Д. Т. ПИСЬМЕННЫЙ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Полный курс

Высшее образование

Д.Т.ПИСЬМЕННЫЙ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Высшее образование

9-е издание

МОСКВА
АЙРИС ПРЕСС
2009

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73-2
П35

Серийное оформление *А. М. Драговой*

Письменный, Д. Т.

П35 Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. — 9-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2009. — 608 с.: ил. — (Высшее образование).

ISBN 978-5-8112-3775-3

Настоящий курс лекций предназначен для студентов, изучающих высшую математику в том или ином объеме в различных учебных заведениях.

Книга содержит необходимый материал по всем разделам курса высшей математики (линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия, основы математического анализа), которые обычно изучаются студентами на первом и втором курсах вуза, а также дополнительные главы, необходимые при изучении специальных курсов (двойные, тройные, криволинейные и поверхностные интегралы, дифференциальные уравнения, элементы теории поля и теории функций комплексного переменного, основы операционного исчисления).

Доступный, но строгий с научной точки зрения язык изложения, а также большое количество примеров и задач позволят студентам освоить курс высшей математики и эффективно подготовиться к сдаче зачетов и экзаменов.

ББК 22.1я73-2
УДК 51(075.8)

ISBN 978-5-8112-3775-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Глава IV. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Глава V. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Глава VI. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Глава VII. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Глава VIII. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Глава IX. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава X. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Глава XI. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Глава XII. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Глава XIII. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Глава XIV. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Глава XV. РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Глава XVI. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Глава XVII. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Глава XVIII. ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие предназначено, в первую очередь, для студентов инженерно-технических специальностей; может быть полезным для всех категорий студентов, изучающих в том или ином объеме высшую математику. Оно представляет собой конспект лекций и адресовано, в основном, студентам первого и второго курсов. Набор освещаемых вопросов хорошо виден из оглавления.

Данный конспект содержит необходимый материал по всем разделам курса высшей математики и дополнительным главам, необходимым при изучении специальных курсов. Изложение теоретического материала по всем темам сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач, ведется на доступном, по возможности строгом языке.

Пособие может быть использовано студентами также для самостоятельного изучения соответствующего материала, является базой для подготовки к семестровым зачетам и экзаменам по высшей математике.

Кроме того, книга должна помочь студенту и в тех случаях, когда он что-то не успел записать на лекции, какие-то лекции были пропущены, в чем-то трудно (или нет времени) разобраться по другим учебникам, когда некоторые вопросы «слишком длинны» в его конспектах или много фактического материала, который следует изучить за ограниченное количество недель, дней.

Автор надеется, что данный курс лекций будет полезен и преподавателям, а использование данного пособия будет способствовать более глубокому изучению студентами курса высшей математики и смежных дисциплин.

Список обозначений:

◔ ● — начало и конец решения примера или задачи;

❏ ■ — начало и конец доказательства;

 — важные определения;

 — «обратите особое внимание!»

В рамку заключены формулы, которые важно помнить.

Глава I. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Лекции 1–3

§ 1. МАТРИЦЫ

1.1. Основные понятия

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, сокращенно, $A = (a_{ij})$, где $i = \overline{1,m}$ (т. е. $i = 1, 2, 3, \dots, m$) — номер строки, $j = \overline{1,n}$ (т. е. $j = 1, 2, 3, \dots, n$) — номер столбца.

Матрицу A называют матрицей *размера* $m \times n$ и пишут $A_{m\times n}$. Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее *элементами*. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют *главную диагональ*.

Матрицы ***равны между собой***, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т. е.

$$A = B, \quad \text{если } a_{ij} = b_{ij}, \quad \text{где } i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется ***квадратной***. Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют матрицей ***n-го порядка***.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется ***единичной***. Обозначается буквой E.

Пример 1.1.

$$E_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— единичная матрица 3-го порядка.

$$E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & 1 \end{pmatrix}.$$

— единичная матрица n-го порядка.

Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой***. Обозначается буквой O. Имеет вид

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В матричном исчислении матрицы O и E играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется ***вектором*** (или вектор-столбец, или вектор-строка соответственно). Их вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad B = (b_1\ b_2\ \dots\ b_n).$$

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т. е. $(5)_{1\times 1}$ есть 5.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей ***транспонированной*** к данной. Обозначается A^T.

Так, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $A^T = (1\ 0)$.

Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $(A^T)^T = A$.

1.2. Действия над матрицами

Сложение

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$). Записывают $C = A + B$.

Пример 1.2.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется *разность матриц*.

Умножение на число

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на число* k называется матрица $B_{m\times n} = (b_{ij})$ такая, что $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$) Записывают $B = k \cdot A$.

Пример 1.3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \; k = 2, \; A \cdot k = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Матрица $-A = (-1) \cdot A$ называется *противоположной матрице* A.

Разность матриц $A - B$ можно определить так: $A - B = A + (-B)$.

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими *свойствами:*

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + O = A$;
4. $A - A = O$;
5. $1 \cdot A = A$;
6 $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$,
7. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$;
8. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$,

где A, B, C — матрицы, α и β — числа.

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
- прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Две матрицы A и B называются ***эквивалентными***, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается $A \sim B$.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют *канонической*, например

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.4. Привести к каноническому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \\ \quad\;\; 5 \quad\;\; 2 \quad\; 3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

●

Произведение матриц

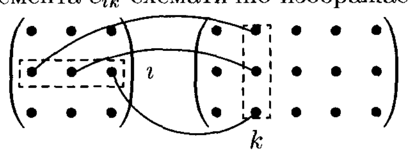
Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда *число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.*

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на матрицу* $B_{n\times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p} = (c_{ik})$ такая, что

$$c_{ik} = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}, \quad \text{где } i = \overline{1,m},\ k = \overline{1,p},$$

т. е. элемент i-й строки и k-го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.

Получение элемента c_{ik} схематично изображается так:



Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведения AB и BA всегда существуют. Легко показать, что $A\cdot E = E\cdot A = A$, где A — квадратная матрица, E — единичная матрица того же размера.

Пример 1.5. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2} =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

Пример 1.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда произведение $A \cdot B$ не определено, так как число столбцов матрицы A (3) не совпадает с числом строк матрицы B (2). При этом определено произведение $B \times A$, которое считают следующим образом:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B называются *перестановочными*, если $AB = BA$.

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $A \cdot (B + C) = AB + AC$;
3. $(A + B) \cdot C = AC + BC$;
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$,

если, конечно, написанные суммы и произведения матриц имеют смысл.

Для операции транспонирования верны свойства:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
2. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

§ 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

2.1. Основные понятия

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число $\det A$ (или $|A|$, или Δ), называемое ее *определителем*, следующим образом:

1. $n = 1$. $A = (a_1)$; $\det A = a_1$.

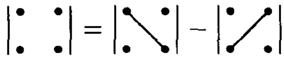
2. $n = 2$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

3. $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Определитель матрицы A также называют ее *детерминантом*. Правило вычисления детерминанта для матрицы порядка N является довольно сложным для восприятия и применения. Однако известны методы, позволяющие реализовать вычисление определителей высоких порядков на основе определителей низших порядков. Один из методов основан на свойстве разложения определителя по элементам некоторого ряда (с. 23, свойство 7). При этом заметим, что определители невысоких порядков (1, 2, 3) желательно уметь вычислять согласно определению.

Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой:



Пример 2.1. Найти определители матриц

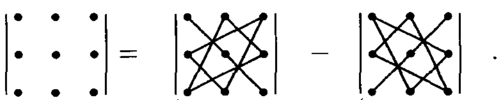
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

❍ Решение:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 5\cdot(-3) = 12 - (-15) = 27;$$

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \qquad \bullet$$

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться *правилом треугольников* (или Саррюса), которое символически можно записать так:



(основания равнобедренных треугольников параллельны главной диагонали)

(основания треугольников параллельны побочной диагонали)

Пример 2.2. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

❍ Решение:

$$\det A =$$
$$= 5\cdot 1\cdot(-3) + (-2)\cdot(-4)\cdot 6 + 3\cdot 0\cdot 1 - 6\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot(-2)\cdot(-3) - 0\cdot(-4)\cdot 5 =$$
$$= -15 + 48 - 6 - 18 = 48 - 39 = 9. \qquad \bullet$$

2.2. Свойства определителей

Сформулируем основные свойства определителей, присущие определителям всех порядков. Некоторые из этих свойств поясним на определителях 3-го порядка.

Свойство 1 («Равноправность строк и столбцов»). Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот.

Иными словами,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем строки и столбцы будем просто называть *рядами определителя.*

Свойство 2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.

Свойство 3. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

Свойство 4. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

Из свойств 3 и 4 следует, что *если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.*

❏ Действительно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0. \qquad \blacksquare$$

Свойство 5. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

Свойство 6 («Элементарные преобразования определителя»). Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.

Пример 2.3. Доказать, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+k\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+k\cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+k\cdot a_{32} \end{vmatrix}.$$

○ Решение: Действительно, используя свойства 5, 4 и 3, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+k\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+k\cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+k\cdot a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = \Delta + k\cdot 0 = \Delta. \quad ●$$

Дальнейшие свойства определителей связаны с понятиями минора и алгебраического дополнения.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $n-1$-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается m_{ij}.

Так, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \text{то} \quad m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i+j$ — четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная. Обозначается A_{ij}: $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot m_{ij}$.

Так, $A_{11} = +m_{11}$, $A_{32} = -m_{32}$.

Свойство 7 («Разложение определителя по элементам некоторого ряда»). Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Проиллюстрируем и одновременно докажем свойство 7 на примере определителя 3-его порядка. В этом случае свойство 7 означает, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13}.$$

□ В самом деле, имеем

$$a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} =$$

$$= a_{11}\cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\cdot\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{13}\cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta. \quad ■$$

Свойство 7 содержит в себе способ вычисления определителей высоких порядков.

Пример 2.4. Вычислите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

○ Решение: Для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, т. к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 5 \\ 7 \\ 5 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ 7 \end{matrix} & \begin{matrix} 8 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (7 \cdot 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 \cdot 2 + 5 \cdot 7 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 7 \cdot 7 \cdot 2 - 5 \cdot 0 \cdot 4) +$$
$$+ (5 \cdot 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 \cdot 2 + 5 \cdot 7 \cdot 8 - (-1) \cdot 3 \cdot 8 - 5 \cdot 7 \cdot 4 - 5 \cdot 7 \cdot 2) -$$
$$- (5 \cdot 0 \cdot 2 + 7 \cdot 1 \cdot 5 + 7 \cdot 3 \cdot 8 - 5 \cdot 0 \cdot 8 - 3 \cdot 1 \cdot 5 - 7 \cdot 7 \cdot 2) = 122.$$ ●

Свойство 8. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Так, например, $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$.

§ 3. НЕВЫРОЖДЕННЫЕ МАТРИЦЫ

3.1. Основные понятия

Пусть A — квадратная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если определитель $\Delta = \det A$ не равен нулю: $\Delta = \det A \neq 0$. В противном случае ($\Delta = 0$) матрица A называется ***вырожденной***.

Матрицей, ***союзной к матрице*** A, называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы A (оно определяется так же, как и алгебраическое дополнение элемента определителя).

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** матрице A, если выполняется условие

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E, \tag{3.1}$$

где E — единичная матрица того же порядка, что и матрица A. Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A.

3.2. Обратная матрица

Теорема 3.1. Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

❑ Проведем доказательство для случая матрицы 3-го порядка. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{причем } \det A \neq 0.$$

Составим союзную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

и найдем произведение матриц A и A^*:

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & \dots & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & \dots & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & \dots & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det A \cdot E,$$

т. е.

$$A \cdot A^* = \det A \cdot E. \tag{3.2}$$

Здесь мы использовали свойства 7 и 8 определителей (см. п. 2.2).

Аналогично убеждаемся, что

$$A^* \cdot A = \det A \cdot E. \tag{3.3}$$

Равенства (3.2) и (3.3) перепишем в виде

$$A \cdot \frac{A^*}{\det A} = E \quad \text{и} \quad \frac{A^*}{\det A} \cdot A = E.$$

Сравнивая полученные результаты с определением (3.1), получаем

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}, \quad \text{т. е.} \quad \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.} \quad \blacksquare$$

Отметим *свойства* обратной матрицы:

1. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$;
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Пример 3.1. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

❍ Решение: 1) Находим $\det A$: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$.

2) Находим A^*: $A_{11} = 1$, $A_{21} = -3$, $A_{12} = -(-1) = 1$, $A_{22} = 2$, поэтому $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Находим A^{-1}: $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} & \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \quad \bullet$$

Пример 3.2. Определить, при каких значениях λ существует матрица, обратная данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

❍ Решение: Всякая невырожденная матрица имеет обратную. Найдем определитель матрицы A:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 + 2\lambda - 12 - 0 + 2\lambda = 4\lambda - 9.$$

Если $4\lambda - 9 \neq 0$, т. е. $\lambda \neq \frac{9}{4}$, то $\Delta A \neq 0$, т. е. матрица A невырожденная, имеет обратную. ●

Пример 3.3. Показать, что матрица A является обратной для B, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

❍ Решение: Найдем произведение матриц A и B:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-3+1 & -3+5-2 & 1-2+1 \\ 3-6+3 & -3+10-6 & 1-4+3 \\ 3-9+6 & -3+15-12 & 1-6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично $B \cdot A = E$. Следовательно, матрица A является обратной для B. ●

3.3. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k строк и k столбцов ($k \leqslant \min(m; n)$). Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются *минорами этой матрицы.* В матрице A пунктиром выделен минор 2-го порядка. (Заметим, что таких миноров можно составить $C_m^k \cdot C_n^k$ штук, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n элементов по k.)

Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется ***рангом матрицы***. Обозначается r, $r(A)$ или $\operatorname{rang} A$.

Очевидно, что $0 \leqslant r \leqslant \min(m; n)$, где $\min(m; n)$ — меньшее из чисел m и n.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется ***базисным***. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Пример 3.4. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

○ Решение: Все миноры 3-го порядка равны нулю. Есть минор 2-го порядка, отличный от нуля $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$. Значит, $r(A) = 2$. Базисный минор стоит на пересечении 2 и 3 строки с 1 и 3 столбцами. ●

Отметим *свойства ранга матрицы*:

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы (см. с. 18).

Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали. На этом основан один из способов вычисления ранга матрицы.

Пример 3.5. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

используя результаты примера 1.4.

○ Решение: В примере 1.4 показано, что

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен $r(A) = 2$. ●

§ 4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Основные понятия

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где числа a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ называются *коэффициентами* системы, числа b_i — *свободными членами*. Подлежат нахождению числа x_n.

Такую систему удобно записывать в компактной ***матричной форме***

$$\boxed{A \cdot X = B.}$$

Здесь A матрица коэффициентов системы, называемая *основной матрицей:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор-столбец из неизвестных x_j,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — вектор-столбец из свободных членов b_i.

Произведение матриц $A \cdot X$ определено, так как в матрице A столбцов столько же, сколько строк в матрице X (n штук).

Расширенной матрицей системы называется матрица $\overline{A}$ системы, дополненная столбцом свободных членов

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Решением системы называется n значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $\dots$, $x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства. Всякое решение системы можно записать в виде матрицы-столбца

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением.*

Решить систему — это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Две системы называются *эквивалентными* (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение. Другими словами, системы эквивалентны, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при *элементарных преобразованиях* системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется *нулевым* или *тривиальным.*

4.2. Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли

Пусть дана произвольная система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Исчерпывающий ответ на вопрос о совместности этой системы дает *теорема Кронекера–Капелли.*

Теорема 4.1. Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы

Примем ее без доказательства.

Правила практического разыскания всех решений совместной системы линейных уравнений вытекают из следующих теорем.

Теорема 4.2. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение

Теорема 4.3. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений

Правило решения произвольной системы линейных уравнений

1. Найти ранги основной и расширенной матриц системы. Если $r(A) \neq r(\overline{A})$, то система несовместна.

2. Если $r(A) = r(\overline{A}) = r$, система совместна. Найти какой-либо базисный минор порядка r (напоминание: минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется базисным). Взять r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор (остальные уравнения отбросить). Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют *главными* и оставляют слева, а остальные $n - r$ неизвестных называют *свободными* и переносят в правые части уравнений.

3. Найти выражения главных неизвестных через свободные. Получено общее решение системы.

4. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения главных неизвестных. Таким образом можно найти частные решения исходной системы уравнений.

Пример 4.1. Исследовать на совместность систему

$$\begin{cases} x + \ \ y = 1, \\ 3x + 3y = -2. \end{cases}$$

❍ Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 1,$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad r(\overline{A}) = 2 \quad \left(\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0\right).$$

Таким образом, $r(A) \neq r(\overline{A})$, следовательно, система несовместна. ●

Пример 4.2. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + \ \ x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - \ \ x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

❍ Решение: $r(A) = r(\overline{A}) = 2$. Берем два первых уравнения:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \boxed{x_3 + x_4} = 1, \\ x_1 - 2x_2 + \boxed{x_3 - x_4} = -1. \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = \ \ 1 - x_1 + 2x_2, \\ x_3 - x_4 = -1 - x_1 + 2x_2. \end{cases} \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 - x_1 + 2x_2 & 1 \\ -1 - x_1 + 2x_2 & -1 \end{vmatrix} = 2x_1 - 4x_2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 - x_1 + 2x_2 \\ 1 & -1 - x_1 + 2x_2 \end{vmatrix} = -2.$$

Следовательно, $x_3 = -x_1 + 2x_2$, $x_4 = 1$ — общее решение. Положив, например, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, получаем одно из частных решений: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. ●

4.3. Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

или в матричной форме $A \cdot X = B$.

Основная матрица A такой системы квадратная. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется *невырожденной*.

Найдем решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$.

Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B.} \tag{4.1}$$

Отыскание решения системы по формуле (4.1) называют *матричным способом* решения системы.

Матричное равенство (4.1) запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n}{\Delta},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{\Delta}.$$

Но $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

Итак, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогично: $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, где Δ_2 получен из Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \ldots$ $\ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$.

Формулы

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,n}} \tag{4.2}$$

называются ***формулами Крамера***.

Итак, невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено матричным способом (4.1) либо по формулам Крамера (4.2).

Пример 4.3. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases}$

Решение: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14$. Значит, $x_1 = \frac{7}{7} = 1$, $x_2 = \frac{14}{7} = 2$. ●

4.4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических систем является *метод Гаусса*, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.3}$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к *ступенчатому* (в частности, *треугольному*) виду.

Приведенная ниже система имеет ступенчатый вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{kk}x_k + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases}$$

где $k \leqslant n$, $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,k}$. Коэффициенты a_{ii} называются *главными* элементами системы.

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

Опишем метод Гаусса подробнее.

Прямой ход.

Будем считать, что элемент $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то первым в системе запишем уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля).

Преобразуем систему (4.3), исключив неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого (используя элементарные преобразования системы). Для этого умножим обе части первого уравнения на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим почленно со вторым уравнением системы. Затем умножим обе части первого уравнения на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим с третьим уравнением системы. Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}. \end{cases}$$

Здесь $a_{ij}^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ $(i, j = \overline{2, m})$ — новые значения коэффициентов и правых частей, которые получаются после первого шага.

Аналогичным образом, считая главным элементом $a_{22}^{(1)} \neq 0$, исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго, и так далее. Продолжаем этот процесс, пока это возможно.

Если в процессе приведения системы (4.3) к ступенчатому виду появятся нулевые уравнения, т. е. равенства вида $0 = 0$, их отбрасывают. Если же появится уравнение вида $0 = b_i$, а $b_i \neq 0$, то это свидетельствует о несовместности системы.

Второй этап (*обратный ход*) заключается в решении ступенчатой системы. Ступенчатая система уравнений, вообще говоря, имеет бесчисленное множество решений. В последнем уравнении этой системы выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные $(x_{k+1}, \dots, x_n)$. Затем подставляем значение x_k в предпоследнее уравнение системы и выражаем x_{k-1} через $(x_{k+1}, \dots, x_n)$; затем находим $x_{k-2}, \dots, x_1$. Придавая свободным неизвестным $(x_{k+1}, \dots, x_n)$ произвольные значения, получим бесчисленное множество решений системы.

Замечания: 1. Если ступенчатая система оказывается треугольной, т. е. $k = n$, то исходная система имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим x_n, из предпоследнего уравнения x_{n-1}, далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные $(x_{n-2}, \dots, x_1)$.

2. На практике удобнее работать не с системой (4.3), а с расширенной ее матрицей, выполняя все элементарные преобразования над

ее строками. Удобно, чтобы коэффициент a_{11} был равен 1 (уравнения переставить местами, либо разделить обе части уравнения на $a_{11} \neq 1$).

Пример 4.4. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

❍ Решение: В результате элементарных преобразований над расширенной матрицей системы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

исходная система свелась к ступенчатой:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Поэтому общее решение системы: $x_2 = 5x_4 - 13x_3 - 3$; $x_1 = 5x_4 - 8x_3 - 1$. Если положить, например, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, то найдем одно из частных решений этой системы $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. ●

Пример 4.5. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

❍ Решение: Произведем элементарные преобразования над строчками расширенной матрицы системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 \phantom{{}+ x_3} = 1, \\ \phantom{x_1 + x_2 +{}} x_3 = 1. \end{cases}$$

Осуществляя обратный ход, находим $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$. ●

4.5. Системы линейных однородных уравнений

Пусть дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что однородная система всегда совместна ($r(A) = r(\overline{A})$), она имеет *нулевое (тривиальное) решение* $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

При каких условиях однородная система имеет и ненулевые решения?

Теорема 4.4. Для того, чтобы система однородных уравнений имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг r ее основной матрицы был меньше числа n неизвестных, т. е. $r < n$.

❑ **Необходимость.**

Так как ранг не может превосходить размера матрицы, то, очевидно, $r \leqslant n$. Пусть $r = n$. Тогда один из миноров размера $n \times n$ отличен от нуля. Поэтому соответствующая система линейных уравнений имеет единственное решение: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = 0$, $\Delta_i = 0$, $\Delta \neq 0$. Значит, других, кроме тривиальных, решений нет. Итак, если есть нетривиальное решение, то $r < n$.

Достаточность.

Пусть $r < n$. Тогда однородная система, будучи совместной, является неопределенной. Значит, она имеет бесчисленное множество решений, т. е. имеет и ненулевые решения. ■

Пусть дана однородная система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Теорема 4.5. Для того, чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Δ был равен нулю, т. е. $\Delta = 0$.

❑ Если система имеет ненулевые решения, то $\Delta = 0$. Ибо при $\Delta \neq 0$ система имеет только единственное, нулевое решение. Если же $\Delta = 0$, то ранг r основной матрицы системы меньше числа неизвестных, т. е. $r < n$. И, значит, система имеет бесконечное множество (ненулевых) решений. ■

Пример 4.6. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

○ Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 2 \quad \left(\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\right), \quad n = 3.$$

Так как $r < n$, то система имеет бесчисленное множество решений. Найдем их

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4x_3, \\ 2x_1 - 3x_2 = -5x_3. \end{cases}$$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4x_3 & -2 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = 2x_3$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4x_3 \\ 2 & -5x_3 \end{vmatrix} = 3x_3$. Стало быть, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2x_3$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3x_3$ — общее решение.

Положив $x_3 = 0$, получаем одно частное решение: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Положив $x_3 = 1$, получаем второе частное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$ и т. д. ●

Глава II. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Лекции 4–6

§ 5. ВЕКТОРЫ

5.1. Основные понятия

Величины, которые полностью определяются своим численным значением, называются *скалярными.* Примерами скалярных величин являются: площадь, длина, объем, температура, работа, масса.

Другие величины, например сила, скорость, ускорение, определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Такие величины называют *векторными.* Векторная величина геометрически изображается с помощью вектора.

Вектор — это направленный прямолинейный отрезок, т. е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление. Если A — начало вектора, а B — его конец, то вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или $\bar{a}$. Вектор $\overline{BA}$ (у него начало в точке B, а конец в точке A) называется ***противоположным*** вектору $\overline{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\bar{a}$, обозначается $-\bar{a}$.

Длиной или *модулем* вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка и обозначается $|\overline{AB}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\bar{0}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором и обозначается через $\bar{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, называется *ортом* вектора $\bar{a}$ и обозначается $\bar{a}^0$.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; записывают $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково или противоположно.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ***равными*** ($\bar{a} = \bar{b}$), если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора помещать в любую точку O пространства.

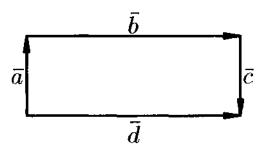


Рис. 1

На рисунке 1 векторы образуют прямоугольник. Справедливо равенство $\bar{b} = \bar{d}$, но $\bar{a} \neq \bar{c}$. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ — противоположные, $\bar{a} = -\bar{c}$.

Равные векторы называют также *свободными*.

Три вектора в пространстве называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Если среди трех векторов хотя бы один нулевой или два любые коллинеарны, то такие векторы компланарны.

5.2. Линейные операции над векторами

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и построим вектор $\overline{OA} = \bar{a}$. От точки A отложим вектор $\overline{AB} = \bar{b}$. Вектор $\overline{OB}$, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется *суммой* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\overline{OB} = \bar{a} + \bar{b}$ (см. рис. 2).

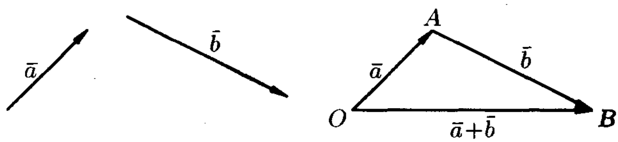


Рис. 2

Это правило сложения векторов называют *правилом треугольника*.

Сумму двух векторов можно построить также по *правилу параллелограмма* (см. рис. 3).

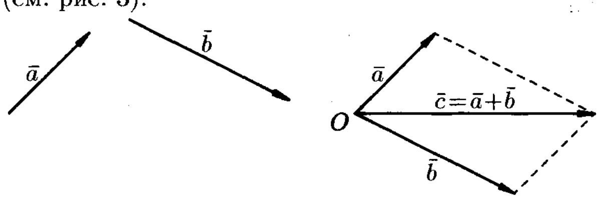


Рис. 3

На рисунке 4 показано сложение трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

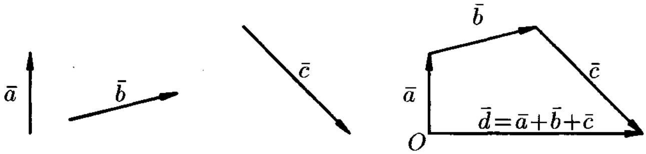


Рис. 4

Под *разностью* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимается вектор $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ такой, что $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$ (см. рис. 5).

Рис. 5

Отметим, что в параллелограмме, построенном на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а другая — разностью (см. рис. 6).

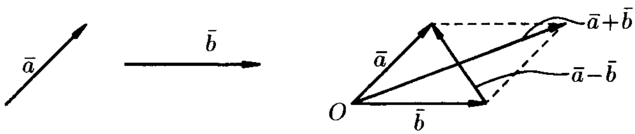
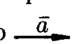
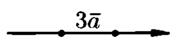
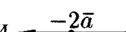


Рис. 6

Можно вычитать векторы по правилу: $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$, т. е. вычитание векторов заменить сложением вектора $\bar{a}$ с вектором, противоположным вектору $\bar{b}$.

Произведением вектора** $\bar{a}$ **на скаляр (число) λ называется вектор $\lambda \cdot \bar{a}$ (или $\bar{a} \cdot \lambda$), который имеет длину $|\lambda| \cdot |\bar{a}|$, коллинеарен вектору $\bar{a}$, имеет направление вектора $\bar{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположное направление, если $\lambda < 0$. Например, если дан вектор , то векторы $3\bar{a}$ и $-2\bar{a}$ будут иметь вид  и .

Из определения произведения вектора на число следуют свойства этого произведения:

1) если $\bar{b} = \lambda \cdot \bar{a}$, то $\bar{b} \parallel \bar{a}$. Наоборот, если $\bar{b} \parallel \bar{a}$, $(\bar{a} \neq \bar{0})$, то при некотором λ верно равенство $\bar{b} = \lambda\bar{a}$;

2) всегда $\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \bar{a}^0$, т. е. каждый вектор равен произведению его модуля на орт.

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$,
2. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$,
3. $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \bar{a}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \bar{a}$,
4. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \bar{a} = \lambda_1 \cdot \bar{a} + \lambda_2 \cdot \bar{a}$,
5. $\lambda \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \cdot \bar{a} + \lambda \cdot \bar{b}$.

Эти свойства позволяют проводить преобразования в линейных операциях с вектором так, как это делается в обычной алгебре: слагаемые менять местами, вводить скобки, группировать, выносить за скобки как скалярные, так и векторные общие множители.

5.3. Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось l, т. е. направленная прямая.

Проекцией точки M на ось l называется основание M_1 перпендикуляра MM_1, опущенного из точки на ось.

Точка M_1 есть точка пересечения оси l с плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно оси (см. рис. 7).

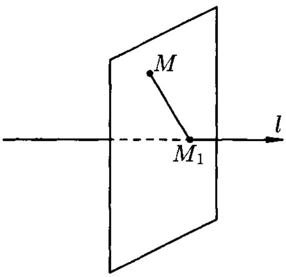


Рис. 7

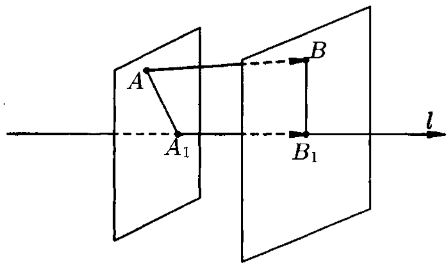


Рис. 8

Если точка M лежит на оси l, то проекция точки M на ось совпадает с M.

Пусть $\overline{AB}$ — произвольный вектор ($\overline{AB} \neq \overline{0}$). Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось l соответственно начала A и конца B вектора $\overline{AB}$ и рассмотрим вектор $\overline{A_1B_1}$.

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется положительное число $|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены и отрицательное число $-|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены (см. рис. 8). Если точки A_1 и B_1 совпадают ($\overline{A_1B_1} = \overline{0}$), то проекция вектора $\overline{AB}$ равна 0.

Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l обозначается так: $\text{пр}_l\,\overline{AB}$. Если $\overline{AB} = \overline{0}$ или $\overline{AB} \perp l$, то $\text{пр}_l\,\overline{AB} = 0$.

Угол φ *между вектором* $\bar{a}$ и осью l (или угол между двумя векторами) изображен на рисунке 9. Очевидно, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

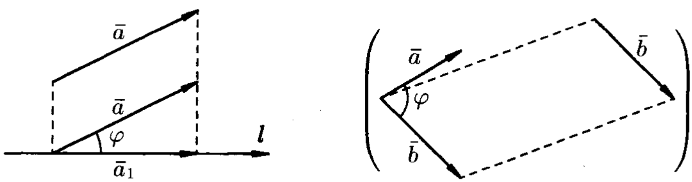


Рис. 9

Рассмотрим некоторые *основные свойства проекций.*

Свойство 1. Проекция вектора $\bar{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\bar{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью, т. е. $\text{пр}_l\,\bar{a} = |\bar{a}|\cdot\cos\varphi$.

❑ Если $\varphi = (\widehat{\bar{a}, l}) < \frac{\pi}{2}$, то $\text{пр}_l\,\bar{a} = +|\bar{a}_1| = |\bar{a}|\cdot\cos\varphi$.

Если $\varphi > \frac{\pi}{2}$ $(\varphi \leqslant \pi)$, то $\text{пр}_l\,\bar{a} = -|\bar{a}_1| = -|\bar{a}|\cdot\cos(\pi-\varphi) = |\bar{a}|\cdot\cos\varphi$ (см. рис. 10).

Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\text{пр}_l\,\bar{a} = 0 = |a|\cos\varphi$. ■

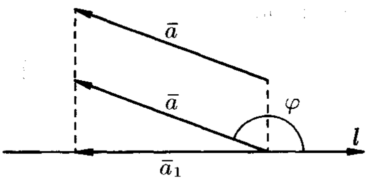


Рис. 10

Следствие 5.1. Проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол — прямой.

Следствие 5.2. Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

Свойство 2. Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось.

❑ Пусть, например, $\bar{d} = \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$. Имеем $\text{пр}_l\,\bar{d} = +|\bar{d}_1| = +|\bar{a}_1|+|\bar{b}_1|-|\bar{c}_1|$, т. е. $\text{пр}_l(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) = \text{пр}_l\,\bar{a} + \text{пр}_l\,\bar{b} + \text{пр}_l\,\bar{c}$ (см. рис. 11). ■

Свойство 3. При умножении вектора $\bar{a}$ на число λ его проекция на ось также умножается на это число, т. е.

$$\text{пр}_l(\lambda\cdot\bar{a}) = \lambda\cdot\text{пр}_l\,\bar{a}.$$

❑ При $\lambda > 0$ имеем $\text{пр}_l(\lambda\cdot\bar{a}) = |\lambda\bar{a}|\cdot\cos\varphi =$ (свойство 1) $= \lambda\cdot|\bar{a}|\cdot\cos\varphi = \lambda\cdot\text{пр}_l\,\bar{a}$.

При $\lambda < 0$: $\text{пр}_l(\lambda\cdot\bar{a}) = |\lambda\bar{a}|\cdot\cos(\pi-\varphi) = -\lambda\cdot|\bar{a}|\cdot(-\cos\varphi) = \lambda\cdot\bar{a}\cdot\cos\varphi = \lambda\cdot\text{пр}_l\,\bar{a}$. Свойство справедливо, очевидно, и при $\lambda = 0$. ■

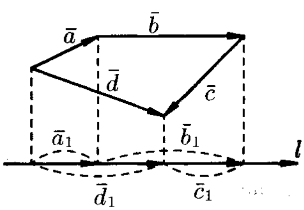


Рис. 11

Таким образом, линейные операции над векторами приводят к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов.

5.4. Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. Выделим на координатных осях Ox, Oy и Oz единичные векторы (орты), обозначаемые $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ соответственно (см. рис. 12).

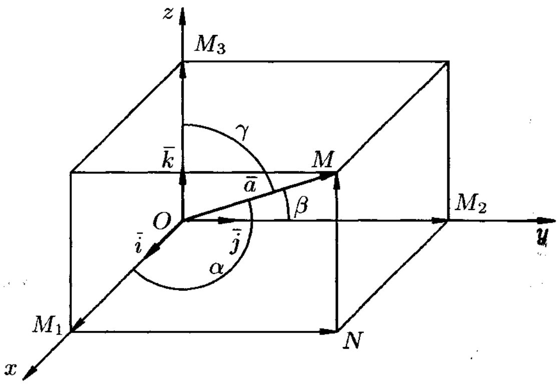


Рис. 12

Выберем произвольный вектор $\bar{a}$ пространства и совместим его начало с началом координат: $\bar{a} = \overline{OM}$.

Найдем проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси. Проведем через конец вектора $\overline{OM}$ плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точки пересечения этих плоскостей с осями обозначим соответственно через M_1, M_2 и M_3. Получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overline{OM}$. Тогда $\text{пр}_x\,\bar{a} = |\overline{OM}_1|$, $\text{пр}_y\,\bar{a} = |\overline{OM}_2|$, $\text{пр}_z\,\bar{a} = |\overline{OM}_3|$. По определению суммы нескольких векторов находим $\bar{a} = \overline{OM}_1 + \overline{M_1N} + \overline{NM}$.

А так как $\overline{M_1N} = \overline{OM}_2$, $\overline{NM} = \overline{OM}_3$, то

$$\bar{a} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3. \tag{5.1}$$

Но

$$\overline{OM}_1 = |\overline{OM}_1| \cdot \bar{i}, \quad \overline{OM}_2 = |\overline{OM}_2| \cdot \bar{j}, \quad \overline{OM}_3 = |\overline{OM}_3| \cdot \bar{k}. \tag{5.2}$$

Обозначим проекции вектора $\bar{a} = \overline{OM}$ на оси Ox, Oy и Oz соответственно через a_x, a_y и a_z, т. е. $|\overline{OM}_1| = a_x$, $|\overline{OM}_2| = a_y$, $|\overline{OM}_3| = a_z$. Тогда из равенств (5.1) и (5.2) получаем

$$\boxed{\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}.} \tag{5.3}$$

Эта формула является основной в векторном исчислении и называется ***разложением вектора по ортам координатных осей.***

Числа a_x, a_y, a_z называются ***координатами вектора*** $\bar{a}$, т. е. координаты вектора есть его проекции на соответствующие координатные оси.

Векторное равенство (5.3) часто записывают в символическом виде: $\bar{a} = (a_x; a_y; z_z)$.

Зная проекции вектора $\bar{a}$, можно легко найти выражение для модуля вектора. На основании теоремы о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда можно написать $|\overline{OM}|^2 = |\overline{OM_1}|^2 + |\overline{OM_2}|^2 + |\overline{OM_3}|^2$, т. е.

$$|\bar{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \tag{5.4}$$

Отсюда

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},}$$

т. е. ***модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат.***

Пусть углы вектора $\bar{a}$ с осями Ox, Oy и Oz соответственно равны α, β, γ. По свойству проекции вектора на ось, имеем

$$a_x = |\bar{a}| \cdot \cos\alpha, \quad a_y = |\bar{a}| \cdot \cos\beta, \quad a_z = |\bar{a}| \cdot \cos\gamma. \tag{5.5}$$

Или, что то же самое,

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}.$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами*** вектора $\bar{a}$.

Подставим выражения (5.5) в равенство (5.4), получаем

$$|\bar{a}|^2 = |\bar{a}|^2 \cdot \cos^2\alpha + |\bar{a}|^2 \cdot \cos^2\beta + |\bar{a}|^2 \cdot \cos^2\gamma.$$

Сократив на $|\bar{a}|^2 \neq 0$, получим соотношение

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,}$$

т. е. ***сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице.***

Легко заметить, что координатами единичного вектора $\bar{e}$ являются числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, т. е. $\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

Итак, задав координаты вектора, всегда можно определить его модуль и направление, т. е. сам вектор.

5.5. Действия над векторами, заданными проекциями

Пусть векторы $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$ заданы своими проекциями на оси координат Ox, Oy, Oz или, что то же самое

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}, \quad \bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}.$$

Линейные операции над векторами

Так как линейные операции над векторами сводятся к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов, то можно записать:

1. $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x)\bar{i} + (a_y \pm b_y)\bar{j} + (a_z \pm b_z)\bar{k}$, или кратко $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$. То есть *при сложении (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (вычитаются).*

2. $\lambda\bar{a} = \lambda a_x \cdot \bar{i} + \lambda a_y \cdot \bar{j} + \lambda a_z \cdot \bar{k}$ или короче $\lambda\bar{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$. То есть *при умножении вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр.*

Равенство векторов

Из определения вектора как направленного отрезка, который можно передвигать в пространстве параллельно самому себе, следует, что *два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны* тогда и только тогда, когда выполняются равенства: $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$, т. е.

$$\boxed{\bar{a} = \bar{b} \iff \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases}}$$

Коллинеарность векторов

Выясним условия коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданных своими координатами.

Так как $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то можно записать $\bar{a} = \lambda \cdot \bar{b}$, где λ — некоторое число. То есть

$a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k} = \lambda(b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}) = \lambda b_x \cdot \bar{i} + \lambda b_y \cdot \bar{j} + \lambda b_z \cdot \bar{k}$.

Отсюда

$$a_x = \lambda b_x, \quad a_y = \lambda b_y, \quad a_z = \lambda b_z,$$

т. е.

$$\frac{a_x}{b_x} = \lambda, \quad \frac{a_y}{b_y} = \lambda, \quad \frac{a_z}{b_z} = \lambda \quad \text{или} \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Таким образом, *проекции коллинеарных векторов пропорциональны.* Верно и обратное утверждение: векторы, имеющие пропорциональные координаты, коллинеарны.

Координаты точки

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. Для любой точки M координаты вектора $\overline{OM}$ называются *координатами точки M*. Вектор $\overline{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M, обозначается $\bar{r}$, т. е. $\overline{OM} = \bar{r}$. Следовательно, координаты точки — это координаты ее радиус-вектора

$$\bar{r} = (x; y; z) \quad \text{или} \quad \bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}.$$

Координаты точки M записываются в виде $M(x; y; z)$.

