \neq 0$, т. е. $f(x) \sim \frac{A}{x^m}$ при $x \to \infty$, то: 1) при $m > 1$ интеграл (3) сходится, 2) при $m \leqslant 1$ интеграл (3) расходится.

Пример 1.

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\eta\to 0} \int\limits_{\eta}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + \lim_{\eta\to 0} \left(\frac{1}{\eta} - 1\right) = \infty$$

— интеграл расходится.

Пример 2.

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 3. Исследовать сходимость *интеграла Эйлера—Пуассона*

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx. \tag{4}$$

Решение. Положим

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int\limits_1^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Первый из двух интегралов в правой части не является несобственным, а второй сходится, так как $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ при $x \geqslant 1$ и

$$\int\limits_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} (-e^{-b} + e^{-1}) = e^{-1};$$

следовательно, интеграл (4) сходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}. \tag{5}$$

Решение. При $x \to +\infty$ имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

сходится при $p > 0$ и $q > 0$.

1575*. Доказать, что эйлеров интеграл 2-го рода (*гамма-функция*)

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\,dx$$

сходится при $p > 0$.

§ 4. Замена переменной в определенном интеграле

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и $x = \varphi(t)$ — функция, непрерывная вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, где $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, причем $f[\varphi(t)]$ определена и непрерывна на отрезке

Так как интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$$

сходится, то наш интеграл (5) также сходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость эллиптический интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}. \tag{6}$$

Решение. Точка разрыва подынтегральной функции: $x=1$. Применив формулу

$$1-x^4=(1-x)(1+x)(1+x^2),$$

получим:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}=\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}.$$

Следовательно, при $x \longrightarrow 1$ будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как интеграл

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

сходится, то данный интеграл (6) также сходится.

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

1546. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. **1547.** $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$. **1548.** $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$.

1549. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$. **1550.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **1551.** $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$.

1552. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$. **1553.** $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$. **1554.** $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.

1555. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$. **1556.** $\int_0^\infty \sin x\,dx$. **1557.** $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}$.

1558. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$. **1559.** $\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} (a > 1)$. **1560.** $\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} (a > 1)$.

1561. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x\, dx$. **1562.** $\int\limits_0^{\infty} e^{-kx}\, dx\ (k > 0)$.

1563. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx$. **1564.** $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}$.

1565. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$. **1566.** $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^3-5x^2}$.

Исследовать сходимость интегралов:

1567. $\int\limits_0^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}$. **1568.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$.

1569. $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$. **1570.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt{x^5+1}}$.

1571. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$. **1572.** $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{\ln x}$.

1573. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$.

1574*. Доказать, что эйлеров интеграл 1-го рода *(бэта-функция)*

$$\mathrm{B}(p,\ q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx$$

сходится при $p > 0$ и $q > 0$.

1575*. Доказать, что эйлеров интеграл 2-го рода *(гамма-функция)*

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx$$

сходится при $p > 0$.

§ 4. Замена переменной в определенном интеграле

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и $x = \varphi(t)$ — функция, непрерывная вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, где $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, причем $f[\varphi(t)]$ определена и непрерывна на отрезке

$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Пример 1. Найти

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad (a>0).$$

Решение. Положим

$$x = a\sin t;$$
$$dx = a\cos t\,dt.$$

Тогда $t=\arcsin\frac{x}{a}$ и, следовательно, можно принять $\alpha=\arcsin 0=0$, $\beta=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$. Поэтому будем иметь:

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\;a\cos t\,dt=$$

$$=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt=\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,dt=$$

$$=\frac{a^4}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^4}{16}.$$

1576. Можно ли интеграл

$$\int_0^2 \sqrt[3]{1-x^2}\,dx$$

вычислить с помощью подстановки $x=\cos t$?

Преобразовать определенные интегралы с помощью указанных подстановок:

1577. $\int_1^3 \sqrt{x+1}\,dx$, $x=2t-1$.

1578. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, $x=\sin t$.

1579. $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, $x=\operatorname{sh} t$.

1580. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$, $x=\operatorname{arctg} t$.

1581. Для интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad (b > a)$$

указать целую линейную подстановку

$$x = \alpha t + \beta,$$

в результате которой пределы интегрирования сделались бы соответственно равными 0 и 1.

Применяя указанные подстановки, вычислить следующие интегралы:

1582. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \qquad x = t^2.$

1583. $\displaystyle\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3}\,dx, \qquad x-2 = z^3.$

1584. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx, \qquad e^x-1 = z^2.$

1585. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{3+2\cos t}, \qquad \operatorname{tg}\frac{t}{2} = z.$

1586. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}, \qquad \operatorname{tg} x = t.$

С помощью подходящих подстановок вычислить интегралы:

1587. $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx.$

1588. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx.$

1589. $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx.$

1590. $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}.$

Вычислить интегралы:

1591. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}.$

1592. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$

1593. $\displaystyle\int_0^a \sqrt{ax-x^2}\,dx.$

1594. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}.$

1595. Доказать, что если $f(x)$ — четная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Если же $f(x)$ — нечетная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

1596. Показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

1597. Показать, что

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\arccos x} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

1598. Показать, что

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx.$$

§ 5. Интегрирование по частям

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_{a}^{b} u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v(x)\,u'(x)\,dx. \qquad (1)$$

Применяя формулу интегрирования по частям, вычислить интегралы:

1599. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx.$ **1600.** $\int_{1}^{e} \ln x\,dx.$

1601. $\int_{0}^{1} x^3 e^{2x}\,dx.$ **1602.** $\int_{0}^{\pi} e^{x}\sin x\,dx.$

1603. $\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx.$ **1604.** $\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx \quad (a > 0).$

1605. $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx \quad (a>0)$.

1606.** Показать, что для гамма-функции (см. № 1575) справедлива формула понижения:

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p) \qquad (p>0).$$

Отсюда вывести, что $\Gamma(n+1)=n!$, если n—натуральное.

1607. Показать, что для интеграла

$$I_n=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$$

справедлива *формула понижения*

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

Найти I_n, если n—натуральное. Пользуясь полученной формулой, вычислить I_9 и I_{10}.

1608. Применяя многократное интегрирование по частям, вычислить интеграл (см. № 1574)

$$\mathrm{B}(p,\ q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

где p и q—целые положительные числа.

1609*. Выразить через B (бэта-функцию) интеграл

$$I_{m,\,n}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx,$$

если m и n—целые неотрицательные числа.

§ 6. Теорема о среднем значении

1°. Оценки интегралов. Если $f(x)\leqslant F(x)$ при $a\leqslant x\leqslant b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\leqslant\int\limits_a^b F(x)\,dx. \tag{1}$$

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны при $a\leqslant x\leqslant b$ и, кроме того, $\varphi(x)\geqslant 0$, то

$$m\int\limits_a^b\varphi(x)\,dx\leqslant\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\leqslant M\int\limits_a^b\varphi(x)\,dx, \tag{2}$$

$x=0$, затем $x=a$, получим пределы интегрирования $t_1=\frac{\pi}{2}$ и $t_2=0$. Поэтому

X = a cos t
y = b sin t

$$\frac{1}{4}S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin a\,(-\sin t)\,dt=ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=\frac{\pi ab}{4}$$

и, следовательно, $S=\pi ab$.

2°. Площадь в полярных координатах. Если непрерывная кривая задана в полярных координатах уравнением $r=f(\varphi)$, то площадь

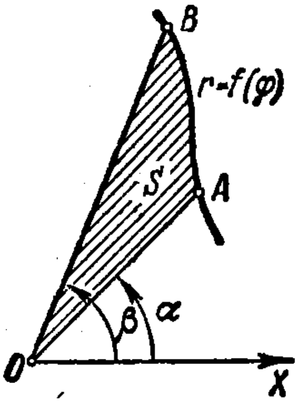

Рис. 46.

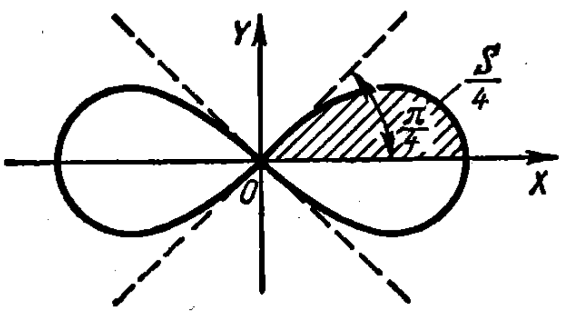

Рис. 47.

сектора AOB (рис. 46), ограниченного дугой кривой и двумя полярными радиусами OA и OB, соответствующими значениям $\varphi_1=\alpha$ и $\varphi_2=\beta$, выразится интегралом

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\varphi)]^2\,d\varphi.$$

Пример 5. Найти площадь, заключенную внутри лемнискаты Бернулли $r^2=a^2\cos 2\varphi$ (рис. 47).

Решение. В силу симметрии кривой определяем сначала одну четверть искомой площади

$$\frac{1}{4}S=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\varphi\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{4}.$$

Отсюда $S=a^2$.

1623. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y=4x-x^2$ и осью абсцисс.

1624. Вычислить площадь, ограниченную кривой $y=\ln x$, осью OX и прямой $x=e$.

1625*. Найти площадь, ограниченную кривой $y=x(x-1)(x-2)$ и осью OX.

1626. Найти площадь, ограниченную кривой $y^3=x$, прямой $y=1$ и вертикалью $x=8$.

1627. Вычислить площадь, ограниченную одной полуволной синусоиды $y=\sin x$ и осью OX.

1628. Вычислить площадь, заключенную между кривой $y=\operatorname{tg} x$, осью OX и прямой $x=\frac{\pi}{3}$.

1629. Найти площадь, заключенную между гиперболой $xy=m^2$, вертикалями $x=a$ и $x=3a$ $(a>0)$ и осью OX.

1630. Найти площадь, содержащуюся между локоном Аньези $y=\frac{a^3}{x^2+a^2}$ и осью абсцисс.

1631. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y=x^3$, прямой $y=8$ и осью OY.

1632. Найти площадь, ограниченную параболами $y^2=2px$ и $x^2=2py$.

1633. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y=2x-x^2$ и прямой $y=-x$.

1634. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y=3-2x$ от параболы $y=x^2$.

1635. Вычислить площадь, заключенную между параболами $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{2}$ и прямой $y=2x$.

1636. Вычислить площадь, заключенную между параболами $y=\frac{x^2}{3}$ и $y=4-\frac{2}{3}x^2$.

1637. Вычислить площадь, заключенную между локоном Аньези $y=\frac{1}{1+x^2}$ и параболой $y=\frac{x^2}{2}$.

1638. Вычислить площадь, ограниченную кривыми $y=e^x$, $y=e^{-x}$ и прямой $x=1$.

1639. Найти площадь фигуры, ограниченной гиперболой $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и прямой $x=2a$.

1640*. Найти площадь, ограниченную астроидой

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

1641. Найти площадь между цепной линией

$$y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a},$$

осью OY и прямой $y=\frac{a}{2e}(e^2+1)$.

1642. Найти площадь, ограниченную кривой $a^2y^2=x^2(a^2-x^2)$.

1643. Вычислить площадь, содержащуюся внутри кривой

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

1644. Найти площадь между равнобочной гиперболой $x^2-y^2=9$, осью OX и диаметром, проходящим через точку (5; 4).

1645. Найти площадь между кривой $y=\frac{1}{x^2}$, осью OX и ординатой $x=1$ $(x>1)$.

1646*. Найти площадь, ограниченную циссоидой $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ и ее асимптотой $x=2a$ $(a>0)$.

1647*. Найти площадь между строфоидой $y^2=\frac{x(x-a)^2}{2a-x}$ и ее асимптотой $(a>0)$.

1648. Вычислить площади двух частей, на которые круг $x^2+y^2\leqslant 8$ разделен параболой $y^2=2x$.

1649. Вычислить площадь, содержащуюся между окружностью $x^2+y^2=16$ и параболой $x^2=12(y-1)$.

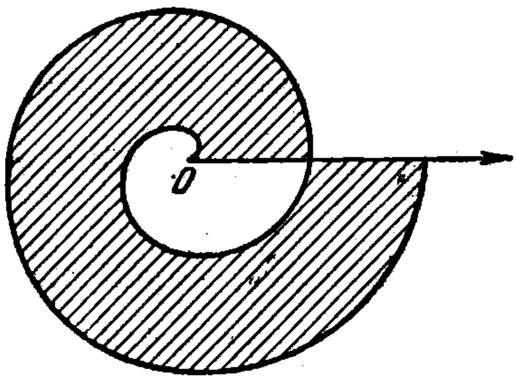

Рис. 48.

1650. Найти площадь, содержащуюся внутри астроиды

$$x=a\cos^3 t;\quad y=b\sin^3 t.$$

1651. Найти площадь, ограниченную осью OX и одной аркой циклоиды

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$$

1652. Найти площадь, ограниченную одной ветвью трохоиды

$$\begin{cases} x=at-b\sin t, \\ y=a-b\cos t \end{cases}\quad (0<b\leqslant a)$$

и касательной к ней в низших ее точках.

1653. Найти площадь, ограниченную кардиоидой

$$\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t), \\ y=a(2\sin t-\sin 2t). \end{cases}$$

1654*. Найти площадь петли декартова листа

$$x=\frac{3at}{1+t^3};\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

1655*. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r=a(1+\cos\varphi)$.

1656*. Найти площадь, содержащуюся между первым и вторым витками спирали Архимеда $r=a\varphi$ (рис. 48).

1657. Найти площадь одного лепестка кривой $r=a\cos 2\varphi$.

1658. Найти площадь, ограниченную кривой $r^2=a^2\sin 4\varphi$.

1659*. Найти площадь, ограниченную кривой $r=a\sin 3\varphi$.

1660. Найти площадь, ограниченную улиткой Паскаля

$$r = 2 + \cos\varphi.$$

1661. Найти площадь, ограниченную параболой $r = a\sec^2\frac{\varphi}{2}$ и полупрямыми $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

1662. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi} \quad (0 \leqslant \varepsilon < 1).$$

1663. Найти площадь, ограниченную кривой $r = 2a\cos 3\varphi$ и лежащую вне круга $r = a$.

1664*. Найти площадь, ограниченную кривой $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

§ 8. Длина дуги кривой

1°. Длина дуги в прямоугольных координатах. Длина s дуги гладкой кривой $y = f(x)$, содержащейся между двумя точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, равна

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Пример 1. Найти длину астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (рис. 49).

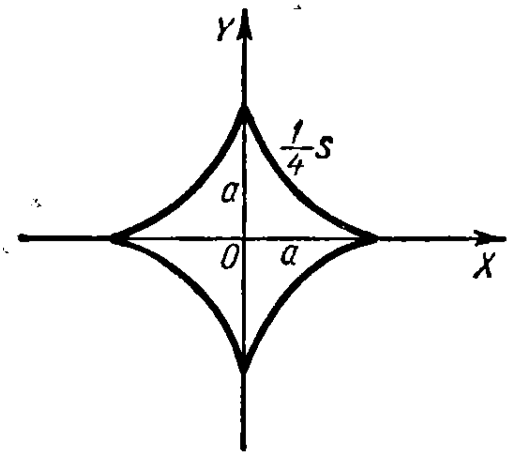

Рис. 49.

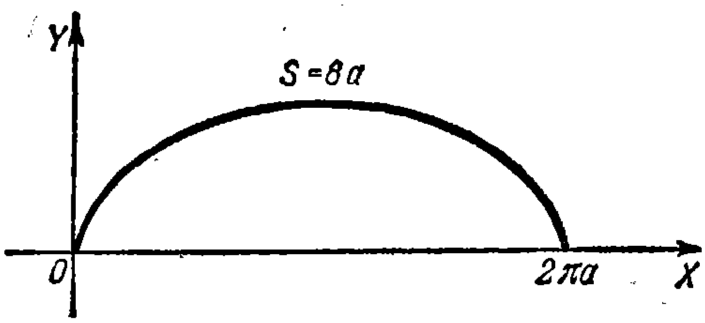

Рис. 50.

Решение. Дифференцируя уравнение астроиды, получим:

$$y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}.$$

Поэтому для длины дуги одной четверти астроиды имеем:

$$\frac{1}{4}s = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\, dx = \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\, dx = \frac{3}{2}a.$$

Отсюда $s = 6a$.

2°. Длина дуги кривой, заданной параметрически. Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$ ($\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции), то длина дуги s кривой равна

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt,$$

где t_1 и t_2 — значения параметра, соответствующие концам дуги ($t_1<t_2$).

Пример 2. Найти длину одной арки циклоиды (рис. 50)

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$$

Решение. Имеем $x'=\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$ и $y'=\frac{dy}{dt}=a\sin t$. Поэтому

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=8a.$$

Пределы интегрирования $t_1=0$ и $t_2=2\pi$ соответствуют крайним точкам арки циклоиды.

Если гладкая кривая задана уравнением $r=f(\varphi)$ в полярных координатах r и φ, то длина дуги s равна

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi,$$

где α и β — значения полярного угла в крайних точках дуги ($\alpha<\beta$).

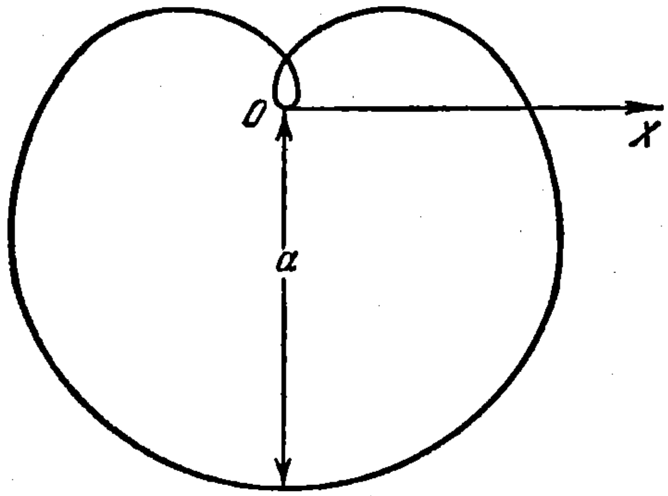

Рис. 51.

