МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.
Контрольные работы для студентов заочной формы обучения всех технических специальностей

*Рекомендовано Ученым советом Нижегородского государственного
технического университета им. Р.Е. Алексеева
в качестве учебного пособия для студентов
заочной формы обучения всех технических специальностей*

Нижний Новгород 2014

УДК 517
ББК 22.1
В 937

Р е ц е н з е н т

доктор физико-математических наук, профессор *В.И. Сумин*

Авторы:
И.В. Кольчик, А.А. Куркин,
И.В. Лисаченко, Е.В. Фролагина

В 937 **Высшая математика. Контрольные работы для студентов заочной формы обучения всех технических специальностей:** учеб. пособие/ И.В. Кольчик [и др.]; Нижегород. гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева. — Н.Новгород, 2014. — 161 с.

ISBN 978-5-502-00468-8

Содержит задания для контрольных самостоятельных работ студентов заочной формы обучения и примеры их решения.

Библиогр.: 12 назв.

УДК 517
ББК 22.1

ISBN 978-5-502-00468-8

Оглавление

Введение

Цель преподавания математики в вузе – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развить логическое мышление и повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов и умение перевести задачу на математический язык.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов заочной формы обучения всех технических специальностей. Оно содержит семь контрольных работ, охватывающих основные разделы высшей математики: линейную алгебру и аналитическую геометрию, математический анализ, дифференциальные уравнения, теорию функций комплексного переменного, векторный анализ, теорию вероятностей и математическую статистику. После каждой контрольной работы приведены решения типовых примеров по соответствующей теме.

Для выполнения контрольной работы студент предварительно должен самостоятельно изучить необходимые разделы курса высшей математики по учебной литературе, рекомендуемой в данном пособии.

Оформление контрольных работ должно быть проведено студентами согласно правилам, представленным в конце учебного пособия.

1. Контрольная работа 1

Задача 1. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Решить систему: 1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления с использованием обратной матрицы; 3) методом определителей.

1.1 $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

1.2 $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

1.3 $$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 14 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

1.4 $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 4 \end{cases}$$

1.5 $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$$

1.6 $$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

1.7 $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

1.8 $$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 5x_1 - 3x_2 - 6x_3 = -7 \end{cases}$$

1.9 $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

1.10 $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

1.11 $$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$$

1.12 $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

1.13 $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31 \\ 4x_1 + 11x_3 = -43 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20 \end{cases}$

1.14 $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

1.15 $\begin{cases} -6x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -23 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

1.16 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 17 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 13 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -17 \end{cases}$

1.17 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$

1.18 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 + 11x_3 = -23 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

1.19 $\begin{cases} -8x_1 + 29x_2 - 10x_3 = 11 \\ -5x_1 + 18x_2 - 7x_3 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

1.20 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$

1.21 $\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_2 + 13x_3 = -23 \\ 3x_1 - x_3 = -5 \end{cases}$

1.22 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 17 \end{cases}$

1.23 $\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 1 \\ 7x_1 + x_2 - 4x_3 = -13 \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 = -13 \end{cases}$

1.24 $\begin{cases} x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 19 \\ 4x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 30 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$

1.25 $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 7 \\ -2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$

1.26 $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 24 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

1.27 $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 14 \\ -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 18 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$

1.28 $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 21 \\ x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 33 \end{cases}$

1.29 $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 16 \\ 7x_1 - 7x_2 + x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 27 \end{cases}$ **1.30** $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = -13 \end{cases}$

Задача 2. Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти: 1) уравнения сторон треугольника; 2) уравнение высоты, опущенной из вершины C на сторону AB; 3) уравнение медианы к стороне AC; 4) угол $\angle A$; 5) сделать чертеж в системе декартовой координат Oxy.

2.1 $A(1,5), B(5,2), C(1,2)$.
2.2 $A(1,2), B(5,5), C(5,2)$.
2.3 $A(5,2), B(1,5), C(5,5)$.
2.4 $A(5,5), B(1,2), C(1,5)$.
2.5 $A(-4,0), B(-1,6), C(-5,6)$.
2.6 $A(-2,3), B(-6,6), C(-2,6)$.
2.7 $A(-2,6), B(-6,3), C(-6,6)$.
2.8 $A(-6,6), B(-2,3), C(-6,3)$.
2.9 $A(-5,-1), B(-2,-5), C(-2,-1)$.
2.10 $A(-2,-1), B(-5,-5), C(-2,-5)$.
2.11 $A(-2,-5), B(-5,-1), C(-5,-5)$.
2.12 $A(-5,-5), B(-2,-1), C(-5,-1)$.
2.13 $A(3,-1), B(8,-4), C(8,-1)$.
2.14 $A(8,-1), B(3,-4), C(8,-4)$.
2.15 $A(8,-4), B(3,-1), C(3,-4)$.
2.16 $A(3,-4), B(8,-1), C(3,-1)$.
2.17 $A(-2,3), B(4,3), C(2,5)$.
2.18 $A(0,1), B(4,3), C(2,5)$.
2.19 $A(-2,3), B(4,3), C(0,1)$.
2.20 $A(-2,3), B(2,5), C(0,1)$.
2.21 $A(0,1), B(4,3), C(2,-1)$.
2.22 $A(2,-1), B(2,5), C(4,3)$.
2.23 $A(-5,2), B(-5,4), C(-3,0)$.
2.24 $A(-2,-2), B(4,-2), C(0,-4)$.
2.25 $A(-2,-1), B(4,-2), C(2,0)$.
2.26 $A(2,0), B(0,-4), C(4,-2)$.
2.27 $A(-2,-2), B(0,-4), C(2,0)$.
2.28 $A(0,2), B(2,0), C(-2,-2)$.
2.29 $A(0,2), B(0,-4), C(-2,-2)$.
2.30 $A(2,0), B(-2,-2), C(0,-4)$.

Задача 3. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найти: 1) уравнение прямой AB; 2) уравнение плоскости ABC; 3) площадь грани ABC; 4) объем пирамиды; 5) длину и уравнение высоты пирамиды, опущенной из D на грань ABC; 6) угол между ребром AD и гранью ABC.

3.1 $A(2,5,1),\ B(2,5,-2),\ C(1,2,-1),\ D(3,-3,6)$.
3.2 $A(2,1,4),\ B(3,3,2),\ C(1,0,1),\ D(4,2,3)$.
3.3 $A(0,-1,2),\ B(2,0,4),\ C(2,0,3),\ D(3,1,-1)$.
3.4 $A(1,0,1),\ B(3,-2,2),\ C(2,2,3),\ D(3,1,-1)$.

3.5 $A(0,-1,-1),\ B(-2,3,5),\ C(1,-5,-9),\ D(-1,-6,3)$.

3.6 $A(-1,0,1),\ B(0,2,-1),\ C(-2,-1,-2),\ D(1,1,0)$.

3.7 $A(1,-1,0),\ B(3,0,2),\ C(3,0,1),\ D(6,0,3)$.

3.8 $A(2,0,1),\ B(4,-2,2),\ C(3,2,3),\ D(4,1,-1)$.

3.9 $A(-1,2,0),\ B(-1,2,3),\ C(-2,-1,-2),\ D(0,-6,5)$.

3.10 $A(1,-5,2),\ B(2,1,0),\ C(0,-2,-1),\ D(3,0,1)$.

3.11 $A(-2,1,0),\ B(0,2,2),\ C(0,2,1),\ D(3,2,3)$.

3.12 $A(1,0,-2),\ B(2,2,0),\ C(3,-2,-1),\ D(3,1,-4)$.

3.13 $A(3,5,8),\ B(6,5,8),\ C(7,7,3),\ D(8,4,1)$.

3.14 $A(1,0,-1),\ B(2,2,1),\ C(3,-2,0),\ D(3,1,-3)$.

3.15 $A(0,0,1),\ B(2,1,3),\ C(2,1,-1),\ D(1,2,3)$.

3.16 $A(1,0,0),\ B(3,-2,1),\ C(3,1,-2),\ D(2,2,2)$.

3.17 $A(-1,-1,-1),\ B(0,1,1),\ C(1,-3,0),\ D(1,0,-3)$.

3.18 $A(-1,0,-2),\ B(1,1,0),\ C(1,2,0),\ D(1,-2,-1)$.

3.19 $A(1,0,2),\ B(3,-2,3),\ C(2,2,4),\ D(3,1,0)$.

3.20 $A(1,0,0),\ B(2,2,3),\ C(0,3,2),\ D(7,-3,5)$.

3.21 $A(2,-1,0),\ B(4,0,2),\ C(4,0,1),\ D(7,0,3)$.

3.22 $A(2,-2,-2),\ B(3,0,0),\ C(4,-4,-1),\ D(4,-1,-4)$.

3.23 $A(0,-2,-2),\ B(2,-1,0),\ C(4,-1,-4),\ D(3,0,0)$.

3.24 $A(2,0,-2),\ B(4,-2,-1),\ C(4,1,-4),\ D(3,2,0)$.

3.25 $A(2,-2,0),\ B(3,0,2),\ C(4,-4,1),\ D(4,-1,-2)$.

3.26 $A(1,2,3),\ B(3,3,5),\ C(2,4,5),\ D(3,0,4)$.

3.27 $A(-1,2,-3),\ B(1,0,-2),\ C(0,4,-1),\ D(1,3,-5)$.

3.28 $A(0,-2,1),\ B(1,0,4),\ C(-1,1,3),\ D(6,-5,6)$.

3.29 $A(-1,-1,2),\ B(-1,-1,5),\ C(-2,-4,0),\ D(-2,-9,7)$.

3.30 $A(0,-1,-2),\ B(2,0,0),\ C(2,0,-1),\ D(5,0,1)$.

Задача 4. Используя преобразование параллельного переноса, привести уравнение линии второго порядка к каноническому виду и построить кривую.

4.1 $a)\ 5x^2+10x+9y^2-4=0$ $b)\ 4x-y^2-2y-5=0$.

4.2 $a)\ 3x^2+12x-y+17=0$ $b)\ 4x^2+16x-y^2-6y+11=0$.

4.3 $a)\ x^2+4x-4y^2-8y+4=0$ $b)\ x^2+y^2-2y+3=0$.

4.4 $a)\ 4x^2-8x+3y^2+12y+4=0$ $b)\ 2x^2-16x+y+35=0$.

4.5 $a)\ 16x^2-64x-9y^2-54y-161=0$ $b)\ x^2+10x-2y+11=0.$

4.6 $a)\ x^2-6x-5y^2-10y+9=0$ $b)\ x^2+4x+y+9=0.$

4.7 $a)\ 4x^2-8x+2y^2+8y+11=0$ $b)\ y^2-8y+x+21=0.$

4.8 $a)\ x^2+4x-9y^2+18y+4=0$ $b)\ 3x^2-6x-y+1=0.$

4.9 $a)\ x^2+4x+4y^2-8y+4=0$ $b)\ x+y^2-4y+9=0.$

4.10 $a)\ x^2+6x-9y^2-18y-9=0$ $b)\ 4x^2-8x-y+1=0.$

4.11 $a)\ 4x^2+8x+5y^2-20y+4=0$ $b)\ x+y^2-2y+2=0.$

4.12 $a)\ 9x^2+36x-2y^2-4y+16=0$ $b)\ 2x^2-4x-y=0.$

4.13 $a)\ 4x^2-16x+3y^2-24y+52=0$ $b)\ 5x-y^2-2y-11=0.$

4.14 $a)\ 5x^2+10x-y^2+10y-30=0$ $b)\ 3x^2+30x-y+77=0.$

4.15 $a)\ 4x^2-16x-3y^2-6y+1=0$ $b)\ 2x^2-4x+y+7=0.$

4.16 $a)\ 4x^2+8x+y^2-10y+25=0$ $b)\ x-y^2+2y+3=0.$

4.17 $a)\ 4x^2-24x+9y^2-36y+36=0$ $b)\ 3x-y^2-2y-4=0.$

4.18 $a)\ 5x^2+10x-y^2-2y+29=0$ $b)\ 4x^2+8x-y-1=0.$

4.19 $a)\ 9x^2+18x+4y^2-16y-11=0$ $b)\ x+y^2+2y+3=0.$

4.20 $a)\ x^2-y^2+2y-4=0$ $b)\ 2x^2+20x-y+48=0.$

4.21 $a)\ 4x^2+8x+3y^2-12y+4=0$ $b)\ 4x^2+8x+y+6=0.$

4.22 $a)\ x^2+4x-5y^2+30y-46=0$ $b)\ x-y^2-2y-5=0.$

4.23 $a)\ 2x^2-8x+y^2-2y+7=0$ $b)\ x+y^2-2y+3=0.$

4.24 $a)\ 3x^2+24x-y^2+10y+20=0$ $b)\ y^2+2y-4x-11=0.$

4.25 $a)\ x^2+4x+5y^2-10y+4=0$ $b)\ 4x^2-8x-y+1=0.$

4.26 $a)\ 9x^2-18x-4y^2-24y+9=0$ $b)\ 3x-y^2-2y-16=0.$

4.27 $a)\ x^2+10x+4y^2-8y+25=0$ $b)\ 2x^2+4x+y+3=0.$

4.28 $a)\ x^2+4x-3y^2+6y+4=0$ $b)\ 4x-y^2+2y+11=0.$

4.29 $a)\ x^2-4x+16y^2-16y+4=0$ $b)\ y^2-2y-x-4=0.$

4.30 $a)\ 4x^2-8x-9y^2+18y-41=0$ $b)\ x^2-2x-y-1=0.$

2. Решение типового варианта контрольной работы 1

Задача 1. Решить систему: 1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления с использованием обратной матрицы; 3) методом определителей.

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 8x_1+3x_2-6x_3=2 \\ -4x_1-x_2+3x_3=-3. \end{cases}$$

1. Метод Гаусса.

Умножим первое уравнение на -8 и прибавим его ко второму, умножим первое уравнение на 4 и прибавим к третьему. Таким образом, исключили переменную x_1 из второго и третьего уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - \ \ x_3 = 1 \\ \quad -5x_2 + 2x_3 = -6 \\ \qquad 3x_2 - \ \ x_3 = 1. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на $\dfrac{3}{5}$ и прибавим к третьему, исключили переменную x_2 из третьего уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ \qquad 5x_2 - 2x_3 = 6 \\ \qquad\qquad \frac{1}{5}x_3 = -\frac{13}{5}. \end{cases}$$

Последовательно находим значения переменных. Так, из третьего уравнения получим $x_3 = -13$, а из второго

$$-5x_2 - 2 \cdot 13 = -6,$$

$$x_2 = -4,$$

подставляя значения $x_2,\ x_3$ в первое уравнение, найдем x_1

$$x_1 - 4 + 13 = 1,$$

$$x_1 = -8.$$

Получили набор чисел $x_1 = -8$, $x_2 = -4$, $x_3 = -13$, который следует проверить подстановкой в исходную систему.

$$\begin{cases} -8 - 4 - (-13) = 1 \\ 8(-8) + 3(-4) - 6(-13) = 2 \\ -4(-8) - (-4) + 3(-13) = -3. \end{cases}$$

Получили верные числовые равенства, следовательно, набор чисел

$$x_1 = -8,\ x_2 = -4,\ x_3 = -13$$

является решением системы.

2. Метод обратной матрицы.

Используя правило умножения матриц, запишем систему в матричном виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Если $\det(A) \neq 0$, то существует обратная матрица для A и единственное решение системы находится по формуле

$$X = A^{-1}B.$$

Найдем определитель матрицы A разложением по первой строке:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 3 - (-1) \cdot (-6) - \big(8 \cdot 3 - (-4) \cdot (-6)\big) - \big(8 \cdot (-1) - (-4) \cdot 3\big) = -1,$$

то есть $\det(A) \neq 0$.

Вычислим алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -(24 - 24) = 0,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 12 = 4,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 1) = -2,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 + 4) = -3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 3 = -3,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = -(-6 + 8) = -2,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5.$$

Зная алгебраические дополнения A_{ij}, можем записать союзную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $\dfrac{1}{\det(A)} = -1$, вычислим обратную матрицу по правилу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*,$$

таким образом,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 4 + (-9) \\ 0 + 2 + (-6) \\ -4 + 6 + (-15) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -13 \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что

$$x_1 = -8,\ x_2 = -4,\ x_3 = -13.$$

3. Метод определителей (формулы Крамера).

Обозначим Δ определитель матрицы A, то есть

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Составим определитель Δ_1, который получается из определителя Δ заменой первого столбца на столбец свободных членов системы, и найдем его

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 + 12 - 7 = 8.$$

Вычислим определитель Δ_2, который получается из определителя Δ заменой второго столбца на столбец свободных членов системы

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & -6 \\ -4 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -12 + 16 = 4.$$

Вычислим определитель Δ_3, который получается из определителя Δ заменой третьего столбца на столбец свободных членов системы

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -7 + 16 + 4 = 13.$$

Найдем значения $x_1,\ x_2,\ x_3$ по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{8}{-1} = -8,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4}{-1} = -4,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{13}{-1} = -13.$$

Задача 2. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(-6,3)$, $B(-2,6)$, $C(-2,3)$. Найти: 1) уравнения сторон треугольника ABC; 2) уравнение высоты CH, опущенной из вершины C на сторону AB; 3) уравнение медианы к стороне AC; 4) угол $\angle A$; 5) сделать чертеж в системе декартовой координат Oxy.

1. Найдем уравнения сторон. Для этого воспользуемся уравнениями прямых, проходящих через две заданные точки $M_0(x_0,y_0)$, $M_1(x_1,y_1)$:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

Уравнение стороны AB :

$$\frac{x+6}{-2+6}=\frac{y-3}{6-3}\ \text{ или }\ \frac{x+6}{4}=\frac{y-3}{3}.$$

Приведем это уравнение к общему уравнению прямой $3x+18=4y-12$, получим $3x-4y+30=0$.

Уравнение стороны BC :

$$\frac{x+2}{-2+2}=\frac{y-6}{3-6}\ \text{ или }\ \frac{x+2}{0}=\frac{y-6}{-3},$$

или общее уравнение прямой $BC: x=-2$.

Уравнение стороны AC :

$$\frac{x+6}{-2+6}=\frac{y-3}{3-3}\ \text{ или }\ \frac{x+6}{4}=\frac{y-3}{0},$$

или общее уравнение прямой $AC: y=3$.

Таким образом, уравнения сторон треугольника имеют вид

$$AB:\ 3x-4y+30=0,\ BC:\ x=-2,\ AC:\ y=3.$$

2. Найдем уравнение высоты, опущенной из вершины C. Для этого воспользуемся уравнением прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0,\,y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=\{E,\,F\}$:

$$E(x-x_0)+F(y-y_0)=0.$$

В качестве заданной точки возьмем точку $C(-2,\,3)$, а в качемстве нормального вектора $\vec{N}=\overrightarrow{AB}=\{-2+6,\,6-3\}=\{4,\,3\}$, тогда искомое уравнение высоты CH имеет вид

$$4(x+2)+3(y-3)=0 \text{ или } 4x+3y-1=0.$$

3. Найдем уравнение медианы к стороне AC.

Вычислим координаты точки M — середины отрезка AC по формуле

$$M\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right),$$

где (x_A, y_A) – координаты точки A; (x_C, y_C) – координаты точки C.

Таким образом,

$$M\left(\frac{-6-2}{2},\frac{3+3}{2}\right)=(-4,3).$$

Составим уравнение медианы как прямой, проходящей через две заданные точки. Тогда уравнение прямой MB примет вид

$$\frac{x+4}{-2+4}=\frac{y-3}{6-3}$$

или

$$\frac{x+4}{2}=\frac{y-3}{3}.$$

Получим общее уравнение медианы MB :

$$3(x+4)=2(y-3),$$

$$3x+12-2y+6=0,$$

$$3x-2y+18=0.$$

Таким образом, общее уравнение медианы MB имеет вид $3x-2y+12=0$.

4. Найдем угол $\angle A$, используя скалярное произведение векторов, то есть

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}),$$

где $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\angle A$.

Откуда

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}.$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{-2+6, 6-3\} = \{4,3\},\ \overrightarrow{AC} = \{-2+6, 3-3\} = \{4,0\}.$$

Вычислим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и их длины:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\cdot 4 + 3\cdot 0 = 16,$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5,\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2+0^2} = 4.$$

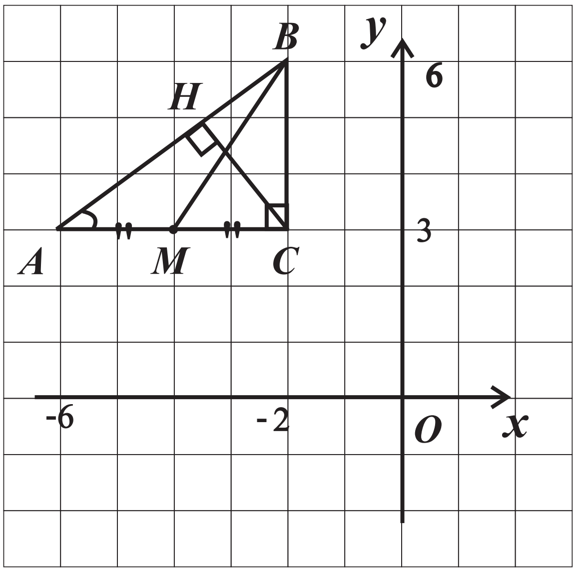
Таким образом,

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{16}{4\cdot 5} = \frac{4}{5},$$

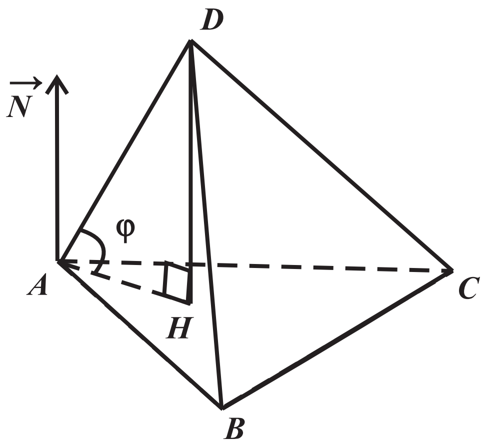
следовательно,

$$\angle A = \arccos\frac{4}{5}.$$

5. Чертеж в системе координат Oxy.



Задача 3. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(0,1,1)$, $B(0,1,4)$, $C(-1,-2,-1)$, $D(1,-7,6)$. Найти: 1) уравнение прямой AB; 2) уравнение плоскости ABC; 3) площадь грани ABC; 4) объем пирамиды; 5) длину и уравнение высоты пирамиды; 6) угол между ребром AD и гранью ABC.



1. Найдем уравнение прямой AB.

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

В это уравнение подставим координаты точек A и B, тогда получим

$$\frac{x - 0}{0 - 0} = \frac{y - 1}{1 - 1} = \frac{z - 1}{4 - 1} \quad \text{или} \quad \frac{x}{0} = \frac{y - 1}{0} = \frac{z - 1}{3}.$$

2. Составим уравнение плоскости ABC.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

В эту формулу подставим координаты точек A, B, C :

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 1 & z - 1 \\ 0 - 0 & 1 - 1 & 4 - 1 \\ -1 - 0 & -2 - 1 & -1 - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x & y - 1 & z - 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель, стоящий в левой части равенства:

$$x\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$9x - 3y + 3 = 0.$$

Сокращая последнее равенство на 3, получим уравнение плоскости ABC:

$$3x - y + 1 = 0.$$

3. Площадь грани ABC.

Грань ABC является треугольником, следовательно, ее площадь можно найти по формуле

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, вычитая из координат конца координаты начала. Таким образом,

$$\overrightarrow{AB} = \{0-0, 1-1, 4-1\} = \{0, 0, 3\};$$

$$\overrightarrow{AC} = \{-1-0, -2-1, -1-1\} = \{-1, -3, -2\}.$$

Вычислим векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 9\vec{i} - 3\vec{j}.$$

Отсюда получим координаты векторного произведения

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \{9, -3, 0\},$$

а также его длину:

$$\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \sqrt{9^2 + (-3)^2} = \sqrt{81+9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

Таким образом, площадь грани ABC

$$S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{10}}{2}\ (\text{ед}^2).$$

4. Найдем объем пирамиды $ABCD$.

Тетраэдр (частный случай пирамиды) $ABCD$ построен на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Объем тетраэдра V можно вычислить через смешанное произведение векторов:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)\right|.$$

Найдем координаты вектора

$$\overrightarrow{AD} = \{1-0, -7-1, 6-1\} = \{1, -8, 5\},$$

координаты векторов $\overrightarrow{AB} = \{0, 0, 3\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-1, -3, -2\}$ вычислены в предыдущем пункте. Далее получим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+3\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = 3\big((-1)(-8) - (-3)\big) = 33.$$

Таким образом, объем V тетраэдра $ABCD$ равен

$$V = \frac{1}{6}33 = \frac{11}{2}(\text{ед.}^3).$$

5. Длина и уравнение высоты пирамиды.

Пусть DH — высота пирамиды, проведенная из вершины D к основанию ABC. Найдем уравнение DH. Прямая DH перпендикулярна плоскости ABC, уравнение которой известно $ABC\colon 3x - y + 1 = 0$. $\vec{N} = \{3, -1, 0\}$ — нормальный вектор к этой плоскости. Воспользуемся каноническим уравнением прямой:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, лежащая на прямой; $\vec{s} = \{l, m, n\}$ – направляющий вектор прямой. Подставим в данное уравнение координаты точки $D(1, -7, 6)$ и вектора $\vec{N}\{3, -1, 0\}$, получим уравнение высоты

$$DH\colon \frac{x-1}{3} = \frac{y+7}{-1} = \frac{z-6}{0}.$$

Выразим из формулы

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} DH,$$

где V — объем тетраэдра $ABCD$, длину высоты DH

$$DH = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 11}{\sqrt{90}} = \frac{11\sqrt{10}}{10}.$$

6. Найдем угол φ между ребром AD и гранью ABC.

Угол φ между прямой с направляющим вектором $\vec{s}$ и плоскостью с нормальным вектором $\vec{N}$ вычисляется по формуле

$$\sin\varphi = \frac{\left|(\vec{s}, \vec{N})\right|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{N}|}.$$

Подставим в указанную формулу координаты направляющего вектора $\overrightarrow{AD}\{1, -8, 5\}$ прямой AD и нормального вектора $\vec{N}\{3, -1, 0\}$ плоскости ABC, получим

$$\sin\varphi = \frac{|1 \cdot 3 + (-8) \cdot (-1) + 5 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + (-8)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{11}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{10}} = \frac{11}{30},$$

откуда найдем угол

$$\varphi = \arcsin\frac{11}{30} \approx 21,5^\circ.$$

Задача 4. Используя преобразование параллельного переноса, привести уравнение линии второго порядка к каноническому виду и построить кривую.

а) $x^2 + 2x + 2y^2 - 4y + 1 = 0$.

По формулам

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,\ a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2,$$

в уравнении $x^2 + 2x + 1 + 2y^2 - 4y = 0$ выделим полный квадрат относительно переменных $x,\ y$, получим

$$(x+1)^2 + 2(y^2 - 2y + 1) = 2.$$

Обе части этого равенства поделим на 2

$$\frac{(x+1)^2}{2} + (y-1)^2 = 1.$$

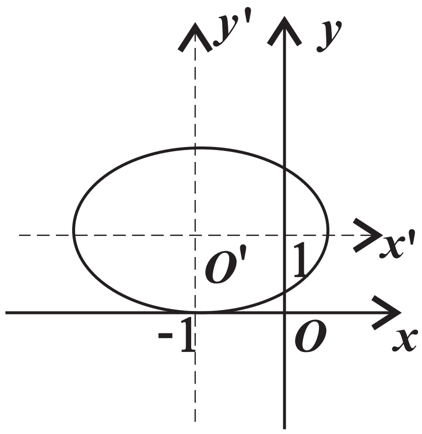
Если ввести новые переменные x', y' такие, что

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \end{cases},$$

то получим каноническое уравнение эллипса

$$\frac{(x')^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(y')^2}{1^2} = 1, \; a = \sqrt{2}, \; b = 1$$

в системе координат $O'x'y'$, полученной из старой Oxy параллельным переносом в точку $O'(-1, 1)$.



b) $3x + y^2 + 2y + 7 = 0$.

Приведем к каноническому виду уравнение $y^2 + 2y + 7 + 3x = 0$ параболического типа, выделив полный квадрат относительно y:

$$(y + 1)^2 + 6 + 3x = 0,$$

$$(y + 1)^2 = -3(x + 2).$$

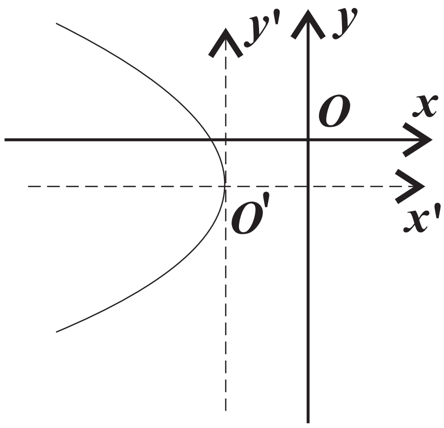
Введем новые переменные x', y' такие, что

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases},$$

тогда получим каноническое уравнение параболы

$$(y')^2 = -3x'$$

в системе координат $O'x'y'$, полученной из старой Oxy параллельным переносом в точку $O'(-2, -1)$.



3. Контрольная работа 2

Задача 1. Найти пределы функций, не используя правило Лопиталя:

1.1

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+5)(x-1)}{1+2x^2}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x^2-x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4\operatorname{arctg}3x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-7x+6}{\sin(6-x)}$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{2x}$.

1.2

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x}{(x+1)^2+(x-1)^2}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(10x)}{e^{x^2}-1}$,

d) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-10x+9}{\arcsin(x-9)}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{tg}^{-2}x}$.

1.3

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x^2+x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}$,

d) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-8x+7}{\arcsin(7-x)}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

1.4

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{(x+2)^3+(x-2)^3}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{\operatorname{tg}(x-1)}$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$.

1.5

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{2x^2-1}$,

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1-\sqrt{x+3}}{x^2-x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x\sin 2x)}{1-\cos x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x^2-7x+6}{\operatorname{tg}(6-x)}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1-2x}$.

1.6

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+10}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5(x+\pi))}{e^{3x}-1}$,

d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-6x+5}{\sin(5-x)}$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

1.7

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x+\sqrt{x^4+1}}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$,

d) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^2-8x+7}{\sin(x-7)}$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$.

1.8

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x+\sqrt{x^4+1}}$,

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x^2-3x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{\sin^2 3x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{\arcsin(1-x)}$,

e) $\lim\limits_{x\to 1} (7-6x)^{\frac{x}{x-1}}$.

1.9

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^3+1}$,

b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin(\pi(x+1))}{\ln(1+2x)}$,

d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-5x+4}{\arcsin(x-4)}$,

e) $\lim\limits_{x\to 2} (3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

1.10

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^5-3x^2+1}{1-x^5}$,

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{2x}-2}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{7^{-3x}-1}$,

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2-3x+2}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{arctg} 4x)^{\frac{1}{x}}$.

1.11

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+2)^2(x-2)^2}{(x+3)^2}$,

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{x^2-3x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$,

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\operatorname{tg}(x-1)}$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^x$.

1.12

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^4-2x^3+2}{3+x^4}$,

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\frac{5}{2}x)}{\arcsin 3x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{\arcsin(x-3)}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\cos 6x-1}}$.

1.13

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$,

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_5(1+5x^2)}{x\arcsin 3x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x^2-9x+8}{\operatorname{arctg}(8-x)}$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

1.14

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^4+x}}{(x+1)^2}$,

b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-4x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x(1-\cos x)}$,

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x^2-4x+3}$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x}\right)^x$.

1.15

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+x}{(x+5)^2}$,

b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x^2-16}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x+x^2)}{\operatorname{tg} 3x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\operatorname{arctg}(x-4)}{x^2-5x+4}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\operatorname{ctg} x}$.

1.16

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+\sqrt{x^4+10}}{x-3x^2}$,

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3-x}{\sqrt[3]{x+5}-2}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4^{\sin^2 x}-1}{\ln(1+3x^2)}$,

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{\sin(1-x)}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

1.17

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^2}{(x-2)(x-1)}$,

$b)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^3-1}$,

$c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{-2x}-1}{\operatorname{arctg}3x}$,

$d)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{\operatorname{tg}(x-1)}$,

$e)\ \lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$.

1.18

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-1}{\sqrt{x^8-x-1}}$,

$b)\ \lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-64}$,

$c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_5(1+2x^2)}{\operatorname{tg}^2 3x}$,

$d)\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{tg}(3-x)}{x^2-2x-3}$,

$e)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

1.19

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^4+x}}{x^2+4}$,

$b)\ \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$,

$c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin\pi(x+7)}$,

$d)\ \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2-7x+10}$,

$e)\ \lim\limits_{x\to 0}(6-5\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

1.20

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^8+x}}{1-x^4}$,

$b)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-4x+3}$,

$c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin 2x}{\ln(1+3x^2)}$,

$d)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{\arcsin(x-1)}$,

$e)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x+3}$.

1.21

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-x^2+7}{1-x^5}$,

$b)\ \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$,

$c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{1-5^x}$,

$d)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-7x+6}{\operatorname{tg}(1-x)}$,

$e)\ \lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$.

1.22

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sqrt{x^4-1}}{3x^2+x-1}$,

$b)\ \lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-9x}{\sqrt{x}-3}$,

$c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x-8^x}{x^2-3x}$,

$d)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{x^2-9x+8}$,

$e)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$.

1.23

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x}{1-\sqrt{3x+1}}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\log_2(1+3x)}$,

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{arctg}(1-x)}{x^2-8x+7}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

1.24

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^6+x^2+2x}{x-x^6}$,

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt[3]{4x}-2}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-3^x}{2x^2-x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{\arcsin(x-2)}$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$.

1.25

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x^2}{3x^3+x-10}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x}}{x^2-x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$,

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{\arcsin(x-3)}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 3x\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1.26

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^2}{x^2+3\sqrt{x^4+x}}$,

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1-\cos 2x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{\operatorname{arctg}(x-2)}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-3x}$.

1.27

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2+(x+2)^2}{1-x^2}$,

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-3x+2}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x\operatorname{tg}2x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{\operatorname{tg}(x-1)}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\sin x}\right)^{\operatorname{ctg}x}$.

1.28

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^8+x^5-1}}{2x^4+x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\operatorname{tg}2x\sin 3x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{tg}(x-3)}{x^2-5x+6}$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

1.29
a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-x-x^3}{2x^3+x+3}$,
b) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x^2-64}{\sqrt{9+2x}-5}$,
c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos^3 x}{3x^2}$,
d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(1-x)}{x^2-10x+9}$,
e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^{x}$.

1.30
a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^3+(x+2)^3}{3-x^3}$,
b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^2-x}$,
c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$,
d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(2-x)}{x^2+x-6}$,
e) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

Задача 2. Задана функция $y = f(x)$. Найти точки разрыва функции, если они существуют, и определить их тип. Найти $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Построить график функции.

2.1 $f(x) = \begin{cases} x+1,\ x<-1, \\ x^2-1,\ -1\leqslant x<1, \\ 3^{\frac{1}{2-x}},\ x\geqslant 1. \end{cases}$

2.2 $f(x) = \begin{cases} x+2,\ x<-2, \\ x^2+2x,\ -2\leqslant x<0, \\ 3^{\frac{1}{1-x}},\ x\geqslant 0. \end{cases}$

2.3 $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x+3}},\ x\leqslant -1, \\ x^2-1,\ -1<x<1, \\ 1-x,\ x\geqslant 1. \end{cases}$

2.4 $f(x) = \begin{cases} x,\ x<0, \\ x^2-2x,\ 0\leqslant x<2, \\ 3^{\frac{1}{3-x}},\ x\geqslant 2. \end{cases}$

2.5 $f(x) = \begin{cases} -x-1,\ x<-1, \\ 1-x^2,\ -1\leqslant x<1, \\ 2^{\frac{1}{3-x}},\ x\geqslant 1. \end{cases}$

2.6 $f(x) = \begin{cases} x+2,\ x<-2, \\ x^2+2x,\ -2\leqslant x<0, \\ 3^{\frac{1}{1-x}},\ x\geqslant 0. \end{cases}$

2.7 $f(x) = \begin{cases} x+\pi,\ x<-\pi, \\ \sin x,\ -\pi\leqslant x<0, \\ \pi^{\frac{1}{1-x}},\ x\geqslant 0. \end{cases}$

2.8 $f(x) = \begin{cases} x,\ x<0, \\ x^2-2x,\ 0\leqslant x<2, \\ 3^{\frac{1}{x-3}},\ x\geqslant 2. \end{cases}$

2.9 $f(x) = \begin{cases} x+2,\ x<-1, \\ x^2,\ -1\leqslant x<0, \\ 2^{\frac{1}{x-1}},\ x\geqslant 0. \end{cases}$

2.10 $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x+4}},\ x\leqslant -2, \\ x^2+2x,\ -2<x<0, \\ -x,\ x\geqslant 0. \end{cases}$

2.11 $f(x)=\begin{cases} 3^{\frac{1}{x+1}},\ x\leqslant 0, \\ \sqrt{x},\ 0\leqslant x<1, \\ 2-x,\ x\geqslant 1. \end{cases}$ **2.12** $f(x)=\begin{cases} -(x+2), x<-2, \\ -x^2-2x, -2\leqslant x<0, \\ 2^{\frac{1}{x-2}}, x\geqslant 0. \end{cases}$

2.13 $f(x)=\begin{cases} -(x+1),\ x\leqslant -1, \\ \cos\frac{\pi x}{2},\ -1<x<1, \\ 2^{\frac{1}{2-x}},\ x\geqslant 1. \end{cases}$ **2.14** $f(x)=\begin{cases} \pi^{\frac{1}{1+x}},\ x<0, \\ \sin x,\ 0\leqslant x<\pi, \\ x-\pi,\ x\geqslant \pi. \end{cases}$

2.15 $f(x)=\begin{cases} x+1,\ x<-1, \\ x^2-1,\ -1\leqslant x<1, \\ 3^{\frac{1}{x-2}},\ x\geqslant 1. \end{cases}$ **2.16** $f(x)=\begin{cases} 3^{\frac{1}{x+1}},\ x\leqslant 0, \\ x^2-x,\ 0<x<1, \\ x-1,\ x\geqslant 1. \end{cases}$

2.17 $f(x)=\begin{cases} -(x+1),\ x<-1, \\ 1-x^2,\ -1\leqslant x<1, \\ 2^{\frac{1}{x-3}},\ x\geqslant 1. \end{cases}$ **2.18** $f(x)=\begin{cases} -x,\ x<-2, \\ 2x-x^2,\ -2\leqslant x<2, \\ 2^{\frac{1}{x-4}},\ x\geqslant 2. \end{cases}$

2.19 $f(x)=\begin{cases} 3^{\frac{1}{x+2}},\ x\leqslant -1, \\ 1-x^2,\ -1<x<1, \\ x-1,\ x\geqslant 1. \end{cases}$ **2.20** $f(x)=\begin{cases} -(x+2),\ x\leqslant -2, \\ -x^2-2x,\ -2\leqslant x<0, \\ 2^{\frac{1}{2-x}},\ x\geqslant 0. \end{cases}$

2.21 $f(x)=\begin{cases} x+\pi,\ x<-\pi, \\ \sin x,\ -\pi\leqslant x<0, \\ \pi^{\frac{1}{x-1}},\ x\geqslant 0. \end{cases}$ **2.22** $f(x)=\begin{cases} -x,\ x<0, \\ 2x-x^2,\ 0\leqslant x<\pi, \\ 2^{\frac{1}{4-x}},\ x\geqslant \pi. \end{cases}$

2.23 $f(x)=\begin{cases} x+2,\ x<-1, \\ x^2,\ -1\leqslant x<1, \\ 2^{\frac{1}{1-x}},\ x\geqslant 1. \end{cases}$ **2.24** $f(x)=\begin{cases} 3^{\frac{1}{x+3}},\ x<-2, \\ -x^2-2x,\ -2\leqslant x<0, \\ x,\ x\geqslant 0. \end{cases}$

2.25 $f(x)=\begin{cases} -x,\ x\leqslant 0, \\ \sqrt{x},\ 0<x<1, \\ 3^{\frac{1}{2-x}},\ x\geqslant 1. \end{cases}$ **2.26** $f(x)=\begin{cases} 3^{\frac{1}{x+1}},\ x\leqslant 0, \\ 2x-x^2,\ 0<x<2, \\ x-2,\ x\geqslant 2. \end{cases}$

2.27 $f(x)=\begin{cases}2^{\frac{1}{x+2}},\ x\leqslant -1,\\ \cos\frac{\pi x}{2},\ -1<x<1,\\ x-1,\ x\geqslant 1.\end{cases}$ **2.28** $f(x)=\begin{cases}\pi^{\frac{1}{x+1}},\ x\leqslant 0,\\ -\sin x,\ 0<x<\pi,\\ \pi-x,\ x\geqslant \pi.\end{cases}$

2.29 $f(x)=\begin{cases}2^{\frac{1}{x+1}},\ x\leqslant 0,\\ x^2,\ 0<x<1,\\ 2-x,\ x\geqslant 1.\end{cases}$ **2.30** $f(x)=\begin{cases}-x,\ x\leqslant 0,\\ \sqrt{x},\ 0<x<1,\\ 3^{\frac{1}{x-2}},\ x\geqslant 1.\end{cases}$

Задача 3. Даны четыре комплексных числа a_1, a_2, b_1, b_2. Найти: a_1+a_2, a_1-a_2, $a_1\cdot a_2$, $\dfrac{a_1}{a_2}$, $\left(\dfrac{b_1}{b_2}\right)^{12}$, $\sqrt[3]{\dfrac{b_1}{b_2}}$.