Координаты вектора

Найдем координаты вектора $\bar{a} = \overline{AB}$, если известны координаты точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Имеем (см. рис. 13):

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}) - (x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k}) = \\ = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}.$$

Следовательно, *координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала:* $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

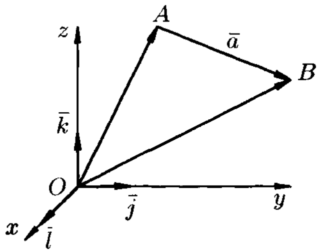


Рис. 13

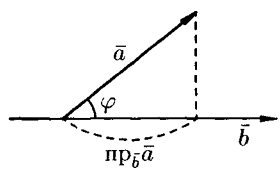


Рис. 14

§ 6. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЕГО СВОЙСТВА

6.1. Определение скалярного произведения

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется ***число***, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначается $\bar{a}\bar{b}$, $\bar{a} \cdot \bar{b}$ (или $(\bar{a}, \bar{b})$). Итак, по определению,

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi,} \tag{6.1}$$

где $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$.

Формуле (6.1) можно придать иной вид. Так как $|\bar{a}|\cos\varphi = \text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a}$, (см. рис. 14), а $|\bar{b}|\cos\varphi = \text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b}$, то получаем:

$$\boxed{\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a},} \tag{6.2}$$

т. е. скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого на ось, сонаправленную с первым вектором.

6.2. Свойства скалярного произведения

1. Скалярное произведение обладает переместительным свойством: $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$.

❏ $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$, а $\bar{b}\bar{a} = |\bar{b}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos(\widehat{\bar{b},\bar{a}})$. И так как $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| = |\bar{b}| \cdot |\bar{a}|$, как произведение чисел и $\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \cos(\widehat{\bar{b},\bar{a}})$, то $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$. ■

2. Скалярное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя: $(\lambda\bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a}\bar{b})$.

❏ $(\lambda\bar{a})\bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}}\, \lambda\bar{a} = \lambda \cdot |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}}\, \bar{a} = \lambda(\bar{a}\bar{b})$. ■

3. Скалярное произведение обладает распределительным свойством: $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$.

❏ $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}(\bar{b}+\bar{c}) = |\bar{a}| \cdot (\text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{b} + \text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{c}) = |\bar{a}|\, \text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{b} + |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{c} =$ $= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$. ■

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.

❏ $\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cos 0 = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| = |\bar{a}|^2$. ■

В частности: $\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = 1$.

Если вектор $\bar{a}$ возвести скалярно в квадрат и затем извлечь корень, то получим не первоначальный вектор, а его модуль $|\bar{a}|$, т. е. $\sqrt{\bar{a}^2} = |\bar{a}|$ $(\sqrt{\bar{a}^2} \neq \bar{a})$.

Пример 6.1. Найти длину вектора $\bar{c} = 3\bar{a} - 4\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{\pi}{3}$.

❍ Решение:

$$|\bar{c}| = \sqrt{\bar{c}^2} = \sqrt{(3\bar{a} - 4\bar{b})^2} = \sqrt{9\bar{a}^2 - 24\bar{a}\bar{b} + 16\bar{b}^2} =$$

$$= \sqrt{9 \cdot 4 - 24 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot 9} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}. \quad ●$$

5. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (ненулевые) взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, т. е. если $\bar{a} \perp \bar{b}$, то $\bar{a}\bar{b} = 0$. Справедливо и обратное утверждение: если $\bar{a}\bar{b} = 0$ и $\bar{a} \neq \bar{0} \neq \bar{b}$, то $\bar{a} \perp \bar{b}$.

❏ Так как $\varphi = (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Следовательно, $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot 0 = 0$. Если же $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ и $|\bar{a}| \neq 0$, $|\bar{b}| \neq 0$, то $\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 0$. Отсюда $\varphi = (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 90°$, т. е. $\bar{a} \perp \bar{b}$. В частности:

$$\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{i} = 0. \quad ■$$

6.3. Выражение скалярного произведения через координаты

Пусть заданы два вектора

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \quad \text{и} \quad \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}.$$

Найдем скалярное произведение векторов, перемножая их как многочлены (что законно в силу свойств линейности скалярного произведения) и пользуясь таблицей скалярного произведения векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$:

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

$$\begin{aligned}\bar{a}\cdot\bar{b} &= (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})\cdot(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) = \\ &= a_xb_x\bar{i}\bar{i} + a_xb_y\bar{i}\bar{j} + a_xb_z\bar{i}\bar{k} + \\ &+ a_yb_x\bar{j}\bar{i} + a_yb_y\bar{j}\bar{j} + a_yb_z\bar{j}\bar{k} + \\ &+ a_zb_x\bar{k}\bar{i} + a_zb_y\bar{k}\bar{j} + a_zb_z\bar{k}\bar{k} = \\ &= a_xb_x + 0 + 0 + 0 + a_yb_y + 0 + 0 + 0 + a_zb_z,\end{aligned}$$

т. е.

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.}$$

Итак, *скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат.*

Пример 6.2. Доказать, что диагонали четырехугольника, заданного координатами вершин $A(-4;-4;4)$, $B(-3;2;2)$, $C(2;5;1)$, $D(3;-2;2)$, взаимно перпендикулярны.

❍ Решение: Составим вектора $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$, лежащие на диагоналях данного четырехугольника. Имеем: $\overline{AC} = (6;9;-3)$ и $\overline{BD} = (6;-4;0)$. Найдем скалярное произведение этих векторов:

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD} = 36 - 36 - 0 = 0.$$

Отсюда следует, что $\overline{AC} \perp \overline{BD}$. Диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. ●

6.4. Некоторые приложения скалярного произведения

Угол между векторами

Определение угла φ между ненулевыми векторами $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}, \quad \text{т. е.} \quad \cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Отсюда следует условие перпендикулярности ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \iff a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Проекция вектора на заданное направление

Нахождение проекции вектора $\bar{a}$ на направление, заданное вектором $\bar{b}$, может осуществляться по формуле

$$\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} \quad \left(\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}\right), \qquad \text{т. е.} \qquad \text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Работа постоянной силы

Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения A в положение B под действием постоянной силы $\bar{F}$, образующей угол φ с перемещением $\overline{AB} = \bar{S}$ (см. рис. 15).

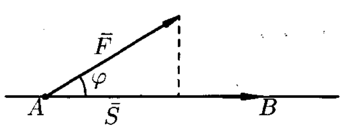


Рис. 15

Из физики известно, что работа силы $\bar{F}$ при перемещении $\bar{S}$ равна

$$A = F\cdot S\cdot\cos\varphi \quad \text{т. е.} \quad A = \bar{F}\cdot\bar{S}.$$

Таким образом, работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Пример 6.3. Вычислить работу, произведенную силой $\bar{F}=(3;2;4)$, если точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения $A(2;4;6)$ в положение $B(4;2;7)$. Под каким углом к AB направлена сила $\bar{F}$?

Решение: Находим $\bar{S} = \overline{AB} = (2,-2,1)$. Стало быть,

$$A = \bar{F}\cdot\bar{S} = 3\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 4\cdot 1 = 6 \text{ (ед. работы)}.$$

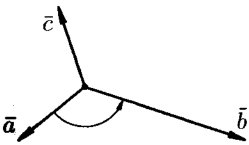
Угол φ между $\bar{F}$ и $\bar{S}$ находим по формуле $\cos\varphi = \dfrac{\bar{F}\cdot\bar{S}}{|\bar{F}|\cdot|\bar{S}|}$, т. е.

$$\cos\varphi = \frac{6}{\sqrt{9+4+16}\cdot\sqrt{4+4+1}} = \frac{6}{\sqrt{29}\cdot 3} = \frac{2}{\sqrt{29}}, \qquad \varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{29}}.$$

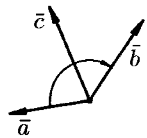
§ 7. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЕГО СВОЙСТВА

7.1. Определение векторного произведения

Три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, взятые в указанном порядке, образуют *правую тройку*, если с конца третьего вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ ко второму вектору $\bar{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и *левую*, если по часовой (см. рис. 16).



правая тройка,



левая тройка

Рис. 16

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется *вектор* $\bar{c}$, который:

1) перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т. е. $\bar{c} \perp \bar{a}$ и $\bar{c} \perp \bar{b}$;

2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах (см. рис. 17), т. е.

$$|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi, \quad \text{где} \quad \varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}});$$

3) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку.

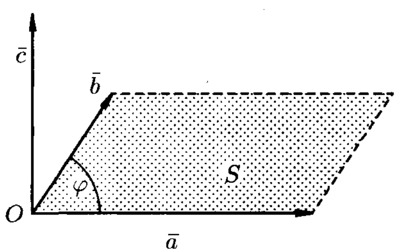


Рис. 17

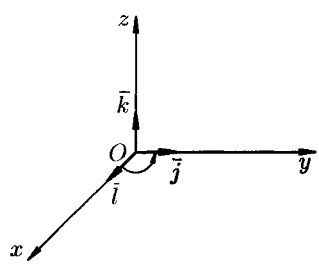


Рис. 18

Векторное произведение обозначается $\bar{a} \times \bar{b}$ или $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Из определения векторного произведения непосредственно вытекают следующие соотношения между ортами $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ (см. рис. 18):

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \quad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}.$$

Докажем, например, что $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$.

❑ 1) $\bar{k} \perp \bar{i}$, $\bar{k} \perp \bar{j}$;

2) $|\bar{k}| = 1$, но $|\bar{i} \times \bar{j}| = |\bar{i}| \cdot |\bar{j}| \cdot \sin 90^\circ = 1$;

3) векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ образуют правую тройку (см. рис. 16). ■

7.2. Свойства векторного произведения

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак, т. е. $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$ (см. рис. 19).

❑ Векторы $\bar{a} \times \bar{b}$ и $\bar{b} \times \bar{a}$ коллинеарны, имеют одинаковые модули (площадь параллелограмма остается неизменной), но противоположно направлены (тройки $\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b}$ и $\bar{a}, \bar{b}, \bar{b} \times \bar{a}$ противоположной ориентации). Стало быть, $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$. ■

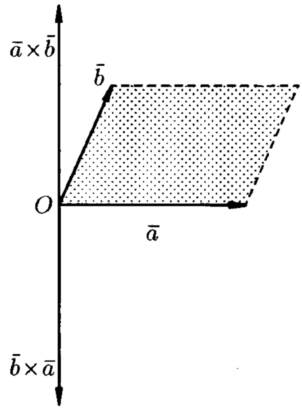


Рис. 19

2. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя, т. е. $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b})$.

❑ Пусть $\lambda > 0$. Вектор $\lambda(\bar{a} \times \bar{b})$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Вектор $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b}$ также перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (векторы $\bar{a}$, $\lambda\bar{a}$ лежат в одной плоскости). Значит, векторы $\lambda(\bar{a} \times \bar{b})$ и $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b}$ коллинеарны. Очевидно, что и направления их совпадают. Имеют одинаковую длину:

$$|\lambda(\bar{a} \times \bar{b})| = \lambda|\bar{a} \times \bar{b}| = \lambda|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$$

и

$$|(\lambda\bar{a}) \times \bar{b}| = |\lambda\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\lambda\bar{a}, \bar{b}}) = \lambda|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin(\bar{a}, \bar{b}).$$

Поэтому $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = \lambda\bar{a} \times \bar{b}$. Аналогично доказывается при $\lambda < 0$. ■

3. Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, т. е. $\bar{a} \parallel \bar{b} \iff \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

❑ Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то угол между ними равен 0° или 180°. Но тогда $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 0$. Значит, $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

Если же $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$, то $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi = 0$. Но тогда $\varphi = 0^\circ$ или $\varphi = 180^\circ$, т. е. $\bar{a} \parallel \bar{b}$. ■

В частности, $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}$.

4. Векторное произведение обладает распределительным свойством:

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}.$$

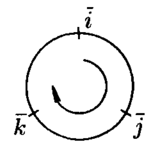
Примем без доказательства.

7.3. Выражение векторного произведения через координаты

Мы будем использовать таблицу векторного произведения векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$:

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	$\bar{0}$

Чтобы не ошибиться со знаком, удобно пользоваться схемой:



если направление кратчайшего пути от первого вектора к второму совпадает с направлением стрелки, то произведение равно третьему вектору, если не совпадает — третий вектор берется со знаком «минус».

Пусть заданы два вектора $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ и $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$. Найдем векторное произведение этих векторов, перемножая их как многочлены (согласно свойств векторного произведения):

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) \times (b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) =$$
$$= a_xb_x(\bar{i} \times \bar{i}) + a_xb_y(\bar{i} \times \bar{j}) + a_xb_z(\bar{i} \times \bar{k}) + a_yb_x(\bar{j} \times \bar{i}) + a_yb_y(\bar{j} \times \bar{j}) +$$
$$+ a_yb_z(\bar{j} \times \bar{k}) + a_zb_x(\bar{k} \times \bar{i}) + a_zb_y(\bar{k} \times \bar{j}) + a_zb_z(\bar{k} \times \bar{k}) =$$
$$= \bar{0} + a_xb_y\bar{k} - a_xb_z\bar{j} - a_yb_x\bar{k} + \bar{0} + a_yb_z\bar{i} + a_zb_x\bar{j} - a_zb_y\bar{i} + \bar{0} =$$
$$= (a_yb_z - a_zb_y)\bar{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\bar{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\bar{k} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k},$$

т. е.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k}. \qquad (7.1)$$

Полученную формулу можно записать еще короче:

$$\boxed{\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},} \qquad (7.2)$$

так как правая часть равенства (7.1) соответствует разложению определителя третьего порядка по элементам первой строки. Равенство (7.2) легко запоминается.

7.4. Некоторые приложения векторного произведения

Установление коллинеарности векторов

Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ (и наоборот), т. е.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{0} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \iff \bar{a} \parallel \bar{b}.$$

Нахождение площади параллелограмма и треугольника

Согласно определению векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi$, т. е. $S_{\text{пар}} = |\bar{a} \times \bar{b}|$. И, значит, $S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|$.

Определение момента силы относительно точки

Пусть в точке A приложена сила $\bar{F} = \overline{AB}$ и пусть O — некоторая точка пространства (см. рис. 20).

Из физики известно, что *моментом силы* $\bar{F}$ относительно точки O называется вектор $\bar{M}$, который проходит через точку O и:

1) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;
2) численно равен произведению силы на плечо

$$|\bar{M}| = |\bar{F}| \cdot ON = |\bar{F}| \cdot |\bar{r}| \cdot \sin\varphi = |\bar{F}| \cdot |\overline{OA}| \sin(\widehat{\bar{F}, \overline{OA}});$$

3) образует правую тройку с векторами $\overline{OA}$ и $\overline{AB}$.

Стало быть, $\bar{M} = \overline{OA} \times \bar{F}$.

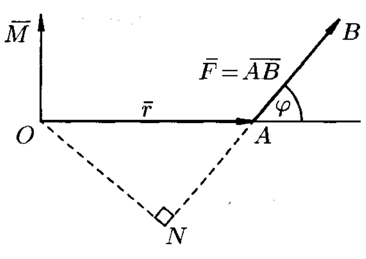


Рис. 20

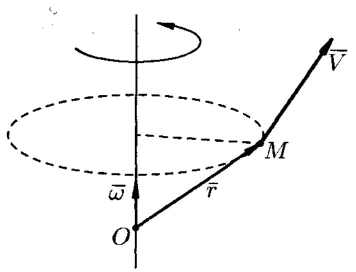


Рис. 21

Нахождение линейной скорости вращения

Скорость $\bar{v}$ точки M твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг неподвижной оси, определяется формулой Эйлера $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$, где $\bar{r} = \overline{OM}$, где O — некоторая неподвижная точка оси (см. рис. 21).

§ 8. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

8.1. Определение смешанного произведения, его геометрический смысл

Рассмотрим произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, составленное следующим образом: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$. Здесь первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор. Такое произведение называется *векторно-скалярным*, или *смешанным*, произведением трех векторов. Смешанное произведение представляет собой некоторое число.

Выясним геометрический смысл выражения $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$. Построим параллелепипед, ребрами которого являются векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и вектор $\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$ (см. рис. 22).

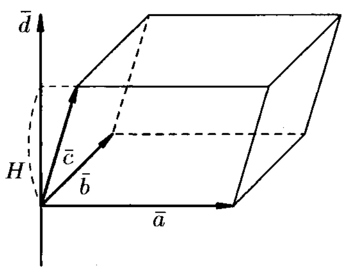


Рис. 22

Имеем: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{d} \cdot \bar{c} = |\bar{d}| \cdot \text{пр}_{\bar{d}}\, \bar{c}$, $|\bar{d}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = S$, где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $\text{пр}_{\bar{d}}\, \bar{c} = H$ для правой тройки векторов и $\text{пр}_{\bar{d}}\, \bar{c} = -H$ для левой, где H — высота параллелепипеда. Получаем: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = S \cdot (\pm H)$, т. е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \pm V$, где V — объем параллелепипеда, образованного векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

Таким образом, смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку.

8.2. Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т. е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} = (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{b}$.

Действительно, в этом случае не изменяется ни объем параллелепипеда, ни ориентация его ребер.

2. Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножения, т. е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$.

Действительно, $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \pm V$ и $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} = \pm V$. Знак в правой части этих равенств берем один и тот же, так как тройки векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и $\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}$ — одной ориентации.

Следовательно, $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})$. Это позволяет записывать смешанное произведение векторов $(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c}$ в виде $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ без знаков векторного, скалярного умножения.

3. Смешанное произведение меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов-сомножителей, т. е. $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{a}\bar{c}\bar{b}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{b}\bar{a}\bar{c}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=$ $=-\bar{c}\bar{b}\bar{a}$.

Действительно, такая перестановка равносильна перестановке сомножителей в векторном произведении, меняющей у произведения знак.

4. Смешанное произведение ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

❑ Если $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0$, то $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — компланарны.

Допустим, что это не так. Можно было бы построить параллелепипед с объемом $V\neq 0$. Но так как $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\pm V$, то получили бы, что $\bar{a}\bar{b}\bar{c}\neq 0$. Это противоречит условию: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0$.

Обратно, пусть векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — компланарны. Тогда вектор $\bar{d}=$ $=\bar{a}\times\bar{b}$ будет перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, и, следовательно, $\bar{d}\perp\bar{c}$. Поэтому $\bar{d}\cdot\bar{c}=0$, т. е. $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0$. ■

8.3. Выражение смешанного произведения через координаты

Пусть заданы векторы $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$, $\bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}$, $\bar{c}=c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k}$. Найдем их смешанное произведение, используя выражения в координатах для векторного и скалярного произведений:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}\cdot(c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k})=$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\bar{k}\right)\cdot(c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k})=$$

$$=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\cdot c_x-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\cdot c_y+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\cdot c_z. \quad (8.1)$$

Полученную формулу можно записать короче:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix},$$

так как правая часть равенства (8.1) представляет собой разложение определителя третьего порядка по элементам третьей строки.

Итак, смешанное произведение векторов равно определителю третьего порядка, составленному из координат перемножаемых векторов.

8.4. Некоторые приложения смешанного произведения

Определение взаимной ориентации векторов в пространстве

Определение взаимной ориентации векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ основано на следующих соображениях. Если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$, то $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — правая тройка; если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$, то $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – левая тройка.

Установление компланарности векторов

Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю ($\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$, $\bar{c} \neq \bar{0}$):

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0 \iff \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \iff \text{векторы } \bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c} \text{ компланарны.}$$

Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды

Нетрудно показать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ вычисляется как $V = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$, а объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, равен $V = \frac{1}{6}|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$.

Пример 8.1. Вершинами пирамиды служат точки $A(1;2;3)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;5;2)$ и $D(3;0;-2)$. Найти объем пирамиды.

Решение: Находим векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\bar{a} = \overline{AB} = (-1;-3;-2), \quad \bar{b} = \overline{AC} = (1;3;-1), \quad \bar{c} = \overline{AD} = (2;-2;-5).$$

Находим $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -1\cdot(-17) + 3\cdot(-3) - 2\cdot(-8) = 17 - 9 + 16 = 24.$$

Следовательно, $V = \frac{1}{6}\cdot 24 = 4$. ●

Глава III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Лекции 7–9

§ 9. СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

9.1. Основные понятия

Под ***системой координат*** на плоскости понимают способ, позволяющий численно описать положение точки плоскости. Одной из таких систем является ***прямоугольная*** (*декартова*) ***система координат.***

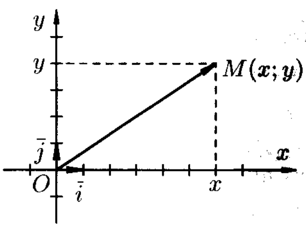


Рис. 23

Прямоугольная система координат задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми — осями, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный (масштабный) отрезок. Единицу масштаба обычно берут одинаковой для обеих осей. Эти оси называют *осями координат*, точку их пересечения O — *началом координат.* Одну из осей называют *осью абсцисс* (осью Ox), другую — осью *ординат* (осью Oy) (рис. 23).

На рисунках ось абсцисс обычно располагают горизонтально и направленной слева направо, а ось ординат — вертикально и направленной снизу вверх. Оси координат делят плоскость на четыре области — *четверти* (или *квадранты*).

Единичные векторы осей обозначают $\bar{i}$ и $\bar{j}$ ($|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1$, $\bar{i} \perp \bar{j}$).

Систему координат обозначают Oxy (или $O\bar{i}\bar{j}$), а плоскость, в которой расположена система координат, называют *координатной плоскостью.*

Рассмотрим произвольную точку M плоскости Oxy. Вектор $\overline{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M.

Координатами точки M в системе координат Oxy ($O\bar{i}\bar{j}$) называются координаты радиуса-вектора $\overline{OM}$. Если $\overline{OM} = (x; y)$, то координаты точки M записывают так: $M(x; y)$, число x называется ***абсциссой*** точки M, y — ***ординатой*** точки M.

Эти два числа x и y полностью определяют положение точки на плоскости, а именно: каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка M плоскости, и наоборот.

Способ определения положения точек с помощью чисел (координат) называется *методом координат.* Сущность метода координат на плоскости состоит в том, что всякой линии на ней, как правило, сопоставляется ее уравнение. Свойства этой линии изучаются путем исследования уравнения линии.

Другой практически важной системой координат является *полярная система координат.* Полярная система координат задается точкой O, называемой *полюсом*, лучом Op, называемым *полярной осью*, и единичным вектором $\bar{e}$ того же направления, что и луч Op.

Возьмем на плоскости точку M, не совпадающую с O. Положение точки M определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса O и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью (отсчет углов ведется в направлении, противоположном движению часовой стрелки) (см. рис. 24).

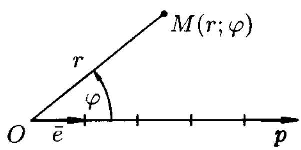


Рис. 24

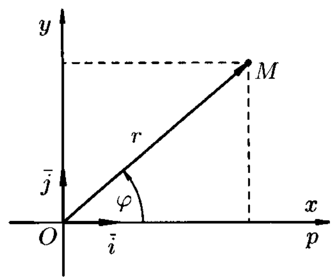


Рис. 25

Числа r и φ называются ***полярными координатами*** точки M, пишут $M(r;\varphi)$, при этом r называют ***полярным радиусом***, φ — *полярным углом.*

Для получения всех точек плоскости достаточно полярный угол φ ограничить промежутком $(-\pi;\pi]$ (или $0 \leqslant \varphi < 2\pi$), а полярный радиус — $[0;\infty)$. В этом случае каждой точке плоскости (кроме O) соответствует единственная пара чисел r и φ, и обратно.

Установим связь между прямоугольными и полярными координатами. Для этого совместим полюс O с началом координат системы Oxy, а полярную ось — с положительной полуосью Ox. Пусть x и y — прямоугольные координаты точки M, а r и φ — ее полярные координаты.

Из рисунка 25 видно, что прямоугольные и полярные координаты точки M выражаются следующим образом:

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi, \\ y = r\cdot\sin\varphi; \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Определяя величину φ, следует установить (по знакам x и y) четверть, в которой лежит искомый угол, и учитывать, что $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Пример 9.1. Дана точка $M(-1; -\sqrt{3})$. Найти полярные координаты точки M.

○ Решение: Находим r и φ:

$$r = \sqrt{3+1} = 2, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}.$$

Отсюда $\varphi = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Но так как точка M лежит в 3-й четверти, то $n = -1$ и $\varphi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$. Итак, полярные координаты точки M есть $r = 2$, $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$, т. е. $M\left(2; \frac{-2\pi}{3}\right)$. ●

9.2. Основные приложения метода координат на плоскости

Расстояние между двумя точками

Требуется найти расстояние d между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ плоскости Oxy.

○ Решение: Искомое расстояние d равно длине вектора $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, т. е.

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad ●$$

Деление отрезка в данном отношении

Требуется разделить отрезок AB, соединяющий точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в заданном отношении $\lambda > 0$, т. е. найти координаты точки $M(x; y)$ отрезка AB такой, что $\frac{AM}{MB} = \lambda$ (см. рис. 26).

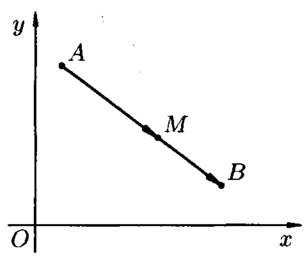


Рис. 26

○ Решение: Введем в рассмотрение векторы $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$. Точка M делит отрезок AB в отношении λ, если

$$\overline{AM} = \lambda \cdot \overline{MB}. \tag{9.1}$$

Но $\overline{AM} = (x - x_1; y - y_1)$, т. е. $\overline{AM} = (x - x_1)\bar{i} + (y - y_1)\bar{j}$ и $\overline{MB} = (x_2 - x; y_2 - y)$, т. е. $\overline{MB} = (x_2 - x)\bar{i} + (y_2 - y)\bar{j}$. Уравнение (9.1) принимает вид

$$(x - x_1)\bar{i} + (y - y_1)\bar{j} = \lambda(x_2 - x)\bar{i} + \lambda(y_2 - y)\bar{j}.$$

Учитывая, что равные векторы имеют равные координаты, получаем

$$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x, \quad \text{т. е.} \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \tag{9.2}$$

и

$$y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y, \quad \text{т. е.} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{9.3}$$

Формулы (9.2) и (9.3) называются *формулами деления отрезка в данном отношении*. В частности, при $\lambda = 1$, т. е. если $AM = MB$, то они примут вид $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. В этом случае точка $M(x; y)$ является *серединой отрезка* AB. ●

Замечание: Если $\lambda = 0$, то это означает, что точки A и M совпадают, если $\lambda < 0$, то точка M лежит вне отрезка AB — говорят, что точка M делит отрезок AB внешним образом ($\lambda \neq -1$, т. к. в противном случае $\frac{AM}{MB} = -1$, т. е. $AM + MB = 0$, т. е. $AB = 0$).

Площадь треугольника

Требуется найти площадь треугольника ABC с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$.

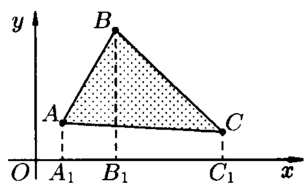


Рис. 27

○ Решение: Опустим из вершин A, B, C перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 на ось Ox (см. рис. 27). Очевидно, что

$$S_{ABC} = S_{AA_1B_1B} + S_{B_1BCC_1} - S_{A_1ACC_1}.$$

Поэтому

$$S_{ABC} = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_1) + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_2) - \frac{y_1 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_1) =$$
$$= \frac{1}{2}(x_2y_1 - x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 + x_3y_2 - x_2y_2 + x_3y_3 -$$
$$- x_2y_3 - x_3y_1 + x_1y_1 - x_3y_3 + x_1y_3) =$$
$$= \frac{1}{2}(x_3(y_2 - y_1) - x_1(y_2 - y_1) - x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_3 - y_1)) =$$
$$= \frac{1}{2}((y_2 - y_1)(x_3 - x_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix},$$

т. е.

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}.$$ ●

Замечание: Если при вычислении площади треугольника получим $S = 0$, то это означает, что точки A, B, C лежат на одной прямой, если же получим отрицательное число, то следует взять его модуль.

9.3. Преобразование системы координат

Переход от одной системы координат в какую-либо другую называется *преобразованием системы координат*.

Рассмотрим два случая преобразования одной прямоугольной системы координат в другую. Полученные формулы устанавливают зависимость между координатами произвольной точки плоскости в разных системах координат.

Параллельный перенос осей координат

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy. Под *параллельным переносом* осей координат понимают переход от системы координат Oxy к новой системе $O_1x_1y_1$, при котором меняется положение начала координат, а направление осей и масштаб остаются неизменными.

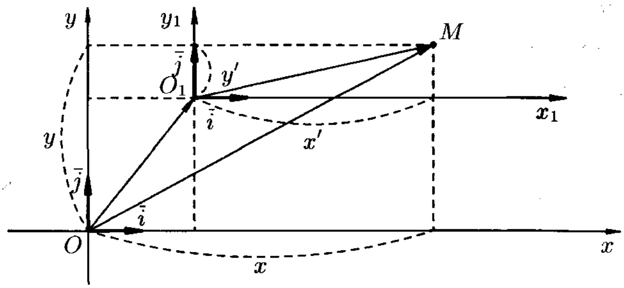


Рис. 28

Пусть начало новой системы координат точка O_1 имеет координаты $(x_0; y_0)$ в старой системе координат Oxy, т. е. $O_1(x_0; y_0)$. Обозначим координаты произвольной точки M плоскости в системе Oxy через $(x; y)$, а в новой системе $O_1x_1y_1$ через $(x'; y')$ (см. рис. 28).

Рассмотрим векторы

$$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j}, \quad \overline{OO_1} = x_0\bar{i} + y_0\bar{j}, \quad \overline{O_1M} = x'\bar{i} + y'\bar{j}.$$

Так как $\overline{OM} = \overline{OO_1} + \overline{O_1M}$, то $x\bar{i} + y\bar{j} = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + x'\bar{i} + y'\bar{j}$, т. е.

$$x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} = (x_0 + x') \cdot \bar{i} + (y_0 + y') \cdot \bar{j}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases}}$$

Полученные формулы позволяют находить старые координаты x и y по известным новым x' и y' и наоборот.

Поворот осей координат

Под *поворотом осей координат* понимают такое преобразование координат, при котором обе оси поворачиваются на один и тот же угол, а начало координат и масштаб остаются неизменными.

Пусть новая система $O_1x_1y_1$ получена поворотом системы Oxy на угол α (см. рис. 29).

Пусть M — произвольная точка плоскости, $(x; y)$ — ее координаты в старой системе и $(x'; y')$ — в новой системе.

Введем две полярные системы координат с общим полюсом O и полярными осями Ox и Ox_1 (масштаб одинаков). Полярный радиус r в обеих системах одинаков, а полярные углы соответственно равны $\alpha + \varphi$ и φ, где φ — полярный угол в новой полярной системе.

По формулам перехода от полярных координат к прямоугольным имеем

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\alpha + \varphi), \\ y = r \cdot \sin(\alpha + \varphi), \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi \cdot \cos\alpha - r\sin\varphi \cdot \sin\alpha, \\ y = r\cos\varphi \cdot \sin\alpha + r\sin\varphi \cdot \cos\alpha. \end{cases}$$

Но $r\cos\varphi = x'$ и $r\sin\varphi = y'$. Поэтому

$$\boxed{\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}}$$

Полученные формулы называются ***формулами поворота осей.*** Они позволяют определять старые координаты $(x; y)$ произвольной точки M через новые координаты $(x'; y')$ этой же точки M, и наоборот.

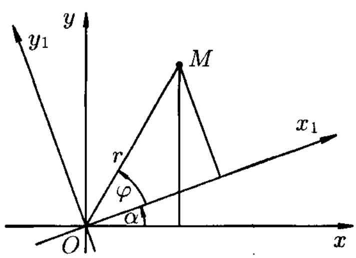


Рис. 29

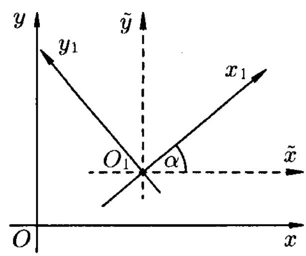


Рис. 30

Если новая система координат $O_1x_1y_1$ получена из старой Oxy путем параллельного переноса осей координат и последующим поворотом осей на угол α (см. рис. 30), то путем введения вспомогательной системы $O_1\tilde{x}\tilde{y}$ легко получить формулы

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \sin\alpha + x_0, \\ y = x' \cdot \sin\alpha + y' \cdot \cos\alpha + y_0, \end{cases}$$

выражающие старые координаты x и y произвольной точки через ее новые координаты x' и y'.

§ 10. ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

10.1. Основные понятия

Линия на плоскости часто задается как *множество точек*, обладающих некоторым только им присущим геометрическим свойством. Например, окружность радиуса R есть множество всех точек плоскости, удаленных на расстояние R от некоторой фиксированной точки O (центра окружности).

Введение на плоскости системы координат позволяет определять положение точки плоскости заданием двух чисел — ее координат, а положение линии на плоскости определять с помощью уравнения (т. е. равенства, связывающего координаты точек линии).

Уравнением линии (или кривой) на плоскости Oxy называется такое уравнение $F(x;y) = 0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y в уравнении линии называются *текущими координатами* точек линии.

Уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линии заменить исследованием его уравнения.

Так, для того чтобы установить лежит ли точка $A(x_0; y_0)$ на данной линии, достаточно проверить (не прибегая к геометрическим построениям), удовлетворяют ли координаты точки A уравнению этой линии в выбранной системе координат.

Пример 10.1. Лежат ли точки $K(-2;1)$ и $L(1;1)$ на линии $2x + y + 3 = 0$?

○ Решение: Подставив в уравнение вместо x и y координаты точки K, получим $2 \cdot (-2) + 1 + 3 = 0$. Следовательно, точка K лежит на данной линии. Точка L не лежит на данной линии, т. к. $2 \cdot 1 + 1 + 3 \neq 0$. ●

Задача о нахождении точек пересечения двух линий, заданных уравнениями $F_1(x;y) = 0$ и $F_2(x;y) = 0$, сводится к отысканию точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям обеих линий, т. е. сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x;y) = 0, \\ F_2(x;y) = 0. \end{cases}$$

Если эта система не имеет действительных решений, то линии не пересекаются.

Аналогичным образом вводится понятие уравнения линии в полярной системе координат.

Уравнение $F(r;\varphi) = 0$ называется *уравнением данной линии в полярной системе координат*, если координаты любой точки, лежащей на этой линии, и только они, удовлетворяют этому уравнению.

Линию на плоскости можно задать при помощи двух уравнений:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \tag{10.1}$$

где x и y — координаты произвольной точки $M(x;y)$, лежащей на данной линии, а t — переменная, называемая *параметром*; параметр t определяет положение точки $(x;y)$ на плоскости.

Например, если $x = t + 1$, $y = t^2$, то значению параметра $t = 2$ соответствует на плоскости точка $(3;4)$, т. к. $x = 2 + 1 = 3$, $y = 2^2 = 4$.

Если параметр t изменяется, то точка на плоскости перемещается, описывая данную линию. Такой способ задания линии называется *параметрическим*, а уравнения (10.1) — *параметрическими уравнениями линии.*

Чтобы перейти от параметрических уравнений линии к уравнению вида $F(x;y) = 0$, надо каким-либо способом из двух уравнений исключить параметр t. Например, от уравнений $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases}$ путем подстановки $t = x$ во второе уравнение, легко получить уравнение $y = x^2$; или $y - x^2 = 0$, т. е. вида $F(x;y) = 0$. Однако, заметим, такой переход не всегда целесообразен и не всегда возможен.

Линию на плоскости можно задать *векторным уравнением* $\bar{r} = \bar{r}(t)$, где t — скалярный переменный параметр. Каждому значению t_0 соответствует определенный вектор $\bar{r}_0 = \bar{r}(t_0)$ плоскости. При изменении параметра t конец вектора $\bar{r} = \bar{r}(t)$ опишет некоторую линию (см. рис. 31).

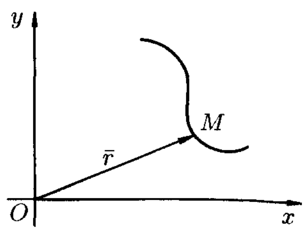


Рис. 31

Векторному уравнению линии $\bar{r} = \bar{r}(t)$ в системе координат Oxy соответствуют два скалярных уравнения (10.1), т. е. уравнения проекций на оси координат векторного уравнения линии есть ее параметрические уравнения.

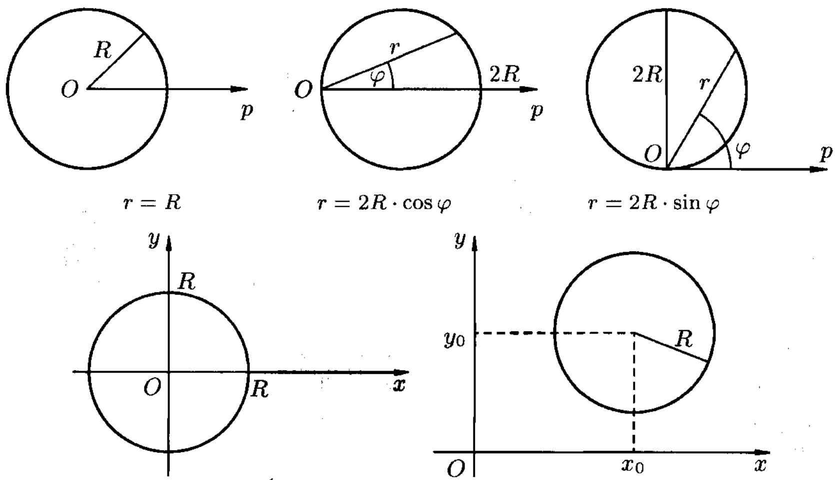
Векторное уравнение и параметрические уравнения линии имеют механический смысл. Если точка перемещается на плоскости, то указанные уравнения называются *уравнениями движения*, а линия — *траекторией* точки, параметр t при этом есть время.

Итак, всякой линии на плоскости соответствует некоторое уравнение вида $F(x;y) = 0$.

Всякому уравнению вида $F(x;y)=0$ соответствует, вообще говоря, некоторая линия, свойства которой определяются данным уравнением (выражение «вообще говоря» означает, что сказанное допускает исключения. Так, уравнению $(x-2)^2+(y-3)^2=0$ соответствует не линия, а точка $(2;3)$; уравнению $x^2+y^2+5=0$ на плоскости не соответствует никакой геометрический образ).

В аналитической геометрии на плоскости возникают две основные задачи. Первая: зная геометрические свойства кривой, найти ее уравнение; вторая: зная уравнение кривой, изучить ее форму и свойства.

На рисунках 32–40 приведены примеры некоторых кривых и указаны их уравнения.



$r=R$ $\qquad$ $r=2R\cdot\cos\varphi$ $\qquad$ $r=2R\cdot\sin\varphi$

$x^2+y^2=R^2$ или $\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t \end{cases}$ $\qquad$ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

Рис. 32. ***Окружность радиуса R***

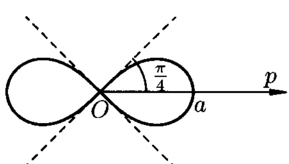


Рис. 33. ***Лемниската Бернулли***

Уравнение в прямоугольных координатах: $(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$, $a>0$; в полярных координатах: $r=a\cdot\sqrt{\cos 2\varphi}$.

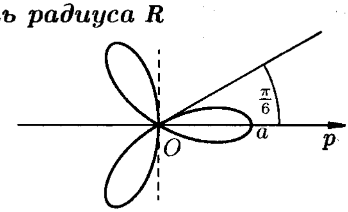


Рис. 34. ***Трехлепестковая роза***

В полярных координатах ее уравнение имеет вид $r=a\cdot\cos 3\varphi$, где $a>0$.

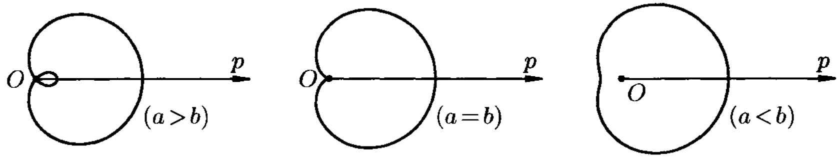


Рис. 35. ***Улитка Паскаля***

Уравнение в полярных координатах имеет вид $r = b + a\cos\varphi$.