Пример 3. Найти длину всей кривой $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ (рис. 51). Вся кривая описывается точкой (r, φ) при изменении φ от 0 до 3π.

Решение. Имеем $r'=a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$, поэтому длина всей кривой

$$s=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3}+a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi=\frac{3\pi a}{2}.$$

1665. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2=x^3$ от начала координат до точки с координатами $x=4$, $y=8$.

1666*. Найти длину дуги цепной линии $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ от вершины $A(0;\ a)$ до точки $B(b;\ h)$.

1667. Вычислить длину дуги параболы $y=2\sqrt{x}$ от $x=0$ до $x=1$.

1668. Найти длину дуги кривой $y=e^x$, содержащейся между точками $(0;\ 1)$ и $(1;\ e)$.

1669. Найти длину дуги кривой $y=\ln x$ от $x=\sqrt{3}$ до $x=\sqrt{8}$.

1670. Найти длину дуги $y=\arcsin(e^{-x})$ от $x=0$ до $x=1$.

1671. Вычислить длину дуги кривой $x=\ln\sec y$, содержащейся между $y=0$ и $y=\frac{\pi}{3}$.

1672. Найти длину дуги кривой $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ от $y=1$ до $y=e$.

1673. Найти длину дуги правой ветви трактриссы

$$x=\sqrt{a^2-y^2}+a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right| \text{ от } y=a \text{ до } y=b \quad (0<b<a).$$

1674. Найти длину замкнутой части кривой $9ay^2=x(x-3a)^2$.

1675. Найти длину дуги кривой $y=\ln\left(\operatorname{cth}\frac{x}{2}\right)$ от $x=a$ до $x=b$ $(0<a<b)$.

1676*. Найти длину дуги развертки окружности

$$\left.\begin{aligned} x&=a(\cos t+t\sin t),\\ y&=a(\sin t-t\cos t)\end{aligned}\right\} \text{ от } t=0 \text{ до } t=T.$$

1677. Найти длину эволюты эллипса

$$x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t;\quad y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t \quad (c^2=a^2-b^2).$$

1678. Найти длину кривой

$$\left.\begin{aligned} x&=a(2\cos t-\cos 2t),\\ y&=a(2\sin t-\sin 2t).\end{aligned}\right\}$$

1679. Найти длину первого витка спирали Архимеда $r=a\varphi$.

1680. Найти всю длину кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi)$.

1681. Найти длину части дуги параболы $r=a\sec^2\frac{\varphi}{2}$, отсекаемой от параболы вертикальной прямой, проходящей через полюс.

1682. Найти длину дуги гиперболической спирали $r\varphi=1$ от точки $\left(2;\ \frac{1}{2}\right)$ до точки $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$.

1683. Найти длину дуги логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$ $(m > 0)$, находящейся внутри окружности $r = a$.

1684. Найти длину дуги кривой $\varphi = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ от $r = 1$ до $r = 3$.

§ 9. Объемы тел

1°. Объем тела вращения. Объемы тел, образованных вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью OX и двумя вертикалями $x = a$ и $x = b$, вокруг осей OX и OY, выражаются соответственно формулами:

$$1)\ V_X = \pi \int_a^b y^2\,dx; \qquad 2)\ V_Y = 2\pi \int_a^b xy\,dx\ ^{*)}.$$

Пример 1. Вычислить объемы тел, образуемых вращением фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и отрезком $0 \leqslant x \leqslant \pi$ оси OX вокруг: а) оси OX и б) оси OY.

Решение.

$$\text{а)}\ V_X = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{2};$$

$$\text{б)}\ V_Y = 2\pi \int_0^\pi x \sin x\,dx = 2\pi\,(-x\cos x + \sin x)_0^\pi = 2\pi^2.$$

Объем тела, образованного вращением около оси OY фигуры, ограниченной кривой $x = g(y)$, осью OY и двумя параллелями $y = c$ и $y = d$ $(c < d)$, можно определять по формуле:

$$V_Y = \pi \int_c^d x^2\,dy,$$

получающейся из приведенной выше формулы 1) путем перестановки координат x и y.

Если кривая задана в иной форме (параметрически, в полярных координатах и т. д.), то в приведенных формулах нужно сделать соответствующую замену переменной интегрирования.

В более общем случае объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ (причем $f_1(x) \leqslant f_2(x)$) и прямыми $x = a$, $x = b$, вокруг координатных осей OX и OY, соответственно равны

$$V_X = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx$$

---

*) Пусть тело образовано вращением около оси OY криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$. За элемент объема этого тела принимают объем части тела, образованного вращением около оси OY прямоугольника со сторонами y и dx, отстоящего от оси OY на расстоянии x. Тогда элемент объема $dV_Y = 2\pi xy\,dx$, откуда $V_Y = 2\pi \int_a^b xy\,dx$.

и

$$V_Y = 2\pi \int_a^b x\,(y_2 - y_1)\,dx.$$

Пример 2. Найти объем тора, образованного вращением круга $x^2 + (y-b)^2 \leqslant a^2$ $(b \geqslant a)$ вокруг оси OX (рис. 52).

Решение. Имеем:

$$y_1 = b - \sqrt{a^2 - x^2} \text{ и } y_2 = b + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Поэтому

$$V_X = \pi \int_{-a}^{a} \left[(b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2\right] dx = 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 2\pi^2 a^2 b$$

(последний интеграл берется подстановкой $x = a \sin t$).

Объем тела, полученного при вращении сектора, ограниченного дугой кривой $r = F(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, вокруг полярной оси, может быть вычислен по формуле

$$V_P = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi\, d\varphi.$$

Этой же формулой удобно пользоваться при отыскании объема тела, полученного вращением вокруг полярной оси фигуры, ограниченной некоторой замкнутой кривой, заданной в полярных координатах.

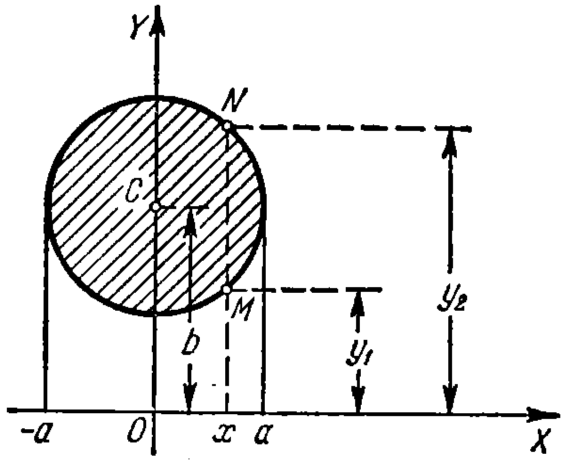

Рис. 52.

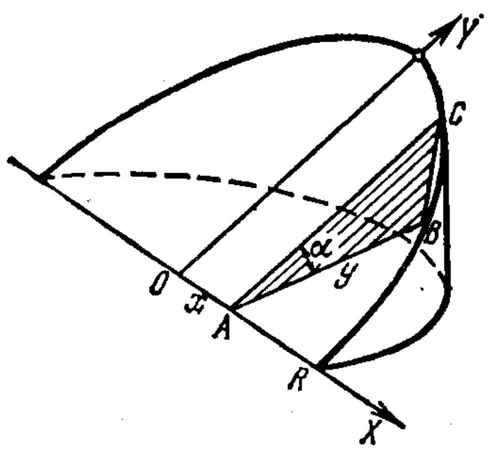

Рис. 53.

Пример 3. Определить объем тела, образованного вращением кривой $r = a \sin 2\varphi$ вокруг полярной оси.

Решение.

$$V_P = 2 \cdot \frac{2}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin\varphi\, d\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\varphi \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{32}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{64}{105}\pi a^3.$$

2°. Вычисление объемов тел по известным поперечным сечениям. Если $S=S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к некоторой прямой (которую принимаем за ось OX), в точке с абсциссой x, то объем этого тела равен

$$V=\int_{x_1}^{x_2} S(x)\,dx,$$

где x_1 и x_2 — абсциссы крайних сечений тела ($x_1 < x_2$).

Пример 4. Определить объем клина, отсеченного от круглого цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания и наклоненной к основанию под углом α. Радиус основания равен R (рис. 53).

Решение. Примем за ось OX диаметр основания, по которому секущая плоскость пересекает основание, и за ось OY диаметр основания, ему перпендикулярный. Уравнение окружности основания будет $x^2+y^2=R^2$.

Площадь сечения ABC, отстоящего на расстоянии x от начала координат O, равна

$$S(x)=\text{пл. } \triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}yy\operatorname{tg}\alpha=\frac{y^2}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Поэтому искомый объем клина есть

$$V=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^R y^2\operatorname{tg}\alpha\,dx=\operatorname{tg}\alpha\int_0^R (R^2-x^2)\,dx=\frac{2}{3}\operatorname{tg}\alpha\,R^3.$$

1685. Найти объем тела, получающегося от вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной осью OX и параболой $y=ax-x^2$ ($a>0$).

1686. Найти объем эллипсоида, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси OX.

1687. Найти объем тела, получающегося при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной цепной линией $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, осью OX и прямыми $x=\pm a$.

1688. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX кривой $y=\sin^2 x$ в промежутке от $x=0$ до $x=\pi$.

1689. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной полукубической параболой $y^2=x^3$, осью OX и прямой $x=1$, вокруг оси OX.

1690. Найти объем тела, образованного вращением той же фигуры, что в задаче 1689, вокруг оси OY.

1691. Найти объемы тел, образуемых вращением фигуры, ограниченной линиями $y=e^x$, $x=0$, $y=0$, вокруг: а) оси OX и б) оси OY.

1692. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OY той части параболы $y^2=4ax$, которая отсекается прямой $x=a$.

1693. Найти объем тела, образованного вращением вокруг прямой $x=a$ той части параболы $y^2=4ax$, которая этой прямой отсекается.

1694. Найти объем тела, образованного вращением вокруг прямой $y=-p$ фигуры, ограниченной параболой $y^2=2px$ и прямой $x=\frac{p}{2}$.

1695. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX области, содержащейся между параболами $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

1696. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX петли кривой $(x-4a)\,y^2=ax\,(x-3a)$ $(a>0)$.

1697. Найти объем тела, производимого вращением циссоиды $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ вокруг ее асимптоты $x=2a$.

1698. Найти объем параболоида вращения, радиус основания которого R, а высота H.

1699. Прямой параболический сегмент, основание которого $2a$ и высота h, вращается вокруг основания. Определить объем тела вращения, которое при этом получается («лимон» Кавальери).

1700. Показать, что объем части, отсекаемой плоскостью $x=2a$ от тела, образованного вращением равнобочной гиперболы $x^2-y^2=a^2$ вокруг оси OX, равен объему шара радиуса a.

1701. Найти объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a\,(t-\sin t)$, $y=a\,(1-\cos t)$ и осью OX, вокруг: а) оси OX, б) оси OY и в) оси симметрии фигуры.

1702. Найти объем тела, образованного вращением астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ вокруг оси OY.

1703. Найти объем тела, которое получается от вращения кардиоиды $r=a\,(1+\cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

1704. Найти объем тела, образованного вращением кривой $r=a\cos^2\varphi$ вокруг полярной оси.

1705. Найти объем обелиска, параллельные основания которого — прямоугольники со сторонами A, B и a, b, а высота равна h.

1706. Найти объем прямого эллиптического конуса, основание которого есть эллипс с полуосями a и b, а высота равна h.

1707. На хордах астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, параллельных оси OX, построены квадраты, стороны которых равны длинам хорд и плоскости которых перпендикулярны к плоскости XOY. Найти объем тела, образованного этими квадратами.

1708. Деформирующийся круг перемещается так, что одна из точек его окружности лежит на оси OY, центр описывает эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, а плоскость круга перпендикулярна к плоскости XOY. Найти объем тела, образованного кругом.

1796. Найти поверхности уровня функций трех независимых переменных:

а) $u = x + y + z$,

б) $u = x^2 + y^2 + z^2$,

в) $u = x^2 + y^2 - z^2$.

§ 2. Непрерывность

1°. Предел функции. Число A называется *пределом функции* $z = f(x, y)$ при стремлении точки $P'(x, y)$ к точке $P(a, b)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $0 < \rho < \delta$, где $\rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ — расстояние между точками P и P', имеет место неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A.$$

2°. Непрерывность и точки разрыва. Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $P(a, b)$, если

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b).$$

Функция, непрерывная во всех точках некоторой области, называется *непрерывной в этой области*.

Нарушение условий непрерывности для функции $f(x, y)$ может происходить как в отдельных точках (*изолированная точка разрыва*), так и в точках, образующих одну или несколько линий (*линии разрыва*), а иногда и более сложные геометрические образы.

Пример 1. Найти точки разрыва функции

$$z = \frac{xy + 1}{x^2 - y}.$$

Решение. Функция потеряет смысл, если знаменатель обратится в нуль. Но $x^2 - y = 0$ или $y = x^2$ — уравнение параболы. Следовательно, данная функция имеет линией разрыва параболу $y = x^2$.

1797*. Найти следующие пределы функций:

а) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{x + y}{x^2 + y^2}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \frac{\sin xy}{x}$;

г) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to k}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$;

д) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x}{x + y}$;

е) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

1798. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

1799. Найти точки разрыва следующих функций:

а) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; в) $z=\frac{1}{1-x^2-y^2}$;

б) $z=\frac{1}{(x-y)^2}$; г) $z=\cos\frac{1}{xy}$.

1800*. Показать, что функция

$$z=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=y=0\end{cases}$$

непрерывна по каждой из переменных x и y в отдельности, но не является непрерывной в точке (0, 0) по совокупности этих переменных.

§ 3. Частные производные

1°. Определение частных производных. Если $z=f(x, y)$ то, полагая, например, y постоянной, получаем производную

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}=f'_x(x, y),$$

которая называется *частной производной* функции z по переменной x. Аналогично определяется и обозначается частная производная функции z по переменной y. Очевидно, что для нахождения частных производных можно пользоваться обычными формулами дифференцирования.

Пример 1. Найти частные производные функции

$$z=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{y}.$$

Решение. Рассматривая y как постоянную величину, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\,\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}.$$

Аналогично, рассматривая x как постоянную, будем иметь:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}.$$

Пример 2. Найти частные производные функции трех аргументов

$$u=x^3y^2z+2x-3y+z+5.$$

Решение. $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y^2z+2,$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2x^3yz-3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^3y^2+1.$$

2°. Теорема Эйлера. Функция $f(x, y)$ называется *однородной* функцией измерения n, если для любого действительного множителя k имеет место равенство

$$f(kx, ky) \equiv k^n f(x, y).$$

Целая рациональная функция будет однородной, если все члены ее одного и того же измерения.

Для однородной дифференцируемой функции измерения n справедливо соотношение (*теорема Эйлера*):

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = nf(x, y).$$

Найти частные производные функций:

1801. $z = x^3 + y^3 - 3axy$.

1802. $z = \frac{x-y}{x+y}$.

1803. $z = \frac{y}{x}$.

1804. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

1805. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1806. $z = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$.

1807. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

1808. $z = x^y$.

1809. $z = e^{\sin\frac{y}{x}}$.

1810. $z = \arcsin\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

1811. $z = \ln\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}$.

1812. $u = (xy)^z$.

1813. $u = z^{xy}$.

1814. Найти $f'_x(2; 1)$ и $f'_y(2; 1)$, если $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$.

1815. Найти $f'_x(1; 2; 0)$, $f'_y(1; 2; 0)$, $f'_z(1; 2; 0)$, если

$$f(x, y, z) = \ln(xy + z).$$

Проверить теорему Эйлера об однородных функциях (№№ 1816—1819):

1816. $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$.

1817. $z = \frac{x}{x^2+y^2}$.

1818. $f(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$.

1819. $f(x, y) = \ln\frac{y}{x}$.

1820. Найти $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1821. Вычислить $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$, если $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$.

1822. Показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$, если

$$z = \ln(x^2 + xy + y^2).$$

1823. Показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$, если

$$z=xy+xe^{\frac{y}{x}}.$$

1824. Показать, что $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$, если

$$u=(x-y)(y-z)(z-x).$$

1825. Показать, что $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=1$, если

$$u=x+\frac{x-y}{y-z}.$$

1826. Найти $z=z(x, y)$, если

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

1827. Найти $z=z(x, y)$, зная, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^2+y^2}{x} \quad \text{и} \quad z(x, y)=\sin y \quad \text{при} \quad x=1.$$

1828. Через точку $M(1; 2; 6)$ поверхности $z=2x^2+y^2$ проведены плоскости, параллельные координатным плоскостям XOZ и YOZ. Определить, какие углы образуют с осями координат касательные к получившимся сечениям, проведенные в их общей точке M.

1829. Площадь трапеции с основаниями a, b и высотой h равна $S=\frac{1}{2}(a+b)h$. Найти $\frac{\partial S}{\partial a}$, $\frac{\partial S}{\partial b}$, $\frac{\partial S}{\partial h}$ и, пользуясь чертежом, выяснить их геометрический смысл.