3.1 $a_1=1+i$, $a_2=1-3i$, $b_1=-2\sqrt{2}$, $b_2=1+i$.
3.2 $a_1=2-i$, $a_2=3-i$, $b_1=-4$, $b_2=1+i\sqrt{3}$.
3.3 $a_1=3-i$, $a_2=2+3i$, $b_1=2\sqrt{2}$, $b_2=1-i$.
3.4 $a_1=3+i$, $a_2=2+3i$, $b_1=4$, $b_2=1-i\sqrt{3}$.
3.5 $a_1=2+i$, $a_2=3+i$, $b_1=2\sqrt{2}$, $b_2=1+i$.
3.6 $a_1=1+2i$, $a_2=7-i$, $b_1=2\sqrt{2}$, $b_2=-1-i$.
3.7 $a_1=1-3i$, $a_2=5+2i$, $b_1=-2\sqrt{2}$, $b_2=-1+i$.
3.8 $a_1=1-2i$, $a_2=4+3i$, $b_1=-2\sqrt{2}$, $b_2=-1-i$.
3.9 $a_1=2-3i$, $a_2=5-i$, $b_1=4$, $b_2=-1+i\sqrt{3}$.
3.10 $a_1=3-2i$, $a_2=1+6i$, $b_1=1$, $b_2=-\sqrt{3}-i$.
3.11 $a_1=5-i$, $a_2=3+5i$, $b_1=-1$, $b_2=-\sqrt{3}-i$.
3.12 $a_1=2-4i$, $a_2=2+7i$, $b_1=1$, $b_2=\sqrt{3}+i$.
3.13 $a_1=1+3i$, $a_2=5+2i$, $b_1=4i$, $b_2=1-i\sqrt{3}$.
3.14 $a_1=2-3i$, $a_2=3+6i$, $b_1=-4i$, $b_2=1+i\sqrt{3}$.
3.15 $a_1=3-5i$, $a_2=2+8i$, $b_1=-2\sqrt{2}i$, $b_2=1+i$.
3.16 $a_1=5+2i$, $a_2=-3+4i$, $b_1=-16$, $b_2=1+i$.
3.17 $a_1=5-2i$, $a_2=6+i$, $b_1=-4$, $b_2=1-i\sqrt{3}$.
3.18 $a_1=6-i$, $a_2=3+2i$, $b_1=4$, $b_2=\sqrt{3}-i$.
3.19 $a_1=3-2i$, $a_2=2-5i$, $b_1=-1$, $b_2=\sqrt{3}+i$.
3.20 $a_1=7-i$, $a_2=2+5i$, $b_1=-1$, $b_2=\sqrt{3}-i$.
3.21 $a_1=5+i$, $a_2=3-2i$, $b_1=4$, $b_2=-1-i\sqrt{3}$.
3.22 $a_1=4-i$, $a_2=2+3i$, $b_1=-4$, $b_2=-1+i\sqrt{3}$.

3.23	$a_1 = 4 + i,$	$a_2 = 3 + 2i,$	$b_1 = 2\sqrt{2},$	$b_2 = -1 + i.$
3.24	$a_1 = 6 - i,$	$a_2 = 1 + 7i,$	$b_1 = -4,$	$b_2 = -\sqrt{3} + i.$
3.25	$a_1 = 5 + 2i,$	$a_2 = 2 + 5i,$	$b_1 = 1,$	$b_2 = -\sqrt{3} + i.$
3.26	$a_1 = 7 + i,$	$a_2 = 1 - 5i,$	$b_1 = -1,$	$b_2 = -\sqrt{3} + i.$
3.27	$a_1 = 7 - i,$	$a_2 = 2 + 5i,$	$b_1 = 1,$	$b_2 = \sqrt{3} - i.$
3.28	$a_1 = 2 - i,$	$a_2 = 6 + 5i,$	$b_1 = 2\sqrt{2}i,$	$b_2 = -1 - i.$
3.29	$a_1 = 3 - 5i,$	$a_2 = 3 + i,$	$b_1 = -i,$	$b_2 = \sqrt{3} + i.$
3.30	$a_1 = 3 - i,$	$a_2 = 1 + 8i,$	$b_1 = i,$	$b_2 = -\sqrt{3} - i.$

Задача 4. Построить область, ограниченную линиями, уравнения которых заданы в полярной системе координат.

4.1	$r = \frac{1}{2} + \sin\varphi,$	$r = 1,$	$(r \geqslant 1).$
4.2	$r = \frac{1}{2} + \cos\varphi,$	$r = 1,$	$(r \geqslant 1).$
4.3	$r = \frac{1}{2} - \sin\varphi,$	$r = 1,$	$(r \geqslant 1).$
4.4	$r = \frac{1}{2} - \cos\varphi,$	$r = 1,$	$(r \geqslant 1).$
4.5	$r = 1 + \sqrt{2}\sin\varphi,$	$r = 2,$	$(r \geqslant 2).$
4.6	$r = 1 - \sqrt{2}\sin\varphi,$	$r = 2,$	$(r \geqslant 2).$
4.7	$r = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi,$	$r = 2,$	$(r \geqslant 2).$
4.8	$r = 1 - \sqrt{2}\cos\varphi,$	$r = 2,$	$(r \geqslant 2).$
4.9	$r = 2\cos 3\varphi,$	$r = \sqrt{3},$	$(r \geqslant \sqrt{3}).$
4.10	$r = 2\sin 3\varphi,$	$r = \sqrt{3},$	$(r \geqslant \sqrt{3}).$
4.11	$r = 2\cos 6\varphi,$	$r = \sqrt{3},$	$(r \geqslant \sqrt{3}).$
4.12	$r = 2\sin 6\varphi,$	$r = \sqrt{3},$	$(r \geqslant \sqrt{3}).$
4.13	$r = \sqrt{3}\cos\varphi,$	$r = \sin\varphi,$	$(r \geqslant \sin\varphi).$
4.14	$r = \cos\varphi,$	$r = \sqrt{3}\sin\varphi,$	$(r \geqslant \cos\varphi).$
4.15	$r = \cos\varphi,$	$r = \sin\varphi,$	$(r \geqslant \cos\varphi).$
4.16	$r = -\sin\varphi,$	$r = -3\sin\varphi.$	
4.17	$r^2 = \sin\varphi\cos\varphi,$	$r = 1,$	$(r \geqslant 1).$
4.18	$r^2 = 4\cos^2\varphi,$	$r = 1,$	$(r \geqslant 1).$
4.19	$r^2 = 2\sin 2\varphi\cos^2 2\varphi.$		
4.20	$r^2 = 4\sin^2\varphi.$		
4.21	$r^2 = 4\cos 2\varphi,$	$r = \sqrt{2},$	$(r \geqslant \sqrt{2}).$
4.22	$r = 4\cos^3\varphi,$	$r = \frac{1}{2},$	$(r \geqslant \frac{1}{2}).$
4.23	$r = 4\sin^3\varphi,$	$r = \frac{1}{2},$	$(r \geqslant \frac{1}{2}).$

4.24 $r = \cos\varphi + \sin\varphi$, $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $(r \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2})$.
4.25 $r = 2\sin 4\varphi$, $r = 1$, $(r \geqslant 1)$.
4.26 $r = \cos\varphi - \sin\varphi$, $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $(r \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}})$.
4.27 $r = 2\cos 4\varphi$, $r = \sqrt{2}$, $(r \geqslant \sqrt{2})$.
4.28 $r = 2\sin^2\varphi$, $r = 1$, $(r \geqslant 1)$.
4.29 $r = 2\cos^2\varphi$, $r = 1$, $(r \geqslant 1)$.
4.30 $r = \sin 2\varphi$, $r = \frac{1}{2}$, $(r \geqslant \frac{1}{2})$.

Задача 5. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ данных функций:

5.1

a) $y = x^2\sqrt{1-x^2}$,

b) $y = \dfrac{4\sin x}{\cos^2 x}$,

c) $y = \ln^2(x + \cos x)$,

d) $y = x^x$,

e) $\begin{cases} x = \cos\frac{t}{2}, \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

5.2

a) $y = (\cos 2x + 2\sin 2x)e^x$,

b) $y = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$,

c) $y = \ln\sin\dfrac{2x+4}{x+1}$,

d) $y = x^{\frac{1}{x}}$,

e) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

5.3

a) $y = \left(\sqrt{x-1} - \dfrac{1}{2}\right)e^{2\sqrt{x-1}}$,

b) $y = \dfrac{x\ln x}{x-1}$,

c) $y = \left(e^{\cos x} + 2\right)^2$,

d) $y = (\operatorname{arctg} x)^{2\ln\operatorname{arctg} x}$,

e) $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = \cos t. \end{cases}$

5.4

a) $y = \cos x \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$,

b) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$,

c) $y = \sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$,

d) $y = (\sin\sqrt{x})^{\ln\sin\sqrt{x}}$,

e) $\begin{cases} x = 3\cos^2 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

5.5

a) $y = (\sqrt{x}+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$,

b) $y = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$,

c) $y = \ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$,

d) $y = (x+x^2)^x$,

e) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin^2 t. \end{cases}$

5.6

a) $y = \operatorname{arctg} x \ln\sqrt{1+x^2}$,

b) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{x^2}}$,

c) $y = \ln\sin(2x+5)$,

d) $y = (\sin x)^{5e^x}$,

e) $\begin{cases} x = t + \ln\cos t, \\ y = t - \ln\sin t. \end{cases}$

5.7

a) $y = \arcsin\dfrac{1}{x}\ln(x+\sqrt{x^2-1})$,

b) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

c) $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$,

d) $y = (\ln x)^{3^x}$,

e) $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t. \end{cases}$

5.8

a) $y = x^2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}$,

b) $y = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$,

c) $y = \arcsin\sqrt{1-3x}$,

d) $y = (\operatorname{ctg} 3x)^{2e^x}$,

e) $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

5.9

a) $y = x\sqrt{4-x^2} + 4\arcsin\dfrac{x}{2}$,

b) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{e^x + x}$,

c) $y = 3^{\operatorname{arctg} x^3}$,

d) $y = x^{-\operatorname{tg} x}$,

e) $\begin{cases} x = \frac{1}{t}, \\ y = \frac{1}{1+t^2}. \end{cases}$

5.10

a) $y = x\ln(x+\sqrt{3+x^2})$,

b) $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$,

c) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$,

d) $y = (\arcsin x)^{e^x}$,

e) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln\cos t. \end{cases}$

5.11

a) $y = x\ln(x+\sqrt{x^2-1})$,

b) $y = \sqrt{\dfrac{\sin 2x}{1-\sin 2x}}$,

c) $y = \operatorname{arctg}\operatorname{tg}^2 x$,

d) $y = x^{\arcsin x}$,

5.12

a) $y = e^{\sin x}\left(x - \dfrac{1}{\cos x}\right)$,

b) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$,

c) $y = \lg\ln\operatorname{ctg} x$,

d) $y = (\operatorname{arctg} x)^x$,

$e)\quad \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4 \frac{t}{2}. \end{cases}$

$e)\quad \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \frac{1}{2}t^2. \end{cases}$

5.13

$a)\quad y = (x+1)^2 \sin x,$

$b)\quad y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} + \arcsin \dfrac{1}{x},$

$c)\quad y = \ln \arccos \sqrt{1-e^{2x}},$

$d)\quad y = (\cos 5x)^{e^x},$

$e)\quad \begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$

5.14

$a)\quad y = 3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}+2),$

$b)\quad y = \dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x},$

$c)\quad y = \ln \arcsin \sqrt{1-e^{2x}},$

$d)\quad y = (\operatorname{arctg} x)^{\ln x},$

$e)\quad \begin{cases} x = \sqrt{t-3}, \\ y = \ln(t-2). \end{cases}$

5.15

$a)\quad y = x(\sin \ln x - \cos \ln x),$

$b)\quad y = \dfrac{x-2}{e^{\frac{1}{x}}+2},$

$c)\quad y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}),$

$d)\ y = (\sin x)^{\ln x},$

$e)\quad \begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

5.16

$a)\quad y = x^{-\frac{1}{3}} \operatorname{tg} x,$

$b)\quad y = \dfrac{x^3}{\ln x},$

$c)\quad y = \operatorname{arctg} \ln x,$

$d)\ y = x^{-\operatorname{ctg} x},$

$e)\quad \begin{cases} x = \ln t, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

5.17

$a)\quad y = \dfrac{x}{2} \ln(x+\sqrt{x^2+1}),$

$b)\quad y = \dfrac{\ln 3 \sin x + \cos x}{3^x + x},$

$c)\quad y = \arcsin e^{3x},$

$d)\quad y = (\operatorname{arctg} x)^{\ln x},$

$e)\quad \begin{cases} x = \sin t - t\cos t, \\ y = \cos t + t \sin t. \end{cases}$

5.18

$a)\quad y = \sqrt{x} e^{\frac{x^2}{2}},$

$b)\quad y = \dfrac{\sin x^2}{\ln x},$

$c)\quad y = \ln \ln \sin \left(1 + \dfrac{1}{x}\right),$

$d)\quad y = (\cos x)^{3\ln x},$

$e)\quad \begin{cases} x = te^t, \\ y = te^{-t}. \end{cases}$

5.19

$a)\quad y = \ln \ln x - \ln 2 \log_2 x,$

$b)\quad y = \dfrac{2\sin x}{x} + \cos x,$

$c)\quad y = \arccos \sqrt{2x} + \sqrt{2x-4x^2},$

5.20

$a)\quad y = x^3 \operatorname{ctg} \sqrt{x},$

$b)\quad y = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2} + 2x,$

$c)\quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1},$

$d)\quad y = x^{\sqrt{x}},$

$e)\quad \begin{cases} x = t + e^{-t}, \\ y = te^{-t}. \end{cases}$

$d)\quad y = (\cos x)^x,$

$e)\quad \begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3. \end{cases}$

5.21

$a)\quad y = x\sqrt[3]{x^2}(2\ln x - 3^x),$

$b)\quad y = \dfrac{x}{\ln x},$

$c)\quad y = \ln \dfrac{\ln x}{\sin\sqrt{x}},$

$d)\quad y = (\cos x)^{x^2},$

$e)\quad \begin{cases} x = \frac{1}{\cos t}, \\ y = \operatorname{tg} t. \end{cases}$

5.22

$a)\quad y = 3x^3 \log_2 \sqrt{x},$

$b)\quad y = \dfrac{\ln x}{x+2},$

$c)\quad y = \ln(e^{3x} + \sqrt{e^{6x} - 1}),$

$d)\quad y = (x^2+1)^{\cos x},$

$e)\quad \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1 - t^2). \end{cases}$

5.23

$a)\quad y = x^{-\frac{2}{3}} \operatorname{tg} x,$

$b)\quad y = \ln(e^{2x}+1) - 2\operatorname{arctg} e^x,$

$c)\quad y = \dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}},$

$d)\quad y = x^{\sin x^2},$

$e)\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases}$

5.24

$a)\quad y = x^2 e^{-2x},$

$b)\quad y = \dfrac{x^2}{\ln x},$

$c)\quad y = \arcsin e^{-2x},$

$d)\quad y = (\cos x)^{4\ln\cos 2x},$

$e)\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \frac{1}{t}. \end{cases}$

5.25

$a)\quad y = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln\cos x,$

$b)\quad y = \dfrac{x}{\ln^2 x},$

$c) y = \ln(\sqrt{x+1} + 1),$

$d) y = (x^4+5)^{\operatorname{ctg} x},$

$e)\begin{cases} x = \dfrac{2}{t}, \\ y = \dfrac{1}{1+t^2}. \end{cases}$

5.26

$a)\quad y = \dfrac{1}{8}e^{2x}(2 - \sin 2x),$

$b)\quad y = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x^2} - 1} - \dfrac{\arccos x}{2^{x^2}+1},$

$c) y = 4\ln(\sqrt{4-x} + \sqrt{x}),$

$d) y = (x^3+2)^{\operatorname{tg} x},$

$e)\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{t-1}}. \end{cases}$

5.27

$a)\quad y=(x+1)\operatorname{arctg} e^{-2x},$

$b)\quad y=\ln\dfrac{2+\operatorname{tg} x}{2-\operatorname{tg} x},$

$c)\quad y=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+\dfrac{2}{\sqrt{x}},$

$d)\quad y=(\cos x)^{3^x},$

$e)\quad \begin{cases} x=\operatorname{tg} t, \\ y=\frac{1}{\sin 2t}. \end{cases}$

5.28

$a)\quad y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}+\arcsin e^x,$

$b)\quad y=\dfrac{\cos 2x-3\sin 2x}{e^x+e^{-x}},$

$c)\quad y=\ln\dfrac{3+\sin x}{3-\sin x},$

$d)\quad y=(\ln x)^x,$

$e)\quad \begin{cases} x=\ln t, \\ y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right). \end{cases}$

5.29

$a)\quad y=x\arccos x-\sqrt{1-x^2},$

$b)\quad y=\dfrac{\sin^2(2+3x)}{e^{2x}-1},$

$c)\quad y=\operatorname{arctg} e^{2x}+\ln\sqrt{\dfrac{1+e^{2x}}{e^{2x}-1}},$

$d)\ y=(\sin\sqrt{x})^x,$

$e)\begin{cases} x=2\cos^2 t, \\ y=2\sin t. \end{cases}$

5.30

$a)\quad y=x\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}-\ln(x^2+4),$

$b)\quad y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\arcsin\dfrac{1}{x},$

$c)\quad y=\ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}),$

$d)\ y=(\sqrt{x})^{\frac{1}{x}},$

$e)\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=4(2+\cos t). \end{cases}$

Задача 6. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на отрезке.

6.1 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\cos x,\ \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right].$

6.2 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1},\ [0,4].$

6.3 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\sin x,\ \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right].$

6.4 $f(x)=\sin 2x-x,\ \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right].$

6.5 $f(x)=x-\sin x,\ [-\pi,\pi].$

6.6 $f(x)=2x+\operatorname{ctg} x,\ \left[\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}\right].$

6.7 $f(x)=x+2\sqrt{x},\ [1,4].$

6.8 $f(x)=2\sin x+\cos 2x,\ [0,\pi].$

6.9 $f(x)=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1},\ [0,1].$

6.10 $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2},\ [0,\pi].$

6.11 $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x},\ [0,1].$

6.12 $f(x)=x+\cos^2 x,\ \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right].$

6.13 $f(x)=4x-\operatorname{tg} x,\ \left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right].$

6.14 $f(x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} 2x,\ \left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right].$

6.15 $f(x)=x-2\sin x,\ [0,\pi].$

6.16 $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos 2x+\sin x,\ \left[0,\dfrac{\pi}{4}\right].$

6.17 $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$, $[1, 6]$.

6.18 $f(x) = 2x^2 - \ln x$, $[1, e]$.

6.19 $f(x) = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$, $[0, 1]$.

6.20 $f(x) = (5 - x)2^{-x}$, $[-1, 0]$.

6.21 $f(x) = -3x^4 + 6x^2$, $[-2, 2]$.

6.22 $f(x) = x + \frac{8}{x^4}$, $[-2, -1]$.

6.23 $f(x) = 3 - 2x^2$, $[-1, 3]$.

6.24 $f(x) = 81x - x^4$, $[-1, 4]$.

6.25 $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$, $[0, \pi]$.

6.26 $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 16}}$, $[-3, 3]$.

6.27 $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$, $[-5, -1]$.

6.28 $f(x) = \cos^2 x + \sin x$, $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

6.29 $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

6.30 $f(x) = 2^{\sqrt[3]{x^2}}$, $[-1, 1]$.

Задача 7. Методами дифференциального исчисления исследовать функцию и построить ее график, используя результаты исследования.

7.1 $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$.

7.2 $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

7.3 $y = \frac{2}{x^2 + 2x}$.

7.4 $y = \frac{4x^2}{3 + x^2}$.

7.5 $y = \frac{12x}{9 + x^2}$.

7.6 $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

7.7 $y = \frac{4 - x^3}{x^2}$.

7.8 $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1}$.

7.9 $y = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$.

7.10 $y = \frac{(x - 1)^2}{x^2}$

7.11 $y = \frac{x^2}{(x - 1)^2}$.

7.12 $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$.

7.13 $y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}$.

7.14 $y = \frac{9 + 6x - 3x^2}{x^2 - 2x + 13}$.

7.15 $y = \frac{-8x}{x^2 + 4}$.

7.16 $y = \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^2$.

7.17 $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$.

7.18 $y = \frac{4x}{(x + 1)^2}$.

7.19 $y = \frac{8(x - 1)}{(x + 1)^2}$.

7.20 $y = \frac{1 - 2x^3}{x^2}$.

7.21 $y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$.

7.22 $y = \frac{4}{3 + 2x - x^2}$.

7.23 $y = \frac{x^2 + 2x - 7}{x^2 + 2x - 3}$.

7.24 $y = \frac{1}{x^4 - 1}$.

7.25 $y = -\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2$. **7.26** $y = \dfrac{x^3-32}{x^2}$. **7.27** $y = \dfrac{4(x+1)^2}{x^2+2x+4}$.

7.28 $y = \dfrac{3x-2}{x^3}$. **7.29** $y = \dfrac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$. **7.30** $y = \dfrac{x^3-27x+54}{x^3}$.

4. Решение типового варианта контрольной работы 2

Задача 1. Найти пределы функций, не используя правило Лопиталя.

$a)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2x^2+5x^4}{x^4-12x}$.

В этом примере возникает неопрелеленность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для нахождения предела данной дроби вынесем в числителе и знаменателе x в максимальной степени, то есть x^4

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2x^2+5x^4}{x^4-12x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(\frac{1}{x^3}-2\frac{1}{x^2}+5\right)}{x^4\left(1-12\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3}-2\frac{1}{x^2}+5}{1-12\frac{1}{x^3}} = \frac{5}{1} = 5.$$

Поясним полученный результат. Функции $\dfrac{1}{x^3}$, $\dfrac{1}{x^3}-2\dfrac{1}{x^2}$ стремятся к 0, при $x\to\infty$, поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}-2\frac{1}{x^2}+5\right) = 5,\ \lim_{x\to\infty}\left(1-12\frac{1}{x^3}\right) = 1.$$

$b)$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$.

В данном примере числитель и знаменатель дроби при $x\to 1$ стремятся к 0, то есть имеем дело с неопределенностью вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для ее раскрытия числитель и знаменатель домножим на сопряженный к знаменателю множитель $\left(\sqrt[3]{26+x}\right)^2+3\sqrt[3]{26+x}+3^2$, что позволит избавиться от иррациональности в знаменателе, так как в силу формулы $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ получим

$$\left(\sqrt[3]{26+x}-3\right)\left(\left(\sqrt[3]{26+x}\right)^2+3\sqrt[3]{26+x}+3^2\right) = 26+x-27.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x-2)\Big(\big(\sqrt[3]{26+x}\big)^2+3\sqrt[3]{26+x}+3^2\Big)}{(\sqrt[3]{26+x}-3)\Big(\big(\sqrt[3]{26+x}\big)^2+3\sqrt[3]{26+x}+3^2\Big)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2x-2)\Big(\big(\sqrt[3]{26+x}\big)^2+3\sqrt[3]{26+x}+3^2\Big)}{26+x-27}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)\Big(\big(\sqrt[3]{26+x}\big)^2+3\sqrt[3]{26+x}+3^2\Big)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}2\Big(\big(\sqrt[3]{26+x}\big)^2+3\sqrt[3]{26+x}+3^2\Big)=$$

$$=2\big((\sqrt[3]{27})^2+3\sqrt[3]{27}+9\big)=2(9+3\cdot 3+9)=2\cdot 27=54.$$

$c)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(\cos x)}$.

В этом пределе числитель и знаменатель функции при $x\to 0$ стремятся к 0, то есть имеем дело с неопределенностью вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для ее раскрытия числитель и знаменатель заменим эквивалентными бесконечно малыми

$$\ln(1+x^2)\sim x^2,\ x\to 0,$$

$$\ln(\cos x)=\ln\big(1+(\cos x-1)\big)\sim\cos x-1, x\to 0,$$

так как $x^2\to 0$, $\cos x-1\to 0$ при $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln(\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2,$$

учитывая, что функция $\cos x-1=-(1-\cos x)\sim-\dfrac{x^2}{2},\ x\to 0.$

$d)$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\operatorname{arctg}(2-x)}$.

Аналогично предыдущему примеру, функции $x^2-5x+6,\ \operatorname{arctg}(2-x)$ при $x\to 2$ стремятся к 0, то есть возникает неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для ее раскрытия знаменатель заменим эквивалентной бесконечно малой

$$\operatorname{arctg}(2-x)\sim 2-x,\ x\to 2,$$

а числитель разложим на множители

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3),$$

где числа 2, 3 корни уравнения $x^2-5x+6=0$.

Таким образом,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{\operatorname{arctg}(2-x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(2-x)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)}=-\lim_{x\to 2}(x-3)=-(2-3)=1.$$

е) $\lim\limits_{x\to 0}\bigl(2-e^{x^2}\bigr)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

При $x\to 0$ у функции $\bigl(2-e^{x^2}\bigr)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ основание стремится к 1, а показатель степени к ∞, то есть имеем неопределенность вида (1^∞). Преобразуем функцию так, чтобы применить второй замечательный предел, получим

$$\lim_{x\to 0}\bigl(2-e^{x^2}\bigr)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\bigl(1+(1-e^{x^2})\bigr)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\left[\bigl(1+(1-e^{x^2})\bigr)^{\frac{1}{1-e^{x^2}}}\right]^{\frac{1-e^{x^2}}{1-\cos x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(e)^{\frac{1-e^{x^2}}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}(e)^{\frac{-(e^{x^2}-1)}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}(e)^{\frac{-x^2}{\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to 0}(e)^{\frac{-1}{\frac{1}{2}}}=e^{-2}.$$

Поясним решение. Так как $1-e^{x^2}\to 0$ при $x\to 0$, то по второму замечательному пределу

$$\lim_{x\to 0}\bigl(1+(1-e^{x^2})\bigr)^{\frac{1}{1-e^{x^2}}}=e.$$

Кроме того,

$$e^{x^2}-1\sim x^2,\ 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\ x\to 0,$$

поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{-(e^{x^2}-1)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\frac{1}{2}}=-2.$$

Задача 2. Задана функция

$$f(x)=\begin{cases}2^{\frac{1}{x+2}},\ x\leqslant 0,\\ x^2-2x,\ 0<x<2,\\ 2-x,\ x\geqslant 2.\end{cases}.$$

Найти точки разрыва функции, если они существуют, и определить их тип.

Найти $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Построить график функции $y = f(x)$.

Числовую ось разобьем на три промежутка: $(-\infty, 0]$, $(0, 2)$, $[2, +\infty)$, в каждом из которых $f(x)$ задана соответственно элементарными функциями: $f_1(x) = 2^{\frac{1}{x+2}}$, $f_2(x) = x^2 - 2x$, $f_3(x) = 2 - x$.

На интервале $(-\infty, 0]$ функция $f_1(x) = 2^{\frac{1}{x+2}}$ определена во всех точках, кроме $x = -2$. Для исследования характера точки разрыва найдем левый и правый пределы функции $\lim\limits_{x\to-2\pm0} f(x)$. При $x \to -2-0$ величина $x+2$ отрицательна и стремится к 0, следовательно,

$$\frac{1}{x+2} \to -\infty, \ 2^{\frac{1}{x+2}} \to 0.$$

Таким образом, нашли

$$\lim_{x\to-2-0} 2^{\frac{1}{x+2}} = 0.$$

Аналогично, при $x \to -2+0$ величина $x+2$ положительна и стремится к 0, следовательно,

$$\frac{1}{x+2} \to +\infty, \ 2^{\frac{1}{x+2}} \to +\infty.$$

Отсюда получим

$$\lim_{x\to-2+0} 2^{\frac{1}{x+2}} = +\infty.$$

По определению $x = -2$ — точка разрыва 2-го рода.

Функции $f_2(x)$ и $f_3(x)$ определены на $(0, 2)$ и $[2, +\infty)$ и, следовательно, непрерывны во всех точках соответствующих интервалов, то есть точек разрыва нет. Остается проверить точки $x = 0$, $x = 2$, являющиеся границами областей задания функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$. Для этого вычислим и сравним односторонние пределы в каждой указанной точке.

Исследуем точку $x = 0$. Если $x \to 0-0$ $(x < 0)$, то функция $f(x)$ задается формулой $2^{\frac{1}{x+2}}$, и

$$\lim_{x\to0-0} f(x) = \lim_{x\to0-0} 2^{\frac{1}{x+2}} = 2^{\frac{1}{2}}.$$

Если $x \to 0+0$ $(x > 0)$, то функция $f(x) = x^2 - 2x$, и

$$\lim_{x\to0+0} f(x) = \lim_{x\to0+0} (x^2 - 2x) = 0.$$

Таким образом, получили

$$\lim_{x\to0-0} f(x) \neq \lim_{x\to0+0} f(x),$$

по определению $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода (точка конечного скачка).

Аналогично, проведем исследование для следующей точки $x = 2$. Если $x \to 2 - 0$ $(x < 2)$, то $f(x) = x^2 - 2x$, и

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0}(x^2 - 2x) = 0.$$

Если $x \to 2 + 0$ $(x > 2)$, то $f(x) = 2 - x$, и

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0}(2 - x) = 0.$$

Кроме того, $f(2) = 0$. Таким образом, получили

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} f(x) = f(2),$$

следовательно, в точке $x = 2$ функция $f(x)$ непрерывна.

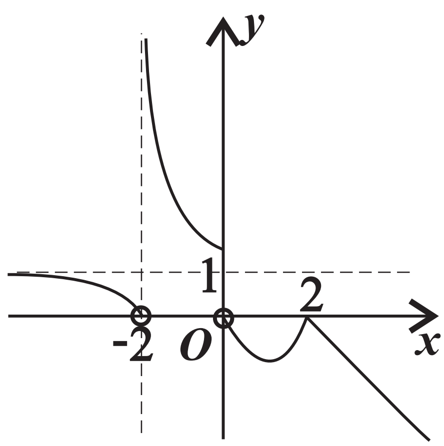
Далее вычислим $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. При $x < 0$ функция $f(x)$ равна $2^{\frac{1}{x+2}}$. Если $x \to -\infty$, то $x + 2 \to -\infty$, а, следовательно, $\dfrac{1}{x+2} \to 0$, откуда получим

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} 2^{\frac{1}{x+2}} = 2^0 = 1.$$

При $x > 0$ функция $f(x)$ равна $2 - x$. Если $x \to +\infty$, то $2 - x \to -\infty$, следовательно,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}(2 - x) = -\infty.$$

Таким образом, $x = -2$ — точка разрыва 2-го рода, $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.



Задача 3. Даны четыре комплексных числа a_1, a_2, b_1, b_2. Найти $a_1 + a_2$, $a_1 - a_2$, $a_1 \cdot a_2$, $\dfrac{a_1}{a_2}$, $\left(\dfrac{b_1}{b_2}\right)^{12}$, $\sqrt[3]{\dfrac{b_1}{b_2}}$, если $a_1 = 2 + 5i$, $a_2 = 5 - 3i$, $b_1 = -2\sqrt{2}$, $b_2 = 1 - i$.

1) $a_1 + a_2 = (2 + 5i) + (5 - 3i) = (2 + 5) + i(5 - 3) = 7 + 2i$;

2) $a_1 - a_2 = (2 + 5i) - (5 - 3i) = (2 - 5) + i(5 + 3) = -3 + 8i$;

3) считая $i^2 = -1$, вычислим $a_1 \cdot a_2$

$$a_1 \cdot a_2 = (2 + 5i) \cdot (5 - 3i) = 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3i + 5i \cdot 5 - 5 \cdot 3i^2 =$$

$$= 10 - 6i + 25i - 15i^2 = (10 + 15) + i(-6 + 25) = 25 + i19;$$

4) вычислим $\dfrac{a_1}{a_2}$, домножая числитель и знаменатель на комплексно сопряженное число к знаменателю $\bar{a}_2 = 5 + 3i$, получим

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1 \cdot \bar{a}_2}{a_2 \cdot \bar{a}_2} = \frac{(2 + 5i)(5 + 3i)}{(5 - 3i)(5 + 3i)} = \frac{2 \cdot 5 + 2 \cdot 3i + 5 \cdot 5i + 5 \cdot 3i^2}{5^2 - 3^2 i^2} =$$

$$= \frac{(10 - 15) + i(6 + 25)}{25 + 9} = \frac{-5 + i31}{34} = -\frac{5}{34} + i\frac{31}{34};$$

5) сначала найдем $\dfrac{b_1}{b_2}$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{b_1 \cdot \bar{b}_2}{b_2 \cdot \bar{b}_2} = \frac{-2\sqrt{2}(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{-2\sqrt{2}(1 + i)}{1^2 - i^2} = \frac{-2\sqrt{2}(1 + i)}{1 + 1} =$$

$$= \frac{-2\sqrt{2}(1 + i)}{2} = -\sqrt{2}(1 + i) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Представим комплексное число $z = \dfrac{b_1}{b_2} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ в тригонометрической форме $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где φ — аргумент z. Для $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$: $x = \mathrm{Re} z = -\sqrt{2}$, $y = \mathrm{Im} z = -\sqrt{2}$,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2,$$

аргумент φ найдем из системы

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{|z|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases},$$

решением которой является $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$. Таким образом, получили тригонометрическую форму

$$z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

По первой формуле Муавра

$$z^n = |z|^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big),$$

где n — натуральное число, найдем $\left(\dfrac{b_1}{b_2}\right)^{12}$

$$\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{12} = z^{12} = 2^{12}\left(\cos\left(12\cdot\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(12\cdot\frac{5\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 2^{12}\left(\cos(3\cdot 5\pi) + i\sin(3\cdot 5\pi)\right) = 2^{12}\left(\cos(15\pi) + i\sin(15\pi)\right) =$$

$$= 2^{12}\left(\cos(\pi + 2\cdot 7\pi) + i\sin(\pi + 2\cdot 7\pi)\right) = 2^{12}\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) =$$

$$= 2^{12}\left(-1 + i\cdot 0\right) = -2^{12} = -4096,$$

то есть

$$\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{12} = -4096;$$

б) в предыдущем пункте нашли тригонометрическую форму комплексного числа $\dfrac{b_1}{b_2} = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$. Используя вторую формулу Муавра

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right),$$

где n — натуральное число, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, вычислим

$$w_k = \sqrt[3]{\frac{b_1}{b_2}} = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right)\right),\ \ k = 0, 1, 2,$$

или

$$w_k = \sqrt[3]{\frac{b_1}{b_2}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi + 8\pi k}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi + 8\pi k}{12}\right)\right),\ \ k = 0, 1, 2.$$

Таким образом, различными корнями 3-й степени являются следующие три числа:

$$k=0\colon w_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi+8\pi\cdot 0}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi+8\pi\cdot 0}{12}\right)\right)=$$

$$=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right),$$

$$k=1\colon w_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi+8\pi\cdot 1}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi+8\pi\cdot 1}{12}\right)\right)=$$

$$=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right),$$

$$k=2\colon w_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi+8\pi\cdot 2}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi+8\pi\cdot 2}{12}\right)\right)=$$

$$=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{21\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{21\pi}{12}\right)\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right).$$

Задача 4. Построить область, ограниченную линиями, уравнения которых заданы в полярной системе координат: $r^2=4\sin^2\varphi,\ r=1\ (r\geqslant 1)$.

Уравнение $r^2=4\sin^2\varphi$ можно представить в виде совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} r=-2\sin\varphi \\ r=2\sin\varphi \end{array}\right.,$$

каждое из которых задает кривую.

Построим линию, заданную уравнением $r=-2\sin\varphi$. Найдем область допустимых значений φ, исходя из того, что $r\geqslant 0$. Для этого найдем решение неравенства

$$-2\sin\varphi\geqslant 0,$$

$$\sin\varphi\leqslant 0,$$

то есть $\pi\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Отсюда получим область допустимых значений — φ любое значение из $[\pi,2\pi]$. Найдем все значения $r=-2\sin\varphi$ для $\varphi\in[\pi,2\pi]$ с шагом $\dfrac{\pi}{8}$

$$\varphi=\pi,\ r(\pi)=-2\sin\pi=0,$$

$$\varphi=\pi+\frac{\pi}{8}=\frac{9\pi}{8},\ r\left(\frac{9\pi}{8}\right)=-2\sin\frac{9\pi}{8}\approx 0,7,$$

$$\varphi=\pi+2\frac{\pi}{8}=\frac{5\pi}{4},\ r\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-2\sin\frac{5\pi}{4}\approx 1,4,$$

$$\varphi = \pi + 3\frac{\pi}{8} = \frac{11\pi}{8},\ r\left(\frac{11\pi}{8}\right) = -2\sin\frac{11\pi}{8} \approx 1,8,$$

$$\varphi = \pi + 4\frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{2},\ r\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2\sin\frac{3\pi}{2} = 2,$$

$$\varphi = \pi + 5\frac{\pi}{8} = \frac{13\pi}{8},\ r\left(\frac{13\pi}{8}\right) = -2\sin\frac{13\pi}{8} \approx 1,8,$$

$$\varphi = \pi + 6\frac{\pi}{8} = \frac{14\pi}{8} = \frac{7\pi}{4},\ r\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -2\sin\frac{7\pi}{4} \approx 1,4,$$

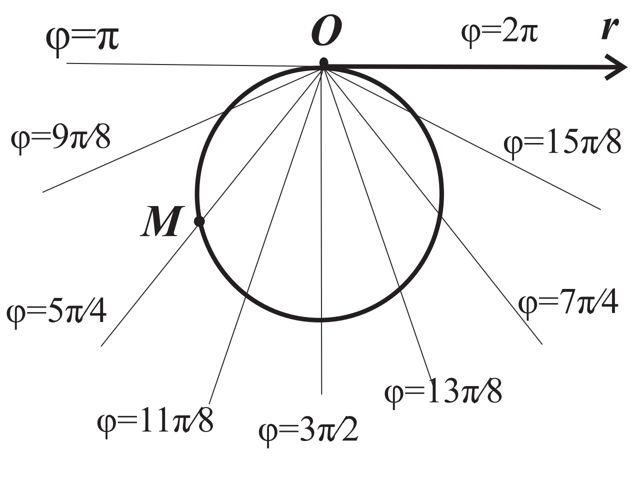
$$\varphi = \pi + 7\frac{\pi}{8} = \frac{15\pi}{8},\ r\left(\frac{15\pi}{8}\right) = -2\sin\frac{15\pi}{8} \approx 0,7,$$

$$\varphi = \pi + 8\frac{\pi}{8} = 2\pi,\ r(2\pi) = -2\sin 2\pi = 0.$$

На практике обычно не расписывают подробные вычисления, а сразу заносят результаты в таблицу.

φ	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
r	0	0,7	1,4	1,8	2	1,8	1,4	0,7	0

Построим полученные точки с координатами (r, φ) на чертеже и соединим их линией (исследуемая кривая — окружность). Например, точка $M\left(1,4; \dfrac{5\pi}{4}\right)$ строится следующим образом.



r=-2sinφ

Проведем через полюс луч под углом $\dfrac{5\pi}{4}$ к полярной оси (другими словами, повернем полярную ось на угол $\dfrac{5\pi}{4}$) и отложим от полюса отрезок длиной 1,4. Конец этого отрезка и будет точка M.

Рассуждая аналогичным образом, построим линию, заданную уравнением $r = 2\sin\varphi$.

Найдем область допустимых значений φ, решая неравенство

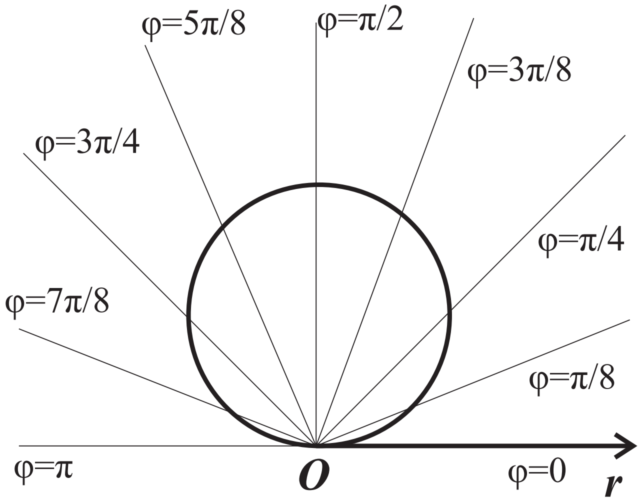
$$2\sin\varphi \geqslant 0,$$

$$\sin\varphi \geqslant 0,$$

таким образом, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Запишем все значения $r = 2\sin\varphi$ при $\varphi \in [0, \pi]$ с шагом $\dfrac{\pi}{8}$ в таблицу

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
r	0	0,7	1,4	1,8	2	1,8	1,4	0,7	0

Отметим точки на чертеже и соединим их линией, получим окружность.