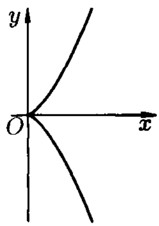


Рис. 36. ***Полукубическая парабола***

Уравнение кривой $y^2 = x^3$ или

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$$

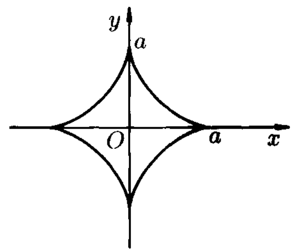


Рис. 37. ***Астроида***

Уравнение в прямоугольных координатах: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t, \\ y = a \cdot \sin^3 t. \end{cases}$$

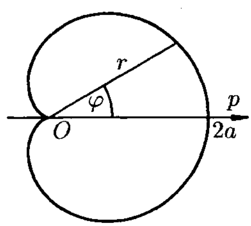


Рис. 38. ***Кардиоида***

Уравнение в полярных координатах имеет вид $r = a(1 + \cos\varphi)$, где $a > 0$. Кардиоида — частный случай улитки Паскаля ($a = b$).

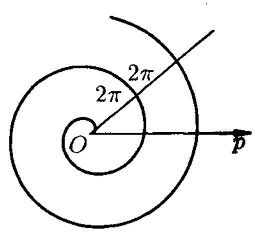


Рис. 39. ***Спираль Архимеда***

Уравнение кривой в полярных координатах $r = a\varphi$, где $a > 0$ — постоянное.

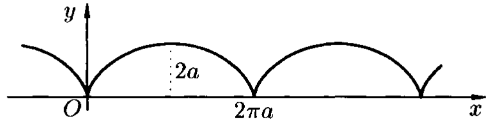


Рис. 40. ***Циклоида***

Параметрические уравнения циклоиды имеют вид $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ где $a > 0$. Циклоида — это кривая, которую описывает фиксированная точка окружности, катящаяся без скольжения по неподвижной прямой.

10.2. Уравнения прямой на плоскости

Простейшей из линий является прямая. Разным способам задания прямой соответствуют в прямоугольной системе координат разные виды ее уравнений.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть на плоскости Oxy задана произвольная прямая, не параллельная оси Oy. Ее положение вполне определяется ординатой b точки $N(0; b)$ пересечения с осью Oy и углом α между осью Ox и прямой (см. рис. 41).

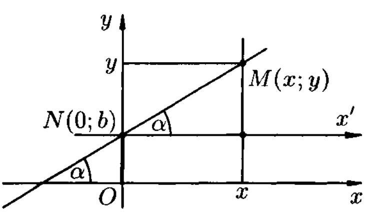


Рис. 41

Под углом α $(0 \leqslant \alpha < \pi)$ наклона прямой понимается наименьший угол, на который нужно повернуть вокруг точки пересечения прямой и оси Ox против часовой стрелки ось Ox до ее совпадения с прямой.

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x; y)$ (см. рис. 41). Проведем через точку N ось Nx', параллельную оси Ox и одинаково с ней направленную. Угол между осью Nx' и прямой равен α. В системе $Nx'y$ точка M имеет координаты x и $y - b$. Из определения тангенса угла следует равенство $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y-b}{x}$, т. е. $y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x + b$. Введем обозначение $\operatorname{tg}\alpha = k$, получаем уравнение

$$\boxed{y = kx + b,} \tag{10.2}$$

которому удовлетворяют координаты любой точки $M(x; y)$ прямой. Можно убедиться, что координаты любой точки $P(x; y)$, лежащей вне данной прямой, уравнению (10.2) не удовлетворяют.

Число $k = \operatorname{tg}\alpha$ называется ***угловым коэффициентом*** прямой, а уравнение (10.2) — ***уравнением прямой с угловым коэффициентом.***

Если прямая проходит через начало координат, то $b = 0$ и, следовательно, уравнение этой прямой будет иметь вид $y = kx$.

Если прямая параллельна оси Ox, то $\alpha = 0$, следовательно, $k = \operatorname{tg}\alpha = 0$ и уравнение (10.2) примет вид $y = b$.

Если прямая параллельна оси Oy, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$, уравнение (10.2) теряет смысл, т. к. для нее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не существует. В этом случае уравнение прямой будет иметь вид

$$x = a, \tag{10.3}$$

где a — абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox. Отметим, что уравнения (10.2) и (10.3) есть уравнения первой степени.

Общее уравнение прямой

Рассмотрим уравнение первой степени относительно x и y в общем виде

$$Ax + By + C = 0, \tag{10.4}$$

где A, B, C — произвольные числа, причем A и B не равны нулю одновременно.

Покажем, что уравнение (10.4) есть уравнение прямой линии. Возможны два случая.

Если $B = 0$, то уравнение (10.4) имеет вид $Ax + C = 0$, причем $A \neq 0$, т. е. $x = -\frac{C}{A}$. Это есть уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$.

Если $B \neq 0$, то из уравнения (10.4) получаем $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Это есть уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B}$.

Итак, уравнение (10.4) есть уравнение прямой линии, оно называется *общим уравнением прямой*.

Некоторые частные случаи общего уравнения прямой:

1) если $A = 0$, то уравнение приводится к виду $y = -\frac{C}{B}$. Это есть уравнение прямой, параллельной оси Ox;

2) если $B = 0$, то прямая параллельна оси Oy;

3) если $C = 0$, то получаем $Ax+By = 0$. Уравнению удовлетворяют координаты точки $O(0;0)$, прямая проходит через начало координат.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая проходит через точку $M(x_0; y_0)$ и ее направление характеризуется угловым коэффициентом k. Уравнение этой прямой можно записать в виде $y = kx + b$, где b — пока неизвестная величина. Так как прямая проходит через точку $M(x_0; y_0)$, то координаты точки удовлетворяют уравнению прямой: $y_0 = kx_0 + b$. Отсюда $b = y_0 - kx_0$.

Подставляя значение b в уравнение $y = kx + b$, получим искомое уравнение прямой $y = kx + y_0 - kx_0$, т. е.

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0).} \tag{10.5}$$

Уравнение (10.5) с различными значениями k называют также *уравнениями пучка прямых* с центром в точке $M(x_0; y_0)$. Из этого пучка нельзя определить лишь прямую, параллельную оси Oy.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть прямая проходит через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Уравнение прямой, проходящей через точку M_1, имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1), \tag{10.6}$$

где k — пока неизвестный коэффициент.

Так как прямая проходит через точку $M_2(x_2; y_2)$, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (10.6): $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Отсюда находим $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Подставляя найденное значение k в уравнение (10.6), получим уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.} \tag{10.7}$$

Предполагается, что в этом уравнении $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.

Если $x_2 = x_1$, то прямая, проходящая через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, параллельна оси ординат. Ее уравнение имеет вид $x = x_1$.

Если $y_2 = y_1$, то уравнение прямой может быть записано в виде $y = y_1$, прямая M_1M_2 параллельна оси абсцисс.

Уравнение прямой в отрезках

Пусть прямая пересекает ось Ox в точке $M_1(a; 0)$, а ось Oy — в точке $M_2(0; b)$ (см. рис. 42). В этом случае уравнение (10.7) примет вид

$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}, \quad \text{т. е.} \quad \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.}$$

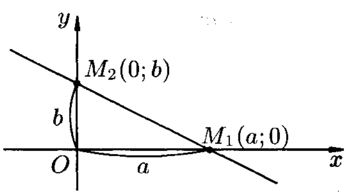


Рис. 42

Это уравнение называется *уравнением прямой в отрезках*, так как числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Найдем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно данному ненулевому вектору $\bar{n} = (A; B)$.

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x; y)$ и рассмотрим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ (см. рис. 43). Поскольку векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_0M}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, то есть

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.} \tag{10.8}$$

Уравнение (10.8) называется *уравнением прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору.*

Вектор $\bar{n} = (A; B)$, перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором этой прямой.*

Уравнение (10.8) можно переписать в виде

$$Ax + By + C = 0, \tag{10.9}$$

где A и B — координаты нормального вектора, $C = -Ax_0 - By_0$ — свободный член. Уравнение (10.9) есть общее уравнение прямой (см. (10.4)).

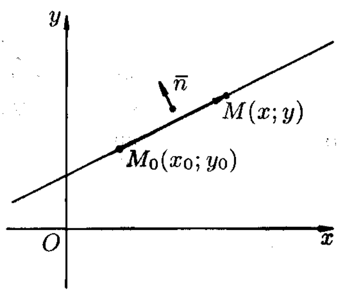


Рис. 43

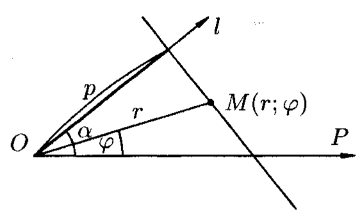


Рис. 44

Полярное уравнение прямой

Найдем уравнение прямой в полярных координатах. Ее положение можно определить, указав расстояние p от полюса O до данной прямой и угол α между полярной осью OP и осью l, проходящей через полюс O перпендикулярно данной прямой (см. рис. 44).

Для любой точки $M(r; \varphi)$ на данной прямой имеем:

$$\text{пр}_l\, \overline{OM} = p.$$

С другой стороны,

$$\text{пр}_l \overline{OM} = |\overline{OM}| \cdot \cos(\alpha - \varphi) = r \cdot \cos(\varphi - \alpha).$$

Следовательно,

$$\boxed{r\cos(\varphi - \alpha) = p.} \qquad (10.10)$$

Полученное уравнение (10.10) и есть *уравнение прямой в полярных координатах.*

Нормальное уравнение прямой

Пусть прямая определяется заданием p и α (см. рис. 45). Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy. Введем полярную систему, взяв O за полюс и Ox за полярную ось. Уравнение прямой можно записать в виде

$$r \cdot \cos(\varphi - \alpha) - p = 0, \quad \text{т. е.} \quad r \cdot \cos\varphi \cos\alpha + r \sin\varphi \sin\alpha - p = 0.$$

Но, в силу формул, связывающих прямоугольные и полярные координаты, имеем: $r\cos\varphi = x$, $r\sin\varphi = y$. Следовательно, уравнение (10.10) прямой в прямоугольной системе координат примет вид

$$\boxed{x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0.} \qquad (10.11)$$

Уравнение (10.11) называется *нормальным уравнением прямой.*

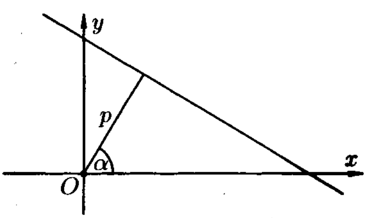


Рис. 45

Покажем, как привести уравнение (10.4) прямой к виду (10.11).

Умножим все члены уравнения (10.4) на некоторый множитель $\lambda \neq 0$. Получим $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$. Это уравнение должно обратиться в уравнение (10.11). Следовательно, должны выполняться равенства: $\lambda A = \cos\alpha$, $\lambda B = \sin\alpha$, $\lambda C = -p$. Из первых двух равенств находим

$$\lambda^2 A^2 + \lambda^2 B^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha, \quad \text{т. е.} \quad \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Множитель λ называется *нормирующим множителем.* Согласно третьему равенству $\lambda C = -p$ знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена C общего уравнения прямой.

Пример 10.2. Привести уравнение $-3x + 4y + 15 = 0$ к нормальному виду.

○ Решение: Находим нормирующий множитель $\lambda = \dfrac{1}{-\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = -\dfrac{1}{5}$. Умножая данное уравнение на λ, получим искомое нормальное уравнение прямой: $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$. ●

10.3. Прямая линия на плоскости. Основные задачи

Угол между двумя прямыми и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ (см. рис. 46).

Требуется найти угол φ, на который надо повернуть в положительном направлении прямую L_1 вокруг точки их пересечения до совпадения с прямой L_2.

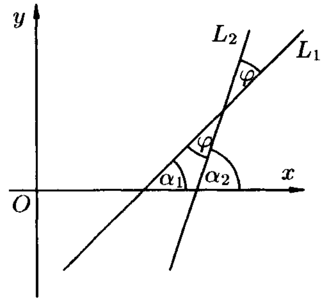


Рис. 46

○ Решение: Имеем $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$ (теорема о внешнем угле треугольника) или $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Если $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, поэтому

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},} \qquad (10.12)$$

откуда легко получим величину искомого угла. ●

Если требуется вычислить острый угол между прямыми, не учитывая, какая прямая является первой, какая — второй, то правая часть формулы (10.12) берется по модулю, т. е. $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$.

Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то $\varphi = 0$ и $\operatorname{tg}\varphi = 0$. Из формулы (10.12) следует $k_2 - k_1 = 0$, т. е. $k_2 = k_1$. И обратно, если прямые L_1 и L_2 таковы, что $k_1 = k_2$, то $\operatorname{tg}\varphi = 0$, т. е. прямые параллельны. Следовательно, *условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов:* $k_1 = k_2$.

Если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1} = 0$. Отсюда $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$, т. е. $k_1 \cdot k_2 = -1$ (или $k_2 = -\frac{1}{k_1}$). Справедливо и обратное утверждение. Таким образом, *условием перпендикулярности прямых является равенство* $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы прямая L уравнением $Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0; y_0)$ (см. рис. 47). Требуется найти расстояние от точки M_0 до прямой L.

Решение: Расстояние d от точки M_0 до прямой L равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1; y_1)$ — произвольная точка прямой L, на направление нормального вектора $\bar{n} = (A; B)$. Следовательно,

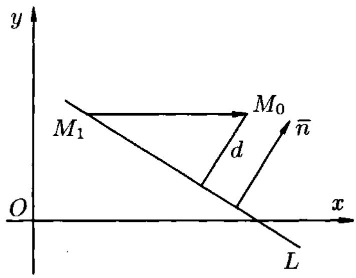


Рис. 47

$$d = |\text{пр}_{\bar{n}}\, \overline{M_1M_0}| = \left|\frac{\overline{M_1M_0} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|}\right| =$$
$$= \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$
$$= \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Так как точка $M_1(x_1; y_1)$ принадлежит прямой L, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, т. е. $C = -Ax_1 - By_1$. Поэтому

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},} \tag{10.13}$$

что и требовалось получить. ●

Пример 10.3. Найти расстояние от точки $M_0(2; -1)$ до прямой $3x + 4y - 22 = 0$.

Решение: По формуле (10.13) получаем

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) - 22|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4.$$ ●

§ 11. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

11.1. Основные понятия

Рассмотрим линии, определяемые уравнениями второй степени относительно текущих координат

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{11.1}$$

Коэффициенты уравнения — действительные числа, но по крайней мере одно из чисел A, B или C отлично от нуля. Такие линии называются *линиями (кривыми) второго порядка.* Ниже будет установлено, что уравнение (11.1) определяет на плоскости окружность, эллипс, гиперболу или параболу. Прежде, чем переходить к этому утверждению, изучим свойства перечисленных кривых.

11.2. Окружность

Простейшей кривой второго порядка является окружность. Напомним, что ***окружностью*** радиуса R с центром в точке M_0 называется множество всех точек M плоскости, удовлетворяющих условию $M_0M = R$. Пусть точка M_0 в прямоугольной системе координат Oxy имеет координаты x_0, y_0, а $M(x; y)$ — произвольная точка окружности (см. рис. 48).

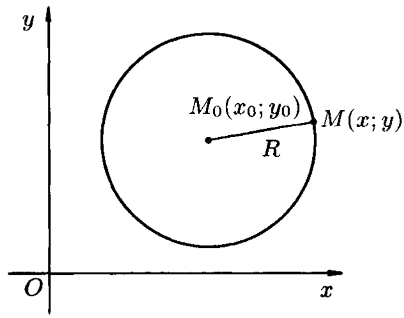


Рис. 48

Тогда из условия $M_0M = R$ получаем уравнение

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R,$$

то есть

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.} \qquad (11.2)$$

Уравнению (11.2) удовлетворяют координаты любой точки $M(x; y)$ данной окружности и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на окружности.

Уравнение (11.2) называется *каноническим уравнением окружности.*

В частности, полагая $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, получим уравнение окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2$.

Уравнение окружности (11.2) после несложных преобразований примет вид $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0$. При сравнении этого уравнения с общим уравнением (11.1) кривой второго порядка легко заметить, что для уравнения окружности выполнены два условия:

1) коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой;

2) отсутствует член, содержащий произведение xy текущих координат.

Рассмотрим обратную задачу. Положив в уравнении (11.1) значения $B = 0$ и $A = C \neq 0$, получим

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (11.3)$$

Преобразуем это уравнение:

$$x^2 + y^2 + 2\frac{D}{A}x + 2\frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0,$$

т. е.

$$x^2 + y^2 + \frac{2D}{A}x + \frac{D^2}{A^2} + y^2 + 2\frac{E}{A}y + \frac{E^2}{A^2} + \frac{F}{A} - \frac{D^2}{A^2} - \frac{E^2}{A^2} = 0,$$

т. е.
$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}. \qquad (11.4)$$

Отсюда следует, что уравнение (11.3) определяет окружность при условии $\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}>0$. Ее центр находится в точке $O_1\left(-\frac{D}{A};-\frac{E}{A}\right)$, а радиус
$$R=\sqrt{\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}}.$$

Если же $\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}=0$, то уравнение (11.3) имеет вид
$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=0.$$

Ему удовлетворяют координаты единственной точки $O_1\left(-\frac{D}{A};-\frac{E}{A}\right)$. В этом случае говорят: «окружность выродилась в точку» (имеет нулевой радиус).

Если $\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}<0$, то уравнение (11.4), а следовательно, и равносильное уравнение (11.3), не определяет никакой линии, так как правая часть уравнения (11.4) отрицательна, а левая часть — не отрицательна (говорят: «окружность мнимая»).

11.3. Эллипс

Каноническое уравнение эллипса

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

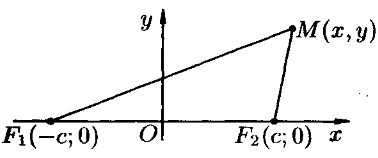


Рис. 49

Обозначим фокусы через F_1 и F_2, расстояние между ними через $2c$, а сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов — через $2a$ (см. рис. 49). По определению $2a>2c$, т. е. $a>c$.

Для вывода уравнения эллипса выберем систему координат Oxy так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox, а начало координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2. Тогда фокусы будут иметь следующие координаты: $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.

Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка эллипса. Тогда, согласно определению эллипса, $MF_1 + MF_2 = 2a$, т. е.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a. \tag{11.5}$$

Это, по сути, и есть уравнение эллипса.

Преобразуем уравнение (11.5) к более простому виду следующим образом:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$
$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$
$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx,$$
$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$
$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

Так как $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$. Положим

$$\boxed{a^2 - c^2 = b^2.} \tag{11.6}$$

Тогда последнее уравнение примет вид $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ или

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.} \tag{11.7}$$

Можно доказать, что уравнение (11.7) равносильно исходному уравнению. Оно называется ***каноническим уравнением эллипса***.

Эллипс — кривая второго порядка.

Исследование формы эллипса по его уравнению

Установим форму эллипса, пользуясь его каноническим уравнением.

1. Уравнение (11.7) содержит x и y только в четных степенях, поэтому если точка $(x;y)$ принадлежит эллипсу, то ему также принадлежат точки $(x;-y)$, $(-x;y)$, $(-x;-y)$. Отсюда следует, что эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки $O(0;0)$, которую называют *центром эллипса*.

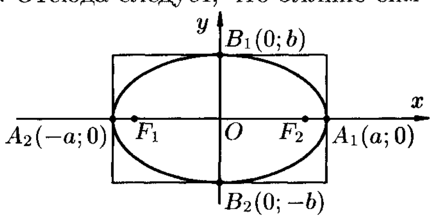


Рис. 50

2. Найдем точки пересечения эллипса с осями координат. Положив $y = 0$, находим две точки $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$, в которых ось Ox пересекает эллипс (см. рис. 50). Положив в уравнении (11.7) $x = 0$, находим точки пересечения эллипса с осью Oy: $B_1(0;b)$ и $B_2(0;-b)$. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются *вершинами эллипса*. Отрезки A_1A_2 и

B_1B_2, а также их длины $2a$ и $2b$ называются соответственно *большой и малой осями* эллипса. Числа a и b называются соответственно большой и малой *полуосями* эллипса.

3. Из уравнения (11.7) следует, что каждое слагаемое в левой части не превосходит единицы, т. е. имеют место неравенства $\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1$ и $\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ или $-a \leqslant x \leqslant a$ и $-b \leqslant y \leqslant b$. Следовательно, все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, образованного прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$.

4. В уравнении (11.7) сумма неотрицательных слагаемых $\frac{x^2}{a^2}$ и $\frac{y^2}{b^2}$ равна единице. Следовательно, при возрастании одного слагаемого другое будет уменьшаться, т. е. если $|x|$ возрастает, то $|y|$ уменьшается и наоборот.

Из сказанного следует, что эллипс имеет форму, изображенную на рис. 50 (овальная замкнутая кривая).

Дополнительные сведения об эллипсе

Форма эллипса зависит от отношения $\frac{b}{a}$. При $b = a$ эллипс превращается в окружность, уравнение эллипса (11.7) принимает вид $x^2+y^2 = a^2$. В качестве характеристики формы эллипса чаще пользуются отношением $\frac{c}{a}$.

Отношение $\frac{c}{a}$ половины расстояния между фокусами к большой полуоси эллипса называется ***эксцентриситетом эллипса*** и обозначается буквой ε («эпсилон»):

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a},} \tag{11.8}$$

причем $0 < \varepsilon < 1$, так как $0 < c < a$. С учетом равенства (11.6) формулу (11.8) можно переписать в виде

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

т. е.

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad \text{и} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Отсюда видно, что чем меньше эксцентриситет эллипса, тем эллипс будет менее сплющенным; если положить $\varepsilon = 0$, то эллипс превращается в окружность.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка эллипса с фокусами F_1 и F_2 (см. рис. 51). Длины отрезков $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ называются *фокальными радиусами* точки M. Очевидно,

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Имеют место формулы

$$r_1 = a + \varepsilon x \quad \text{и} \quad r_2 = a - \varepsilon x.$$

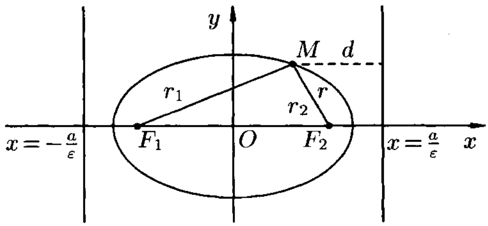


Рис. 51

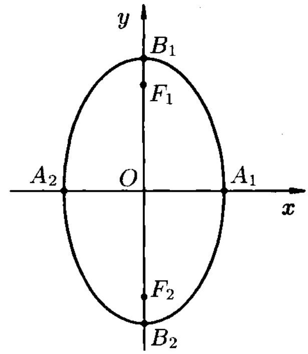


Рис. 52

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются ***директрисами*** эллипса. Значение директрисы эллипса выявляется следующим утверждением.

Теорема 11.1. Если r — расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса, d — расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса: $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

Из равенства (11.6) следует, что $a > b$. Если же $a < b$, то уравнение (11.7) определяет эллипс, большая ось которого $2b$ лежит на оси Oy, а малая ось $2a$ — на оси Ox (см. рис. 52). Фокусы такого эллипса находятся в точках $F_1(0; c)$ и $F_2(0; -c)$, где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

11.4. Гипербола

Каноническое уравнение гиперболы

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

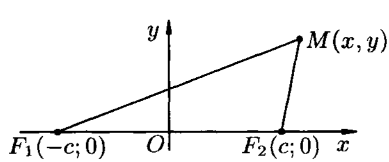


Рис. 53

Обозначим фокусы через F_1 и F_2, расстояние между ними через $2c$, а модуль разности расстояний от каждой точки гиперболы до фокусов через $2a$. По определению $2a < 2c$, т. е. $a < c$.

Для вывода уравнения гиперболы выберем систему координат Oxy так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox, а начало координат совпало с серединой отрезка F_1F_2 (см. рис. 53). Тогда фокусы будут иметь координаты $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.

Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка гиперболы. Тогда согласно определению гиперболы $|MF_1 - MF_2| = 2a$ или $MF_1 - MF_2 = \pm 2a$, т. е. $\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$. После упрощений, как это было сделано при выводе уравнения эллипса, получим ***каноническое уравнение гиперболы***

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,} \tag{11.9}$$

где

$$\boxed{b^2 = c^2 - a^2.} \tag{11.10}$$

Гипербола есть линия второго порядка.

Исследование формы гиперболы по ее уравнению

Установим форму гиперболы, пользуясь ее каконическим уравнением.

1. Уравнение (11.9) содержит x и y только в четных степенях. Следовательно, гипербола симметрична относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки $O(0;0)$, которую называют ***центром гиперболы***.

2. Найдем точки пересечения гиперболы с осями координат. Положив $y = 0$ в уравнении (11.9), находим две точки пересечения гиперболы с осью Ox: $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$. Положив $x = 0$ в (11.9), получаем $y^2 = -b^2$, чего быть не может. Следовательно, гипербола ось Oy не пересекает.

Точки $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$ называются ***вершинами*** гиперболы, а отрезок $A_1A_2 = 2a$ — ***действительной осью***, отрезок $OA_1 = OA_2 = a$ — ***действительной полуосью*** гиперболы.

Отрезок B_1B_2 ($B_1B_2 = 2b$), соединяющий точки $B_1(0;b)$ и $B_2(0;-b)$ называется ***мнимой осью***, число b — ***мнимой полуосью***. Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ называется ***основным прямоугольником гиперболы***.

3. Из уравнения (11.9) следует, что уменьшаемое $\frac{x^2}{a^2}$ не меньше единицы, т. е. что $\frac{x^2}{a^2} \geqslant 1$ или $|x| \geqslant a$. Это означает, что точки гиперболы расположены справа от прямой $x = a$ (*правая ветвь* гиперболы) и слева от прямой $x = -a$ (*левая ветвь* гиперболы).

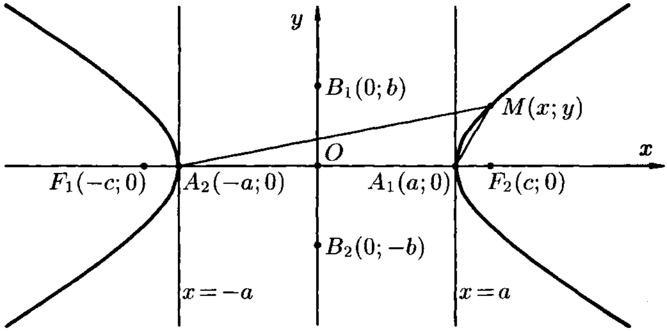


Рис. 54

4. Из уравнения (11.9) гиперболы видно, что когда $|x|$ возрастает, то и $|y|$ возрастает. Это следует из того, что разность $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ сохраняет постоянное значение, равное единице.

Из сказанного следует, что гипербола имеет форму, изображенную на рисунке 54 (кривая, состоящая из двух неограниченных ветвей).

Асимптоты гиперболы

Прямая L называется *асимптотой* неограниченной кривой K, если расстояние d от точки M кривой K до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки M вдоль кривой K от начала координат. На рисунке 55 приведена иллюстрация понятия асимптоты: прямая L является асимптотой для кривой K.

Покажем, что гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ имеет две асимптоты:

$$\boxed{y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x.} \tag{11.11}$$

Так как прямые (11.11) и гипербола (11.9) симметричны относительно координатных осей, то достаточно рассмотреть только те точки указанных линий, которые расположены в первой четверти.

Возьмем на прямой $y = \frac{b}{a}x$ точку N имеющей ту же абсциссу x, что и точка $M(x;y)$ на гиперболе $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (см. рис. 56), и найдем разность MN между ординатами прямой и ветви гиперболы:

$$MN = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) =$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

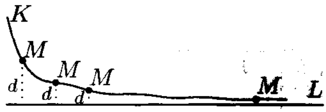


Рис. 55

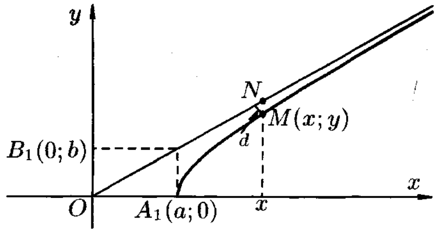


Рис. 56

Как видно, по мере возрастания x знаменатель дроби увеличивается; числитель — есть постоянная величина. Стало быть, длина отрезка MN стремится к нулю. Так как MN больше расстояния d от точки M до прямой, то d и подавно стремится к нулю. Итак, прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы (11.9).

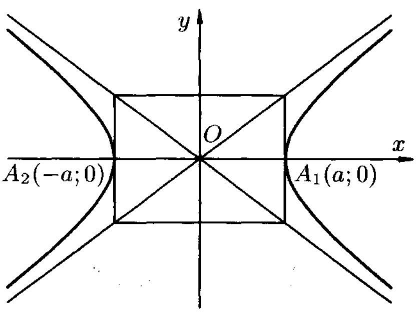


Рис. 57

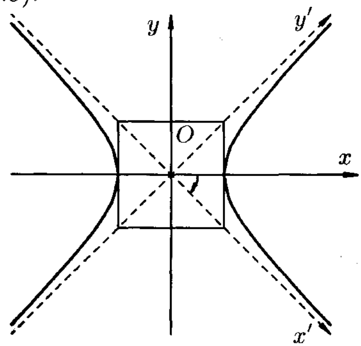


Рис. 58

При построении гиперболы (11.9) целесообразно сначала построить основной прямоугольник гиперболы (см. рис. 57), провести прямые, проходящие через противоположные вершины этого прямоугольника, — асимптоты гиперболы и отметить вершины A_1 и A_2 гиперболы.

Уравнение равносторонней гиперболы, асимптотами которой служат оси координат

Гипербола (11.9) называется ***равносторонней***, если ее полуоси равны ($a = b$). Ее каноническое уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (11.12)$$

Асимптоты равносторонней гиперболы имеют уравнения $y = x$ и $y = -x$ и, следовательно, являются биссектрисами координатных углов.

Рассмотрим уравнение этой гиперболы в новой системе координат $Ox'y'$ (см. рис. 58), полученной из старой поворотом осей координат на угол $\alpha = -\frac{\pi}{4}$. Используем формулы поворота осей координат (их вывод показан на с. 63):

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Подставляем значения x и y в уравнение (11.12):

$$\left(x'\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - y'\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 - \left(x'\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + y'\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = a^2,$$

$$\frac{1}{2}(x'+y')^2 - \frac{1}{2}(-x'+y')^2 = a^2, \quad x'\cdot y' = \frac{a^2}{2}, \text{ или } y' = \frac{k}{x'},$$

где $k = \frac{a^2}{2}$.

Уравнение равносторонней гиперболы, для которой оси Ox и Oy являются асимптотами, будет иметь вид $y = \dfrac{k}{x}$.

Дополнительные сведения о гиперболе

Эксцентриситетом гиперболы (11.9) называется отношение расстояния между фокусами к величине действительной оси гиперболы, обозначается ε:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}.}$$

Так как для гиперболы $c > a$, то эксцентриситет гиперболы больше единицы: $\varepsilon > 1$. Эксцентриситет характеризует форму гиперболы. Действительно, из равенства (11.10) следует, что $\dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{c^2}{a^2} - 1$, т. е. $\dfrac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ и $\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$.

Отсюда видно, что чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем меньше отношение $\dfrac{b}{a}$ ее полуосей, а значит, тем более вытянут ее основной прямоугольник.

Эксцентриситет равносторонней гиперболы равен $\sqrt{2}$. Действительно,

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+a^2}}{a} = \sqrt{\frac{2a^2}{a^2}} = \sqrt{2}.$$

Фокальные радиусы $r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$ и $r_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ для точек правой ветви гиперболы имеют вид $r_1 = \varepsilon x + a$ и $r_2 = \varepsilon x - a$, а для левой — $r_1 = -(\varepsilon x + a)$ и $r_2 = -(\varepsilon x - a)$.

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* гиперболы. Так как для гиперболы $\varepsilon > 1$, то $\dfrac{a}{\varepsilon} < a$. Это значит, что правая директриса расположена между центром и правой вершиной гиперболы, левая — между центром и левой вершиной.

Директрисы гиперболы имеют то же свойство $\frac{r}{d} = \varepsilon$, что и директрисы эллипса.

Кривая, определяемая уравнением $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, также есть гипербола, действительная ось $2b$ которой расположена на оси Oy, а мнимая ось $2a$ — на оси Ox. На рисунке 59 она изображена пунктиром.

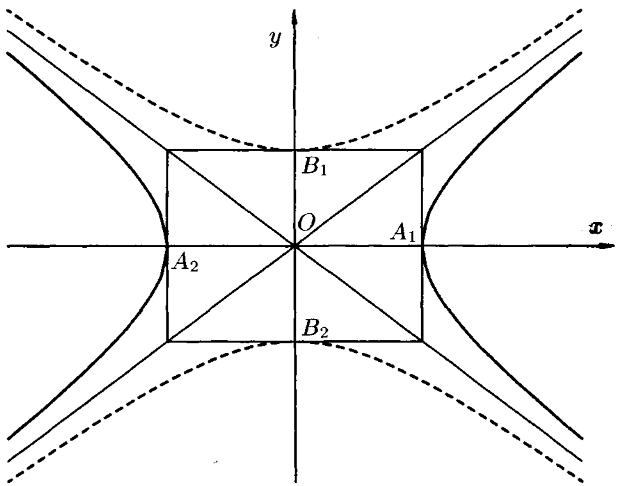


Рис. 59

Очевидно, что гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ имеют общие асимптоты. Такие гиперболы называются *сопряженными*.

11.5. Парабола

Каноническое уравнение параболы

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой*. Расстояние от фокуса F до директрисы называется *параметром* параболы и обозначается через p ($p > 0$).

Для вывода уравнения параболы выберем систему координат Oxy так, чтобы ось Ox проходила через фокус F перпендикулярно директрисе в направлении от директрисы к F, а начало координат O расположим посередине между фокусом и директрисой (см. рис. 60). В выбранной системе фокус F имеет координаты $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а уравнение директрисы имеет вид $x = -\frac{p}{2}$, или $x + \frac{p}{2} = 0$.

Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка параболы. Соединим точку M с F. Проведем отрезок MN перпендикулярно директрисе. Согласно определению параболы $MF = MN$. По формуле расстояния между двумя точками находим:

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad \text{а} \quad MN = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y-y)^2}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

т. е.

$$\boxed{y^2 = 2px.} \qquad (11.13)$$

Уравнение (11.13) называется ***каноническим уравнением параболы.*** Парабола есть линия второго порядка.

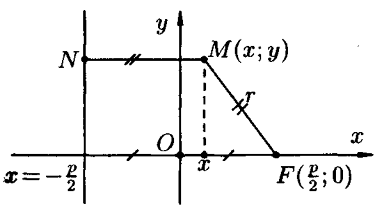


Рис. 60

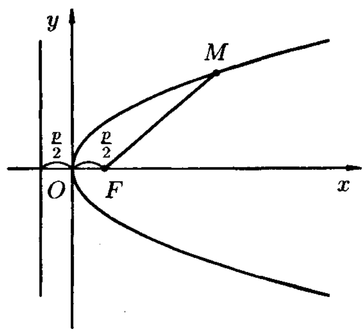


Рис. 61

Исследование форм параболы по ее уравнению

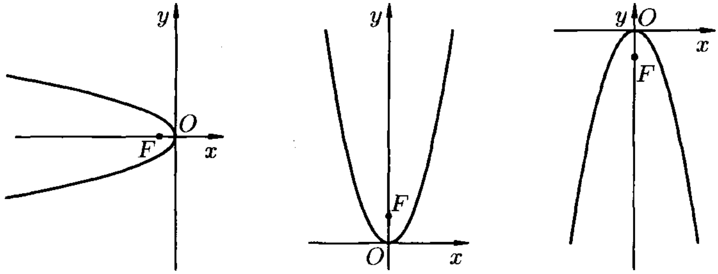
1. В уравнении (11.13) переменная y входит в четной степени, значит, парабола симметрична относительно оси Ox; ось Ox является *осью симметрии* параболы.

2. Так как $p > 0$, то из (11.13) следует, что $x \geqslant 0$. Следовательно, парабола расположена справа от оси Oy.

3. При $x = 0$ имеем $y = 0$. Следовательно, парабола проходит через начало координат.

4. При неограниченном возрастании x модуль y также неограниченно возрастает. Парабола $y^2 = 2px$ имеет вид (форму), изображенный на рисунке 61. Точка $O(0;0)$ называется *вершиной параболы*, отрезок $FM = r$ называется *фокальным радиусом* точки M.

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ $(p > 0)$ также определяют параболы, они изображены на рисунке 62.



$y^2 = -2px$ $\qquad$ $x^2 = 2py$ $\qquad$ $x^2 = -2py$

Рис. 62

Нетрудно показать, что график квадратного трехчлена $y = Ax^2 + Bx + C$, где $A \neq 0$, B и C любые действительные числа, представляет собой параболу в смысле приведенного выше ее определения.

11.6. Общее уравнение линий второго порядка

Уравнения кривых второго порядка с осями симметрии, параллельными координатным осям

Найдем сначала уравнение эллипса с центром в точке $O_1(x_0; y_0)$, оси симметрии которого параллельны координатным осям Ox и Oy и полуоси соответственно равны a и b. Поместим в центре эллипса O_1 начало новой системы координат $O_1x'y'$, оси которой O_1x' и O_1y' параллельны соответствующим осям Ox и Oy и одинаково с ними направленны (см. рис. 63).

В этой системе координат уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Так как $x' = x - x_0$, $y' = x - y_0$ (формулы параллельного переноса, см. с. 62), то в старой системе координат уравнение эллипса запишется в виде

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Аналогично рассуждая, получим уравнение гиперболы с центром в точке $O_1(x_0; y_0)$ и полуосями a и b (см. рис. 64):

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

И, наконец, параболы, изображенные на рисунке 65, имеют соответствующие уравнения.

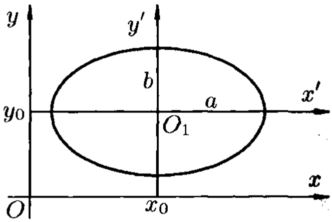


Рис. 63

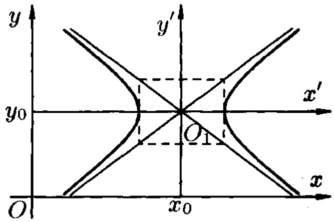


Рис. 64

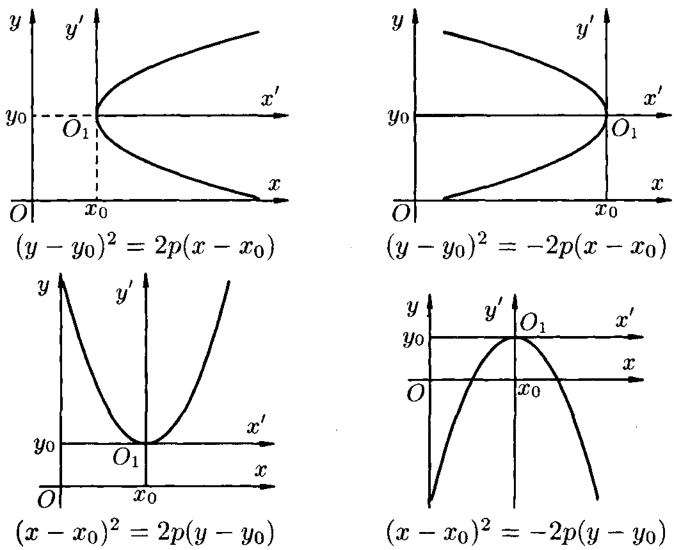


Рис. 65

Уравнение $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

Уравнения эллипса, гиперболы, параболы и уравнение окружности $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ после преобразований (раскрыть скобки, перенести все члены уравнения в одну сторону, привести подобные члены, ввести новые обозначения для коэффициентов) можно записать с помощью *единого* уравнения вида

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{11.14}$$

где коэффициенты A и C не равны нулю одновременно.

Возникает вопрос: всякое ли уравнение вида (11.14) определяет одну из кривых (окружность, эллипс, гипербола, парабола) второго порядка? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 11.2. Уравнение (11.14) всегда определяет: либо окружность (при $A = C$), либо эллипс (при $A \cdot C > 0$), либо гиперболу (при $A \cdot C < 0$), либо параболу (при $A \cdot C = 0$). При этом возможны случаи вырождения: для эллипса (окружности) — в точку или мнимый эллипс (окружность), для гиперболы — в пару пересекающихся прямых, для параболы — в пару параллельных прямых.

Пример 11.1. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением $4x^2 + 5y^2 + 20x - 30y + 10 = 0$.

❍ Решение: Предложенное уравнение определяет эллипс ($A{\cdot}C = 4{\cdot}5 > > 0$). Действительно, проделаем следующие преобразования:

$$4\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) + 5(y^2 - 6y + 9) - 25 - 45 + 10 = 0,$$

$$4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 5(y-3)^2 = 60, \qquad \frac{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2}{15} + \frac{(y-3)^2}{12} = 1.$$

Получилось каноническое уравнение эллипса с центром в $O_1\left(-\frac{5}{2}; 3\right)$ и полуосями $a = \sqrt{15}$ и $b = \sqrt{12}$. ●

Пример 11.2. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением $x^2 + 10x - 2y + 11 = 0$.