1830*. Показать, что функция

$$f(x, y)=\begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & \text{если } x=y=0, \end{cases}$$

имеет частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в точке $(0; 0)$, хотя и разрывна в этой точке. Построить геометрический образ этой функции вблизи точки $(0; 0)$.

§ 4. Полный дифференциал функции

1°. Полное приращение функции. *Полным приращением* функции $z=f(x, y)$ называется разность

$$\Delta z=\Delta f(x, y)=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y).$$

2°. Полный дифференциал функции. *Полным дифференциалом* функции $z=f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy.

Разность между полным приращением и полным дифференциалом функции есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

Функция заведомо имеет полный дифференциал в случае непрерывности ее частных производных. Если функция имеет полный дифференциал, то она называется *дифференцируемой*. Дифференциалы независимых переменных, по определению, совпадают с их приращениями, т. е. $dx=\Delta x$ и $dy=\Delta y$. Полный дифференциал функции $z=f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Аналогично, полный дифференциал функции трех аргументов $u=f(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Пример 1. Для функции

$$f(x, y)=x^2+xy-y^2$$

найти полное приращение и полный дифференциал.

Решение.

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)=(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)(y+\Delta y)-(y+\Delta y)^2;$$
$$\begin{aligned}\Delta f(x, y)&=[(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)(y+\Delta y)-(y+\Delta y)^2]-(x^2+xy-y^2)=\\&=2x\cdot\Delta x+\Delta x^2+x\cdot\Delta y+y\cdot\Delta x+\Delta x\cdot\Delta y-2y\cdot\Delta y-\Delta y^2=\\&=[(2x+y)\Delta x+(x-2y)\Delta y]+(\Delta x^2+\Delta x\cdot\Delta y-\Delta y^2).\end{aligned}$$

Здесь выражение $df=(2x+y)\Delta x+(x-2y)\Delta y$ есть полный дифференциал функции, а $(\Delta x^2+\Delta x\cdot\Delta y-\Delta y^2)$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с бесконечно малой $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

Пример 2. Найти полный дифференциал функции

$$z=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$$dz=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3°. Применение полного дифференциала функции к приближенным вычислениям. При достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$, а значит, при достаточно малом $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ для дифференцируемой функции $z=f(x, y)$ имеет место приближенное равенство $\Delta z\approx dz$ или

$$\Delta z\approx\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Пример 3. Высота конуса $H=30$ *см*, радиус основания $R=10$ *см*. Как изменится объем конуса, если увеличить H на 3 *мм* и уменьшить R на 1 *мм*?

Решение. Объем конуса равен $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$. Изменение объема заменим приближенно дифференциалом

$$\Delta V \approx dV=\frac{1}{3}\pi\,(2RH\,dR+R^2\,dH)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\,(-2\cdot 10\cdot 30\cdot 0{,}1+100\cdot 0{,}3)=-10\pi\approx -31{,}4\ \textit{см}^3.$$

Пример 4. Вычислить приближенно $1{,}02^{3,01}$.

Решение. Рассмотрим функцию $z=x^y$. Искомое число можно считать наращенным значением этой функции при $x=1$, $y=3$, $\Delta x=0{,}02$, $\Delta y=0{,}01$. Первоначальное значение функции $z=1^3=1$,

$$\Delta z\approx dz=yx^{y-1}\,\Delta x+x^y\ln x\,\Delta y=3\cdot 1\cdot 0{,}02+1\cdot \ln 1\cdot 0{,}01=0{,}06.$$

Следовательно, $1{,}02^{3,01}\approx 1+0{,}06=1{,}06$.

1831. Для функции $f(x,\ y)=x^2y$ найти полное приращение и полный дифференциал в точке (1; 2); сравнить их, если:

а) $\Delta x=1,\quad \Delta y=2$; б) $\Delta x=0{,}1,\quad \Delta y=0{,}2$.

1832. Показать, что для функций u и v нескольких (например, двух) переменных справедливы обычные правила дифференцирования:

а) $d(u+v)=du+dv$; б) $d(uv)=v\,du+u\,dv$; в) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}$.

Найти полные дифференциалы следующих функций:

1833. $z=x^3+y^3-3xy$. **1834.** $z=x^2y^3$.

1835. $z=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. **1836.** $z=\sin^2 x+\cos^2 y$.

1837. $z=yx^y$. **1838.** $z=\ln(x^2+y^2)$.

1839. $f(x,\ y)=\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)$. **1840.** $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

1841. $z=\ln\operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

1842. Найти $df(1;\ 1)$, если $f(x,\ y)=\frac{x}{y^2}$.

1843. $u=xyz$. **1844.** $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1845. $u=\left(xy+\frac{x}{y}\right)^z$. **1846.** $u=\operatorname{arctg}\frac{xy}{z^2}$.

1847. Найти $df(3;\ 4;\ 5)$, если $f(x,\ y,\ z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1848. Одна сторона прямоугольника $a=10$ *см*, а другая $b=24$ *см*. Как изменится диагональ l прямоугольника, если сторону a удлинить на 4 *мм*, а сторону b укоротить на 1 *мм*? Найти приближенную величину изменения и сравнить с точной.

1849. Закрытый ящик, имеющий наружные размеры 10 *см*, 8 *см* и 6 *см*, сделан из фанеры толщиной в 2 *мм*. Определить приближенно объем затраченного на ящик материала.

1850*. Центральный угол кругового сектора, равный 80°, желают уменьшить на 1°. На сколько надо удлинить радиус сектора, чтобы площадь его осталась без изменения, если первоначальная длина радиуса равна 20 *см*?

1851. Вычислить приближенно:

а) $(1{,}02)^3 \cdot (0{,}97)^2$;

б) $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$;

в) $\sin 32^\circ \cdot \cos 59^\circ$ (при переводе градусов в радианы и при вычислении $\sin 60^\circ$ брать три значащие цифры; последний знак округлить).

1852. Показать, что относительная ошибка произведения приближенно равна сумме относительных ошибок сомножителей.

1853. При измерении на местности треугольника ABC получены следующие данные: сторона $a = 100$ *м* ± 2 *м*, сторона $b = 200$ *м* ± 3 *м*, угол $C = 60^\circ \pm 1^\circ$. С какой степенью точности может быть вычислена сторона c?

1854. Период T колебания маятника вычисляется по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l — длина маятника и g — ускорение силы тяжести. Найти погрешность в определении T, получаемую в результате небольших ошибок $\Delta l = \alpha$ и $\Delta g = \beta$ при измерении l и g.

1855. Расстояние между точками $P_0(x_0, y_0)$ и $P(x, y)$ равно ρ, а угол, образованный вектором $\overline{P_0P}$ с осью OX, равен α. На сколько изменится угол α, если точка P, при неизменной точке P_0, займет положение $P_1(x+dx,\ y+dy)$?

§ 5. Дифференцирование сложных функций

1°. Случай одной независимой переменной. Если $z = f(x, y)$ есть дифференцируемая функция аргументов x и y, которые в свою очередь являются дифференцируемыми функциями независимой переменной t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то производная сложной функции $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ может быть вычислена по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{1}$$

В частности, если t совпадает с одним из аргументов, например x, то «полная» производная функции z по x будет:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

Пример 1. Найти $\frac{dz}{dt}$, если

$$z=e^{3x+2y}, \quad \text{где} \quad x=\cos t, \quad y=t^2.$$

Решение. По формуле (1) имеем

$$\frac{dz}{dt}=e^{3x+2y}\cdot 3(-\sin t)+e^{3x+2y}\cdot 2\cdot 2t=$$

$$=e^{3x+2y}(4t-3\sin t)=e^{3\cos t+2t^2}(4t-3\sin t).$$

Пример 2. Найти частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ и полную производную $\frac{dz}{dx}$, если

$$z=e^{xy}, \quad \text{где} \quad y=\varphi(x).$$

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$. На основании формулы (2) получаем

$$\frac{dz}{dx}=ye^{xy}+xe^{xy}\varphi'(x).$$

2°. Случай нескольких независимых переменных. Если z есть сложная функция нескольких независимых переменных, например $z=f(x, y)$, где $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$ (u и v — независимые переменные; f, φ, ψ — дифференцируемые функции), то частные производные z по u и v выражаются так:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{3}$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{4}$$

Во всех рассмотренных случаях справедлива формула

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

(*свойство инвариантности полного дифференциала*).

Пример 3. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если

$$z=f(x, y), \quad \text{где} \quad x=uv, \quad y=\frac{u}{v}.$$

Решение. Применяя формулы (3) и (4), получим:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=f'_x(x, y)\,v+f'_y(x, y)\frac{1}{v}$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial v}=f'_x(x, y)\,u-f'_y(x, y)\frac{u}{v^2}.$$

Пример 4. Показать, что функция $z=\varphi(x^2+y^2)$ удовлетворяет уравнению $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

Решение. Функция φ зависит от x и y через промежуточный аргумент $x^2+y^2=t$, поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}=\varphi'(x^2+y^2)\,2x$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}=\varphi'(x^2+y^2)\,2y.$$

Подставив частные производные в левую часть уравнения, будем иметь:

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=y\varphi'(x^2+y^2)\,2x-x\varphi'(x^2+y^2)\,2y=$$
$$=2xy\varphi'(x^2+y^2)-2xy\varphi'(x^2+y^2)\equiv 0,$$

т. е. функция z удовлетворяет данному уравнению.

1856. Найти $\frac{dz}{dt}$, если

$$z=\frac{x}{y},\quad \text{где } x=e^t,\quad y=\ln t.$$

1857. Найти $\frac{du}{dt}$, если

$$u=\ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}},\quad \text{где } x=3t^2,\quad y=\sqrt{t^2+1}.$$

1858. Найти $\frac{du}{dt}$, если

$$u=xyz,\quad \text{где } x=t^2+1,\quad y=\ln t,\quad z=\operatorname{tg} t.$$

1859. Найти $\frac{du}{dt}$, если

$$u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \text{где } x=R\cos t,\quad y=R\sin t,\quad z=H.$$

1860. Найти $\frac{dz}{dx}$, если

$$z=u^v,\quad \text{где}\quad u=\sin x,\quad v=\cos x.$$

1861. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если

$$z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\quad \text{и}\quad y=x^2.$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные порядка выше второго.

Если частные производные, подлежащие вычислению, непрерывны, то *результат многократного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.*

Пример 1. Найти частные производные второго порядка от функции

$$z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

Решение. Найдем сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Теперь дифференцируем вторично:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Заметим, что так называемую «смешанную» частную производную можно найти и иначе, а именно:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=-\frac{1\cdot(x^2+y^2)-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

2°. Дифференциалы высших порядков. *Дифференциалом второго порядка* функции $z=f(x, y)$ называется дифференциал от дифференциала (первого порядка) этой функции

$$d^2z=d\,(dz).$$

Аналогично определяются дифференциалы функции z порядка выше второго, например:

$$d^3z=d\,(d^2z)$$

и, вообще,

$$d^nz=d\,(d^{n-1}z) \qquad (n=2,3,\ldots).$$

Если $z=f(x, y)$, где x и y — независимые переменные и функция f имеет непрерывные частные производные второго порядка, то дифференциал 2-го порядка функции z вычисляется по формуле

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \tag{1}$$

Вообще, при наличии соответствующих производных справедлива символическая формула

$$d^n z=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z,$$

которая формально развертывается по биномиальному закону.

Если $z=f(x, y)$, где аргументы x и y суть функции одного или нескольких независимых переменных, то

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}dy^2+\frac{\partial z}{\partial x}d^2x+\frac{\partial z}{\partial y}d^2y. \qquad (2)$$

Если x и y — независимые переменные, то $d^2x=0$, $d^2y=0$ и формула (2) становится тождественной формуле (1).

Пример 2. Найти полные дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции

$$z=2x^2-3xy-y^2.$$

Решение. 1-й способ. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x-3y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-3x-2y.$$

Поэтому

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(4x-3y)\,dx-(3x+2y)\,dy.$$

Далее

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-3,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2,$$

откуда следует, что

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2=4\,dx^2-6\,dx\,dy-2\,dy^2.$$

2-й способ. Дифференцированием находим:

$$dz=4x\,dx-3\,(y\,dx+x\,dy)-2y\,dy=(4x-3y)\,dx-(3x+2y)\,dy.$$

Дифференцируя еще раз и помня, что dx и dy не зависят от x и y, получим:

$$d^2z=(4dx-3dy)\,dx-(3dx+2dy)\,dy=4dx^2-6dx\,dy-2dy^2.$$

1891. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если

$$z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}.$$

1892. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если

$$z=\ln(x^2+y).$$

1893. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, если

$$z=\sqrt{2xy+y^2}.$$

1894. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

1895. Найти $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$, если

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

1896. Найти все частные производные 2-го порядка функции

$$u = xy + yz + zx.$$

1897. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, если

$$u = x^\alpha y^\beta z^\gamma.$$

1898. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, если

$$z = \sin(xy).$$

1899. Найти $f''_{xx}(0, 0)$, $f''_{xy}(0, 0)$, $f''_{yy}(0, 0)$, если

$$f(x, y) = (1+x)^m (1+y)^n.$$

1900. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, если

$$z = \arcsin \sqrt{\frac{x-y}{x}}.$$

1901. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, если

$$z = x^y.$$

1902*. Показать, что для функции

$$f(x, y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

с добавочным условием $f(0, 0) = 0$ имеем

$$f''_{xy}(0, 0) = -1, \quad f''_{yx}(0, 0) = +1.$$

1903. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если

$$z = f(u, v), \quad \text{где} \quad u = x^2 + y^2, \quad v = xy.$$

1904. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если

$$u = f(x, y, z), \text{ где } z = \varphi(x, y).$$

1905. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если

$$z = f(u, v), \quad \text{где } u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y).$$

1906. Показать, что функция

$$u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

1907. Показать, что функция

$$u = \ln \frac{1}{r},$$

где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

1908. Показать, что функция

$$u(x, t) = A \sin(a\lambda t + \varphi) \sin \lambda x$$

удовлетворяет уравнению колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1909. Показать, что функция

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4a^2 t}}$$

(x_0, y_0, z_0, a — постоянные) удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

1910. Показать, что функция

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at),$$

где φ и ψ — произвольные дважды дифференцируемые функции, удовлетворяет уравнению колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Решение. 1-й способ. Дифференцированием находим три уравнения, связывающие дифференциалы всех пяти переменных:

$$\begin{cases} dx = du + dv, \\ dy = 2u\,du + 2v\,dv, \\ dz = 3u^2\,du + 3v^2 dv. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений определим du и dv:

$$du = \frac{2v\,dx - dy}{2(v-u)}, \quad dv = \frac{dy - 2u\,dx}{2(v-u)}.$$

Подставим в третье уравнение найденные выражения du и dv:

$$dz = 3u^2 \frac{2v\,dx - dy}{2(v-u)} + 3v^2 \frac{dy - 2u\,dx}{2(v-u)} =$$
$$= \frac{6uv(u-v)\,dx + 3(v^2-u^2)\,dy}{2(v-u)} = -3uv\,dx + \frac{3}{2}(u+v)\,dy.$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3uv, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}(u+v).$$

2-й способ. Из третьего данного уравнения можно найти:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3u^2 \frac{\partial u}{\partial y} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{5}$$

Продифференцируем первые два уравнения сначала по x, затем по y:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = 2u \dfrac{\partial u}{\partial x} + 2v \dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ 1 = 2u \dfrac{\partial u}{\partial y} + 2v \dfrac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

Из первой системы найдем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{v-u}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u}{u-v}.$$

Из второй системы найдем:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2(u-v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2(v-u)}.$$

Подставляя выражения $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ в формулу (5), получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2 \frac{v}{v-u} + 3v^2 \frac{u}{u-v} = -3uv,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3u^2 \frac{1}{2(u-v)} + 3v^2 \cdot \frac{1}{2(v-u)} = \frac{3}{2}(u+v).$$

1941. Пусть y есть функция x, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Обозначив через $F(x, y, z)$ левую часть уравнения, найдем частные производные и их значения в точке M:

$$F'_x = 3yz, \qquad (F'_x)_M = -3a^2,$$
$$F'_y = 3xz, \qquad (F'_y)_M = 0,$$
$$F'_z = 3xy - 3z^2, \qquad (F'_z)_M = -3a^2.$$

Применяя формулы (3) и (4), получим:

$$-3a^2(x-0) + 0(y-a) - 3a^2(z+a) = 0$$

или $x+z+a=0$ — уравнение касательной плоскости,

$$\frac{x-0}{-3a^2} = \frac{y-a}{0} = \frac{z+a}{-3a^2}$$

или $\frac{x}{1} = \frac{y-a}{0} = \frac{z+a}{1}$ — уравнения нормали.

1981. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к следующим поверхностям в указанных точках:

а) к параболоиду вращения $z = x^2 + y^2$ в точке $(1;\ -2;\ 5)$;

б) к конусу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$ в точке $(4;\ 3;\ 4)$;

в) к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ в точке $(R\cos\alpha;\ R\sin\alpha;\ R)$.

1982. В каких точках эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

нормаль к нему образует равные углы с осями координат?

1983. Через точку $M\ (3;\ 4;\ 12)$ сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ проведены плоскости, перпендикулярные к осям OX и OY. Написать уравнение плоскости, проходящей через касательные к получившимся сечениям в их общей точке M.

1984. Показать, что уравнение касательной плоскости к центральной поверхности 2-го порядка

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = k$$

в ее точке $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ имеет вид

$$ax_0x + by_0y + cz_0z = k.$$

1985. К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $x + 4y + 6z = 0$.

1986. К эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ провести касательные плоскости, отсекающие на координатных осях равные по величине отрезки.

1987. На поверхности $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ найти точки, в которых касательные плоскости параллельны координатным плоскостям.