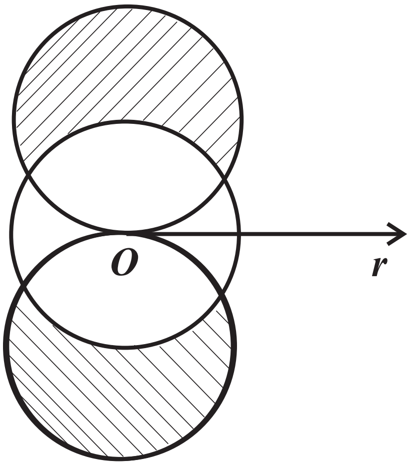


r=2sinφ

Для линии $r = 1$ область допустимых значений — любое φ из $[0, 2\pi]$.

Следовательно, кривая состоит из точек с координатами $(1, \varphi)$, где $\varphi \in [0, 2\pi]$. Построив эти точки на чертеже, получим окружность единичного радиуса с центром в полюсе.

Три линии ограничивают несколько областей. По условию задачи $r \geqslant 1$, поэтому выбираются те области, у которых точки лежат вне окружности с уравнением $r = 1$.



Задача 5. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ данных функций:

$a)$ $y = \dfrac{x^2 \sin x}{e^x + \cos x}$; $b)$ $y = (2x^3+5)^4$; $c)$ $y = \ln(\operatorname{tg} 3x)$; $d)$ $y = (1+2x^2)^{\cos x}$;

$e)$ $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

$a)$ $y' = \left(\dfrac{x^2 \sin x}{e^x + \cos x}\right)' = \dfrac{(x^2 \sin x)'(e^x + \cos x) - x^2 \sin x (e^x + \cos x)'}{(e^x + \cos x)^2} =$

$$= \frac{(2x \sin x + x^2 \cos x)(e^x + \cos x) - x^2 \sin x(e^x - \sin x)}{(e^x + \cos x)^2}.$$

$b)$ $y' = \big((2x^3+5)^4\big)' = 4(2x^3+5)^3(2x^3+5)' = 24x^2(2x^3+5)^3.$

$c)$ $y' = (\ln(\operatorname{tg} 3x))' = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 3x}\,(\operatorname{tg} 3x)' = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 3x} \cdot \dfrac{3}{\cos^2 3x}.$

$d)$ $y = (1+2x^2)^{\cos x}.$

Прологарифмируем выражение

$$\ln y = \ln(1+2x^2)^{\cos x},$$

$$\ln y = \cos x \ln(1+2x^2).$$

Продифференцируем обе части последнего равенства, учитывая, что y зависит от x.

$$\frac{1}{y} y'_x = (-\sin x)\ln(1+2x^2) + \cos x \frac{4x}{1+2x^2}.$$

Выразим y'_x:

$$y'_x = y\left((-\sin x)\ln(1+2x^2) + \cos x \frac{4x}{1+2x^2}\right),$$

$$y'_x = (1+2x^2)^{\cos x}\left((-\sin x)\ln(1+2x^2) + \cos x\frac{4x}{1+2x^2}\right).$$

e) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

Для вычисления производной y'_x функции $y = f(x)$, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t)$, воспользуемся формулой $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, тогда получим

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3\cos^2 t(-\sin t)}{3\sin^2 t\cos t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Задача 6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = (x+7)e^{x+8}$$

на отрезке $[-9;\ -7]$.

1. Найдем производную функции:

$$y' = \left((x+7)e^{x+8}\right)' = (x+7)'e^{x+8} + (x+7)\left(e^{x+8}\right)' =$$

$$= e^{x+8} + (x+7)e^{x+8} = (1+x+7)e^{x+8} = (x+8)e^{x+8}.$$

2. Найдем значения x, при которых производная функции равна нулю:

$$(x+8)e^{x+8} = 0,\ x+8 = 0,\ x = -8.$$

3. Это значение $x = -8$ принадлежит промежутку $[-9;\ -7]$.

4. Вычислим значения функции в найденной точке и на концах отрезка:

$$y(-9) = (-9+7)e^{-9+8} = -2e^{-1} \approx -\frac{20}{27},$$

$$y(-7) = (-7+7)e^{-7+8} = 0,$$

$$y(-8) = (-8+7)e^{-8+8} = -1.$$

5. Выберем из найденных в п. 4 значений наибольшее и наименьшее:

$$y_{\text{наиб}} = y(-7) = 0,\ y_{\text{наим}} = y(-8) = -1.$$

Задача 7. Методами дифференциального исчисления исследовать функцию $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ и построить ее график, используя результаты исследования.

1. Область определения функции: $(-\infty;\ -1)\bigcup(-1;\ 1)\bigcup(1;\ +\infty)$ $(x \neq \pm 1)$.

2. Функция четная, так как

$$y(-x) = \frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2} = y(x),$$

и ее график симметричен относительно оси ординат.

Функция непериодическая.

3. Вертикальные асимптоты могут пересекать ось абсцисс в точках $x = \pm 1$. Так как

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty, \ \lim_{x\to 1-0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty,$$

то $x = 1$ — вертикальная асимптота. В силу симметрии графика исследуемой функции $x = -1$ также является вертикальной асимптотой.

4. Исследуем поведение функции в бесконечности. Вычислим

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1,$$

то есть $y = -1$ — горизонтальная асимптота. Наклонных асимптот нет.

5. Экстремумы и интервалы монотонности функции. Вычислим производную функции

$$y' = \frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}.$$

Отсюда $y' = 0$ при $x = 0$ и y' не существует при $x = \pm 1$. Однако критической является только точка $x = 0$, так как точки $x = \pm 1$ не входят в область определения функции. При $x < 0$, $f'(x) < 0$, а при $x > 0$, $f'(x) > 0$.

Следовательно, на интервалах $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 0)$ функция убывает, а на интервалах $(0;\ 1)$, $(1;\ +\infty)$ возрастает, кроме того, $x = 0$ — точка минимума и $f_{\min} = f(0) = 1$.

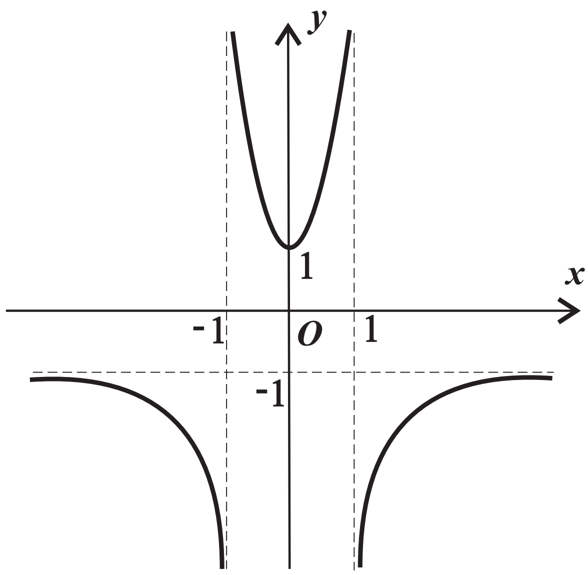
6. Интервалы выпуклости и точки перегиба. Вычислим вторую производную функции

$$y'' = \left(\frac{4x}{(1-x^2)^2}\right)' = \frac{4(1-x^2)^2 - 4x\cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

Отсюда $f''(x) > 0$ на интервале $(-1;\ 1)$ и функция выпукла вниз на этом интервале, $f''(x) < 0$ на интервалах $(-\infty;\ -1)$, $(1;\ +\infty)$ и, следовательно, функция выпукла вверх на этих интервалах. Точек перегиба нет.

7. Найдем точки пересечения с осями координат. При $x = 0$ получим $f(0) = 1$, то есть точка пересечения графика функции с осью ординат $(0,\ 1)$. Уравнение $f(x) = 0$ решений не имеет. Следовательно, график функции не пересекает ось абсцисс.

8. Используя, проведенные выше исследования, строим график функции.



5. Контрольная работа 3

Задача 1. Найти неопределенные интегралы:

1.1

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x}\, dx,$

b) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x\, dx,$

c) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{4-x}{x-12}}\, dx.$

1.2

a) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\, dx,$

b) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx,$

c) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-4}\, dx.$

1.3

a) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx,$

b) $\displaystyle\int (x+2)\sin 3x\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\,dx.$

1.4

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6-1}}\,dx,$

b) $\displaystyle\int (x+1)5^{-x}\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}.$

1.5

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)},$

b) $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$

1.6

a) $\displaystyle\int \frac{\cos 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx,$

b) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x})^2}.$

1.7

a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{4+x^2}\,dx,$

b) $\displaystyle\int (2x-1)\log_3 x\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}\,dx.$

1.8

a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx,$

b) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\cos x+\sin x)^2}.$

1.9

a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx,$

b) $\displaystyle\int (x-1)\cos 3x\,dx,$

c) $\displaystyle\int \cos^6 x\,dx.$

1.10

a) $\displaystyle\int \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 2x}\,dx,$

b) $\displaystyle\int x\arcsin x\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}.$

1.11

a) $\displaystyle\int \sqrt[9]{\sin 3x}\cos 3x\,dx,$

b) $\displaystyle\int x^3\ln x\,dx,$

1.12

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}}\,dx,$

b) $\displaystyle\int (2x-1)\ln x\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$.

c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1.13

a) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{5+4\cos x}\,dx$.

1.14

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\arccos\frac{x}{2}+3}}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \sqrt[4]{x}\ln x\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$.

1.15

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(4+\ln^2 x)}$,

b) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$.

1.16

a) $\displaystyle\int \frac{\arcsin\frac{x}{3}}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} 2x\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$.

1.17

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3}\,dx$,

b) $\displaystyle\int (4x+3)e^{-2x}\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx$.

1.18

a) $\displaystyle\int \frac{e^{\sin\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$.

1.19

a) $\displaystyle\int \cos(1-x)\sin^3(1-x)\,dx$,

b) $\displaystyle\int (1-x)4^x\,dx$,

c) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

1.20

a) $\displaystyle\int \frac{\sin\lg x}{x}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \arcsin^2 x\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$.

1.21

a) $\displaystyle\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx$,

1.22

a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2(5x^2)}\,dx$,

b) $\displaystyle\int x^3 e^{-x^2}\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt[3]{x+2}}\,dx.$

b) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(25-x^2)\sqrt{25-x^2}}.$

1.23

a) $\displaystyle\int x^2 e^{2-x^3}\,dx,$

b) $\displaystyle\int (3x-2)\cos 5x\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x - 5\cos^2 x + 4}\,dx.$

1.24

a) $\displaystyle\int x5^{x^2}\,dx,$

b) $\displaystyle\int (x-1)^2\cos x\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}.$

1.25

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}\,dx,$

b) $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}.$

1.26

a) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-e^x}}\,dx,$

b) $\displaystyle\int x\ln^2 x\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}.$

1.27

a) $\displaystyle\int \sin x \lg(\cos x)\,dx,$

b) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx,$

c) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}\,\frac{dx}{(2-x)^2}.$

1.28

a) $\displaystyle\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\sin 2x\,dx,$

b) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}.$

1.29

a) $\displaystyle\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx,$

b) $\displaystyle\int x\ln\frac{1-x}{1+x}\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx.$

1.30

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}},$

b) $\displaystyle\int x^2 e^{-\frac{x}{2}}\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx.$

Задача 2. Вычислить: a) площадь плоской фигуры D, ограниченной кривыми (в вариантах 1—10 кривые заданы в прямоугольной системе координат; в вариантах 11—20 кривые — в параметрической форме; в вариантах 21—30 кривые — в полярной системе координат); b) длину дуги кривой (в вариантах 1—10 кривая задана параметрическими уравнениями; в вариантах 11—20 — уравнением в полярной системе координат; в вариантах 21—30 — уравнением в прямоугольной системе координат); c) объем тела, образованного вращением фигур, ограниченных графиками функций (в вариантах 1—15 ось вращения Ox, в вариантах 16—30 ось вращения Oy).

2.1 a) $D\colon y = x\sqrt{4-x},\ y = 0;$

b) $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi;$

c) $y = \sin^2 x,\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi.$

2.2 a) $D\colon y = x\sqrt{4-x},\ y = x^2 - 2x;$

b) $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi;$

c) $y = \arcsin x,\ y = 0,\ x = 1.$

2.3 a) $D\colon y = 2x - x^2,\ y = -x;$

b) $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{3};$

c) $y = x^2,\ y = 0,\ x = 3.$

2.4 a) $D\colon y = x^2,\ y = 3 - 2x;$

b) $\begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2};$

c) $y = e^x,\ y = e^{-x},\ x = 1.$

2.5 a) $D\colon y = \sqrt{4 - x^2},\ y = 0,\ x = 0,\ y = 1;$

b) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1;$

c) $y = x^3,\ y = \sqrt{x}.$

2.6 *a*) $D\colon y = x^2\cos x,\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$;

b) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} 0 \leqslant t \leqslant \pi$;

c) $y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

2.7 *a*) $D\colon y = e^x,\ y = e^{-x},\ x = 1$;

b) $\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t, \end{cases} 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$;

c) $y = \cos x$, $y = 5\cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

2.8 *a*) $D\colon y = -x^2 + 8,\ y = x^2$;

b) $\begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$;

c) $y = \sin x$, $y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$.

2.9 *a*) $D\colon y = e^{2x},\ y = e^{-2x},\ y = 2$;

b) $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t), \end{cases} 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{3}$;

c) $y = xe^x$, $y = 0,\ x = 1$.

2.10 *a*) $D\colon y = x^2,\ xy = 8,\ y = 0,\ x = 6$;

b) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} 0 \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2}$;

c) $y^2 = x$, $y = 0,\ x = 4$.

2.11 *a*) $D\colon \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ (эллипс);

b) $r = 2\sin\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$;

c) $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

2.12 *a*) $D\colon \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, (циклоида);

b) $r = 2(1 + \cos\varphi),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$;

c) $y = x^2 + 2,\ y = 0,\ x = 1.$

2.13 *a*) $D\colon \begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t, \end{cases}$ (астроида);

b) $r = 3\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$

c) $y = x^2,\ y = x + 6.$

2.14 *a*) $D\colon \begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ (эллипс);

b) $r = 2(1 - \cos\varphi),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$

c) $y = x^2,\ x = y^2.$

2.15 *a*) $D\colon \begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ (астроида);

b) $r = 2(1 - \sin\varphi),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$

c) $y^2 = 4 - x,\ x = 0.$

2.16 *a*) $D\colon \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$ (циклоида);

b) $r = e^{2\varphi},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{1}{2};$

c) $y = x^2 - 4x + 4,\ y = 0,\ x = 4.$

2.17 *a*) $D\colon \begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ (астроида);

b) $r = 2\cos\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$

c) $y = \operatorname{arctg} x,\ y = 0,\ x = 1.$

2.18 *a*) $D\colon \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases}$ (эллипс);

b) $r = 2(1 + \sin\varphi),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$

c) $y = x^2,\ y = \sqrt{x}.$

2.19 *a*) $D\colon \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$ (циклоида);

$b)\ r = 2\sin^3\frac{\varphi}{3},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi;$
$c)\ y = x^2 + 1,\ y = x,\ x = 0,\ x = 1.$

2.20 $a)\ D\colon \begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases} 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$ (циклоида);
$b)\ r = 2\cos^3\frac{\varphi}{3},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi;$
$c)\ y = \ln x,\ y = 0,\ x = e.$

2.21 $a)\ D\colon r = \sin 3\varphi;$
$b)\ y = e^x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1;$
$c)\ y = x^3,\ y = x^2.$

2.22 $a)\ D\colon r = \cos 3\varphi;$
$b)\ y = \ln x,\ \sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{8};$
$c)\ y = 4x^3,\ y = 4,\ x = 0.$

2.23 $a)\ D\colon r = 5\cos\varphi;$
$b)\ y = e^x + 6,\ \ln\sqrt{8} \leqslant x \leqslant \ln\sqrt{15};$
$c)\ x = y^2,\ y = 0,\ x = 1.$

2.24 $a)\ D\colon r = 5(1 + \cos\varphi),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi;$
$b)\ y^2 = x^3,\ 0 \leqslant x \leqslant 4;$
$c)\ x = (y-2)^2,\ y = 0,\ x = 0.$

2.25 $a)\ D\colon r = 2\sin\varphi;$
$b)\ y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x},$ между точками пересечениями с осью Ox;
$c)\ x^2 - y^2 = 4,\ y = 2,\ y = -2.$

2.26 $a)\ D\colon r = 2\sin 2\varphi;$
$b)\ y^2 = 4x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1;$
$c)\ y^2 = 4 - x,\ x = 0.$

2.27 $a)\ D\colon r = 3\sin\varphi,\ r = 5\sin\varphi;$
$b)\ y = \ln x,\ \sqrt{3} \leqslant x\sqrt{8};$

c) $y = x^2$, $8x = y^2$.

2.28 *a*) $D\colon r = 2\sin\varphi,\ r = 4\sin\varphi$;
b) $y = x\sqrt{x},\ 0 \leqslant x \leqslant 5$;
c) $y = \arccos x,\ y = \arcsin x,\ x = 0$.

2.29 *a*) $D\colon r = \cos\varphi,\ r = 2\cos\varphi$;
b) $y^2 = 36x,\ 0 \leqslant x \leqslant 3$;
c) $y = \arccos x,\ y = \arcsin x,\ y = 0$.

2.30 *a*) $D\colon r = \cos 2\varphi$;
b) $y^2 = 9 - x,\ -3 \leqslant y \leqslant 3$;
c) $y = x^3$, $y = x$.

Задача 3. Найти направление и скорость наибольшего возрастания функции $f(x, y, z)$ в точке M_0. Найти производную по направлению вектора $\vec{l}$ от функции $f(x, y, z)$ в точке M_0.

3.1 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - xz^2,\ M_0(1, 3, 2),\ \vec{l} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

3.2 $f(x, y, z) = \dfrac{1}{2}(y^2 - x^2) + \dfrac{z}{x},\ M_0(1, 2, 1),\ \vec{l} = \vec{j} + 2\vec{k}$.

3.3 $f(x, y, z) = \ln(5 + x^2 + y^3 + z),\ M_0(2, -2, 0),\ \vec{l} = \overrightarrow{M_0B},\ B(1, 0, 2)$.

3.4 $f(x, y, z) = xy^2z^3 + 3x + 2y + z,\ M_0(3, 2, -1),\ \vec{l} = \overrightarrow{M_0A},\ A(5, 4, 1)$.

3.5 $f(x, y, z) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + x^4 - y^2 + z^2,\ M_0(1, 1, 2),\ \vec{l} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

3.6 $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2x,\ M_0(1, 2, 1),\ \vec{l} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

3.7 $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} x^2 - 2y^2z,\ M_0(0, -1, 2),\ \vec{l} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

3.8 $f(x, y, z) = \ln(1 + 2x^3y) + z^2 + y,\ M_0(0, 1, -2),\ \vec{l} = \overrightarrow{M_1M_2}$, $M_1(1, 2, -8),\ M_2(5, 2, -3)$.

3.9 $f(x, y, z) = \dfrac{x^2}{y^2x + z^2},\ M_0(4, 1, 2),\ \vec{l} = \overrightarrow{M_0N},\ N(4, 5, -3)$.

3.10 $f(x, y, z) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2y^2} + \dfrac{3x}{y},\ M_0(2, 1, -2),\ \vec{l}$ — радиус-вектор точки M_0.

3.11 $f(x, y, z) = \ln(x + z^2) + xy^2z,\ M_0(1, 2, 0),\ \vec{l} = \overrightarrow{AM_0},\ A(1, 3, 0)$.

3.12 $f(x, y, z) = e^{xy^2} + \dfrac{z^2}{\sqrt{x}},\ M_0(1, 0, 2),\ \vec{l} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

3.13 $f(x,y,z) = \arccos\dfrac{x}{x+y} + z^2y^2,\ M_0(1,1,2),\ \vec{l} = 3\vec{i} - 4\vec{k}.$

3.14 $f(x,y,z) = \ln\dfrac{x^2z}{2y} + \sqrt{yz^2+2},\ M_0(2,2,1),\ \vec{l} = \overrightarrow{M_0N},\ N(2,6,6).$

3.15 $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+2y^2} + e^{z\sqrt{x}},\ M_0(1,2,0),\ \vec{l}$ — радиус-вектор точки M_0.

3.16 $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\sqrt{3x^2+yz^3},\ M_0(0,3,1),\ \vec{l} = \overrightarrow{M_0B},\ B(1,2,0).$

3.17 $f(x,y,z) = \arcsin\dfrac{2x}{y^2} + \sqrt{z^3x^3},\ M_0(1,2,4),\ \vec{l} = 12\vec{i} + 5\vec{j}.$

3.18 $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x^2-y^2} + \dfrac{y^2}{2z^3},\ M_0(5,4,1),\ \vec{l} = -\vec{r},$
$\vec{r}$ — радиус-вектор точки M_0.

3.19 $f(x,y,z) = 2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y} - 1\right) + x^2z^3,\ M_0(2,2,1),\ \vec{l} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}.$

3.20 $f(x,y,z) = \ln(y-x^3) + \dfrac{y^2}{z^3},\ M_0(2,9,1),\ \vec{l} = \overrightarrow{M_0C},\ C(3,9,0).$

3.21 $f(x,y,z) = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},\ M_0(1,1,1),\ \vec{l} = 12\vec{j} - 16\vec{k}.$

3.22 $f(x,y,z) = \dfrac{9x}{x^2+y^2+z^2},\ M_0(1,2,2),\ \vec{l} = \overrightarrow{M_0N},\ N(0,2,3).$

3.23 $f(x,y,z) = \ln(e^{2x} + e^{y} + e^{3z}),\ M_0(0,0,0),\ \vec{l} = \vec{r},$
$\vec{r}$ — радиус-вектор точки $A(16,12,0)$.

3.24 $f(x,y,z) = xz^y,\ M_0(-3,2,1),\ \vec{l} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}.$

3.25 $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z^2} + \dfrac{x^2}{2},\ M_0(1,4,2),\ \vec{l} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.$

3.26 $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + x^4 - y^2 + z^2,\ M_0(-1,-2,2),$
$\vec{l} = 13\vec{i} - 26\vec{j} + 26\vec{k}.$

3.27 $f(x,y,z) = x^2yz + \ln(y+z^2),\ M_0(2,1,0),\ \vec{l} = 32\vec{i} + 24\vec{j}.$

3.28 $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{2x^2} + \dfrac{3z^2}{x},\ M_0(1,2,1),\ \vec{l} = 16\vec{j} + 12\vec{k}.$

3.29 $f(x,y,z) = e^{xy^2+\sqrt{z}},\ M_0(-2,1,4),\ \vec{l} = \overrightarrow{M_0N},\ N(-1,3,5).$

3.30 $f(x,y,z) = \ln(x-y^3) + \dfrac{x^2}{z^3},\ M_0(9,2,1),\ \vec{l} = \overrightarrow{M_0N},\ N(25,2,13).$

Задача 4. Найти: a) безусловные экстремумы функции $z = f(x,y)$; b) условные экстремумы функции $z = f(x,y)$, используя метод множителей Лагранжа, при условии, что $\varphi(x,y) = 0$.

4.1

$a)\, z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1;$

$b)\ z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y},\ x + y - 2 = 0.$

4.2

$a)\, z = 10 + 2xy - 2x^2 - 3y^2;$

$b)\ z = x + y,\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{2}.$

4.3

$a)\, z = 6x^2 + y^2 + x - 2y - 1;$

$b)\ z = xy,\ x^2 + y^2 = 2.$

4.4

$a)\, z = x^2 + (y - 1)^2;$

$b)\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x + y = 1.$

4.5

$a)\, z = x^2 - y^2 - xy + 9x - 6y + 20;$

$b)\ z = x^2 + y^2,\ x^2 - y^2 = 1.$

4.6

$a)\, z = x + 2y + xy - x^2 - y^2;$

$b)\ z = x + y,\ xy = 1.$

4.7

$a)\, z = x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13;$

$b)\ z = x + 2y,\ x^2 + y^2 = 5.$

4.8

$a)\, z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y;$

$b)\ z = xy^2,\ x + 2y = 1.$

4.9

$a)\, z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y;$

$b)\ z = x - y + 4,\ 4x - y^2 = 0.$

4.10

$a)\, z = x^2 + xy + y^2 - 5x - 7y + 4;$

$b)\ z = x^2 - y^2,\ 2x - y - 3 = 0.$

4.11

$a)\, z = 2x^2 + 3y^2 - 7x - y;$

$b)\ z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y},\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1.$

4.12

$a)\, z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5;$

$b)\ z = xy,\ x + y = 1.$

4.13

$a)\, z = 3x^2 + 2y^2 - 2xy - 10;$

$b)\ z = x^2 + y^2,\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1.$

4.14

$a)\, z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2;$

$b)\ z = x^2 + y^2,\ xy = 2.$

4.15

$a)\, z = (x - 1)^2 + y^2;$

$b)\ z = x + y,\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 4.$

4.16

$a)\, z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10;$

$b)\ z = x^4 + y^4,\ x + y = 2.$

4.17

a) $z = x^2 + y^2 - xy - 2x - y$;

b) $z = x^2 - 2y^2,\ x - y^2 = 0$.

4.18

a) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$;

b) $z = x^2 + y^2,\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{2}$.

4.19

a) $z = 1 - 6xy + 8x^3 + y^3$;

b) $z = x^2 + y^2,\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{y} = 1$.

4.20

a) $z = x^2 + xy + y^2 + x + 2y$;

b) $z = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2},\ x^2 + y^2 = 2$.

4.21

a) $z = 1 + 2x - y - x^2 - 6y^2$;

b) $z = x + y,\ xy = 1$.

4.22

a) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$;

b) $z = x + y,\ \dfrac{x}{2} + y^2 = 0$.

4.23

a) $z = 20 - 6x + 9y - xy - x^2 + y^2$;

b) $z = x^3 + y^3,\ x + y = 2\ (x, y \geqslant 0)$.

4.24

a) $z = (x-1)^2 - 2y^2$;

b) $z = x^2 - y^2,\ 2x - 4y = 3$.

4.25

a) $z = 13 + 6x + 4y + x^2 + y^2$;

b) $z = 2x^2 - y^2,\ 4x + 2y = 1$.

4.26

a) $z = 2x^2 + (y-1)^2$;

b) $z = 5 - 3x - 4y,\ x^2 + y^2 = 25$.

4.27

a) $z = x + 2y - xy - x^2 - y^2$;

b) $z = 1 - 4x - 8y,\ x^2 - 8y^2 = 8$.

4.28

a) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$;

b) $z = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y},\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 8$.

4.29

a) $z = x + 7y - 3x^2 - 2y^2$;

b) $z = x + y,\ x^2 + y^2 = 4$.

4.30

a) $z = 4x + 5y - x^2 - xy - y^2$;

b) $z = y^2 - 2x^2,\ y - x^2 = 0$.

Задача 5. Найти общее решение: *a*) дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальному условию; *b*) дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка; *c*) линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

5.1

$a)\, y'\sin x - y\cos x = 1,$
$\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$

$b)\ x^2y'' + xy' = 1;$

$c)\ y'' - 5y' + 6y = 2\cos x + x.$

5.2

$a)\, y' - y\sin x = e^{-\cos x}\sin 2x,$
$\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3;$

$b)\ (y-1)^2y'' - (2y')^2 = 0;$

$c)\ y'' - 2y' + 5y = e^x + \sin x.$

5.3

$a)\, y' + \frac{2y}{x} = -x^2,$
$\quad y\,(0) = 2;$

$b)\ y''\operatorname{tg} y = 2(y')^2;$

$c)\ y'' - 4y' + 4y = 3x + \sin 2x.$

5.4

$a)\, y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2},$
$\quad y\,(0) = 2;$

$b)\ (e^x+1)y'' + y' = 0;$

$c)\ y'' + 2y' + 10y = e^{2x} - \sin 2x.$

5.5

$a)\, (1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2,$
$\quad y\,(-2) = 5;$

$b)\ x^2y'' - 2xy' = 1;$

$c)\ y'' - 4y' + 3y = e^{5x} + \cos 2x.$

5.6

$a)\, xy' - 2y = x^3\cos x,$
$\quad y\,(\pi) = 1;$

$b)\ yy'' + (y')^2 = 0;$

$c)\ y'' + 4y = e^x + \sin 2x.$

5.7

$a)\, y'x\ln x - y = 3x^3\ln^2 x,$
$\quad y\,(e) = 0;$

$b)\ y'' = (y+1)y';$

$c)\ y'' - y'\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x.$

5.8

$a)\, y' + 2xy = xe^{-x^2},$
$\quad y\,(0) = 4;$

$b)\ y'' = \frac{y'}{x}\left(1 + \ln\frac{y'}{x}\right);$

$c)\ y'' - 6y' + 9y = \sin x - 12x + 2.$

5.9

$a)\, y'\cos x - 2y\sin x = 2,$
$\quad y\,(0) = 3;$

$b)\ (x^2+1)y'' = 2xy';$

$c)\ y'' + 9y = \cos 2x + 36e^{3x}.$

5.10

$a)\, y' - \frac{3y}{x} = x^3e^x,$
$\quad y\,(1) = e;$

$b)\ yy'' = (y')^2;$

$c)\ y'' + 2y' - 8y = 3\sin x + x + 1.$

5.11

a) $xy' - 3y = x^4e^x$,

$y(1) = e$;

b) $(1 + x^2)y'' - 2xy' = x$;

c) $y'' + 6y' + 13y = 8e^{-x} + \sin x$.

5.12

a) $y' \cos x + y \sin x = 1$,

$y(0) = 2$;

b) $yy'' - 2(y')^2 = 0$;

c) $y'' - 4y' + 8y = 8x + 4 + \cos x$.

5.13

a) $y' + \dfrac{y}{x} = -2 \ln x$,

$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;

b) $2xy'y'' = (y')^2 - 1$;

c) $y'' + y' - 5y = 2 \cos x + 2x$.

5.14

a) $y' - \dfrac{y}{x} = x \sin x$,

$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;

b) $y'' = \dfrac{3x^2y'}{x^3 + 3}$;

c) $y'' + 2y' + 5y = 3e^{2x} + \sin 2x$.

5.15

a) $xy' + 2y = \dfrac{1}{x}$,

$y(3) = 1$;

b) $x^2y'' - 2xy' = x + 2$;

c) $y'' - 4y' + 5y = \cos 2x + 10x$.

5.16

a) $y' - y \cos x = -\cos x$,

$y(0) = 3$;

b) $2(y + 2)y'' + (y')^2 = 0$;

c) $y'' - 4y' + 4y = 3x - 1 + \sin x$.

5.17

a) $y' + 2xy = e^{-x^2} \sin x$,

$y(0) = 1$;

b) $y'' + \dfrac{y'}{x} = x$;

c) $y'' - 6y' + 9y = 4e^x + \cos 2x$.

5.18

a) $x^2y' + xy + 1 = 0$,

$y(1) = 2$;

b) $y'' = \dfrac{2xy'}{x^2 + 1}$;

c) $y'' - 4y' + 4y = e^x - \sin 2x$.

5.19

a) $y' - y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$,

$y(0) = 5$;

b) $x^2y'' - 2xy' = x + 2$;

c) $y'' + 2y' - 8y = 16x + 4 + \cos 2x$.

5.20

a) $y' - \dfrac{2y}{x + 1} = (x + 1)^3$,

$y(0) = \dfrac{1}{2}$;

b) $(y - 3)y'' + (y')^2 = 0$;

c) $y'' - 4y' + 5y = 5x - 4 + \sin 2x$.

5.21

a) $y' - \dfrac{y}{x} = x^2,$

$y\,(1) = 0;$

b) $y'' + \dfrac{xy'}{x^2+1} = 0;$

c) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + \sin x.$

5.22

a) $y' \cos x = (y+1)\sin x,$

$y\,(0) = 1;$

b) $(1-x^2)y'' + 2xy' = (1-x^2)^2;$

c) $y'' - 4y' + 3y = 3x - 1 - \cos 2x.$

5.23

a) $x^2y' = 2xy + 3,$

$y\,(1) = 0;$

b) $(y^2+1)y'' = 2y(y')^2;$

c) $y'' + 4y = 5x + \sin 2x.$

5.24

a) $xy' + y - x - 1 = 0,$

$y\,(1) = 1;$

b) $y'' - \dfrac{y'}{x} = xe^x;$

c) $y'' + y' = \cos 2x - x + 1.$

5.25

a) $x^2y' - 2xy + 1 = 0,$

$y\,(1) = \dfrac{1}{3};$

b) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \cos x;$

c) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x} + \sin x.$

5.26

a) $xy' + 2y = x^3,$

$y\,(1) = -\dfrac{1}{2};$

b) $4yy'' = (y')^2;$

c) $y'' + 9y = \sin 2x - e^x.$

5.27

a) $y' - y = e^{3x},$

$y\,(0) = \dfrac{1}{2};$

b) $xy'' = y' + x^2;$

c) $y'' - 4y' + 5y = \sin 2x + 2\cos 2x + x.$

5.28

a) $y' - y = \dfrac{e^x}{x},$

$y\,(1) = e;$

b) $(y+1)y'' = (y')^2;$

c) $y'' + 2y' + 5y = 3\cos x + x + 2.$

5.29

a) $xy' = x - y + 1,$

$y\,(1) = 0;$

b) $y'' = \dfrac{2xy'}{x^2+4};$

c) $y'' + 2y' - 8y = 2x - 1 + 4\sin x.$

5.30

a) $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{x^3},$

$y\,(1) = \dfrac{1}{3};$

b) $xy'' = (1+2x^2)y';$

c) $y'' - 5y' + 6y = e^{3x} + \cos 3x.$

6. Решение типового варианта контрольной работы 3

Задача 1. Вычислить интералы:
$a)\ \displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+5}\,dx;\ \ b)\ \int (2x+5)\cos 3x\,dx;\ \ c)\ \int \frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}.$

$a)\ \displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+5}\,dx.$

Положим $t=x^3+5$, тогда $dt=3x^2\,dx$, откуда $x^2\,dx=\frac{1}{3}\,dt$. После подстановки в исходный интеграл получаем

$$\int x^2\sqrt{x^3+5}\,dx=\frac{1}{3}\int\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{1}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}(x^3+5)\sqrt{x^3+5}+C.$$

$b)\ \displaystyle\int (2x+5)\cos 3x\,dx.$

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Положим в этой формуле
$u=2x+5,\ dv=\sin 3x\,dx$, тогда $du=2\,dx,\ v=\displaystyle\int\sin 3x\,dx=-\frac{1}{3}\cos 3x.$
Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (2x+5)\cos 3x\,dx=-\frac{1}{3}(2x+5)\cos 3x+\frac{2}{3}\int\cos 3x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{3}(2x+5)\cos 3x+\frac{2}{9}\sin 3x+C.$$

$c)\ \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}.$

Подынтегральная функция четная относительно синуса и косинуса, поэтому полагаем $\operatorname{tg} x=t$. Тогда

$$\sin x=\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$x=\operatorname{arctg} t,\ \ dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Отсюда получаем

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+2t-1} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 - (\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\operatorname{tg} x+1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg} x+1+\sqrt{2}}\right| + C.$$

Заметим, что нахождение интеграла можно упростить, если в исходном интеграле разделить числитель и знаменатель на $\cos^2 x$:

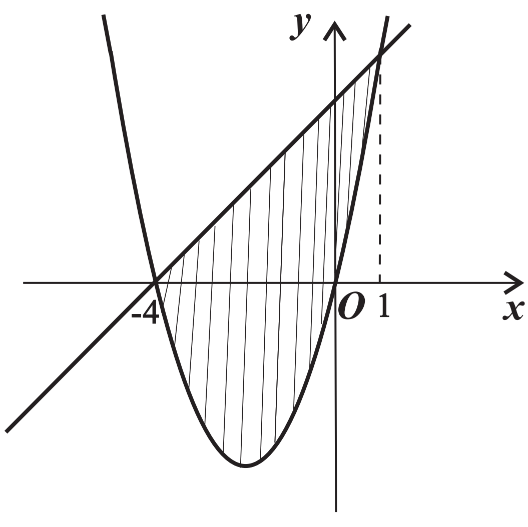
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1}.$$

Задача 2. 1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в декартовых координатах: $\begin{cases} y = x^2+4x, \\ y = x+4. \end{cases}$

2. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрически: $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

1. Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ (где $f_1(x) \leqslant f_2(x)$), прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx.$$



Найдем точки пересечения заданных кривых. Для этого решим уравнение $x^2 + 4x = x + 4$, $x^2 + 3x - 4 = 0$. Откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -4$.

Тогда получаем

$$S = \int\limits_{-4}^{1} \left[(x+4) - (x^2+4x)\right]\, dx = \int\limits_{-4}^{1} (-x^2 - 3x + 4)\, dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{-4}^{1} = 20\frac{5}{6}.$$

2. При параметрическом задании кривой уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($x(t)$, $y(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции) длина дуги кривой, соответствующая монотонному изменению параметра t от t_1 до t_2, вычисляется по формуле

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{[y'(t)]^2 + [x'(t)]^2}\, dt.$$

Найдем для заданной кривой производные по параметру t:

$$x'(t) = -3\cos^2 t \sin t,\ \ y'(t) = 3\sin^2 t \cos t.$$

Тогда получаем

$$l = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[3\sin^2 t \cos t]^2 + [-3\cos^2 t \sin t]^2}\, dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[9\sin^4 t \cos^2 t] + [9\cos^4 t \sin^2 t]}\, dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t)}\, dt = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t}\, dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \sin t\, dt = 3\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, d(\sin t) =$$

$$= \frac{3\sin^2 t}{2}\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}(1-0) = 1,5.$$

Задача 3. Найти направление и скорость наибольшего возрастания функции $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2xz^2$ в точке $M_0(1,1,1)$. Найти производную по направлению вектора $\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ от функции $f(x,y,z)$ в точке M_0.

Вычислим частные производные первого порядка по всем переменным:

$$f'_x = 2x + 2z^2, \quad f'_y = -2y, \quad f'_z = 4xz.$$

Подставим в полученные выражения координаты точки M_0:

$$f'_x = 4, \quad f'_y = -2, \quad f'_z = 4.$$

Тогда градиент

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(M_0) = \nabla f(M_0) = \{f'_x(M_0),\ f'_y(M_0),\ f'_z(M_0)\} = \{4,\ -2,\ 4\}$$

задает направление наискорейшего возрастания функции в точке M_0. Скорость наискорейшего возрастания функции в этой точке равна

$$|\nabla f(M_0)| = \sqrt{[f'_x(M_0)]^2 + [f'_y(M_0)]^2 + [f'_z(M_0)]^2} =$$

$$= \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Для нахождения производной по направлению вектора $\vec{l}$ заданной функции в точке M_0, найдем сначала единичный вектор этого направления:

$$\vec{l_e} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} \cdot \{1;\ 2;\ -2\} = \frac{1}{3} \cdot \{1;\ 2;\ -2\} = \left\{\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ -\frac{2}{3}\right\}.$$

Тогда производная по направлению равна

$$\frac{\partial f}{\partial l_e}(M_0) = \big(\nabla f(M_0), \bar{l}_e\big) = \frac{1}{3}\left(4 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot (-2)\right) = -\frac{8}{3},$$

то есть в направлении вектора $\bar{l}$ функция убывает со скоростью $\dfrac{8}{3}$.

Задача 4. 1. Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$. 2. Используя метод множителей Лагранжа, найти экстремумы функции $z = 2xy$ при условии, что $\varphi(x,y) = x + y - 1 = 0$.

1. Найдем экстремумы функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$. Так как в данном случае частные производные первого порядка всегда существуют, то для нахождения

стационарных точек решим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ \\ y^2 - x = 0, \end{cases}$$

откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

Таким образом, получили две стационарные точки: $M_1(0,\,0)$, $M_2(1,\,1)$.

Находим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Для точки $M_1(0,\,0)$ получаем

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_1) = 6 \cdot 0 = 0, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_1) = -3, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_1) = 6 \cdot 0 = 0,$$

тогда $D = AC - B^2 = -9 < 0$, то есть в этой точке экстремума нет.

Для точки $M_2(1,\,1)$ получаем $A = 6$, $B = -3$, $C = 6$, $D = 27 > 0$ и $A > 0$, следовательно, в этой точке данная функция достигает локального минимума: $z_{\min} = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$.