❍ Решение: Указанное уравнение определяет параболу ($C = 0$). Действительно,

$$x^2 + 10x + 25 - 2y + 11 - 25 = 0,$$

$$(x+5)^2 = 2y + 14, \quad (x+5)^2 = 2(y+7).$$

Получилось каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $O_1(-5; -7)$ и $p = 1$. ●

Пример 11.3. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением $4x^2 - y^2 + 8x - 8y - 12 = 0$ ($A \cdot C = -4 < 0$).

❍ Решение: Преобразуем уравнение:

$$4(x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 8y + 16) - 4 + 16 - 12 = 0,$$

$$4(x+1)^2 - (y+4)^2 = 0,$$

$$(2(x+1) + (y+4)) \cdot (2(x+1) - (y+4)) = 0,$$

$$(2x + y + 6)(2x - y - 2) = 0.$$

Это уравнение определяет две пересекающиеся прямые $2x + y + 6 = 0$ и $2x - y - 2 = 0$. ●

Общее уравнение второго порядка

Рассмотрим теперь общее уравнение второй степени с двумя неизвестными:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{11.15}$$

Оно отличается от уравнения (11.14) наличием члена с произведением координат ($B \neq 0$). Можно, путем поворота координатных осей на угол α, преобразовать это уравнение, чтобы в нем член с произведением координат отсутствовал.

Используя формулы поворота осей (с. 63)

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

выразим старые координаты через новые:

$$\begin{aligned} A(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha)^2 + 2B(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha)(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha)+ \\ + C(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha)^2 + 2D(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha)+ \\ + 2E(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha) + F = 0. \end{aligned}$$

Выберем угол α так, чтобы коэффициент при $x' \cdot y'$ обратился в нуль, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$-2A\cos\alpha\sin\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

т. е.

$$(C - A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha = 0, \tag{11.16}$$

т. е.

$$2B\cos 2\alpha = (A - C)\sin 2\alpha.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}. \tag{11.17}$$

Таким образом, при повороте осей на угол α, удовлетворяющий условию (11.17), уравнение (11.15) сводится к уравнению (11.14).

Вывод: общее уравнение второго порядка (11.15) определяет на плоскости (если не считать случаев вырождения и распадения) следующие кривые: окружность, эллипс, гиперболу, параболу.

Замечание: Если $A = C$, то уравнение (11.17) теряет смысл. В этом случае $\cos 2\alpha = 0$ (см. (11.16)), тогда $2\alpha = 90^\circ$, т. е. $\alpha = 45^\circ$. Итак, при $A = C$ систему координат следует повернуть на 45°.

Глава IV. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Лекции 10–12

§ 12. УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

12.1. Основные понятия

Поверхность и ее уравнение

Поверхность в пространстве, как правило, можно рассматривать как геометрическое место точек, удовлетворяющих какому-либо условию. Например, ***сфера*** радиуса R с центром в точке O_1 есть геометрическое место всех точек пространства, находящихся от точки O_1 на расстоянии R.

Прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел x, y и z — их координатами. Свойство, общее всем точкам поверхности, можно записать в виде уравнения, связывающего координаты всех точек поверхности.

Уравнением данной поверхности в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется такое уравнение $F(x, y, z) = 0$ с тремя переменными x, y и z, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности. Переменные x, y и z в уравнении поверхности называются ***текущими координатами*** точек поверхности.

Уравнение поверхности позволяет изучение геометрических свойств поверхности заменить исследованием его уравнения. Так, для того, чтобы узнать, лежит ли точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ на данной поверхности, достаточно подставить координаты точки M_1 в уравнение поверхности вместо переменных: если эти координаты удовлетворяют уравнению, то точка лежит на поверхности, если не удовлетворяют — не лежит.

Уравнение сферы

Найдем уравнение сферы радиуса R с центром в точке $O_1(x_0; y_0; z_0)$. Согласно определению сферы расстояние любой ее точки $M(x; y; z)$ от центра $O_1(x_0; y_0; z_0)$ равно радиусу R, т. е. $O_1M = R$. Но $O_1M = |\overline{O_1M}|$, где $\overline{O_1M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Следовательно,

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R$$

или

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.}$$

Это и есть искомое уравнение сферы. Ему удовлетворяют координаты любой ее точки и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на данной сфере.

Если центр сферы O_1 совпадает с началом координат, то уравнение сферы принимает вид $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Если же дано уравнение вида $F(x;y;z)=0$, то оно, вообще говоря, определяет в пространстве некоторую поверхность.

Выражение «вообще говоря» означает, что в отдельных случаях уравнение $F(x;y;z)=0$ может определять не поверхность, а точку, линию или вовсе не определять никакой геометрический образ. Говорят, «поверхность вырождается».

Так, уравнению $2x^2+y^2+z^2+1=0$ не удовлетворяют никакие действительные значения x, y, z. Уравнению $0\cdot x^2+y^2+z^2=0$ удовлетворяют лишь координаты точек, лежащих на оси Ox (из уравнения следует: $y=0$, $z=0$, а x — любое число).

Итак, поверхность в пространстве можно задать геометрически и аналитически. Отсюда вытекает постановка двух основных задач:

1. Дана поверхность как геометрическое место точек. Найти уравнение этой поверхности.

2. Дано уравнение $F(x;y;z)=0$. Исследовать форму поверхности, определяемой этим уравнением.

Уравнения линии в пространстве

Линию в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей (см. рис. 66) или как геометрическое место точек, общих двум поверхностям.

Если $F_1(x;y;z)=0$ и $F_2(x;y;z)=0$ — уравнения двух поверхностей, определяющих линию L, то координаты точек этой линии удовлетворяют системе двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x;y;z)=0, \\ F_2(x;y;z)=0. \end{cases} \tag{12.1}$$

Уравнения системы (12.1) называются ***уравнениями линии в пространстве***. Например, $\begin{cases} y=0, \\ z=0 \end{cases}$ есть уравнения оси Ox.

Линию в пространстве можно рассматривать как траекторию движения точки (см. рис. 67). В этом случае ее задают *векторным уравнением*

$$\bar{r}=\bar{r}(t) \tag{12.2}$$

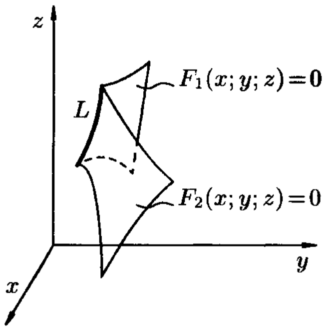


Рис. 66

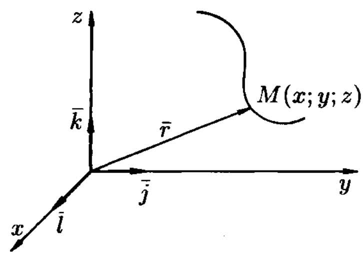


Рис. 67

или *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

проекций вектора (12.2) на оси координат.

Например, параметрические уравнения ***винтовой линии*** имеют вид

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \\ z = \frac{h}{2\pi}t. \end{cases}$$

Если точка M равномерно движется по образующей кругового цилиндра, а сам цилиндр равномерно вращается вокруг оси, то точка M описывает винтовую линию (см. рис. 68).

12.2. Уравнения плоскости в пространстве

Простейшей поверхностью является плоскость. Плоскость в пространстве $Oxyz$ можно задать разными способами. Каждому из них соответствует определенный вид ее уравнения.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть в пространстве $Oxyz$ плоскость Q задана точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектором $\bar{n} = (A; B; C)$, перпендикулярным этой плоскости (см. рис. 69). Выведем уравнение плоскости Q. Возьмем на ней произвольную точку $M(x; y; z)$ и составим вектор

$$\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0).$$

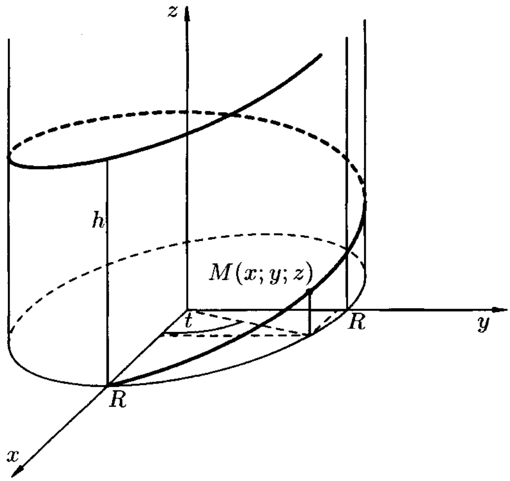


Рис. 68

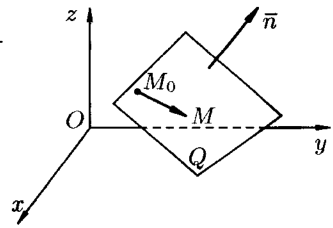


Рис. 69

При любом расположении точки M на плоскости Q векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_0M}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю: $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, т. е.

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.} \tag{12.3}$$

Координаты любой точки плоскости Q удовлетворяют уравнению (12.3), координаты точек, не лежащих на плоскости Q, этому уравнению не удовлетворяют (для них $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} \neq 0$).

Уравнение (12.3) называется ***уравнением плоскости, проходящей через данную точку*** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ***перпендикулярно вектору*** $\bar{n} = (A; B; C)$. Оно первой степени относительно текущих координат x, y и z. Вектор $\bar{n} = (A; B; C)$ называется ***нормальным вектором плоскости***.

Придавая коэффициентам A, B и C уравнения (12.3) различные значения, можно получить уравнение любой плоскости, проходящей через точку M_0. Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку, называется *связкой плоскостей*, а уравнение (12.3) — *уравнением связки плоскостей*.

Общее уравнение плоскости

Рассмотрим общее уравнение первой степени с тремя переменными x, y и z:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{12.4}$$

Полагая, что по крайней мере один из коэффициентов A, B или C не равен нулю, например $B \neq 0$, перепишем уравнение (12.4) в виде

$$A(x-0)+B\left(y+\frac{D}{B}\right)+C(z-0)=0. \tag{12.5}$$

Сравнивая уравнение (12.5) с уравнением (12.3), видим, что уравнения (12.4) и (12.5) являются уравнением плоскости с нормальным вектором $\bar{n}=(A;B;C)$, проходящей через точку $M_1\left(0;-\frac{D}{B};0\right)$.

Итак, уравнение (12.4) определяет в системе координат $Oxyz$ некоторую плоскость. Уравнение (12.4) называется ***общим уравнением плоскости***.

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. *Если* $D=0$, то оно принимает вид $Ax+By+Cz=0$. Этому уравнению удовлетворяет точка $O(0;0;0)$. Следовательно, в этом случае *плоскость проходит через начало координат.*

2. *Если* $C=0$, то имеем уравнение $Ax+By+D=0$. Нормальный вектор $\bar{n}=(A;B;0)$ перпендикулярен оси Oz. Следовательно, *плоскость параллельна оси* Oz; если $B=0$ — параллельна оси Oy, $A=0$ — параллельна оси Ox.

3. *Если* $C=D=0$, то плоскость проходит через $O(0;0;0)$ параллельно оси Oz, т. е. плоскость $Ax+By=0$ *проходит через ось* Oz. Аналогично, уравнениям $By+Cz=0$ и $Ax+Cz=0$ отвечают плоскости, проходящие соответственно через оси Ox и Oy.

4. *Если* $A=B=0$, то уравнение (12.4) принимает вид $Cz+D=0$, т. е. $z=-\frac{D}{C}$. Плоскость *параллельна плоскости* Oxy. Аналогично, уравнениям $Ax+D=0$ и $By+D=0$ отвечают плоскости, соответственно параллельные плоскостям Oyz и Oxz.

5. *Если* $A=B=D=0$, то уравнение (12.4) примет вид $Cz=0$, т. е. $z=0$. Это *уравнение плоскости* Oxy. Аналогично: $y=0$ — уравнение плоскости Oxz; $x=0$ — уравнение плоскости Oyz.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Найдем уравнение плоскости Q, проходящей через три данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$, не лежащие на одной прямой.

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x;y;z)$ и составим векторы $\overline{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$, $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$, $\overline{M_1M_3}=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$. Эти векторы лежат на плоскости Q, следовательно, они компланарны. Используем условие компланарности трех векторов (их смешанное произведение равно нулю), получаем

$\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = 0$, т. е.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.} \qquad \textbf{(12.6)}$$

Уравнение (12.6) есть *уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.*

Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно отрезки a, b и c, т. е. проходит через три точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ и $C(0;0;c)$ (см. рис. 70).

Подставляя координаты этих точек в уравнение (12.6), получаем

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, имеем $bcx - abc + abz + acy = 0$, т. е. $bcx + acy + abz = abc$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (12.7)$$

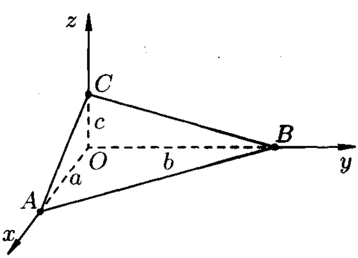


Рис. 70

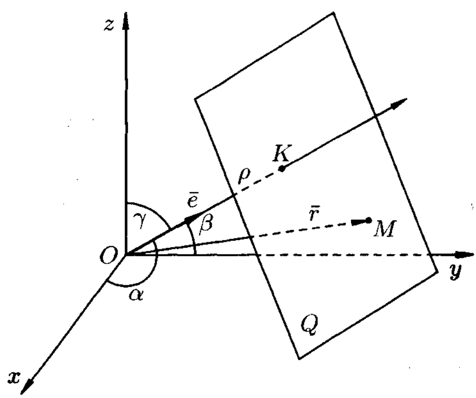


Рис. 71

Уравнение (12.7) называется ***уравнением плоскости в отрезках на осях***. Им удобно пользоваться при построении плоскости.

Нормальное уравнение плоскости

Положение плоскости Q вполне определяется заданием единичного вектора $\bar{e}$, имеющего направление перпендикуляра OK, опущенного на плоскость из начала координат, и длиной p этого перпендикуляра (см. рис. 71).

Пусть $OK = p$, а α, β, γ — углы, образованные единичным вектором $\bar{e}$ с осями Ox, Oy и Oz. Тогда $\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$. Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x; y; z)$ и соединим ее с началом координат. Образуем вектор $\bar{r} = \overline{OM} = (x; y; z)$.

При любом положении точки M на плоскости Q проекция радиус-вектора $\bar{r}$ на направление вектора $\bar{e}$ всегда равно p: $\text{пр}_{\bar{e}}\bar{r} = p$, т. е. $\bar{r} \cdot \bar{e} = p$ или

$$\boxed{\bar{r} \cdot \bar{e} - p = 0.} \tag{12.8}$$

Уравнение (12.8) называется *нормальным уравнением плоскости в векторной форме*. Зная координаты векторов $\bar{r}$ и $\bar{e}$, уравнение (12.8) перепишем в виде

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.} \tag{12.9}$$

Уравнение (12.9) называется ***нормальным уравнением плоскости в координатной форме***.

Отметим, что общее уравнение плоскости (12.4) можно привести к нормальному уравнению (12.9) так, как это делалось для уравнения прямой на плоскости. А именно: умножить обе части уравнения (12.4) на нормирующий множитель $\lambda = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, где знак берется противоположным знаку свободного члена D общего уравнения плоскости.

12.3. Плоскость. Основные задачи

Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Пусть заданы две плоскости Q_1 и Q_2:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Под ***углом между плоскостями*** Q_1 и Q_2 понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Угол φ между нормальными векторами $\bar{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ плоскостей Q_1 и Q_2 равен одному из этих углов (см. рис. 72). Поэтому $\cos\varphi = \dfrac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|}$ или

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Для нахождения острого угла следует взять модуль правой части.

Если плоскости Q_1 и Q_2 перпендикулярны (см. рис. 73, *а*), то таковы же их нормали, т. е. $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$ (и наоборот). Но тогда $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$,

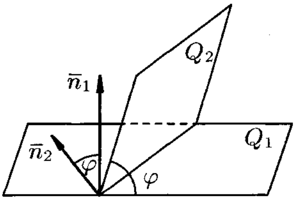


Рис. 72

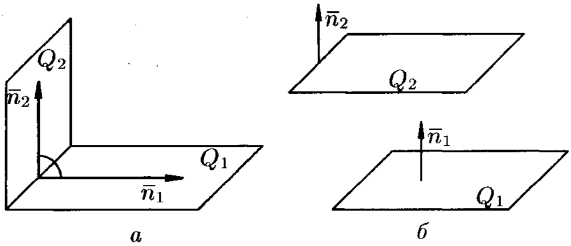


Рис. 73

т. е. $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$. Полученное равенство есть *условие перпендикулярности двух плоскостей* Q_1 и Q_2.

Если плоскости Q_1 и Q_2 параллельны (см. рис. 73, *б*), то будут параллельны и их нормали $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ (и наоборот). Но тогда, как известно, координаты векторов пропорциональны: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Это и есть *условие параллельности двух плоскостей* Q_1 и Q_2.

Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость Q своим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q находится по формуле

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.}$$

Вывод этой формулы такой же, как вывод формулы расстояния от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ (см. с. 73).

Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1; y_1; z_1)$ — произвольная точка плоскости Q, на направление нормального вектора $\overline{n} = (A; B; C)$ (см. рис. 74). Следовательно,

$$d = |\,\text{пр}_{\overline{n}}\,\overline{M_1M_0}| = \left|\frac{\overline{M_1M_0}\cdot\overline{n}}{|\overline{n}|}\right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$
$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

А так как точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ принадлежит плоскости Q, то

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \quad \text{т. е.} \quad D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1.$$

Поэтому $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Отметим, что если плоскость Q задана уравнением $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, то расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости Q может быть найдено по формуле

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p|.$$

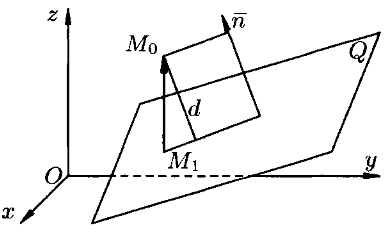


Рис. 74

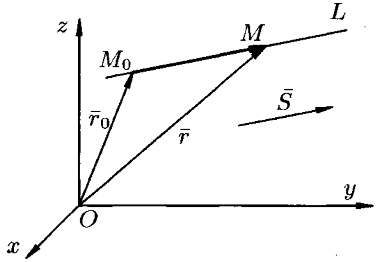


Рис. 75

12.4. Уравнения прямой в пространстве

Векторное уравнение прямой

Положение прямой в пространстве вполне определено, если задать какую-либо точку M_0 на прямой и вектор $\bar{S}$, параллельный этой прямой. Вектор $\bar{S}$ называется ***направляющим вектором прямой***. Пусть прямая L задана ее точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\bar{S} = (m; n; p)$. Возьмем на прямой L произвольную точку $M(x; y; z)$. Обозначим радиус-векторы точек M_0 и M соответственно через $\bar{r}_0$ и $\bar{r}$. Очевидно, что три вектора $\bar{r}_0$, $\bar{r}$ и $\overline{M_0M}$ связаны соотношением

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \overline{M_0M}. \tag{12.10}$$

Вектор $\overline{M_0M}$, лежащий на прямой L, параллелен направляющему вектору $\bar{S}$, поэтому $\overline{M_0M} = t\bar{S}$, где t — скалярный множитель, называемый *параметром*, может принимать различные значения в зависимости от положения точки M на прямой (см. рис. 75).

Уравнение (12.10) можно записать в виде

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{S}.} \tag{12.11}$$

Полученное уравнение называется ***векторным уравнением прямой***.

Параметрические уравнения прямой

Замечая, что $\bar{r} = (x; y; z)$, $\bar{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$, $t\bar{S} = (tm; tn; tp)$, уравнение (12.11) можно записать в виде

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x_0 + tm)\bar{i} + (y_0 + tn)\bar{j} + (z_0 + tp)\bar{k}.$$

Отсюда следуют равенства:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}} \qquad (12.12)$$

Они называются ***параметрическими уравнениями прямой*** в пространстве.

Канонические уравнения прямой

Пусть $\bar{S} = (m; n; p)$ — направляющий вектор прямой L и $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка, лежащая на этой прямой. Вектор $\overline{M_0M}$, соединяющий точку M_0 с произвольной точкой $M(x; y; z)$ прямой L, параллелен вектору $\bar{S}$. Поэтому координаты вектора $\overline{M_0M}=(x-x_0; y-y_0; z-z_0)$ и вектора $\bar{S} = (m; n; p)$ пропорциональны:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.} \qquad (12.13)$$

Уравнения (12.13) называются ***каноническими уравнениями прямой*** в пространстве.

Замечания: 1) Уравнения (12.13) можно было бы получить сразу из параметрических уравнений прямой (12.12), исключив параметр t. Из уравнений (12.12) находим

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t.$$

2) Обращение в нуль одного из знаменателей уравнений (12.13) означает обращение в нуль соответствующего числителя.

Например, уравнения $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-1}{0}$ задают прямую, проходящую через точку $M_0(2; -4; 1)$ перпендикулярно оси Oz (проекция вектора $\bar{S}$ на ось Oz равна нулю). Но это означает, что прямая лежит в плоскости $z = 1$, и поэтому для всех точек прямой будет $z - 1 = 0$.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки

Пусть прямая L проходит через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. В качестве направляющего вектора $\bar{S}$ можно взять вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, т. е. $\bar{S} = \overline{M_1M_2}$ (см. рис. 76). Следовательно, $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$. Поскольку прямая проходит через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, то, согласно уравнениям (12.13), уравнения прямой L имеют вид

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.} \qquad (12.14)$$

Уравнения (12.14) называются ***уравнениями прямой, проходящей через две данные точки.***

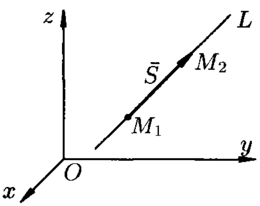


Рис. 76

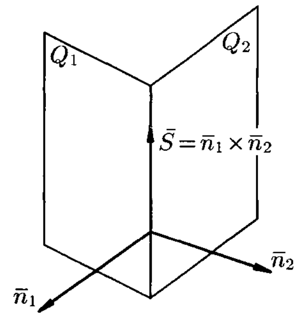


Рис. 77

Общие уравнения прямой

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{12.15}$$

Каждое из уравнений этой системы определяет плоскость. Если плоскости не параллельны (координаты векторов $\bar{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ не пропорциональны), то система (12.15) определяет прямую L как геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют каждому из уравнений системы (см. рис. 77). Уравнения (12.15) называют *общими уравнениями прямой.*

От общих уравнений (12.15) можно перейти к каноническим уравнениям (12.13). Координаты точки M_0 на прямой L получаем из системы уравнений (12.15), придав одной из координат произвольное значение (например, $z = 0$).

Так как прямая L перпендикулярна векторам $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$, то за направляющий вектор $\bar{S}$ прямой L можно принять векторное произведение $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$:

$$\bar{S} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Замечание: Канонические уравнения прямой легко получить, взяв две какие-либо точки на ней и применив уравнения (12.14).

Пример 12.1. Написать канонические уравнения прямой L, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 2x-y-3z+5=0. \end{cases}$$

◐ Решение: Положим $z=0$ и решим систему $\begin{cases} x+y=-1, \\ 2x-y=-5. \end{cases}$ Находим точку $M_1(-2;1;0) \in L$. Положим $y=0$ и решим систему $\begin{cases} x-z=-1, \\ 2x-3z=-5. \end{cases}$ Находим вторую точку $M_2(2;0;3)$ прямой L. Записываем уравнение прямой L, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3}.$$ ●

12.5. Прямая линия в пространстве. Основные задачи

Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

и

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

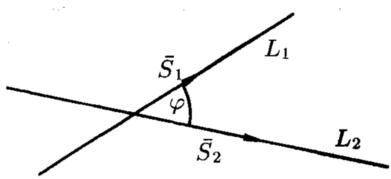


Рис. 78

Под углом между этими прямыми понимают угол между направляющими векторами $S_1=(m_1;n_1;p_1)$ и $S_2=(m_2;n_2;p_2)$ (см. рис. 78). Поэтому, по известной формуле для косинуса угла между векторами, получаем $\cos\varphi=\dfrac{\bar{S}_1\cdot\bar{S}_2}{|\bar{S}_1|\cdot|\bar{S}_2|}$ или

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.} \qquad (12.16)$$

Для нахождения острого угла между прямыми L_1 и L_2 числитель правой части формулы (12.16) следует взять по модулю.

Если *прямые L_1 и L_2 перпендикулярны*, то в этом и только в этом случае имеем $\cos\varphi=0$. Следовательно, числитель дроби (12.16) равен нулю, т. е. $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

Если *прямые L_1 и L_2 параллельны*, то параллельны их направляющие векторы $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$. Следовательно, координаты этих векторов пропорциональны, т. е. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Пример 12.2. Найти угол между прямыми

$$\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3x + 5 = 0. \end{cases}$$

❍ Решение: Очевидно, $\bar{S}_1 = (2; -1; 3)$, а $\bar{S}_2 = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$, где $\bar{n}_1 = (2; 1; -1)$, $\bar{n}_2 = (2; -1; 3)$. Отсюда следует, что $\bar{S}_2 = (2; -8; -4)$. Так как $\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 = 4 + 8 - 12 = 0$, то $\varphi = 90°$. ●

Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями

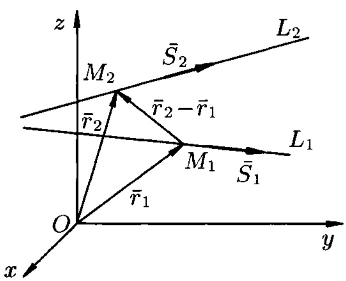


Рис. 79

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

и

$$\frac{x - x_1}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Их направляющие векторы соответственно $\bar{S}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\bar{S}_2 = (m_2; n_2; p_2)$ (см. рис. 79).

Прямая L_1 проходит через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, радиус-вектор которой обозначим через $\bar{r}_1$; прямая L_2 проходит через точку $M_2(x_2; y_2; z_2)$, радиус-вектор которой обозначим через $\bar{r}_2$. Тогда

$$\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, если векторы $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ и $\overline{M_1M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ компланарны. Условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения: $(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\bar{S}_1\bar{S}_2 = 0$, т. е.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.}$$

При выполнении этого условия прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, то есть либо пересекаются, если $\bar{S}_2 \neq \lambda \bar{S}_1$, либо параллельны, если $\bar{S}_1 \parallel \bar{S}_2$.

12.6. Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи

Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть плоскость Q задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая L уравнениями $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$.

Углом между прямой и плоскостью называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость. Обозначим через φ угол между плоскостью Q и прямой L, а через θ — угол между векторами $\bar{n} = (A; B; C)$ и $\bar{S} = (m; n; p)$ (см. рис. 80). Тогда $\cos\theta = \dfrac{\bar{n}\cdot\bar{S}}{|\bar{n}|\cdot|\bar{S}|}$. Найдем синус угла φ, считая $\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$: $\sin\varphi = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$. И так как $\sin\varphi \geqslant 0$, получаем

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{12.17}$$

Если *прямая L параллельна плоскости Q*, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{S}$ перпендикулярны (см. рис. 81), а потому $\bar{S}\cdot\bar{n} = 0$, т. е.

$$Am + Bn + Cp = 0$$

является ***условием параллельности*** прямой и плоскости.

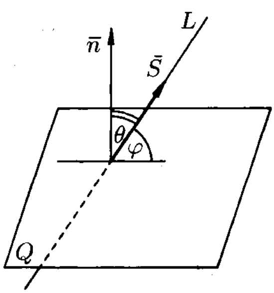


Рис. 80

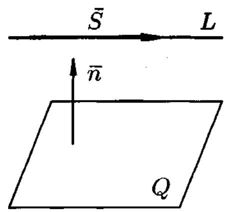


Рис. 81

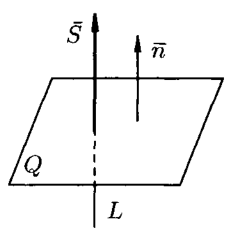


Рис. 82

Если *прямая L перпендикулярна плоскости Q*, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{S}$ параллельны (см. рис. 82). Поэтому равенства

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

являются ***условиями перпендикулярности*** прямой и плоскости.

Пересечение прямой с плоскостью. Условие принадлежности прямой плоскости

Пусть требуется найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{12.18}$$

с плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{12.19}$$

Для этого надо **решить** систему уравнений (12.18) и (12.19). Проще всего это сделать, **записав** уравнения прямой (12.18) в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости (12.19), получаем уравнение $A(x_0+mt)+B(y_0+nt)+C(z_0+pt)+D=0$ или

$$t(Am+Bn+Cp)+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0. \tag{12.20}$$

Если прямая L не параллельна плоскости, т. е. если $Am+Bn+Cp\neq 0$, то из равенства (12.20) находим значение t:

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}.$$

Подставляя найденное значение t в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения прямой с плоскостью.

Рассмотрим теперь случай, когда $Am+Bn+Cp=0$ ($L \parallel Q$):

а) если $F=Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, то прямая L параллельна плоскости и пересекать ее не будет (уравнение (12.20) решения не имеет, так как имеет вид $0\cdot t+F=0$, где $F\neq 0$);

б) если $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, то уравнение (12.20) имеет вид $t\cdot 0+0=0$; ему удовлетворяет любое значение t, любая точка прямой является точкой пересечения прямой и плоскости. Заключаем: прямая лежит в плоскости. Таким образом, одновременное выполнение равенств

$$\begin{cases} Am+Bn+Cp=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$$

является ***условием принадлежности прямой плоскости.***

12.7. Цилиндрические поверхности

Поверхность, образованная движением прямой L, которая перемещается в пространстве, сохраняя постоянное направление и пересекая каждый раз некоторую кривую K, называется ***цилиндрической***

поверхностью или ***цилиндром***. При этом кривая K называется ***направляющей*** цилиндра, а прямая L — его ***образующей*** (см. рис. 83).

Будем рассматривать цилиндрические поверхности, направляющие которых лежат в одной из координатных плоскостей, а образующие параллельны координатной оси, перпендикулярной этой плоскости.

Пусть в плоскости Oxy лежит некоторая линия K, уравнение которой

$$F(x;y) = 0. \tag{12.21}$$

Построим цилиндр с образующими параллельными оси Oz и направляющей K.

Теорема 12.1. Уравнение цилиндра, образующие которого параллельны оси Oz, имеет вид (12.21), т. е. не содержит координаты z.

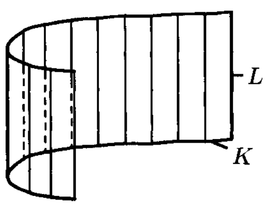


Рис. 83

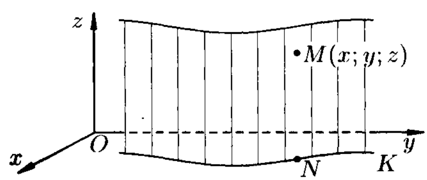


Рис. 84

☐ Возьмем на цилиндре любую точку $M(x;y;z)$ (см. рис. 84). Она лежит на какой-то образующей. Пусть N — точка пересечения этой образующей с плоскостью Oxy. Следовательно, точка N лежит на кривой K и ее координаты удовлетворяют уравнению (12.21).

Но точка M имеет такие же абсциссу x и ординату y, что и точка N. Следовательно, уравнению (12.21) удовлетворяют и координаты точки $M(x;y;z)$, так как оно не содержит z. И так как M — это любая точка цилиндра, то уравнение (12.21) и будет уравнением этого цилиндра. ■

Теперь ясно, что $F(x;z) = 0$ есть уравнение цилиндра с образующими, параллельными оси Oy, а $F(y;z) = 0$ — с образующими, параллельными оси Ox. Название цилиндра определяется названием направляющей. Если направляющей служит эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в плоскости Oxy, то соответствующая цилиндрическая поверхность называется ***эллиптическим цилиндром*** (см. рис. 85).

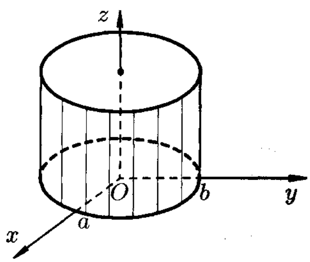


Рис. 85

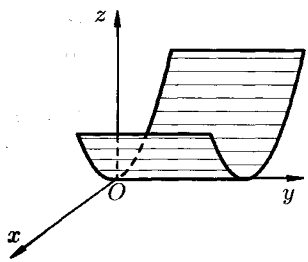


Рис. 86

Частным случаем эллиптического цилиндра является ***круговой цилиндр***, его уравнение $x^2 + y^2 = R^2$. Уравнение $x^2 = 2pz$ определяет в пространстве ***параболический цилиндр*** (см. рис. 86). Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

определяет в пространстве ***гиперболический цилиндр*** (см. рис. 87).

Все эти поверхности называются ***цилиндрами второго порядка***, так как их уравнения есть уравнения второй степени относительно текущих координат x, y и z.

12.8. Поверхности вращения. Конические поверхности

Поверхность, образованная вращением некоторой плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости, называется *поверхностью вращения*. Пусть некоторая кривая L лежит в плоскости Oyz. Уравнения этой кривой запишутся в виде

$$\begin{cases} F(y; z) = 0, \\ x = 0. \end{cases} \tag{12.22}$$

Найдем уравнение поверхности, образованной вращением кривой L вокруг оси Oz.

Возьмем на поверхности произвольную точку $M(x; y; z)$ (см. рис. 88). Проведем через точку M плоскость, перпендикулярную оси Oz, и обозначим точки пересечения ее с осью Oz и кривой L соответственно через O_1 и N. Обозначим координаты точки N через $(0; y_1; z_1)$. Отрезки O_1M и O_1N являются радиусами одной и той же окружности. Поэтому $O_1M = O_1N$. Но $O_1M = \sqrt{x^2 + y^2}$, $O_1N = |y_1|$. Следовательно, $|y_1| = \sqrt{x^2 + y^2}$ или $y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Кроме того, очевидно, $z_1 = z$.

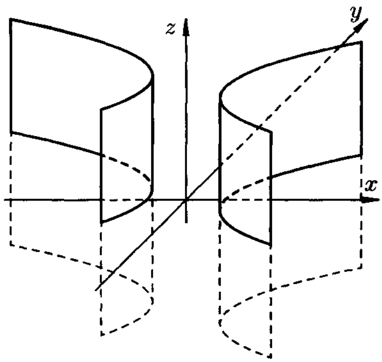


Рис. 87

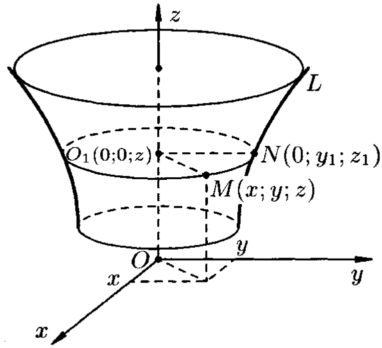


Рис. 88

Так как точка N лежит на кривой L, то ее координаты удовлетворяют уравнению (12.22). Стало быть, $F(y_1; z_1) = 0$. Исключая вспомогательные координаты y_1 и z_1 точки N, приходим к уравнению

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}; z) = 0. \tag{12.23}$$

Уравнение (12.23) — искомое уравнение поверхности вращения, ему удовлетворяют координаты любой точки M этой поверхности и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на поверхности вращения.

Как видно, уравнение (12.23) получается из (12.22) простой заменой y на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$, координата z сохраняется.

Понятно, что если кривая (12.22) вращается вокруг оси Oy, то уравнение поверхности вращения имеет вид

$$F(y; \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0;$$

если кривая лежит в плоскости Oxy ($z = 0$) и ее уравнение $F(x; y) = 0$, то уравнение поверхности вращения, образованной вращением кривой вокруг оси Ox, есть $F(x; \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$.

Так, например, вращая прямую $y = z$ вокруг оси Oz (см. рис. 89), получим поверхность вращения (ее уравнение $\pm\sqrt{x^2 + y^2} = z$ или $x^2 + y^2 = z^2$). Она называется конусом второго порядка.

Поверхность, образованная прямыми линиями, проходящими через данную точку P и пересекающими данную плоскую линию L (не проходящую через P), называется ***конической поверхностью*** или ***конусом***. При этом линия L называется ***направляющей*** конуса, точка P — ее ***вершиной***, а прямая, описывающая поверхность, называется ***образующей***.

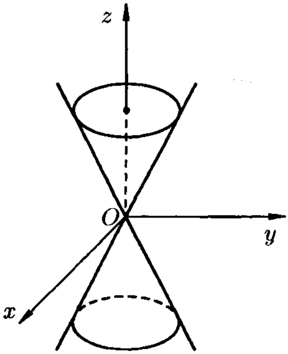


Рис. 89

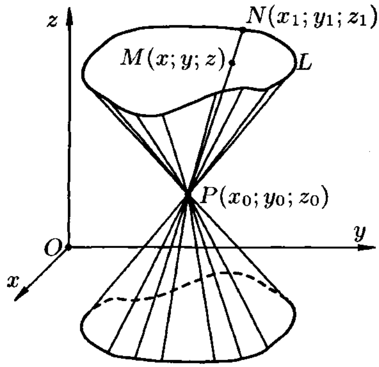


Рис. 90

Пусть направляющая L задана уравнениями

$$\begin{cases} F_1(x;y;z)=0, \\ F_2(x;y;z)=0, \end{cases} \tag{12.24}$$

а точка $P(x_0;y_0;z_0)$ — вершина конуса. Найдем уравнение конуса.

Возьмем на поверхности конуса произвольную точку $M(x;y;z)$ (см. рис. 90). Образующая, проходящая через точки P и M, пересечет направляющую L в некоторой точке $N(x_1;y_1;z_1)$. Координаты точки N удовлетворяют уравнениям (12.24) направляющей:

$$\begin{cases} F_1(x_1;y_1;z_1)=0, \\ F_2(x_1;y_1;z_1)=0. \end{cases} \tag{12.25}$$

Канонические уравнения образующих, проходящих через точки P и N, имеют вид

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \tag{12.26}$$

Исключая x_1, y_1 и z_1 из уравнений (12.25) и (12.26), получим уравнение конической поверхности, связывающее текущие координаты x, y и z.

Пример 12.3. Составить уравнение конуса с вершиной в точке $O(0;0;0)$, если направляющей служит эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащий в плоскости $z=c$.

❍ Решение: Пусть $M(x;y;z)$ — любая точка конуса. Канонические уравнения образующих, проходящих через точки $(0;0;0)$ и точку $(x_1;y_1;z_1)$ пересечения образующей OM с эллипсом будут $\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=$

$= \frac{z}{z_1}$. Исключим x_1, y_1 и z_1 из этих уравнений и уравнения

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \tag{12.27}$$

(точка $(x_1; y_1; z_1)$ лежит на эллипсе), $z_1 = c$. Имеем: $\frac{x}{x_1} = \frac{z}{c}$, $\frac{y}{y_1} = \frac{z}{c}$. Отсюда $x_1 = c \cdot \frac{x}{z}$ и $y_1 = c \cdot \frac{y}{z}$. Подставляя значения x_1 и y_1 в уравнение эллипса (12.27), получим

$$\frac{c^2 \cdot x^2}{z^2 \cdot a^2} + \frac{c^2 \cdot y^2}{z^2 \cdot b^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

Это и есть искомое уравнение конуса. ●

12.9. Канонические уравнения поверхностей второго порядка

По заданному уравнению поверхности второго порядка (т. е. поверхности, уравнение которой в прямоугольной системе координат является алгебраическим уравнением второй степени) будем определять ее геометрический вид. Для этого применим так называемый *метод сечений:* исследование вида поверхности будем производить при помощи изучения линий пересечения данной поверхности с координатными плоскостями или плоскостями, им параллельными.

Эллипсоид

Исследуем поверхность, заданную уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.} \tag{12.28}$$

Рассмотрим сечения поверхности (12.28) с плоскостями, параллельными плоскости xOy. Уравнения таких плоскостей: $z = h$, где h — любое число.

Линия, получаемая в сечении, определяется двумя уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases} \tag{12.29}$$

Исследуем уравнения (12.29):

а) Если $|h| > c$, $c > 0$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$. Точек пересечения поверхности (12.28) с плоскостями $z = h$ не существует.

б) Если $|h| = c$, т. е. $h = \pm c$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Линия пересечения (12.29) вырождается в две точки $(0; 0; c)$ и $(0; 0; -c)$. Плоскости $z = c$ и $z = -c$ касаются данной поверхности.