1997. Функцию $f(x, y) = -x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(-2;\ 1)$.

1998. Найти приращение, получаемое функцией $f(x, y) = x^2y$ при переходе от значений $x=1$, $y=1$ к значениям

$$x_1 = 1+h, \quad y_1 = 1+k.$$

1999. Функцию $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2+2xy-yz-4x-3y-z+4$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1;\ 1;\ 1)$.

2000. Разложить $f(x+h, y+k, z+l)$ по целым положительным степеням h, k и l, если

$$f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz.$$

2001. Разложить по формуле Маклорена до членов 3-го порядка включительно функцию

$$f(x, y) = e^x \sin y.$$

2002. Разложить по формуле Маклорена до членов 4-го порядка включительно функцию

$$f(x, y) = \cos x \cos y.$$

2003. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1;\ 1)$ до членов 2-го порядка включительно функцию

$$f(x, y) = y^x.$$

2004. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1;\ -1)$ до членов 3-го порядка включительно функцию

$$f(x, y) = e^{x+y}.$$

2005. Вывести приближенные формулы с точностью до членов 2-го порядка относительно величин α и β для выражений

а) $\operatorname{arctg}\dfrac{1+\alpha}{1-\beta}$;

б) $\sqrt{\dfrac{(1+\alpha)^m+(1+\beta)^n}{2}}$,

если $|\alpha|$ и $|\beta|$ малы по сравнению с 1.

2006*. Используя формулу Тейлора до членов 2-го порядка, вычислить приближенно

а) $\sqrt{1{,}03}$, $\sqrt[3]{0{,}98}$; б) $(0,95)^{2{,}01}$.

2007. Пусть z есть та неявная функция от x и y, определяемая уравнением $z^3-2xz+y=0$, которая принимает значение $z=1$ при $x=1$ и $y=1$. Написать несколько членов разложения функции z по возрастающим степеням разностей $x-1$ и $y-1$.

Найти экстремумы функций z, заданных неявно:

2019*. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$.

2020. $x^3-y^2-3x+4y+z^2+z-8=0$.

Определить условные экстремумы функций:

2021. $z=xy$ при $x+y=1$.

2022. $z=x+2y$ при $x^2+y^2=5$.

2023. $z=x^2+y^2$ при $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

2024. $z=\cos^2 x+\cos^2 y$ при $y-x=\frac{\pi}{4}$.

2025. $u=x-2y+2z$ при $x^2+y^2+z^2=9$.

2026. $u=x^2+y^2+z^2$ при $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>c>0)$.

2027. $u=xy^2z^3$ при $x+y+z=12$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

2028. $u=xyz$ при условиях: $x+y+z=5$, $xy+yz+zx=8$.

2029. Доказать неравенство

$$\frac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz},$$

если $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

Указание. Искать максимум функции $u=xyz$ при условии $x+y+z=S$.

2030. Определить наибольшее значение функции $z=1+x+2y$ в областях: а) $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant 1$; б) $x\geqslant 0$, $y\leqslant 0$, $x-y\leqslant 1$.

2031. Определить наибольшие и наименьшие значения функций а) $z=x^2y$ и б) $z=x^2-y^2$ в области $x^2+y^2\leqslant 1$.

2032. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ в области $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.

2033. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^3+y^3-3xy$ в области $0\leqslant x\leqslant 2$, $-1\leqslant y\leqslant 2$.

§ 14. Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений функций

Пример 1. Положительное число a требуется разбить на три неотрицательных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение. Пусть искомые слагаемые будут x, y, $a-x-y$. Ищем максимум функции $f(x, y)=xy(a-x-y)$.

По смыслу задачи функция $f(x, y)$ рассматривается внутри замкнутого треугольника $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant a$ (рис. 71).

Решая систему

$$\begin{cases} f'_x(x, y)\equiv y(a-2x-y)=0, \\ f'_y(x, y)\equiv x(a-x-2y)=0, \end{cases}$$

получим для внутренности треугольника единственную стационарную точку $\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$. Для нее проверяем выполнение достаточных условий. Имеем

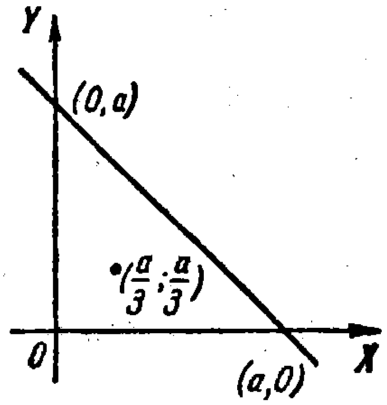

Рис. 71.

$f''_{xx}(x, y) = -2y$, $f''_{xy}(x, y) = a - 2x - 2y$, $f''_{yy}(x, y) = -2x$. Следовательно,

$$A = f''_{xx}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{2}{3}a,$$

$$B = f''_{xy}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{1}{3}a,$$

$$C = f''_{yy}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{2}{3}a,$$

$$\Delta = AC - B^2 > 0, \ A < 0.$$

Итак, в точке $\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$ функция достигает максимума. Так как на контуре треугольника функция $f(x, y) = 0$, то этот максимум будет наибольшим значением функции, т. е. произведение будет наибольшим, если $x = y = a - x - y = \frac{a}{3}$, причем наибольшее значение произведения равно $\frac{a^3}{27}$.

Примечание. Задачу можно было решать методом условного экстремума, отыскивая максимум функции $u = xyz$ при условии $x + y + z = a$.

2034. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данный объем V, найти тот, полная поверхность которого наименьшая.

2035. При каких размерах открытая прямоугольная ванна данной вместимости V имеет наименьшую поверхность?

2036. Из всех треугольников данного периметра $2p$ найти тот, который имеет наибольшую площадь.

2037. Найти прямоугольный параллелепипед с данной площадью поверхности S, имеющий наибольший объем.

2038. Представить положительное число a в виде произведения четырех положительных сомножителей так, чтобы их сумма была наименьшей.

2039. На плоскости XOY найти точку $M(x, y)$, сумма квадратов расстояний которой от трех прямых $x = 0$, $y = 0$, $x - y + 1 = 0$ была бы наименьшей.

2040. Найти треугольник данного периметра $2p$, который при вращении около одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

2041. На плоскости даны три материальные точки $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ с массами m_1, m_2, m_3. При каком положении точки $P(x, y)$ квадратичный момент (момент инерции) данной системы точек относительно точки P (т. е. сумма $m_1\overline{P_1P}^2 + m_2\overline{P_2P}^2 + m_3\overline{P_3P}^2$) будет наименьшим?

Вычислить следующие повторные интегралы:

2113. $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2+2y)\,dx$. **2114.** $\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$.

2115. $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2\,dy}{1+y^2}$. **2116.** $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2\,dy}{y^2}$.

2117. $\int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x+2y)\,dx$. **2118.** $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^{a} r\,dr$.

2119. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{3\cos\varphi} r^2\sin^2\varphi\,dr$. **2120.** $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy$.

Написать уравнения линий, ограничивающих области, на которые распространены нижеследующие повторные интегралы, и вычертить эти области:

2121. $\int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y)\,dx$. **2122.** $\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x, y)\,dy$.

2123. $\int_0^4 dy \int_y^{10-y} f(x, y)\,dx$. **2124.** $\int_1^3 dx \int_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x, y)\,dy$.

2125. $\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y)\,dy$. **2126.** $\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y)\,dy$.

Расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в двойном интеграле

$$\iint_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy$$

для указанных областей S:

2127. S — прямоугольник с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(2;\ 0)$, $B(2;\ 1)$, $C(0;\ 1)$.

2128. S — треугольник с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$, $B(1;\ 1)$.

2129. S — трапеция с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(2;\ 0)$, $B(1;\ 1)$, $C(0;\ 1)$.

2130. S — параллелограмм с вершинами $A(1;\ 2)$, $B(2;\ 4)$, $C(2;\ 7)$, $D(1;\ 5)$.

2131. S — круговой сектор OAB с центром в точке $O(0;\ 0)$, у которого концы дуги $A(1;\ 1)$ и $B(-1;\ 1)$ (рис. 88).

2132. S—прямой параболический сегмент AOB, ограниченный параболой BOA и отрезком прямой BA, соединяющим точки $B(-1;\ 2)$ и $A(1;\ 2)$ (рис. 89).

2133. S—круговое кольцо, ограниченное окружностями радиусов $r=1$ и $R=2$, с общим центром $O(0;\ 0)$.

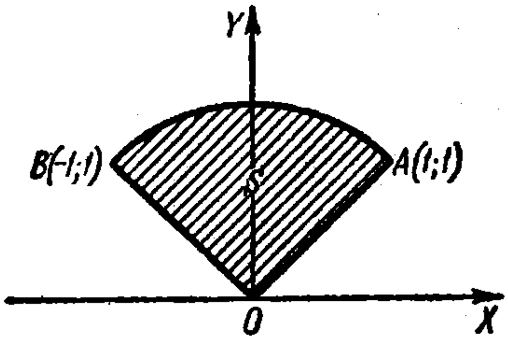

Рис. 88.

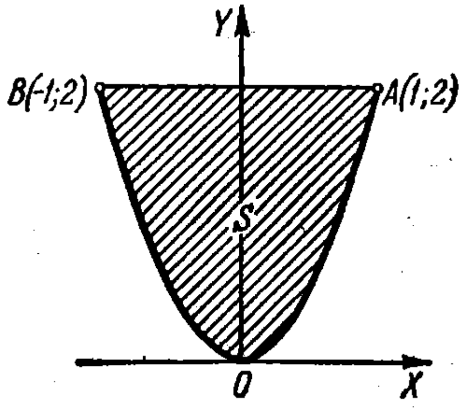

Рис. 89.

2134. S ограничена гиперболой $y^2-x^2=1$ и окружностью $x^2+y^2=9$ (имеется в виду область, содержащая начало координат).

2135. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле

$$\iint\limits_{(S)} f(x,\ y)\,dx\,dy,$$

если область S определяется неравенствами

а) $x\geqslant 0;\ y\geqslant 0;\ x+y\leqslant 1;$

б) $x^2+y^2\leqslant a^2,$

в) $x^2+y^2\leqslant x;$

г) $y\geqslant x;\ x\geqslant -1;\ y\leqslant 1;$

д) $y\leqslant x\leqslant y+2a;$
$0\leqslant y\leqslant a.$

Переменить порядок интегрирования в следующих повторных интегралах:

2136. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,\ y)\,dy.$

2137. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x,\ y)\,dy.$

2138. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,\ y)\,dy.$

2139. $\int\limits_{\frac{a}{2}}^a dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,\ y)\,dy.$

2140. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,\ y)\,dy.$

2141. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,\ y)\,dx.$

2142. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,\ y)\,dx.$

2143. $\int\limits_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int\limits_0^x f(x,\ y)\,dy + \int\limits_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,\ y)\,dy.$

2144. $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,\ y)\,dy.$

Вычислить следующие двойные интегралы:

2145. $\iint\limits_{(S)} x\,dx\,dy$, где S—треугольник с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 1)$ и $B(0;\ 1)$.

2146. $\iint\limits_{(S)} x\,dx\,dy$, где область интегрирования S ограничена прямой, проходящей через точки $A(2;\ 0)$, $B(0;\ 2)$, и дугой окружности с центром в точке $C(0;\ 1)$, радиуса 1 (рис. 90).

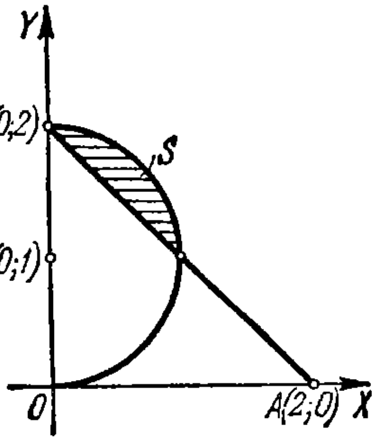

Рис. 90.

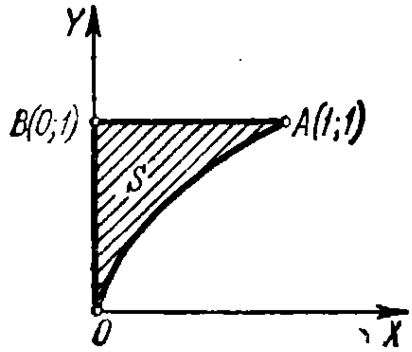

Рис. 91.

2147. $\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, где S—часть круга радиуса a с центром в точке $O(0;\ 0)$, лежащая в первой четверти.

2148. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2-y^2}\,dx\,dy$, где S—треугольник с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(1;\ -1)$ и $B(1;\ 1)$.

2149. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy$, где C—треугольник с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(10;\ 1)$ и $B(1;\ 1)$.

2150. $\iint\limits_{(S)} e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy$, где S—криволинейный треугольник OAB, ограниченный параболой $y^2=x$ и прямыми $x=0$, $y=1$ (рис. 91).

2151. $\iint\limits_{(S)} \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, где S—параболический сегмент, ограниченный параболой $y=\frac{x^2}{2}$ и прямой $y=x$.

2152. Вычислить интегралы и вычертить области, на которые они распространены:

а) $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{1+\cos x} y^2 \sin x\,dy$;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\cos x}^{1} y^4\,dy$;

в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_0^{3\cos y} x^2 \sin^2 y\,dx$.

При решении задач 2153—2157 рекомендуется предварительно делать чертеж.

2153. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} xy^2\,dx\,dy,$$

если S есть область, ограниченная параболой $y^2=2px$ и прямой $x=p$.

2154*. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} xy\,dx\,dy,$$

распространенный на область S, ограниченную осью OX и верхней полуокружностью $(x-2)^2+y^2=1$.

2155. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{2a-x}},$$

где S—круг радиуса a, касающийся осей координат и лежащий в первом квадранте.

2156*. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} y\,dx\,dy,$$

где область S ограничена осью абсцисс и аркой циклоиды

$$\begin{cases} x=R(t-\sin t), \\ y=R(1-\cos t) \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi). \end{cases}$$

2157. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_{(S)} xy\,dx\,dy,$$

в котором область интегрирования S ограничена осями координат и дугой астроиды

$$x = R\cos^3 t, \quad y = R\sin^3 t \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

2158. Найти среднее значение функции $f(x, y) = xy^2$ в области $S\{0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Указание. *Средним значением функции* $f(x, y)$ в области S называется число

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{пл.}\,S} \iint_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

2159. Найти среднее значение квадрата расстояния точки $M(x, y)$ круга $(x-a)^2 + y^2 \leqslant R^2$ от начала координат.

§ 2. Замена переменных в двойном интеграле

1°. Двойной интеграл в полярных координатах. При переходе в двойном интеграле от прямоугольных координат x, y к полярным r, φ, связанным с прямоугольными координатами соотношениями

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

имеет место формула

$$\iint_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{(S)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \tag{1}$$

Если область интегрирования S ограничена лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ и кривыми $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$, где $r_1(\varphi)$ и $r_2(\varphi)$ $(r_1(\varphi) \leqslant r_2(\varphi))$ — однозначные функции на отрезке $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то двойной интеграл может быть вычислен по формуле

$$\iint_{(S)} F(\varphi, r)\,r\,dr\,d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(\varphi, r)\,r\,dr,$$

где $F(\varphi, r) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. При вычислении интеграла $\displaystyle\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(\varphi, r)\,r\,dr$ величину φ полагают постоянной.

Если область интегрирования не принадлежит к рассмотренному виду, то ее разбивают на части, каждая из которых является областью данного вида.

2°. Двойной интеграл в криволинейных координатах. В более общем случае, если $f(x, y)$ — непрерывна и в двойном интеграле

$$\iint_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy$$

2165. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} y\,dx\,dy,$$

где S — полукруг диаметра a с центром в точке $C\left(\frac{a}{2};\,0\right)$ (рис. 93).

2166. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

распространенный на область, ограниченную окружностью $x^2+y^2=2ax$.

2167. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

где область интегрирования S — полукруг радиуса a с центром в начале координат, лежащий выше оси OX.

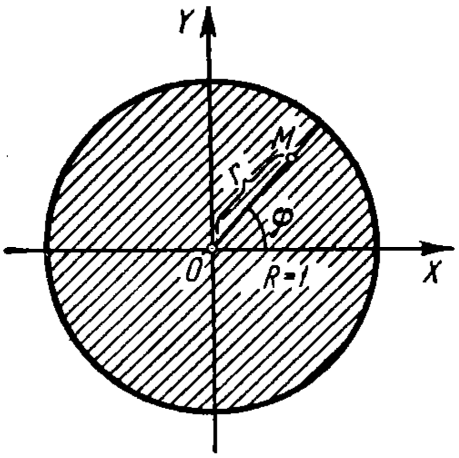

Рис. 92.

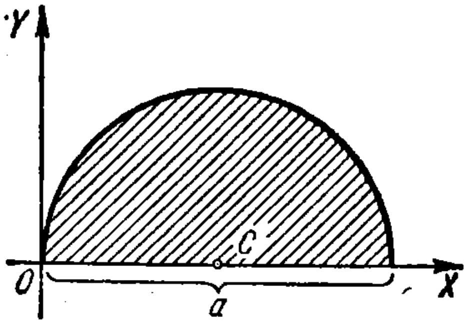

Рис. 93.

2168. Вычислить двойной интеграл от функции $f(r,\varphi)=r$ по области, ограниченной кардиоидой $r=a(1+\cos\varphi)$ и окружностью $r=a$. (Имеется в виду область, не содержащая полюса.)