2. Используя метод множителей Лагранжа, найти экстремумы функции $z = 2xy$ при условии, что $\varphi(x, y) = x + y - 1 = 0$. Заметим прежде всего, что функция $z(x,\,y)$ непрерывна во всех точках прямой $x + y - 1 = 0$. Градиент $\nabla\varphi(x,\,y) = \{\varphi'_x;\, \varphi'_y\} = \{1;\, 1\}$ не обращается в ноль ни при каких значениях $(x,\,y)$. Поэтому все точки экстремума должны удовлетворять принципу Лагранжа. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x,\,y;\,\lambda) = z(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = 2xy + \lambda(x + y - 1).$$

Условия Лагранжа примут вид

$$\begin{cases} L'_x = 2y + \lambda = 0, \\ L'_y = 2x + \lambda = 0, \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Откуда $y = -\dfrac{\lambda}{2}$, $x = -\dfrac{\lambda}{2}$. Подставляя эти выражения в уравнение связи,

получаем
$$-\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}-1=0,$$
откуда $\lambda=-1,\ \ x=\dfrac{1}{2},\ \ y=\dfrac{1}{2}.$

Таким образом, существует только одна стационарная точка $M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$. Исследуем ее с помощью достаточных условий экстремума. Найдем вторые частные производные функции Лагранжа:
$$L''_{xx}=0,\quad L''_{xy}=2,\quad L''_{yy}=0.$$
Вычислим дифференциал второго порядка функции Лагранжа:
$$d^2L(M;\lambda)=L''_{xx}(M;\lambda)dx^2+2L''_{xy}(M;\lambda)dxdy+L''_{yy}(M;\lambda)dy^2.$$
Подставляя полученные значения производных в точке M, получаем $d^2L(M;\lambda)=4dxdy$.

Составим соотношение между дифференциалами независимых переменных, используя условие связи:
$$d\varphi(M)=\varphi'_x(M)dx+\varphi'_y(M)dy=0,\quad 1\cdot dx+1\cdot dy=0,\ \ dx=-dy,$$
тогда $d^2L(M;\lambda)=4(-dy)dy=-4dy^2<0$ для всех ненулевых наборов $\{dx,\,dy\}$, связанных уравнением $dx=-dy$. Следовательно, $M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ — точка условного максимума.

Задача 5. 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $x(x-1)y'+y=x^2(2x-1)$ и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(2)=4$. 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $yy''+(y')^2=(y')^3$, допускающего понижение порядка. 3. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида $y''+2y'=x+1$.

1. $x(x-1)y'+y=x^2(2x-1)$ — линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка. Будем искать его решение в виде $y=u(x)v(x)$, тогда $y'=u'v+uv'$. Подставляем выражения для y и y' в исходное уравнение,
$$x(x-1)(u'v+uv')+uv=x^2(2x-1),$$

$$x(x-1)vu' + [x(x-1)v' + v]\,u = x^2(2x-1).$$

Функцию $v = v(x)$ находим из условия

$$x(x-1)v' + v = 0,\ \ x(x-1)\frac{dv}{dx} = -v,$$

разделяем переменные

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x(x-1)},$$

интегрируем

$$\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x(x-1)} + \ln|C|.$$

Вычислим интеграл

$$\int\frac{dx}{x(x-1)} = \int\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}\,dx = \int\frac{dx}{x-1} - \int\frac{dx}{x} = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C_1.$$

Окончательно получаем

$$\ln|v| = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + \ln|C|,$$

откуда $v = \dfrac{Cx}{x-1}$. Возьмем, например, частное решение $v = \dfrac{x}{x-1}$, тогда получаем $u' = 2x-1$, из которого находим функцию $u(x) = x^2 - x + C$.

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = uv = (x^2 - x + C)\frac{x}{x-1} = \frac{Cx}{x-1} + x^2.$$

Найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее условию $y(2) = 4$. В силу этого условия получаем уравнение $4 = \dfrac{2C}{2-1} + 2^2$ для нахождения C, откуда $C = 0$.

Таким образом, искомым частным решением будет $y = x^2$.

2. $yy'' + (y')^2 = (y')^3$.

Данное уравнение явно не содержит x. Сделаем подстановку $y' = p(y)$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, тогда получим

$$yp\frac{dp}{dy} + p^2 = p^3,\ \ p\left(y\frac{dp}{dy} + p - p^2\right) = 0.$$

Рассмотрим два случая:

1) $p=0$, $\dfrac{dy}{dx}=0$, откуда $y=\text{const}$ — особое решение;
2) $y\dfrac{dp}{dy}+p-p^2=0$, $\quad y\dfrac{dp}{dy}=p^2-p$, $\quad \dfrac{dp}{p^2-p}=\dfrac{dy}{y}$.
Интегрируем обе части последнего уравнения, получаем

$$\frac{p-1}{p}=C_1y, \quad 1-\frac{1}{p}=C_1y, \quad p=\frac{1}{1+C_1y}.$$

Учитывая, что $p=\dfrac{dy}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+C_1y}, \quad (1+C_1y)dy=dx.$$

После интегрирования получаем общий интеграл данного дифференциального уравнения:

$$y+C_1\frac{y^2}{2}=x+C_2.$$

3. $y''+2y'=x+1$.

Общее решение неоднородного линейного уравнения будем искать в виде

$$y_{\text{о.н}}=y_{\text{о.о}}+y_{\text{ч.н}}.$$

Запишем соответствующее однородное уравнение :

$$y''+2y'=0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2+2k=0.$$

Его корни $k_1=0$, $k_2=-2$. Тогда общее решение однородного уравнения $y_{\text{о.о}}=C_1+C_2e^{-2x}$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_{\text{ч.н}}=x(Ax+B)=Ax^2+Bx$. Находим производные и подставляем в исходное уравнение:

$$y'_{\text{ч.н.}}=2Ax+B, \;\; y''_{\text{ч.н}}=2A,$$

$$2A+4Ax+2B=x+1, \quad 4Ax+(2A+2B)=x+1.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части:

$$4A=1, \;\; 2A+2B=1,$$

откуда $A = \dfrac{1}{4}$, $B = \dfrac{1}{4}$, $y_{\text{ч.н}} = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}x$.

Общее решение исходного уравнения будет

$$y_{\text{о.н}} = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x.$$

7. Контрольная работа 4

Задача 1. Представить интеграл: $a)$ $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ повторным интегралом в декартовых координатах двумя способами, меняя порядок интегрирования, по области D, ограниченной кривыми; $b)$ $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$ повторным интегралом по области V, ограниченной заданными поверхностями.

1.1 $a)$ $D\colon y = \sqrt{x},\ y = \frac{x}{3},\ x = 1;$
$b)$ $V: x^2 + y^2 = 2y,\ x^2 + y^2 = z,\ z = 0.$

1.2 $a)$ $D\colon y = x^2,\ y = 2 - x^2,\ x = 0\ (x \geqslant 0);$
$b)$ $V: x^2 + y^2 = 2x,\ z + x^2 + y^2 = 0,\ z = 0.$

1.3 $a)$ $D\colon y = -x^2,\ y = x^2 - 2,\ x = 0\ (x \leqslant 0);$
$b)$ $V: x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = z - 1,\ z = -1.$

1.4 $a)$ $D\colon y = 1 - x^2,\ y = \ln x,\ y = 1;$
$b)$ $V: y = \sqrt{x^2 + z^2},\ 1 - y = \sqrt{x^2 + z^2}.$

1.5 $a)$ $D\colon y = \sin x,\ y = \cos x,\ x = \frac{\pi}{4},\ x = \frac{\pi}{2};$
$b)$ $V: x^2 + y^2 = z - 1,\ x^2 + y^2 = -2y,\ z = -1.$

1.6 $a)$ $D\colon y = x^2,\ y = e^{-x},\ x = -1,\ x = 0;$
$b)$ $V: x^2 + (y-1)^2 = z,\ x^2 + (y-1)^2 = z^2.$

1.7 $a)$ $D\colon y = -x^2,\ y = x^2 - 2,\ x = 0\ (x \geqslant 0);$

b) $V: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=2y,\ x^2+y^2=z\ (x^2+y^2\geqslant 1),\ z=0.$

1.8 *a*) $D\colon y=x^3,\ y=2-x,\ x=0;$
b) $V: x^2+y^2=2y,\ x^2+y^2=4y,\ z=y,\ z=-2.$

1.9 *a*) $D\colon y=e^x,\ y=x,\ x=0,\ x=1;$
b) $V: x^2+y^2-z^2=-1,\ x^2+y^2=1.$

1.10 *a*) $D\colon y=\sqrt{x},\ y=\sqrt{2-x},\ y=0;$
b) $V: x^2+y^2-z^2=1,\ x^2+y^2=2,\ z=0\ (z\geqslant 0).$

1.11 *a*) $D\colon y=x^3,\ y=2-x,\ y=0;$
b) $V: x^2+y^2=1,\ z=y^2,\ z=0.$

1.12 *a*) $D\colon y=2^{-x},\ y=\frac{x}{2},\ x=0;$
b) $V: x^2+y^2+z^2=2y,\ x^2+z^2=y^2\ (x^2+z^2\geqslant y^2).$

1.13 *a*) $D\colon y=\sqrt{x},\ y=\sqrt{2-x},\ x=0;$
b) $V: z^2+y^2=2y,\ z^2+y^2=x,\ x=0.$

1.14 *a*) $D\colon y=-x^3,\ y=x-2,\ x=0;$
b) $V: x^2+z^2=2x,\ y+x^2+z^2=0,\ y=0.$

1.15 *a*) $D\colon y=\sqrt{x},\ y=x+2,\ y=0,\ y=2;$
b) $V: y-1=x^2+z^2,\ x^2+z^2=-2z,\ y=-1.$

1.16 *a*) $D\colon y=-x^3,\ y=x-2,\ y=0;$
b) $V: x^2+y^2+z^2=2y,\ x^2+z^2=y^2\ (x^2+z^2\leqslant y^2).$

1.17 *a*) $D\colon y=4-x^2,\ y=\frac{3}{2}x-3;$
b) $V: x^2+y^2+z^2=1,\ x^2+y^2+2y=0\ (x^2+y^2+2y\leqslant 0).$

1.18 *a*) $D\colon y=x,\ y=\frac{4}{x},\ x=1\ (x\geqslant 0);$
b) $V: y^2+z^2=1,\ y^2+z^2=2y,\ x=y^2+z^2\ (y^2+z^2\geqslant 1),\ x=0.$

1.19 $a)$ $D\colon y=\sqrt[3]{x},\ y=-x-2,\ x=0;$
$b)$ $V: z^2+y^2-x^2=-1,\ z^2+y^2=1.$

1.20 $a)$ $D\colon y=2x^3+3,\ y=-5x,\ x=0;$
$b)$ $V: (x-1)^2+y^2=z,\ (x-1)^2+y^2=z^2.$

1.21 $a)$ $D\colon y=\sqrt[3]{x},\ y=-x-2,\ y=0;$
$b)$ $V: x^2+y^2+z^2=4z,\ x^2+y^2=2y.$

1.22 $a)$ $D\colon y=x^2+1,\ y=2x,\ x=0;$
$b)$ $V: x^2+y^2+z^2=1,\ x^2+2x+y^2=0\ (x^2+2x+y^2\leqslant 0).$

1.23 $a)$ $D\colon y=4-x^2,\ y=-\frac{5x}{3},\ x=0\ (x\geqslant 0);$
$b)$ $V: x^2+y^2=1,\ y=-\sqrt{3}x,\ z=y,\ z=0\ (z\geqslant 0).$

1.24 $a)$ $D\colon y=1+x^3,\ y=2x^2,\ x=0\ (x\leqslant 0);$
$b)$ $V: x^2+y^2=2y,\ z=x^2-1,\ z=0.$

1.25 $a)$ $D\colon y=2^x,\ y=1-2x,\ x=1;$
$b)$ $V: z=x^2+y^2,\ x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=1.$

1.26 $a)$ $D\colon y=\log_2(x+1),\ y=2-x,\ x=0;$
$b)$ $V: x^2-y^2+z^2=1,\ x^2+z^2=2,\ y=0\ (y\geqslant 0).$

1.27 $a)$ $D\colon y=2^x,\ y=1-2x,\ y=2;$
$b)$ $V: x^2+y^2=2y,\ z=1-x^2,\ z=0.$

1.28 $a)$ $D\colon y=4-(x-1)^2,\ y=\frac{3x}{2},\ x=0\ (x\geqslant 0);$
$b)$ $V: x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=4x,\ z=x,\ z=0.$

1.29 $a)$ $D\colon y=\cos x,\ y=\sin x,\ x=0,\ x=\frac{\pi}{4};$
$b)$ $V: z=\sqrt{x^2+y^2},\ 2-z=x^2+y^2,\ y=x,\ y=\sqrt{3}x$
$(x\leqslant y\leqslant \sqrt{3}x).$

1.30 $a)$ $D\colon x=y^2,\ x=2-y^2,\ y=0\ (y\leqslant 0)$;
$b)$ $V\colon x^2+y^2+z^2=2,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x\ (\frac{x}{\sqrt{3}}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}x)$.

Задача 2. Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями.

2.1 $y=16\sqrt{2x},\ y=\sqrt{2x},\ x+z=2,\ x=0.$

2.2 $y=5\sqrt{x},\ y=\dfrac{5x}{3},\ z=5+\dfrac{5\sqrt{x}}{3},\ z=0.$

2.3 $x^2+y^2=2,\ y=\sqrt{x},\ z=15x,\ y=0,\ z=0.$

2.4 $x+y=2,\ y=\sqrt{x},\ z=12y,\ z=0.$

2.5 $x=20\sqrt{2y},\ x=5\sqrt{2y},\ y+z=\dfrac{1}{2},\ z=0.$

2.6 $x=\dfrac{5\sqrt{y}}{2},\ x=\dfrac{5y}{6},\ z=\dfrac{5}{6}(x+\sqrt{y}),\ z=0.$

2.7 $x^2+y^2=2,\ x=\sqrt{y},\ z=30y,\ x=0,\ z=0.$

2.8 $x+y=2,\ x=\sqrt{y},\ z=\dfrac{12x}{5},\ z=0.$

2.9 $y=17\sqrt{2x},\ y=2\sqrt{2x},\ x+z=\dfrac{1}{2},\ z=0.$

2.10 $y=\dfrac{5\sqrt{x}}{3},\ y=\dfrac{5x}{9},\ z=\dfrac{5(3+\sqrt{x})}{9},\ z=0.$

2.11 $x^2+y^2=8,\ y=\sqrt{2x},\ z=\dfrac{15x}{11},\ y=0,\ z=0.$

2.12 $x+y=4,\ y=\sqrt{2x},\ z=3y,\ z=0.$

2.13 $x=\dfrac{5}{6}\sqrt{y},\ x=\dfrac{5y}{18},\ z=\dfrac{5}{18}(3+\sqrt{y}),\ z=0.$

2.14 $x=19\sqrt{2y},\ x=4\sqrt{2y},\ y+z=2,\ z=0.$

2.15 $x^2+y^2=8,\ x=\sqrt{2y},\ z=\dfrac{30y}{11},\ x=0,\ z=0.$

2.16 $x+y=4,\ x=\sqrt{2y},\ z=\dfrac{3x}{5},\ z=0.$

2.17 $y=6\sqrt{3x},\ y=\sqrt{3x},\ x+z=3,\ z=0.$

2.18 $y=\dfrac{6}{5}\sqrt{x},\ y=\dfrac{5x}{18},\ z=\dfrac{5}{18}(3+\sqrt{x}),\ z=0.$

2.19 $x^2+y^2=18,\ y=\sqrt{3x},\ z=\dfrac{5x}{11},\ y=0,\ z=0.$

2.20 $x+y=6,\ y=\sqrt{3x},\ z=4y,\ z=0.$

2.21 $x=7\sqrt{3y},\ x=2\sqrt{3y},\ y+z=3,\ z=0.$

2.22 $x=\dfrac{5}{3}\sqrt{y},\ x=\dfrac{5y}{9},\ z=\dfrac{5}{9}(3+\sqrt{y}),\ z=0.$

2.23 $x^2+y^2=18,\ x=\sqrt{3y},\ z=\dfrac{10y}{11},\ x=0,\ z=0.$

2.24 $x+y=6,\ x=\sqrt{3y},\ z=\dfrac{4x}{5},\ z=0.$

2.25 $y=\sqrt{15x},\ y=\sqrt{15}x,\ z=\sqrt{15}(1+\sqrt{x}),\ z=0.$

2.26 $x^2+y^2=50,\ y=\sqrt{5x},\ z=\dfrac{3x}{11},\ y=0,\ z=0.$

2.27 $x+y=8,\ y=\sqrt{4x},\ z=3y,\ z=0.$

2.28 $x=16\sqrt{2y},\ x=\sqrt{2y},\ y+z=2,\ z=0.$

2.29 $x=15\sqrt{y},\ x=15y,\ z=15(1+\sqrt{y}),\ z=0.$

2.30 $x^2+y^2=50,\ x=\sqrt{5y},\ z=\dfrac{6}{11}y,\ x=0,\ z=0.$

Задача 3. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.1 *a*) $a_n=\dfrac{n^2}{(2n)!}$, *b*) $a_n=\dfrac{n^2+3}{n^4+3n-2}$.

3.2 *a*) $a_n=\dfrac{3n}{2^n(n^2+1)}$, *b*) $a_n=\dfrac{e^{-\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}}$.

3.3 *a*) $a_n=\dfrac{1}{(n+3)\ln^2(n+3)}$, *b*) $a_n=\dfrac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$.

3.4 *a*) $a_n=\sin\dfrac{3n+4}{n^2(\sqrt{n}+2)}$, *b*) $a_n=\dfrac{n!}{5^n}$.

3.5 *a*) $a_n=\ln\left(\dfrac{n^2}{1+n^2}\right)$, *b*) $a_n=\dfrac{(n+1)!}{n^n}$.

3.6 *a*) $a_n=\dfrac{3^n}{4^{2n}(2n+5)}$, *b*) $a_n=ne^{-n}$.

3.7 *a*) $a_n=\dfrac{1}{(n+2)\ln^2 2n}$, *b*) $a_n=\dfrac{n^5}{2^n}$.

3.8 *a*) $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\dfrac{1}{4^n}$, *b*) $a_n=\dfrac{\arcsin\frac{1}{n}}{n!}$.

3.9 *a*) $a_n=\arcsin\dfrac{\pi}{4^n}$, *b*) $a_n=\dfrac{1+\sin\pi n}{\sqrt[3]{n+4}}$.

3.10 *a*) $a_n=\dfrac{1}{n+1}\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, *b*) $a_n=\dfrac{(n+1)!}{n^2+4}$.

3.11 *a*) $a_n=n\sin\dfrac{1}{n^2+2}$, *b*) $a_n=\dfrac{1}{(n+2)5^{2n+1}}$.

3.12 *a*) $a_n=\dfrac{1}{n^{n+1}}$, *b*) $a_n=\dfrac{n\cos^2(3n+1)}{n^3+1}$.

3.13 *a*) $a_n=\dfrac{3n-2}{\sqrt{n+2^n}}$, *b*) $a_n=\ln\dfrac{n^2+4}{n^2+3}$.

3.14 *a)* $a_n = \left(\dfrac{n}{3n+2}\right)^{n^2}$, *b)* $a_n = \dfrac{(2n+3)!}{n^n}$.

3.15 *a)* $a_n = \dfrac{2^n}{n^6}$, *b)* $a_n = \dfrac{1}{n\ln(n+1)}$.

3.16 *a)* $a_n = \dfrac{4^n}{(2n+1)!}$, *b)* $a_n = \dfrac{1}{n\ln(2n)}$.

3.17 *a)* $a_n = \dfrac{2^{n^2}}{(2n)!}$, *b)* $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+\ln n}}$.

3.18 *a)* $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^{n^2}}$, *b)* $a_n = \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{3n+1}}$.

3.19 *a)* $a_n = \dfrac{2^n}{3^n(3n-1)}$, *b)* $a_n = \dfrac{\arcsin^2\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}}{n^3+2}$.

3.20 *a)* $a_n = \sin\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, *b)* $a_n = \dfrac{n^4 3^n}{(3n-4)^7}$.

3.21 *a)* $a_n = \dfrac{\cos\frac{1}{n\sqrt{n}}}{\sqrt[3]{n}}$, *b)* $a_n = \sin^n\dfrac{\pi}{6}$.

3.22 *a)* $a_n = \left(\dfrac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$, *b)* $a_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$.

3.23 *a)* $a_n = \left(\dfrac{n^2+1}{2n^2+4}\right)^{n^2}$, *b)* $a_n = \dfrac{(2n+1)n!}{3^n+1}$.

3.24 *a)* $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\dfrac{1}{2^n}$, *b)* $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+2}}{4^n}$.

3.25 *a)* $a_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{2n^2}\dfrac{1}{25^n}$, *b)* $a_n = \dfrac{5^n(3n+1)}{n!}$.

3.26 *a)* $a_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$, *b)* $a_n = \dfrac{(2n+1)!}{(3n+1)2^n}$.

3.27 *a)* $a_n = n^3\operatorname{tg}^5\dfrac{4}{n}$, *b)* $a_n = \dfrac{n!}{(2n+1)!}$.

3.28 *a)* $a_n = \operatorname{arctg}^2\dfrac{n+2}{n^2+5}$, *b)* $a_n = \dfrac{n!+2}{3^n+25}$.

3.29 *a)* $a_n = \dfrac{3+2^n}{4+5^n}$, *b)* $a_n = \ln\dfrac{n+2}{n+1}$.

3.30 *a)* $a_n = \dfrac{e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+3}}$, *b)* $a_n = \dfrac{2+(-1)^n}{3^n}$.

Задача 4. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

4.1 $u_n(x) = \dfrac{n^2(x-2)^n}{3^n(n+1)}$.

4.2 $u_n(x) = \dfrac{4^n(x+1)^n}{\sqrt{n}+2}$.

4.3 $u_n(x) = \dfrac{(x+3)^n}{n^3+5n}$.

4.4 $u_n(x) = \dfrac{(x-2)^n}{(n+4)2^n}$.

4.5 $u_n(x) = \dfrac{(2n+1)(x-1)^n}{n(3n+2)}$.

4.6 $u_n(x) = \sin\dfrac{n}{\sqrt{n^3+1}}(x-3)^n$.

4.7 $u_n(x) = \dfrac{(x-5)^n}{2^n\sqrt[3]{n}}$.

4.8 $u_n(x) = \dfrac{(x+5)^n}{(n+3)\ln(n+3)}$.

4.9 $u_n(x) = \dfrac{\sqrt{n+1}(x+1)^n}{3^n}$.

4.10 $u_n(x) = \dfrac{n^2(x-3)^n}{(n^4+1)^3}$.

4.11 $u_n(x) = \dfrac{(x-4)^n}{(3n+2)4^n}$.

4.12 $u_n(x) = \dfrac{(x+1)^n}{2^n n^2}$.

4.13 $u_n(x) = \dfrac{(x+4)^n}{\sqrt{n}(n^2+2)}$.

4.14 $u_n(x) = n^2(x-2)^n$.

4.15 $u_n(x) = \dfrac{3^n(x+4)^n}{n^2+\sqrt{n}+2}$.

4.16 $u_n(x) = \dfrac{n+\sin\frac{1}{n}}{n(n+2)}(x-1)^n$.

4.17 $u_n(x) = \dfrac{\cos(n+1)}{n(n+1)}(x+1)^n$.

4.18 $u_n(x) = \dfrac{(x-1)^n}{2n(2n+3)}$.

4.19 $u_n(x) = \dfrac{n5^n}{n^3+1}(x+4)^n$.

4.20 $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n(x+2)^n}{4^n(3n+2)}$.

4.21 $u_n(x) = \left((-1)^n + \dfrac{1}{n^2}\right)(x+2)^n$.

4.22 $u_n(x) = \dfrac{\sin^2 n}{3^n(n+6)}(x-2)^n$.

4.23 $u_n(x) = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)(x-1)^n$.

4.24 $u_n(x) = \dfrac{e^{-n}}{n}(x+1)^n$.

4.25 $u_n(x) = \dfrac{\ln(n+1)}{(n+2)^2}(x-1)^n$.

4.26 $u_n(x) = \dfrac{3n-2}{(n+1)^3 3^n}(x+1)^{n+1}$.

4.27 $u_n(x) = \dfrac{3^n}{n^2+4n}(x+1)^{n+1}$.

4.28 $u_n(x) = \dfrac{(x+1)^{2n}}{n4^n}$.

4.29 $u_n(x) = \dfrac{4^n(x+1)^{2n}}{n^2+2}$.

4.30 $u_n(x) = \dfrac{(x+2)^n}{\ln(n+1)}$.

Задача 5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить $\int\limits_0^b f(x)\,dx$ с точностью $0,0001$.

5.1	$f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$,	$b = 0,3$.	**5.2**	$f(x) = e^{-x^3}$,	$b = 0,5$.
5.3	$f(x) = \cos x^2$,	$b = \dfrac{1}{3}$.	**5.4**	$f(x) = x \operatorname{arctg} x$,	$b = 0,3$.
5.5	$f(x) = \sqrt{1+x^3}$,	$b = 0,6$.	**5.6**	$f(x) = x^2 e^{-2x^2}$,	$b = 0,5$.
5.7	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8+x^2}}$,	$b = 1$.	**5.8**	$f(x) = \cos(10x^2)$,	$b = 0,1$.
5.9	$f(x) = \sin(15x^2)$,	$b = 0,1$.	**5.10**	$f(x) = xe^{-x^3}$,	$b = 0,3$.
5.11	$f(x) = \operatorname{arctg}(2x^2)$,	$b = 0,5$.	**5.12**	$f(x) = \sin(100x^2)$,	$b = 0,1$.
5.13	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{16+x^4}}$,	$b = 1$.	**5.14**	$f(x) = e^{-\frac{3}{2}x^2}$,	$b = 0,5$.
5.15	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{125+x^3}}$,	$b = 2$.	**5.16**	$f(x) = \dfrac{1-e^{-x^2}}{x^2}$,	$b = 0,3$.
5.17	$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$,	$b = 1$.	**5.18**	$f(x) = \sqrt[3]{1+x^2}$,	$b = 0,6$.
5.19	$f(x) = \cos \dfrac{3}{2}x^2$,	$b = 0,3$.	**5.20**	$f(x) = e^{-2x^2}$,	$b = 0,3$.
5.21	$f(x) = \dfrac{1}{1+x^5}$,	$b = 0,8$.	**5.22**	$f(x) = x^{10} \sin x$,	$b = 0,8$.
5.23	$f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$,	$b = 0,5$.	**5.24**	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}$,	$b = 0,5$.
5.25	$f(x) = \dfrac{\sin(4x^2)}{x}$,	$b = 0,2$.	**5.26**	$f(x) = x^3 \operatorname{arctg} 3x$,	$b = 1$.
5.27	$f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{x^2}$,	$b = 0,2$.	**5.28**	$f(x) = \cos(25x^2)$,	$b = 0,1$.
5.29	$f(x) = \sin(16x^2)$,	$b = 0,1$.	**5.30**	$f(x) = x^2 \cos(4x)$,	$b = 0,2$.

Задача 6. Разложить элементарную функцию $f(x)$ на заданном интервале в ряд Фурье: 1) по синусам; 2) по косинусам; 3) получить одно из разложений общего вида; для каждого случая построить графики периодического продолжения $f(x)$ и суммы ряда Фурье.

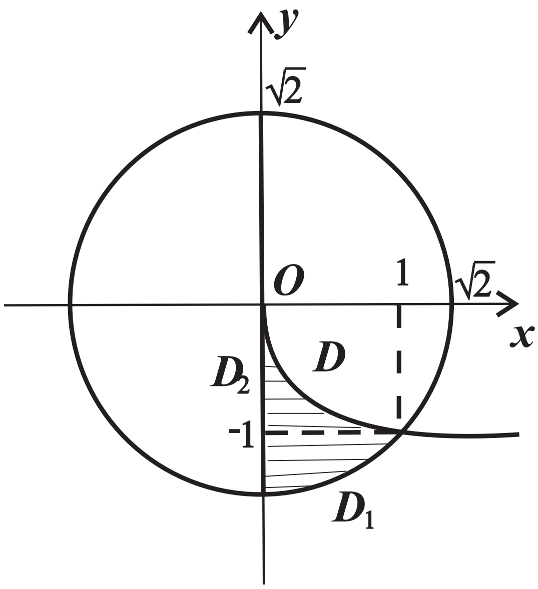
6.1	$f(x) = 3-2x$,	$x \in [0,1]$.	**6.2**	$f(x) = 4+2x$,	$x \in [0,2]$.
6.3	$f(x) = 3x-2$,	$x \in [0,3]$.	**6.4**	$f(x) = 7+x$,	$x \in [0,1]$.
6.5	$f(x) = -5x-2$,	$x \in [0,2]$.	**6.6**	$f(x) = 2-5x$,	$x \in [0,3]$.

6.7	$f(x) = 6 + 3x,$	$x \in [-1, 0].$	**6.8**	$f(x) = 4x - 2,$	$x \in [-2, 0].$
6.9	$f(x) = -3x - 2,$	$x \in [0, 2].$	**6.10**	$f(x) = 2x - 5,$	$x \in [-\pi, 0].$
6.11	$f(x) = 4x - 2,$	$x \in [0, 3].$	**6.12**	$f(x) = 5 - x,$	$x \in [0, 2].$
6.13	$f(x) = 2x - 3,$	$x \in [0, 4].$	**6.14**	$f(x) = x - 6,$	$x \in [0, 3].$
6.15	$f(x) = 1 - 3x,$	$x \in [-3, 0].$	**6.16**	$f(x) = x - 2,$	$x \in [-1, 0].$
6.17	$f(x) = 3 - 4x,$	$x \in [0, 1].$	**6.18**	$f(x) = 1 - 7x,$	$x \in [-\pi, 0].$
6.19	$f(x) = 7x + 1,$	$x \in [0, \pi].$	**6.20**	$f(x) = 3x + 1,$	$x \in [-2, 0].$
6.21	$f(x) = \pi - x,$	$x \in [0, \pi].$	**6.22**	$f(x) = \pi + x,$	$x \in [-\pi, 0].$
6.23	$f(x) = 2x + 3,$	$x \in [-3, 0].$	**6.24**	$f(x) = 3x + 2,$	$x \in [-4, 0].$
6.25	$f(x) = 1 - 3x,$	$x \in [0, 2].$	**6.26**	$f(x) = x + 3,$	$x \in [0, 2].$
6.27	$f(x) = 3 - 2x,$	$x \in [-1, 0].$	**6.28**	$f(x) = 2x + 6,$	$x \in [0, 1].$
6.29	$f(x) = 2x - 4,$	$x \in [0, \pi].$	**6.30**	$f(x) = 4 - 2x,$	$x \in [0, 1].$

8. Решение типового варианта контрольной работы 4

Задача 1. 1. Представить интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ повторным интегралом в декартовых координатах двумя способами, меняя порядок интегрирования, по области D, ограниченной кривыми: $x^2 + y^2 = 2$, $y = -\sqrt{x}$, $x = 0$ $(x \geqslant 0,\ y \leqslant 0)$. 2. Расставить пределы интегрирования по области V, ограниченной заданными поверхностями: $z = 10(x^2 + y^2) + 1$, $z = 1 - 20y$, в интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$.

1. Изобразим на плоскости Oxy область D.



Область D проектируется на ось Ox в отрезок $[0,1]$, при этом любая вертикальная прямая пересекает границу области D по двум точкам, принадлежащим графикам функцмй $y=-\sqrt{2-x^2}$ и $y=-\sqrt{x}$.

Следовательно, $-\sqrt{2-x^2}\leqslant y\leqslant -\sqrt{x}$, поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{-\sqrt{x}} f(x,y)dy.$$

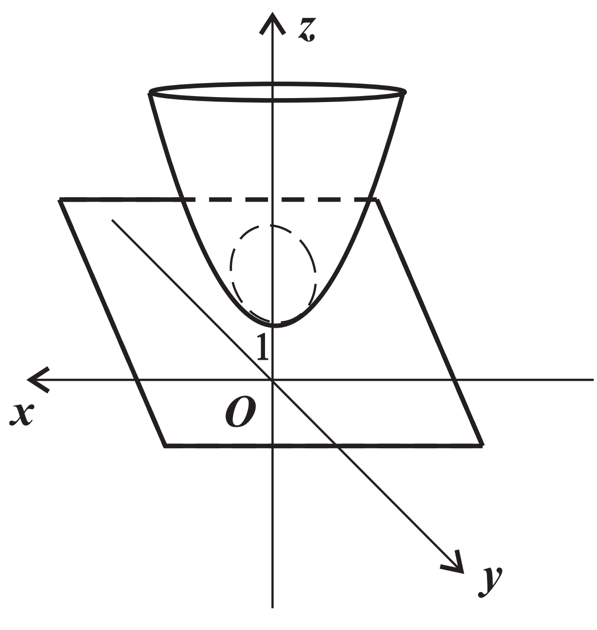
На ось Oy область D проектируется в отрезок $[-\sqrt{2},0]$. В данном случае область D не является правильной, но разбивается на две правильные области D_1 и D_2:

$$D_1=\left\{(x,y)\colon\ -\sqrt{2}\leqslant y\leqslant -1,\ 0\leqslant x\leqslant \sqrt{2-y^2}\right\},$$
$$D_2=\left\{(x,y)\colon\ -1\leqslant y\leqslant 0,\ 0\leqslant x\leqslant y^2\right\}.$$

Таким образом, получим

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy\int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx+\int\limits_{-1}^{0} dy\int\limits_0^{y^2} f(x,y)dx.$$

2. Первое уравнение $z=10(x^2+y^2)+1$ определяет параболоид с вершиной в точке $(0,0,1)$. Второе уравнение $z=1-20y$ задает плоскость.

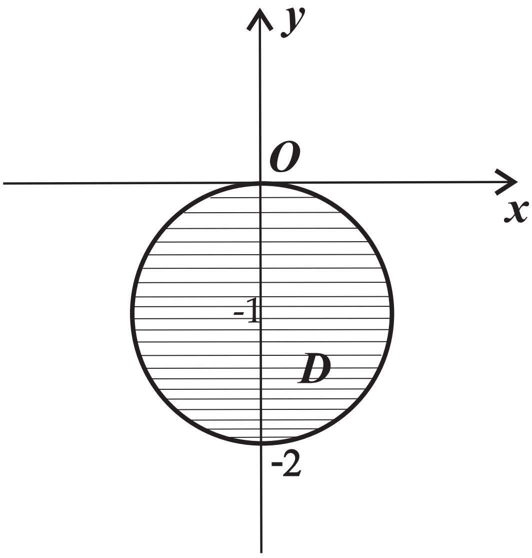


Эта плоскость отсекает от параболоида некоторую часть. Пусть D — проекция тела на плоскость Oxy. Чтобы найти линию, ограничивающую эту область, необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} z = 10(x^2 + y^2) + 1 \\ z = 1 - 20y \end{cases},$$

Вычтем из первого уравнения второе и выделим полный квадрат при y, получим $x^2 + (y + 1)^2 = 1$.

Таким образом, проекция является окружностью радиуса 1 с центром в точке $C(0, -1)$.



Введем цилиндрические координаты:

$$x = r\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\varphi,$$

$$z = z.$$

При переходе в цилиндрические координаты уравнение окружности примет вид

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + 2r\sin\varphi + 1 = 1,$$

$$r^2 = -2r\sin\varphi.$$

Сократив на r обе части приведенного равенства, получим уравнение окружности $r = -2\sin\varphi$.

Исходя из того, что r — неотрицательно, следовательно, и $-2\sin\varphi \geqslant 0$, найдем, как изменяется φ, решив неравенство. Откуда получим $\pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Так как область D ограничена окружностью, уравнение которой $r = -2\sin\varphi$, то r изменяется в пределах от 0 до $-2\sin\varphi$. Найдем уравнения параболоида и плоскости в цилиндрических координатах:

$$z = 10(x^2 + y^2) + 1 = 10(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi) + 1 = 10r^2 + 1;$$

$$z = 1 - 20y = 1 - 20r\sin\varphi.$$

Таким образом,

$$V = \left\{(r, \varphi, z)\colon (r, \varphi) \in D,\ 10r^2 + 1 \leqslant z \leqslant 1 - 20r\sin\varphi\right\},$$

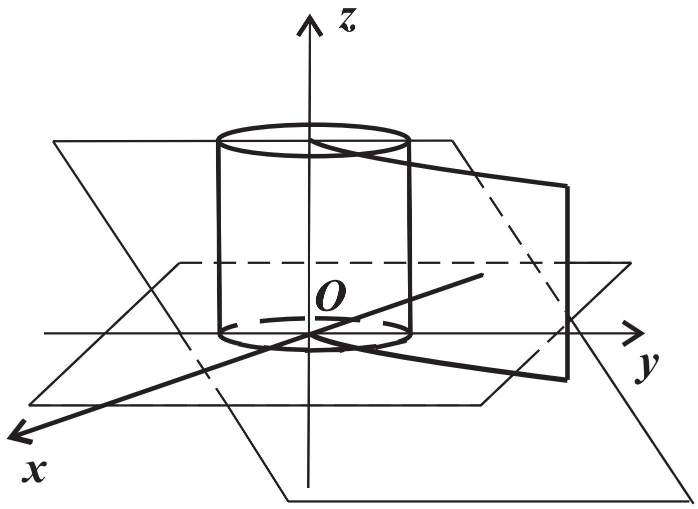
$$D = \left\{(r, \varphi)\colon \pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant -2\sin\varphi\right\}.$$

Принимая во внимание изложенное, можем расставить пределы интегрирования в интеграле

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{-2\sin\varphi} dr \int\limits_{10r^2+1}^{1-20r\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r dz.$$

Задача 2. Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $x^2 + y^2 = 4$, $x = \sqrt{3y}$, $x = 0$, $z = x$, $z = 0$.

Тело V ограничено снизу плоскостью $z = 0$, сверху — наклонной плоскостью $z = x$. Следовательно, у всех точек (x, y, z) области V координата z изменяется от 0 до x, или $V = \{(x, y, z)\colon 0 \leqslant z \leqslant x,\ (x, y) \in D\}$, где D — проекция V на плоскость Oxy. С боковых сторон тело ограничено цилиндрическими поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $x = \sqrt{3y}$ и координатной плоскостью $x = 0$.



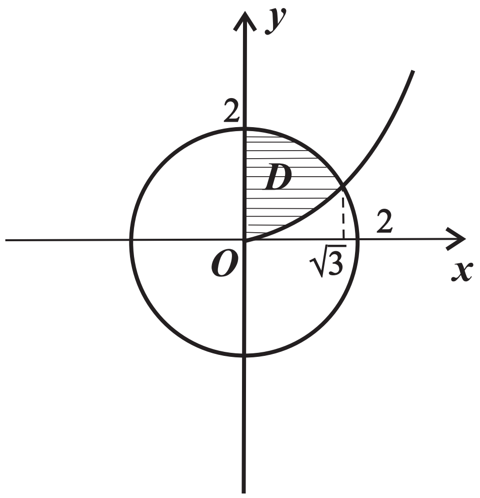
Поэтому область D проекция V на плоскость Oxy ограничена линиями $x^2+y^2=4$, $x=\sqrt{3y}$, $x=0$. Найдем точки пересечения кривых $x^2+y^2=4$, $x=\sqrt{3y}$, решая систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x=\sqrt{3y} \end{cases}.$$

В первое уравнение подставим x из второго

$$\begin{cases} 3y+y^2=4, \\ x=\sqrt{3y} \end{cases}.$$

Числа $y_1=-4$, $y_2=1$ — корни квадратного уравнения $y^2+3y-4=0$. Первый корень $y_1=-4$ — постороний, так как из условия $x=\sqrt{3y}$ следует, что $y\geqslant 0$. Используя второе уравнение системы $x=\sqrt{3y}$, для $y=1$ найдем $x=\sqrt{3}$.



Таким образом, у всех точек (x,y) области D абсцисса x изменяется от 0 до $\sqrt{3}$, ордината y изменяется от $\sqrt{3x}$ до верхней части окружности, заданной уравнением $\sqrt{4-x^2}$. То есть $D=\{(x,y)\colon 0\leqslant x\leqslant\sqrt{3},\ \sqrt{3x}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}\}$.

Перейдем к вычислению объема v тела V:

$$\mathrm{v}(V)=\iiint\limits_V dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_0^x dz=\iint\limits_D z\Big|_0^x dxdy=\iint\limits_D xdxdy=$$

$$=\int\limits_0^{\sqrt{3}}dx\int\limits_{\sqrt{3x}}^{\sqrt{4-x^2}}xdy=\int\limits_0^{\sqrt{3}}xy\Big|_{\sqrt{3x}}^{\sqrt{4-x^2}}dx=\int\limits_0^{\sqrt{3}}x(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3x})dx=$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{3}} (x\sqrt{4-x^2} - \sqrt{3}x^{\frac{3}{2}})dx = \int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{4-x^2}dx - \int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}dx.$$

Первый интеграл вычислим, используя замену $t = 4 - x^2$, соответственно, $dt = (4-x^2)'dx = -2xdx$, откуда $xdx = -\dfrac{1}{2}dt$. Пересчитаем пределы интегрирования. Новый нижний предел интегрирования α найдем из уравнения замены $t = 4 - x^2$ при $x = 0$, то есть $\alpha = 4$. Аналогично находится новый верхний предел интегрирования $\beta = 4 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 1$.