в) Если $|h| < c$, то уравнения (12.29) можно переписать в виде:

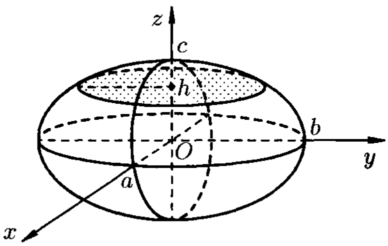


Рис. 91

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Как видно, линия пересечения есть эллипс с полуосями (см. рис. 91)

$$a_1 = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad b_1 = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}.$$

При этом чем меньше $|h|$, тем больше полуоси a_1 и b_1. При $h = 0$ они достигают своих наибольших значений: $a_1 = a$, $b_1 = b$. Уравнения (12.29) примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ h = 0. \end{cases}$$

Аналогичные результаты получим, если рассмотрим сечения поверхности (12.28) плоскостями $x = h$ и $y = h$.

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют изобразить поверхность (12.28) как замкнутую овальную поверхность. Поверхность (12.28) называется ***эллипсоидом***. Величины a, b и c называются ***полуосями*** эллипсоида. Если все они различны, то эллипсоид называется ***трехосным***; если какие-либо две полуоси равны, трехосный эллипсоид превращается в ***эллипсоид вращения***; если $a = b = c$, то — в ***сферу*** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Однополостный гиперболоид

Исследуем поверхность, заданную уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.} \qquad (12.30)$$

Пересекая поверхность (12.30) плоскостью $z = h$, получим линию пересечения, уравнения которой имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Как видно, этой линией является эллипс с полуосями

$$a_1 = a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad b_1 = b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}.$$

Полуоси a_1 и b_1 достигают своего наименьшего значения при $h = 0$: $a_1 = a$, $b_1 = b$. При возрастании $|h|$ полуоси эллипса будут увеличиваться.

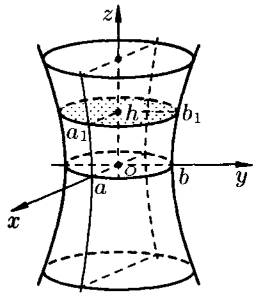


Рис. 92

Если пересекать поверхность (12.30) плоскостями $x = h$ или $y = h$, то в сечении получим гиперболы. Найдем, например, линию пересечения поверхности (12.30) с плоскостью Oyz, уравнение которой $x = 0$. Эта линия пересечения описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Как видно, эта линия есть гипербола (см. рис. 92).

Анализ этих сечений показывает, что поверхность, определяемая уравнением (12.30), имеет форму бесконечной расширяющейся трубки. Поверхность (12.30) называется ***однополостным гиперболоидом.***

Замечание: можно доказать, что через любую точку гиперболоида (12.30) проходят две прямые, лежащие на нем.

Двухполостный гиперболоид

Пусть поверхность задана уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.} \tag{12.31}$$

Если поверхность (12.31) пересечь плоскостями $z = h$, то линия пересечения определяется уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases} \tag{12.32}$$

Отсюда следует, что:

а) если $|h| < c$, то плоскости $z = h$ не пересекают поверхности;

б) если $|h| = c$, то плоскости $z = \pm c$ касаются данной поверхности соответственно в точках $(0; 0; c)$ и $(0; 0; -c)$.

в) если $|h| > c$, то уравнения (12.32) могут быть переписаны так

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right)} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Эти уравнения определяют эллипс, полуоси которого возрастают с ростом $|h|$.

Пересекая поверхность (12.31) координатными плоскостями Oyz ($x = 0$) и Oxz ($y = 0$), получим в сечении гиперболы, уравнения которых соответственно имеют вид

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

У обеих гипербол действительной осью является ось Oz. Метод сечения позволяет изобразить поверхность (см. рис. 93), определяемую уравнением (12.31), как поверхность, состоящую из двух полостей, имеющих форму выпуклых неограниченных чаш. Поверхность (12.31) называется ***двухполостным гиперболоидом***.

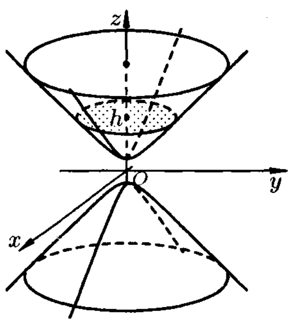


Рис. 93

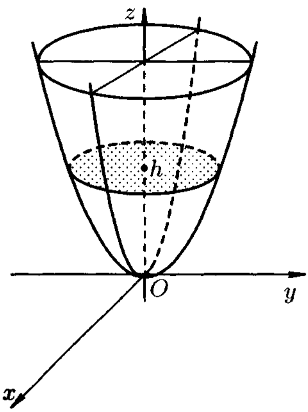


Рис. 94

Эллиптический параболоид

Исследуем поверхность, заданную уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,} \tag{12.33}$$

где $p > 0$, $q > 0$. Рассечем поверхность (12.33) плоскостями $z = h$. В сечении получим линию, уравнения которой есть

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$

Если $h < 0$, то плоскости $z = h$ поверхности не пересекают; если $h = 0$, то плоскость $z = 0$ касается поверхности в точке $(0;0;0)$; если $h > 0$,

то в сечении имеем эллипс, уравнение которого имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2ph} + \dfrac{y^2}{2qh} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Его полуоси возрастают с ростом h.

При пересечении поверхности (12.33) координатными плоскостями Oxz и Oyz получатся соответственно параболы $z = \dfrac{x^2}{2p}$ и $z = \dfrac{y^2}{2q}$. Таким образом, поверхность, определяемая уравнением (12.33), имеет вид выпуклой, бесконечно расширяющейся чаши (см. рис. 94). Поверхность (12.33) называется ***эллиптическим параболоидом.***

Гиперболический параболоид

Исследуем поверхность, определяемую уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,} \tag{12.34}$$

где $p > 0$, $q > 0$. Рассечем поверхность (12.34) плоскостями $z = h$. Получим кривую

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2ph} - \dfrac{y^2}{2qh} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

которая при всех значениях $h \neq 0$ является гиперболой. При $h > 0$ ее действительные оси параллельны оси Ox; при $h < 0$ — параллельны оси Oy; при $h = 0$ линия пересечения $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 0$ распадается на пару пересекающихся прямых $\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0$ и $\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0$. При пересечении поверхности плоскостями, параллельными плоскости Oxz ($y = h$), будут получаться параболы

$$\begin{cases} x^2 = 2p\left(z + \dfrac{h^2}{2q}\right), \\ y = h, \end{cases}$$

ветви которых направлены вверх. При $y = 0$ в сечении получается **парабола**

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0 \end{cases}$$

с вершиной в начале координат и осью симметрии Oz.

Пересекая поверхность (12.34) плоскостями $x = h$, получим параболы $y^2 = -2q\left(z - \dfrac{h^2}{2p}\right)$, ветви которых направлены вниз.

Анализ линии пересечения позволяет определить вид поверхности: она имеет вид седла (см. рис. 95). Поверхность (12.34) называется ***гиперболическим параболоидом.***

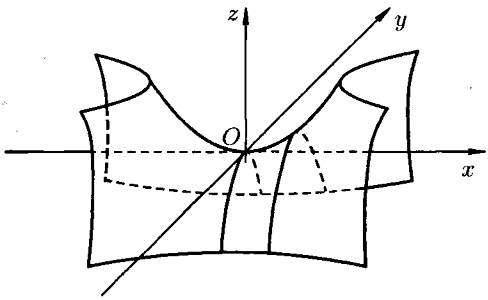


Рис. 95

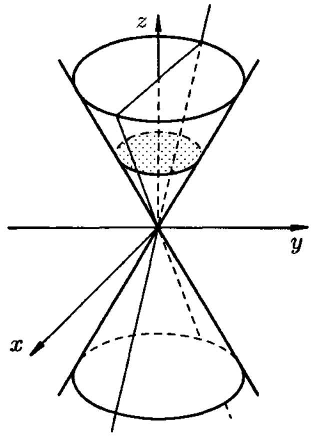


Рис. 96

Конус второго порядка

Исследуем уравнение поверхности

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.} \tag{12.35}$$

Пересечем поверхность (12.35) плоскостями $z = h$. Линия пересечения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$, $z = h$. При $h = 0$ она вырождается в точку $(0;0;0)$. При $h \neq 0$ в сечении будем получать эллипсы

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{a^2h^2}{c^2}} + \dfrac{y^2}{\frac{b^2h^2}{c^2}} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Полуоси этих эллипсов будут возрастать при возрастании $|h|$.

Рассечем поверхность (12.35) плоскостью Oyz $(x = 0)$. Получится линия

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

распадающаяся на две пересекающиеся прямые

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0.$$

При пересечении поверхности (12.35) плоскостью $y = 0$ получим линию

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

также распадающуюся на две пересекающиеся прямые

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0.$$

Поверхность, определяемая уравнением (12.35), называется ***конусом второго порядка***, имеет вид, изображенный на рисунке 96.

Поверхности, составленные из прямых линий, называются ***линейчатыми***. Такими поверхностями являются цилиндрические, конические поверхности, а также однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид.

Глава V. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Лекции 13–22

§ 13. МНОЖЕСТВА. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

13.1. Основные понятия

Понятие множества является одним из основных неопределяемых понятий математики. Под ***множеством*** понимают совокупность (собрание, класс, семейство...) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Так можно говорить о множестве студентов института, о множестве рыб в Черном море, о множестве корней уравнения $x^2 + 2x + 2 = 0$, о множестве всех натуральных чисел и т. д.

Объекты, из которых состоит множество, называются его ***элементами***. Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$, а их элементы — малыми буквами $a, b, \ldots, x, y, \ldots$

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$; запись $x \overline{\in} X$ или $x \notin X$ означает, что элемент x не принадлежит множеству X.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым***, обозначается символом $\varnothing$.

Элементы множества записывают в фигурных скобках, внутри которых они перечислены (если это возможно), либо указано общее свойство, которым обладают все элементы данного множества.

Например, запись $A = \{1, 3, 15\}$ означает, что множество A состоит из трех чисел 1, 3 и 15; запись $A = \{x : \ 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ означает, что множество A состоит из всех действительных (если не оговорено иное) чисел, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Множество A называется ***подмножеством*** множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Символически это обозначают так $A \subset B$ («A включено в B») или $B \supset A$ («множество B включает в себя множество A»).

Говорят, что множества A и B ***равны*** или ***совпадают***, и пишут $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Другими словами, множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными.

Объединением (или суммой) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Объединение (сумму) множеств обозначают $A \cup B$ (или $A + B$). Кратко можно записать $A \cup B = \{x : \ x \in A$ или $x \in B\}$.

Пересечением (или произведением) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству A и множеству B. Пересечение (произведение) множеств обозначают $A \cap B$ (или $A \cdot B$). Кратко можно записать $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$.

В дальнейшем для сокращения записей будем использовать *некоторые* простейшие логические символы:

$\alpha \Longrightarrow \beta$ означает «из предложения α *следует* предложение β»;

$\alpha \Longleftrightarrow \beta$ «предложения α и β равносильны», т. е. из α следует β и из β следует α;

$\forall$ — означает «для любого», «для всякого»;

$\exists$ «существует», «найдется»;

$:$ «имеет место», «такое что»;

$\mapsto$ «соответствие»

Например: 1) запись $\forall x \in A : \alpha$ означает: «для всякого элемента $x \in A$ имеет место предложение α»;

2) $(x \in A \cup B) \Longleftrightarrow (x \in A$ или $x \in B)$; эта запись определяет объединение множеств A и B.

13.2. Числовые множества. Множество действительных чисел

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Примерами числовых множеств являются:

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}$ множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}_0 = \{0; 1; 2; \ldots; n; \ldots\}$ множество целых неотрицательных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \ldots; \pm n; \ldots\}$ множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : \ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ - множество рациональных чисел.

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

Между этими множествами существует соотношение

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Множество $\mathbb{R}$ содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью или бесконечной периодической дробью. Так, $\frac{1}{2} = 0{,}5$ $(= 0{,}500\ldots)$, $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ — рациональные числа.

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными*.

Теорема 13.1. Не существует рационального числа, квадрат которого равен числу 2.

❑ Допустим, что существует рациональное число, представленное несократимой дробью $\frac{m}{n}$, квадрат которого равен 2. Тогда имеем:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2, \quad \text{т. е. } m^2 = 2n^2.$$

Отсюда следует, что m^2 (а значит, и m) — четное число, т. е. $m = 2k$. Подставив $m = 2k$ в равенство $m^2 = 2n^2$, получим $4k^2 = 2n^2$, т. е. $2k^2 = n^2$. Отсюда следует, что число n — четное, т. е. $n = 2l$. Но тогда дробь $\frac{m}{n} = \frac{2k}{2l}$ сократима. Это противоречит допущению, что $\frac{m}{n}$ дробь несократима. Следовательно, не существует рационального числа, квадрат которого равен числу 2. ■

Иррациональное число выражается бесконечной непериодической дробью. Так, $\sqrt{2} = 1{,}4142356\ldots$, $\pi = 3{,}1415926\ldots$ — иррациональные числа. Можно сказать: множество действительных чисел есть множество всех бесконечных десятичных дробей. И записать

$$\mathbb{R} = \{x: \ x = a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\}, \quad \text{где } a \in \mathbb{Z}, \ \alpha_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел обладает следующими свойствами.

1. Оно *упорядоченное*: для любых двух различных чисел a и b имеет место одно из двух соотношений $a < b$ либо $b < a$.

2. Множество $\mathbb{R}$ *плотное*: между любыми двумя различными числами a и b содержится бесконечное множество действительных чисел x, т. е. чисел, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$.

Так, если $a < b$, то одним из них является число $\frac{a+b}{2}$

$$\left(a<b \Longrightarrow 2a<a+b \quad \text{и} \quad a+b<2b \Longrightarrow 2a<a+b<2b \Longrightarrow a<\frac{a+b}{2}<b\right).$$

3. Множество $\mathbb{R}$ *непрерывное*. Пусть множество $\mathbb{R}$ разбито на два непустых класса A и B таких, что каждое действительное число содержится только в одном классе и для каждой пары чисел $a \in A$ и $b \in B$ выполнено неравенство $a < b$. Тогда (свойство непрерывности) существует единственное число c, удовлетворяющее неравенству $a \leqslant c \leqslant b$ ($\forall a \in A$, $\forall b \in B$). Оно отделяет числа класса A от чисел класса B. Число c является либо наибольшим числом в классе A (тогда в классе B нет наименьшего числа), либо наименьшим числом в классе B (тогда в классе A нет наибольшего).

Свойство непрерывности позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой. Это означает, что каждому числу $x \in \mathbb{R}$ соответствует определенная (единственная) точка числовой оси и, наоборот, каждой точке оси соответствует определенное (единственное) действительное число. Поэтому вместо слова «число» часто говорят «точка».

13.3. Числовые промежутки. Окрестность точки

Пусть a и b — действительные числа, причем $a < b$.

Числовыми промежутками (интервалами) называют подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

$[a; b] = \{x : \ a \leqslant x \leqslant b\}$ — отрезок (сегмент, замкнутый промежуток);

$(a; b) = \{x : \ a < x < b\}$ — интервал (открытый промежуток);

$[a; b) = \{x : \ a \leqslant x < b\}$;

$(a; b] = \{x : \ a < x \leqslant b\}$ — полуоткрытые интервалы (или полуоткрытые отрезки);

$(-\infty; b] = \{x : \ x \leqslant b\}$; $\quad [a, +\infty) = \{x : \ x \geqslant a\}$;

$(-\infty; b) = \{x : \ x < b\}$; $\quad (a, +\infty) = \{x : \ x > a\}$;

$(-\infty, \infty) = \{x : \ -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$ бесконечные интервалы (промежутки).

Числа a и b называются соответственно левым и правым *концами* этих промежутков. Символы $-\infty$ и $+\infty$ не числа, это символическое обозначение процесса неограниченного удаления точек числовой оси от начала 0 влево и вправо.

Пусть x_0 — любое действительное число (точка на числовой прямой). ***Окрестностью*** точки x_0 называется любой интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0. В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ***ε-окрестностью*** точки x_0. Число x_0 называется ***центром***, а число ε — *радиусом*.

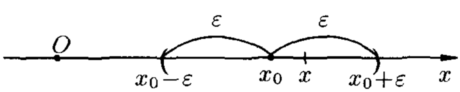


Рис. 97

Если $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, то выполняется неравенство $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, или, что то же, $|x - x_0| < \varepsilon$. Выполнение последнего неравенства означает попадание точки x в ε-окрестность точки x_0 (см. рис. 97).

§ 14. ФУНКЦИЯ

14.1. Понятие функции

Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости (связи) между элементами двух множеств.

Пусть даны два непустых множества X и Y. Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется ***функцией*** и записывается $y = f(x)$, $x \in X$ или $f : X \to Y$. Говорят еще, что функция f ***отображает*** множество X на множество Y.

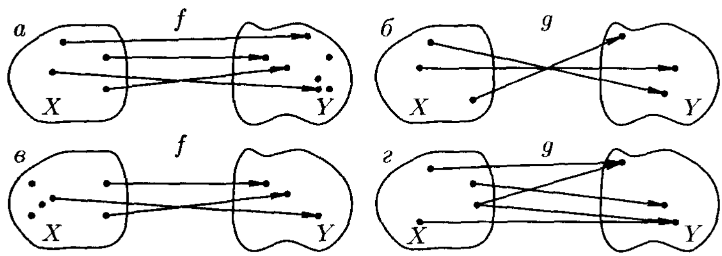


Рис. 98

Например, соответствия f и g, изображенные на рисунке 98 *а* и *б*, являются функциями, а на рисунке 98 *в* и *г* — нет. В случае *в* — не каждому элементу $x \in X$ соответствует элемент $y \in Y$. В случае *г* не соблюдается условие однозначности.

Множество X называется *областью определения* функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется *множеством значений* функции f и обозначается $E(f)$.

14.2. Числовые функции. График функции. Способы задания функций

Пусть задана функция $f : X \to Y$.

Если элементами множеств X и Y являются действительные числа (т. е. $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$), то функцию f называют ***числовой функцией***. В дальнейшем будем изучать (как правило) числовые функции, для краткости будем именовать их просто функциями и записывать $y = f(x)$.

Переменная x называется при этом *аргументом* или независимой переменной, а y — *функцией* или *зависимой переменной* (от x). Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся в *функциональной зависимости.* Иногда функциональную зависимость y от x пишут в виде $y = y(x)$, не вводя новой буквы (f) для обозначения зависимости.

Частное значение функции $f(x)$ при $x = a$ записывают так: $f(a)$. Например, если $f(x) = 2x^2 - 3$, то $f(0) = -3$, $f(2) = 5$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости Oxy, для каждой из которых x является значением аргумента, а y — соответствующим значением функции.

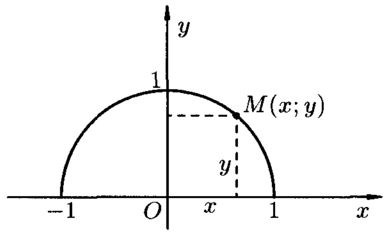


Рис 99

Например, графиком функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ является верхняя полуокружность радиуса $R = 1$ с центром в $O(0; 0)$ (см. рис. 99).

Чтобы задать функцию $y = f(x)$, необходимо указать правило, позволяющее, зная x, находить соответствующее значение y.

Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, табличный, графический.

Аналитический способ: функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.

Например:

$$1)\ S = \pi R^2; \quad 2)\ y = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } x < 2, \\ x - 4 & \text{при } x \geqslant 2; \end{cases} \quad 3)\ y^2 - 4x = 0.$$

Если область определения функции $y = f(x)$ не указана, то предполагается, что она совпадает с множеством всех значений аргумента, при которых соответствующая формула имеет смысл. Так, областью определения функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ является отрезок $[-1; 1]$.

Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию $y = f(x)$.

Графический способ: задается график функции.

Часто графики вычерчиваются автоматически самопишущими приборами или изображаются на экране дисплея. Значения функции y, соответствующие тем или иным значениям аргумента x, непосредственно находятся из этого графика.

Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком — его неточность.

Табличный способ: функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции. Например, известные таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы.

На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных опытным путем или в результате наблюдений.

14.3. Основные характеристики функции

1. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется ***четной***, если $\forall x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и $f(-x) = f(x)$; ***нечетной***, если $\forall x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, а нечетной — относительно начала координат.

Например, $y = x^2$, $y = \sqrt{1+x^2}$, $y = \ln|x|$ — четные функции; а $y = \sin x$, $y = x^3$ – нечетные функции; $y = x - 1$, $y = \sqrt{x}$ — функции общего вида, т. е. не четные и не нечетные.

2. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве D и пусть $D_1 \subset D$. Если для любых значений $x_1, x_2 \in D_1$ аргументов из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство: $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется ***возрастающей*** на множестве D_1; $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, то функция называется ***неубывающей*** на множестве D_1; $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется ***убывающей*** на множестве D_1; $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то функция называется ***невозрастающей*** на множестве D_1.

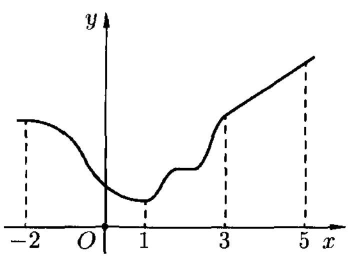


Рис. 100

Например, функция, заданная графиком (см. рис. 100), убывает на интервале $(-2; 1)$, не убывает на интервале $(1; 5)$, возрастает на интервале $(3; 5)$.

Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции на множестве D_1 называются ***монотонными*** на этом множестве, а возрастающие и убывающие — ***строго монотонными***. Интервалы, в которых функция монотонна, называются ***интервалами монотонности***. На рисунке (выше) функция строго монотонна на $(-2; 1)$ и $(3; 5)$; монотонна на $(1; 3)$.

3. Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве D, называют ***ограниченной*** на этом множестве, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$ (короткая запись: $y = f(x)$, $x \in D$, называется ограниченной на D, если $\exists M > 0 : \forall x \in D \implies |f(x)| \leqslant M$). Отсюда следует, что график ограниченной функции лежит между прямыми $y = -M$ и $y = M$ (см. рис. 101).

4. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется ***периодической*** на этом множестве, если существует такое число $T > 0$, что при каждом $x \in D$ значение $(x+T) \in D$ и $f(x+T) = f(x)$. При этом число T называется ***периодом*** функции. Если T — период функции, то ее периодами будут также числа $m \cdot T$, где $m = \pm 1; \pm 2, \ldots$ Так, для $y = \sin x$ периодами будут числа $\pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi, \ldots$ Основной период (наименьший положительный) — это период $T = 2\pi$. Вообще обычно за основной период берут наименьшее положительное число T, удовлетворяющее равенству $f(x+T) = f(x)$.

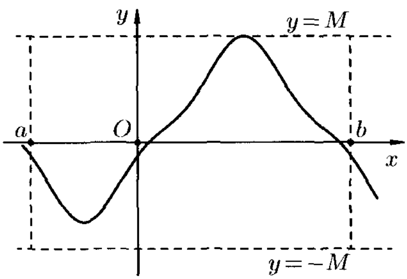


Рис 101

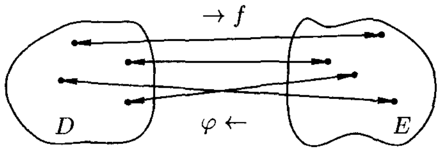


Рис 102

14.4. Обратная функция

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D и множеством значений E. Если каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D (см. рис. 102). Такая функция $\varphi(y)$ называется ***обратной*** к функции $f(x)$ и записывается в следующем виде: $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$. Про функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ говорят, что они являются взаимно обратными. Чтобы найти функцию $x = \varphi(y)$, обратную к функции $y = f(x)$, достаточно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x (если это возможно).

Примеры:

1. Для функции $y = 2x$ обратной функцией является функция $x = \frac{1}{2}y$;

2. Для функции $y = x^2$, $x \in [0;1]$, обратной функцией является $x = \sqrt{y}$; заметим, что для функции $y = x^2$, заданной на отрезке $[-1;1]$, обратной не существует, т. к. одному значению y соответствует два значения x (так, если $y = \frac{1}{4}$, то $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$).

Из определения обратной функции вытекает, что функция $y = f(x)$ имеет обратную тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ задает взаимно однозначное соответствие между множествами D и E. Отсюда следует, что любая ***строго монотонная функция имеет обратную***. При этом если функция возрастает (убывает), то обратная функция также возрастает (убывает).

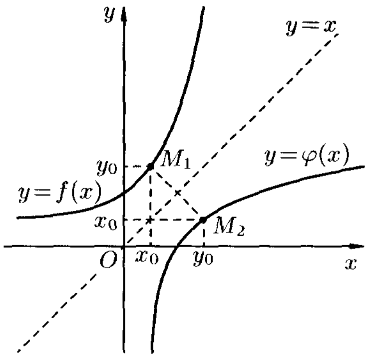


Рис. 103

Заметим, что функция $y = f(x)$ и обратная ей $x = \varphi(y)$ изображаются одной и той же кривой, т. е. графики их совпадают. Если же условиться, что, как обычно, независимую переменную (т. е. аргумент) обозначить через x, а зависимую переменную через y, то функция обратная функции $y = f(x)$ запишется в виде $y = \varphi(x)$.

Это означает, что точка $M_1(x_0; y_0)$ кривой $y = f(x)$ становится точкой $M_2(y_0; x_0)$ кривой $y = \varphi(x)$. Но точки M_1 и M_2 симметричны относительно прямой $y = x$ (см. рис. 103). Поэтому ***графики взаимно обратных функций*** $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ ***симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов***.

14.5. Сложная функция

Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве D, а функция $u = \varphi(x)$ на множестве D_1, причем для $\forall x \in D_1$ соответствующее значение $u = \varphi(x) \in D$. Тогда на множестве D_1 определена функция $u = f(\varphi(x))$, которая называется ***сложной функцией*** от x (или ***суперпозицией*** заданных функций, или ***функцией от функции***).

Переменную $u = \varphi(x)$ называют *промежуточным аргументом* сложной функции.

Например, функция $y = \sin 2x$ есть суперпозиция двух функций $y = \sin u$ и $u = 2x$. Сложная функция может иметь несколько промежуточных аргументов.

14.6. Основные элементарные функции и их графики

Основными элементарными функциями называют следующие функции.

1) *Показательная* функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. На рис. 104 показаны графики показательных функций, соответствующие различным основаниям степени.

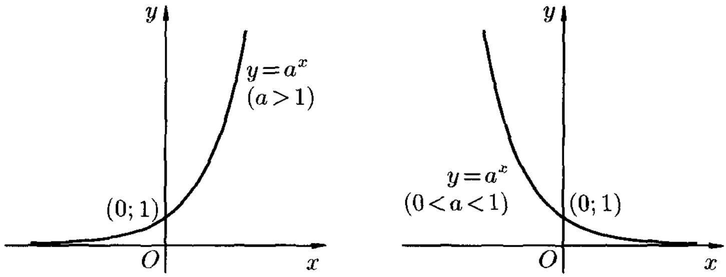


Рис. 104

2) *Степенная* функция $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Примеры графиков степенных функций, соответствующих различным показателям степени, предоставлены на рис. 105.

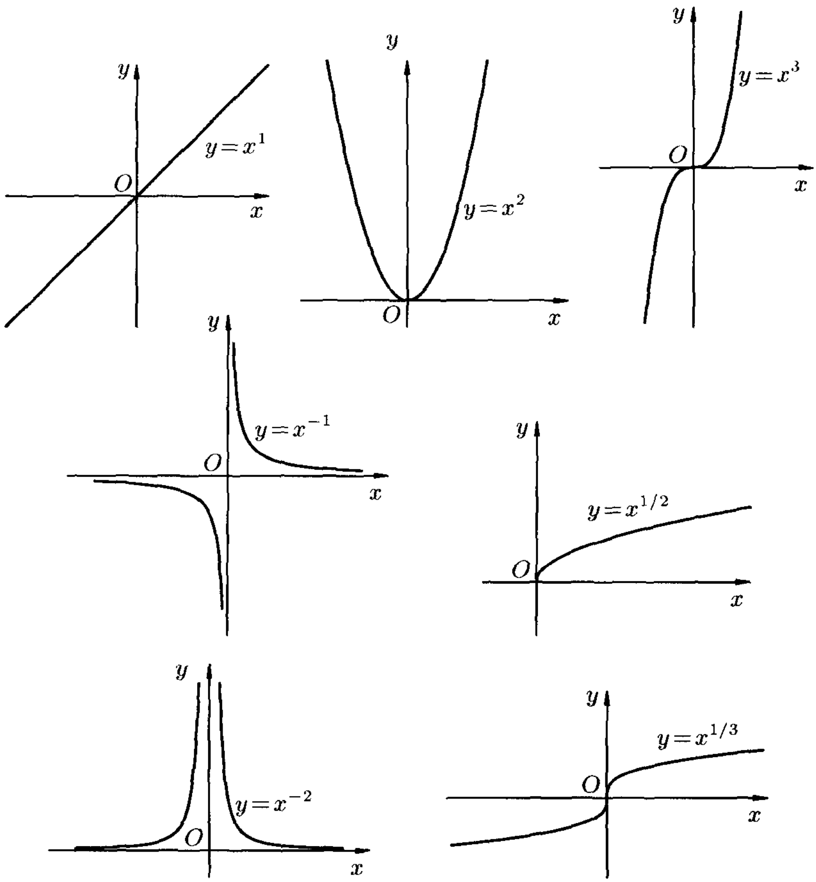


Рис. 105

3) *Логарифмическая* функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$; Графики логарифмических функций, соответствующие различным основаниям. показаны на рис. 106.

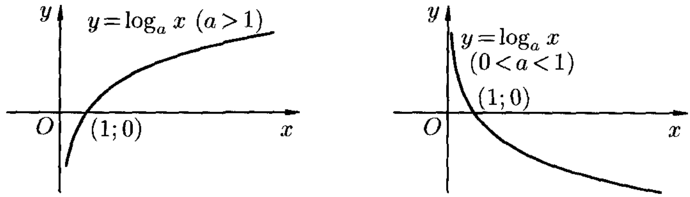


Рис. 106

4) *Тригонометрические* функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$; Графики тригонометрических функций имеют вид, показанный на рис. 107.

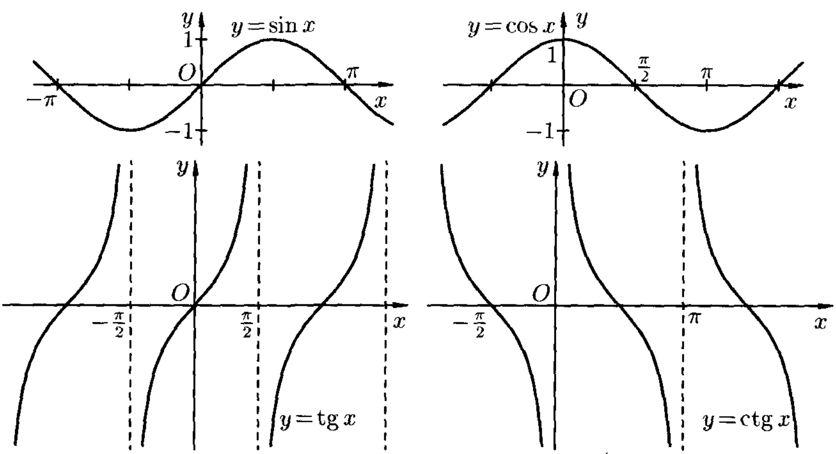


Рис. 107

5) *Обратные тригонометрические* функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$. На рис. 108 показаны графики обратных тригонометрических функций.

Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и операций взятия функции от функции, называется ***элементарной функцией***. Примерами элементарных функций могут служить функции

$$y = 3^{\cos\sqrt{x}}; \quad y = \arcsin\frac{1}{x} - \frac{\operatorname{tg} x}{8x^2+3}; \quad y = \lg(2+x^3).$$

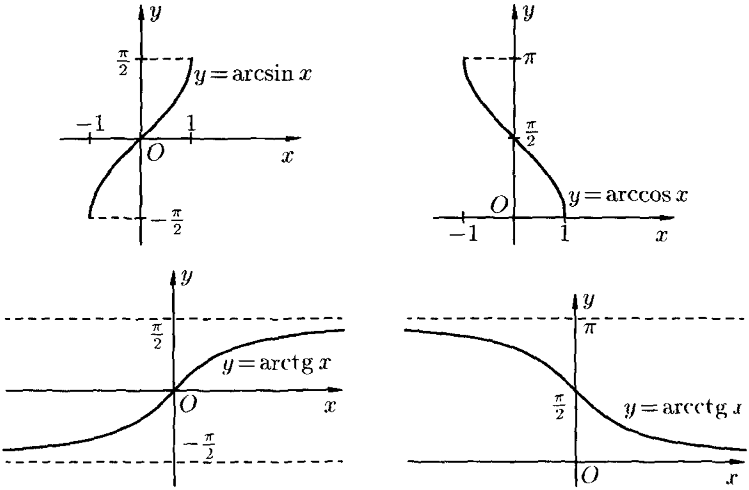


Рис. 108

Примерами *неэлементарных* функций могут служить функции

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0; \end{cases} \qquad y = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$$y = 1 - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \frac{x^7}{7! \cdot 7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)! \cdot (2n+1)} + \ldots$$

§ 15. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

15.1. Числовая последовательность

Под ***числовой последовательностью*** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ понимается функция

$$\boxed{x_n = f(n),} \tag{15.1}$$

заданная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Кратко последовательность обозначается в виде $\{x_n\}$ или x_n, $n \in \mathbb{N}$. Число x_1 называется первым членом (элементом) последовательности, x_2 — вторым,…, x_n — ***общим*** или ***n-м членом последовательности***.

Чаще всего последовательность задается формулой его общего члена. Формула (15.1) позволяет вычислить любой член последовательности по номеру n, по ней можно сразу вычислить любой член последовательности. Так, равенства

$$v_n = n^2 + 1, \quad z_n = (-1)^n \cdot n, \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

задают соответственно последовательности

$$v_n = \{2, 5, 10, \dots, n^2+1, \dots\}; \qquad z_n = \{-1, 2, -3, 4, \dots, (-1)^n \cdot n, \dots\};$$

$$y_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}; \qquad u_n = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots\right\}.$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|x_n| \leqslant M.$$

В противном случае последовательность называется неограниченной. Легко видеть, что последовательности y_n и u_n ограничены, а v_n и z_n – неограничены.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***возрастающей*** (***неубывающей***), если для любого n выполняется неравенство $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} \geqslant a_n$). Аналогично определяется убывающая (невозрастающая) последовательность.

Все эти последовательности называются ***монотонными*** последовательностями. Последовательности v_n, y_n и u_n монотонные, а z_n не монотонная.

Если все элементы последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу c, то ее называют *постоянной*.

Другой способ задания числовых последовательностей – *рекуррентный способ*. В нем задается начальный элемент x_1 (первый член последовательности) и правило определения n-го элемента по $(n-1)$-му:

$$x_n = f(x_{n-1}).$$

Таким образом, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ и т. д. При таком способе задания последовательности для определения 100-го члена надо сначала посчитать все 99 предыдущих.

15.2. Предел числовой последовательности

Можно заметить, что члены последовательности u_n неограниченно приближаются к числу 1. В этом случае говорят, что последовательность u_n, $n \in \mathbb{N}$ стремится к пределу 1.

Число a называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{15.2}$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = a$ или $x_n \to a$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ (или переменная x_n, пробегающая последовательность $x_1, x_2, x_3, \dots$) имеет предел, равный числу a (или x_n стремится к a). Говорят также, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится к* a.

Коротко определение предела можно записать так:

$$\boxed{(\forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \iff \lim_{n\to\infty} x_n = a.}$$

Пример 15.1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$.

○ Решение: По определению, число 1 будет пределом последовательности $x_n = \dfrac{n-1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, если $\forall\varepsilon > 0$ ***найдется*** натуральное число N, такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon$, т. е. $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Оно справедливо для всех $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, т. е. для всех $n > N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, где $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ — целая часть числа $\dfrac{1}{\varepsilon}$ (целая часть числа x, обозначаемая $[x]$, есть наибольшее целое число, не превосходящее x; так $[3] = 3$, $[5{,}2] = 5$).

Если $\varepsilon > 1$, то в качестве N можно взять $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Итак, $\forall\varepsilon > 0$ указано соответствующее значение N. Это и доказывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$. ●

Заметим, что число N зависит от ε. Так, если $\varepsilon = \dfrac{3}{26}$, то

$$N = \left[\frac{1}{\frac{3}{26}}\right] = \left[\frac{26}{3}\right] = \left[8\frac{2}{3}\right] = 8;$$

если $\varepsilon = 0{,}01$, то

$$N = \left[\frac{1}{\frac{1}{100}}\right] = [100] = 100.$$

Поэтому иногда записывают $N = N(\varepsilon)$.

Выясним геометрический смысл определения предела последовательности.

Неравенство (15.2) равносильно неравенствам $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, которые показывают, что элемент x_n находится в ε-окрестности точки a.

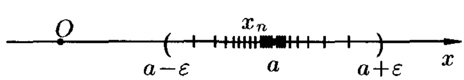


Рис. 109

Поэтому определение предела последовательности геометрически можно сформулировать так: число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности точки a найдется натуральное число N, что все значения x_n, для которых $n > N$, попадут в ε-окрестность точки a (см. рис. 109).

Ясно, что чем меньше ε, тем больше число N, но в любом случае внутри ε-окрестности точки a находится бесконечное число членов последовательности, а вне ее может быть лишь конечное их число.

Отсюда следует, что ***сходящаяся последовательность имеет только один предел***. Последовательность, не имеющая предела, называется ***расходящейся***. Таковой является, например, последовательность v_n (см. с. 128).

Постоянная последовательность $x_n = c$, $n \in \mathbb{N}$ имеет предел, равный числу c, т. е. $\lim c = c$. Действительно, для $\forall \varepsilon > 0$ при всех натуральных n выполняется неравенство (15.2). Имеем $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

15.3. Предельный переход в неравенствах

Рассмотрим последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$.

Теорема 15.1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n \leqslant y_n$, то $a \leqslant b$.

❑ Допустим, что $a > b$. Из равенств $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ будут выполняться неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ и $|y_n - b| < \varepsilon$, т. е. $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ и $b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Тогда: $x_n > a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, т. е. $x_n > \frac{a+b}{2}$ и $y_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, т. е. $y_n < \frac{a+b}{2}$. Отсюда следует, что $x_n > y_n$. Это противоречит условию $x_n \leqslant y_n$. Следовательно, $a \leqslant b$. ■

Теорема 15.2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ и справедливо неравенство $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ (начиная с некоторого номера), то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

(Примем без доказательства.)

15.4. Предел монотонной ограниченной последовательности. Число e. Натуральные логарифмы

Не всякая последовательность имеет предел. Сформулируем без доказательства признак существования предела последовательности.

Теорема 15.3 (Вейерштрасс). Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

В качестве примера на применение этого признака рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

По формуле бинома Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \cdot b^n.$$

Полагая $a = 1$, $b = \frac{1}{n}$, получим

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

или

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \quad (15.3)$$

Из равенства (15.3) следует, что с увеличением n число положительных слагаемых в правой части увеличивается. Кроме того, при увеличении n число $\frac{1}{n}$ убывает, поэтому величины $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$, $\ldots$ возрастают. Поэтому последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ — *возрастающая*, при этом

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2. \quad (15.4)$$

Покажем, что она ограничена. Заменим каждую скобку в правой части равенства (15.3) на единицу; правая часть увеличится, получим неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}.$$

Усилим полученное неравенство, заменив числа 3, 4, 5, ..., стоящие в знаменателях дробей, числом 2:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Сумму в скобке найдем по формуле суммы членов геометрической прогрессии:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1\cdot(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<2.$$

Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+2=3. \tag{15.5}$$

Итак, последовательность *ограничена*, при этом для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства (15.4) и (15.5):

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

Следовательно, на основании теоремы Вейерштрасса последовательность $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$, имеет предел, обозначаемый обычно буквой e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \tag{15.6}$$

Число e называют ***неперовым*** числом. Число e иррациональное, его приближенное значение равно 2,72 ($e = 2{,}718281828459045\ldots$). Число e принято за основание натуральных логарифмов: логарифм по основанию e называется натуральным логарифмом и обозначается $\ln x$, т. е. $\ln x = \log_e x$.