2169. Переходя к полярным координатам, вычислить

$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy.$$

2170. Переходя к полярным координатам, вычислить

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

где область S ограничена лепестком лемнискаты

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2) \quad (x \geqslant 0).$$

2171*. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy,$$

распространенный на область S, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, переходя к *обобщенным полярным координатам* r и φ по формулам:

$$\frac{x}{a}=r\cos\varphi, \quad \frac{y}{b}=r\sin\varphi.$$

2172.** Преобразовать

$$\int\limits_0^c dx \int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\,dy$$

($0<\alpha<\beta$ и $c>0$), введя новые переменные $u=x+y$, $uv=y$.

2173*. Выполнить замену переменных $u=x+y$, $v=x-y$ в интеграле

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x, y)\,dy.$$

2174.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} dx\,dy,$$

где S — область, ограниченная кривой

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}.$$

Указание. Произвести замену переменных

$$x=ar\cos\varphi, \quad y=br\sin\varphi.$$

§ 3. Площади фигур

1°. Площадь в прямоугольных координатах. *Площадь плоской области* S равна

$$\text{пл. } S=\iint\limits_{(S)} dx\,dy.$$

2184. Найти площадь, ограниченную линией

$$\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}.$$

2185*. Найти площадь, ограниченную эллипсом

$$(x-2y+3)^2+(3x+4y-1)^2=100.$$

2186. Найти площадь криволинейного четырехугольника, ограниченного дугами парабол $x^2=ay$, $x^2=by$, $y^2=\alpha x$, $y^2=\beta x$ $(0<a<b,\ 0<\alpha<\beta)$.

Указание. Ввести новые переменные u и v, полагая

$$x^2=uy,\quad y^2=vx.$$

2187. Найти площадь криволинейного четырехугольника, ограниченного дугами кривых $y^2=ax$, $y^2=bx$, $xy=\alpha$, $xy=\beta$ $(0<a<b,\ 0<\alpha<\beta)$.

Указание. Ввести новые переменные u и v, полагая $xy=u$, $y^2=vx$.

§ 4. Объемы тел

Объем V цилиндроида, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z=f(x, y)$, снизу плоскостью $z=0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезывающей на плоскости XOY область S (рис. 94), равен

$$V=\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

2188. Выразить при помощи двойного интеграла объем пирамиды с вершинами $O(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B(1;1;0)$ и $C(0;0;1)$ (рис. 95). Расставить пределы интегрирования.

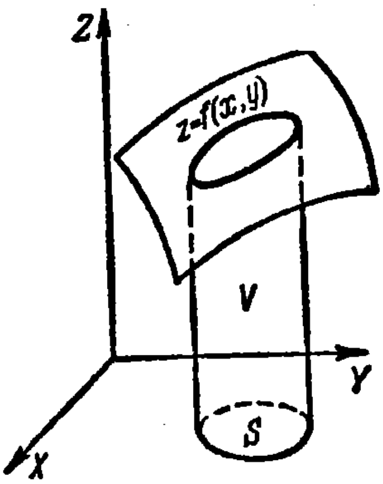

Рис. 94.

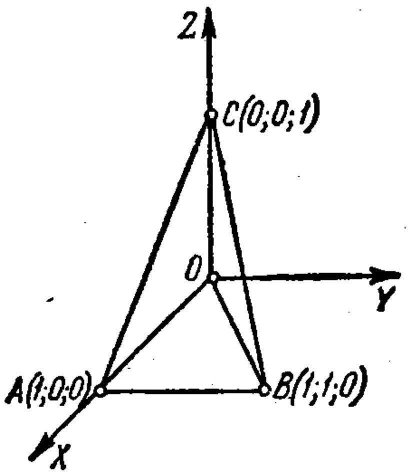

Рис. 95.

В задачах 2189—2192 нарисовать тела, объемы которых выражаются данными повторными интегралами:

2227. Вычислить координаты центра тяжести фигуры $OmAnO$ (рис. 96), ограниченной кривой $y=\sin x$ и прямой OA, проходящей через начало координат и вершину $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ синусоиды.

2228. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограначенной кардиоидой $r=a(1+\cos\varphi)$.

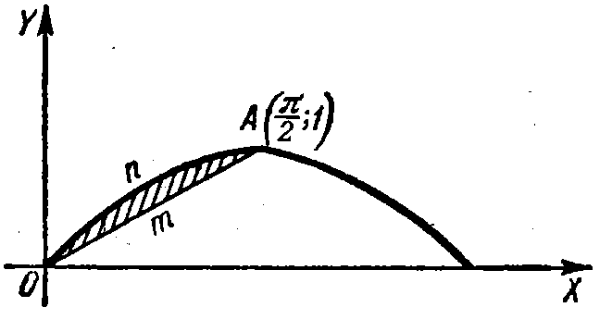

Рис. 96.

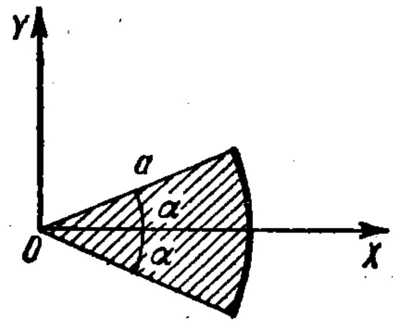

Рис. 97.

2229. Найти координаты центра тяжести кругового сектора радиуса a с углом при вершине 2α (рис. 97).

2230. Вычислить координаты центра тяжести фигуры, ограниченной параболами $y^2=4x+4$ и $y^2=-2x+4$.

2231. Вычислить момент инерции треугольника, ограниченного прямыми $x+y=2$, $x=2$, $y=2$, относительно оси OX.

2232. Найти момент инерции кругового кольца с диаметрами d и D $(d<D)$: а) относительно его центра и б) относительно его диаметра.

2233. Вычислить момент инерции квадрата со стороной a относительно оси, проходящей через его вершину перпендикулярно к плоскости квадрата.

2234*. Вычислить момент инерции сегмента, отсекаемого от параболы $y^2=ax$ прямой $x=a$, относительно прямой $y=-a$.

2235*. Вычислить момент инерции площади, ограниченной гиперболой $xy=4$ и прямой $x+y=5$, относительно прямой $x=y$.

2236*. В квадратной пластинке со стороной a плотность пропорциональна расстоянию от одной из ее вершин. Вычислить момент инерции пластинки относительно стороны, проходящей через эту вершину.

2237. Найти момент инерции площади кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi)$ относительно полюса.

2238. Вычислить момент инерции площади лемнискаты $r^2=2a^2\cos 2\varphi$ относительно оси, перпендикулярной к ее плоскости в полюсе.

2239*. Вычислить момент инерции однородной пластинки, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью OX, относительно оси OX.

§ 7. Тройные интегралы

1°. Тройной интеграл в прямоугольных координатах. Тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$, распространенным на область V, называется предел соответствующей трехкратной суммы:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0 \\ \max \Delta z_k \to 0}} \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i, y_j, z_k)\,\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех обыкновенных (однократных) интегралов или к вычислению одного двойного и одного однократного.

Пример 1. Вычислить

$$I = \iiint\limits_{(V)} x^3 y^2 z\,dx\,dy\,dz,$$

где область V определяется неравенствами

$$0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x,\ 0 \leqslant z \leqslant xy.$$

Решение. Имеем

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z\,dz = \int_0^1 dx \int_0^x x^3 y^2 \frac{z^2}{2}\Big|_0^{xy} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{x^5 y^4}{2}\,dy = \int_0^1 \frac{x^5}{2}\,\frac{y^5}{5}\Big|_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^{10}}{10}\,dx = \frac{1}{110}.$$

Пример 2. Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz,$$

где V — внутренность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение.

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz = \int_{-a}^{a} x^2\,dx \iint\limits_{(S_{yz})} dy\,dz = \int_{-a}^{a} x^2 S_{yz}\,dx,$$

где S_{yz} — внутренняя область эллипса $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$, $x = \text{const}$, площадь которой равна

$$S_{yz} = \pi b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Поэтому окончательно имеем:

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz = \pi bc \int_{-a}^{a} x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{15}\pi a^3 bc.$$

2°. Замена переменных в тройном интеграле. Если в тройном интеграле

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

от переменных x, y, z требуется перейти к переменным u, v, w, связанным с x, y, z соотношениями $x=\varphi(u, v, w)$, $y=\psi(u, v, w)$, $z=\chi(u, v, w)$, где функции φ, ψ, χ:

1) непрерывны вместе со своими частными производными 1-го порядка;

2) устанавливают взаимнооднозначное и в обе стороны непрерывное соответствие между точками области интегрирования V пространства $OXYZ$ и точками некоторой области V' пространства $O'UVW$;

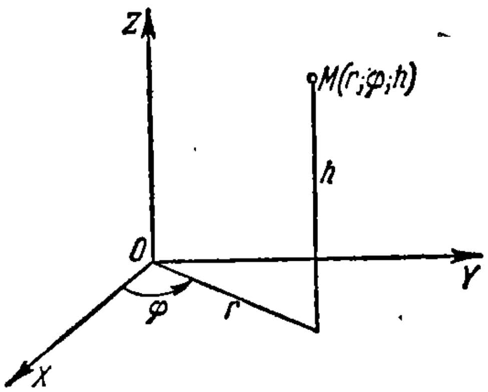

Рис. 98.

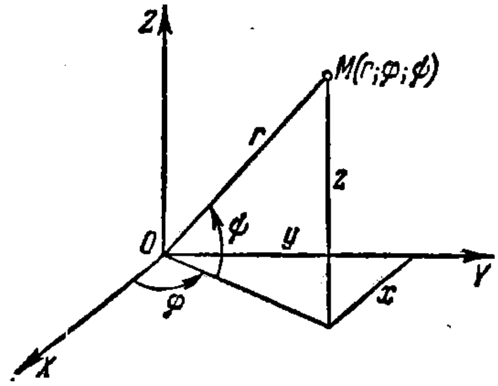

Рис. 99.

3) функциональный определитель (якобиан) этих функций

$$I=\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

сохраняет в области V' постоянный знак, то справедлива формула

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{(V')} f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)]\,|I|\,du\,dv\,dw.$$

В частности:

1) для цилиндрических координат r, φ, h (рис. 98), где

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=h,$$

получаем, что $I=r$;

2) для сферических координат φ, ψ, r (φ — долгота, ψ — широта, r — радиус-вектор (рис. 99)), где

$$x=r\cos\psi\cos\varphi,\quad y=r\cos\psi\sin\varphi,\quad z=r\sin\psi,$$

имеем $I=r^2\cos\psi$.

Пример 3. Переходя к сферическим координатам, вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz,$$

где V — шар радиуса R.

Решение. Для шара пределы изменения сферических координат φ (долготы), ψ (широты) и r (радиуса-вектора) будут:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant r \leqslant R.$$

Поэтому будем иметь:

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^R r r^2 \cos\psi\,dr = \pi R^4.$$

3°. Приложения тройных интегралов. *Объем* области трехмерного пространства $OXYZ$ равен

$$\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz.$$

Масса тела, занимающего область V,

$$M = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

где $\gamma(x, y, z)$ — плотность тела в точке $(x; y; z)$.

Статические моменты тела относительно координатных плоскостей

$$M_{XY} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\,z\,dx\,dy\,dz;$$

$$M_{YZ} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\,x\,dx\,dy\,dz;$$

$$M_{ZX} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\,y\,dx\,dy\,dz.$$

Координаты центра тяжести

$$\bar{x} = \frac{M_{YZ}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{ZX}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{XY}}{M}.$$

Если тело однородно, то в формулах для координат центра тяжести можно положить $\gamma(x, y, z) = 1$.

Моменты инерции относительно осей координат

$$I_X = \iiint\limits_{(V)} (y^2+z^2)\,\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz;$$

$$I_Y = \iiint\limits_{(V)} (z^2+x^2)\,\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz;$$

$$I_Z = \iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)\,\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Полагая в этих формулах

$$\gamma(x, y, z) = 1,$$

получаем геометрические моменты инерции тела.

A. *Вычисление тройных интегралов*

Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

для указанных областей V:

2240. V—тетраэдр, ограниченный плоскостями

$$x+y+z=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

2241. V—цилиндр, ограниченный поверхностями

$$x^2+y^2=R^2, \quad z=0, \quad z=H.$$

2242. V—конус, ограниченный поверхностями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}, \quad z=c.$$

2243. V—тело, ограниченное поверхностями

$$z=1-x^2-y^2, \quad z=0.$$

Вычислить следующие интегралы:

2244. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$.

2245. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2\sqrt{x}} dy \int\limits_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} x\, dz$.

2246. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$.

2247. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} xyz\, dz$.

2248. Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\, dy\, dz}{(x+y+z+1)^3},$$

где V—область интегрирования, ограниченная координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$.

2249. Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} (x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz,$$

где V — общая часть параболоида $2az \geqslant x^2+y^2$ и шара x^2+y^2+ $+z^2 \leqslant 3a^2$.

2250. Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} z^2\,dx\,dy\,dz,$$

где V — общая часть шаров $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ и $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$.

2251. Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz,$$

где V — область, ограниченная плоскостью $z=0$ и верхней половиной эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2252. Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz,$$

где V — внутренность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2253. Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz,$$

где V — область, ограниченная конусом $z^2=\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ и плоскостью $z=h$.

2254. Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz,$$

где V — область, ограниченная поверхностями $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $x^2+y^2=z^2$ и содержащая точку $(0, 0, R)$.

2255. Вычислить

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz,$$

преобразовав его предварительно к цилиндрическим координатам.

2256. Вычислить

$$\int_0^{2r} dx \int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dz,$$

преобразовав его предварительно к цилиндрическим координатам.

2257. Вычислить

$$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz,$$

преобразовав его предварительно к сферическим координатам.

2258. Перейдя к сферическим координатам, вычислить интеграл

$$\iiint_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz,$$

где V — шар $x^2+y^2+z^2 \leqslant x$.

Б. *Вычисление объемов с помощью тройных интегралов*

2259. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями

$$y^2=4a^2-3ax, \quad y^2=ax, \quad z=\pm h.$$

2260.** Вычислить объем части цилиндра $x^2+y^2=2ax$, содержащейся между параболоидом $x^2+y^2=2az$ и плоскостью XOY.

2261*. Вычислить объем тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=a^2$ и конусом $z^2=x^2+y^2$ (внешнего по отношению к конусу).

2262*. Вычислить объем тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=4$ и параболоидом $x^2+y^2=3z$ (внутреннего по отношению к параболоиду).

2263. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью XOY, цилиндром $x^2+y^2=ax$ и сферой $x^2+y^2+z^2=a^2$ (внутреннего по отношению к цилиндру).

2264. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2\frac{x}{a}$ и плоскостью $x=a$.

2264.1. Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}.$$

2264.2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (z \geqslant 0).$$

В. *Приложения тройных интегралов к механике и физике*

2265. Найти массу M прямоугольного параллелепипеда $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$, если плотность в точке (x, y, z) есть $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

2266. Из октанта шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant c^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ вырезано тело $OABC$, ограниченное координатными плоскостями и плоскостью $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $(a \leqslant c,\ b \leqslant c)$ (рис. 100). Найти массу этого тела, если плотность его в каждой точке (x, y, z) равна аппликате этой точки.

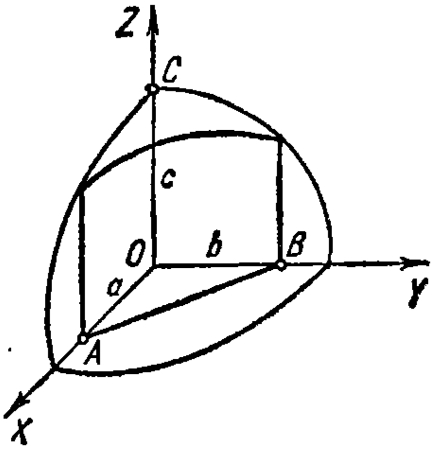

Рис. 100.

2267*. В теле, имеющем форму полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$, плотность изменяется пропорционально расстоянию точки от центра. Найти центр тяжести этого тела.

2268. Найти центр тяжести тела, ограниченного параболоидом $y^2 + 2z^2 = 4x$ и плоскостью $x = 2$.

2269*. Найти момент инерции круглого цилиндра, высота которого h и радиус основания a, относительно оси, служащей диаметром основания цилиндра.

2270*. Найти момент инерции круглого конуса, высота которого h, радиус основания a и плотность ρ, относительно диаметра основания.

2271.** Найти силу притяжения, оказываемого однородным конусом высоты h с углом α при вершине (в осевом сечении) на материальную точку, содержащую единицу массы и расположенную в его вершине.

2272.** Показать, что сила притяжения, действующая со стороны одного шара на внешнюю материальную точку, не изменится, если всю массу шара сосредоточить в его центре.

§ 8. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Несобственные кратные интегралы

1°. Дифференцирование по параметру. При некоторых ограничениях *), налагаемых на функции $f(x, \alpha)$, $f'_\alpha(x, \alpha)$ и на соответствующие несобственные интегралы, имеет место *правило Лейбница*

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^\infty f(x, \alpha)\,dx = \int_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha)\,dx.$$

*) См. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, гл. XIV, § 3, п. 520, «Наука», 1970.

Пример 1. С помощью дифференцирования по параметру вычислить

$$\int_a^{\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\,dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0).$$

Решение. Пусть

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\,dx = F(\alpha, \beta).$$

Тогда

$$\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = -\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2}\Bigg|_0^{\infty} = -\frac{1}{2\alpha}.$$

Отсюда $F(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + C(\beta)$. Чтобы найти $C(\beta)$, полагаем в последнем равенстве $\alpha=\beta$. Имеем $0=-\frac{1}{2}\ln\beta+C(\beta)$.