Таким образом,

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{4-x^2}dx = \int\limits_4^1 \left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{t}dt = -\frac{1}{2}\int\limits_4^1 t^{\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_4^1 =$$

$$= -\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_4^1 = -\frac{1}{3}\left(1 - 4^{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{3}(1-8) = \frac{7}{3}.$$

Вычислим второй интеграл:

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}dx = \sqrt{3}\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^{\frac{3}{2}}dx = \sqrt{3}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}\left((\sqrt{3})^{\frac{5}{2}} - 1\right).$$

Объем тела V

$$\mathrm{v}(V) = \frac{7}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{5}\left((\sqrt{3})^{\frac{5}{2}} - 1\right) \approx 0,3.$$

Задача 3. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$1.\ a_n = \sqrt{n}\arcsin\frac{n+1}{n^3-2}.\ 2. a_n = \frac{4^n n^2}{(n+2)!}.$$

1. К знакоположительному ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\arcsin\dfrac{n+1}{n^3-2}$ применим второй признак сходимости. Аргумент арксинуса — бесконечно малая величина при $n \to \infty$, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^3-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^3\left(1-\frac{2}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{2}{n^3}\right)} = 0.$$

Используя эивалентность бесконечно малых функции $\arcsin\alpha \sim \alpha$, $\alpha \to$

0, получим
$$a_n = \arcsin\frac{n+1}{n^3-2} \sim \frac{n+1}{n^3-2},\ n\to\infty.$$
Найдем для аргумента арксинуса эквивалентную бесконечно малую
$$\frac{n+1}{n^3-2} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^3\left(1-\frac{2}{n^3}\right)} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{2}{n^3}\right)} \sim \frac{1}{n^2},\ n\to\infty,$$
заменив величины $1+\dfrac{1}{n}$, $1-\dfrac{2}{n^3}$ их пределами при $n\to 0$.

Таким образом,
$$a_n = \sqrt{n}\arcsin\frac{n+1}{n^3-2} \sim \sqrt{n}\frac{n+1}{n^3-2} \sim \sqrt{n}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},\ n\to\infty.$$
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ — обобщенный гармонический ряд с показателем $p = \dfrac{3}{2}$. Степень p больше 1, следовательно, такой ряд сходится. По второму признаку сходимости исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\arcsin\dfrac{n+1}{n^3-2}$ будет также сходиться.

2. Исследуем на сходимость знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n n^2}{(n+2)!}$. Так как в формуле общего члена a_n встречается факториал $(n+2)!$, применим признак Даламбера. Найдем a_{n+1}, для этого в формуле общего члена заменим n на $n+1$.

Таким образом,
$$a_{n+1} = \frac{4^{n+1}(n+1)^2}{(n+1+2)!}.$$

Для упрощения вычисления предела преобразуем a_{n+1}, учитывая $(n+3)! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n+2)\cdot(n+3) = (n+2)!(n+3)$, $4^{n+1} = 4^n\cdot 4$, $(n+1)^2 = n^2+2n+1$
$$a_{n+1} = \frac{4^n\cdot 4(n^2+2n+1)}{(n+2)!(n+3)}.$$

Найдем
$$d = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^n 4(n^2+2n+1)}{(n+2)!(n+3)}}{\frac{4^n n^2}{(n+2)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n 4(n^2+2n+1)(n+2)!}{4^n n^2(n+2)!(n+3)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4(n^2+2n+1)}{n^2(n+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2\left(1+2\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2(n+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{4\left(1+2\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n+3} = 0.$$

Так как $d = 0 < 1$, то по признаку Даламбера исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n n^2}{(n+2)!}$ сходится.

Задача 4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad u_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{5^n(n^3+1)}(x-2)^n.$$

Составим ряд из модулей членов исследуемого ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5^n(n^3+1)}|x-2|^n$$

и применим к нему радикальный признак Коши, считая x фиксированным,

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{5^n(n^3+1)}|x-2|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\sqrt{n}}}{\sqrt[n]{5^n}\sqrt[n]{n^3+1}} \sqrt[n]{|x-2|^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\sqrt[n]{n}}}{5\sqrt[n]{n^3+1}}|x-2| = \frac{|x-2|}{5}.$$

Поясним вычисление предела. Пользуясь соотношением $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, найдем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^3 \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 \cdot 1 = 1.$$

По радикальному признаку Коши ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится, если $q < 1$. Найдем, при каких x выполняется это неравенство

$$q = \frac{|x-2|}{5} < 1,$$

$$|x-2| < 5,$$

$$-5 < x-2 < 5,$$

$$-3 < x < 7.$$

Исследуем поведение исходного ряда на концах полученного промежутка. При $x = -3$ получим знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5^n(n^3+1)}(-3-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5^n(n^3+1)}(-1)^n 5^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3+1}.$$

Составим ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n| \frac{\sqrt{n}}{n^3+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$$

и исследуем его на сходимость, используя первый признак сходимости. Проведем оценку общего члена ряда

$$\frac{\sqrt{n}}{n^3+1} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n^3} = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $p = \frac{5}{2}$, так как $p > 1$. Согласно первому признаку сходимости ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$ сходится, следовательно, знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$ сходится абсолютно.

Таким образом, в точке $x = -3$ степенной ряд сходится абсолютно.

При $x = 7$ получим знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5^n(n^3+1)}(7-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5^n(n^3+1)} 5^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+1},$$

который сходится.

Следовательно, в точке $x = 7$ степенной ряд сходится абсолютно.

Окончательно получим, что область абсолютной сходимости исследуемого степенного ряда имеет вид $[-3, 7]$.

Задача 5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить $\int\limits_0^b f(x)\,dx$ с точностью $0,0001$, где $f(x) = e^{-x^2}$, $b = \frac{1}{4}$.

Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, заменяя x на $-x^2$

в формуле $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in (-\infty, \infty)$, таким образом, получим

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

или

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots,\ x \in (-\infty, \infty).$$

Интегрируя обе части полученного равенства на отрезке $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, лежащем внутри интервала сходимости $(-\infty, \infty)$, получим

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx = \int\limits_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n! \cdot (2n+1)} + \ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} + \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} - \frac{1}{3! \cdot 7 \cdot 4^7} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n! \cdot (2n+1) \cdot 4^{2n+1}} + \ldots .$$

Получили ряд лейбницевского типа, так как выполняются все условия одноименного признака:

1) предел модуля общего члена $a_n = (-1)^n \frac{1}{n! \cdot (2n+1) \cdot 4^{2n+1}}$ знакочередующегося ряда равен нулю, то есть

$$\lim_{n \to \infty} |a_n| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n! \cdot (2n+1) \cdot 4^{2n+1}} = 0;$$

2) модули всех членов ряда монотонно убывают с ростом n, то есть

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)! \cdot (2n+3) \cdot 4^{2n+3}} < a_n = \frac{1}{n! \cdot (2n+1) \cdot 4^{2n+1}}\ \forall n \in \mathrm{N}.$$

Оценим члены числового ряда:

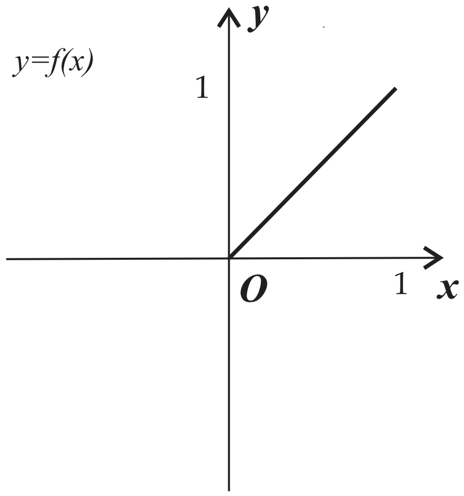
$$\frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} \approx 0,0052 > 0,0001,$$

$$\frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} \approx 0,00009 < 0,0001.$$

Поэтому с точностью до 0,0001 получим

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} \approx 0,2448.$$

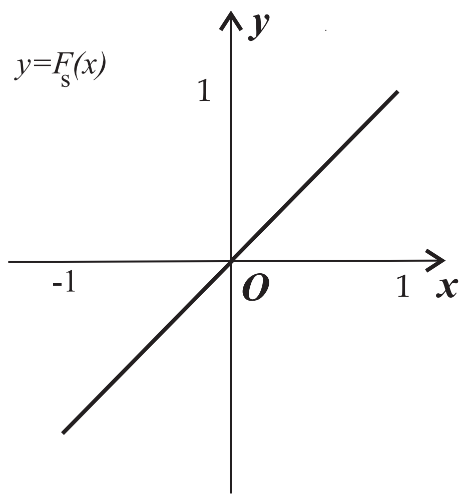
Задача 6. Разложить элементарную функцию $f(x)$ на заданном интервале в ряд Фурье: 1) по синусам; 2) по косинусам; 3) получить одно из разложений общего вида; для каждого случая построить графики периодического продолжения $f(x)$ и суммы ряда Фурье, если $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$.



1. Для того чтобы получить разложение функции $f(x)$ по синусам, введем вспомогательную нечетную функцию $F_s(x)$ такую, что

$$F_s(x) = f(x) \; \forall x \in [0, 1].$$

Другими словами, $F_s(x)$ нечетное продолжение функции $f(x)$ на $[-1, 1]$, полученное отображением графика $f(x)$ относительно начала координат.



Найдем коэффициенты ряда Фурье для функции $F_s(x)$, $h = 1$. Так как функция $F_s(x)$ нечетная, то $a_0 = a_n = 0$ для всех натуральных n:

$$b_n = \frac{1}{h}\int\limits_{-h}^{h} F_s(x)\sin\frac{\pi n x}{h}dx = \int\limits_{-1}^{1} F_s(x)\sin\pi n x dx.$$

Функция $F_s(x)$ по определению является нечетной, поэтому, $F_s(x)\sin\pi n x$ — четная, применяя свойство определенного интеграла, получим

$$b_n = 2\int\limits_{0}^{1} F_s(x)\sin\pi n x dx.$$

Кроме того, выполняется соотношение $F_s(x) = f(x) = x\ \forall x \in [0,1]$, следовательно,

$$b_n = 2\int\limits_{0}^{1} x\sin\pi n x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin\pi n x dx & v = -\frac{\cos\pi n x}{\pi n} \end{array}\right] =$$

$$= 2\left(-x\frac{\cos\pi n x}{\pi n}\Bigg|_0^1 - \int\limits_0^1 \left(-\frac{\cos\pi n x}{\pi n}dx\right)\right) =$$

$$= 2\left(-x\frac{\cos\pi n x}{\pi n}\Bigg|_0^1 + \frac{\sin\pi n x}{(\pi n)^2}\Bigg|_0^1\right) =$$

$$= 2\left(-1\frac{\cos\pi n}{\pi n} - 0 + \frac{\sin\pi n}{(\pi n)^2} - \frac{\sin\pi n(-1)}{(\pi n)^2}\right) =$$

$$= -2\frac{\cos\pi n}{\pi n} = 2\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n},$$

так как $\sin\pi n = 0$, $\cos\pi n = (-1)^n$, $n \in \mathrm{N}$.

Функция $F_s(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[-1,1]$: ограничена, монотонна и непрерывна.

Следовательно, $F_s(x)$ раскладывается в ряд Фурье, причем сумма ряда Фурье $S_s(x)$ определена на всей числовой оси, является периодической с периодом $T = 2$ и удовлетворяет условиям:

$$S_s(x) = F_s(x),\ x \in (-1,1);$$

$$S_s(-1) = S_s(1) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to -1+0} F_s(x) + \lim_{x\to 1-0} F_s(x)\right) = \frac{1}{2}(-1+1) = 0.$$

По определению

$$f(x) = F_s(x), \ \ x \in [0,1],$$

в частности, и для x из интервала $(0,1)$. Поэтому

$$f(x) = F_s(x) = S_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin \pi n x, \ x \in (0,1).$$

График суммы ряда Фурье по синусам $S_s(x)$.

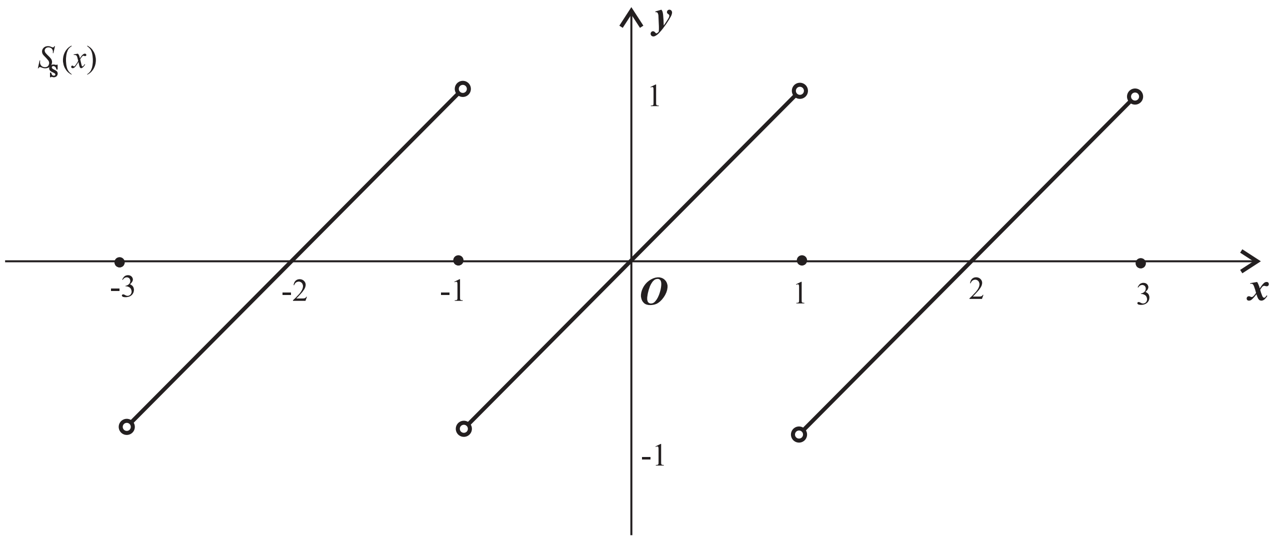
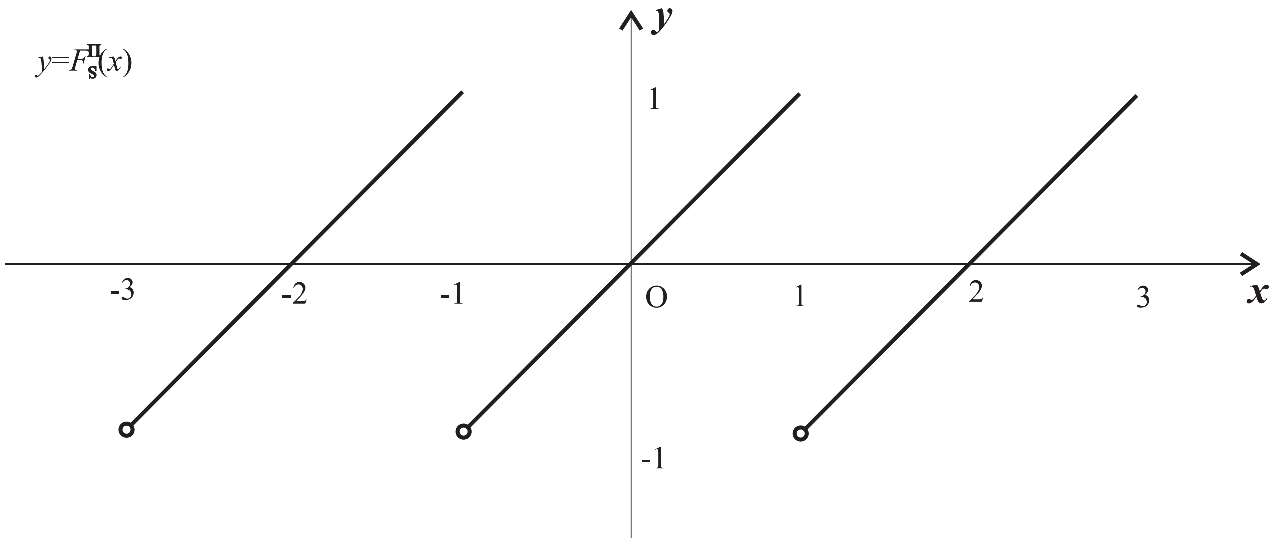


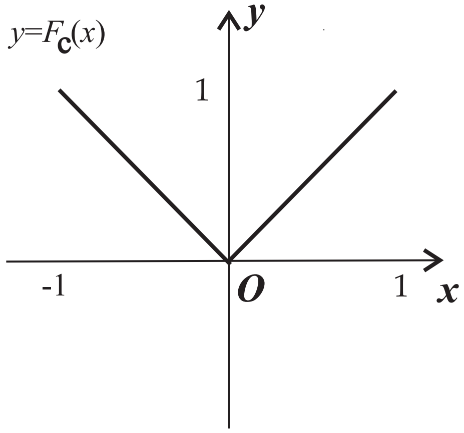
График периодического продолжения функции $F_s(x)$.



2. Для того чтобы получить разложение функции $f(x)$ по косинусам, введем вспомогательную четную функцию $F_c(x)$ такую, что

$$F_c(x) = f(x)\ \forall x \in [0, 1].$$

Другими словами, $F_c(x)$ четное продолжение функции $f(x)$ на $[-1, 1]$, полученное отображением графика $f(x)$ относительно оси ординат.



Найдем коэффициенты ряда Фурье для функции $F_c(x)$, $h = 1$. Так как функция $F_c(x)$ четная, то $b_n = 0$ для всех натуральных n найдем

$$a_0 = \frac{1}{h}\int\limits_{-h}^{h} F_c(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} F_c(x)dx.$$

Функция $F_c(x)$ по определению является четной, применяя свойство определенного интеграла, получим

$$a_0 = 2\int\limits_{0}^{1} xdx = 2\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

Далее

$$a_n = \frac{1}{h}\int\limits_{-h}^{h} F_c(x)\cos\frac{\pi nx}{h}dx = \int\limits_{-1}^{1} F_c(x)\cos\pi nxdx.$$

Функция $F_c(x)\cos\pi nx$ — четная, тогда по свойству определенного интеграла

$$a_n = 2\int\limits_{0}^{1} F_c(x)\cos\pi nxdx.$$

Кроме того, выполняется соотношение $F_c(x) = f(x) = x\ \forall x \in [0, 1]$, следовательно,

$$a_n = 2\int\limits_0^1 x\cos \pi n x dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos\pi n x dx & v = \frac{\sin \pi n x}{\pi n} \end{bmatrix} =$$

$$= 2\left(x\frac{\sin\pi n x}{\pi n}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{\sin \pi n x}{\pi n} dx \right) = 2\left(x\frac{\sin\pi n x}{\pi n}\Big|_0^1 + \frac{\cos\pi n x}{(\pi n)^2}\Big|_0^1 \right) =$$

$$= 2\left(\frac{\sin \pi n}{\pi n} - 0 + \frac{\cos\pi n}{(\pi n)^2} - \frac{\cos 0}{(\pi n)^2} \right) =$$

$$= 2\left(\frac{(-1)^n}{(\pi n)^2} - \frac{1}{(\pi n)^2} \right),$$

$\sin\pi n = 0$, $\cos\pi n = (-1)^n$, $n \in \mathrm{N}$.

Функция $F_c(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[-1, 1]$: ограничена, монотонна и непрерывна. Следовательно, $F_c(x)$ раскладывается в ряд Фурье, причем сумма ряда Фурье $S_c(x)$ определена на всей числовой оси, является периодической с периодом $T = 2$ и удовлетворяет условиям:

$$S_c(x) = F_c(x),\ x \in (-1, 1);$$

$$S_c(-1) = S_c(1) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to -1+0} F_c(x) + \lim_{x\to 1-0} F_c(x) \right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

То есть $S_c(x) = F_c(x),\ x \in [-1, 1]$. По определению $f(x) = F_c(x)$ $x \in [0, 1]$, поэтому

$$f(x) = F_s(x) = S_s(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{(-1)^n}{(\pi n)^2} - \frac{1}{(\pi n)^2} \right)\cos\pi n x,\ x \in [0, 1].$$

График суммы ряда Фурье по косинусам $S_c(x)$.

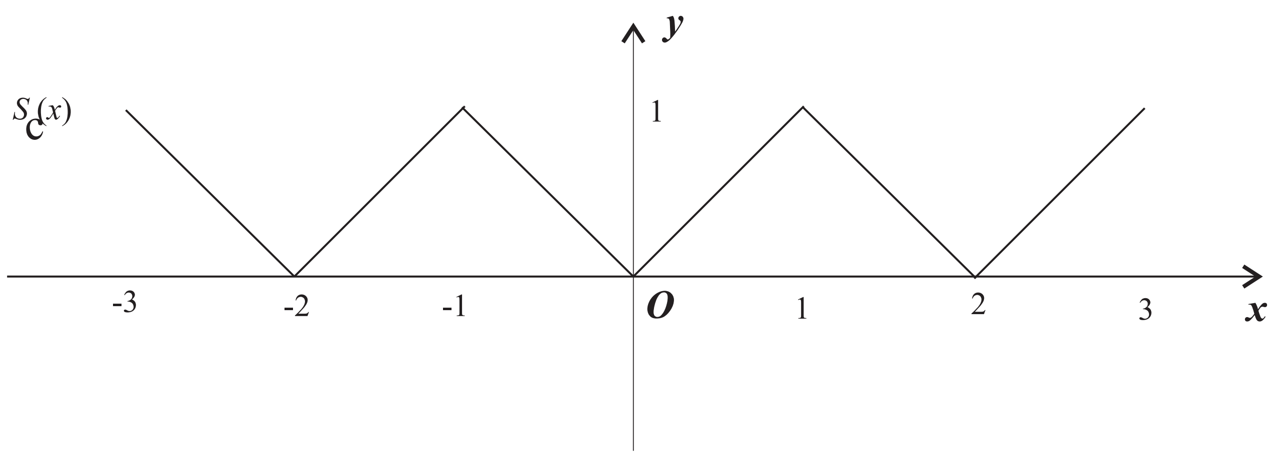
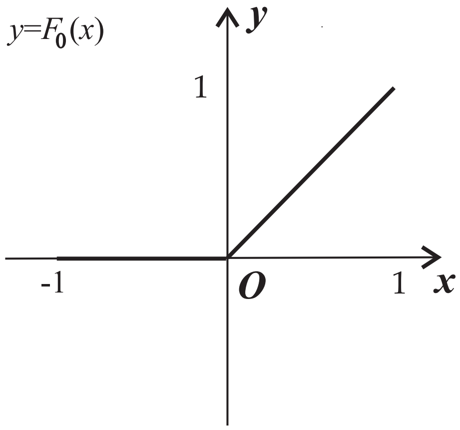


График периодического продолжения совпадает с графиком $S_c(x)$.

3. Получим одно из общих разложений функции $f(x)$ в ряд Фурье, продолжая ее на промежутке $[-1, 0)$ нулем, то есть зададим вспомогательную функцию

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, \ x \in [-1, 0) \\ x, \ x \in [0, 1] \end{cases}.$$



Заметим, что $f(x) = F_0(x)$, $x \in [0, 1]$. Вычислим коэффициенты ряда Фурье функции $F_0(x)$.

$$a_0 = \frac{1}{h}\int\limits_{-h}^{h} F_0(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} F_0(x)dx.$$

Так как функция $F_0(x)$ кусочно заданная, то разобьем промежуток интегрирования на два $[-1, 0]$ и $[0, 1]$, причем на отрезке $[-1, 0]$ функция $F_0(x)$ зануляется. Получим

$$a_0 = \int\limits_{-1}^{0} F_0(x)dx + \int\limits_{0}^{1} F_0(x)dx = \int\limits_{0}^{1} F_0(x)dx = \int\limits_{0}^{1} xdx = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Далее найдем

$$a_n = \frac{1}{h}\int\limits_{-h}^{h} F_0(x)\cos\frac{\pi n x}{h}dx = \int\limits_{-1}^{1} F_0(x)\cos \pi n x dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} F_0(x)\cos \pi n x dx + \int\limits_{0}^{1} F_0(x)\cos \pi n x dx,$$

заменим на отрезке $[-1,0]$ функцию $F_0(x)$ нулем, а на отрезке $[0,1]$ – на x.

$$a_n = \int\limits_0^1 x\cos\pi nx dx.$$

Используя результат п. 2 задачи при вычислении интеграла $\int\limits_0^1 x\cos\pi nx dx$, получим $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(\pi n)^2} - \dfrac{1}{(\pi n)^2}$. Рассуждая аналогично, вычислим b_n:

$$b_n = \frac{1}{h}\int\limits_{-h}^{h} F_0(x)\sin\frac{\pi nx}{h}dx = \int\limits_{-1}^{1} F_0(x)\sin\pi nx dx = \int\limits_0^1 x\sin\pi nx dx = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Функция $F_0(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[-1,1]$: ограничена, монотонна и непрерывна. Следовательно, $F_0(x)$ раскладывается в ряд Фурье, причем сумма ряда Фурье $S_c(x)$ определена на всей числовой оси, является периодической с периодом $T=2$ и удовлетворяет условиям:

$$S_0(x) = F_0(x),\ x\in(-1,1);$$

$$S_0(-1) = S_0(1) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to -1+0} F_0(x) + \lim_{x\to 1-0} F_0(x)\right) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}.$$

По определению $f(x) = F_0(x)$ на $[0,1]$, поэтому

$$f(x) = S_0(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{(-1)^n}{(\pi n)^2} - \frac{1}{(\pi n)^2}\right)\cos\pi nx + \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\pi nx\right],$$

$x\in[0,1)$. График суммы ряда Фурье по синусам $S_0(x)$.

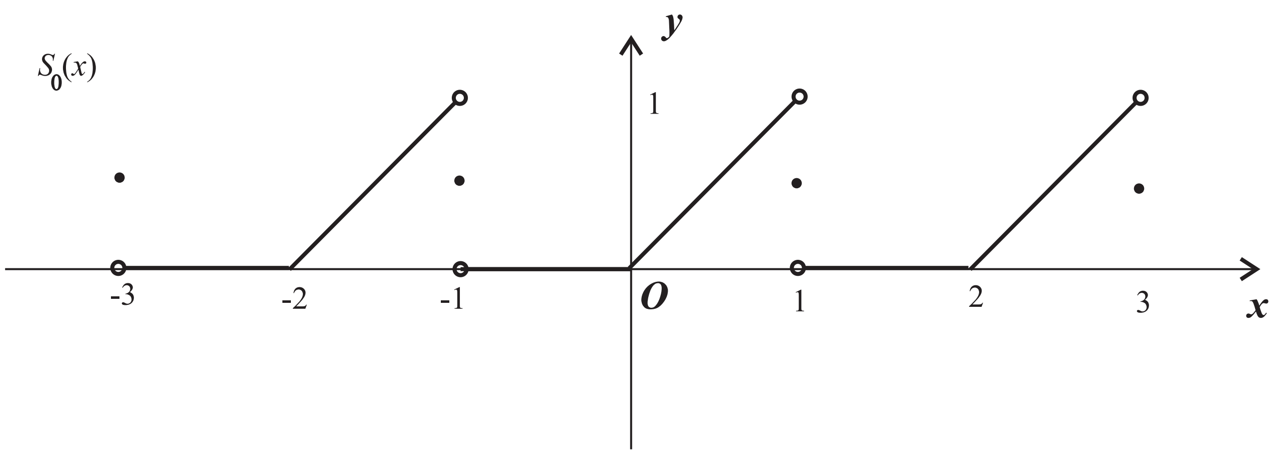
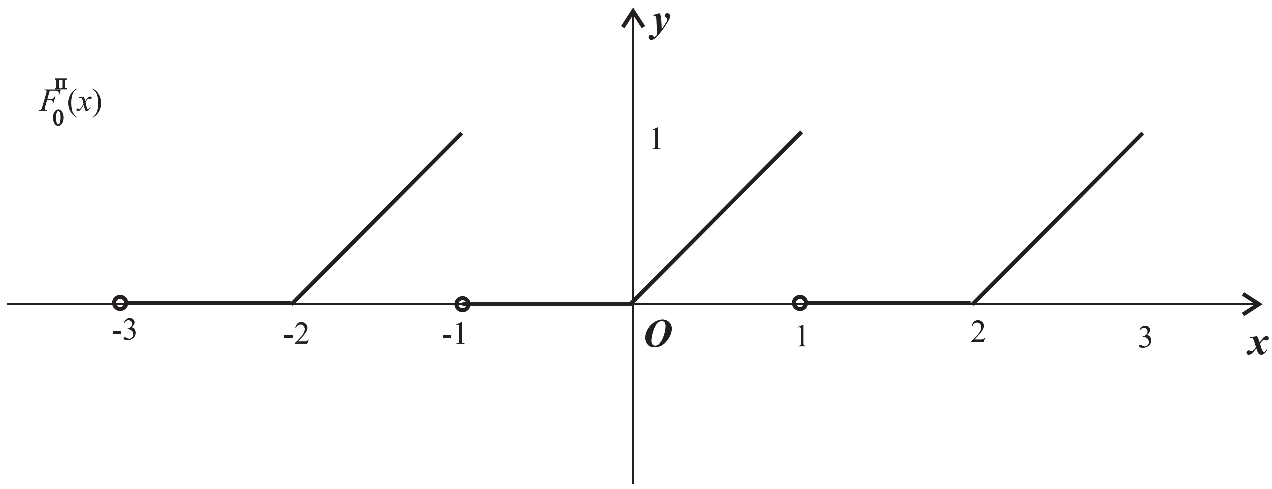


График периодического продолжения.



9. Контрольная работа 5

Задача 1. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя), используя формулу Остроградского–Гаусса. Выбрав сторону поверхности, найти непосредственно поток векторного поля $\vec{a}$ через поверхность S_1, являющуюся частью поверхности S и определенную заданным уравнением.

1.1 $\vec{a} = (z-y)\vec{i} + (4y+x^2)\vec{j} + 2x\vec{k}$; $S\colon \begin{cases} z = x^2+y^2, \\ z = 1, \end{cases}$ $S_1\colon z = x^2+y^2.$

1.2 $\vec{a} = 4x^2y\vec{i} - xy^2\vec{j} + (3xz+1)\vec{k}$; $S\colon \begin{cases} z = 1-x^2-y^2, \\ z = 0, \end{cases}$ $S_1\colon z = 1-x^2-y^2.$

1.3 $\vec{a} = 2x^2\vec{i} + y\vec{j} + (2-x^2y)\vec{k}$; $S\colon \begin{cases} x^2+y^2 = 1, \\ z = 0, z = 5, \end{cases}$ $S_1\colon x^2+y^2 = 1.$

1.4 $\vec{a} = 3x\vec{i} - 5y\vec{j} + 3z\vec{k}$; $S\colon \begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2}, \\ z = 2, \end{cases}$ $S_1\colon z = \sqrt{x^2+y^2}.$

1.5 $\vec{a} = 2xz\vec{i} + (4x^2y+3)\vec{j} - 3(y+z)\vec{k}$; $S\colon \begin{cases} z = 3-x^2-y^2, \\ z = 0, \end{cases}$ $S_1\colon z = 3-x^2-y^2.$

1.6 $\vec{a} = x\vec{i} + \cos y\vec{j} + z\vec{k};\ S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1, z = 6, \end{cases} S_1\colon x^2 + y^2 = 1.$

1.7 $\vec{a} = (3x^2 + 2y)\vec{i} - (5z + 2y)\vec{j} + y\vec{k};\ S\colon \begin{cases} y = x^2 + z^2, \\ y = 1, \end{cases} S_1\colon y = x^2 + z^2.$

1.8 $\vec{a} = \dfrac{x^2}{2}y\vec{i} - 3xy^2\vec{j} + (3z - x)\vec{k};\ S\colon \begin{cases} z = 4 - 4x^2 - 4y^2, \\ z = 0, \end{cases} S_1\colon z = 4 - 4x^2 - 4y^2.$

1.9 $\vec{a} = -5x\vec{i} + 3y\vec{j} + 3z\vec{k};\ S\colon \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = 3, \end{cases} S_1\colon z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

1.10 $\vec{a} = (3x^2 + 2y)\vec{i} - (5z + xy)\vec{j} + y\vec{k};\ S\colon \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 2, \end{cases} S_1\colon z = x^2 + y^2.$

1.11 $\vec{a} = x\vec{i} + \cos y\vec{j} + z\vec{k};\ S\colon \begin{cases} x^2 + z^2 = 1, \\ y = 1, y = 3, \end{cases} S_1\colon x^2 + z^2 = 1.$

1.12 $\vec{a} = 9z\vec{i} + 7xy\vec{j} - (12z + 5)\vec{k};\ S\colon \begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2, \\ z = 0, \end{cases} S_1\colon z = 2 - x^2 - y^2.$

1.13 $\vec{a} = x^2y\vec{i} + z\vec{j} + xy\vec{k};\ S\colon \begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2, \\ z = 0, \end{cases} S_1\colon z = 1 - x^2 - y^2.$

1.14 $\vec{a} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 3z\vec{k};\ S\colon \begin{cases} y = \sqrt{x^2 + z^2}, \\ y = 2, \end{cases} S_1\colon y = \sqrt{x^2 + z^2}.$

1.15 $\vec{a} = \sin x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k};\ S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 1, z = 2, \end{cases} S_1\colon x^2 + y^2 = 4.$

1.16 $\vec{a} = 2x^2y\vec{i} + xy^2\vec{j} + (z - 2)\vec{k};\ S\colon \begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2, \\ z = 0, \end{cases} S_1\colon z = 2 - x^2 - y^2.$

1.17 $\vec{a} = (2y+z)\vec{i} + 3y^2\vec{j} - xz\vec{k}$; $S\colon \begin{cases} z = 4 + x^2 + y^2, \\ z = 8, \end{cases}$ $S_1\colon z = 4 + x^2 + y^2$.

1.18 $\vec{a} = -3x^2\vec{i} + \dfrac{y^2}{2}\vec{j} + xz\vec{k}$; $S\colon \begin{cases} y = 3 - x^2 - z^2, \\ y = 0, \end{cases}$ $S_1\colon y = 3 - x^2 - z^2$.

1.19 $\vec{a} = \cos x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$; $S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 1,\ z = 3, \end{cases}$ $S_1\colon x^2 + y^2 = 4$.

1.20 $\vec{a} = -4x\vec{i} + 3y\vec{j} + 3z\vec{k}$; $S\colon \begin{cases} y = \sqrt{x^2 + z^2}, \\ y = 1, \end{cases}$ $S_1\colon y = \sqrt{x^2 + z^2}$.

1.21 $\vec{a} = (x+y)\vec{i} - yz\vec{j} + y^2\vec{k}$; $S\colon \begin{cases} z = 5 - x^2 - y^2, \\ z = 0, \end{cases}$ $S_1\colon z = 5 - x^2 - y^2$.

1.22 $\vec{a} = x\vec{i} + \sin y\vec{j} + z\vec{k}$; $S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ z = 1,\ z = 3, \end{cases}$ $S_1\colon x^2 + y^2 = 2$.

1.23 $\vec{a} = (2y-x)\vec{i} + (z-y)\vec{j} + xy\vec{k}$; $S\colon \begin{cases} z = 3 - x^2 - y^2, \\ z = 0, \end{cases}$ $S_1\colon z = 3 - x^2 - y^2$.

1.24 $\vec{a} = 9z\vec{i} + 7xy\vec{j} - xz\vec{k}$; $S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 1,\ z = 3, \end{cases}$ $S_1\colon x^2 + y^2 = 9$.

1.25 $\vec{a} = (x+2)\vec{i} + \cos y\vec{j} - z\vec{k}$; $S\colon \begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2, \\ z = 0, \end{cases}$ $S_1\colon z = 1 - x^2 - y^2$.

1.26 $\vec{a} = 5x\vec{i} - 5y\vec{j} + 5z\vec{k}$; $S\colon \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = 1, \end{cases}$ $S_1\colon z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1.27 $\vec{a} = 3y^2\vec{i} - x^2\vec{j} + (z - xy)\vec{k}$; $S\colon \begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2, \\ z = 0, \end{cases}$ $S_1\colon z = 2 - x^2 - y^2$.

1.28 $\vec{a} = 4x^2y\vec{i} - xz\vec{j} + z\vec{k}$; $S\colon \begin{cases} y = 1 - x^2 - z^2, \\ y = 0, \end{cases}$ $S_1\colon y = 1 - x^2 - z^2$.

1.29 $\vec{a} = 4x\vec{i} + 6y\vec{j} + 6z\vec{k}$; $S\colon \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = 2, \end{cases}$ $S_1\colon z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1.30 $\vec{a} = \sin x\vec{i} + 3y\vec{j} - (z-2)\vec{k}$; $S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ z = 1,\ z = 2, \end{cases}$ $S_1\colon x^2 + y^2 = 2$.

Задача 2. Вычислить по формуле Стокса и непосредственно циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ вдоль контура Γ, указав на чертеже направление обхода.

2.1 $\vec{a} = (2y + x)\vec{i} + 3x\vec{j} - (z+1)\vec{k}$; $\Gamma\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 2z, \\ z = \frac{1}{2}. \end{cases}$

2.2 $\vec{a} = xz\vec{i} + xy\vec{j} + yz\vec{k}$; $\Gamma\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$

2.3 $\vec{a} = -3y\vec{i} + (4x + y)\vec{j} - 5z\vec{k}$; $\Gamma\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = z - 2, \\ z = 3. \end{cases}$

2.4 $\vec{a} = (x + y)\vec{i} + (y - x)\vec{j} - (z+2)\vec{k}$; $\Gamma\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 4\ (z \geqslant 0). \end{cases}$

2.5 $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$; $\Gamma\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 1. \end{cases}$

2.6 $\vec{a} = (2x - 3y)\vec{i} - (2y - 3x)\vec{j} - 3z^2\vec{k}$; $\Gamma\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 1\ (z \geqslant 0). \end{cases}$

2.7 $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$; $\Gamma\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ z = 3. \end{cases}$

2.8 $\vec{a} = (x + yz)\vec{i} - (xz - y)\vec{j} - (z - xy)\vec{k}$; $\Gamma\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 16\ (z \geqslant 0). \end{cases}$

2.9 $\vec{a} = -yz\vec{i} - \vec{j} + 2z\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 2. \end{cases}$

2.10 $\vec{a} = (x - yz)\vec{i} + z(x+1)\vec{j} - y(x-1)\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ z = 4. \end{cases}$

2.11 $\vec{a} = 5z\vec{i} - 3x\vec{j} + y\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} z = x^2 + y^2 + 1, \\ z = 10. \end{cases}$

2.12 $\vec{a} = 2y\vec{i} + (7+x)\vec{j} + 3z\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 1 \ (z \geqslant 0). \end{cases}$

2.13 $\vec{a} = (x + yz)\vec{i} + (y - xz)\vec{j} + 2z\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 2. \end{cases}$

2.14 $\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$

2.15 $\vec{a} = x^2\vec{i} + y(z-2)\vec{j} + (x+z)\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

2.16 $\vec{a} = x^2\vec{i} + y(z-2)\vec{j} + (x+z)\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$

2.17 $\vec{a} = (xz + y)\vec{i} + yz\vec{j} - z\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$

2.18 $\vec{a} = (y^2 - xz)\vec{i} + (z + xy)\vec{j} - z^2\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$

2.19 $\vec{a} = (x - 3z)\vec{i} + (y+2)\vec{j} - (z - 2y)\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - 3y - 2z = 1. \end{cases}$

2.20 $\vec{a} = (x+3z)\vec{i} + (2-y)\vec{j} + (2y+z)\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ 2x-3y-2z=1. \end{cases}$

2.21 $\vec{a} = (x-y)\vec{i} + (2-y)\vec{j} - (z-1)\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ z=2. \end{cases}$

2.22 $\vec{a} = x\vec{i} + (3x-y)\vec{j} - (3x-z)z\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ z=1. \end{cases}$

2.23 $\vec{a} = (x+y)\vec{i} - (x-1)\vec{j} - (z+1)\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ z=16. \end{cases}$

2.24 $\vec{a} = (y-x)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + (2-z)\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ z=3. \end{cases}$

2.25 $\vec{a} = 2(x+y)\vec{i} + 5(y+z)\vec{j} - 3(z-x)\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} 2x^2+2y^2=1, \\ x+y+z=3. \end{cases}$

2.26 $\vec{a} = (y+x)\vec{i} + (y-x)\vec{j} - (z+1)\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} x^2+y^2=2z, \\ z=2. \end{cases}$

2.27 $\vec{a} = (x+y)\vec{i} - (x+y)\vec{j} + (2z-1)\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ z=4. \end{cases}$

2.28 $\vec{a} = (2y+x)\vec{i} - (y+3x)\vec{j} - z\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

2.29 $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} - (z+xy)\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ z=3. \end{cases}$

2.30 $\vec{a} = yz\vec{i} - xz\vec{j} + xy\vec{k}$; Γ: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ x^2+y^2=9. \end{cases}$

Задача 3. Доказать потенциальность заданного векторного поля и найти его потенциал, используя криволинейный интеграл.

3.1 $\vec{a} = (4x^3 + 3x^2y - 2y^2z)\vec{i} + (x^3 + 4xyz - z^3)\vec{j} + (2xy^2 - 3yz^2)\vec{k}$.

3.2 $\vec{a} = \left(\dfrac{z}{x^2} + 1\right)\vec{i} + \dfrac{2}{z}\vec{j} - \left(\dfrac{2y}{z^2} + \dfrac{1}{x}\right)\vec{k}$.