Найдем связь между натуральным и десятичным логарифмами. По определению логарифма имеем $x = e^{\ln x}$. Прологарифмируем обе части равенства по основанию 10:

$$\lg x = \lg(e^{\ln x}), \quad \text{т. е. } \lg x = \ln x \cdot \lg e.$$

Пользуясь десятичными логарифмами, находим $\lg e \approx 0{,}4343$. Значит, $\lg x \approx 0{,}4343 \cdot \ln x$. Из этой формулы следует, что $\ln x \approx \frac{1}{0{,}4343}\lg x$, т. е. $\ln x \approx 2{,}3026 \lg x$. Полученные формулы дают связь между натуральными и десятичными логарифмами.

§ 16. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

16.1. Предел функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Сформулируем два, эквивалентных между собой, определения предела функции в точке.

Определение 1 (на «языке последовательностей», или по Гейне). Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ *в точке* x_0 (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности допустимых значений аргумента x_n, $n \in \mathbb{N}$ ($x_n \neq x_0$), сходящейся к x_0 (т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к числу A (т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$).

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$. Геометрический смысл предела функции: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ означает, что для всех точек x, достаточно близких к точке x_0, соответствующие значения функции как угодно мало отличаются от числа A.

Определение 2 (на «языке ε-δ», или по Коши). Число A называется ***пределом функции в точке*** x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Это определение коротко можно записать так:

$$\Bigl(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x:\ \underbrace{|x - x_0| < \delta,\quad x \neq x_0}_{\text{или } 0 < |x - x_0| < \delta} \implies |f(x) - A| < \varepsilon\Bigr) \iff$$

$$\iff \lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Геометрический смысл предела функции: $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если для любой ε-окрестности точки A найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки A. Иными словами, точки графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon$, $y = A - \varepsilon$ (см. рис. 110). Очевидно, что величина δ зависит от выбора ε, поэтому пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Пример 16.1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 3}(2x - 1) = 5$.

Решение: Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, найдем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - 3| < \delta$, выполняется неравенство $|(2x-1)-5| < \varepsilon$, т. е. $|x-3| < \frac{\varepsilon}{2}$. Взяв $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, видим, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - 3| < \delta\left(= \frac{\varepsilon}{2}\right)$, выполняется неравенство $|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 3}(2x - 1) = 5$. ●

Пример 16.2. Доказать, что, если $f(x) = c$, то $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$.

○ Решение: Для $\forall \varepsilon > 0$ можно взять $\forall \delta > 0$. Тогда при $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ имеем $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$. ●

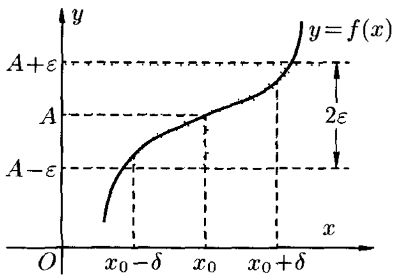


Рис. 110

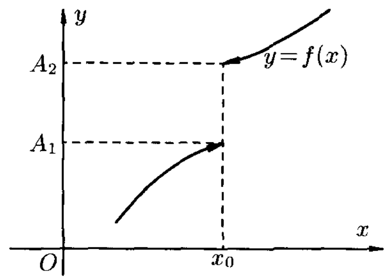


Рис 111

16.2. Односторонние пределы

В определении предела функции $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ считается, что x стремится к x_0 любым способом: оставаясь меньшим, чем x_0 (слева от x_0), большим, чем x_0 (справа от x_0), или колеблясь около точки x_0.

Бывают случаи, когда способ приближения аргумента x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. Поэтому вводят понятия односторонних пределов.

Число A_1 называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***слева*** в точке x_0, если для любого число $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$, выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$. Предел слева записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ или коротко: $f(x_0 - 0) = A_1$ (обозначение Дирихле) (см. рис. 111).

Аналогично определяется *предел функции справа*, запишем его с помощью символов:

$$\Big(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \ \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \implies |f(x) - A_2| < \varepsilon\Big) \iff$$
$$\iff \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2.$$

Коротко предел справа обозначают $f(x_0 + 0) = A_2$.

Пределы функции слева и справа называются ***односторонними*** пределами. Очевидно, если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то существуют и оба односторонних предела, причем $A = A_1 = A_2$.

Справедливо и обратное утверждение: если существуют оба предела $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ и они равны, то существует предел $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $A = f(x_0 - 0)$.

Если же $A_1 \neq A_2$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует.

16.3. Предел функции при $x \to \infty$

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $(-\infty; \infty)$. Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** $x \to \infty$, если для любого положительного числа ε существует такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Коротко это определение можно записать так:

$$\boxed{\left(\forall\varepsilon > 0\, \exists M > 0\, \forall x\colon |x| > M \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right) \Longleftrightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = A.}$$

Если $x \to +\infty$, то пишут $A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, если $x \to -\infty$, то $A = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Геометрический смысл этого определения таков: для $\forall\varepsilon > 0\ \exists M > 0$, что при $x \in (-\infty; -M)$ или $x \in (M; +\infty)$ соответствующие значения функции $f(x)$ попадают в ε-окрестность точки A, т. е. точки графика лежат в полосе шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon$ и $y = A - \varepsilon$ (см. рис. 112).

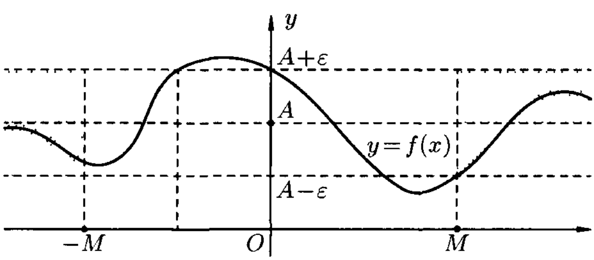


Рис. 112

16.4. Бесконечно большая функция (б.б.ф.)

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно большой при*** $x \to x_0$, если для любого числа $M > 0$ существует число $\delta = \delta(M) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$. Записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ или $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$. Коротко:

$$\boxed{\Big(\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x:\ |x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0 \implies |f(x)| > M\Big) \iff \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.}$$

Например, функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ есть б.б.ф. при $x \to 2$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to x_0$ и принимает лишь положительные значения, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$; если лишь отрицательные значения, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Функция $y = f(x)$, заданная на всей числовой прямой, называется ***бесконечно большой при*** $x \to \infty$, если для любого числа $M > 0$ найдется такое число $N = N(M) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$. Коротко:

$$\Big(\forall M > 0\ \ \exists N > 0\ \ \forall x:\ \ |x| > N \implies |f(x)| > M\Big) \iff \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Например, $y = 2^x$ есть б.б.ф. при $x \to \infty$.

Отметим, что если аргумент x, стремясь к бесконечности, принимает лишь натуральные значения, т. е. $x \in \mathbb{N}$, то соответствующая б.б.ф. становится бесконечно большой последовательностью. Например, последовательность $v_n = n^2 + 1$, $n \in \mathbb{N}$, является бесконечно большой последовательностью. Очевидно, *всякая б.б.ф. в окрестности* точки x_0 *является неограниченной* в этой окрестности. Обратное утверждение неверно: неограниченная функция может и не быть б.б.ф. (Например, $y = x \sin x$.)

Однако, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, *где A — конечное число, то функция $f(x)$ ограничена* в окрестности точки x_0.

Действительно, из определения предела функции следует, что при $x \to x_0$ выполняется условие $|f(x) - A| < \varepsilon$. Следовательно, $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ при $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, а это и означает, что функция $f(x)$ ограничена.

§ 17. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ (Б.М.Ф.)

17.1. Определения и основные теоремы

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно малой при*** $x \to x_0$, если

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.} \qquad (17.1)$$

По определению предела функции равенство (17.1) означает: для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Аналогично определяется б.м.ф. при $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$: во всех этих случаях $f(x) \to 0$.

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами или бесконечно малыми; обозначают обычно греческими буквами α, β и т. д.

Примерами б.м.ф. служат функции $y = x^2$ при $x \to 0$; $y = x - 2$ при $x \to 2$; $y = \sin x$ при $x \to \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Другой пример: $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, — бесконечно малая последовательность.

Теорема 17.1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция

❑ Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — две б.м. функции при $x \to x_0$. Это значит, что $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, т. е. для *любого* $\varepsilon > 0$, а значит, и $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ найдется число $\delta_1 > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta_1$, выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{17.2}$$

и $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$, т. е.

$$\left(\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \ \ \exists \delta_2 > 0 \ \ \forall x: \ \ 0 < |x - x_0| < \delta_2\right) \implies |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{17.3}$$

Пусть δ — наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняются оба неравенства (17.2) и (17.3). Следовательно, имеет место соотношение

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x: \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon.$$

Это значит, что $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$, т. е. $\alpha(x) + \beta(x)$ — б.м.ф. при $x \to x_0$. ■

Аналогично проводится доказательство для любого конечного числа б.м. функций.

Теорема 17.2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая.

❑ Пусть функция $f(x)$ ограничена при $x \to x_0$. Тогда существует такое число $M > 0$, что

$$|f(x)| \leqslant M \tag{17.4}$$

для всех x из δ_1-окрестности точки x_0. И пусть $\alpha(x)$ — б.м.ф. при $x \to x_0$. Тогда для *любого* $\varepsilon > 0$, а значит, и $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ найдется такое число $\delta_2 > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta_2$, выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}. \tag{17.5}$$

Обозначим через δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняются оба неравенства (17.4) и (17.5). Следовательно, $|f(x)\cdot\alpha(x)| = |f(x)|\cdot|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$. А это означает, что произведение $f(x) \cdot \alpha(x)$ при $x \to x_0$ есть бесконечно малая функция. ■

Следствие 17.1. Так как всякая б.м.ф. ограничена, то из теоремы (17.2) вытекает· произведение двух б.м ф. есть функция бесконечно малая.

Следствие 17.2. Произведение б.м.ф. на число есть функция бесконечно малая.

Теорема 17.3. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть функция бесконечно малая.

❑ Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, а $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \neq 0$. Функция $\frac{\alpha(x)}{f(x)}$ может быть представлена в виде произведения б.м.ф. $\alpha(x)$ на ограниченную функцию $\frac{1}{f(x)}$. Но тогда из теоремы (17.2) вытекает, что частное $\frac{\alpha(x)}{f(x)} = \alpha(x) \cdot \frac{1}{f(x)}$ есть функция бесконечно малая.

Покажем, что функция $\frac{1}{f(x)}$ ограниченная. Возьмем $\varepsilon < |a|$. Тогда, на основании определения предела, найдется $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. А так как $\varepsilon > |f(x) - a| = |a - f(x)| \geqslant |a| - |f(x)|$, то $|a| - |f(x)| < \varepsilon$, т. е. $|f(x)| > |a| - \varepsilon > 0$. Следовательно,

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{|a| - \varepsilon} = M,$$

т. е. функция $\frac{1}{f(x)}$ — ограниченная. ■

Теорема 17.4. Если функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая ($\alpha \neq 0$), то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая функция и наоборот. если функция $f(x)$ — бесконечно большая, то $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая

❑ Пусть $\alpha(x)$ есть б.м.ф. при $x \to x_0$, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. Тогда

$$\Big(\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta > 0 \ \ \forall x: \ \ 0 < |x - x_0| < \delta\Big) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon,$$

т. е. $\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| > M$, где $M = \frac{1}{\varepsilon}$. А это означает, что функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая. Аналогично доказывается обратное утверждение. ■

Замечание: Доказательства теорем приводились для случая, когда $x \to x_0$, но они справедливы и для случая, когда $x \to \infty$.

Пример 17.1. Показать, что функция

$$f(x) = (x-1)^2 \cdot \sin^3 \frac{1}{x-1}$$

при $x \to 1$ является бесконечно малой.

○ Решение: Так как $\lim\limits_{x \to 1}(x-1)^2 = 0$, то функция $\varphi(x) = (x-1)^2$ есть бесконечно малая при $x \to 1$. Функция $g(x) = \sin^3 \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$, ограничена $\left|\sin^3 \frac{1}{x-1}\right| \leqslant 1$.

Функция $f(x) = (x-1)^2 \cdot \sin^3 \frac{1}{x-1}$ представляет собой произведение ограниченной функции ($g(x)$) на бесконечно малую ($\varphi(x)$). Значит, $f(x)$ — бесконечно малая при $x \to 1$. ●

17.2. Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией

Теорема 17.5. Если функция $f(x)$ имеем предел, равный A, то ее можно представить как сумму числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, т е если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$

❑ Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Следовательно,

$$\Big(\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \;\; \forall x: \quad 0 < |x - x_0| < \delta\Big) \implies |f(x) - A| < \varepsilon,$$

т. е $|f(x) - A - 0| < \varepsilon$. Это означает, что функция $f(x) - A$ имеет предел, равный нулю, т. е. является б.м.ф., которую обозначим через $\alpha(x)$: $f(x) - A = \alpha(x)$. Отсюда $f(x) = A + \alpha(x)$. ■

Теорема 17.6 (обратная). Если функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, то число A является пределом функции $f(x)$, т. е. если $f(x) = A + \alpha(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

❑ Пусть $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — б.м.ф. при $x \to x_0$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$. Тогда

$$\Big(\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \;\; \forall x: \quad 0 < |x - x_0| < \delta\Big) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

А так как по условию $f(x) = A + \alpha(x)$, то $\alpha(x) = f(x) - A$. Получаем

$$\Big(\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \;\; \forall x: \quad 0 < |x - x_0| < \delta\Big) \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

А это и означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. ■

Пример 17.2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(5 + x) = 7$.

○ Решение: Функцию $5 + x$ можно представить в виде суммы числа 7 и б.м.ф. $x - 2$ (при $x \to 2$), т. е. выполнено равенство $5 + x = 7 + (x - 2)$. Следовательно, по теореме 17.6 получаем $\lim\limits_{x\to 2}(5 + x) = 7$. ●

17.3. Основные теоремы о пределах

Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функции. Формулировка и доказательство теорем для случаев, когда $x \to x_0$ и $x \to \infty$, аналогичны. В приводимых теоремах будем считать, что пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$ существуют.

Теорема 17.7. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x).$$

❑ Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B$. Тогда по теореме 17.5 о связи функции, ее предела и б.м.ф. можно записать $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\varphi(x) = B + \beta(x)$. Следовательно, $f(x) + \varphi(x) = A + B + (\alpha(x) + \beta(x))$. Здесь $\alpha(x) + \beta(x)$ б.м.ф. как сумма б.м.ф По теореме 17.6 о связи функции, ее предела и б.м.ф. можно записать $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)+\varphi(x)) = A+B$, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} \varphi(x). \quad ■$$

В случае разности функций доказательство аналогично.

Теорема справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа функций.

Следствие 17.3. Функция может иметь только один предел при $x \to x_0$.

❑ Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$. По теореме 17.7 имеем:

$$0 = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} f(x) = A - B.$$

Отсюда $A - B = 0$, т. е. $A = B$. ■

Теорема 17.8. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \varphi(x).$$

☐ Доказательство аналогично предыдущему, проведем его без особых пояснений. Так как $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = B$, то

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad \varphi(x) = B + \beta(x),$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б.м.ф. Следовательно,

$$f(x) \cdot \varphi(x) = (A + \alpha(x)) \cdot (B + \beta(x)),$$

т. е.

$$f(x) \cdot \varphi(x) = AB + (A \cdot \beta(x) + B \cdot \alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)).$$

Выражение в скобках есть б.м.ф. Поэтому

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = A \cdot B,$$

т е.

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} \varphi(x).$$ ■

Отметим, что теорема справедлива для произведения любого конечного числа функций.

Следствие 17.4. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x).$$

☐ $\lim\limits_{x\to x_0} (c \cdot f(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x).$ ■

Следствие 17.5. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела: $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n$. В частности, $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, $n \in \mathbb{N}$.

☐ $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^n = \lim\limits_{x\to x_0} \underbrace{(f(x) \cdot f(x) \cdot \ldots \cdot f(x))}_{n \text{ сомножителей}} = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \ldots \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) =$
$= \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n.$ ■

Теорема 17.9. Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)} \quad \left(\lim_{x\to x_0} \varphi(x) \neq 0\right).$$

❑ Доказательство аналогично предыдущему. Из равенств

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = B \neq 0$$

следуют соотношения $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\varphi(x) = B + \beta(x)$. Тогда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} = \frac{A}{B} + \left(\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B}\right) = \frac{A}{B} + \frac{B\cdot\alpha(x) - A\cdot\beta(x)}{B^2 + B\cdot\beta(x)}.$$

Второе слагаемое есть б.м.ф. как частное от деления б.м.ф. на функцию, имеющую отличный от нуля предел.

Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)}$. ■

Рассмотрим *пример*.

Пример 17.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 7)$.

❍ Решение:

$$\lim_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 7) = \lim_{x\to 1} 3x^2 - \lim_{x\to 1} 2x + \lim_{x\to 1} 7 =$$
$$= 3\Bigl(\lim_{x\to 1} x\Bigr)^2 - 2\lim_{x\to 1} x + 7 = 3\cdot 1 - 2 + 7 = 8. \quad \bullet$$

Пример 17.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}$.

❍ Решение: Здесь применить теорему о пределе дроби нельзя, т. к. предел знаменателя, при $x \to 2$, равен 0. Кроме того, предел числителя равен 0. В таких случаях говорят, что имеем *неопределенность вида* $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь на $x - 2 \neq 0$ ($x \to 2$, но $x \neq 2$):

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)} =$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+16}{x-4} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+16)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-4)} = \frac{2+16}{2-4} = -9. \quad \bullet$$

Пример 17.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 2x + 5}$.

❍ Решение: Здесь мы имеем дело с *неопределенностью вида* $\frac{\infty}{\infty}$. Для нахождения предела данной дроби разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2})}=\frac{1}{2}.$$

Функция $2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ есть сумма числа 2 и б.м.ф., поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=2;\quad \lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)=4. \qquad\bullet$$

17.4. Признаки существования пределов

Не всякая функция, даже ограниченная, имеет предел. Например, функция $y=\sin x$ при $x\to\infty$ предела не имеет. Во многих вопросах анализа бывает достаточно только убедиться в существовании предела функции. В таких случаях пользуются признаками существования предела.

Теорема 17.10 (о пределе промежуточной функции). Если функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $g(x)$, стремящимися к одному и тому же пределу, то она также стремится к этому пределу, т. е. если

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A,\quad \lim_{x\to x_0}g(x)=A, \tag{17.6}$$

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x), \tag{17.7}$$

то

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

❑ Из равенств (17.6) вытекает, что для любого $\varepsilon>0$ существуют две окрестности δ_1 и δ_2 точки x_0, в одной из которых выполняется неравенство $|\varphi(x)-A|<\varepsilon$, т. е.

$$-\varepsilon<\varphi(x)-A<\varepsilon, \tag{17.8}$$

а в другой $|g(x)-A|<\varepsilon$, т. е.

$$-\varepsilon<g(x)-A<\varepsilon. \tag{17.9}$$

Пусть δ — меньшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда в δ-окрестности точки x_0 выполняются оба неравенства (17.8) и (17.9).

Из неравенств (17.7) находим, что

$$\varphi(x)-A\leqslant f(x)-A\leqslant g(x)-A. \tag{17.10}$$

С учетом неравенств (17.8) и (17.9) из неравенства (17.10) следуют неравенства $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$ или $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Мы доказали, что

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta > 0 \ \ \forall x: \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon,$$

то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. ■

Теорему 17.10 иногда шутливо называют «принципом двух милиционеров». Роль «милиционеров» играют функции $\varphi(x)$ и $g(x)$, функция $f(x)$ «следует за милиционерами».

Теорема 17.11 (о пределе монотонной функции). Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена при $x < x_0$ или при $x > x_0$, то существует соответственно ее левый предел $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$ или ее правый предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$.

Доказательство этой теоремы не приводим.

Следствие 17.6. Ограниченная монотонная последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел.

17.5. Первый замечательный предел

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,} \tag{17.11}$$

называемый ***первым замечательным пределом***. Читается: предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю. Докажем равенство (17.11).

□ Возьмем круг радиуса 1, обозначим радианную меру угла MOB через x (см. рис. 113). Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. На рисунке $|AM| = \sin x$, дуга MB численно равна центральному углу x, $|BC| = \operatorname{tg} x$. Очевидно, имеем $S_{\triangle MOB} < S_{\text{сектора } MOB} < S_{\triangle COB}$. На основании соответствующих формул геометрии получаем $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Разделим неравенства на $\frac{1}{2}\sin x > 0$, получим $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ или $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

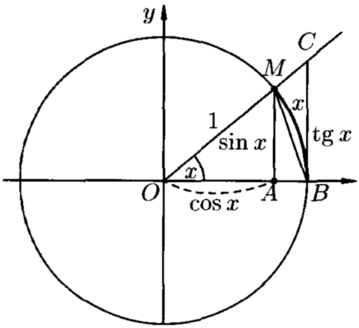


Рис 113

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, то по признаку (о пределе промежуточной функции) существования пределов

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{17.12}$$

Пусть теперь $x < 0$. Имеем $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$, где $-x > 0$. Поэтому

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x<0)}} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{17.13}$$

Из равенств (17.12) и (17.13) вытекает равенство (17.11). ■

Пример 17.6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}$.

○ Решение: Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Теорема о пределе дроби неприменима. Обозначим $3x = t$; тогда при $x \to 0$ и $t \to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2\cdot\frac{t}{3}} = \lim_{t\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}.$$ ●

Пример 17.7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

○ Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = 1\cdot\frac{1}{1} = 1.$ ●

17.6. Второй замечательный предел

Как известно, предел числовой последовательности $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, равный e (см. (15.6)):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{17.14}$$

Докажем, что к числу e стремится и функция $x_n = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$ $(x \in \mathbb{R})$:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.} \tag{17.15}$$

1. Пусть $x \to +\infty$. Каждое значение x заключено между двумя положительными целыми числами: $n \leqslant x < n+1$, где $n = [x]$ — это целая часть x. Отсюда следует $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$, $1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \leqslant 1+\frac{1}{n}$, поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Если $x \to +\infty$, то $n \to \infty$. Поэтому, согласно (17.14), имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

По признаку (о пределе промежуточной функции) существования пределов

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{17.16}$$

2. Пусть $x \to -\infty$. Сделаем подстановку $-x = t$, тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^1 = e\cdot 1 = e. \tag{17.17}$$

Из равенств (17.16) и (17.17) вытекает равенство (17.15).

Если в равенстве (17.15) положить $\frac{1}{x} = \alpha$ ($\alpha \to 0$ при $x \to \infty$), оно запишется в виде

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.} \tag{17.18}$$

Равенства (17.15) и (17.18) называются ***вторым замечательным пределом***. Они широко используются при вычислении пределов. В приложениях анализа большую роль играет показательная функция с основанием e. Функция $y = e^x$ называется ***экспоненциальной***, употребляется также обозначение $e^x = \exp(x)$.

Пример 17.8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

Решение: Обозначим $x = 2t$, очевидно, $t \to \infty$ при $x \to \infty$. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \cdot \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e\cdot e = e^2.$$

§ 18. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

18.1. Сравнение бесконечно малых функций

Как известно, сумма, разность и произведение двух б.м.ф. есть функция бесконечно малая. Отношение же двух б.м.ф. может вести себя различным образом: быть конечным числом, быть бесконечно большой функцией, бесконечно малой или вообще не стремиться ни к какому пределу.

Две б.м.ф. сравниваются между собой с помощью их отношения.

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ есть б.м.ф. при $x \to x_0$, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$.

1. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$ $(A \in \mathbb{R})$, то α и β называются *бесконечно малыми одного порядка.*
2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то α называется *бесконечно малой более высокого порядка*, чем β.
3. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, то α называется *бесконечно малой более низкого порядка*, чем β.
4. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta}$ не существует, то α и β называются *несравнимыми бесконечно малыми.*

Отметим, что таковы же правила сравнения б.м.ф. при $x \to \pm\infty$, $x \to x_0 \pm 0$.

Пример 18.1. Сравнить порядок функций $\alpha = 3x^2$ и $\beta = 14x^2$ при $x \to \infty$.

○ Решение: При $x \to 0$ это б.м.ф. одного порядка, так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{14x^2} = \frac{3}{14} \neq 0.$$

Говорят, что б.м.ф. α и β одного порядка стремятся к нулю с примерно одинаковой скоростью. ●

Пример 18.2. Являются ли функции $\alpha = 3x^4$ и $\beta = 7x$ б.м.ф. одного порядка при $x \to 0$?

○ Решение: При $x \to 0$ функция α есть б.м.ф. более высокого порядка, чем β, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^4}{7x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^3}{7} = 0$. В этом случае б.м.ф. α стремится к нулю быстрее, чем β. ●

Пример 18.3. Сравнить порядок функций $\alpha = \operatorname{tg} x$ и $\beta = x^2$ при $x \to 0$.

○ Решение: Так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \infty,$$

то α есть б.м.ф. более низкого порядка, чем β. ●

Пример 18.4. Можно ли сравнить функции $\alpha = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ и $\beta = x$ при $x \to 0$?

○ Решение: Функции $\alpha = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ и $\beta = x$ при $x \to 0$ являются несравнимыми б.м.ф., так как предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x \cdot \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ не существует. ●

18.2. Эквивалентные бесконечно малые и основные теоремы о них

Среди бесконечно малых функций одного порядка особую роль играют так называемые эквивалентные бесконечно малые.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то α и β называются ***эквивалентными бесконечно малыми*** (при $x \to x_0$); это обозначается так: $\alpha \sim \beta$.

Например, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

Теорема 18.1. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

□ Пусть $\alpha \sim \alpha'$ и $\beta \sim \beta'$ при $x \to x_0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha'} \cdot \frac{\beta'}{\beta'}\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\beta'}{\beta} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha'}{\beta'} = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha'}{\beta'},$$

т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}$.

Очевидно также, что $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha'}{\beta} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta'}$. ■

> **Теорема 18.2.** Разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них

❑ Пусть $\alpha \sim \beta$ при $x \to x_0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \lim_{x\to x_0} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 - \lim_{x\to x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 1 - 1 = 0,$$

аналогично $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha - \beta}{\beta} = 0$. ■

Справедливо и обратное утверждение: если разность б.м.ф. α и β есть бесконечно малая высшего порядка, чем α или β, то α и β эквивалентные бесконечно малые.

Действительно, так как $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$, т. е. $1 - \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 0$. Отсюда $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 1$, т. е. $\alpha \sim \beta$. Аналогично, если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha - \beta}{\beta} = 0$, то $\alpha \sim \beta$.

> **Теорема 18.3.** Сумма конечного числа бесконечно малых функций разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

❑ Докажем теорему для двух функций. Пусть $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ при $x \to x_0$, причем α — б.м.ф. высшего порядка, чем β, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Следовательно, $\alpha + \beta \sim \beta$ при $x \to x_0$. ■

Слагаемое, эквивалентное сумме бесконечно малых, называется *главной частью этой суммы*.

Замена суммы б.м.ф. ее главной частью называется *отбрасыванием бесконечно малых высшего порядка*.

Пример 18.5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x + 7x^2}{\sin 2x}$.

○ Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+7x^2}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$, поскольку $3x+7x^2 \sim 3x$ и $\sin 2x \sim 2x$ при $x \to 0$. ●

18.3. Применение эквивалентных бесконечно малых функций

Вычисление пределов

Для раскрытия неопределённостей вида $\frac{0}{0}$ часто бывают полезным применять принцип замены бесконечно малых эквивалентными и другие свойства эквивалентных бесконечно малых функций. Как известно, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$. Приведем еще примеры эквивалентных б.м.ф.

Пример 18.6. Покажем, что $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$.

○ Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\(\frac{x}{2}\to 0)}}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1\cdot 1 = 1.$ ●

Пример 18.7. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

○ Решение: Обозначим $\arcsin x = t$. Тогда $x = \sin t$ и $t \to 0$ при $x \to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Следовательно, $\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$. ●

Пример 18.8. Покажем, что $\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2}$ при $x \to 0$.

○ Решение: Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\frac{x}{2}\cdot(\sqrt{1+x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{x}{2}(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{2}{2} = 1,$$

то $\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2}$ при $x \to 0$. ●

Ниже приведены *важнейшие эквивалентности*, которые используются при вычислении пределов:

1. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$;	6. $e^x - 1 \sim x$ $(x \to 0)$;
2. $\operatorname{tg} x \sim x$ $(x \to 0)$;	7. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ $(x \to 0)$;
3. $\arcsin x \sim x$ $(x \to 0)$;	8. $\ln(1+x) \sim x$ $(x \to 0)$;
4. $\operatorname{arctg} x \sim x$ $(x \to 0)$;	9. $\log_a(1+x) \sim x \cdot \log_a e$ $(x \to 0)$;
5. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ $(x \to 0)$;	10. $(1+x)^k - 1 \sim k \cdot x$, $k > 0$ $(x \to 0)$; в частности, $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$.

Пример 18.9. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$.

○ Решение: Так как $\operatorname{tg} 2x \sim 2x, \sin 3x \sim 3x$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$ ●

Пример 18.10. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{1/x} - 1)$.

○ Решение: Обозначим $\frac{1}{x} = t$, из $x \to \infty$ следует $t \to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^t - 1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot t = \lim_{t\to 0} 1 = 1.$$ ●

Пример 18.11. Найти $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arcsin(x-1)}{x^2 - 5x + 4}$.

○ Решение: Так как $\arcsin(x-1) \sim (x-1)$ при $x \to 1$, то

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arcsin(x-1)}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{3}.$$ ●

Приближенные вычисления

Если $\alpha \sim \beta$, то, отбрасывая в равенстве $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ бесконечно малую более высокого порядка, т. е. $\alpha - \beta$, получим приближенное равенство $\alpha \approx \beta$.

Оно позволяет выражать одни бесконечно малые через другие. Приведенные выше важнейшие эквивалентности служат источником ряда приближенных формул.

Приведенные формулы справедливы при малых x, и они тем точнее, чем меньше x.

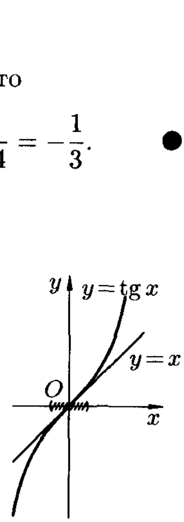


Рис. 114. $\operatorname{tg} x \approx x$ $(x \to 0)$

Например, графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = x$ в окрестности точки 0 практически не различимы (см. рис. 114), а кривая $y = \sin x$ в окрестности точки 0 сливается с прямой $y = x$ (рис. 115). На рисунках 116–118 проиллюстрированы некоторые из важнейших эквивалентностей, о которых говорилось выше.

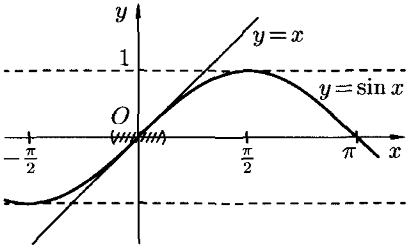


Рис. 115. $\sin x \approx x \ (x \to 0)$

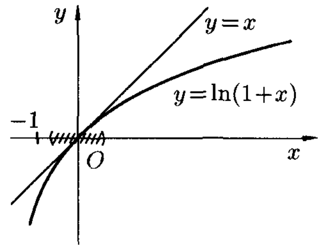


Рис. 116. $\ln(1+x) \approx x \ (x \to 0)$

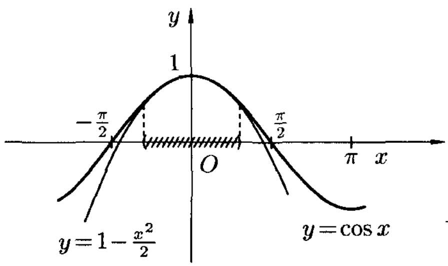


Рис. 117. $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \ (x \to 0)$

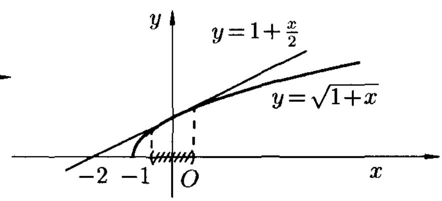


Рис. 118. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \ (x \to 0)$

Пример 18.12. Найти приближенное значение для $\ln 1{,}032$.

❍ Решение: $\ln 1{,}032 = \ln(1 + 0{,}032) \approx 0{,}032$ Для сравнения результата по таблице логарифмов находим, что $\ln 1{,}032 = 0{,}031498\ldots$ ●

§ 19. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

19.1. Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т. е.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).} \qquad (19.1)$$

Равенство (19.1) означает выполнение трех условий:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности;

2) функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$;

3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т. е. выполняется равенство (19.1).

Так как $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, то равенство (19.1) можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) = f(x_0). \tag{19.2}$$

Это означает, что *при нахождении предела непрерывной функции* $f(x)$ *можно перейти к пределу под знаком функции*, то есть *в функцию* $f(x)$ *вместо аргумента* x *подставить его предельное значение* x_0.

Например, $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e$. В первом равенстве функция и предел поменялись местами (см. (19.2)) в силу непрерывности функции e^x.

Пример 19.1. Вычислить $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$
$$= \ln\left(\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1. \quad \bullet$$

Отметим, что $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$.

Можно дать еще одно определение непрерывности функции, опираясь на понятия приращения аргумента и функции.

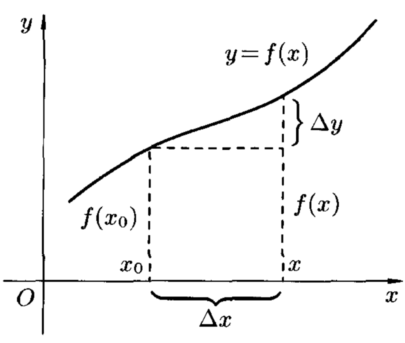


Рис. 119

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некотором интервале $(a;b)$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a;b)$. Для любого $x \in (a;b)$ разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента* x *в точке* x_0 и обозначается Δx («дельта x»): $\Delta x = x - x_0$. Отсюда $x = x_0 + \Delta x$.

Разность соответствующих значений функций $f(x) - f(x_0)$ называется *приращением функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначается Δy (или Δf или $\Delta f(x_0)$): $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ или $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (см. рис. 119).

Очевидно, приращения Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными числами.

Запишем равенство (19.1) в новых обозначениях. Так как условия $x \to x_0$ и $x - x_0 \to 0$ одинаковы, то равенство (19.1) принимает вид $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ или

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.} \tag{19.3}$$

Полученное равенство (19.3) является еще одним определением непрерывности функции в точке: функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если она определена в точке x_0 и ее окрестности и выполняется равенство (19.3), т. е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Исследуя непрерывность функции в точке, применяют либо первое (равенство (19.1)), либо второе (равенство (19.3)) определение.

Пример 19.2. Исследовать на непрерывность функцию $y = \sin x$.

Решение: Функция $y = \sin x$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$.

Возьмем произвольную точку x и найдем приращение Δy:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 0$, так как произведение ограниченной функции и б.м.ф. есть б.м.ф.

Согласно определению (19.3), функция $y = \sin x$ непрерывна в точке x. ●

Аналогично доказывается, что функция $y = \cos x$ также непрерывна.

19.2. Непрерывность функции в интервале и на отрезке

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в интервале* (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в интервале (a, b) и в точке $x = a$ *непрерывна справа* $\left(\text{т. е. } \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)\right)$, а в точке $x = b$ *непрерывна слева* $\left(\text{т. е. } \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)\right)$.

19.3. Точки разрыва функции и их классификация

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются ***точками разрыва этой функции***. Если $x = x_0$ — точка разрыва функции $y = f(x)$, то в ней не выполняется по крайней мере одно из условий первого определения непрерывности функции, а именно:

1. Функция определена в окрестности точки x_0, но не определена в самой точке x_0.

Например, функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ не определена в точке $x_0 = 2$ (см. рис. 120).

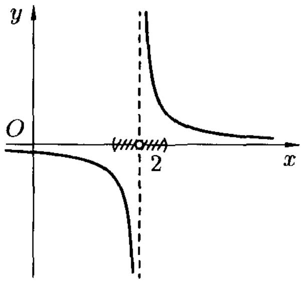


Рис. 120

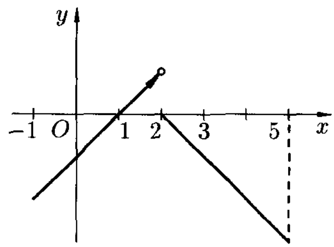


Рис. 121

2. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предела $f(x)$ при $x \to x_0$.

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{если } \ -1 \leqslant x < 2, \\ 2-x, & \text{если } \ 2 \leqslant x \leqslant 5, \end{cases}$$

определена в точке $x_0 = 2$ $(f(2) = 0)$, однако в точке $x_0 = 2$ имеет разрыв (см. рис. 121), т. к. эта функция не имеет предела при $x \to 2$:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = 1, \text{ а } \lim_{x\to 2+0} f(x) = 0.$$

3. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но этот предел не равен значению функции в точке x_0: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Например, функция (см. рис. 122)

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } \ x \neq 0; \\ 2, & \text{если } \ x = 0. \end{cases}$$

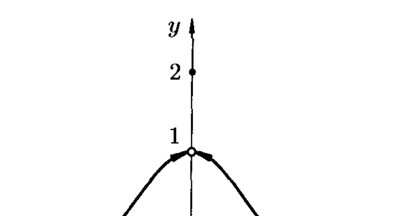


Рис. 122

Здесь $x_0 = 0$ — точка разрыва:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

а $g(x_0) = g(0) = 2$.

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода. Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва первого рода*** функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы), т. е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$. При этом:

а) если $A_1 = A_2$, то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*; б) если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется *точкой конечного разрыва*. Величину $|A_1 - A_2|$ называют *скачком функции* в точке разрыва первого рода.

Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва второго рода*** функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

1. Обратимся к функциям, рассмотренным выше (см. рис. 120). $y = \frac{1}{x-2}$, $x_0 = 2$ — точка разрыва второго рода.

2. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если} \quad -1 \leqslant x < 2, \\ 2 - x, & \text{если} \quad 2 \leqslant x \leqslant 5, \end{cases}$$

$x_0 = 2$ является точкой разрыва первого рода, скачок функции равен $|1 - 0| = 1$.

3. Для функции

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 2 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ является точкой устранимого разрыва первого рода. Положив $g(x) = 1$ (вместо $g(x) = 2$) при $x = 0$, разрыв устранится, функция станет непрерывной.

Пример 19.3. Дана функция $f(x) = \dfrac{|x-3|}{x-3}$. Найти точки разрыва, выяснить их тип.

○ Решение: Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 3$. Очевидно, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 3, \\ -1 & \text{при } x < 3. \end{cases}$ Следовательно, $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = 1$, а $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = -1$. Поэтому в точке $x = 3$ функция имеет разрыв первого рода. Скачок функции в этой точке равен $1 - (-1) = 2$. ●

19.4. Основные теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность элементарных функций

Теоремы о непрерывности функций следуют непосредственно из соответствующих теорем о пределах.

Теорема 19.1. Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, в которых делитель равен нулю)

❑ Пусть функция $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на некотором множестве X и x_0 — любое значение из этого множества. Докажем, например, непрерывность произведения $F(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$. Применяя теорему о пределе произведения, получим:

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = f(x_0) \cdot \varphi(x_0) = F(x_0).$$

Итак, $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$, что и доказывает непрерывность функции $f(x) \cdot \varphi(x)$ в точке x_0. ■

Теорема 19.2. Пусть функции $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $f(\varphi(x))$, состоящая из непрерывных функций, непрерывна в точке x_0.

❑ В силу непрерывности функции $u = \varphi(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, т. е. при $x \to x_0$ имеем $u \to u_0$. Поэтому вследствие непрерывности функции $y = f(u)$ имеем:

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0)).$$

Это и доказывает, что сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0. ■

Теорема 19.3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a; b]$ оси Ox, то обратная функция $y = \varphi(x)$ также непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке $[c; d]$ оси Oy (без доказательства).

Так, например, функция $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, в силу теоремы 19.1, есть функция непрерывная для всех значений x, кроме тех, для которых $\cos x = 0$, т. е. кроме значений $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Функции $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arccos x$, $\operatorname{arcctg} x$, в силу теоремы 19.3, непрерывны при всех значениях x, при которых эти функции определены.

Можно доказать, что ***все основные элементарные функции непрерывны при всех значениях x, для которых они определены.***

Как известно, *элементарной* называется такая функция, которую можно задать одной формулой, содержащей конечное число арифметических действий и суперпозиций (операции взятия функции от функции) основных элементарных функций. Поэтому из приведенных выше теорем вытекает: ***всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.***

Этот важный результат позволяет, в частности, легко находить пределы элементарных функций в точках, где они определены.

Пример 19.4. Найти $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} 2^{\operatorname{ctg} x}$.