Отсюда $C(\beta)=\frac{1}{2}\ln\beta$. Следовательно,

$$F(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + \frac{1}{2}\ln\beta = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

2°. Несобственные двойные интегралы. а) Случай бесконечной области. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в неограниченной области S, то полагают:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\sigma\to S} \iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{1}$$

где σ — конечная область, целиком лежащая в S, причем $\sigma \longrightarrow S$ означает, что мы расширяем область σ по произвольному закону так, чтобы в нее вошла и осталась в ней любая точка области S. Если предел в правой части существует и не зависит от выбора области σ, то соответствующий несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Если подынтегральная функция $f(x, y)$ неотрицательна ($f(x, y)\geqslant 0$), то для сходимости несобственного интеграла необходимо и достаточно, чтобы предел в правой части равенства (1) существовал хотя бы для одной системы областей σ, исчерпывающих область S.

б) Случай разрывной функции. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области S всюду, за исключением точки $P(a;\ b)$, то полагают:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{(S_\varepsilon)} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{2}$$

где S_ε — область, получаемая из S путем удаления малой области диаметра ε, содержащей точку P. В случае существования предела (2), не зависящего от вида удаляемых из области S малых областей, рассматриваемый несобственный интеграл называется *сходящимся*, а в противном случае — *расходящимся*.

2303*. Найти площадь боковой поверхности параболического цилиндра $y=\frac{3}{8}x^2$, ограниченной плоскостями $z=0$, $x=0$, $z=x$, $y=6$.

2304. Найти длину дуги конической винтовой линии $x=ae^t\cos t$, $y=ae^t\sin t$, $z=ae^t$ от точки $O(0;\ 0;\ 0)$ до точки $A(a;\ 0;\ a)$.

2305. Определить массу контура эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, если линейная плотность его в каждой точке $M(x, y)$ равна $|y|$.

2306. Найти массу первого витка винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, если плотность в каждой точке равна радиусу-вектору этой точки.

2307. Определить координаты центра тяжести полуарки циклоиды

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)\quad [0\leqslant t\leqslant \pi].$$

2308. Найти момент инерции относительно оси OZ первого витка винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$.

2309. С какой силой масса M, распределенная с постоянной плотностью из окружности $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, воздействует на массу m, помещенную в точке $A(0;\ 0;\ b)$?

Б. *Криволинейные интегралы второго типа*

Вычислить следующие криволинейные интегралы:

2310. $\int\limits_{AB}(x^2-2xy)\,dx+(2xy+y^2)\,dy$, где AB — дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(1;\ 1)$ до точки $B(2;\ 4)$.

2311. $\int\limits_{C}(2a-y)\,dx+x\,dy$, где C — дуга первой арки циклоиды

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),$$

пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

2312. $\int\limits_{OA}2xy\,dx-x^2\,dy$, взятый вдоль различных путей, выходящих из начала координат $O(0;\ 0)$ и заканчивающихся в точке $A(2;\ 1)$ (рис. 103):

а) прямой OmA;
б) параболы OnA, осью симметрии которой является ось OY;
в) параболы OpA, осью симметрии которой является ось OX;
г) ломаной линии OBA;
д) ломаной линии OCA.

2313. $\int\limits_{OA}2xy\,dx+x^2\,dy$ в условиях задачи 2312.

2314*. $\oint \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, взятый вдоль окружности $x^2+y^2=a^2$ против хода часовой стрелки.

2315. $\int\limits_C y^2\,dx+x^2\,dy$, где C есть верхняя половина эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, пробегаемая по ходу часовой стрелки.

2316. $\int\limits_{AB} \cos y\,dx-\sin x\,dy$, взятый вдоль отрезка AB биссектрисы второго координатного угла, если абсцисса точки A равна 2 и ордината точки B равна 2.

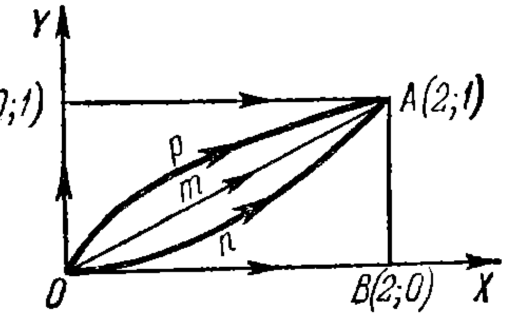

Рис. 103.

2317. $\oint\limits_C \frac{xy\,(y\,dx-x\,dy)}{x^2+y^2}$, где C — правый лепесток лемнискаты $r^2=a^2\cos 2\varphi$, пробегаемый против хода часовой стрелки.

2318. Вычислить криволинейные интегралы от выражений, являющихся полными дифференциалами:

а) $\int\limits_{(-1;\,2)}^{(2;\,3)} x\,dy+y\,dx$, б) $\int\limits_{(0;\,1)}^{(3;\,4)} x\,dx+y\,dy$,

в) $\int\limits_{(0;\,0)}^{(1;\,1)} (x+y)(dx+dy)$,

г) $\int\limits_{(1;\,2)}^{(2;\,1)} \frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}$ (по пути, не пересекающему ось OX),

д) $\int\limits_{\left(\frac{1}{2};\,\frac{1}{2}\right)}^{(x;\,y)} \frac{dx+dy}{x+y}$ (по пути, не пересекающему прямую $x+y=0$),

е) $\int\limits_{(x_1;\,y_1)}^{(x_2;\,y_2)} \varphi(x)\,dx+\psi(y)\,dy$.

2319. Найдя первообразные функции подынтегральных выражений, вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{(-2;\,-1)}^{(3;\,0)} (x^4+4xy^3)\,dx+(6x^2y^2-5y^4)\,dy$,

б) $\int\limits_{(0;\,-1)}^{(1;\,0)} \frac{x\,dy-y\,dx}{(x-y)^2}$ (путь интегрирования не пересекает прямой $y=x$), в) $\int\limits_{(1;\,1)}^{(3;\,1)} \frac{(x+2y)\,dx+y\,dy}{(x+y)^2}$ (путь интегрирования не пересекает прямой $y=-x$),

г) $\int\limits_{(0;\,0)}^{(1;\,1)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\right)dy.$

2320. Вычислить $I=\int \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, взятый по ходу часовой стрелки вдоль четверти эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащей в первом квадранте.

2321. Показать, что если $f(u)$ есть непрерывная функция и C — замкнутый кусочно-гладкий контур, то

$$\oint\limits_C f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)=0.$$

2322. Найти первообразную функцию U, если:

а) $du=(2x+3y)\,dx+(3x-4y)\,dy$;

б) $du=(3x^2-2xy+y^2)\,dx-(x^2-2xy+3y^2)\,dy$;

в) $du=e^{x-y}[(1+x+y)\,dx+(1-x-y)\,dy]$;

г) $du=\frac{dx}{x+y}+\frac{dy}{x+y}$.

Вычислить криволинейные интегралы, взятые вдоль пространственных кривых:

2323. $\int\limits_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$, где C — виток винтовой линии

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \\ z=bt, \end{cases}$$

соответствующий изменению параметра t от 0 до 2π.

2324. $\oint\limits_C y\,dx+z\,dy+x\,dz$, где C — окружность

$$\begin{cases} x=R\cos\alpha\cos t, \\ y=R\cos\alpha\sin t, \\ z=R\sin\alpha \quad (\alpha=\text{const}), \end{cases}$$

пробегаемая в направлении возрастания параметра.

2325. $\int\limits_{OA} xy\,dx+yz\,dy+zx\,dz$, где OA — дуга окружности

$$x^2+y^2+z^2=2Rx; \quad z=x,$$

расположенная по ту сторону от плоскости XOZ, где $y>0$.

ограниченной кривой (гипоциклоидой), описанной какой-нибудь точкой подвижной окружности, и неподвижной окружностью. Разобрать частный случай, когда $r=\frac{R}{4}$ (астроида).

2343. Поле образовано силой, имеющей постоянную величину F и направление положительной полуоси OX. Найти работу поля, когда материальная точка описывает по ходу часовой стрелки четверть окружности $x^2+y^2=R^2$, лежащую в первом квадранте.

2344. Найти работу, производимую силой тяжести при перемещении материальной точки массы m из положения $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ в положение $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ (ось OZ направлена вертикально вверх).

2345. Найти работу упругой силы, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению точки от начала координат, если точка приложения силы описывает против часовой стрелки четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащую в первом квадранте.

2346. Найти потенциальную функцию силы $R\{X,\ Y,\ Z\}$ и определить работу силы на данном участке пути, если:

а) $X=0$, $Y=0$, $Z=-mg$ (сила тяжести) и материальная точка перемещается из положения $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ в положение $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$;

б) $X=-\frac{\mu x}{r^3}$, $Y=-\frac{\mu y}{r^3}$, $Z=-\frac{\mu z}{r^3}$, где $\mu=\text{const}$ и $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (сила ньютоновского притяжения) и материальная точка из положения $A(a,\ b,\ c)$ удаляется в бесконечность;

в) $X=-k^2x$, $Y=-k^2y$, $Z=-k^2z$, где $k=\text{const}$ (упругая сила), причем начальная точка пути находится на сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$, а конечная — на сфере $x^2+y^2+z^2=r^2$ $(R>r)$.

§ 10. Поверхностные интегралы

1°. Поверхностный интеграл первого типа. Пусть $f(x,\ y,\ z)$ — непрерывная функция и $z=\varphi(x,\ y)$ — гладкая поверхность S.

Поверхностный интеграл первого типа представляет собой предел интегральной суммы

$$\iint\limits_S f(x,\ y,\ z)\,dS=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i,\ z_i)\,\Delta S_i,$$

где ΔS_i — площадь i-го элемента поверхности S, точка $(x_i,\ y_i,\ z_i)$ принадлежит этому элементу, причем максимальный диаметр элементов разбиения стремится к нулю.

Значение этого интеграла не зависит от выбора стороны поверхности S, по которой производится интегрирование.

Если проекция σ поверхности S на плоскость XOY однозначна, т. е. всякая прямая, параллельная оси OZ, пересекает поверхность S лишь в одной точке, то соответствующий поверхностный интеграл первого типа может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{(\sigma)} f[x, y, \varphi(x, y)] \sqrt{1+\varphi_x'^2(x, y)+\varphi_y'^2(x, y)}\, dx\, dy.$$

Пример 1. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{S} (x+y+z)\, dS,$$

где S — поверхность куба $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Вычислим сумму поверхностных интегралов по верхней грани куба ($z=1$) и по нижней грани куба ($z=0$)

$$\int_0^1\int_0^1 (x+y+1)\, dx\, dy + \int_0^1\int_0^1 (x+y)\, dx\, dy = \int_0^1\int_0^1 (2x+2y+1)\, dx\, dy = 3.$$

Очевидно, что искомый поверхностный интеграл в три раза больше и равен

$$\iint\limits_{S} (x+y+z)\, dS = 9.$$

2°. Поверхностный интеграл второго типа. Если $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ — непрерывные функции и S^+ — сторона гладкой поверхности S, характеризуемая направлением нормали $n\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то соответствующий *поверхностный интеграл второго типа* выражается следующим образом:

$$\iint\limits_{S^+} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS.$$

При переходе на другую сторону S^- поверхности этот интеграл меняет свой знак на обратный.

Если поверхность S задана в неявном виде $F(x, y, z)=0$, то направляющие косинусы нормали этой поверхности определяются по формулам

$$\cos\alpha = \frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \cos\beta = \frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial z},$$

где

$$D = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

и выбор знака перед радикалом должен быть согласован со стороной поверхности S.

3°. Формула Стокса. Если функции $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ — непрерывно дифференцируемы и C — замкнутый контур, ограничивающий двустороннюю поверхность S, то имеет место *формула Стокса*

$$\oint\limits_{C} P\, dx + Q\, dy + R\, dz =$$

$$= \iint\limits_{S} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к поверхности S, причем направление нормали определяется так, чтобы со стороны нормали обход контура C совершался бы против хода часовой стрелки (в правой системе координат).

Вычислить следующие поверхностные интегралы первого типа:

2347. $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$, где S — сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$.

2348. $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, где S — боковая поверхность конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$ $[0\leqslant z\leqslant b]$.

Вычислить следующие поверхностные интегралы второго типа:

2349. $\iint\limits_S yz\,dy\,dz+xz\,dz\,dx+xy\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона поверхности тетраэдра, ограниченного плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=a$.

2350. $\iint\limits_S z\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2351. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона поверхности полусферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geqslant 0)$.

2352. Найти массу поверхности куба $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$, если поверхностная плотность в точке $M(x;\ y;\ z)$ равна xyz.

2353. Определить координаты центра тяжести однородной параболической оболочки $az=x^2+y^2$ $(0\leqslant z\leqslant a)$.

2354. Найти момент инерции части боковой поверхности конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $[0\leqslant z\leqslant h]$ относительно оси OZ.

2355. Применяя формулу Стокса, преобразовать интегралы:

а) $\oint\limits_C (x^2-yz)\,dx+(y^2-zx)\,dy+(z^2-xy)\,dz$;

б) $\oint\limits_C y\,dx+z\,dy+x\,dz$.

Применяя формулу Стокса, найти данные интегралы и проверить результаты непосредственным вычислением:

2356. $\oint\limits_C (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$, где C — окружность

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\quad x+y+z=0.$$

2357. $\oint\limits_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$, где C — эллипс

$$x^2+y^2=1,\quad x+z=1.$$

2358. $\oint\limits_C x\,dx+(x+y)\,dy+(x+y+z)\,dz$, где C — кривая

$$x=a\sin t,\quad y=a\cos t,\quad z=a(\sin t+\cos t)\quad [0\leqslant t\leqslant 2\pi].$$

2359. $\oint\limits_{ABCA} y^2\,dx+z^2\,dy+x^2\,dz$, где $ABCA$ — контур $\triangle ABC$ с вершинами $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ a;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ a)$.

2360. В каком случае криволинейный интеграл

$$I=\oint\limits_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

по любому замкнутому контуру C равен нулю?

§ 11. Формула Остроградского — Гаусса

Если S — замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая область V, и $P=P(x,\ y,\ z)$, $Q=Q(x,\ y,\ z)$, $R=R(x,\ y,\ z)$ — функции, непрерывные вместе со своими частными производными 1-го порядка в замкнутой области V, то имеет место *формула Остроградского — Гаусса*

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS=\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

Применяя формулу Остроградского — Гаусса, преобразовать следующие поверхностные интегралы по замкнутым поверхностям S, ограничивающим области V ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S).

2361. $\iint\limits_S xy\,dx\,dy+yz\,dy\,dz+zx\,dz\,dx$.

2362. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$.

2363. $\iint\limits_S \dfrac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS$.

2364. $\iint\limits_S \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS$.

С помощью формулы Остроградского — Гаусса вычислить следующие поверхностные интегралы:

2365. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона поверхности куба $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$.

2366. $\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$, где S — наружная сторона пирамиды, ограниченной поверхностями $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

2367. $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

2368. $\iint\limits_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS$, где S — внешняя полная поверхность конуса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0 \qquad [0\leqslant z\leqslant b].$$

2369. Доказать, что если S — замкнутая поверхность и $\boldsymbol{l}$ — любое постоянное направление, то

$$\iint\limits_S \cos(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{l})\,dS=0,$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S.

2370. Доказать, что объем тела V, ограниченного поверхностью S, равен

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

§ 12. Элементы теории поля

1°. Скалярное и векторное поля. *Скалярное поле* определяется скалярной функцией точки $u=f(P)=f(x,\ y,\ z)$, где $P(x,\ y,\ z)$ — точка пространства. Поверхности $f(x,\ y,\ z)=C$, где $C=\text{const}$, называются *поверхностями уровня* скалярного поля.

Векторное поле определяется векторной функцией точки $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(P)=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, где P — точка пространства и $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ — радиус-вектор точки P. В координатной форме $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, где $a_x=a_x(x,\ y,\ z)$, $a_y=a_y(x,\ y,\ z)$, $a_z=a_z(x,\ y,\ z)$ — проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на координатные оси. *Векторные линии* (*силовые линии, линии тока*) векторного поля находятся из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a_x}=\frac{dy}{a_y}=\frac{dz}{a_z}.$$

Скалярное или векторное поле, не зависящее от времени t, называется *стационарным*, а зависящее от времени — *нестационарным*.

2°. Градиент. Вектор

$$\operatorname{grad} U(P)=\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}\equiv\nabla U,$$

где $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$ — оператор Гамильтона (набла), называется *градиентом* поля $U=f(P)$ в данной точке P (ср. гл. VI, § 6). Градиент направлен по нормали n к поверхности уровня в точке P в сторону возрастания функции U и имеет длину, равную

$$\frac{\partial U}{\partial n}=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Если направление задано единичным вектором $\boldsymbol{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\operatorname{grad} U\cdot\boldsymbol{l}=\operatorname{grad}_l U=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$$

(*производная функции U по направлению l*).

3°. Дивергенция и вихрь. *Дивергенцией* векторного поля $\boldsymbol{a}(P)=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ называется скаляр $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\nabla\boldsymbol{a}$.

Вихрем векторного поля $\boldsymbol{a}(P)=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ называется вектор

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=\nabla\times\boldsymbol{a}.$$

4°. Поток вектора. *Потоком* векторного поля $\boldsymbol{a}(P)$ через поверхность S в сторону, определяемую единичным вектором нормали $\boldsymbol{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ к поверхности S, называется интеграл

$$\iint_S \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,dS=\iint_S a_n\,dS=\iint_S (a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)\,dS.$$

Если S — замкнутая поверхность, ограничивающая область V, а $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S, то справедлива *формула Остроградского — Гаусса*, которая в векторной форме имеет вид

$$\oint\!\!\!\oint_S a_n\,dS=\iiint_{(V)}\operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dV.$$

5°. Циркуляция вектора; работа поля. *Линейный интеграл* от вектора $\boldsymbol{a}$ по кривой C определяется формулой

$$\int_C \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=\int_C a_s\,ds=\int_C a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz \tag{1}$$

и представляет собой *работу* поля $\boldsymbol{a}$ вдоль кривой C (a_s — проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на касательную к C).