3.3 $\vec{a} = 2x\sin yz\vec{i} + x^2z\cos yz\vec{j} + (x^2y\cos yz + 1)\vec{k}$.

3.4 $\vec{a} = -2y^2z\vec{i} + (-4xyz + 4y^3 - 3y^2z)\vec{j} + (-2xy^2 - y^3 + 7)\vec{k}$.

3.5 $\vec{a} = -\dfrac{2}{y}\vec{i} + \left(\dfrac{2x}{y^2} + \dfrac{1}{z} - 1\right)\vec{j} - \dfrac{y}{z^2}\vec{k}$.

3.6 $\vec{a} = y\cos z\vec{i} + x\cos z\vec{j} + (-xy\sin z + 2)\vec{k}$.

3.7 $\vec{a} = (6x^2y - 1)\vec{i} + (2x^3 - z^3)\vec{j} + (-3yz^2 + 4z^3)\vec{k}$.

3.8 $\vec{a} = \dfrac{3}{y}\vec{i} - \left(\dfrac{3x}{y^2} + \dfrac{1}{z}\right)\vec{j} + \left(\dfrac{y}{z^2} + 2z\right)\vec{k}$.

3.9 $\vec{a} = 2xe^{yz}\vec{i} + (x^2ze^{yz} + 1)\vec{j} + x^2ye^{yz}\vec{k}$.

3.10 $\vec{a} = (-4x^3 + 4xyz - yz^2)\vec{i} + (2x^2z - xz^2)\vec{j} + (2x^2y - 2xyz - 2z)\vec{k}$.

3.11 $\vec{a} = \left(14xy + \dfrac{z}{x^2}\right)\vec{i} + \left(7x^2 + \dfrac{3}{z}\right)\vec{j} + \left(-\dfrac{3y}{z^2} - \dfrac{1}{x}\right)\vec{k}$.

3.12 $\vec{a} = (2x + y^2z\cos xz)\vec{i} + 2y\sin xz\vec{j} + xy^2\cos xz\vec{k}$.

3.13 $\vec{a} = (9x^2y - y^2z)\vec{i} + (3x^3 - 2xyz + z^3 - 2)\vec{j} + (-xy^2 + 3yz^2)\vec{k}$.

3.14 $\vec{a} = \left(5 - \dfrac{2z}{x^2}\right)\vec{i} - \dfrac{1}{z}\vec{j} + \left(\dfrac{y}{z^2} + \dfrac{2}{z}\right)\vec{k}$.

3.15 $\vec{a} = (y^2ze^{-xz} - 4)\vec{i} - 2ye^{-xz}\vec{j} + xy^2e^{-xz}\vec{k}$.

3.16 $\vec{a} = (2xyz + 7)\vec{i} + (x^2z - 12y^2z)\vec{j} + (x^2y - 4y^3 + 4z^3)\vec{k}$.

3.17 $\vec{a} = \dfrac{2}{y}\vec{i} + \left(-\dfrac{2x}{y^2} - \dfrac{1}{z} + 2\right)\vec{j} + \dfrac{y}{z^2}\vec{k}$.

3.18 $\vec{a} = 2\cos yz\vec{i} - 2xz\sin yz\vec{j} + (-2xy\sin yz - 1)\vec{k}$.

3.19 $\vec{a} = (4x^3 - y^2z + 2yz^2)\vec{i} + (-2xyz + 2xz^2 - 3y^2z)\vec{j} + (-xy^2 + 4xyz - y^3)\vec{k}$.

3.20 $\vec{a} = \left(-1 - \dfrac{1}{z}\right)\vec{i} + \dfrac{2}{z}\vec{j} + \left(\dfrac{x}{z^2} - \dfrac{2y}{z^2}\right)\vec{k}$.

3.21 $\vec{a} = (2yz^2e^{2xy} + 2xy)\vec{i} + (x^2 + 2xz^2e^{2xy})\vec{j} + 2ze^{2xy}\vec{k}$.

3.22 $\vec{a} = 2yz^2\vec{i} + (2xz^2 + 6yz^2 + 1)\vec{j} + (4xyz + 6y^2z - 4z^3)\vec{k}$.

3.23 $\vec{a} = \left(-4 + \dfrac{2}{y} - \dfrac{5z}{x^2}\right)\vec{i} - \dfrac{2x}{y^2}\vec{j} + \dfrac{5}{x}\vec{k}$.

3.24 $\vec{a} = y^2z\cos xz\vec{i} + 2y\sin xz\vec{j} + (xy^2\cos xz + 2)\vec{k}$.

3.25 $\vec{a} = 2y^2z\vec{i} + (-4y^3 + 4xyz + 4yz^2)\vec{j} + (2xy^2 + 4y^2z - 3)\vec{k}$.

3.26 $\vec{a} = -\dfrac{1}{y}\vec{i} + \left(3 + \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{7}{z}\right)\vec{j} - \dfrac{7y}{z^2}\vec{k}$.

3.27 $\vec{a} = -2xe^{-yz}\vec{i} + x^2ze^{-yz}\vec{j} + (x^2ye^{-yz} - 2)\vec{k}$.

3.28 $\vec{a} = (-3y^3 + 1)\vec{i} + (-9xy^2 - 6y^2z + 4y^3)\vec{j} - 2y^3\vec{k}$.

3.29 $\vec{a} = \left(\dfrac{5}{y} - \dfrac{3z}{x^2}\right)\vec{i} - \dfrac{5x}{y^2}\vec{j} + \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)\vec{k}$.

3.30 $\vec{a} = -yz^2\sin xy\vec{i} + (-xz^2\sin xy + 3)\vec{j} + 2z\cos xy\vec{k}$.

10. Решение типового варианта контрольной работы 5

Задача 1. Найти поток векторного поля

$$\vec{a} = (\cos z + x)\vec{i} + (2y - e^x)\vec{j} + 4z\vec{k}$$

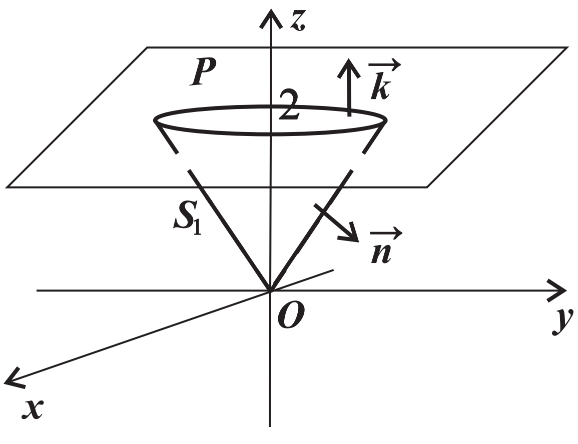
через замкнутую поверхность

$$S\colon \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = 2, \end{cases}$$

(нормаль внешняя), используя формулу Остроградского–Гаусса. Выбрав сторону поверхности, найти непосредственно поток векторного поля $\vec{a}$ через поверхность

$$S_1\colon z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

являющуюся частью поверхности S.



Для вычисления потока воспользуемся формулой Остроградского–Гаусса

$$\Pi(\vec{a}) = \iint\limits_S (\vec{a}, \vec{n})\, dS = \iiint\limits_V \mathrm{div}\vec{a}\, dx\, dy\, dz.$$

Найдем дивергенцию векторного поля $\vec{a}$:

$$\mathrm{div}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos z + x) + \frac{\partial}{\partial y}(2y - e^x) + \frac{\partial}{\partial z}(4z) = 1 + 2 + 4 = 7.$$

$$\Pi(\vec{a}) = \iiint\limits_V 7\,dx\,dy\,dz = 7\iiint\limits_V dx\,dy\,dz = 7\mathrm{v}(V),$$

где $\mathrm{v}(V)$ — объем конуса, по которому ведется интегрирование. Воспользуемся известной формулой для вычисления объема конуса

$$\mathrm{v}(V) = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

(R — радиус основания конуса, h — его высота). В нашем случае

$$\mathrm{v}(V) = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2 = \frac{8\pi}{3}.$$

Окончательно получаем

$$\Pi(\vec{a}) = 7\mathrm{v}(V) = \frac{56\pi}{3}.$$

Для того чтобы вычислить поток через поверхность S_1, воспользуемся соотношением $\Pi(\vec{a}) = \Pi_{S_1}(\vec{a}) + \Pi_P(\vec{a})$, где $\Pi(\vec{a})$ — поток через замкнутую поверхность S; $\Pi(\vec{a})$ — поток через боковую поверхность S_1; $\Pi_P(\vec{a})$ — поток векторного поля через часть плоскости $z = 2$, тогда

$$\Pi_{S_1}(\vec{a}) = \Pi(\vec{a}) - \Pi_P(\vec{a}).$$

Вычислим $\Pi_P(\vec{a})$

$$\Pi(\vec{a}) = \iint\limits_P (\vec{a}, \vec{n})\ dS = \iint\limits_P \Big((\cos z + x)\vec{i} + (2y - e^x)\vec{j} + 4z\vec{k}, \vec{k}\Big)\ dS =$$

$$= 4\iint\limits_P z\,dS = 4\iint\limits_{D_{xy}} 2\,dxdy = 8\iint\limits_{D_{xy}} dxdy = 8S(D_{xy}),$$

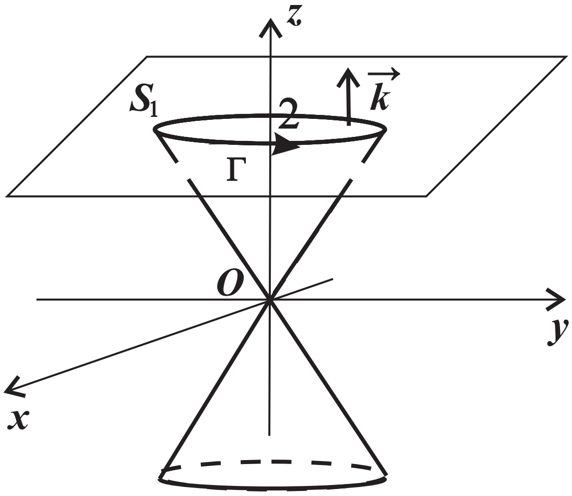
где $S(D_{xy})$ — площадь проекции части плоскости на Oxy, то есть площадь круга радиуса $R = 2$, следовательно $S(D_{xy}) = \pi R^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$, тогда $\Pi_P(\vec{a}) = 8 \cdot 4\pi = 32\pi$.

Окончательно получаем

$$\Pi_{S_1}(\vec{a}) = \frac{56\pi}{3} - 32\pi = -\frac{40\pi}{3}.$$

Задача 2. Вычислить по формуле Стокса и непосредственно циркуляцию векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} - z^2\vec{k}$ вдоль контура Γ, образованному пересечением поверхностей $S_1 :\ z = 2$ и $S_2 :\ z^2 = x^2 + y^2,\ (z \geqslant 0)$, указав на чертеже направление обхода.

Пересечением указанных поверхностей является окружность $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$. Направление обхода выбирается обычно так, чтобы ограниченная им область оставалась слева.



Запишем параметрические уравнения контура Г:

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 2, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} dx = -2\sin t\, dt, \\ dy = 2\cos t\, dt, \\ dz = 0, \end{cases}$$

причем параметр t изменяется от 0 до 2π, тогда

$$Ц = \oint\limits_{Г} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \oint\limits_{Г} y\,dx - x\,dy - z^2\,dz = \int\limits_0^{2\pi} \big(2\sin t(-2\sin t) - 2\cos t \cdot 2\cos t - 4\cdot 0\big)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(-4\sin^2 t - 4\cos^2 t\right)\,dt = -4\int\limits_0^{2\pi} dt = -8\pi.$$

Применим теперь формулу Стокса:

$$Ц = \iint\limits_S (\mathrm{rot}\vec{a},\ \vec{n})\ dS,$$

где S — любая поверхность, границей которой является контур Г. В качестве такой поверхности можно взять часть плоскости $z = 2$. Направление нормали $\vec{n} = \vec{k}$ к этой поверхности согласуется с направлением обхода контура Г. Вычислим ротор данного векторного поля:

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & -z^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial(-z^2)}{\partial y} - \frac{\partial(-x)}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial(y)}{\partial z} - \frac{\partial(-z^2)}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y}\right)\vec{k} = -2\vec{k}.$$

Поэтому искомая циркуляция

$$\text{Ц} = \iint\limits_S (\mathrm{rot}\vec{a},\, \vec{n})\, dS = \iint\limits_S \left(-2\vec{k},\, \vec{k}\right) dS = -2\iint\limits_S dS =$$

$$= -2\iint\limits_{D_{xy}} dxdy = -2S(D_{xy}),$$

где $S(D_{xy})$ — площадь проекции поверхности S на плоскость Oxy, кроме того, D_{xy} — круг радиуса $R = 2$, откуда

$$S(D_{xy}) = \pi R^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi.$$

В итоге получаем

$$\text{Ц} = -2S(D_{xy}) = -2 \cdot 4\pi = -8\pi.$$

Задача 3. Доказать потенциальность заданного векторного поля

$$\vec{a} = 2xy\vec{i} + (x^2 - 2yz)\vec{j} - y^2\vec{k}$$

и найти его потенциал, используя криволинейный интеграл.

Данное векторное поле определено на всем пространстве $\mathbf{R}^3$; поэтому для того чтобы векторное поле $\vec{a}$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{rot}\vec{a} = \vec{0}$. Проверим это:

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 - 2yz & -y^2 \end{vmatrix} = \{-2y - (-2y);\, 0 - 0;\, 2x - 2x\} = \vec{0}.$$

Потенциал векторного поля

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

можно вычислить по формуле

$$u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt + C,$$

где M_0 - некоторая фиксированная точка. В качестве такой точки возьмем, например, точку $M_0(0,\ 0,\ 0)$, тогда получим

$$u(x,y,z) = \int\limits_{0}^{x} 2t\cdot 0dt + \int\limits_{0}^{y} (x^2 - 2t\cdot 0)dt - \int\limits_{0}^{z} y^2dt + C =$$

$$= x^2t\Big|_0^y - y^2t\Big|_0^z = x^2y - y^2z + C.$$

Таким образом,

$$u(x,y,z) = x^2y - y^2z + C.$$

Сделаем проверку:

$$u'_x = 2xy = P(x,y,x),$$

$$u'_y = x^2 - 2yz = Q(x,y,z),$$

$$u'_z = -y^2 = R(x,y,z),$$

следовательно, $\nabla u(x,y,z) = \vec{a}$, то есть функция $u(x,y,z)$ является потенциалом векторного поля $\vec{a}$.

11. Контрольная работа 6

Задача 1

1.1 Из урны, в которой 30 шаров белых и 4 красных, наудачу вынимаются 3 шара. Найти вероятность того, что среди них есть хотя бы один красный шар.

1.2 В одной урне 5 белых и 8 красных шаров, а в другой 10 белых и 6 красных. Из каждой урны наудачу вынимают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара одного цвета?

1.3 В одной урне 5 белых и 8 красных шаров, а в другой 10 белых и 6 красных. Из каждой урны наудачу вынимают по одному шару. Какова вероятность того, что шары разного цвета?

1.4 В партии из 10 приборов 8 не имеют дефекта. Найти вероятность того, что из 2 наудачу взятых приборов хотя бы один без дефекта.

1.5 Из полного набора костей домино наугад берут 3 кости. Какова вероятность того, что хотя бы две из них дубли?

1.6 Открываются одна за другой карты колоды из 36 штук. Какова вероятность того, что первой картой пиковой масти окажется пятая карта?

1.7 В урне 6 белых и 5 красных шаров. Наугад последовательно без возврата вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара красные.

1.8 Найти вероятность того, что при трех подбрасываниях игральной кости выпадет хотя бы один раз единица.

1.9 Партия из 100 изделий содержит 40 изделий первого сорта, а остальные — второго сорта. Найти вероятность того, что взятые наудачу 2 изделия будут одного сорта.

1.10 Буквы, составляющие слово «Одесса», написаны по одной на шести карточках. Чему равна вероятность того, что вынимая карточки по одной и складывая их в порядке вынимания, мы получим слово «сад»?

1.11 В электрической цепи 3 элемента, которые выходят из строя независимо друг от друга с вероятностями 0.3, 0.2 и 0.1. Определить вероятность разрыва цепи при последовательном соединении этих элементов.

1.12 В электрической цепи 3 элемента, которые выходят из строя независимо друг от друга с вероятностями 0.3, 0.2 и 0.1. Найти вероятность разрыва цепи при параллельном соединении элементов.

1.13 Стрелок делает по мишени 3 выстрела, вероятности поражения мишени при которых соответственно равны 0.7, 0.8 и 0.85. Найти вероятность двух попаданий.

1.14 Стрелок делает по мишени 3 выстрела, вероятности поражения мишени при которых соответственно равны 0.7, 0.8 и 0.85. Найти вероятность одного попадания.

1.15 Стрелок делает по мишени 3 выстрела, вероятности поражения мишени при которых соответственно равны 0.7, 0.8 и 0.85. Найти вероятность хотя бы одного попадания.

1.16 Вероятность работы лампочки до трех месяцев равна 0.9, а от трех до пяти месяцев — 0.6. Определить вероятность того, что лампочка будет в эксплуатации не менее пяти месяцев.

1.17 Вратарь парирует 1/3 ударов. Найти вероятность того, что он возьмет хотя бы 2 из 4 мячей.

1.18 В урне 5 белых и 20 черных шаров. Шары вынимают последовательно без возврата до тех пор, пока не будет вынут белый шар. Вычислить вероятность того, что при этих условиях будет произведено 3 вынимания, то есть до белого шара будет вынуто 2 черных.

1.19 Вероятность купить сегодня билет на самолет равна 0.7, а на поезд — 0.2, других видов транспорта нет. Какова вероятность уехать сегодня?

1.20 Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0.9, на второй — 0.95, на третьей — 0.8, на четвертой — 0.6. Найти вероятность того, что только на одной базе не будет нужного материала.

1.21 Найти вероятность того, что при четырех подбрасываниях игральной кости выпадет хотя бы один раз четное число очков.

1.22 Из трех колод карт по 36 штук наудачу вынимают по одной карте. Какова вероятность того, что среди них хотя бы один туз?

1.23 Бросают 2 кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков окажется кратной двум или трем.

1.24 Три стрелка производят по одному выстрелу по цели, вероятности попадания в которую равны: для первого — 0.5, для второго — 0.7, для третьего — 0.8. Найти вероятность поражения цели.

1.25 Несколько раз бросают игральную кость. Какова вероятность того, что одно очко появится впервые при четвертом бросании?

1.26 Из колоды в 52 карты наудачу вынимают одну карту. Найти вероятность того, что эта карта пиковая или туз.

1.27 Дети смогут пойти в кино, если мама или папа придут с работы до пяти часов. Папа возвращается с работы до пяти часов в одном из пяти случаев, а мама — в одном из двух случаев. Какова вероятность того, что дети сегодня пойдут в кино?

1.28 В ящике 5 белых, 3 черных и 2 красных шара. Последовательно по одному без возврата вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что они разного цвета.

1.29 Найти вероятность того, что при подбрасываниях двух игральных костей на них выпадет одинаковое число очков.

1.30 Из колоды в 36 карт наудачу берут 4 карты. Найти вероятность того, что среди них не менее трех карт пиковой масти.

Задача 2

2.1 Радиолампа, вставленная в телевизор, может принадлежать к одной из партий с вероятностями: 0.3, 0.2, 0.5. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов для этих партий равны соответственно: 0.9, 0.8, 0.6. Найти вероятность того, что лампа проработает заданное число часов, если она выбрана наудачу.

2.2 Имеется 2 партии одинаковых изделий из 10 и 12 штук, причем в каждой партии по одному бракованному изделию. Наудачу взятое изделие из первой партии переложили во вторую, после чего наудачу вынимают изделие из второй партии. Найти вероятность того, что оно бракованное.

2.3 В урну, содержащую 10 шаров, опущен белый шар. Какова вероятность извлечь из нее белый шар, если предположения о первоначальном присутствии в урне от 0 до 5 белых шаров равновозможны?

2.4 Завод получает сырье с трех баз. Вероятность наличия сырья на первой базе равна 0.9, на второй — 0.95, на третьей — 0.8. Автомашина за сырьем послана на случайно выбранную базу. Какова вероятность того, что она вернется с сырьем?

2.5 Студенту нужна книга, которая может находится в одной из четырех библиотек с вероятностями: 0.8, 0.7, 0.9, 0.75. Студент пошел в наудачу выбранную библиотеку. Какова вероятность того, что он получит книгу?

2.6 Участники соревнования разделены на 3 группы: старшая — 5 человек, средняя — 4 человека, младшая — 10 человек. Вероятность занять первое место для членов каждой группы равны соответственно 0.2, 0.15, 0.1. Какова вероятность того, что чемпион — представитель средней группы?

2.7 Индикатор принадлежит с вероятностями 0.2, 0.3, 0.5 к одному из трех типов, для которых вероятности срабатывания при нарушении нормальной работы линии равны соответственно 1, 0.9, 0.85. От индикатора получен неправильный сигнал. Найти вероятность того, что он второго типа.

2.8 Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». «Точка» искажается в 1 из 8 случаев, а «тире» — в 1 из 7. «Точка» и «тире» встречаются в отношении 5:3. Сигнал принят. Какова вероятность того, что он искажен?

2.9 Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». «Точка» искажается в 1 из 8 случаев, а «тире» — в 1 из 7. «Точка» и «тире» встречаются в отношении 5:3. Сигнал принят без искажений. Найти вероятность того, что принята «точка»?

2.10 В ящиках находятся соответственно: 1) 2 белых и 3 черных шара; 2) 4 белых и 3 черных шара; 3) 6 белых и 2 черных шара. Из наудачу выбранного ящика вынимают шар. Найти вероятность того, что он черный?

2.11 В ящиках находятся соответственно: 1) 2 белых и 3 черных шара; 2) 4 белых и 3 черных шара; 3) 6 белых и 2 черных шара. Из наудачу выбранного ящика вынимают шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что он вынут из первого или третьего ящика?

2.12 В первом ящике 2 белых и 3 красных шара, а во втором — 10 белых и 5 красных шаров. Из наудачу выбранного ящика извлекают 1 шар, а второй извлекают из другого ящика. Какова вероятность того, что сначала извлечен белый, а потом красный шар?

2.13 В первом ящике 2 белых и 3 красных шара, а во втором — 10 белых и 5 красных шаров. Из наудачу выбранного ящика извлекают 1 шар, а второй извлекают из другого ящика. Первый оказался белым, а второй — красным. Найти вероятность того, что первое извлечение было проведено из второго ящика?

2.14 С поляны ведут 3 дороги, вероятности выхода из леса за час по ним равны соответственно: 0.7, 0.3, 0.2. Выбрав наугад дорогу, заблудившийся вышел из леса за час. Какова вероятность того, что он пошел по второй дороге?

2.15 В одной игре используется одна игральная кость, а в другой — две. Счет игры равен числу очков, выпавших на одной или двух костях. Известно, что счет игры равен двум очкам. Найти вероятность того, что игра идет с двумя костями.

2.16 С первого станка на сборку поступает 60% одинаковых деталей, а со второго — 40%. На первом станке брак составляет 1%, а на втором — 4%. Две проверенные детали, изготовленые одним и тем же станком, оказались бракованными. Найти вероятность того, что они изготовлены на первом станке.

2.17 Вероятность выполнить работу без ошибок для десяти студентов равна 0.95, для пятнадцати — 0.7, а для трех — 0.2. Преподаватель берет наудачу одну тетрадь для проверки. Какова вероятность того, что работа выполнена без ошибок?

2.18 В первой коробке находятся буквы М, А, В, Р, С, М, И, А, во второй — А, В, С, К, И, И, Л, М, Р. Из наугад выбранной коробки последовательно без возврата извлекают по одной букве. Найти вероятность того, что будет построено слово МИР.

2.19 Имеются 2 одинаковые колоды по 36 карт. Из одной из них наудачу взята карта и переложена во вторую, затем из второй колоды наудачу извлекается 1 карта. Найти вероятность того, что извлеченная карта — туз.

2.20 Детали изготавливаются на двух станках, причем первый производит в 3 раза больше второго. Брак на первом станке составляет 3%, а на втором — 5%. Наудачу взятая деталь оказалась стандартной. Кавова вероятность того, что она изготовлена на первом станке?

2.21 Имеются 3 игральные кости, на одной из них на всех гранях изображено 1 очко, на другой — на противоположных гранях одинаковое число очков: 1, 2 и 3; третья кость обычная. Бросают наудачу выбранную кость. Найти вероятность того, что выпадет одно очко.

2.22 Имеются 3 игральные кости, на одной из них на всех гранях изображено 1 очко, на другой — на противоположных гранях одинаковое число очков: 1, 2 и 3; третья кость обычная. Бросают наудачу выбранную кость. Выпало одно очко. Какова вероятность того, что брошена обычная кость?

2.23 В правом кармане 4 монеты по 50 копеек и 3 по 5 копеек, а в левом — 6 по 50 копеек и 3 по 5 копеек. Из правого кармана в левый наудачу переложены 2 монеты. Найти вероятность извлечения монеты в 50 копеек из левого кармана после перекладывания.

2.24 На столе 5 полных колод карт по 36 штук и 3 колоды, в которых присутствуют только фигурные карты (дамы, вальты, короли, тузы). Наугад выбирается одна из колод, и из нее случайным образом вынимается одна карта. Найти вероятность того, что вынутая карта туз.

2.25 На столе 5 полных колод карт по 36 штук и 3 колоды, в которых присутствуют только фигурные карты (дамы, вальты, короли, тузы). Наугад выбирается одна из колод, и из нее случайным образом вынимается одна карта, которая оказалась тузом. Найти вероятность того, что она вынута из неполной колоды.

2.26 Характеристика материала, взятого для изготовления продукции, с вероятностями 0.1, 0.4, 0.5 может находится в одном из трех различных интервалов. В зависимости от материала вероятности получения первосортной продукции равны соответственно 0.3, 0.8, 0.95. Найти вероятность изготовления продукции первого сорта.

2.27 Некто в одном из трех случаев ездит на работу автобусом, а в двух из трех — трамваем. Вероятность не приехать к сроку на автобусе равна 0.05, а на трамвае — 0.2. Сегодня он опоздал. Какова вероятность того, что он ехал на трамвае?

2.28 В ящике 15 мячей, из которых 9 новые. Для первой игры наудачу берут 3 мяча, а после игры возвращают их в ящик. Для второй игры тоже наудачу берут 2 мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые.

2.29 Имеется 5 урн, каждая из которых содержит 10 шаров. Урна с номером k содержит k белых и $10-k$ красных шаров. Из наудачу выбранной урны вынимают 4 раза с возвратом по одному шару. Найти вероятность того, что все шары белые.

2.30 Сборщик получил две коробки деталей с завода №1 и три с завода №2. Вероятность того, что деталь с завода №1 нестандартна, равна 0.8, а для завода №2 — 0.9. Сборщик извлек деталь из наудачу взятой коробки. Она оказалась стандартной. Какова вероятность того, что она изготовлена на заводе №1?

Задача 3. По данному закону распределения случайной величины X найти $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$.

3.1

-1	0	1
0.4	0.2	0.4

$Y = 3X + 8.$

3.2

0	1	2	3
0.94	0.03	0.02	0.01

$Y = -2X + 1.$

3.3

0.16	0.32	0.64
0.4	0.5	?

$Y = 6X + 2.$

3.4

1	2	3	4
0.2	?	0.4	0.3

$Y = 3X + 1.$

3.5

-2	-1	1
0.45	0.1	0.45

$Y = -X + 4.$

3.6

0.6	0.25	1
0.3	0.5	?

$Y = 3X + 2.$

3.7

650	700	750
0.6	?	0.15

$Y = 2X - 3.$

3.8

-2	-1	0	1	2
0.2	0.1	?	0.3	0.2

$Y = 4X - 2.$

3.9

1	2	3	4
0.1	0.4	0.2	?

$Y = X - 1.$

3.10

1	2	3	4
0.2	0.3	0.1	?

$Y = 3X + 1.$

3.11

-2	-1	1	2
0.1	0.6	0.2	?

$Y = -X + 2.$

3.12

0.32	0.33	0.34	0.35
0.4	0.3	?	0.1

$Y = 2X + 1.$

3.13

7	5	3
0.2	0.3	?

$Y = 4X - 7.$

3.14

-5	1	5
0.4	0.1	?

$Y = 5X + 1.$

3.15

1	4	6
0.7	0.2	?

$Y = 4X - 2.$

3.16

3	2	1	0
0.2	?	0.2	0.3

$Y = -X + 7.$

3.17

0	-1	-2	-3
0.2	0.7	0.05	?

$Y = -2X + 1.$

3.18

100	101	102
0.2	0.3	?

$Y = 3X - 6.$

3.19

6	4	2	0
0.3	0.4	0.1	?

$Y = 7X - 9.$

3.20

8	6	4
0.7	0.1	?

$Y = 3X - 2.$

3.21

0.5	1	1.5
0.7	0.1	?

$Y = 2X - 1.$

3.22

3	2	1	0
0.8	0.05	?	0.05

$Y = 2X + 4.$

3.23

-5	0	5
0.7	0.1	?

$Y = 2X + 5.$

3.24

2	1	0	-1	-2
0.1	?	0.1	0.2	0.4

$Y = 7X + 4.$

3.25

6	8	10
0.6	0.3	?

$Y = 3X + 1.$

3.26

12	10	5
0.3	0.4	?

$Y = X + 7.$

3.27

-2	-1	0	1
0.3	0.3	0.1	?

$Y = 2X - 2.$

3.28

0.6	0.4	0.2
0.5	?	0.3

$Y = 2X + 4.$

3.29

0.3	0.1	-0.1	-0.3
0.2	?	0.1	0.3

$Y = 2X - 4.$

3.30

0.25	0.5	0.75
?	0.6	0.3

$Y = 2X + 6.$

Задача 4. Определить при каком значении параметра C заданная функция $f(x)$ является функцией плотности распределения случайной величины. Найти функцию распределения $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $P(a < X < b)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

4.1 $f(x)=\begin{cases} Ce^x, & x\leqslant 0;\\ 0, & x>0.\end{cases}$ $a=-\infty,\quad b=-1.$

4.2 $f(x)=\begin{cases} C\sin x, & x\in(0,\pi];\\ 0, & x\notin(0,\pi].\end{cases}$ $a=-\pi/2,\quad b=\pi/4.$

4.3 $f(x)=\begin{cases} C\cos x, & x\in(-\pi/2,\pi/2];\\ 0, & x\notin(-\pi/2,\pi/2].\end{cases}$ $a=-\pi/4\quad b=\pi.$

4.4 $f(x)=\begin{cases} Cx^3, & x\in(0,2];\\ 0, & x\notin(0,2].\end{cases}$ $a=-1,\quad b=1.$

4.5 $f(x)=\begin{cases} Cx^5, & x\in(0,1];\\ 0, & x\notin(0,1].\end{cases}$ $a=-1,\quad b=1/3.$

4.6 $f(x)=\begin{cases} Ce^x, & x\leqslant 0;\\ Ce^{-x}, & x>0.\end{cases}$ $a=-1,\quad b=2.$

4.7 $f(x)=\begin{cases} Cxe^{-x}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$ $a=-1,\quad b=+\infty.$

4.8 $f(x)=\begin{cases} C(x-2)^2, & x\in(2,3];\\ 0, & x\notin(2,3].\end{cases}$ $a=-\infty,\quad b=2.5.$

4.9 $f(x)=\begin{cases} x-C, & x\in(1,2];\\ 0, & x\notin(1,2].\end{cases}$ $a=-1,\quad b=3/2.$

4.10 $f(x)=\begin{cases} C\sin^2 x, & x\in(0,\pi];\\ 0, & x\notin(0,\pi].\end{cases}$ $a=-\pi/2,\quad b=+\infty.$

4.11 $f(x)=\begin{cases} \frac{C}{\sqrt[3]{x-1}}, & x\in(1,2];\\ 0, & x\notin(1,2].\end{cases}$ $a=0,\quad b=1.5.$

4.12 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 3; \\ Ce^{-2(x-3)}, & x > 3. \end{cases}$ $\quad a = -\infty, \quad b = 4.$

4.13 $f(x) = \begin{cases} \frac{C}{(x-2)^6}, & x > 3; \\ 0, & x \leqslant 3. \end{cases}$ $\quad a = -\infty, \quad b = 4.$

4.14 $f(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^4}, & |x| > 2; \\ 0, & |x| \leqslant 2. \end{cases}$ $\quad a = -\infty, \quad b = 1.$

4.15 $f(x) = \begin{cases} C(x-6)^2, & 6 < x \leqslant 7; \\ 0, & x \notin (6, 7]. \end{cases}$ $\quad a = -\infty, \quad b = 6.5.$

4.16 $f(x) = \begin{cases} 2C\cos^2 x, & |x| < \pi/2; \\ 0, & |x| \geqslant \pi/2. \end{cases}$ $\quad a = 0, \quad b = \pi/4.$

4.17 $f(x) = \begin{cases} 0.5C\cos 2x, & |x| < \pi/4; \\ 0, & |x| \geqslant \pi/4. \end{cases}$ $\quad a = -\infty, \quad b = 0.$

4.18 $f(x) = \begin{cases} Cx^4, & 0 < x \leqslant 6; \\ 0, & x \leqslant 0,\ x > 6. \end{cases}$ $\quad a = 5, \quad b = 12.$

4.19 $f(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^3}, & x > 4; \\ 0, & x \leqslant 4. \end{cases}$ $\quad a = -\infty, \quad b = 5.$

4.20 $f(x) = \begin{cases} C(2-x), & 0 < x \leqslant 2; \\ 0, & x \leqslant 0,\ x > 2. \end{cases}$ $\quad a = -7, \quad b = 7.$

4.21 $f(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^4}, & x > 1; \\ 0, & x \leqslant 1. \end{cases}$ $\quad a = -2, \quad b = 2.$

4.22 $f(x) = \begin{cases} C\sin 2x, & 0 < x \leqslant \pi/2; \\ 0, & x \leqslant 0,\ x > \pi/2. \end{cases}$ $\quad a = -2, \quad b = \pi/6.$

4.23 $f(x) = \begin{cases} Ce^{-8x}, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$ $\qquad a = 1, \qquad b = 8.$

4.24 $f(x) = \begin{cases} \frac{C}{\sqrt{x-1}}, & 1 < x < 2; \\ 0, & x \leqslant 1,\ x \geqslant 2. \end{cases}$ $\qquad a = 1.5, \qquad b = 8.$

4.25 $f(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^6}, & x > 1; \\ 0, & x \leqslant 1. \end{cases}$ $\qquad a = -\infty, \qquad b = 1.$

4.26 $f(x) = \begin{cases} C, & 0 < x \leqslant 10; \\ 0, & x \leqslant 0,\ x > 10. \end{cases}$ $\qquad a = 5, \qquad b = 15.$

4.27 $f(x) = \begin{cases} Cx, & 0 < x < 1; \\ 0, & x \leqslant 0,\ x \geqslant 1. \end{cases}$ $\qquad a = -2, \qquad b = 0.5.$

4.28 $f(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^4}, & x < -1; \\ 0, & x \geqslant -1. \end{cases}$ $\qquad a = -5, \qquad b = +\infty.$

4.29 $f(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^6}, & |x| > 1; \\ 0, & |x| \leqslant 1. \end{cases}$ $\qquad a = -5, \qquad b = 5.$

4.30 $f(x) = \begin{cases} Cx^2, & 0 < x < 3; \\ 0, & x \leqslant 0,\ x \geqslant 3. \end{cases}$ $\qquad a = 2, \qquad b = +\infty.$

Задача 5. Случайная величина X распределена по нормальному закону с $M(X) = m,\ D(X) = d$. Найти $P(\alpha < X < \beta)$.

5.1 $m = 1, \qquad d = 9, \qquad \alpha = 0, \qquad \beta = 2.$

5.2 $m = 0, \qquad d = 16, \qquad \alpha = -1, \qquad \beta = 3.$

5.3 $m = -1, \qquad d = 4, \qquad \alpha = -2, \qquad \beta = 3.$

5.4 $m = 2, \qquad d = 25, \qquad \alpha = 3, \qquad \beta = 5.$

5.5 $m = 0.5, \quad d = 1, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1.5.$

5.6 $m = -2, \quad d = 9, \quad \alpha = -3, \quad \beta = 0.$

5.7 $m = 3, \quad d = 4, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 5.$

5.8 $m = 1, \quad d = 16, \quad \alpha = -1, \quad \beta = 2.$

5.9 $m = 2, \quad d = 25, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 4.$

5.10 $m = 4, \quad d = 1, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 4.5.$

5.11 $m = -2, \quad d = 9, \quad \alpha = -3, \quad \beta = -1.$

5.12 $m = 0, \quad d = 4, \quad \alpha = -1, \quad \beta = 1.$

5.13 $m = 1, \quad d = 0.25, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1.$

5.14 $m = -1, \quad d = 0.04, \quad \alpha = -1.5, \quad \beta = -0.8.$

5.15 $m = -0.5, \quad d = 0.16, \quad \alpha = -0.7, \quad \beta = -0.2.$

5.16 $m = 0.4, \quad d = 0.09, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0.6.$

5.17 $m = 3, \quad d = 0.01, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 3.05.$

5.18 $m = -2, \quad d = 0.04, \quad \alpha = -3, \quad \beta = -1.9.$

5.19 $m = -1, \quad d = 0.64, \quad \alpha = 0, \quad \beta = -0.9.$

5.20 $m = 5, \quad d = 0.49, \quad \alpha = 4, \quad \beta = 5.2.$

5.21 $m = 3, \quad d = 0.16, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 3.2.$

5.22 $m = 4$, $d = 4$, $\alpha = 3$, $\beta = 4.5$.

5.23 $m = -1$, $d = 0.04$, $\alpha = -1.5$, $\beta = -0.9$.

5.24 $m = -2$, $d = 0.16$, $\alpha = -3$, $\beta = 1.8$.

5.25 $m = 1$, $d = 4$, $\alpha = 0$, $\beta = 2.4$.

5.26 $m = 3$, $d = 0.09$, $\alpha = 2$, $\beta = 3.1$.

5.27 $m = 0.4$, $d = 9$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 5$.

5.28 $m = 0.7$, $d = 0.09$, $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.9$.

5.29 $m = 0.8$, $d = 16$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 1$.

5.30 $m = -0.2$, $d = 25$, $\alpha = 0$, $\beta = 0.2$.

Задача 6. Даны результаты наблюдений случайной величины X. Разделив интервал значений X на десять равных частей, построить группировку, гистограмму, эмпирическую функцию распределения, найти оценки математического ожидания и дисперсии исследуемой случайной величины. На основе этих построений выдвинуть гипотезу о законе распределения X и на графике гистограммы изобразить выравнивающую кривую. На уровне значимости $\alpha = 0.02$ по критерию Колмогорова установить согласие или несогласие выдвинутой гипотезы с результатами наблюдений.

6.1 19.3, 6.3, 23.1, 5.9, 0.4, 0.9, 7.4, 1.6, 21.0, 6.0, 3.8, 3.1, 6.4, 17.1, 3.3, 0.4, 0.5, 19.4, 19.1, 0.6, 2.8, 1.6, 0.2, 16.9, 11.1, 6.4, 5.1, 16.1, 5.1, 10.3, 11.3, 0.8, 9.4, 10.2, 3.0, 0.1, 7.1, 3.9, 8.4, 2.4, 8.7, 15.5, 4.5, 4.7, 20.6, 9.4, 23.5, 17.0, 4.5, 14.9, 8.4, 12.6, 13.6.

6.2 4.1, 13.3, 1.2, 1.9, 1.8, 1.7, 18.1, 14.3, 21.6, 7.7, 1.2, 0.5, 14.2, 5.6, 26.5, 5.5, 32.5, 6.7, 7.0, 3.0, 11.1, 10.0, 21.9, 9.1, 18.1, 10.6, 16.4, 6.6, 26.7, 31.0, 16.3, 28.5, 3.5, 12.2, 24.9, 4.6, 6.9, 9.0, 34.2, 27.5, 21.5, 0.4, 21.5, 28.9, 21.0, 22.1, 14.1, 8.8, 11.2, 15.6, 20.7, 20.8, 18.0, 9.6, 0.1, 15.7, 4.5, 1.1, 15.6, 9.7, 5.6, 14.8, 1.1, 27.5, 3.9, 11.7.

6.3 21.1 19.6 15.7 15.6 24.2 12.4 12.1 10.0 9.2 4.9 6.8 8.9 8.3 6.7 5.9 17.7 8.4 19.2 11.5 12.5 22.9 11.3 13.9 8.5 6.3 23.5 11.1 12.0 16.4. 7.0 14.2 15.3 10.8 10.2 26.5 20.8 14.6 12.0 8.8 16.4 6.2 10.1 16.6 13.1 21.1 16.7 10.2 20.0 7.1 9.0 13.7 12.7 24.1 14.8 19.5 5.7

6.4 5.1, 12.9, 8.9, 14.4, 9.8, 11.8, 24.6, 11.2, 20.0, 7.2, 15.2, 16.8, 15.5, 6.5, 17.0, 12.5, 7.5, 20.3, 17.0, 20.9, 12.7, 20.5, 22.0, 17.0, 8.5, 12.6, 7.0, 27.1, 13.5, 10.7, 15.0, 23.0, 8.7, 15.1, 10.9, 7.5, 14.2, 16.0, 9.0, 11.7, 9.5, 10.3, 7.8, 11.5, 26.7.