Решение: Функция $2^{\operatorname{ctg} x}$ непрерывна в точке $x = \frac{\pi}{4}$, поэтому

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} 2^{\operatorname{ctg} x} = 2^{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}} = 2^1 = 2.$$

19.5. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Непрерывные на отрезке функции имеют ряд важных свойств. Сформулируем их в виде теорем, не приводя доказательств.

Теорема 19.4 (Вейерштрасса). Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Изображенная на рисунке 123 функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, принимает свое наибольшее значение M в точке x_1, а наименьшее m — в точке x_2. Для любого $x \in [a; b]$ имеет место неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Следствие 19.1. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

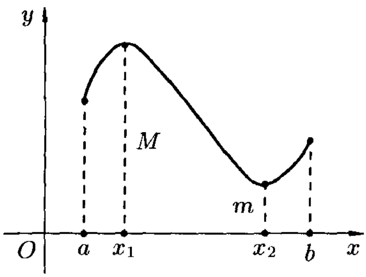


Рис. 123

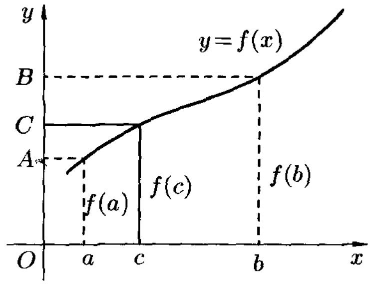


Рис. 124

Теорема 19.5 (Больцано-Коши). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B.

Геометрически теорема очевидна (см. рис. 124).

Для любого числа C, заключенного между A и B, найдется точка c внутри этого отрезка такая, что $f(c) = C$. Прямая $y = C$ пересечет график функции по крайней мере в одной точке.

Следствие 19.2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a; b]$ найдется хотя бы одна точка c, в которой данная функция $f(x)$ обращается в нуль: $f(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы: если график непрерывной функции переходит с одной стороны оси Ox на другую, то он пересекает ось Ox (см. рис. 125).

Следствие 19.2 лежит в основе так называемого «*метода половинного деления*», который используется для нахождения корня уравнения $f(x) = 0$.

Утверждения теорем 19.4 и 19.5, вообще говоря, делаются неверными, если нарушены какие-либо из ее условий: функция непрерывна не на отрезке $[a; b]$, а в интервале $(a; b)$, либо функция на отрезке $[a; b]$ имеет разрыв.

Рисунок 126 показывает это для следствия теоремы 19.5: график разрывной функции не пересекает ось Ox.

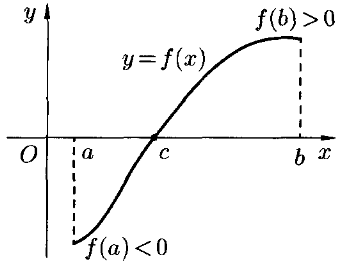


Рис. 125

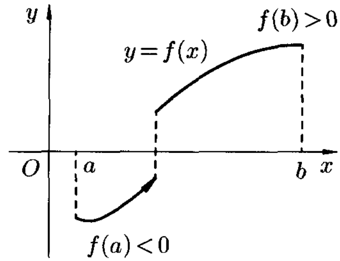


Рис. 126

Пример 19.5. Определить с точностью до $\varepsilon = 0{,}00001$ корень уравнения $e^{2x+1} + x^2 - 5 = 0$, принадлежащий отрезку $[0; 1]$, применив метод половинного деления.

Решение: Обозначим левую часть уравнения через $f(x)$.

Шаг 1. Вычисляем $\varphi = f(a)$ и $\psi = f(b)$, где $a = 0$, $b = 1$.

Шаг 2. Вычисляем $x = \dfrac{a+b}{2}$.

Шаг 3. Вычисляем $y = f(x)$. Если $f(x) = 0$, то x — корень уравнения.

Шаг 4. При $f(x) \neq 0$ если $y \cdot \varphi < 0$, то полагаем $b = x$, $\psi = y$, иначе полагаем $a = x$, $\varphi = y$.

Шаг 5. Если $b - a - \varepsilon < 0$ то задача решена. В качестве искомого корня (с заданной точностью ε) принимается величина $x = \dfrac{a+b}{2}$. Иначе процесс деления отрезка $[a; b]$ пополам продолжаем, возвращаясь к шагу 2.

В результате произведенных действий получим: $x = 0{,}29589$. ●

§ 20. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

20.1. Задачи, приводящие к понятию производной

Понятие производной является одним из основных математических понятий. Производная широко используется при решении целого ряда задач математики, физики, других наук, в особенности при изучении скорости разных процессов.

Скорость прямолинейного движения

Пусть материальная точка (некоторое тело) M движется неравномерно по некоторой прямой. Каждому значению времени t соответствует определенное расстояние $OM = S$ до некоторой фиксированной точки O. Это расстояние зависит от истекшего времени t, т. е. $S = S(t)$.

Это равенство называют *законом движения точки.* Требуется найти скорость движения точки.

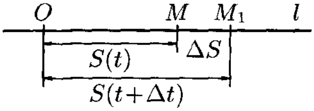


Рис 127

Если в некоторый момент времени t точка занимает положение M, то в момент времени $t+\Delta t$ (Δt — приращение времени) точка займет положение M_1, где $OM_1 = S + \Delta S$ (ΔS — приращение расстояния) (см. рис. 127). Таким образом, перемещение точки M за время Δt будет $\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$

Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ выражает *среднюю скорость* движения точки за время Δt:

$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Средняя скорость зависит от значения Δt: чем меньше Δt, тем точнее средняя скорость выражает скорость движения точки в данный момент времени t.

Предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt называется *скоростью движения точки в данный момент времени* (или мгновенной скоростью). Обозначив эту скорость через V, получим

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad \text{или} \quad V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}. \tag{20 1}$$

Касательная к кривой

Дадим сначала общее определение касательной к кривой.

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 (см. рис. 128).

Прямую MM_1, проходящую через эти точки, называют *секущей.*

Пусть точка M_1, двигаясь вдоль кривой L, неограниченно приближается к точке M. Тогда секущая, поворачиваясь около точки M, стремится к некоторому предельному положению MT.

Касательной к данной кривой в данной точке M называется предельное положение MT секущей MM_1, проходящей через точку M, когда вторая точка пересечения M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M_1.

Рассмотрим теперь график непрерывной кривой $y = f(x)$, имеющий в точке $M(x;y)$ невертикальную касательную. Найдем ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол касательной с осью Ox.

Для этого проведем через точку M и точку M_1 графика с абсциссой $x + \Delta x$ секущую (см. рис. 129). Обозначим через φ — угол между секущей MM_1 и осью Ox На рисунке видно, что угловой коэффициент секущей равен

$$k_{\text{сек}} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

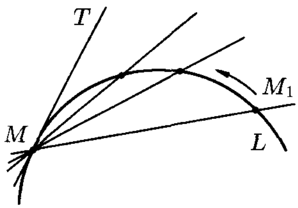


Рис 128

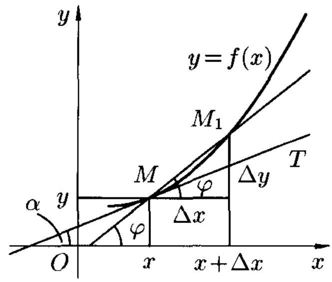


Рис 129

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции приращение Δy тоже стремится к нулю; поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M, а секущая MM_1, поворачиваясь около точки M, переходит в касательную. Угол $\varphi \to \alpha$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha$.

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$.

Поэтому угловой коэффициент касательной равен

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (20.2)$$

К нахождению пределов вида (20.1) и (20.2) приводят решения и множества других задач. Можно показать, что:

– если $Q = Q(t)$ — количество электричества, проходящего через поперечное сечение проводника за время t, то *сила тока в момент времени* t равна

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}; \qquad (20.3)$$

– если $N = N(t)$ — количество вещества, вступающего в химическую реакцию за время t, то *скорость химической реакции в момент времени* t равна

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}; \qquad (20.4)$$

– если $m = m(x)$ — масса неоднородного стержня между точками $O(0; 0)$ и $M(x; 0)$, то *линейная плотность стержня в точке* x есть

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}. \qquad (20.5)$$

Пределы (20.1)–(20.5) имеют одинаковый вид; везде требуется найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента. Этот предел называют *производной*. Эти пределы можно записать так:

$$V = S'_t; \quad \operatorname{tg} \alpha = y'_x; \quad I = Q'_t; \quad V = N'_t; \quad S = m'_x$$

(читается «V равно S штрих по t», «тангенс α равен y штрих по x» и т. д.).

20.2. Определение производной; ее механический и геометрический смысл. Уравнение касательной и нормали к кривой

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале $(a; b)$. Проделаем следующие операции:

– аргументу $x \in (a; b)$ дадим приращение Δx: $x + \Delta x \in (a; b)$;

– найдем соответствующее приращение функции: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

– составим отношение приращения функции к приращению аргумента: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

– найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если этот предел существует, то его называют производной функции $f(x)$ и обозначают одним из символов f'_x, $f'(x)$; y'; $\frac{dy}{dx}$; y'_x.

Производной функции $y = f(x)$ ***в точке*** x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Итак, по определению

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

Производная функции $f(x)$ есть некоторая функция $f'(x)$, *произведенная* из данной функции.

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется ***дифференцируемой*** в этом интервале; операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием***.

Значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ обозначается одним из символов: $f'(x_0)$, $y'\big|_{x=x_0}$ или $y'(x_0)$.

Пример 20.1. Найти производную функции $y = C$, $C = \text{const}$.

Решение:

– Значению x даем приращение Δx;

– находим приращение функции Δy: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$;

– значит, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$;

– следовательно, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$, т. е. $(c)' = 0$. ●

Пример 20.2. Найти производную функции $y = x^2$.

Решение:

– Аргументу x даем приращение Δx;

– находим Δy: $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$;

– составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$;

– находим предел этого отношения:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом, $(x^2)' = 2x$. ●

В задаче про скорость прямолинейного движения было получено $V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Это равенство перепишем в виде $V = S'_t$, т. е. *скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t.* В этом заключается *механический смысл производной.*

Обобщая, можно сказать, что если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то ***производная y' есть скорость протекания этого процесса.*** В этом состоит ***физический смысл производной.***

В задаче про касательную к кривой был найден угловой коэффициент касательной $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Это равенство перепишем в виде $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k$, т. е. ***производная $f'(x)$ в точке x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x.*** В этом заключается ***геометрический смысл производной.***

Если точка касания M имеет координаты $(x_0; y_0)$ (см. рис. 130), то угловой коэффициент касательной есть $k = f'(x_0)$. Пользуясь уравнением прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении $(y - y_0 = k(x - x_0))$, можно записать ***уравнение касательной***: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

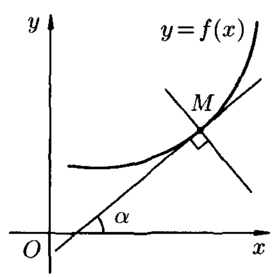


Рис. 130

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется ***нормалью к кривой.***

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент

$$k_{\text{норм.}} = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Поэтому *уравнение нормали* имеет вид $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ (если $f'(x_0) \neq 0$).

20.3. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема 20.1. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней

❑ Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Отсюда, по теореме 17.5 о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то есть $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$

Переходя к пределу, при $\Delta x \to 0$, получаем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. А это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x. ■

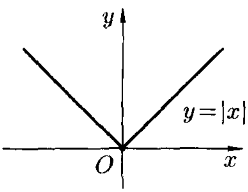


Рис 131

Обратная теорема неверна. непрерывная функция может не иметь производной Примером такой функции является функция

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Изображенная на рисунке 131 функция непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в ней.

Действительно, в точке $x = 0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{если } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, т е функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, график функции не имеет касательной в точке $O(0; 0)$.

Замечания: 1. Существуют односторонние пределы функции $y = |x|$ в точке $x = 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -1$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$. В таких случаях говорят, что функция имеет ***односторонние производные*** (или «производные слева и справа»), и обозначают соответственно $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$.

Если $f'_+(x) \neq f'_-(x)$, то производная в точке не существует. Не существует производной и в точках разрыва функции.

2. Производная $y' = f'(x)$ непрерывной функции $y = f(x)$ сама не обязательно является непрерывной.

Если функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную $y' = f'(x)$ в некотором интервале (a, b), то функция называется ***гладкой***.

20.4. Производная суммы, разности, произведения и частного функций

Нахождение производной функции непосредственно по определению часто связано с определенными трудностями. На практике функции дифференцируют с помощью ряда правил и формул.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — две дифференцируемые в некотором интервале $(a; b)$ функции.

Теорема 20.2. Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций $(u \pm v)' = u' \pm v'$

Обозначим $y = u \pm v$. По определению производной и основным теоремам о пределах получаем:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)) - (u(x) \pm v(x))}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v',$$

т. е. $(u \pm v)' = u' \pm v'$. ■

Теорема справедлива для любого конечного числа слагаемых.

Теорема 20.3. Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго: $(u \cdot v)' = u'v + v'u$

☐ Пусть $y = uv$. Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x)+\Delta u)\cdot(v(x)+\Delta v) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)\cdot u(x) + u(x)\cdot \Delta v + v(x)\cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(v(x)\cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) =$$

$$= v(x)\cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= u'\cdot v + u\cdot v' + 0\cdot u' = u'\cdot v + u\cdot v',$$

т. е. $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$. ■

При доказательстве теоремы использовалась теорема о связи непрерывности и дифференцируемости: так как функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы, то они и непрерывны, поэтому $\Delta v \to 0$ и $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Можно показать, что:

а) $(c\cdot u)' = c\cdot u'$, где $c = \text{const}$;

б) $(u\cdot v\cdot w)' = u'\cdot v\cdot w + u\cdot v'\cdot w + u\cdot v\cdot w'$.

Теорема 20.4. Производная частного двух функций $\frac{u(x)}{v(x)}$, если $v(x) \neq 0$ равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$.

☐ Пусть $y = \frac{u}{v}$. Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)\cdot v(x) + v(x)\cdot \Delta u - u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot \Delta v}{\Delta x \cdot (v(x)+\Delta v) v(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{\Delta x \cdot (v^2 + v \cdot \Delta v)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \Delta v} =$$

$$= \frac{v \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v} = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

т. е. $\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. ■

Следствие 20.1. $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c} \cdot u'$

Следствие 20.2. $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}$, где $c = \text{const}$

20.5. Производная сложной и обратной функций

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ — сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x.

Теорема 20.5. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y'_x в точке x, которая находится по формуле $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

❑ По условию $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$. Отсюда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем $\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha$ или

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u, \tag{20.6}$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta u \to 0$.

Функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x$, поэтому

$$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x, \text{ где } \beta \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Подставив значение Δu в равенство (20.6), получим

$$\Delta y = y'_u(u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x) + \alpha(u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x),$$

т. е.

$$\Delta y = y'_u \cdot u'_x \cdot \Delta x + y'_u \cdot \beta \cdot \Delta x + u'_x \cdot \alpha \cdot \Delta x + \alpha \cdot \beta \cdot \Delta x.$$

Разделив полученное равенство на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. ■

Итак, для нахождения производной сложной функции надо ***производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.***

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько. Так, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = g(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$.
Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ — взаимно обратные функции.

Теорема 20.6. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале $(a; b)$ и имеет неравную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ или $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$

☐ Рассмотрим обратную функцию $x = \varphi(y)$. Дадим аргументу y приращение $\Delta y \neq 0$. Ему соответствует приращение Δx обратной функции, причем $\Delta x \neq 0$ в силу строгой монотонности функции $y = f(x)$. Поэтому можно записать

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}. \tag{20.7}$$

Если $\Delta y \to 0$, то в силу непрерывности обратной функции приращение $\Delta x \to 0$. И так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, то из (20.7) следуют равенства $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \dfrac{1}{f'(x)}$, т. е. $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$. ■

Таким образом, ***производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.***

Правило дифференцирования обратной функции записывают так:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Пример 20.3. Найти производную функции $y = \log_2^3 \operatorname{tg} x^4$.

○ Решение. Данная функция является сложной. Ее можно представить в виде цепочки «простых» функций: $y = u^3$, где $u = \log_2 z$, где $z = \operatorname{tg} q$, где $q = x^4$. По правилу дифференцирования сложной функции $(y'_x = y'_u \cdot u'_z \cdot z'_q \cdot q'_x)$ получаем:

$$y'_x = 3 \cdot \log_2^2 \operatorname{tg} x^4 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x^4 \cdot \ln 2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x^4} \cdot 4x^3. \quad \bullet$$

Пример 20.4. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную y'_x для функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

○ Решение: Обратная функция $x = y^3+1$ имеет производную $x'_y = 3y^2$. Следовательно,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$ ●

20.6. Производные основных элементарных функций

Степенная функция $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

Дадим аргументу x приращение Δx. Функция $y = x^n$ получит приращение $\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n$. По формуле бинома Ньютона имеем

$$\Delta y = \left(x^n + n\cdot x^{n-1}\cdot\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x^2 + \cdots + (\Delta x)^n\right) - x^n =$$
$$= n\cdot x^{n-1}\cdot\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + (\Delta x)^n.$$

Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n\cdot x^{n-1}\cdot\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdot + (\Delta x)^n}{\Delta x} =$$
$$= n\cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot x^{n-2}\cdot\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}.$$

Находим предел составленного отношения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(n\cdot x^{n-1} + \frac{1}{2}n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right) = n\cdot x^{n-1}.$$

Таким образом,
$$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}.$$

Например, $(x^3)' = 3x^2$, $(x^2)' = 2x$, $x' = 1$.

Ниже (см. замечание на с. 175) будет показано, что формула производной степенной функции справедлива при любом $n \in \mathbb{R}$ (а не только натуральном).

Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Найдем сначала производную функции $y = e^x$. Придав аргументу x приращение Δx, находим приращение функции Δy: $\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1)$. Стало быть, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$ и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} e^x\cdot\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x\cdot 1 = e^x.$$

При вычислении предела воспользовались эквивалентностью $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$.

Итак, $y' = e^x$, т. е.

$$(e^x)' = e^x.$$

Теперь рассмотрим функцию $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$. Так как $a^x = e^{x \ln a}$, то по формуле производной сложной функции находим:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \cdot \ln a)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

Таким образом, $(a^x)' = a^x \ln a$.

Пример 20.5. Найти производную функции $y = 7^{x^2 - 4x}$.

○ Решение: Используя формулу производной сложной функции и формулу производной показательной функции, находим

$$y' = (7^{x^2-4x})' = 7^{x^2-4x} \cdot \ln 7 \cdot (x^2 - 4x)' = 7^{x^2-4x} \cdot \ln 7 \cdot (2x - 4). \quad \bullet$$

Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Найдем сначала производную функции $y = \ln x$.

Для нее

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{\ln(\frac{x+\Delta x}{x})}{\Delta x} = \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и воспользовавшись эквивалентностью $\ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right) \sim \dfrac{\Delta x}{x}$ при $\Delta x \to 0$, получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

т. е. $y' = \dfrac{1}{x}$ или $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Теперь рассмотрим функцию $y = \log_a x$.

Так как $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, то

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}.$$

Таким образом, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$.

Пример 20.6. Найти производную функции $y = \ln(x^4 - 2x^2 + 6)$.

○ Решение: $y' = \dfrac{1}{x^4 - 2x^2 + 6} \cdot (x^4 - 2x^2 + 6)' = \dfrac{4x^3 - 4x}{x^4 - 2x^2 + 6}$. $\bullet$

Производную логарифмической функции $y = \log_a x$ можно найти иначе. Так как обратной для нее функцией является $x = a^y$, то по формуле производной обратной функции имеем:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$

Для функции $y=\sin x$ имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$ и воспользовавшись первым замечательным пределом $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$, получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x,$$

т. е. $y'=\cos x$ или $(\sin x)'=\cos x$.

Найдем производную функции $y=\cos x$, воспользовавшись формулой производной сложной функции:

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1)=-\sin x,$$

т. е. $(\cos x)'=-\sin x$.

Для нахождения производных функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ воспользуемся формулой производной частного:

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

т. е. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

Проделав аналогичные операции, получим формулу

$$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Этот результат можно получить иначе:

$$(\operatorname{ctg} x)'=\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{2}-x)}\cdot(-1)=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример 20.7. Найти производную функции $y=\cos 2x$.

○ Решение: $(\cos 2x)'=-\sin 2x\cdot(2x)'=-2\sin 2x$. ●

Обратные тригонометрические функции $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$

Пусть $y=\arcsin x$. Обратная ей функция имеет вид $x=\sin y$, $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ верно равенство $x'=\cos y\neq 0$.

По правилу дифференцирования обратных функций

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

где перед корнем взят знак плюс, так как $\cos y > 0$ при $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Аналогично получаем, что $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Эту формулу можно получить проще: так как $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, т. е. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, то $(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Найдем производную функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Она является обратной к функции $x = \operatorname{tg} y$, где $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Поэтому, по правилу дифференцирования обратных функций, получаем, что

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Итак, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ связаны отношением

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

Дифференцируя это равенство, находим

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

т. е. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Пример 20.8. Найти производные функций: 1) $y = \arccos x^2$; 2) $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$; 3) $y = (1+5x-3x^3)^4$; 4) $y = \arccos\sqrt{x}$; 5) $y = \log_2^3(3+2^{-x})$.

○ Решение: 1) $(\arccos x^2)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot (x^2)' = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$;

2) $(x \cdot \operatorname{arctg} x)' = x' \cdot \operatorname{arctg} x + x \cdot (\operatorname{arctg} x)' = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$;

3) $((1+5x-3x^3)^4)' = 4(1+5x-3x^3)^3 \cdot (5-9x^2)$;

4) $(\arccos\sqrt{x})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

5) $(\log_2^3(3+2^{-x}))' = 3\log_2^2(3+2^{-x}) \cdot \frac{1}{(3+2^{-x})\ln 3} \cdot 2^{-x} \cdot \ln 2 \cdot (-1)$. ●

Замечание: Найдем производную степенной функции $y = x^\alpha$ с любым показателем $\alpha \in \mathbb{R}$. В этом случае функция рассматривается для $x > 0$.

Можно записать $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. По правилу дифференцирования сложной функции находим

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \cdot \ln x)' = \alpha \cdot e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1},$$

т. е. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

Формула остается справедливой и для $x < 0$, если функция $y = x^\alpha$ существует:

$$(x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

при всех $x \neq 0$.

Пример 20.9. Показать, что функция $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} + C$ удовлетворяет уравнению $x^3 \cdot y' + 1 = x^4$.

○ Решение: Находим y':

$$y' = \frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot (-2)x^{-3} + 0,$$

т. е. $y' = x - \frac{1}{x^3}$. Подставляем значение y' в данное уравнение:

$$x^3 \cdot \left(x - \frac{1}{x^3}\right) + 1 = x^4, \quad \text{т. е.} \quad x^4 - 1 + 1 = x^4, \quad 0 = 0.$$

Функция удовлетворяет данному уравнению. ●

20.7. Гиперболические функции и их производные

В математике, механике, электротехнике и некоторых других дисциплинах встречаются *гиперболические функции*, определяемые следующими формулами:

$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ — гиперболический синус;

$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ — гиперболический косинус («цепная линия»);

$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ и $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ — гиперболический тангенс и котангенс, где e — неперово число.

На рисунках 132–135 показаны графики гиперболических функций.

Между гиперболическими функциями существуют следующие основные зависимости:

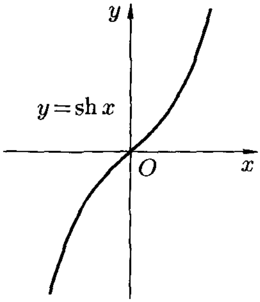


Рис 132

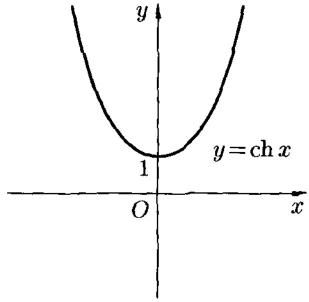


Рис 133

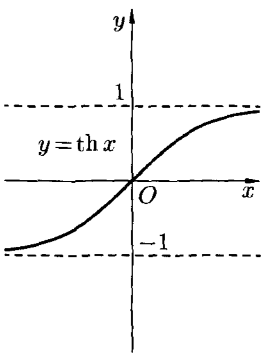


Рис 134

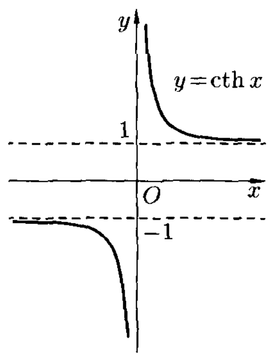


Рис 135

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$
$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y;$
$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y;$
$\operatorname{th}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y};$
$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x; \qquad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$

Все эти формулы вытекают из определения гиперболических функций.

Например,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$$

Геометрическая интерпретация гиперболических функций (см. рис. 137) аналогична интерпретации тригонометрических функций (см. рис. 136).

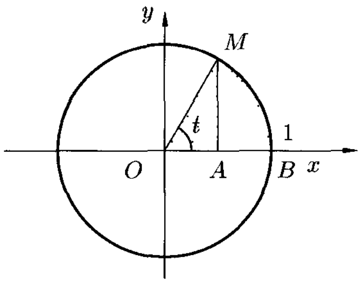


Рис 136 Параметрические уравнения $x = \cos t$ и $y = \sin t$ определяют окружность $x^2 + y^2 = 1$, причем $OA = \cos t$, $AM = \sin t$

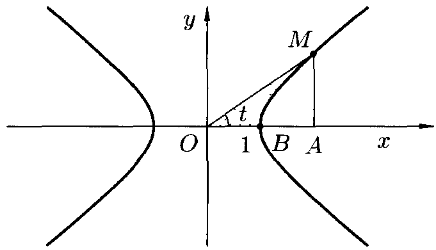


Рис 137 Параметрические уравнения $x = \operatorname{ch} t$ и $y = \operatorname{sh} t$ определяют гиперболу $x^2 - y^2 = 1$, причем $OA = \operatorname{ch} t$, $AM = \operatorname{sh} t$

Найдем производные гиперболических функций:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \text{ т. е. } (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x, \text{ т. е. } (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} =$$
$$= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \text{ т. е. } (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \text{ т. е. } (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

20.8. Таблица производных

Выведенные правила дифференцирования, формулы производных основных элементарных функций запишем в виде таблицы.

На практике чаще всего приходится находить производные от сложных функций Поэтому в приведенной ниже таблице формул дифференцирования аргумент «x» заменен на промежуточный аргумент «u».

Правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности, $(cu)' = c \cdot u'$;

3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$;

4. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$;

5. $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$.

Формулы дифференцирования

1. $(c)' = 0$;
2. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, в частности, $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности, $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, в частности, $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
7. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
8. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
11. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
12. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
13. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$;
14. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$;
15. $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$;
16. $(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

Для вычисления производных надо знать лишь правила дифференцирования и формулы производных основных элементарных функций, строго соблюдать эти правила при выполнении упражнений.

Пример 20.10. Найти производную функции $y = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$.

❍ Решение:

$$y' = (x^4 - 3x^3 + 2x - 1)' = (x^4)' - (3x^3)' + (2x)' - (1)' =$$
$$= 4x^3 - 3(x^3)' + 2(x)' - 0 = 4x^3 - 9x^2 + 2. \quad \bullet$$

Надо стараться обходиться без лишних записей.

Пример 20.11. Найти производную функции $y = \frac{2x^3}{\operatorname{tg} x}$.

❍ Решение:

$$y' = \left(\frac{2x^3}{\operatorname{tg} x}\right)' = 2 \cdot \frac{(x^3)' \cdot \operatorname{tg} x - x^3 \cdot (\operatorname{tg} x)'}{(\operatorname{tg} x)^2} = 2 \cdot \frac{3x^2 \cdot \operatorname{tg} x - x^3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{(\operatorname{tg} x)^2}. \quad \bullet$$

Производная найдена. В процессе решения использованы правила 2, 3 и формулы 2, 7.

Пример 20.12. Найти производную функции $y = \cos(\ln^{12} 2x)$.

Решение: Коротко: $y' = -\sin(\ln^{12} 2x) \cdot 12 \ln^{11} 2x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2$.

Решение с пояснениями: данную функцию можно представить следующим образом: $y = \cos u$, $u = t^{12}$, $t = \ln z$, $z = 2x$. Производную сложной функции найдем по правилу $y'_x = y'_u \cdot u'_t \cdot t'_z \cdot z'_x$ (здесь промежуточных аргументов три):

$$y'_x = -\sin u \cdot 12 \cdot t^{11} \cdot \frac{1}{z} \cdot 2,$$

т. е.

$$y'_x = -\sin t^{12} \cdot 12 \cdot (\ln z)^{11} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2,$$

т. е.

$$y'_x = -\sin(\ln z)^{12} \cdot 12 \cdot \ln^{11} z \cdot \frac{1}{x},$$

т. е.

$$y'_x = -\sin(\ln^{12} 2x) \cdot 12 \cdot \ln^{11} 2x \cdot \frac{1}{x}.$$

Окончательно

$$y'_x = -12 \cdot \sin(\ln^{12} 2x) \cdot \ln^{11} 2x \cdot \frac{1}{x}.$$

§ 21. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

21.1. Неявно заданная функция

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно y, то функция *задана в явном виде* (явная функция).

Под ***неявным заданием*** функции понимают задание функции в виде уравнения $F(x; y) = 0$, не разрешенного относительно y.

Всякую явно заданную функцию $y = f(x)$ можно записать как неявно заданную уравнением $f(x) - y = 0$, но не наоборот.

Не всегда легко, а иногда и невозможно разрешить уравнение относительно y (например, $y + 2x + \cos y - 1 = 0$ или $2^y - x + y = 0$).

Если неявная функция задана уравнением $F(x; y) = 0$, то для нахождения производной от y по x нет необходимости разрешать уравнение относительно y: ***достаточно продифференцировать это уравнение по x, рассматривая при этом y как функцию x***, и полученное затем уравнение разрешить относительно y'.

Производная неявной функции выражается через аргумент x и функцию y.

Пример 21.1. Найти производную функции y, заданную уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

○ Решение: Функция y задана неявно. Дифференцируем по x равенство $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Из полученного соотношения

$$3x^2 + 3 \cdot y^2 \cdot y' - 3(1 \cdot y + x \cdot y') = 0$$

следует, что $y^2y' - xy' = y - x^2$, т. е. $y' = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$. ●

21.2. Функция, заданная параметрически

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \tag{21.1}$$

где t — вспомогательная переменная, называемая параметром.

Найдем производную y'_x, считая, что функции (21.1) имеют производные и что функция $x = x(t)$ имеет обратную $t = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования обратной функции

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \tag{21.2}$$

Функцию $y = f(x)$, определяемую параметрическими уравнениями (21.1), можно рассматривать как сложную функцию $y = y(t)$, где $t = \varphi(x)$.

По правилу дифференцирования сложной функции имеем: $y'_x = y'_t \cdot t'_x$.

С учетом равенства (21.2) получаем

$$\boxed{y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}, \quad \text{т. е.} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.}$$

Полученная формула позволяет находить производную y'_x от функции заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости y от x.

Пример 21.2. Пусть $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$ Найти y'_x.

○ Решение: Имеем $x'_t = 3t^2$, $y'_t = 2t$. Следовательно, $y'_x = \dfrac{2t}{3t^2}$, т. е. $y'_x = \dfrac{2}{3t}$. ●

В этом *можно* убедиться, найдя непосредственно зависимость y от x.

Действительно, $t = \sqrt[3]{x}$. Тогда $y = \sqrt[3]{x^2}$. Отсюда $y'_x = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, т. е. $y = \dfrac{2}{3t}$.

§ 22. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию *сначала прологарифмировать*. А затем результат продифференцировать. Такую операцию называют *логарифмическим дифференцированием.*

Пример 22.1. Найти производную функции

$$y = \frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}.$$

○ Решение: Можно найти y' с помощью правил и формул дифференцирования. Однако такой способ слишком громоздкий. Применим логарифмическое дифференцирование. Логарифмируем функцию:

$$\ln y = \ln(x^2+2) + \tfrac{3}{4}\ln(x-1) + x - 3\ln(x+5).$$

Дифференцируем это равенство по x:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{x^2+2}\cdot 2x + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + 1 - 3\cdot\frac{1}{x+5}.$$

Выражаем y':

$$y' = y\left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right),$$

т. е.

$$y' = \frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}\cdot\left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right). \quad ●$$

Существуют функции, производные которых находят лишь логарифмическим дифференцированием. К их числу относится так называемая ***степенно-показательная функция*** $y = u^v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – заданные дифференцируемые функции от x. Найдем производную этой функции:

$$\ln y = v\cdot\ln u, \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y}\cdot y' = v'\cdot\ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u', \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad y' = y\left(v'\cdot\ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'\right),$$

т. е.

$$y' = u^v\left(v'\cdot\ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'\right),$$

или

$$\boxed{(u^v)' = u^v\cdot\ln u\cdot v' + v\cdot u^{v-1}\cdot u'.} \qquad (22.1)$$

Сформулируем правило запоминания формулы (22.1): производная степенно-показательной функции равна сумме производной показательной функции, при условии $u = \text{const}$, и производной степенной функции, при условии $v = \text{const}$.

Пример 22.2. Найти производную функции $y = (\sin 2x)^{x^2+1}$.

○ Решение: Пользуясь формулой (22.1), получаем:

$$y' = (\sin 2x)^{x^2+1} \cdot \ln \sin 2x \cdot 2x + (x^2+1)(\sin 2x)^{x^2} \cdot \cos 2x \cdot 2. \qquad \bullet$$

Отметим, что запоминать формулу (22.1) необязательно, легче запомнить суть логарифмического дифференцирования.

§ 23. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

23.1. Производные высших порядков явно заданной функции

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется *производной первого порядка.*

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется *производной второго порядка* и обозначается y'' $\left(\text{или } f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right),\ \frac{dy'}{dx}\right)$. Итак, $y'' = (y')'$.

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется *производной третьего порядка* и обозначается y''' $\left(\text{или } f'''(x),\ \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\right)$. Итак, $y''' = (y'')'$.

Производной n-го порядка (или n-й производной) называется производная от производной $(n-1)$ порядка:

$$\boxed{y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.}$$

Производные порядка выше первого называются *производными высших порядков.*

Начиная с производной четвертого порядка, производные обозначают римскими цифрами или числами в скобках (y^V или $y^{(5)}$ — производная пятого порядка).

Пример 23.1. Найти производную 13-го порядка функции $y = \sin x$.

❍ Решение:

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = (y')' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right),$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3\right),$$

$$y^{\mathrm{IV}} = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 4\right),$$

....

$$y^{(13)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 13\right).$$ ●

23.2. Механический смысл производной второго порядка

Пусть материальная точка M движется прямолинейно по закону $S = f(t)$. Как уже известно, производная S'_t равна скорости точки в данный момент времени: $S'_t = V$.

Покажем, что *вторая производная от пути по времени есть величина ускорения прямолинейного движения точки*, т. е. $S''_t = a$.

Пусть в момент времени t скорость точки равна V, а в момент $t + \Delta t$ — скорость равна $V + \Delta V$, т. е. за промежуток времени Δt скорость изменилась на величину ΔV.

Отношение $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ выражает среднее ускорение движения точки за время Δt. Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ называется ускорением точки M в данный момент t и обозначается буквой a: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = a$, т. е. $V' = a$.

Но $V = S'_t$. Поэтому $a = (S'_t)'$, т. е. $a = S''_t$

23.3. Производные высших порядков неявно заданной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно в виде уравнения $F(x; y) = 0$.

Продифференцировав это уравнение по x и разрешив полученное уравнение относительно y', найдем производную первого порядка (первую производную). Продифференцировав по x первую производную, получим вторую производную от неявной функции. В нее войдут x, y и

y'. Подставляя уже найденное значение y' в выражение второй производной, выразим y'' через x и y.

Аналогично поступаем для нахождения производной третьего (и дальше) порядка.

Пример 23.2. Найти y''', если $x^2 + y^2 = 1$.

○ Решение: Дифференцируем уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ по x: $2x + 2y \cdot y' = 0$. Отсюда $y' = -\frac{x}{y}$. Далее имеем: $y'' = -\frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2}$, т. е. $y'' = -\frac{y - x \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}$ (так как $x^2 + y^2 = 1$), следовательно, $y''' = -\frac{-1 \cdot 3y^2 \cdot y'}{y^6} = \frac{3}{y^4} \cdot \left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{3x}{y^5}$. ●

23.4. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Как известно, первая производная y'_x находится по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{23.1}$$

Найдем вторую производную от функции заданной параметрически.

Из определения второй производной и равенства (23.1) следует, что

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

т. е.

$$\boxed{y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.} \tag{23.2}$$

Аналогично получаем

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \quad y^{IV}_{xxxx} = \frac{(y'''_{xxx})'_t}{x'_t}, \quad \ldots$$

Пример 23.3. Найти вторую производную функции $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

○ Решение: По формуле (23.1)

$$y'_x = \frac{(\sin t)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Тогда по формуле (23.2)

$$y''_{xx} = \frac{(-\operatorname{ctg} t)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}.$$ ●

Заметим, что найти y''_{xx} можно по преобразованной формуле (23.2):

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3},$$

запоминать которую вряд ли стоит.

§ 24. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

24.1. Понятие дифференциала функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x отличную от нуля производную $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$. Тогда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, можно записать $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, или $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Таким образом, приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых $f'(x) \cdot \Delta x$ и $\alpha \cdot \Delta x$, являющихся бесконечно малыми при $\Delta x \to 0$. При этом первое слагаемое есть бесконечно малая функция одного порядка с Δx, так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, а второе слагаемое есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Поэтому первое слагаемое $f'(x) \cdot \Delta x$ называют ***главной частью приращения*** функции Δy.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается dy (или $df(x)$):

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \tag{24.1}$$

Дифференциал dy называют также ***дифференциалом первого порядка***. Найдем дифференциал независимой переменной x, т. е. дифференциал функции $y = x$.

Так как $y' = x' = 1$, то, согласно формуле (24.1), имеем $dy = dx = \Delta x$, т. е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx = \Delta x$.

Поэтому формулу (24.1) можно записать так:

$$\boxed{dy = f'(x)dx,} \tag{24.2}$$

иными словами, ***дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.***

Из формулы (24.2) следует равенство $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Теперь обозначение производной $\frac{dy}{dx}$ можно рассматривать как отношение дифференциалов dy и dx.

Пример 24.1. Найти дифференциал функции

$$f(x) = 3x^2 - \sin(1 + 2x).$$

Решение: По формуле $dy = f'(x)\,dx$ находим

$$dy = (3x^2 - \sin(1 + 2x))'\,dx = (6x - 2\cos(1 + 2x))\,dx.$$

Пример 24.2. Найти дифференциал функции

$$y = \ln(1 + e^{10x}) + \sqrt{x^2 + 1}.$$

Вычислить dy при $x = 0$, $dx = 0{,}1$.

Решение:

$$dy = (\ln(1 + e^{10x}) + \sqrt{x^2 + 1})'\,dx = \left(\frac{10e^{10x}}{1 + e^{10x}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) dx.$$

Подставив $x = 0$ и $dx = 0{,}1$, получим

$$dy\Big|_{\substack{x=0,\\ dx=0{,}1}} = \left(\frac{10}{2} + 0\right)0{,}1 = 0{,}5.$$

24.2. Геометрический смысл дифференциала функции

Выясним геометрический смысл дифференциала.

Для этого проведем к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x; y)$ касательную MT и рассмотрим ординату этой касательной для точки $x + \Delta x$ (см. рис. 138). На рисунке $|AM| = \Delta x$, $|AM_1| = \Delta y$. Из прямоугольного треугольника MAB имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|AB|}{\Delta x}, \text{ т. е. } |AB| = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x.$$

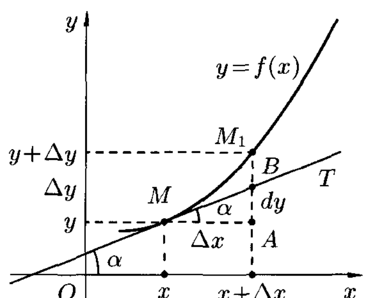


Рис. 138

Но, согласно геометрическому смыслу производной, $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$. Поэтому $AB = f'(x) \cdot \Delta x$.

Сравнивая полученный результат с формулой (24.1), получаем $dy = AB$, т. е. ***дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx.***

В этом и состоит геометрический смысл дифференциала.