Если кривая C — замкнутая, то линейный интеграл (1) называется *циркуляцией* векторного поля $\boldsymbol{a}$ вдоль контура C.

Если замкнутая кривая C ограничивает двустороннюю поверхность S, то справедлива *формула Стокса*, которая в векторной форме имеет вид

$$\oint_C \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=\iint_S \boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,dS=\iint_S(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_n\,dS,$$

где $\boldsymbol{n}$ — вектор нормали к поверхности S, направление которого должно быть выбрано так, чтобы для наблюдателя, смотрящего по направлению $\boldsymbol{n}$, обход контура C совершался в правой системе координат против хода часовой стрелки.

6°. Потенциальное и соленоидальное поля. Векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ называется *потенциальным*, если

$$\boldsymbol{a}=\operatorname{grad} U,$$

где $U=f(r)$ — скалярная функция (*потенциал* поля).

Для потенциальности поля $\boldsymbol{a}$, заданного в односвязной области, необходимо и достаточно, чтобы оно было *безвихревым*, т. е. чтобы $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0$. В этом случае существует потенциал U, определяемый из уравнения

$$dU=a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz.$$

Если потенциал U — однозначная функция, то $\int\limits_{AB}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=U(B)-U(A)$; в частности, циркуляция вектора $\boldsymbol{a}$ равна нулю: $\oint\limits_{C}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=0$.

Векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ называется *соленоидальным*, если в каждой точке поля $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=0$; в этом случае поток вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Если поле является одновременно потенциальным и соленоидальным, то $\operatorname{div}(\operatorname{grad} U)=0$ и потенциальная функция U является гармонической, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0$, или $\Delta U=0$, где $\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

2371. Определить поверхности уровня скалярного поля $U=f(r)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Каковы будут поверхности уровня поля $U=F(\rho)$, где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$?

2372. Определить поверхности уровня скалярного поля

$$U=\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

2373. Показать, что векторными линиями векторного поля $\boldsymbol{a}(P)=\boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор, являются прямые, параллельные вектору $\boldsymbol{c}$.

2374. Найти векторные линии поля $\boldsymbol{a}=-\omega y\boldsymbol{i}+\omega x\boldsymbol{j}$, где ω — постоянная.

2375. Вывести формулы:

а) $\operatorname{grad}(C_1U+C_2V)=C_1\operatorname{grad}U+C_2\operatorname{grad}V$, где C_1 и C_2 — постоянные;

б) $\operatorname{grad}(UV)=U\operatorname{grad}V+V\operatorname{grad}U$;

в) $\operatorname{grad}(U^2)=2U\operatorname{grad}U$;

г) $\operatorname{grad}\left(\frac{U}{V}\right)=\frac{V\operatorname{grad}U-U\operatorname{grad}V}{V^2}$;

д) $\operatorname{grad}\varphi(U)=\varphi'(U)\operatorname{grad}U$.

2376. Найти величину и направление градиента поля $U=x^3+y^3+z^3-3xyz$ в точке $A(2;\,1;\,1)$. Определить, в каких точках

2392. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$ через: а) боковую поверхность конуса $\frac{x^2+y^2}{R^2}\leqslant\frac{z^2}{H^2}$, $0\leqslant z\leqslant H$; б) через полную поверхность этого конуса.

2393*. Вычислить дивергенцию и поток силы притяжения $\boldsymbol{F}=-\frac{m\boldsymbol{r}}{r^3}$ точки массы m, помещенной в начале координат, через произвольную замкнутую поверхность, окружающую эту точку.

2394. Вычислить линейный интеграл вектора $\boldsymbol{r}$ вдоль одного витка винтовой линии $x=R\cos t$; $y=R\sin t$; $z=ht$ от $t=0$ до $t=2\pi$.

2395. С помощью теоремы Стокса вычислить циркуляцию вектора $\boldsymbol{a}=x^2y^3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ вдоль окружности $x^2+y^2=R^2$; $z=0$, приняв в качестве поверхности полусферу $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

2396. Показать, что если сила $\boldsymbol{F}$—центральная, т. е. направлена к неподвижной точке 0 и зависит только от расстояния r до этой точки: $\boldsymbol{F}=f(r)\boldsymbol{r}$, где $f(r)$—однозначная непрерывная функция, то поле—потенциальное. Найти потенциал U поля.

2397. Найти потенциал U гравитационного поля, создаваемого материальной точкой массы m, помещенной в начале координат: $\boldsymbol{a}=-\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}$. Показать, что потенциал U удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta U=0$.

2398. Выяснить, имеет ли данное векторное поле потенциал U, и найти U, если потенциал существует:

а) $\boldsymbol{a}=(5x^2y-4xy)\boldsymbol{i}+(3x^2-2y)\boldsymbol{j}$;

б) $\boldsymbol{a}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$;

в) $\boldsymbol{a}=(y+z)\boldsymbol{i}+(x+z)\boldsymbol{j}+(x+y)\boldsymbol{k}$.

2399. Доказать, что пространственное центральное поле $\boldsymbol{a}=f(r)\boldsymbol{r}$ будет соленоидальным только при $f(r)=\frac{k}{r^3}$, где $k=\text{const}$.

2400. Будет ли соленоидальным векторное поле $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{c}$—постоянный вектор?

ГЛАВА VIII

РЯДЫ

§ 1. Числовые ряды

1°. Основные понятия. Числовой ряд

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

называется *сходящимся*, если его *частичная сумма*

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

имеет предел при $n \to \infty$. Величина $S=\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ называется при этом *суммой* ряда, а число

$$R_n=S-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots$$

— *остатком* ряда. Если предел $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ не существует, то ряд называется *расходящимся*.

Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n \to \infty} a_n=0$ (*необходимый признак сходимости*). Обратное утверждение неверно.

Для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы для всякого положительного числа ε можно было подобрать такое N, что при $n > N$ и любом положительном p выполнялось бы неравенство

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}| < \varepsilon$$

(*критерий Коши*).

Сходимость или расходимость ряда не нарушится, если прибавить или отбросить конечное число его членов.

2°. Признаки сходимости и расходимости знакоположительных рядов.

а) Признак сравнения I. Если $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, начиная с некоторого $n=n_0$, и ряд

$$b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2}$$

сходится, то ряд (1) также сходится. Если ряд (1) расходится, то расходится и ряд (2).

В качестве рядов для сравнения удобно, в частности, выбирать *геометрическую прогрессию*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \qquad (a \neq 0),$$

которая сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$, и *гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

являющийся рядом расходящимся.

Пример 1. Ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots$$

сходится, так как здесь

$$a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n} < \frac{1}{2^n},$$

причем геометрическая прогрессия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

знаменатель которой $q=\frac{1}{2}$, сходится.

Пример 2. Ряд

$$\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\ldots+\frac{\ln n}{n}+\ldots$$

расходится, так как его общий член $\frac{\ln n}{n}$ больше соответствующего члена $\frac{1}{n}$ гармонического ряда (который расходится).

б) Признак сравнения II. Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ (в частности, если $a_n \sim b_n$), то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

Пример 3. Ряд

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$$

расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n-1}:\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\neq 0,$$

а ряд с общим членом $\frac{1}{n}$ расходится.

Пример 4. Ряд

$$\frac{1}{2-1}+\frac{1}{2^2-2}+\frac{1}{2^3-3}+\ldots+\frac{1}{2^n-n}+\ldots$$

Подставляя y и y' в уравнение (4), получим:

$$\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{dC}{dx}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}\cdot C=\operatorname{tg} x\cdot\frac{C}{\cos x}+\cos x,\ \text{или}\ \frac{dC}{dx}=\cos^2 x,$$

откуда

$$C(x)=\int\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C_1.$$

Следовательно, общее решение уравнения (4) имеет вид

$$y=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C_1\right)\cdot\frac{1}{\cos x}.$$

Для решения линейного уравнения (1) можно также применить подстановку

$$y=uv, \tag{5}$$

где u и v — неизвестные функции от x. Тогда уравнение (1) примет вид

$$[u'+P(x)u]v+v'u=Q(x). \tag{6}$$

Если потребовать, чтобы

$$u'+P(x)u=0, \tag{7}$$

то из (7) найдем u, затем из (6) найдем v, а следовательно, из (5) найдем y.

2°. Уравнение Бернулли. Уравнение 1-го порядка вида

$$y'+P(x)y=Q(x)y^{\alpha},$$

где $\alpha\neq 0$ и $\alpha\neq 1$, называется *уравнением Бернулли*. Оно приводится к линейному с помощью подстановки $z=y^{1-\alpha}$. Можно также непосредственно применять подстановку $y=uv$ или метод вариации произвольной постоянной.

Пример 2. Решить уравнение

$$y'=\frac{4}{x}y+x\sqrt{y}.$$

Решение. Это — уравнение Бернулли $\left(\alpha=\frac{1}{2}\right)$. Полагая

$$y=uv,$$

получим:

$$u'v+v'u=\frac{4}{x}uv+x\sqrt{uv}\ \text{или}\ v\left(u'-\frac{4}{x}u\right)+v'u=x\sqrt{uv}. \tag{8}$$

Для определения функции u потребуем выполнения соотношения

$$u'-\frac{4}{x}u=0,$$

откуда

$$u=x^4.$$

Подставляя это выражение в уравнение (8), получим:

$$v'x^4=x\sqrt{vx^4},$$

отсюда находим v:

$$v=\left(\frac{1}{2}\ln|x|+C\right)^2,$$

и, следовательно, общее решение получим в виде

$$y=x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x|+C\right)^2.$$

Найти общие интегралы уравнений:

2785. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x$.

2786. $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=x^3$.

2787*. $(1+y^2)\,dx=(\sqrt{1+y^2}\sin y-xy)\,dy$.

2788. $y^2\,dx-(2xy+3)\,dy=0$.

Найти частные решения, удовлетворяющие указанным условиям:

2789. $xy'+y-e^x=0$; $y=b$ при $x=a$.

2790. $y'-\frac{y}{1-x^2}-1-x=0$; $y=0$ при $x=0$.

2791. $y'-y\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x}$; $y=0$ при $x=0$.

Найти общие решения уравнений:

2792. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=-xy^2$.

2793. $2xy\frac{dy}{dx}-y^2+x=0$.

2794. $y\,dx+\left(x-\frac{1}{2}x^3y\right)dy=0$.

2795. $3x\,dy=y(1+x\sin x-3y^3\sin x)\,dx$.

2796. Даны три частных решения y, y_1, y_2 линейного уравнения. Доказать, что выражение $\frac{y_2-y}{y-y_1}$ сохраняет постоянное значение при любом x. Каков геометрический смысл этого результата?

2797. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного осью OX, касательной и радиусом-вектором точки касания, постоянна.

2798. Найти уравнение кривой, у которой длина отрезка, отсекаемого касательной на оси абсцисс, равна квадрату ординаты точки касания.

2799. Найти уравнение кривой, у которой длина отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, равна поднормали.

2800. Найти уравнение кривой, у которой длина отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, пропорциональна квадрату ординаты точки касания.

2801. Найти уравнение кривой, для которой длина отрезка касательной равна расстоянию точки пересечения этой касательной с осью OX от точки $M(0, a)$.

§ 6. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

1°. Уравнения в полных дифференциалах. Если для дифференциального уравнения

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

выполнено равенство $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, то уравнение (1) может быть записано в виде $dU(x, y) = 0$ и называется *уравнением в полных дифференциалах*. Общий интеграл уравнения (1) есть $U(x, y) = C$. Функция $U(x, y)$ определяется способом, указанным в гл. VI, § 8, или по формуле

$$U = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy$$

(см. гл. VII, § 9).

Пример 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0.$$

Решение. Это — уравнение в полных дифференциалах, так как $\frac{\partial(3x^2+6xy^2)}{\partial y} = \frac{\partial(6x^2y+4y^3)}{\partial x} = 12xy$ и, следовательно, уравнение имеет вид $dU = 0$.

Здесь

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3;$$

отсюда

$$U = \int (3x^2 + 6xy^2)\,dx + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

Дифференцируя U по y, найдем $\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3$ (по условию); отсюда $\varphi'(y) = 4y^3$ и $\varphi(y) = y^4 + C_0$. Окончательно получим $U(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C_0$, следовательно, $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$ есть искомый общий интеграл данного уравнения.

2°. Интегрирующий множитель. Если левая часть уравнения (1) не является полным дифференциалом и выполнены условия теоремы Коши, то существует функция $\mu = \mu(x, y)$ *(интегрирующий множитель)* такая, что

$$\mu(P\,dx + Q\,dy) = dU. \tag{2}$$

Отсюда получаем, что функция μ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q).$$

$\int e^{\frac{x}{2}} dx =$

Интегрирующий множитель μ легко находится в двух случаях:

1) $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=F(x)$, тогда $\mu=\mu(x)$;

2) $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=F_1(y)$, тогда $\mu=\mu(y)$.

Пример 2. Решить уравнение $\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+(x^2+y^2)\,dy=0$.

Решение. Здесь $P=2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}$, $Q=x^2+y^2$ и $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=$
$=\frac{2x+x^2+y^2-2x}{x^2+y^2}=1$, следовательно, $\mu=\mu(x)$.

Так как $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$ или $\mu\frac{\partial P}{\partial y}=\mu\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{d\mu}{dx}$, то

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx=dx \text{ и } \ln\mu=x,\ \mu=e^x.$$

Умножая уравнение на $\mu=e^x$, получим:

$$e^x\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+e^x(x^2+y^2)\,dy=0$$

— уравнение в полных дифференциалах. Проинтегрировав его, будем иметь общий интеграл

$$ye^x\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)=C.$$

Найти общие интегралы уравнений:

2802. $(x+y)\,dx+(x+2y)\,dy=0$.

2803. $(x^2+y^2+2x)\,dx+2xy\,dy=0$.

2804. $(x^3-3xy^2+2)\,dx-(3x^2y-y^2)\,dy=0$.

2805. $x\,dx+y\,dy=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$.

2806. $\frac{2x\,dx}{y^3}+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$.

2807. Найти частный интеграл уравнения

$$\left(x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0,$$

удовлетворяющий начальному условию $y(0)=2$.

Решить уравнения, допускающие интегрирующий множитель вида $\mu=\mu(x)$ или $\mu=\mu(y)$:

2808. $(x+y^2)\,dx-2xy\,dy=0$.

2809. $y(1+xy)\,dx-x\,dy=0$.

2810. $\frac{y}{x}dx+(y^3-\ln x)\,dy=0$.

2811. $(x\cos y-y\sin y)\,dy+(x\sin y+y\cos y)\,dx=0$.

Дифференцируя общий интеграл по C и исключая C, найдем особый интеграл

$$y+x=0.$$

(Проверка показывает, что $y+x=0$ есть решение данного уравнения.)

Особый интеграл можно также найти, дифференцируя $xp^2+2xp-y=0$ по p и исключая p.

2° Решение дифференциального уравнения методом введения параметра. Если дифференциальное уравнение 1-го порядка имеет вид

$$x=\varphi(y,\ y'),$$

то переменные y и x могут быть определены из системы уравнений

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dy},\quad x=\varphi(y,\ p),$$

где $p=y'$ играет роль параметра.

Аналогично, если $y=\psi(x,\ y')$, то x и y определяются из системы уравнений

$$p=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{dp}{dx},\quad y=\psi(x,\ p).$$

Пример 2. Найти общий и особый интегралы уравнения

$$y=y'^2-xy'+\frac{x^2}{2}.$$

Решение. Делая подстановку $y'=p$, перепишем уравнение в виде

$$y=p^2-xp+\frac{x^2}{2}.$$

Дифференцируя по x, считая p функцией от x, имеем

$$p=2p\frac{dp}{dx}-p-x\frac{dp}{dx}+x$$

или $\frac{dp}{dx}(2p-x)=(2p-x)$, или $\frac{dp}{dx}=1$. Интегрируя, получим $p=x+C$. Подставляя в первоначальное уравнение, имеем общее решение:

$$y=(x+C)^2-x(x+C)+\frac{x^2}{2}\ \text{ или }\ y=\frac{x^2}{2}+Cx+C^2.$$

Дифференцируя общее решение по C и исключая C, получаем особое решение: $y=\frac{x^2}{4}$. $\left(\text{Проверка показывает, что } y=\frac{x^2}{4} \text{ есть решение данного уравнения.}\right)$

Если приравнять нулю множитель $2p-x$, на который было произведено сокращение, то получим $p=\frac{x}{2}$ и, подставив p в данное уравнение, получим $y=\frac{x^2}{4}$ — то же самое особое решение.

Найти общие и особые интегралы уравнений (в №№ 2812—2813 построить поле интегральных кривых):

2812. $y'^2-\frac{2y}{x}y'+1=0.$ **2813.** $4y'^2-9x=0.$

2814. $yy'^2-(xy+1)y'+x=0.$ **2815.** $yy'^2-2xy'+y=0.$

2816. Найти интегральные кривые уравнения $y'^2+y^2=1$, проходящие через точку $M\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$.