6.5 12.0, 14.0, 19.0, 8.5, 6.5, 9.6, 7.6, 16.1, 6.4, 11.9, 15.6, 12.5, 15.6, 20.7, 13.4, 14.0, 11.4, 6.5, 11.4, 11.8, 15.1, 18.9, 10.6, 26.0, 13.2, 10.6, 5.5, 9.9, 6.0, 10.1, 4.3, 21.5, 6.2, 15.5, 14.6, 13.2, 23.8, 22.7, 19.5, 9.3, 9.6, 8.8, 7.8, 14.3, 23.5, 15.2, 7.8, 8.1.

6.6 13.5, 15.4, 15.5, 15.6, 24.0, 11.5, 30.0, 19.0, 13.8, 16.5, 23.2, 19.1, 18.3, 20.5, 10.2, 15.0, 20.5, 13.1, 19.1, 13.6, 19.9, 7.4, 17.5, 12.1, 29.5, 16.5, 21.3, 23.0, 19.5, 16.6, 8.3, 17.8, 17.6, 21.5, 21.7, 6.5, 19.5, 12.6, 11.0, 10.0, 22.9, 25.0, 21.1, 15.1, 19.7, 16.2, 15.3, 24.0, 14.5, 24.3, 8.4, 24.4, 27.1, 16.5.

6.7 22.0, 20.9, 24.5, 13.1, 16.8, 16.1, 12.4, 20.5, 23.8, 17.0, 15.0, 21.7, 13.1, 13.4, 22.0, 18.0, 30.5, 18.8, 20.2, 7.1, 21.5, 20.3, 19.5, 15.7, 19.6, 19.5, 12.5, 8.8, 20.2, 17.1, 25.0, 13.6, 18.3, 24.4, 8.8, 19.5, 24.1, 15.9, 23.4, 16.1, 17.0, 14.3, 20.9, 27.0, 10.3, 10.5.

6.8 9.2, 8.8, 1.5, 2.7, 19.0, 2.3, 0.1, 0.6, 6.3, 11.0, 10.4, 3.2, 15.4, 3.8, 2.1, 3.1, 10.1, 16.2, 0.6, 5.0, 7.1, 9.4, 13.3, 14.5, 12.3, 11.3, 0.2, 8.6, 13.5, 4.6, 4.4, 9.5, 15.5, 14.8, 23.8, 19.1, 17.0, 5.1, 6.1, 8.5, 6.2, 3.0, 5.0, 0.1, 3.7, 20.3, 19.2, 5.8, 21.4, 0.8, 0.3, 3.1, 16.8, 0.5.

6.9 7.1, 16.2, 22.1, 30.1, 20.3, 15.2, 12.5, 21.0, 17.0, 15.8, 24.2, 10.8, 21.8, 25.1, 13.0, 15.8, 16.2, 21.9, 16.8, 8.8, 27.7, 13.0, 20.3, 14.4, 20.4, 19.6, 13.7, 30.5, 13.6, 18.2, 19.6, 23.5, 16.8, 10.5, 19.6, 22.1, 24.3, 8.9, 18.7, 19.5, 17.2, 25.3, 20.0, 18.1, 21.1, 12.6.

6.10 19.9, 11.8, 15.2, 20.4, 13.1, 13.8, 27.0, 20.4, 11.8, 25.0, 23.5, 19.5, 17.7, 10.5, 16.5, 18.4, 30.0, 16.3, 21.4, 23.7, 17.5, 22.8, 10.1, 6.6, 15.5, 29.6, 21.6, 8.4, 19.1, 15.6, 21.4, 16.5, 24.5, 16.6, 23.1, 13.0, 19.1, 15.2, 24.6, 12.5, 19.6, 19.0, 19.6, 21.7, 7.5, 11.0, 14.4, 23.8, 15.5, 16.3, 8.3, 17.7, 17.9.

6.11 16.0, 7.8, 11.6, 6.4, 10.5, 20.7, 12.0, 8.8, 6.3, 13.1, 8.1, 16.1, 15.1, 16.0, 6.1, 6.5, 14.0, 9.6, 13.2, 22.6, 14.3, 15.8, 12.2, 19.5, 6.1, 26.7, 10.1, 13.5, 14.7, 4.3, 23.7, 8.0, 20.9, 12.0, 8.2, 13.4, 19.1, 15.0, 8.8, 9.7, 23.8, 10.3, 11.9, 19.1, 5.6, 10.9, 9.8, 9.7.

6.12 0.5, 2.9, 0.7, 11.7, 0.8, 3.3, 21.8, 9.6, 5.8, 0.8, 13.7, 14.8, 9.5, 10.3, 4.6, 4.7, 15.6, 0.3, 6.0, 0.3, 5.1, 19.2, 9.5, 8.5, 14.7, 4.9, 16.8, 23.8, 0.5, 0.4, 6.5, 1.3, 7.1, 6.5, 9.3, 20.7, 3.3, 6.4, 1.7, 5.5, 2.5, 2.4, 3.3, 8.9, 3.2, 6.9, 6.1, 3.8, 0.6, 8.6, 1.1, 8.6, 7.2, 5.2, 0.4, 2.5, 3.9, 23.1, 1.5, 3.5.

6.13 15.6, 14.3, 8.9, 6.7, 6.6, 32.4, 1.8, 8.8, 29.0, 34.2, 4.9, 6.8, 12.6, 6.1, 6.6, 4.1, 11.5, 16.2, 7.6, 3.1, 14.4, 26.5, 1.0, 26.4, 27.5, 0.9, 21.4, 14.7, 5.3, 9.4, 15.3, 11.2, 15.5, 20.9, 20.8, 0.4, 18.1, 9.5, 0.2, 4.0, 13.4, 1.0, 1.7, 1.8, 20.0, 1.7, 18.1, 7.2, 32.4, 5.6, 26.5, 5.5, 14.1, 28.5, 0.2, 0.9, 9.8, 10.9, 21.8, 9.0, 18.0, 10.3, 20.3, 16.2, 21.5, 32.1, 6.7, 4.4, 24.7, 12.2, 3.3, 19.5.

6.14 25.1, 14.8, 9.3, 11.1, 20.9, 14.6, 8.3, 8.2, 19.2, 8.3, 22.4, 10.4, 17.6, 13.5, 7.9, 6.4, 9.5, 6.3, 10.1, 11.5, 19.2, 11.8, 8.2, 8.1, 8.6, 4.0, 6.3, 17.8, 17.2, 9.1, 15.7, 7.1, 6.9, 2.8, 13.5, 14.6, 12.5, 17.4, 8.2, 18.8, 3.8, 4.8, 13.0, 3.9, 5.1, 4.5, 14.4, 13.3, 10.4, 4.8, 12.1, 6.7, 21.6, 7.1, 4.6, 22.2, 10.2, 8.1, 10.5.

6.15 10.1, 8.7, 9.1, 11.2, 6.9, 16.7, 13.2, 24.1, 5.5, 5.6, 10.0, 14.0, 23.5, 5.5, 8.3, 21.1, 12.5, 11.8, 9.0, 8.8, 16.4, 9.9, 12.1, 24.3, 12.3, 27.8, 11.3, 27.1, 19.7, 20.9, 13.6, 12.6, 14.7, 6.8, 16.1, 10.5, 8.2, 5.9, 17.6, 6.5, 15.4, 18.9, 10.0, 4.6, 14.5, 15.4, 15.0, 12.1, 8.2, 13.7, 21.1, 11.4, 10.0, 19.5, 16.5, 6.2.

6.16 1.7, 1.7, 26.6, 20.7, 15.4, 10.0, 18.1, 3.9, 15.3, 29.0, 1.1, 6.8, 27.7, 1.2, 22.0, 14.3, 5.7, 6.8, 1.5, 20.5, 9.0, 18.8, 24.6, 4.0, 8.7, 27.5, 16.2, 34.2, 6.0, 14, 12.2, 3.3, 0.3, 12.6, 0.9, 0.2, 16.2, 4.8, 10.8, 7.1, 22, 15.5, 26.4, 32, 18.1, 21.4, 22, 21.5, 4.4, 8.7, 20.6, 9.5, 5.3, 1.6, 6.5, 14.2, 32.4, 3.2, 11.1, 26.6, 32.5, 6.6, 0.3, 7.5, 9.6, 28.9, 1.1, 14.9, 13.3, 5.5, 11.5, 3, 6.6, 10.4.

6.17 13.2, 11.6, 13, 13.7, 13.8, 20.8, 15.8, 15, 7.6, 16.1, 12.1, 24, 15.1, 11.4, 19.9, 16.9, 21.1, 26.4, 23.1, 17.5, 12.5, 29.3, 12.5, 5.9, 18.5, 12.6, 17.3, 9.3, 9.6, 16, 19.3, 21, 20.9, 14.5, 24, 15.9, 18.4, 28.8, 15.7, 18.3, 19, 19.8, 14.8, 22.3, 13.2, 15.9, 19, 20.3.

6.18 8.8, 17.4, 3.5, 6.8, 15.5, 3.5, 11.5, 6.8, 16.2, 9.6, 6.7, 5.5, 16.5, 5.5, 1.2, 8, 19.7, 0.7, 3.4, 9.3, 1.9, 1, 0.6, 17.2, 24.1, 20.8, 21.9, 23.3, 11, 2.1, 15.3, 19.7, 6.3, 6.4, 0.9, 4.2, 16.1, 9.8, 11.5, 3.2, 4.8, 4.9, 13.8, 8.9, 7.5, 9.8, 13.8, 15, 0.9, 19.5, 12.9, 11.7, 5.4, 0.6, 10.6, 3.5, 2.8, 4.1, 0.5, 2.8.

6.19 18.1, 10, 15.4, 20.7, 26.6, 1.8, 1.7, 6.5, 2.5, 5.4, 0.9, 6.6, 27.5, 1, 21.8, 14.1, 5.5, 1.6, 2.8, 3.3, 16.1, 27.4, 8.6, 3.9, 24.5, 17.9, 8.9, 0.2, 14.8, 7.5, 16, 0.1, 0.8, 12.4, 0.2, 3.1, 12.2, 10.3, 9.5, 0.8, 2.8, 15.2, 26.2, 31.2, 17.5, 2.4, 21.7, 28.9, 11.3, 6.4, 32.1, 14.5, 11, 26.2, 34.1, 4.9, 7, 2.5, 9.2, 1.6, 6.6, 2.5, 34, 14.1, 32.3, 3.7, 6.5, 28.9, 6.1, 15.4.

6.20 16.5, 3.4, 15.4, 2.5, 12.4, 10.7, 3.7, 7, 8.1, 6, 12.2, 1.5, 6.5, 9.1, 18.1, 12.6, 16.4, 7.2, 2.8, 3.1, 13.5, 16.7, 5.2, 8.7, 16.1, 6.9, 9.3, 8.3, 8.8, 11, 24, 6.8, 14.7, 5.4, 9.1, 6.1, 17.9, 20.6, 13.5, 8.2, 3.7, 7.3, 2.4, 10.4, 7.3, 21.3, 7.7, 13.2, 9.1, 9.6, 5.5, 5.3, 7.1, 13.6, 10.1, 5.7, 18.1, 21, 19.6, 4, 11.7.

6.21 15, 9, 21.8, 14.8, 14.5, 12.4, 16.1, 16, 17.3, 12, 18.5, 22.5, 7.3, 21.3, 14.5, 23.8, 15.9, 12.3, 26, 8.7, 11.6, 17.9, 12.8, 25.4, 15, 18.6, 9.4, 13.2, 13.4, 14.6, 10.8, 14.5, 11.7, 16.9, 26.6, 18.5, 14.8, 23.5, 11.1, 29.5, 10.6, 14.8, 16.3, 10.5, 12.4, 13.8, 14.4, 13.7, 9.5, 17.6, 8.5, 9.2, 21.5, 18.5.

6.22 17.1, 14.8, 10, 13.9, 22.8, 0.1, 15, 12.3, 9.8, 23.3, 9.9, 10.9, 11.5, 7.8, 10.1, 9.1, 13, 13.3, 1.6, 9, 12.4, 6.6, 13, 7.7, 14.3, 7, 20.4, 6.5, 12.5, 8.8, 11.3, 9.9, 16.3, 5.4, 3.3, 5.6, 9.7, 6.1, 8.5, 15.1, 7.2, 18, 6, 13.8, 18, 3.6, 7.2, 14.9.

6.23 12.4, 5.8, 6.1, 0.6, 15.4, 3.9, 10.5, 16.8, 2.9, 8.5, 15, 8.1, 7.5, 8.3, 20.3, 10.6, 10.4, 10, 6, 20.1, 0.7, 1.4, 8.1, 2.6, 8.2, 17.5, 5.1, 2.8, 1.6, 4.6, 4.3, 18.7, 12.5, 4.2, 11.2, 2.1, 12.5, 12.6, 9.8, 4.4, 7.2, 1.5, 5.1, 7.2, 19.6, 6.1, 15.5, 24, 6.6, 17.2, 15.9, 5.1, 7.2, 12.2, 9.5, 10.8.

6.24 3.2, 1.7, 3.2, 3.8, 3.9, 10.8, 5.7, 13.2, –0.4, 2.1, 13.8, 5, 1.4, 9.9, 6.9, 11.1, –2.3, 5.8, 2.5, 19.4, –4, 2.1, 8.4, 2.5, 7.2, 9.1, 10.4, 9.2, 10.9, 20.8, 4.6, 14.5, 6.1, 8.6, 18.5, 6.3, 8.4, 9.2, 9.8, 4.8, 12.3, 3.2, 5.9, –0.5, 7.5, 5, 16.5, –2.5, 13.4, 9.1, 7.8, 1.5, 8.7, 6.2.

6.25 1.9, 19.8, 5.5, 9.2, 9.7, 6.6, 9, 12.7, 3.1, –2.4, 19.5, 6.4, 9.7, 2.6, 14.5, –1.7, 5.7, 10.4, 3.1, 13.1, –1.7, 1.1, 14.7, 6.5, 5.4, 13.7, 5.2, 11.7, 11.6, 7.6, 4.5, 5.3, 11.4, –3.5, 11.4, 1.8, 6.5, 7.9, 10.4, 13.9, 9.2, 5.6, 0, 8.4, 9.7, 6.3, 0.2, 7.5, 9, 13.5, 14.6, 17.1, 3.9.

6.26 5, 14.1, 20.2, 27.9, 18.3, 13, 15.1, 18.9, 21.4, 11.1, 13.7, 22.3, 8.7, 19.8, 23, 14.1, 20, 10.4, 12.3, 14.8, 6.9, 25.5, 11.2, 18.3, 17.5, 11.3, 17.5, 18.8, 28.4, 11.5, 16.3, 14.5, 8.5, 17.7, 20.3, 16.9, 10.5, 22.1, 6.9, 17.6, 15.1, 23.2, 18.1, 6, 14, 18.2.

6.27 10.8, 6.7, 13.3, 15.1, 11.8, 2.4, 9.4, 20.3, 19.8, 9.5, 0.6, 3.1, 4.2, 5.6, 11.9, 8.7, 7.9, 9.5, 10.9, 6.9, 14.9, 14.2, –3.1, 9.4, 10, 12.1, 7, 5.7, 6.1, 6.1, –1.4, 3, 3.5, 14.5, 10.7, 17.5, 10.3, 10.1, 3.4, 10.1, 2.4, –1.3, 8.5, 11.9, 0.4, 4.9.

6.28 5.4, 5.3, 5.5, 13.7, 1.8, 19.7, 8.8, 4.4, 14.5, 6.4, 13.3, 8.7, 8.3, 10.3, 0.1, 5.2, 11.4, 9.7, 10.3, 9, 3, 9.7, –2.5, 7.5, 1.9, 14.4, 17.1, 19.4, 6.4, 12.9, 9.1, 6.5, –1.8, 7.7, –3.5, 3.9, 7.6, 11.6, 11.5, 9.6, 2.5, 1, –0.1, –1.8, 3.2, 12.8, 14.6, 11.3, 5.2, 6.4, 5.7, 13.9, 6.5.

6.29 6.8, 8.9, 14.1, 3.7, 1.3, 4.6, 2.8, 11.1, 14.4, 3, 7.2, 10.7, 15.8, 8.3, 8, 6.4, 10, 14, 6.8, 6.7, 5.7, 21.5, 8.3, 5.7, 0.4, –0.8, 15.5, 1.1, 5.2, 0.9, 10.8, 9.5, 8.2, 18.7, 4.4, 4.6, 3.7, 2.9, 1.5, 2.5, 9.2, 19.7, 10.1, 11.1, 1.2, 4.8, 17.5, 5.4.

6.30 1.2, –3.1, 6.7, 3.2, 6.5, 1.9, 2.3, 9.6, 0.1, 2.6, 0.1, 1.5, 11.2, 0.2, 4.1, 13.6, –3.4, –1.6, 3.6, 17.2, 11.2, 9.6, –1.1, –4.3, –3.5, 5.2, –4, 9.9, 1.3, 12.7, –0.7, –4.4, 6.7, 4.6, –5.2, 4.9, –3, 6.3, 2.7, 14.5, 0.7, –2.5, 7.8, –3.3, 5.6, 5.5, 2.3, –1.7, 3.9, 0.1, –0.9, –1.4, 14.2, 0, 2.1, 9.2.

12. Решение типового варианта контрольной работы 6

Задача 1. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит не менее чем на три из четырех положенных ему вопросов. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет?

Введем обозначения A — студент сдал зачет, A_1 — студент ответил на 4 вопроса, A_2 — студент ответил на 3 вопроса. Тогда $A = A_1 \bigcup A_2$. События A_1 и A_2 являются несовместными, поэтому $P(A_1 \bigcup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$.

$$P(A_1) = \frac{C_{20}^4}{C_{25}^4}, \quad C_{20}^4 = \frac{20!}{4!(20-4)!} = \frac{20!}{4!\,16!} = \frac{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 4845.$$

$$C_{25}^4 = \frac{25!}{4!(25-4)!} = \frac{25!}{4!\,21!} = \frac{22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12650, \quad P(A_1) = \frac{4845}{12650} \approx 0,383.$$

$$P(A_2) = \frac{C_{20}^3 \cdot C_5^1}{C_{25}^4} = \frac{C_{20}^3 \cdot 5}{C_{25}^4}, \quad C_{20}^3 = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20!}{3!\,17!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140.$$

$$P(A_2) = \frac{1140 \cdot 5}{12650} = \frac{5700}{12650} \approx 0,45,$$

в итоге получаем $P(A_1 \bigcup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \approx 0,383 + 0,45 = 0,833.$

Задача 2. В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

Введем обозначения: событие A — извлечен белый шар. Возможны следующие гипотезы о первоначальном составе шаров:

H_1 — нет белых шаров, H_2 — один белый шар, H_3 — два белых шара. Данные гипотезы образуют полную группу, поэтому в силу формулы полной вероятности имеем:

$$P(A) = P(H_1)P(A\,|H_1) + P(H_2)P(A\,|H_2) + P(H_3)P(A\,|H_3).$$

Так как по условию все гипотезы равновероятны и $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3) = 1$, то

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$$

. Вычислим теперь условные вероятности.

Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар при условии, что первоначально в урне не было белых шаров,

$$P(A\,|H_1) = \frac{1}{3}.$$

Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар при условии, что первоначально в урне был один белый шар,

$$P(A\,|H_2) = \frac{2}{3}.$$

Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар при условии, что первоначально в урне было два белых шара,

$$P(A\,|H_3) = 1.$$

Окончательно получаем

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Задача 3. По данному закону распределения случайной величины X найти $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$.

x_i	-1	0	2	3
p_i	0.1	0.3	?	0.4

, $Y = 2X + 5.$

Используя условие $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$, найдем неизвестное значение p_3:

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2 - p_4 = 0.2.$$

По определению

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = (-1) \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.4 = 1.5,$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = (-1)^2 \cdot 0.1 + 0^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.2 + 3^2 \cdot 0.4 = 4.5,$$

откуда

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 4.5 - (1.5)^2 = 4.5 - 2.25 = 1.75.$$

По свойствам математического ожидания и дисперсии получаем:

$$M(Y) = M(2X + 5) = 2M(X) + 5 = 2 \cdot 1.5 + 5 = 8,$$

$$D(Y) = D(2X + 5) = 4D(X) = 4 \cdot 1.75 = 7,$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{7} \approx 2,6457.$$

Задача 4. Определить при каком значении параметра C заданная функция $f(x)$ является функцией плотности распределения случайной величины. Найти функцию распределения $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $P(a < X < b)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^9}, & x > 1; \\ 0, & x \leqslant 1. \end{cases} \quad a = 0,\, b = \sqrt{2}.$$

Для нахождения постоянного параметра C воспользуемся условием нормировки плотности распределения $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. Тогда для заданной функции получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = C\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^9} = \left(-\frac{C}{8x^8}\right)\Bigg|_1^{+\infty} = -C\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{8x^8} + \frac{C}{8} = 0 + \frac{C}{8} = 1,$$

откуда $C = 8$.

Найдем функцию распределения $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$.

Если $x \leqslant 1$, то $f(x) = 0$, следовательно,

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0.$$

Если $x > 1$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int\limits_{1}^{x} \frac{8\,dx}{x^9} = \left(-\frac{8}{8x^8}\right)\Bigg|_1^{x} = -\frac{1}{x^8} + 1.$$

Таким образом, искомая функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^8}, & x > 1; \\ 0, & x \leqslant 1, \end{cases}$$

тогда

$$P(0 < X < \sqrt{2}) = F(\sqrt{2}) - F(0) = \left(1 - \frac{1}{(\sqrt{2})^8}\right) - 0 = \frac{15}{16}.$$

По определению

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = 8\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^9} = \left(-\frac{8}{7x^7}\right)\Bigg|_1^{+\infty} = \frac{8}{7},$$

$$M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)\,dx = 8\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^9} = \left(-\frac{8}{6x^6}\right)\Bigg|_1^{+\infty} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3},$$

откуда

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{4}{3} - \frac{64}{49} = \frac{4}{147},$$

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{4}{147}} = \frac{2}{7\sqrt{3}}.$$

График функции плотности $f(x)$.

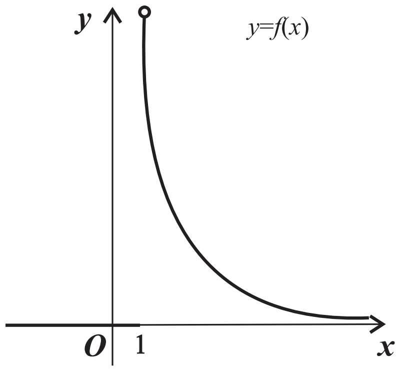
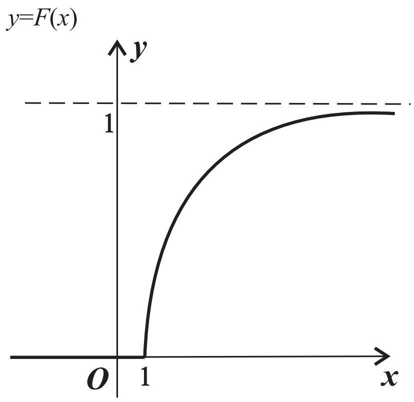


График функции распределения $F(x)$.



Задача 5. Случайная величина X распределена по нормальному закону с $M(X) = 20,\ D(X) = 900$. Найти $P(10 < X < 70)$.

Воспользуемся формулой:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right),$$

где $m = M(X)$, $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{D(X)}$, $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt$ — интеграл Лапласа. Для заданных значений имеем

$$P(10 < X < 70) = \Phi\left(\frac{70 - 20}{30}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 20}{30}\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right).$$

По таблице значений для интеграла Лапласа находим:

$$\Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = -\Phi\left(\frac{1}{3}\right) \approx \Phi\,(0,33) = -0,12930, \Phi\left(\frac{5}{3}\right) \approx \Phi\,(1,663) = 0,45154,$$

откуда окончательно получаем

$$P(10 < X < 70) \approx 0,58084.$$

Задача 6. Даны результаты наблюдений случайной величины X. Разделив интервал значений X на десять равных частей, построить группировку, гистограмму, эмпирическую функцию распределения, найти оценки математического ожидания и дисперсии исследуемой случайной величины. На основе этих построений выдвинуть гипотезу о законе распределения X и на графике гистограммы изобразить выравнивающую кривую. На уровне значимости $\alpha = 0.02$ по критерию Колмогорова установить согласие или несогласие выдвинутой гипотезы с результатами наблюдений.

6.2, 10.2, 18.1, 6.2, 16.1, 22.8, 12.0, 20.0, 6.5, 7.1, 12.3, 20.4, 8.5, 16.8, 25.0, 13.5, 19.5, 10.0, 7.4, 14.5, 23.1, 11.5, 18.2, 7.9, 16.2, 22.0, 11.8, 8.1, 16.7, 24.3, 14.0, 21.5, 9.1, 17.5, 26.0, 13.4, 7.8, 8.6, 10.8, 13.2, 6.4, 9.6, 7.8, 9.8, 10.5, 6.0, 6.5, 10.7, 13.8, 8.8, 9.5, 10.6, 8.0, 10.0, 12.0, 6.9, 7.2, 8.6, 8.5, 6.9.

Объем данной выборки (то есть число объектов в выборке) равен $n = 60$. Выберем из имеющихся результатов наблюдения максимальную $x^*_{\max}$ и минимальную $x^*_{\min}$ варианты: $x^*_{\max} = 26.0$, $x^*_{\min} = 6.0$, тогда размах выборки $R = x^*_{\max} - x^*_{\min} = 26.0 - 6.0 = 20$. Разделим весь полученный диапазон наблюдаемых значений на 10 равных частей. Получим разряды $\Delta_j = [z_{j-1};\ z_j]$, $j = 1, ..., 10$, $z_0 = x^*_{\min}$, $z_{10} = x^*_{\max}$, причем длина каждого разряда равна $h = \frac{R}{10} = \frac{20}{10} = 2$. Распределим компоненты выборки по десяти разрядам длины $h = 2$:

$\Delta_1 = [\,6;\ 8\,]$: 6.2; 7,1; 7.9; 6.5; 7.8; 6.4; 7.8; 6.0; 6.5; 8.0; 6.9; 7.2; 7.4; 6.2; 6.9;

$\Delta_2 = [\,8;\ 10]$: 8.1; 8.5; 9.1; 10.0; 8.6; 9.6; 9.8; 8.8; 9.5; 10.0; 8.6; 8.5;

$\Delta_3 = [10;\ 12]$: 10.2; 11.5; 12.0; 11.8; 10.8; 10.5; 10.7; 10.6; 12.0;

$\Delta_4 = [12;\ 14]$: 12.3; 14.0; 13.5; 13.4; 13.2; 13.8;

$\Delta_5 = [14;\ 16]$: 14.5; 16.1; 16.2;

$\Delta_6 = [16;\ 18]$: 16.7; 16.8; 17.5;

$\Delta_7 = [18;\ 20]$: 18.1; 18,2; 20.0; 19.5;

$\Delta_8 = [20;\ 22]$: 20.4; 21.5; 22.0;

$\Delta_9 = [22;\ 24]$: 23.1; 22.8;

$\Delta_{10} = [24;\ 26]$: 24.3; 25.0; 26.0.

Построим группировку.

Δ_j	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7	Δ_8	Δ_9	Δ_{10}
z_j^*	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
m_j	15	12	9	6	3	3	4	3	2	3
$\frac{m_j}{nh}$	$\frac{15}{120}$	$\frac{12}{120}$	$\frac{9}{120}$	$\frac{6}{120}$	$\frac{3}{120}$	$\frac{3}{120}$	$\frac{4}{120}$	$\frac{3}{120}$	$\frac{2}{120}$	$\frac{3}{120}$
$\frac{m_j}{nh} \approx$	0.125	0.1	0.075	0.05	0.025	0.025	0.033	0.025	0.016	0.025
m_j^*	15	27	36	42	45	48	52	55	57	60
π_j^*	$\frac{15}{60}$	$\frac{27}{60}$	$\frac{36}{60}$	$\frac{42}{60}$	$\frac{45}{60}$	$\frac{48}{60}$	$\frac{52}{60}$	$\frac{55}{60}$	$\frac{57}{60}$	1
$\pi_j^* \approx$	0.25	0.45	0.6	0.7	0.75	0.8	0.866	0.916	0.95	1

В таблице приняты следующие обозначения: m_j — частота разряда Δ_j, то есть количество вариант выборки, попавших в j–й разряд; z_j^* — середины разрядов; $m_j^* = m_1 + m_2 + ... + m_j$ — накопленные частоты разрядов.

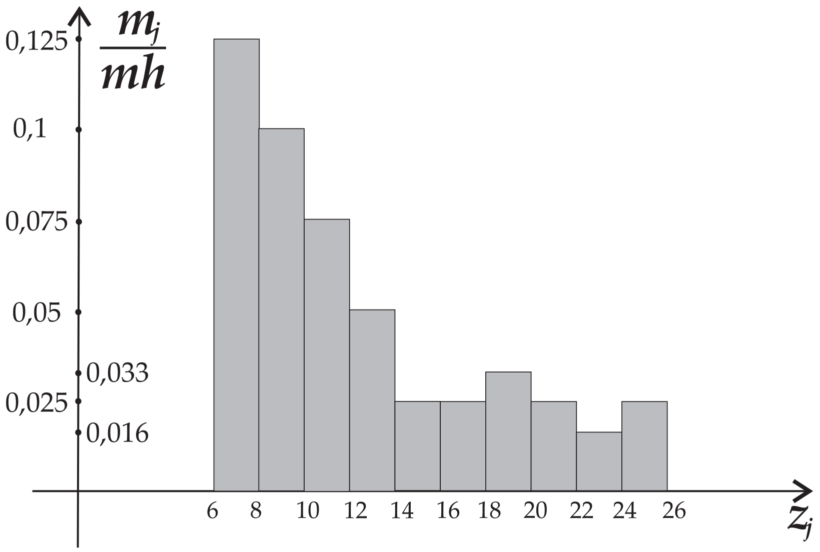
Величины

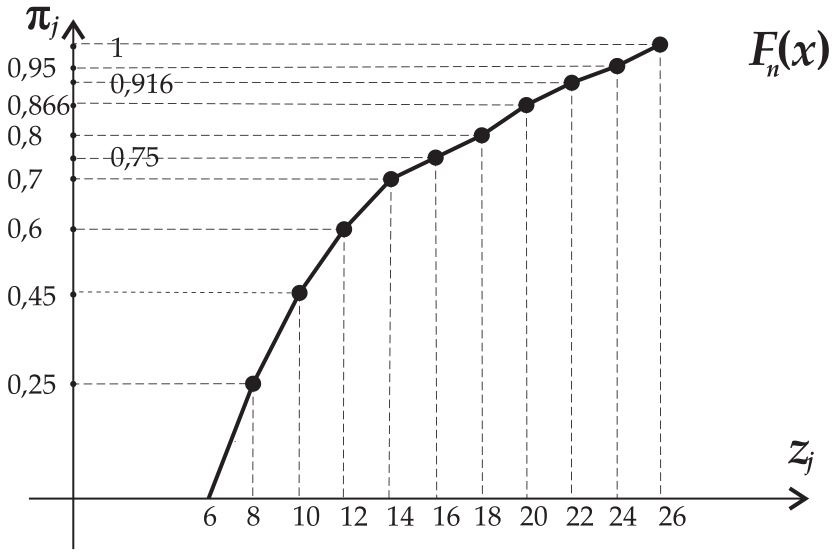
$$\pi_j^* = \frac{m_j^*}{n}, \ j = 1, ..., 10,$$

называются накопленными частостями разрядов и используются для построения эмпирической функции распределения $F_n(z)$, в точках z_j, $j = 0, ..., 10$, являющихся границами разрядов, полагают

$$F_n(z_0) = 0, \ \ F_n(z_1) = \pi_1^*, \ \ F_n(z_2) = \pi_2^*, \ \ ..., \ \ F_n(z_{10}) = \pi_{10}^* = 1.$$

На основе проведенных вычислений строим гистограмму и эмпирическую функцию распределения.





Далее найдем оценки математического ожидания и дисперсии исследуемой случайной величины.

В качестве оценки математического ожидания возьмем выборочное среднее:

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} = m_j z_j^*,$$

а в качестве оценки дисперсии — выборочную дисперсию:

$$S_n^{(2)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} m_j (z_j^* - M_n)^2.$$

Все промежуточные вычисления удобно заносить в таблицу:

Δ_j	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7	Δ_8	Δ_9	Δ_{10}
z_j^*	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
m_j	15	12	9	6	3	3	4	3	2	3
$m_j z_j^*$	105	108	99	78	45	51	76	63	46	75
$\sum m_j z_j^*$	746									
M_n	12.43									
$z_j^* - M_n$	-5.43	-3.43	-1.43	0.57	2.57	4.57	6.57	8.57	10.57	12.57
$(z_j^* - M_n)^2$	29.484	11.764	2.044	0.324	6.604	20.884	43.164	73.444	111.724	158.004
$m_j(...)^2$	442.273	141.1788	18.404	1.949	19.814	62.657	172.659	220.334	223.449	474.014
$\sum m_j(...)^2$	1776.733									
$S_n^{(2)}$	29.612									

Построим далее выравнивающую кривую гистограммы. Исходя из вида гистограммы и графика эмпирической функции, можно предположить, что неизвестное распределение случайной величины X подчиняется показательному закону с некоторым неизвестным параметром λ.

В качестве оценки λ можно принять величину $\dfrac{1}{M_n}$, тогда теоретическая плотность распределения будет иметь вид

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ (x \geqslant 0),$$

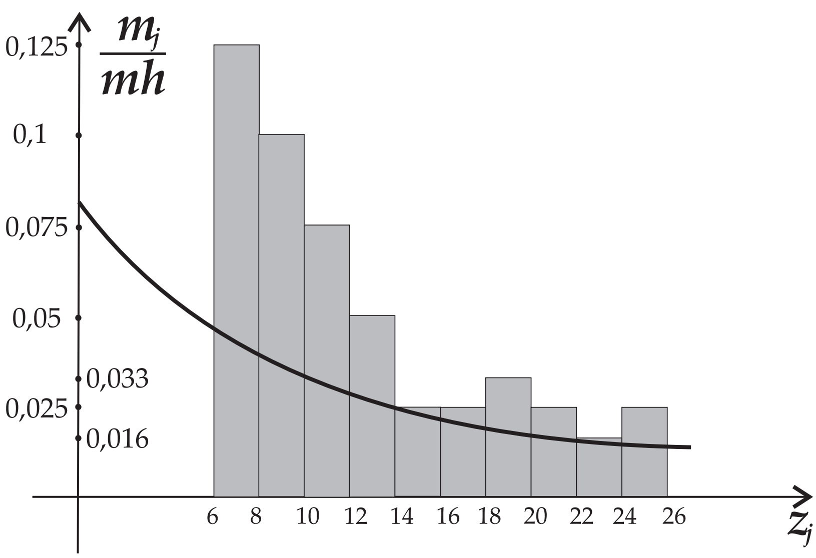
где

$$\lambda = \frac{1}{12.43} \approx 0.08.$$

Строим график функции

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

при выбранном параметре λ и накладываем его на гистограмму, получаем выравнивающую кривую гистограммы:



Проверим в условиях данной задачи с помощью критерия Колмогорова при условии значимости $\alpha = 0.02$ гипотезу о том, что случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 0.08$ (пример проверки гипотезы о нормальном распределении см. [4]).

Для этого вычислим статистику Колмогорова по формуле

$$\theta_k(\vec{x}_n) = \max_{j=0,\ldots,10} \delta_j;$$

$$\delta_j = |F_n(z_j) - F_0(z_j)|,$$

где F_n — эмпирическая функция распределения, $F_0 = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$ — теоретическая функция распределения.

j	z_j	$F_0(z_j)$	$F_n(z_j)$	δ_j
0	6	0.3812	0	0.3812
1	8	0.4727	0.25	0.2227
2	10	0.5506	0.45	0.1006
3	12	0.6171	0.6	0.017
4	14	0.6737	0.7	0.0263
5	16	0.7219	0.75	0.0281
6	18	0.7630	0.8	0.0369
7	20	0.7981	0.866	0.0679
8	22	0.8279	0.916	0.0881
9	24	0.8533	0.95	0.0967
10	26	0.8750	1	0.125

Откуда получаем

$$\theta_k(\vec{x}_n) = \max_{j=0,\ldots,10} \delta_j = 0.3812.$$

Найдем критическое значение статистики Колмогорова при уровне значимости $\alpha = 0.02$:

$$C_\alpha = K_{n,\,1-\alpha} = K_{60,\,0.98} \approx \frac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \approx \frac{z_{0.98}}{\sqrt{60}}.$$

По таблице значений функции Колмогорова находим $z_{0.98}$ из условия

$$K(z_{0.98}) = 0.98, \text{ откуда } z_{0.98} = 1.51,$$

следовательно,

$$C_\alpha = K_{n,\,1-\alpha} = \frac{1.51}{7.7458} \approx 0.1949.$$

Так как

$$\theta_k(\vec{x}_n) = 0.3812 > 0.1949 = C_\alpha,$$

то выдвинутую гипотезу отвергаем.

13. Контрольная работа 7

Задача 1. Пользуясь условиями Коши–Римана, установить дифференцируемость функции $f(z)$ и найти $f'(z_0)$.

1.1	$f(z) = z^2 + e^z,$	$z_0 = 0.$	**1.2**	$f(z) = e^{iz+1},$	$z_0 = 0.$
1.3	$f(z) = z + \sin z,$	$z_0 = 0.$	**1.4**	$f(z) = \sin z,$	$z_0 = 0.$
1.5	$f(z) = z^{-1},$	$z_0 = 1.$	**1.6**	$f(z) = z^2 e^z,$	$z_0 = 0.$
1.7	$f(z) = \dfrac{z^3 - 2iz + i}{z},$	$z_0 = i.$	**1.8**	$f(z) = z^2 + 2z,$	$z_0 = i.$
1.9	$f(z) = \dfrac{i}{z} + iz,$	$z_0 = 1.$	**1.10**	$f(z) = ze^{iz},$	$z_0 = 0.$
1.11	$f(z) = z \sin z,$	$z_0 = -1.$	**1.12**	$f(z) = (z+i)\cos z,$	$z_0 = 0.$
1.13	$f(z) = z^3 + e^z,$	$z_0 = 0.$	**1.14**	$f(z) = e^z,$	$z_0 = i.$
1.15	$f(z) = z \cos z,$	$z_0 = 0.$	**1.16**	$f(z) = z^3,$	$z_0 = 0.$
1.17	$f(z) = z^4,$	$z_0 = i.$	**1.18**	$f(z) = z\cos z + z,$	$z_0 = 0.$
1.19	$f(z) = z \sin z + z,$	$z_0 = 1.$	**1.20**	$f(z) = z + \dfrac{1}{z},$	$z_0 = 1.$
1.21	$f(z) = z^2 \sin z,$	$z_0 = 0.$	**1.22**	$f(z) = z^3 - 2iz,$	$z_0 = 0.$
1.23	$f(z) = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z},$	$z_0 = 1.$	**1.24**	$f(z) = (z+1)e^{iz},$	$z_0 = 0.$
1.25	$f(z) = (z^2+1)e^z,$	$z_0 = 0.$	**1.26**	$f(z) = z^2 + e^{iz},$	$z_0 = i.$
1.27	$f(z) = ze^{iz+1},$	$z_0 = i.$	**1.28**	$f(z) = (z+i)e^z,$	$z_0 = 0.$

1.29 $f(z) = z^2 + 2iz, \qquad z_0 = 0.$ **1.30** $f(z) = (z+i)^2, \qquad z_0 = 0.$

Задача 2. Вычислить интеграл, используя вычеты.