Вводя параметр $y'=p$, решить уравнения:

2817. $x=\sin y'+\ln y'.$ **2818.** $y=y'^2e^{y'}.$

2819. $y=y'^2+2\ln y'.$ **2820.** $4y=x^2+y'^2.$

2821. $e^x=\frac{y^2+y'^2}{2y'}.$ **2822.** $y=y'+\sqrt{1-y'^2}$

§ 8. Уравнения Лагранжа и Клеро

1°. Уравнение Лагранжа. Уравнение вида

$$y=x\varphi(p)+\psi(p), \tag{1}$$

где $p=y'$, называется *уравнением Лагранжа*. При помощи дифференцирования, учитывая, что $dy=p\,dx$, уравнение (1) сводится к линейному относительно x и $\frac{dx}{dp}$:

$$p\,dx=\varphi(p)\,dx+[x\varphi'(p)+\psi'(p)]\,dp. \tag{2}$$

Если $p\not\equiv\varphi(p)$, то из уравнений (1) и (2) получаем общее решение в параметрическом виде:

$$x=Cf(p)+g(p),\quad y=[Cf(p)+g(p)]\,\varphi(p)+\psi(p),$$

где p — параметр и $f(p)$, $g(p)$ — некоторые известные функции. Кроме того, может существовать особое решение, отыскиваемое обычным приемом.

2°. Уравнение Клеро. Если в уравнении (1) $\varphi(p)\equiv p$, то получаем *уравнение Клеро*

$$y=xp+\psi(p).$$

Общее решение его имеет вид $y=Cx+\psi(C)$ (семейство прямых). Кроме того, существует особое решение (огибающая), получающееся в результате исключения параметра p из системы уравнений

$$\begin{cases}x=-\psi'(p),\\ y=px+\psi(p).\end{cases}$$

Пример. Решить уравнение

$$y=2y'x+\frac{1}{y'}. \tag{3}$$

Решение. Полагаем $y'=p$, тогда $y=2px+\frac{1}{p}$; дифференцируя и заменяя dy на $p\,dx$, получим:

$$p\,dx=2p\,dx+2x\,dp-\frac{dp}{p^2}$$

ния (первый вид) $y_0=C_1e^x+C_2e^{-\frac{x}{2}}$. Правая часть заданного уравнения $f(x)=4xe^{2x}\equiv e^{ax}P_n(x)$. Следовательно, $Y=e^{2x}(Ax+B)$, так как $n=1$ и $r=0$. Дифференцируя Y два раза и подставляя производные в данное уравнение, получим:

$$2e^{2x}(4Ax+4B+4A)-e^{2x}(2Ax+2B+A)-e^{2x}(Ax+B)=4xe^{2x}.$$

Сокращая на e^{2x} и приравнивая друг другу коэффициенты при первых степенях x и свободные члены в левой и правой частях равенства, имеем $5A=4$ и $7A+5B=0$, откуда $A=\frac{4}{5}$ и $B=-\frac{28}{25}$.

Таким образом, $Y=e^{2x}\left(\frac{4}{5}x-\frac{28}{25}\right)$, а общее решение данного уравнения есть

$$y=C_1e^x+C_2e^{-\frac{1}{2}}+1^{2x}\left(\frac{4}{5}x-\frac{28}{25}\right).$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y''-2y'+y=xe^x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-2k+1=0$ имеет двукратный корень $k=1$. Правая часть уравнения имеет вид $f(x)=xe^x$; здесь $a=1$ и $n=1$. Частное решение $Y=x^2e^x(Ax+B)$, так как a совпадает с двукратным корнем $k=1$ и, следовательно, $r=2$.

Дифференцируя Y два раза, подставляя в уравнение и приравнивая коэффициенты, получим $A=\frac{1}{6}$, $B=0$. Следовательно, общее решение данного уравнения запишется в виде

$$y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{6}x^3e^x.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y''+y=x\sin x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2+1=0$ имеет корни $k_1=i$ и $k_2=-i$. Общее решение соответствующего однородного уравнения будет [см. 3), где $\alpha=0$ и $\beta=1$]:

$$y_0=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Правая часть вида

$$f(x)=e^{ax}[P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx],$$

где $a=0$, $b=1$, $P_n(x)=0$, $Q_m(x)=x$. Ей соответствует частное решение

$$Y=x[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x]$$

(здесь $N=1$, $a=0$, $b=1$, $r=1$).

Дифференцируя два раза и подставляя в уравнение, приравниваем коэффициенты в обеих частях равенства при $\cos x$, $x\cos x$, $\sin x$ и $x\sin x$. В результате получается четыре уравнения $2A+2D=0$, $4C=0$, $-2B+2C=0$, $-4A=1$, из которых и определяются $A=-{}^1/_4$, $B=0$, $C=0$, $D={}^1/_4$. Поэтому $Y=-\frac{x^2}{4}\cos x+\frac{x}{4}\sin x$.

Общее решение

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{x^2}{4}\cos x+\frac{x}{4}\sin x.$$

в уравнение (2), получим уравнение 2-го порядка с одной неизвестной функцией y. Решая его, находим:

$$y=\psi(x,\ C_1,\ C_2), \tag{4}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подставляя функцию (4) в формулу (3), определяем функцию z без новых интеграций. Совокупность формул (3) и (4), где y заменено на ψ, дает *общее решение системы* (1).

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+2y+4z=1+4x, \\ \dfrac{dz}{dx}+y-z\quad=\dfrac{3}{2}x^2. \end{cases}$$

Решение. Дифференцируем первое уравнение по x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+4\frac{dz}{dx}=4.$$

Из первого уравнения определяется $z=\frac{1}{4}\left(1+4x-\frac{dy}{dx}-2y\right)$ и тогда из второго будем иметь: $\frac{dz}{dx}=\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}y-\frac{1}{4}\frac{dy}{dx}$. Подставляя z и $\frac{dz}{dx}$ в уравнение, полученное после дифференцирования, приходим к уравнению 2-го порядка с одной неизвестной y:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y=-6x^2-4x+3.$$

Решая его, найдем:

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+x^2+x,$$

и тогда

$$z=\frac{1}{4}\left(1+4x-\frac{dy}{dx}-2y\right)=-C_1e^{2x}+\frac{C_2}{4}e^{-3x}-\frac{1}{2}x^2.$$

Аналогично можно поступать и в случае системы с большим числом уравнений.

Решить системы:

3078. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=z, \\ \dfrac{dz}{dx}=-y. \end{cases}$

3079. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=y+5z, \\ \dfrac{dz}{dx}+y+3z=0. \end{cases}$

3080. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=-3y-z, \\ \dfrac{dz}{dx}=y-z, \end{cases}$

3081. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y, \\ \dfrac{dy}{dt}=z, \\ \dfrac{dz}{dt}=x. \end{cases}$

3082. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$

3083. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z, \\ \dfrac{dz}{dx} = x + y + z. \end{cases}$

3084. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2y + z = \sin x, \\ \dfrac{dz}{dx} - 4y - 2z = \cos x. \end{cases}$

3085. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 3y + 4z = 2x, \\ \dfrac{dz}{dx} - y - z = x; \end{cases}$

$y = 0,\ z = 0$ при $x = 0$.

3086. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 4x - y + 36t = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x - y + 2e^t = 0; \end{cases}$

$x = 0,\ y = 1$ при $t = 0$.

3087. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{2} y. \end{cases}$

3088. а) $\dfrac{dx}{x^3 + 3xy^2} = \dfrac{dy}{2y^3} = \dfrac{dz}{2y^2 z}$;

б)* $\dfrac{dx}{x - y} = \dfrac{dy}{x + y} = \dfrac{dz}{z}$;

в)* $\dfrac{dx}{y - z} = \dfrac{dy}{z - x} = \dfrac{dz}{x - y}$, выделить интегральную кривую, проходящую через точку (1; 1; —2).

3089. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + z = 1, \\ \dfrac{dz}{dx} + \dfrac{2}{x^2} y = \ln x. \end{cases}$

3090. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2y + 4z = e^x, \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} - y - 3z = -x. \end{cases}$

3091**. Снаряд вылетает из орудия с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти уравнение движения снаряда, принимая сопротивление воздуха пропорциональным скорости.

3092*. Материальная точка M притягивается центром O с силой, пропорциональной расстоянию. Движение начинается из точки A на расстоянии a от центра с начальной скоростью v_0, перпендикулярной к отрезку OA. Найти траекторию точки M.

§ 16. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Если интегрирование дифференциального уравнения при помощи элементарных функций не удается, то его решение в некоторых случаях можно искать в виде степенного ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n. \qquad (1)$$

Неопределенные коэффициенты c_n ($n=0, 1, 2, \ldots$) находятся путем подстановки ряда (1) в уравнение и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях бинома $x-x_0$ в левой и правой частях полученного равенства.

Можно также искать решение уравнения

$$y'=f(x, y) \tag{2}$$

в виде ряда Тейлора

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{3}$$

где $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=f(x_0, y_0)$ и дальнейшие производные $y^{(n)}(x_0)$ ($n=2, 3, \ldots$) последовательно находятся при помощи дифференцирования уравнения (2) и подстановки вместо x числа x_0.

Пример 1. Найти решение уравнения

$$y''-xy=0,$$

если $y=y_0$, $y'=y_0'$ при $x=0$.

Решение. Полагаем

$$y=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots,$$

отсюда, дифференцируя, получим:

$$y''=2\cdot 1c_2+3\cdot 2c_3x+\ldots+n(n-1)c_nx^{n-2}+(n+1)nc_{n+1}x^{n-1}+ \\ +(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+\ldots$$

Подставляя y и y'' в данное уравнение, приходим к тождеству

$$[2\cdot 1c_2+3\cdot 2c_3x+\ldots+n(n-1)c_nx^{n-2}+(n+1)nc_{n+1}x^{n-1}+ \\ +(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+\ldots]-x[c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots]\equiv 0.$$

Собирая в левой части полученного равенства члены с одинаковыми степенями x и приравнивая нулю коэффициенты при этих степенях, будем иметь

$$c_2=0;\quad 3\cdot 2c_3-c_0=0,\quad c_3=\frac{c_0}{3\cdot 2};\quad 4\cdot 3c_4-c_1=0,\quad c_4=\frac{c_1}{4\cdot 3};$$

$$5\cdot 4c_5-c_2=0,\quad c_5=\frac{c_2}{5\cdot 4}\text{ и т. д.}$$

Вообще,

$$c_{3k}=\frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(3k-1)3k},\quad c_{3k+1}=\frac{c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot 3k(3k+1)},$$

$$c_{3k+2}=0\quad (k=1, 2, 3, \ldots).$$

Следовательно,

$$y=c_0\left(1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(3k-1)3k}+\ldots\right)+ \\ +c_1\left(x+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\ldots+\frac{x^{3k+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot 3k(3k+1)}+\ldots\right), \tag{4}$$

где $c_0=y_0$ и $c_1=y_0'$.

Применяя признак Даламбера, легко убедиться, что ряд (4) сходится при $-\infty<x<+\infty$.

Пример 2. Найти решение уравнения

$$y' = x + y; \quad y_0 = y(0) = 1.$$

Решение. Полагаем

$$y = y_0 + y_0' x + \frac{y_0''}{2!} x^2 + \frac{y_0'''}{3!} x^3 + \ldots$$

Имеем $y_0 = 1$, $y_0' = 0 + 1 = 1$. Дифференцируя обе части уравнения $y' = x + y$, последовательно находим $y'' = 1 + y'$, $y_0'' = 1 + 1 = 2$, $y''' = y''$, $y_0''' = 2$, и т. д. Следовательно,

$$y = 1 + x + \frac{2}{2!} x^2 + \frac{2}{3!} x^3 + \ldots$$

Для разбираемого примера найденное решение можно записать в конечном виде

$$y = 1 + x + 2(e^x - 1 - x) \quad \text{или} \quad y = 2e^x - 1 - x.$$

Аналогично следует поступать в случае дифференциальных уравнений высших порядков. Исследование сходимости полученных рядов, вообще говоря, сложно и при решении задач этого параграфа обязательным не предполагается.

Найти с помощью степенных рядов решения уравнений при указанных начальных условиях.

В №№ 3097, 3098, 3099, 3101 исследовать сходимость полученных решений.

3093. $y' = y + x^2$; $y = -2$ при $x = 0$.

3094. $y' = 2y + x - 1$; $y = y_0$ при $x = 1$.

3095. $y' = y^2 + x^3$; $y = \frac{1}{2}$ при $x = 0$.

3096. $y' = x^2 - y^2$; $y = 0$ при $x = 0$.

3097. $(1 - x) y' = 1 + x - y$; $y = 0$ при $x = 0$.

3098*. $xy'' + y = 0$; $y = 0$, $y' = 1$ при $x = 0$.

3099. $y'' + xy = 0$; $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.

3100*. $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$; $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.

3101*. $y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$; $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.

3102. $\frac{d^2x}{dt^2} + x \cos t = 0$; $x = a$, $\frac{dx}{dt} = 0$ при $t = 0$.

§ 17. Задачи на метод Фурье

Для нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных по методу Фурье сначала отыскивают частные решения этого уравнения специального типа, каждое из которых представляет собой произведение функций, зависящих только от одного аргумента. В простейшем случае имеется бесконечная совокупность таких решений u_n $(n = 1, 2, \ldots)$, линейно независимых в любом конечном числе между собой и удовлетворяющих заданным *граничным условиям*. Искомое решение u

представляется в виде ряда, расположенного по этим частным решениям:

$$u=\sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n. \tag{1}$$

Остающиеся неопределенными коэффициенты C_n находятся из *начальных условий.*

Задача. Поперечное смещение $u=u(x, t)$ точек струны с абсциссой x в момент времени t удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2}$$

где $a^2=\frac{T_0}{\rho}$ (T_0 — сила натяжения, ρ — линейная плотность струны). Найти форму струны в момент времени t, если концы ее $x=0$ и $x=l$ закреплены и в начальный момент $t=0$ струна имела форму параболы $u=\frac{4h}{l^2}x(l-x)$ (рис. 107) и точки ее имели скорость, равную нулю.

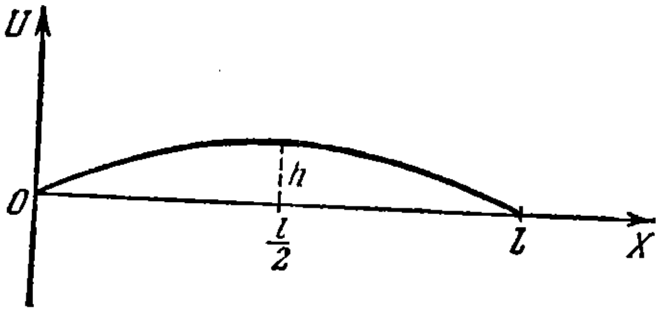

Рис. 107.

Решение. Согласно условию задачи требуется найти решение $u=u(x, t)$ уравнения (2), удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(0, t)=0, \quad u(l, t)=0 \tag{3}$$

и начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0)&=\frac{4h}{l^2}x(l-x),\\ u'_t(x, 0)&=0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ищем ненулевые решения уравнения (2) специального вида $u=X(x)\,T(t)$. Подставив это выражение в уравнение (2) и разделив переменные, получим:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}\equiv\frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{5}$$

Так как переменные x и t являются независимыми, то тождество (5) возможно лишь в том случае, когда общая величина отношения (5) будет постоянной. Обозначая эту постоянную через $-\lambda^2$, найдем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$T''(t)+(a\lambda)^2\cdot T(t)=0 \quad \text{и} \quad X''(x)+\lambda^2X(x)=0.$$

Решая эти уравнения, получим:

$$T(t)=A\cos a\lambda t+B\sin a\lambda t,$$
$$X(x)=C\cos\lambda x+D\sin\lambda x,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные. Из условия (3) имеем: $X(0)=0$ и $X(l)=0$, следовательно, $C=0$ и $\sin\lambda l=0$ (так как D не может одновременно с C равняться нулю). Поэтому $\lambda_k=\frac{k\pi}{l}$, где k — целое число. Легко убедиться, что мы не потеряем общности, взяв для k лишь положительные значения ($k=1, 2, 3, \ldots$). Каждому значению λ_k соответствует частное

ГЛАВА X
ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Действия с приближенными числами

1°. Абсолютная погрешность. *Абсолютной погрешностью* (*абсолютной ошибкой*) приближенного числа a, заменяющего точное число A, называется абсолютная величина разности между ними. Число Δ, удовлетворяющее неравенству

$$|A-a| \leqslant \Delta, \tag{1}$$

называется *предельной абсолютной погрешностью*. Точное число A находится в границах $a-\Delta \leqslant A \leqslant a+\Delta$ или, короче, $A=a \pm \Delta$.

2°. Относительная погрешность. Под *относительной погрешностью* (*относительной ошибкой*) приближенного числа a, заменяющего точное число A ($A>0$), понимается отношение абсолютной погрешности числа a к точному числу A. Число δ, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{|A-a|}{A} \leqslant \delta, \tag{2}$$

называется *предельной относительной погрешностью* приближенного числа a. Так как на практике $A \approx a$, то за предельную относительную погрешность часто принимают число $\delta=\frac{\Delta}{a}$.

3°. Число верных десятичных знаков. Говорят, что положительное приближенное число a, записанное в виде десятичного разложения, имеет *n верных десятичных знаков* (цифр) *в узком смысле*, если абсолютная погрешность этого числа не превышает $\frac{1}{2}$ единицы n-го разряда. В этом случае при $n>1$ за предельную относительную погрешность можно принять число

$$\delta=\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1},$$

где k — первая значащая цифра числа a. Обратно, если известно, что $\delta \leqslant \frac{1}{2(k+1)}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, то число a имеет n верных десятичных знаков в узком смысле. В частности, число a заведомо имеет n верных знаков в узком смысле, если $\delta \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{n}$.