2.1 $$\oint\limits_{|z+2i|=3} \left(e^{\frac{1}{z+i}} + \frac{7}{z(z^2+4)} \right) dz.$$

2.2 $$\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \left(\sin\frac{2}{z} + \frac{2}{(z-i)^2(z+4)} \right) dz.$$

2.3 $$\oint\limits_{|z+i|=2} \left(\cos\left(1+\frac{1}{z}\right) + \frac{z}{(z^2-z-2)^2} \right) dz.$$

2.4 $$\oint\limits_{|z|=2} \left(z^2 \sin\frac{1}{z^3} + \frac{4}{z^2(z-3i)} \right) dz.$$

2.5 $$\oint\limits_{|z-i|=2} \left(e^{\frac{1}{z-1}} + \frac{5}{z^2(z^2+4)} \right) dz.$$

2.6 $$\oint\limits_{|z-\pi|=3} \left(\operatorname{sh}\frac{1}{z-1} + \frac{z+3}{(z^2+4z)^2} \right) dz.$$

2.7 $$\oint\limits_{|z-1-i|=\frac{3}{2}} \left(z\operatorname{ch}\frac{1}{z-2} + \frac{2}{z(z^2-4)^2} \right) dz.$$

2.8 $$\oint\limits_{|z|=3} \left(\frac{2}{z+i}\cos\frac{1}{z+i} + \frac{4}{(z^2+6z+8)^2} \right) dz.$$

2.9 $$\oint\limits_{|z+2|=2} \left((z+3)\sin\frac{1}{z-1} + \frac{5}{(z+1+i)(z^2-4)^2} \right) dz.$$

2.10 $$\oint\limits_{|z+1+i|=\frac{3}{2}} \left(z \operatorname{sh} \frac{1}{z-i} + \frac{z-4}{(z^2-4)^2} \right) dz.$$

2.11 $$\oint\limits_{|z-1|=2} \left(z \operatorname{ch} \frac{1}{z-1-i} + \frac{z+3}{(z^2-4)} \right) dz.$$

2.12 $$\oint\limits_{|z|=2} \left(z \sin \left(1 + \frac{1}{z} \right) + \frac{4}{(z^2-2z-3)^2} \right) dz.$$

2.13 $$\oint\limits_{|z-1|=3} \left(e^{\frac{1}{z-1-i}} + \frac{2z+3}{z^2+25} \right) dz.$$

2.14 $$\oint\limits_{|z+2i|=3} \left(z \cos \frac{1}{z} + \frac{2}{(z-i+1)^2} \right) dz.$$

2.15 $$\oint\limits_{|z-2|=3} \left(e^{1-\frac{1}{z+i}} + \frac{z}{(z^2-z-2)^2} \right) dz.$$

2.16 $$\oint\limits_{|z-i|=3} \left(\cos \left(1 - \frac{1}{z} \right) + \frac{7}{(z+i)^2(z-4)} \right) dz.$$

2.17 $$\oint\limits_{|z+i|=2} \left((z+2)e^{\frac{1}{z}} + \frac{2z}{(z+1)^2(z+3i)} \right) dz.$$

2.18 $$\oint\limits_{|z+i|=\frac{3}{2}} \left(\sin \left(2 - \frac{1}{z+1} \right) + \frac{2}{z^2(z^2+z-2)} \right) dz.$$

2.19 $$\oint\limits_{|z+2|=\frac{3}{2}} \left(z e^{\frac{3}{z+2}} + \frac{4}{(z+1)^2(4z^2-9)} \right) dz.$$

2.20 $$\oint\limits_{|z-1|=2} \left(\operatorname{sh}\left(1+\frac{1}{z-2}\right)+\frac{1}{(z+i)^2(z^2-4z)}\right)dz.$$

2.21 $$\oint\limits_{|z-3i|=5} \left(\operatorname{ch}\left(2+\frac{i}{z-i}\right)+\frac{5}{z^2(z^2-4z-5)}\right)dz.$$

2.22 $$\oint\limits_{|z+5i|=7} \left(\frac{3}{z}e^{\frac{1}{z^2}}+\frac{z}{(z-2)(z-i)^2}\right)dz.$$

2.23 $$\oint\limits_{|z-i|=3} \left(\sin\frac{1}{z+i}+\frac{2}{z^2(z^2+z-12)}\right)dz.$$

2.24 $$\oint\limits_{|z+1|=3} \left(\cos\frac{1}{z-2i}+\frac{6}{z(z^2-2z-8)^2}\right)dz.$$

2.25 $$\oint\limits_{|z+i|=3} \left(\frac{2}{z}\operatorname{ch}\frac{1}{z}+\frac{4}{(z^2+9)^2(z+i)}\right)dz.$$

2.26 $$\oint\limits_{|z-1|=3} \left(z^2\sin\frac{3}{z}+\frac{3}{(z^2-9)^2(z-1-i)}\right)dz.$$

2.27 $$\oint\limits_{|z-\pi i|=3} \left(e^{\frac{2}{z-\pi i}}+\frac{z+6}{z^2(z+1+i)}\right)dz.$$

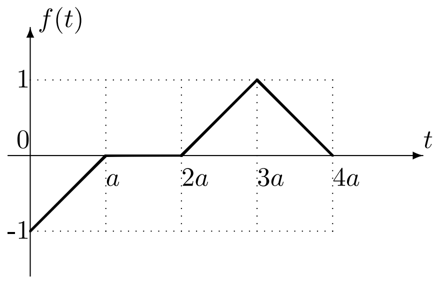
2.28 $$\oint\limits_{|z|=2} \left(\frac{3}{z}+z\cos\frac{1}{z}+\frac{2}{(z-1)(z^2+2z-3)^2}\right)dz.$$

2.29 $$\oint\limits_{|z-1+i|=2} \left(\operatorname{sh}\frac{1}{z+i}+\frac{z-2}{(z^4-16)^2}\right)dz.$$

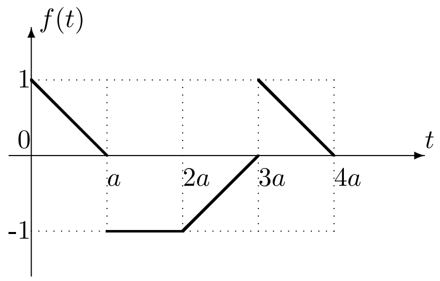
2.30 $$\oint\limits_{|z-2|=3} \left((z+1)e^{\frac{1}{z}}+\frac{z}{(z^2-8z+12)^2}\right)dz.$$

Задача 3 Найти изображение функции, заданной графически.

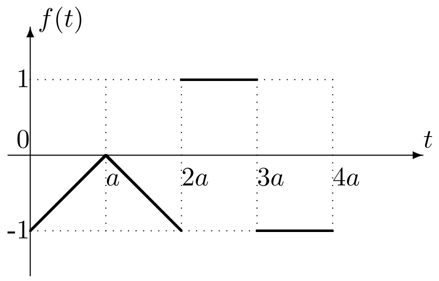
3.1



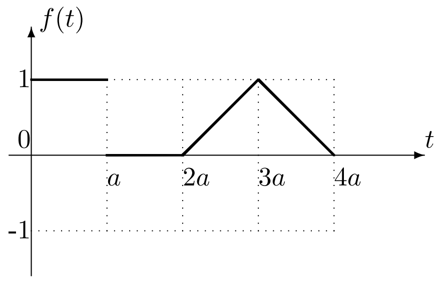
3.2



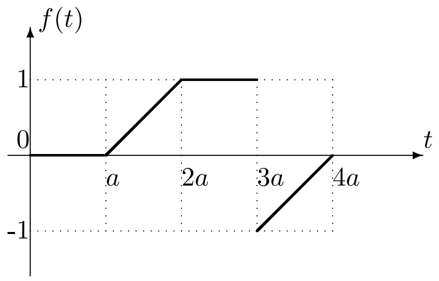
3.3



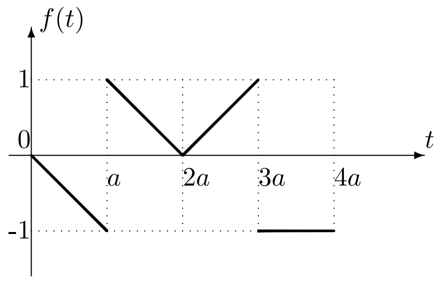
3.4



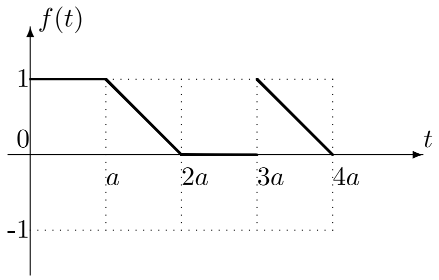
3.5



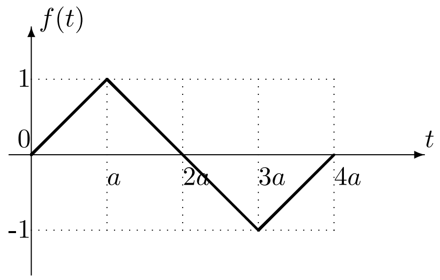
3.6



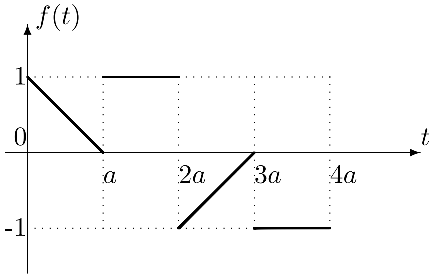
3.7



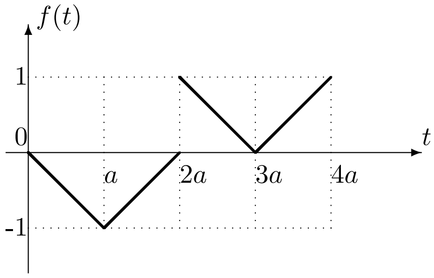
3.8



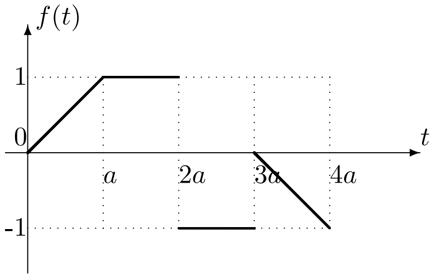
3.9



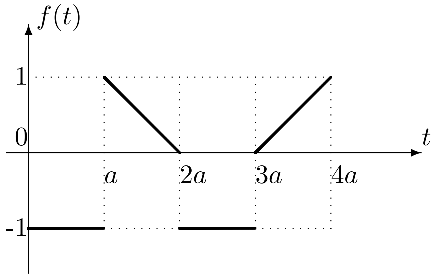
3.10



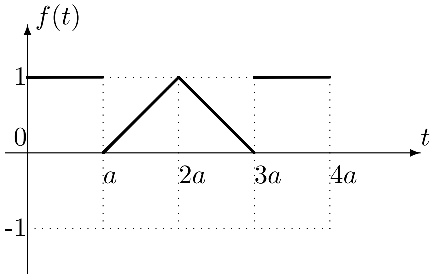
3.11



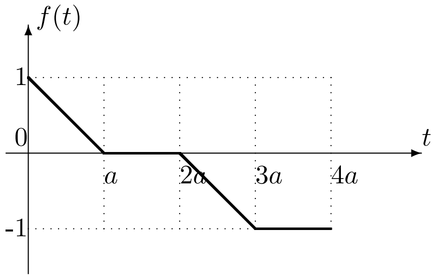
3.12



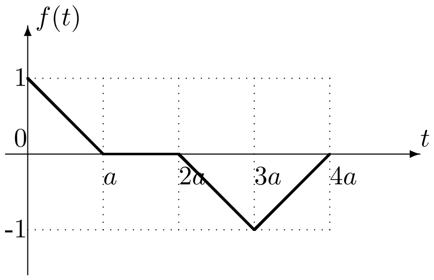
3.13



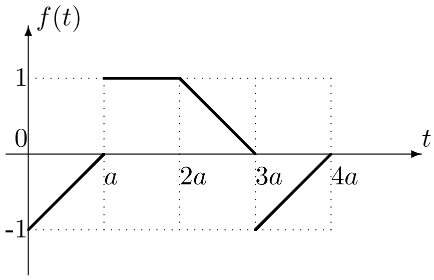
3.14



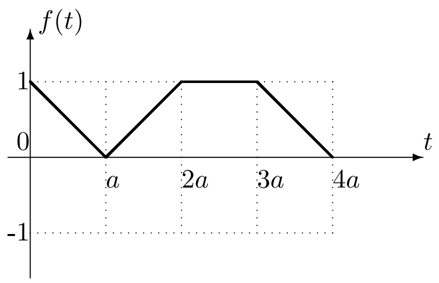
3.15



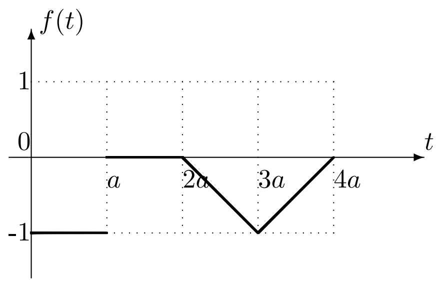
3.16



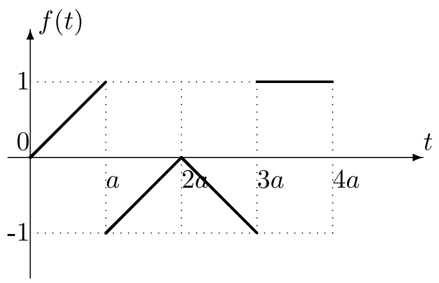
3.17



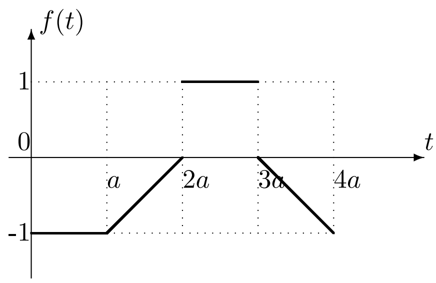
3.18



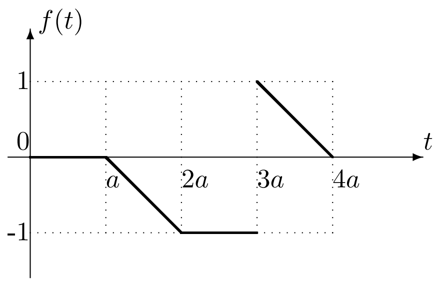
3.19



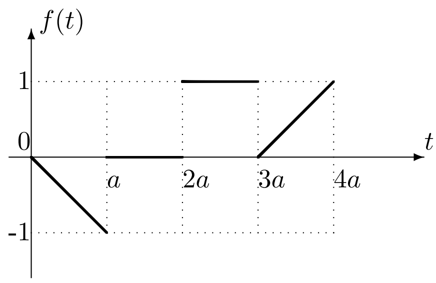
3.20



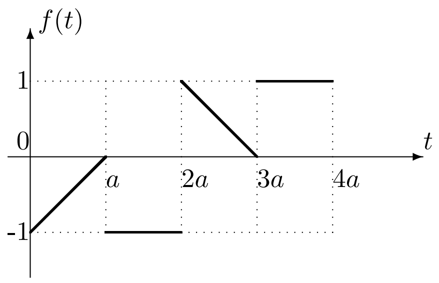
3.21



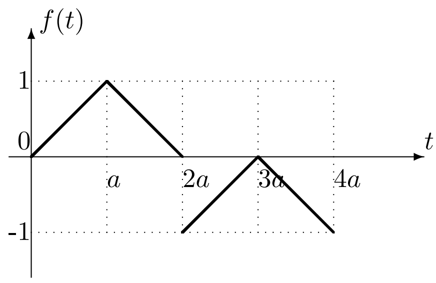
3.22



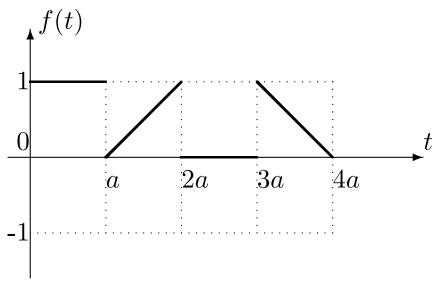
3.23



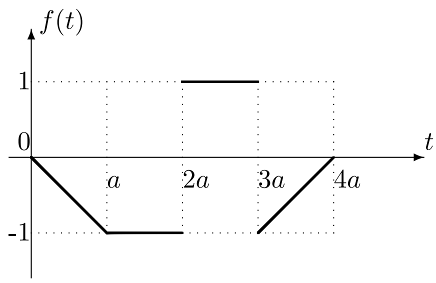
3.24



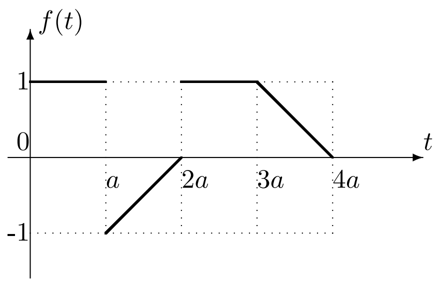
3.25



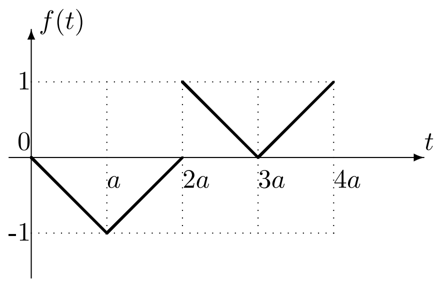
3.26



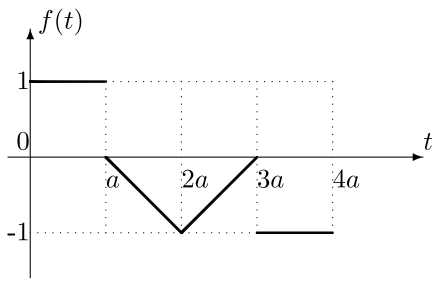
3.27



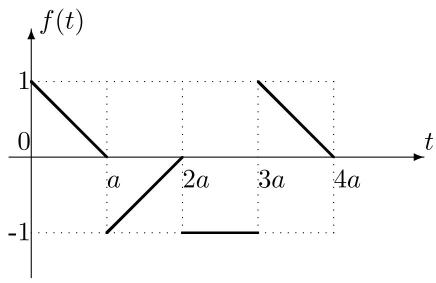
3.28



3.29



3.30



Задача 4. Найти решение задачи Коши, используя метод операционного исчисления.

4.1 $x'' + 4x = \cos t,\quad x(0) = 1,\quad x'(0) = 2.$

4.2 $x'' - 4x = t^2 + 6t - 2,\quad x(0) = 0,\quad x'(0) = 0.$

4.3 $x'' - 7x' + 6x = 5e^t,\quad x(0) = 1,\quad x'(0) = -1.$

4.4 $x'' + 2x' + 5x = 3\cos t,\quad x(0) = 0,\quad x'(0) = 0.$

4.5 $x'' + 4x' + 4x = 5e^{-2t},\quad x(0) = -1,\quad x'(0) = 1.$

4.6 $x'' + x = t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2.$

4.7 $x'' + 6x' = t^2 - 5t - 1, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = -2.$

4.8 $x'' - x = te^t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$

4.9 $x'' - 2x' + 2x = te^t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$

4.10 $x'' - 3x' + 2x = te^{2t}, \quad x(0) = -2, \quad x'(0) = -2.$

4.11 $x'' - 2x' + 5x = \cos 3t, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 2.$

4.12 $x'' + 6x' + 9x = 5e^{-3t}, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = -2.$

4.13 $x'' + 4x' - 12x = 5\sin 3t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$

4.14 $x'' - 2x' = t^2 - 3t, \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = 3.$

4.15 $x'' + 2x' = te^{-2t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$

4.16 $x'' - 4x' + 4x = 5te^{-2t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$

4.17 $x'' + 2x' + x = 5e^{-t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 3.$

4.18 $x'' + 2x' + 5x = te^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$

4.19 $x'' - 2x' + 5x = \sin 2t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

4.20 $x'' - 4x' = t^2 - 3, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$

4.21 $x'' + 4x' = 3e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$

4.22 $x'' - 6x' + 9x = \cos 3t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

4.23 $x'' - 7x' - 8x = t^2 + 3t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$

4.24 $x'' + 7x' - 8x = 2e^{-t}, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 1.$

4.25 $x'' - 5x' + 4x = e^{-t}, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0.$

4.26 $x'' + 5x' + 4x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2.$

4.27 $x'' - 9x' + 20x = t^2 - 5, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$

4.28 $x'' - x' - 20x = t^2 + 5t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$

4.29 $x'' - 9x = \cos 3t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$

4.30 $x'' + 9x = \sin 2t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2.$

Задача 5. Методом операционного исчисления найти частное решение заданной системы дифференциальных уравнений.

5.1 $\begin{cases} x' = 8x - 6y, \\ y' = 7x - 5y, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

5.2 $\begin{cases} x' = -7x + y, \\ y' = -2x - 5y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

5.3 $\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$

5.4 $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$

5.5 $\begin{cases} x' = 4x + 4y, \\ y' = 6x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$

5.6 $\begin{cases} x' = 3x + 8y, \\ y' = x + y, \end{cases}$ $x(0) = -3, \quad y(0) = 1.$

5.7 $\begin{cases} x' = -5x - 2y, \\ y' = -4x - 3y, \end{cases}$ $x(0) = 4, \quad y(0) = 2.$

5.8 $\begin{cases} x' = 6x - 8y, \\ y' = 3x - 5y, \end{cases}$ $x(0) = -2, \quad y(0) = 1.$

5.9 $\begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = -2x + 8y, \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = -1.$

5.10 $\begin{cases} x' = -4x - 4y, \\ y' = -6x - 2y, \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 4.$

5.11 $\begin{cases} x' = -x - 7y, \\ y' = -5x - 3y, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 3.$

5.12 $\begin{cases} x' = -5x - 3y, \\ y' = -8x - 3y, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$

5.13 $\begin{cases} x' = -7x + 4y, \\ y' = 5x - 8y, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 5.$

5.14 $\begin{cases} x' = 2x + 6y, \\ y' = 4x + 4y, \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 2.$

5.15 $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 8x + 3y, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$

5.16 $\begin{cases} x' = 3x + 5y, \\ y' = x - y, \end{cases}$ $x(0) = 3, \quad y(0) = 1.$

5.17 $\begin{cases} x' = -3x - 4y, \\ y' = -2x - 5y, \end{cases}$ $x(0) = 4,\quad y(0) = 2.$

5.18 $\begin{cases} x' = -5x + 3y, \\ y' = -8x + 6y, \end{cases}$ $x(0) = -4,\quad y(0) = 1.$

5.19 $\begin{cases} x' = 8x - 2y, \\ y' = 2x + 3y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\quad y(0) = 4.$

5.20 $\begin{cases} x' = -2x - 6y, \\ y' = -4x - 4y, \end{cases}$ $x(0) = -1,\quad y(0) = -2.$

5.21 $\begin{cases} x' = -3x - 5y, \\ y' = -7x - y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\quad y(0) = 2.$

5.22 $\begin{cases} x' = -3x - 8y, \\ y' = -3x - 5y, \end{cases}$ $x(0) = -3,\quad y(0) = 3.$

5.23 $\begin{cases} x' = -5x + y, \\ y' = -2x - 7y, \end{cases}$ $x(0) = -2,\quad y(0) = 4.$

5.24 $\begin{cases} x' = 4x + 4y, \\ y' = -6x - 7y, \end{cases}$ $x(0) = -1,\quad y(0) = 3.$

5.25 $\begin{cases} x' = -7x + 4y, \\ y' = -6x + 4y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\quad y(0) = -2.$

5.26 $\begin{cases} x' = 5x, \\ y' = 2x - 8y, \end{cases}$ $x(0) = 3,\quad y(0) = -1.$

5.27 $\begin{cases} x' = -8x, \\ y' = 4x + 5y, \end{cases}$ $x(0) = 2,\quad y(0) = 1.$

5.28 $\begin{cases} x' = 5x - 5y, \\ y' = 6x - 8y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \quad y(0) = 5.$

5.29 $\begin{cases} x' = -8x - 5y, \\ y' = 6x + 5y, \end{cases}$ $\quad x(0) = -1, \quad y(0) = -3.$

5.30 $\begin{cases} x' = 5x - 11y, \\ y' = 2x - 8y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = -3.$

14. Решение типового варианта контрольной работы 7

Задача 1. Пользуясь условиями Коши–Римана, установить дифференцируемость функции $f(z)$ и найти $f'(z_0)$, если $f(z) = e^z$ и $z_0 = 0$.

Найдем действительную и мнимую части функции e^z, используя определение показательной функции:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \ z = x + iy.$$

Получаем $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = e^x \cos y$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = e^x \sin y$.

Найдем частные производные

$$u'_x(x, y) = e^x \cos y, \ v'_y(x, y) = e^x \cos y,$$

$$u'_y(x, y) = -e^x \sin y, \ v'_x(x, y) = e^x \sin y.$$

Частные производные непрерывны всюду, следовательно, функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ всюду дифференцируемы.

Условия Коши–Римана

$$u'_x(x, y) = v'_y(x, y), \ u'_y(x, y) = -v'_x(x, y)$$

выполняются в любой точке (x, y) плоскости, следовательно, функция e^z дифференцируема и аналитична во всех точках $z \in \mathbf{C}$.

Вычислим производную функции $f(z) = e^z$ по формуле

$$f'(z) = u'_x(x, y) + iv'_x(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z,$$

тогда

$$f'(z_0) = e^0 = 1.$$

Задача 2. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-1|=2} \left(ze^{\frac{5}{z}} + \frac{1}{z^2(z-2)(z+3)} \right) dz$, используя вычеты.

Используя свойства интегралов, запишем

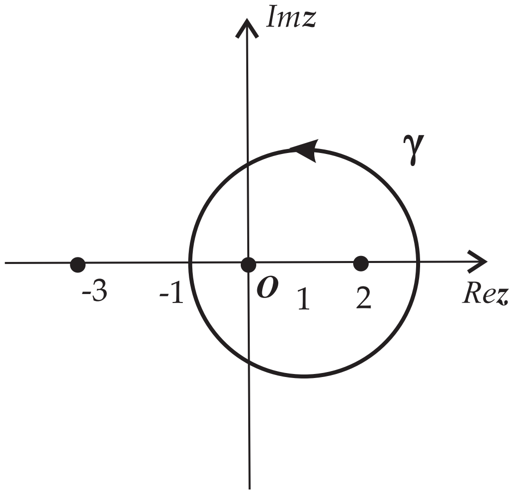
$$\oint\limits_{|z-1|=2} \left(ze^{\frac{5}{z}} + \frac{1}{z^2(z-2)(z+3)} \right) dz = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \oint\limits_{|z-1|=2} ze^{\frac{5}{z}}\, dz,$$

$$I_2 = \oint\limits_{|z-1|=2} \frac{1}{z^2(z-2)(z+3)}\, dz,$$

контур интегрирования $|z-1| = 2$ — окружность γ с центром в точке $C(1,0)$ радиуса 2.



Вычислим I_1, применяя первую теорему о вычетах. Функция $f_1(z) = ze^{\frac{5}{z}}$ не определена в точке $z = 0$, следовательно, она является особой изолированной точкой $f_1(z)$ и, кроме того, $z = 0$ лежит внутри контура γ. Покажем, что $z = 0$ — существенно особая точка $f_1(z)$. Для этого разложим в ряд Лорана функцию $f_1(z)$ по степеням z

$$ze^{\frac{5}{z}} = z + 5 + \frac{5^2}{2!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{5^3}{3!} \cdot \frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{5^n}{n!} \cdot \frac{1}{z^{n-1}} + \ldots .$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число ненулевых членов, следовательно, $z = 0$ — существенно особая точка, более того, из полученного разложения найдем вычет функции $f_1(z)$ в точке $z = 0$ (коэффициент c_{-1} при множителе $\frac{1}{z}$)

$$\operatorname*{res}_{z=0} f_1(z) = \frac{5^2}{2!}.$$

Согласно первой теореме о вычетах, получим

$$I_1 = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f_1(z) = 2\pi i \frac{5^2}{2!} = 25\pi i.$$

Далее вычислим I_2. Функция $f_2(z) = \dfrac{1}{z^2(z-2)(z+3)}$ имеет три особых изолированных точки $z = 0$, $z = 2$ и $z = -3$. В точках $z = 0$ и $z = 2$ найдем вычеты функции $f_2(z)$, так как они лежат внутри контура γ.

Функцию $f_2(z)$ запишем в виде

$$f_2(z) = \frac{1}{z^2(z-2)(z+3)} = \frac{\frac{1}{(z-2)(z+3)}}{z^2},$$

где $\varphi(z) = \frac{1}{(z-2)(z+3)}$ — аналитическая функция в окрестности 0 и $\varphi(0) \neq 0$, следовательно, $z = 0$ является полюсом второго порядка. Поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=0} f_2(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 0} \Big(f_2(z) z^2\Big)' = \lim_{z\to 0} \left(\frac{1}{(z-2)(z+3)}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 0} -\frac{2z+1}{(z-2)^2(z+3)^2} = -\frac{1}{36}.$$

Записывая функцию $f_2(z)$ в виде

$$f_2(z) = \frac{1}{z^2(z-2)(z+3)} = \frac{\frac{1}{z^2(z+3)}}{z-2},$$

где $\varphi(z) = \frac{1}{z^2(z+3)}$ — аналитическая функция в окрестности 2 и $\varphi(2) \neq 0$, получим, что $z = 2$ — простой полюс, и

$$\operatorname*{res}_{z=2} f_2(z) = \lim_{z\to 2} f_2(z)(z-2) = \lim_{z\to 2} \frac{1}{z^2(z+3)} = \frac{1}{20}.$$

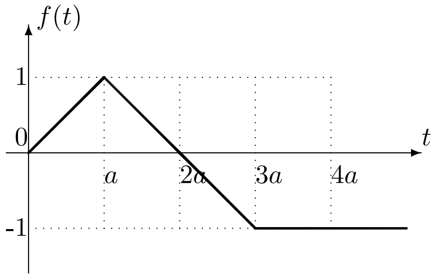
Применяя первую теорему о вычетах, найдем второй интеграл

$$I_2 = 2\pi i(\operatorname*{res}_{z=0} f_2(z) + \operatorname*{res}_{z=2} f_2(z)) = 2\pi i(-\frac{1}{36} + \frac{1}{20}) = \frac{2\pi i}{45}.$$

Таким образом, получаем

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \left(ze^{\frac{5}{z}} + \frac{1}{z^2(z-2)(z+3)} \right) dz = I_1 + I_2 = 25\pi i + \frac{2\pi i}{45} = \frac{1127}{45}\pi i.$$

Задача 3. Найти изображение функции, заданной графически.



Запишем $f(t)$ в виде

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t),$$

где

$$f_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}t, \ t \in [0, a) \\ 0, \ t \notin [0, a) \end{cases}, \ f_2(t) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{a}t, \ t \in [a, 3a) \\ 0, \ t \notin [a, 3a) \end{cases},$$

$$f_3(t) = \begin{cases} -1, \ t \geqslant 3a \\ 0, \ t < 3a \end{cases},$$

или

$$f_1(t) = \frac{1}{a}t(\eta(t) - \eta(t-a)) = \frac{1}{a}t\eta(t) - \frac{1}{a}(t-a)\eta(t-a) - \eta(t-a),$$

$$f_2(t) = \left(2 - \frac{1}{a}t\right)(\eta(t-a) - \eta(t-3a)) =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{a}((t-a)+a)\right)\eta(t-a) - \left(2 - \frac{1}{a}((t-3a)+3a)\right)\eta(t-3a)) =$$

$$= \eta(t-a) - \frac{1}{a}(t-a)\eta(t-a) + \eta(t-3a) + \frac{1}{a}(t-3a)\eta(t-3a),$$

$$f_3(t) = -\eta(t-3a).$$

Таким образом,

$$f(t) = \frac{1}{a}t\eta(t) - \frac{1}{a}(t-a)\eta(t-a) - \eta(t-a) + \eta(t-a) - \frac{1}{a}(t-a)\eta(t-a) + \eta(t-3a) +$$

$$+ \frac{1}{a}(t-3a)\eta(t-3a) - \eta(t-3a) = \frac{1}{a}t\eta(t) - \frac{2}{a}(t-a)\eta(t-a) + \frac{1}{a}(t-3a)\eta(t-3a).$$

Применяя теорему запаздывания и формулы соответствия, получим

$$t\eta(t) \doteqdot \frac{1}{p^2},\ (t-a)\eta(t-a) \doteqdot \frac{e^{-ap}}{p^2},\ (t-3a)\eta(t-3a) \doteqdot \frac{e^{-3ap}}{p^2}.$$

Тогда по свойству линейности окончательно получаем

$$f(t) \doteqdot \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{p^2} - \frac{2}{a}\cdot\frac{e^{-pa}}{p^2} + \frac{1}{a}\cdot\frac{e^{-3ap}}{p^2}.$$

Задача 4. Найти решение задачи Коши, используя метод операционного исчисления

$$x'' - 2x' - 3x = e^{4t},\ x(0) = x'(0) = 0.$$

Пусть $x(t) \doteqdot X(p)$.

Тогда

$$x' \doteqdot pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$x'' \doteqdot p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p\cdot 0 - 0 = p^2X(p),$$

$$e^{4t} \doteqdot \frac{1}{p-4}.$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение, получаем операторное уравнение:

$$p^2X(p) - 2pX(p) - 3X(p) = \frac{1}{p-4},$$

$$(p^2 - 2p - 3)X(p) = \frac{1}{p-4},$$

откуда

$$X(p) = \frac{1}{(p^2-2p-3)(p-4)} = \frac{1}{(p-3)(p+1)(p-4)}.$$

Разложим правильную рациональную дробь $X(p)$ на сумму простейших дробей

$$X(p) = \frac{A}{p-3} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p-4}.$$

Найдем неопределенные коэффициенты A, B, C. Для этого приведем дроби, стоящие в правой части, к общему знаменателю:

$$\frac{1}{(p-3)(p+1)(p-4)} = \frac{A(p+1)(p-4) + B(p-3)(p-4) + C(p-3)(p+1)}{(p-3)(p+1)(p-4)}.$$

Так как у равных дробей знаменатели равны, следовательно, должны быть равны и числители, то есть

$$1 = A(p+1)(p-4) + B(p-3)(p-4) + C(p-3)(p+1).$$

Подставляя в полученное равенство нули знаменателя, найдем $A,\ B,\ C$, то есть

$$p=-1: \quad 1 = B(-1-3)(-1-4),\ B = \frac{1}{20},$$

$$p=3: \quad 1 = A(3+1)(3-4),\ A = -\frac{1}{4},$$

$$p=4: \quad 1 = C(4-3)(4+1),\ C = \frac{1}{5}.$$

Тогда

$$X(p) = -\frac{1}{4}\frac{1}{(p-3)} + \frac{1}{20}\frac{1}{(p+1)} + \frac{1}{5}\frac{1}{(p-4)} \doteqdot -\frac{1}{4}e^{3t} + \frac{1}{20}e^{-t} + \frac{1}{5}e^{4t} = x(t).$$

Таким образом, решением задачи Коши является функция

$$x(t) = -\frac{1}{4}e^{3t} + \frac{1}{20}e^{-t} + \frac{1}{5}e^{4t}.$$

Задача 5. Методом операционного исчисления найти частное решение заданной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases},\ x(0) = 0,\ y(0) = 4.$$

Пусть $x(t) \doteqdot X(p)$, $y(t) \doteqdot Y(p)$,

$$x' \doteqdot pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$y' \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p) - 4.$$

Получим систему линейных уравненинний относительно $X(p)$ и $Y(p)$:

$$\begin{cases} pX(p) = 2X(p) + Y(p) \\ pY(p) - 4 = 3X(p) + 4Y(p) \end{cases},$$

или

$$\begin{cases} (p-2)X(p) - Y(p) = 0 \\ -3X(p) + (p-4)Y(p) = 4 \end{cases}.$$

Решим эту систему с помощью метода Крамера (метода определителей). Составим определитель из коэффициентов при неизвестных и вычислим его:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-2 & -1 \\ -3 & p-4 \end{vmatrix} = (p-2)(p-4) - 3 = p^2 - 6p + 5 = (p-1)(p-5).$$

Найдем определители Δ_X и Δ_Y, которые получаются из Δ, заменой, соответственно, первого и второго столца Δ на столбец свободных членов, то есть

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & p-4 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} p-2 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4(p-2).$$

Тогда

$$X(p) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{4}{(p-1)(p-5)},$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{4(p-2)}{(p-1)(p-5)}.$$

Разложим $X(p) = \dfrac{4}{(p-1)(p-5)}$ на сумму простейших дробей:

$$X(p) = \frac{4}{(p-1)(p-5)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-5} = \frac{A(p-5) + B(p-1)}{(p-1)(p-5)},$$

отсюда

$$4 = A(p-5) + B(p-1).$$

Подставим в это равенство корни знаменателя, получим

$$p = 1: \quad 4 = A(1-5),\ A = -1,$$

$$p = 5: \quad 4 = B(5-1),\ B = 1.$$

Тогда

$$X(p) = \frac{4}{(p-1)(p-5)} = -\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-5} \risingdotseq -e^t + e^{5t} = x(t).$$

Аналогично, разложим $Y(p) = \dfrac{4(p-2)}{(p-1)(p-5)}$ на сумму простейших дробей:

$$Y(p) = \frac{4(p-2)}{(p-1)(p-5)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-5} = \frac{A(p-5) + B(p-1)}{(p-1)(p-5)},$$

отсюда

$$4(p-2) = A(p-5) + B(p-1).$$

Подставим в это равенство корни знаменателя, получим

$$p = 1: \quad -4 = A(1-5),\ A = 1,$$

$$p = 5: \quad 12 = B(5-1),\ B = 3.$$

Тогда

$$Y(p) = \frac{4(p-2)}{(p-1)(p-5)} = \frac{1}{p-1} + 3\frac{1}{p-5} \risingdotseq e^t + 3e^{5t} = y(t).$$

Таким образом, нашли решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x(t) = -e^t + e^{5t} \\ y(t) = e^t + 3e^{5t} \end{cases}.$$

Правила выполнения контрольных работ

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставить поля 4–5 см для замечаний рецензента.

2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, шифр, номер контрольной работы, название дисциплины. В конце работы следует поставить дату ее выполнения.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи, а также задачи не своего варианта, считаются не зачтенными.

4. Решения задач должны располагаться в порядке возрастания номеров задач.

5. Перед решением каждой задачи необходимо полностью выписать ее условия.

6. После получения прорецензированной незачтенной работы студент должен исправить все ошибки и выполнить все рекомендации рецензента в той же тетради.

7. Номер варианта контрольной работы определяется по последним двум цифрам номера зачетной книжки студента и соответствует этим двум цифрам, если они образуют число от 01 до 30. Если же число больше 30, то номер варианта равен остатку после деления этого числа на 30. Если же в остатке получился 0, тогда ваш вариант 30.

Заключение

Данное учебное пособие охватывает все основные разделы высшей математики, которые преподаются студентам заочного отделения технических специальностей в НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Авторы надеются, что оно будет полезным студентам при самостоятельном выполнении своих контрольных работ. Данное пособие рекомендуется использовать в совокупности с комплексом учебно-методических материалов для студентов заочной и дистанционной форм.

Список литературы

1. Высшая математика: контрольные работы 1, 2 для студентов–заочников/ НГТУ; сост.: Р.П. Зюзина, М.Г. Ефимова — Нижний Новгород, 2003.

2. Высшая математика: контрольные работы 3, 4 для студентов–заочников/ НГТУ; сост.: Т.А. Горева, М.Г. Ефимова, Р.П. Зюзина, А.Н. Мошкова, Е.А. Чернова — Нижний Новгород, 2003.

3. Высшая математика: контрольные работы 5, 6 для студентов–заочников/ НГТУ; сост.: М.Г. Ефимова, Р.П. Зюзина, А.В. Лебедева, С.В. Решетняк, И.П. Рязанцева, Д.Н. Туляков — Нижний Новгород, 2003.

4. Высшая математика: контрольные работы 7, 8, 9 для студентов–заочников/ НГТУ; сост.: В.И. Голинько, И.В. Кольчик, Р.Е. Мазова, Н.В. Полухин, Г.В. Потемин, И.П. Рязанцева — Нижний Новгород, 2003.

5. Шипачев, В.С. Курс высшей математики/ В.С. Шипачев — М. : Оникс, 2007.

6. Бугров, Я.С. Высшая математика.Т.3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного/ Я.С. Бугров — М.: Дрофа, 2004.

7. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике/ Д.Т. Письменный — Айрис-пресс, 2009.

8. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1, 2 /П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова — М. : Оникс XXI век; Мир и образование, 2007.

9. Высшая математика. Ч.1. Ч.2. Ч.3. Ч.4, т.1. Ч.4, т.2/ А.В. Лебедева, С.В. Решетняк , И.В. Кольчик, А.В. Чернов — Нижний Новгород: НГТУ.

10. Кратные интегралы: учеб. пособие/ А.А. Куркин [и др.]; Нижегород. гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева. — Нижний Новгород, 2014.

11. Теория вероятностей и элементы математической статистики/ Н.С. Гоберник [и др.]; Нижегород. гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева. — Нижний Новгород, 2013.

12. Высшая математика. Ч. 1 - 3: сборник заданий для студентов заочной и ускоренной формы обучения всех технических специальностей/ НГТУ; сост.: И.В. Кольчик, Е.В. Фролагина — Нижний Новгород, 2013.

КОЛЬЧИК Ирина Викторовна
КУРКИН Андрей Александрович
ЛИСАЧЕНКО Ирина Владимировна
ФРОЛАГИНА Елена Владимировна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.
Контрольные работы для студентов заочной формы обучения всех технических специальностей

Редактор **Н.Н. Максимова**
Компьютерный набор и верстка: **И.В. Лисаченко, Е.В. Фролагина**

Подписано в печать 21.08.2014. Формат 60×84 .Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 10.
Тираж 300 экз. Заказ .

Нижегородский государственный технический
университет им. Р.Е. Алексеева.
Типография НГТУ.
Адрес университета и полиграфического предприятия:
603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.