24.3. Основные теоремы о дифференциалах

Основные теоремы о дифференциалах легко получить, используя связь дифференциала и производной функции ($dy = f'(x)\,dx$) и соответствующие теоремы о производных.

Например, так как производная функции $y=c$ равна нулю, то дифференциал постоянной величины равен нулю: $dy=c'\,dx=0\cdot dx=0$.

Теорема 24.1. Дифференциал суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются следующими формулами

$$d(u+v) = du + dv,$$

$$d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

❑ Докажем, например, вторую формулу. По определению дифференциала имеем:

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = v \cdot u'dx + u \cdot v'dx = v\,du + u\,dv. \quad ■$$

Теорема 24.2. Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента.

❑ Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ две дифференцируемые функции, образующие сложную функцию $y = f(\varphi(x))$. По теореме о производной сложной функции можно написать

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Умножив обе части этого равенства на dx, получаем $y'_x dx = y'_u u'_x dx$. Но $y'_x\,dx = dy$ и $u'_x\,dx = du$. Следовательно, последнее равенство можно переписать так:

$$dy = y'_u \cdot du. \quad ■$$

Сравнивая формулы $dy = y'_x \cdot dx$ и $dy = y'_u \cdot du$, видим, что первый дифференциал функции $y = f(x)$ определяется одной и той же формулой независимо от того, является ли ее аргумент независимой переменной или является функцией другого аргумента.

Это свойство дифференциала называют ***инвариантностью (неизменностью) формы первого дифференциала***.

Формула $dy = y'_x \cdot dx$ по внешнему виду совпадает с формулой $dy = y'_u \cdot du$, но между ними есть принципиальное отличие: в первой формуле x — независимая переменная, следовательно, $dx = \Delta x$, во второй формуле u есть функция от x, поэтому, вообще говоря, $du \neq$ $\neq \Delta u$.

С помощью определения дифференциала и основных теорем о дифференциалах легко преобразовать таблицу производных в таблицу дифференциалов.

Например, $d(\cos u) = (\cos u)'_u \cdot du = -\sin u \cdot du$.

24.4. Таблица дифференциалов

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
2. $d(u \cdot v) = v\,du + u\,dv$, в частности, $d(cu) = c \cdot du$;
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$, в частности, $d\left(\frac{c}{v}\right) = -\frac{c\,dv}{v^2}$;
4. $dy = y'_x\,dx$, если $y = f(x)$;
5. $dy = y'_u \cdot du$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$;
6. $dc = 0$;
7. $d(u^\alpha) = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot du$;
8. $d(a^u) = a^u \cdot \ln a \cdot du$, в частности, $d(e^u) = e^u \cdot du$;
9. $d(\log_a u) = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot du$, в частности, $d(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot du$;
10. $d(\sin u) = \cos u\,du$;
11. $d(\cos u) = -\sin u\,du$;
12. $d(\operatorname{tg} u) = \frac{1}{\cos^2 u}\,du$;
13. $d(\operatorname{ctg} u) = -\frac{1}{\sin^2 u}\,du$;
14. $d(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$;
15. $d(\arccos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$;
16. $d(\operatorname{arctg} u) = \frac{1}{1+u^2}\,du$;
17. $d(\operatorname{arcctg} u) = -\frac{1}{1+u^2}\,du$:
18. $d(\operatorname{sh} u) = \operatorname{ch} u\,du$;
19. $d(\operatorname{ch} u) = \operatorname{sh} u\,du$;
20. $d(\operatorname{th} u) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}\,du$;
21. $d(\operatorname{cth} u) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u}\,du$.

24.5. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Как уже известно, приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x можно представить в виде $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, или $\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$. Отбрасывая бесконечно малую $\alpha \cdot \Delta x$ более высокого порядка, чем Δx, получаем приближенное равенство

$$\Delta y \approx dy, \tag{24.3}$$

причем это равенство тем точнее, чем меньше Δx.

Это равенство позволяет с большой точностью вычислить приближенно приращение любой дифференцируемой функции.

Дифференциал обычно находится значительно проще, чем приращение функции, поэтому формула (24.3) широко применяется в вычислительной практике.

Пример 24.3. Найти приближенное значение приращения функции $y = x^3 - 2x + 1$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}001$.

Решение: Применяем формулу (24.3): $\Delta y \approx dy = (x^3 - 2x + 1)' \cdot \Delta x = (3x^2 - 2) \cdot \Delta x$.

$$dy\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0{,}001}} = (3 \cdot 4 - 2) \cdot 0{,}001 = 10 \cdot 0{,}001 = 0{,}01.$$

Итак, $\Delta y \approx 0{,}01$.

Посмотрим, какую погрешность допустили, вычислив дифференциал функции вместо ее приращения. Для этого найдем Δy:

$$\Delta y = ((x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) + 1) - (x^3 - 2x + 1) =$$
$$= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2 \cdot \Delta x + 1 - x^3 + 2x - 1 =$$
$$= \Delta x(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2);$$
$$\Delta y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0{,}001}} = 0{,}001(3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}001 + 0{,}001^2 - 2) = 0{,}010006.$$

Абсолютная погрешность приближения равна

$$|\Delta y - dy| = |0{,}010006 - 0{,}01| = 0{,}000006.$$

●

Подставляя в равенство (24.3) значения Δy и dy, получим

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

или

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.} \tag{24.4}$$

Формула (24.4) *используется для вычислений приближенных значений функций.*

Пример 24.4. Вычислить приближенно $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

○ Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$. По формуле (24.4) имеем:

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + (\operatorname{arctg} x)' \cdot \Delta x,$$

т. е.

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + \frac{\Delta x}{1 + x^2}.$$

Так как $x + \Delta x = 1{,}05$, то при $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}05$ получаем:

$$\operatorname{arctg} 1{,}05 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{0{,}05}{1+1} = \frac{\pi}{4} + 0{,}025 \approx 0{,}810.$$ ●

Можно показать, что абсолютная погрешность формулы (24.4) не превышает величины $M \cdot (\Delta x)^2$, где M — наибольшее значение $|f''(x)|$ на сегменте $[x; x + \Delta x]$ (см. с. 196).

Пример 24.5. Какой путь пройдет тело при свободном падении на Луне за 10,04 с от начала падения. Уравнение свободного падения тела $H = \frac{g_л \cdot t^2}{2}$, $g_л = 1{,}6$ м/с^2.

○ Решение: Требуется найти $H(10{,}04)$. Воспользуемся приближенной формулой ($\Delta H \approx dH$)

$$H(t + \Delta t) \approx H(t) + H'(t) \cdot \Delta t.$$

При $t = 10$ с и $\Delta t = dt = 0{,}04$ с, $H'(t) = g_л t$, находим

$$H(10{,}04) \approx \frac{1{,}6 \cdot 100}{2} + 1{,}6 \cdot 10 \cdot 0{,}04 = 80 + 0{,}64 = 80{,}64 \text{ (м)}.$$ ●

Задача (для самостоятельного решения). Тело массой $m = 20$ кг движется со скоростью $v = 10{,}02$ м/с. Вычислить приближенно кинетическую энергию тела $\left(E_к = \frac{mv^2}{2};\ E_к(10{,}02) \approx 1004 \text{ (Дж)}\right)$.

24.6. Дифференциалы высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируемая функция, а ее аргумент x — *независимая переменная*. Тогда ее первый дифференциал $dy = f'(x)\,dx$ есть также функция x; можно найти дифференциал этой функции.

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ называется ее ***вторым дифференциалом*** (или дифференциалом второго порядка) и обозначается d^2y или $d^2 f(x)$.

Итак, по определению $d^2y = d(dy)$. Найдем выражение второго дифференциала функции $y = f(x)$.

Так как $dx = \Delta x$ не зависит от x, то при дифференцировании считаем dx постоянным:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)\,dx) = (f'(x)\,dx)' \cdot dx = f''(x)\,dx \cdot dx = f''(x)(dx)^2,$$

т. е.
$$d^2y = f''(x)\,dx^2. \tag{24.5}$$

Здесь dx^2 обозначает $(dx)^2$.

Аналогично определяется и находится дифференциал третьего порядка:
$$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)\,dx^2) = f'''(x)(dx)^3.$$

И, вообще, дифференциал n-го порядка есть дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка: $d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)(dx)^n$.

Отсюда находим, что $f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$. В частности, при $n = 1,\ 2,\ 3$ соответственно получаем:
$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3},$$
т. е. производную функции можно рассматривать как отношение ее дифференциала соответствующего порядка к соответствующей степени дифференциала независимой переменной.

Отметим, что все приведенные выше формулы справедливы только, если x — независимая переменная. Если же функцию $y = f(x)$, где x — ***функция от какой-то другой независимой переменной***, то дифференциалы второго и выше порядков не обладают свойством инвариантности формы и вычисляются по другим формулам. Покажем это на примере дифференциала второго порядка.

Используя формулу дифференциала произведения $(d(u \cdot v) = v\,du + u\,dv)$, получаем:
$$d^2y = d(f'(x)\,dx) = d(f'(x))\,dx + f'(x)\cdot d(dx) = f''(x)\,dx\cdot dx + f'(x)\cdot d^2x,$$
т. е.
$$d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\cdot d^2x. \tag{24.6}$$

Сравнивая формулы (24.5) и (24.6), убеждаемся, что в случае сложной функции формула дифференциала второго порядка изменяется: появляется второе слагаемое $f'(x)\cdot d^2x$.

Ясно, что если x — независимая переменная, то
$$d^2x = d(dx) = d(1\cdot dx) = dx\cdot d(1) = dx\cdot 0 = 0$$
и формула (24.6) переходит в формулу (24.5).

Пример 24.6. Найти d^2y, если $y = e^{3x}$ и x — независимая переменная.

Решение: Так как $y' = 3e^{3x}$, $y'' = 9e^{3x}$, то по формуле (24.5) имеем $d^2y = 9e^{3x}\,dx^2$. ●

Пример 24.7. Найти d^2y, если $y = x^2$ и $x = t^3 + 1$ и t — независимая переменная.

❍ Решение: Используем формулу (24.6): так как

$$y' = 2x, \quad y'' = 2, \quad dx = 3t^2\,dt, \quad d^2x = 6t\,dt^2,$$

то

$$d^2y = 2dx^2 + 2x \cdot 6t\,dt^2 = 2(3t^2\,dt)^2 + 2(t^3+1)6t\,dt^2 =$$
$$= 18t^4\,dt^2 + 12t^4\,dt^2 + 12t\,dt^2 = (30t^4 + 12t)\,dt^2.$$

Другое решение: $y = x^2$, $x = t^3 + 1$. Следовательно, $y = (t^3+1)^2$. Тогда по формуле (24.5)

$$d^2y = y'' \cdot dt^2,$$

т. е.

$$d^2y = (30t^4 + 12t)\,dt^2.$$ ●

§ 25. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ПРОИЗВОДНЫХ

25.1. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Рассмотрим ряд теорем, имеющих большое теоретическое и прикладное значение.

Теорема 25.1 (Ролль). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т е. $f'(c) = 0$

❏ Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений (по теореме 19.4), соответственно, M и m. Если $M = m$, то функция $f(x)$ постоянна на $[a;b]$ и, следовательно, ее производная $f'(x) = 0$ в любой точке отрезка $[a;b]$.

Если $M \neq m$, то функция достигает хотя бы одно из значений M или m во *внутренней* точке c интервала $(a;b)$, так как $f(a) = f(b)$.

Пусть, например, функция принимает значение M в точке $x = c \in (a;b)$, т. е. $f(c) = M$. Тогда для всех $x \in (a;b)$ выполняется соотношение

$$f(c) \geqslant f(x). \tag{25.1}$$

Найдем производную $f'(x)$ в точке $x = c$:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

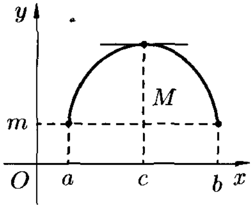


Рис 139

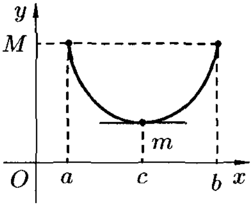


Рис 140

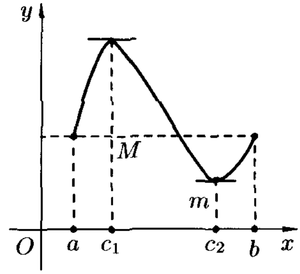


Рис 141

В силу условия (25.1) верно неравенство $f(c+\Delta x) - f(c) \leqslant 0$. Если $\Delta x > 0$ (т. е. $\Delta x \to 0$ справа от точки $x = c$), то

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leqslant 0 \quad \text{и поэтому} \quad f'(c) \leqslant 0.$$

Если $\Delta x < 0$, то

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geqslant 0 \text{ и } f'(c) \geqslant 0.$$

Таким образом, $f'(c) = 0$.

В случае, когда $f(c) = m$, доказательство аналогичное. ■

Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется точка, в которой касательная к графику параллельна оси Ox (см. рис. 139 и 140). На рисунке 141 таких точек две.

Теорема 25.2 (Коши). Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на интервале $(a;b)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in (a;b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что выполняется равенство $\dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$

❑ Отметим, что $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$, так как в противном случае по теореме Ролля нашлась бы точка c, такая, что $\varphi'(c) = 0$, чего не может быть по условию теоремы. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}(\varphi(x) - \varphi(a)).$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, так как является линейной комбинацией функций $f(x)$ и $\varphi(x)$; на концах отрезка она принимает одинаковые значения $F(a) = F(b) = 0$.

На основании теоремы Ролля найдется точка $x = c \in (a; b)$ такая, что $F'(c) = 0$. Но $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x)$, следовательно,

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(c) = 0.$$

Отсюда следует

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(c) \quad \text{и} \quad \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}. \qquad \blacksquare$$

Теорема 25.3 (Лагранж). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a; b)$ такая, что выполняется равенство

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \qquad (25.2)$$

○ Решение: Теорему Лагранжа можно рассматривать как частный случай теоремы Коши. Действительно, положив $\varphi(x) = x$, находим $\varphi(b) - \varphi(a) = b - a$, $\varphi'(x) = 1$, $\varphi'(c) = 1$.

Подставляя эти значения в формулу $\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, получаем $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ или $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. ●

Полученную формулу называют ***формулой Лагранжа*** или ***формулой о конечном приращении***: приращение дифференцируемой функции на отрезке $[a; b]$ равно приращению аргумента, умноженному на значение производной функции в некоторой внутренней точке этого отрезка.

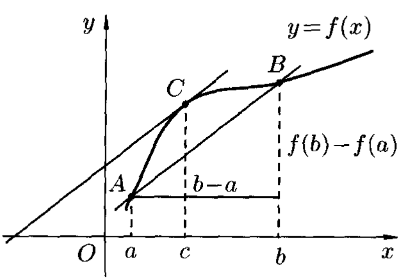


Рис. 142

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл. Запишем формулу (25.2) в виде

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

где $a < c < b$. Отношение $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ есть угловой коэффициент секущей AB, а величина $f'(c)$ — угловой коэффициент касательной к кривой в точке с абсциссой $x = c$.

Следовательно, геометрический смысл теоремы Лагранжа таков: на графике функции $y = f(x)$ найдется точка $C(c; f(c))$ (см. рис. 142), в которой касательная к графику функции параллельна секущей AB.

Следствие 25.1. Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

❑ Пусть $f'(x) = 0$ для $\forall x \in (a; b)$. Возьмем произвольные x_1 и x_2 из $(a; b)$ и пусть $x_1 < x_2$. Тогда по теореме Лагранжа $\exists c \in (x_1; x_2)$ такая, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Но по условию $f'(x) = 0$, стало быть, $f'(c) = 0$, где $x_1 < c < x_2$. Поэтому имеем $f(x_2) - f(x_1) = 0$, т. е. $f(x_2) = f(x_1)$. А так как x_1 и x_2 — произвольные точки из интервала $(a; b)$, то $\forall x \in (a; b)$ имеем $f(x) = c$. ■

Следствие 25.2. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

❑ Пусть $f_1'(x) = f_2'(x)$ при $x \in (a; b)$. Тогда $(f_1(x) - f_2(x))' = f_1'(x) - f_2'(x) = 0$. Следовательно, согласно следствию 25.1, функция $f_1(x) - f_2(x)$ есть постоянная, т. е. $f_1(x) - f_2(x) = C$ для $\forall x \in (a; b)$. ■

Пример 25.1. Доказать, что $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, где $x \in [-1; 1]$.

❍ Решение: Пусть $f(x) = \arcsin x + \arccos x$. Тогда $\forall x \in (-1; 1)$ имеем $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Отсюда следует, что $f(x) = C$, т. е. $\arcsin x + \arccos x = C$. Положив $x = 0$, находим $0 + \frac{\pi}{2} = C$, т. е. $C = \frac{\pi}{2}$.

Поэтому $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Это равенство выполняется и при $x = \pm 1$ (проверьте!). ●

Аналогично доказывается, что $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Формуле Лагранжа можно придать другой вид. Применив теорему Лагранжа к отрезку $[x; x + \Delta x]$ $(\Delta x > 0)$, будем иметь

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c)\Delta x. \tag{25.3}$$

Каждое число $c \in (x; x + \Delta x)$ можно записать в виде $c = x + \theta\Delta x$, где $0 < \theta < 1$ (действительно, $x < c < x + \Delta x \Longrightarrow 0 < c - x < \Delta x \Longrightarrow \Longrightarrow 0 < \frac{c-x}{\Delta x} < 1$; положим $\frac{c-x}{\Delta x} = \theta \Longrightarrow c = x + \theta\Delta x$). Формула (25.3) примет вид

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x,$$

где $0 < \theta < 1$.

Используя теорему Лагранжа, можно оценить точность приближенного равенства $\Delta y \approx dy$. Сделаем это, считая, что функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$:

$$\Delta y - dy = (f(x+\Delta x) - f(x)) - f'(x)\Delta x = f'(c)\Delta x - f'(x)\Delta x =$$
$$= (f'(c) - f'(x))\Delta x = f''(c_1)(c-x)\Delta x,$$

где $c_1 \in (x; c)$ (рис. 143).

Итак, $\Delta y - dy = f''(c_1)(c-x)\Delta x$. Пусть $M = \max\limits_{[x, x+\Delta x]} |f''(x)|$. Так как $|c-x| < \Delta x$, а $f''(c_1) \leqslant M$, то получаем оценку $|\Delta y - dy| \leqslant M|\Delta x|^2$.

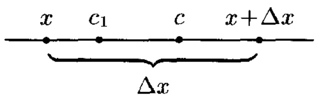


Рис. 143

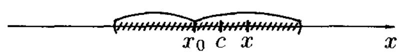


Рис. 144

25.2. Правила Лопиталя

Рассмотрим способ раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, который основан на применении производных.

Теорема 25.4 (Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке: $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Пусть $\varphi'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0. Если существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$.

❑ Применим к функциям $f(x)$ и $\varphi(x)$ теорему Коши для отрезка $[x_0; x]$, лежащего в окрестности точки x_0. Тогда $\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, где c лежит между x_0 и x (рис. 144). Учитывая, что $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$, получаем

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{25.4}$$

При $x \to x_0$, величина c также стремится к x_0; перейдем в равенстве (25.4) к пределу:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$, то $\lim\limits_{c\to x_0}\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}=l$. Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=l$. ■

Коротко полученную формулу читают так: предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их производных, если последний существует.

Замечания: 1. Теорема 25.4 верна и в случае, когда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не определены при $x=x_0$, но $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$. Достаточно положить $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ и $\varphi(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$.

2. Теорема 25.4 справедлива и в том случае, когда $x\to\infty$. Действительно, положив $x=\dfrac{1}{z}$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f(\frac{1}{z})}{\varphi(\frac{1}{z})}=\lim_{z\to 0}\frac{(f(\frac{1}{z}))'}{(\varphi(\frac{1}{z}))'}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(\frac{1}{z})(-\frac{1}{z^2})}{\varphi'(\frac{1}{z})(-\frac{1}{z^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

3. Если производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, теорему 25.4 можно применить еще раз:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$$

и т. д.

Пример 25.2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\ln x}$.

○ Решение: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\ln x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)'}{(x\ln x)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\ln x+1}=1$. ●

Пример 25.3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}$.

○ Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{6\cos 6x}{1}=9.$$ ●

Теорема 25.4 дает возможность раскрывать неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Сформулируем без доказательства теорему о раскрытии неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Теорема 25.5 (Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$).

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 (кроме, может быть, точки x_0), в этой окрестности $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, $\varphi'(x) \neq 0$. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Пример 25.4. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\cdot\cos^2 5x}{\cos^2 3x\cdot 5} = \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 10x}{1+\cos 6x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$= \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-10\sin 10x}{-6\sin 6x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 10x}{\sin 6x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{10\cos 10x}{6\cos 6x} = \frac{5}{3}.$$

2-й способ:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \left[\begin{array}{c} x-\frac{\pi}{2}=t \\ t\to 0 \end{array}\right] =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\frac{3}{2}\pi+3t)}{\operatorname{tg}(\frac{5}{2}\pi+5t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{ctg} 3t}{\operatorname{ctg} 5t} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5t}{\operatorname{tg} 3t} = \frac{5}{3}.$$

Раскрытие неопределенностей различных видов

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, которые называют *основными*. Неопределенности вида $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0 сводятся к двум основным видам путем тождественных преобразований.

1. Пусть $f(x)\to 0$, $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. Тогда очевидны следующие преобразования:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)\varphi(x)) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right] \quad \left(\text{или } \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right).$$

Например,

$$\lim_{x\to 2} \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}(2-x) = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{4}}\cdot\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}.$$

2. Пусть $f(x) \to \infty$, $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to x_0$. Тогда можно поступить так:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) - \varphi(x)) = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}\frac{1}{f(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

На практике бывает проще, *например*,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to 1}\frac{x - 1 - \ln x}{\ln x \cdot (x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x} + \ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.$$

3. Пусть или $f(x) \to 1$ и $\varphi(x) \to \infty$, или $f(x) \to \infty$ и $\varphi(x) \to 0$, или $f(x) \to 0$ и $\varphi(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Для нахождения предела вида $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$ удобно сначала прологарифмировать выражение

$$A = f(x)^{\varphi(x)}.$$

Пример 25.5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение: Имеем неопределенность вида 1^∞. Логарифмируем выражение $A = (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$, получим: $\ln A = \frac{1}{x^2}\ln\cos 2x$. Затем находим предел:

$$\lim_{x\to 0}\ln A = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)2}{2x} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} =$$

$= -2$, т. е. $\ln\lim\limits_{x\to 0} A = -2$. Отсюда $\lim\limits_{x\to 0} A = e^{-2}$, и $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}$. ●

Решение можно оформить короче, если воспользоваться «готовой» формулой

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\ln f(x)} = \exp\left(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\ln f(x)\right)$$

(использовано основное логарифмическое тождество: $f^\varphi = e^{\ln f^\varphi}$).

Пример 25.6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x})^{\operatorname{tg} x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = [\infty^0] = \exp\left(\lim_{x\to 0}\operatorname{tg} x\ln\frac{1}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\operatorname{ctg} x}\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{x(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{\sin^2 x}}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0} x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right) = e^{0\,1} = e^0 = 1.$$ ●

Пример 25.7. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Найти $f'(x)$. (Дополнительно: найти $f^{(n)}(0)$.)

Решение: При $x \neq 0$ имеем

$$f'(x) = e^{-x^{-2}} \cdot \left(-x^{-2}\right)' = 2e^{-x^{-2}} \cdot x^{-3}.$$

При $x = 0$ по определению производной:

$$f'(0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(0+\lambda) - f(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{\lambda^2}}}{\lambda}.$$

Делаем замену $y = \frac{1}{\lambda^2}$ и применяем правило Лопиталя

$$\lim_{\lambda \to 0} \left| \frac{e^{-\frac{1}{\lambda^2}}}{\lambda} \right| = \lim_{y \to \infty} \frac{\sqrt{y}}{e^y} = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{2\sqrt{y} \cdot e^y} = 0.$$

Таким образом,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x^{-3} \cdot e^{-x^{-2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Аналогично можно показать, что $f^{(n)}(0) = 0$. ●

25.3. Возрастание и убывание функций

Одним из приложений производной является ее применение к исследованию функций и построению графика функции.

Установим необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции.

Теорема 25.6 (необходимые условия). Если дифференцируемая на интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$ для $\forall x \in (a; b)$.

Пусть функция $f(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$. Возьмем произвольные точки x и $x + \Delta x$ на интервале $(a; b)$ и рассмотрим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Функция $f(x)$ возрастает, поэтому если $\Delta x > 0$, то $x + \Delta x > x$ и $f(x + \Delta x) > f(x)$; если $\Delta x < 0$, то $x + \Delta x < x$ и $f(x + \Delta x) < f(x)$. В обоих случаях $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$, так как числитель и знаменатель дроби имеют одинаковые знаки. По условию теоремы функция $f(x)$ имеет производную в точке x и является пределом рассматриваемого отношения. Следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0. \qquad \blacksquare$$

Аналогично рассматривается случай, когда функция $f(x)$ убывает на интервале $(a; b)$.

Геометрически теорема 25.6 означает, что касательные к графику возрастающей дифференцируемой функции образуют острые углы с положительным направлением оси Ox или в некоторых точках (на рисунке 145 в точке с абсциссой x_0) параллельны оси Ox.

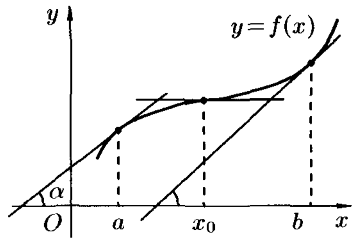


Рис 145

Теорема 25.7 (достаточные условия). Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $\forall x \in (a; b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале $(a; b)$

❏ Пусть $f'(x) > 0$. Возьмем точки x_1 и x_2 из интервала $(a; b)$, причем $x_1 < x_2$. Применим к отрезку $[x_1; x_2]$ теорему Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где $c \in (x_1; x_2)$. По условию $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$. Следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$, т. е. функция $f(x)$ на интервале $(a; b)$ возрастает. ■

Рассмотренные теоремы 25.6 и 25.7 позволяют довольно просто исследовать функцию на монотонность. *Напомним*, что функция возрастающая или убывающая называется *монотонной* (см. с. 122).

Пример 25.8. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x - 4$ на возрастание и убывание.

❍ Решение: Функция определена на $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$. Ее производная равна:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1);$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty);$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in (-1; 1).$$

Ответ: данная функция возрастает на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; \infty)$; убывает на интервале $(-1; 1)$. ●

25.4. Максимум и минимум функций

Точка x_0 называется ***точкой максимума*** функции $y = f(x)$, если существует такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

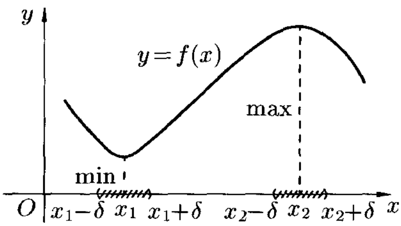


Рис 146

Аналогично определяется точка минимума функции: x_0 — *точка минимума* функции, если $\exists\delta > 0$ $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > f(x_0)$. На рисунке 146 x_1 — точка минимума, а точка x_2 — точка максимума функции $y = f(x)$.

Значение функции в точке максимума (минимума) называется *максимумом* (*минимумом*) функции. Максимум (минимум) функции называется *экстремумом* функции.

Понятие экстремума всегда связано с определенной окрестностью точки из области определения функции. Поэтому функция может иметь экстремум лишь *во внутренних точках* области определения. Рассмотрим условия существования экстремума функции.

Теорема 25.8 (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$

Пусть, для определенности, x_0 — точка максимума. Значит, в окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$. Но тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$, если $\Delta x > 0$, и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, если $\Delta x < 0$. По условию теоремы производная

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

существует. Переходя к пределу, при $\Delta x \to 0$, получим $f'(x_0) \geqslant 0$, если $\Delta x < 0$, и $f'(x_0) \leqslant 0$, если $\Delta x > 0$. Поэтому $f'(x_0) = 0$. Аналогично доказывается утверждение теоремы 25.8, если x_0 — точка минимума функции $f(x)$. ■

Геометрически равенство $f'(x_0) = 0$ означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции $y = f(x)$ касательная к ее графику параллельна оси Ox (см. рис. 147).

Отметим, что обратная теорема неверна, т. е. если $f'(x_0) = 0$, то это не значит, что x_0 — точка экстремума. Например, для функции

$y = x^3$ ее производная $y' = 3x^2$ равна нулю при $x = 0$, но $x = 0$ не точка экстремума (см. рис. 148).

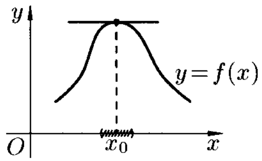


Рис. 147

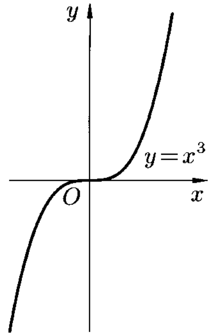


Рис 148

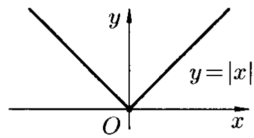


Рис. 149

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, непрерывная функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ производной не имеет, но точка $x = 0$ — точка минимума (см. рис. 149).

Таким образом, непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная функции равна нулю или не существует. Такие точки называются ***критическими***.

Теорема 25.9 (достаточное условие экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ-окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) *производная $f'(x)$ меняет знак* с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума.

❑ Рассмотрим δ-окрестность точки x_0. Пусть выполняются условия: $f'(x) > 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x) < 0$ $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$. Тогда функция $f(x)$ возрастает на интервале $(x_0 - \delta; x_0)$, а на интервале $(x_0; x_0 + \delta)$ она убывает. Отсюда следует, что значение $f(x)$ в точке x_0 является наибольшим на интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, т. е. $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$. Это и означает, что x_0 — точка максимума функции.

Графическая интерпретация доказательства теоремы 25.9 представлена на рисунке 150.

Аналогично теорема 25.9 доказывается для случая, когда $f'(x) < 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x) > 0$ $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$. ■

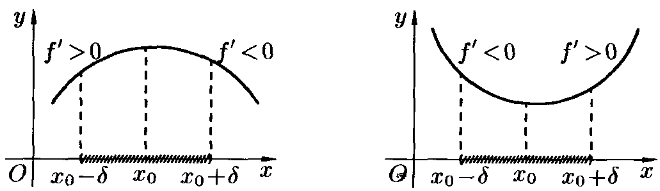


Рис. 150

Исследовать функцию на экстремум означает найти все ее экстремумы. Из теорем 25.8 и 25.9 вытекает следующее правило исследования функции на экстремум:

1) найти критические точки функции $y = f(x)$;

2) выбрать из них лишь те, которые являются внутренними точками области определения функции;

3) исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой из выбранных критических точек;

4) в соответствии с теоремой 25.9 (достаточное условие экстремума) выписать точки экстремума (если они есть) и вычислить значения функции в них.

Пример 25.9. Найти экстремум функции $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$.

○ Решение: Очевидно, $D(y) = \mathbb{R}$. Находим $y' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$, т. е. $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}$.

Производная не существует при $x_1 = 0$ и равна нулю при $x_2 = 8$. Эти точки разбивают всю область определения данной функции на три интервала $(-\infty; 0)$, $(0; 8)$, $(8; \infty)$. Отметим на рисунке 151 знаки производной слева и справа от каждой из критических точек.

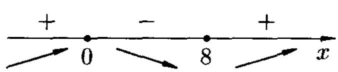


Рис. 151

Следовательно, $x_1 = 0$ — точка максимума, $y_{\max} = y(0) = 0$, и $x_2 = 8$ — точка минимума, $y_{\min} = y(8) = -\frac{4}{3}$. ●

Иногда бывает удобным использовать другой достаточный признак существования экстремума, основанный на определении знака второй производной.

Теорема 25.10. Если в точке x_0 первая производная функции $f(x)$ равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля ($f''(x_0) \neq 0$), то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум и минимум — при $f''(x_0) > 0$

❑ Пусть для определенности $f''(x_0) > 0$. Так как

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0,$$

то $\dfrac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0$ в достаточно малой окрестности точки x_0. Если $\Delta x < 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) < 0$; если $\Delta x > 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) > 0$.

Таким образом, при переходе через точку x_0 первая производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, по теореме 25.9, x_0 есть точка минимума.

Аналогично доказывается, что если $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция имеет максимум. ■

25.5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Как известно, такая функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Эти значения функция может принять либо во внутренней точке x_0 отрезка $[a; b]$, либо на границе отрезка, т. е. при $x_0 = a$ или $x_0 = b$. Если $x_0 \in (a; b)$, то точку x_0 следует искать среди критических точек данной функции (см. рис. 152).

Получаем следующее правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на $[a; b]$:

1) найти критические точки функции на интервале $(a; b)$;

2) вычислить значения функции в найденных критических точках;

3) вычислить значения функции на концах отрезка, т. е. в точках $x = a$ и $x = b$;

4) среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Замечания: 1. Если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ имеет *лишь одну критическую точку* и она является точкой максимума (минимума), то в этой точке функция принимает наибольшее (наименьшее) значение. На рисунке 152 $f(x_0) = f_{\text{нб}} = f_{\max}$ (нб — наибольшее, max — максимальное).

2. Если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ не имеет критических точек, то это озачает, что на нем функция монотонно возрастает или

убывает. Следовательно, свое наибольшее значение (M) функция принимает на одном конце отрезка, а наименьшее (m) — на другом.

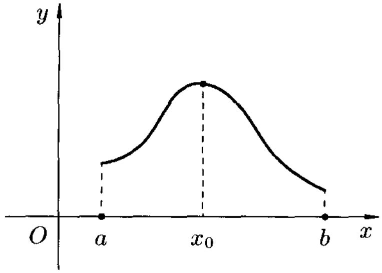


Рис 152

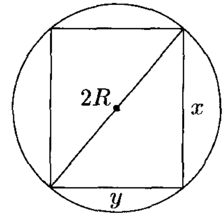


Рис 153

Пример 25.10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке $[-2, 1]$.

○ Решение: Находим критические точки данной функции:

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1);$$

$f'(x) = 0$ при $x_1 = 0 \in [-2; 1]$ и при $x_2 = -1 \in [-2; 1]$. Находим $f(0) = 1$, $f(-1) = 3 - 4 + 1 = 0$, $f(-2) = 48 - 32 + 1 = 17$, $f(1) = 8$. Итак, $f_{\text{нб}} = 17$ в точке $x = -2$, $f_{\text{нм}} = 0$ в точке $x = -1$. ●

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции широко применяется при решении многих практических задач математики, физики, химии, экономики и других дисциплин.

Практические задачи: транспортная задача о перевозке груза с минимальными затратами, задача об организации производственного процесса с целью получения максимальной прибыли и другие задачи, связанные с поиском оптимального решения, приводят к развитию и усовершенствованию методов отыскания наибольших и наименьших значений. Решением таких задач занимается особая ветвь математики — линейное программирование.

Рассмотрим более простую *задачу*

Пример 25.11. Из шара радиуса R выточить цилиндр наибольшего объема. Каковы его размеры?

○ Решение: Обозначим через x и y высоту и диаметр цилиндра. Тогда, как видно из рисунка 153, $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$, а потому объем цилиндра

$$V = V(x) = \pi\left(\frac{4R^2 - x^2}{4}\right)x = \pi R^2 x - \frac{\pi x^3}{4},$$

где $x \in [0; 2R]$.

Находим наибольшее значение функции $V = V(x)$ на промежутке $[0; 2R]$. Так как $V'(x) = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi x^2$, то $V'(x) = 0$ при $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$, кроме того, $V''(x) = -\frac{3}{2}\pi x < 0$. Поэтому $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ — точка максимума. Так как функция имеет одну критическую точку, то цилиндр будет иметь наибольший объем (равный V_{max}) при $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$; диаметр основания цилиндра равен

$$\sqrt{4R^2 - (2R\sqrt{3}/3)^2} = \frac{2R\sqrt{6}}{3}.$$

Таким образом, искомый цилиндр имеет высоту, равную $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$, и диаметр, равный $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$. ●

25.6. Выпуклость графика функции. Точки перегиба

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым вниз*** на интервале $(a; b)$, если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале. График функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым вверх*** на интервале $(a; b)$, если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.

Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется *точкой перегиба.*

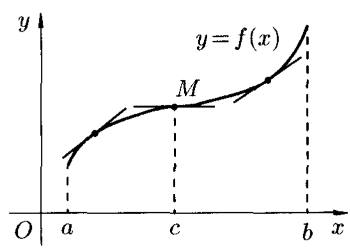


Рис 154

На рисунке 154 кривая $y = f(x)$ выпукла вверх в интервале $(a; c)$, выпукла вниз в интервале $(c; b)$, точка $M(c; f(c))$ — точка перегиба.

Интервалы выпуклости вниз и вверх находят с помощью следующей теоремы.

Теорема 25.11. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала $(a; b)$ имеет отрицательную вторую производную, т е $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх Если же $f''(x) > 0$ $\forall x \in (a; b)$ — график выпуклый вниз

❑ Пусть $f''(x) < 0$ $\forall x \in (a; b)$. Возьмем на графике функции произвольную точку M с абсциссой $x_0 \in (a; b)$ и проведем через M касательную (см. рис. 155). Покажем, что график функции расположен ниже этой касательной. Для этого сравним в точке $x \in (a; b)$ ординату y кривой $y = f(x)$ с ординатой $y_{\text{кас}}$ ее касательной. Уравнение касательной, как известно, есть

$$y_{\text{кас}} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{т. е.} \quad y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Тогда $y - y_{\text{кас}} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. По теореме Лагранжа, $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, где c лежит между x_0 и x. Поэтому

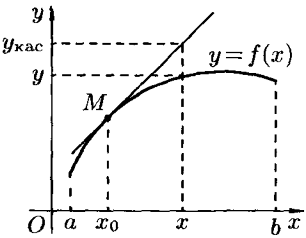


Рис. 155

$$y - y_{\text{кас}} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

т. е.

$$y - y_{\text{кас}} = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0).$$

Разность $f'(c) - f'(x_0)$ снова преобразуем по формуле Лагранжа:

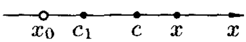
$$f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(c - x_0),$$

где c_1 лежит между x_0 и c. Таким образом, получаем

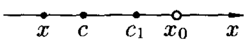
$$y - y_{\text{кас}} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0).$$

Исследуем это равенство:

1) если $x > x_0$, то $x - x_0 > 0$, $c - x_0 > 0$ и $f''(c_1) < 0$. Следовательно, $y - y_{\text{кас}} < 0$, т. е. $y < y_{\text{кас}}$:



2) если $x < x_0$, то $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$ и $f''(c_1) < 0$. Следовательно, $y - y_{\text{кас}} < 0$, т. е. $y < y_{\text{кас}}$:



Итак, доказано, что во всех точках интервала $(a; b)$ ордината касательной больше ординаты графика, т. е. график функции выпуклый вверх. Аналогично доказывается, что при $f''(x) > 0$ график выпуклый вниз. ■

Для нахождения точек перегиба графика функции используется следующая теорема.

Теорема 25.12 (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

❑ Пусть $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. Это значит, что слева от $x = x_0$ график выпуклый вверх, а справа — выпуклый вниз. Следовательно, точка $(x_0; f(x_0))$ графика функции является точкой перегиба.

Аналогично доказывается, что если $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) < 0$ при $x > x_0$, то точка $(x_0; f(x_0))$ — точка перегиба графика функции $y = f(x)$. ■

Пример 25.12. Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y = x^5 - x + 5$.

Решение: Находим, что $y' = 5x^4 - 1$, $y'' = 20x^3$. Вторая производная существует на всей числовой оси; $y'' = 0$ при $x = 0$.

Отмечаем, что $y'' > 0$ при $x > 0$; $y'' < 0$ при $x < 0$.

Следовательно, график функции $y = x^5 - x + 5$ в интервале $(-\infty; 0)$ — выпуклый вверх, в интервале $(0; \infty)$ — выпуклый вниз. Точка $(0; 5)$ есть точка перегиба. ●

25.7. Асимптоты графика функции

Построение графика функции значительно облегчается, если знать его асимптоты. Понятие асимптоты рассматривалось при изучении формы гиперболы (см. с. 81).

Напомним, что *асимптотой* кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой (рис. 156).

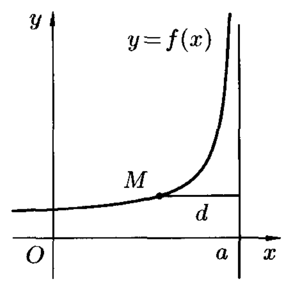


Рис. 156

Асимптоты могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Говорят, что прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

Действительно, в этом случае непосредственно из рисунка 156 видно, что расстояние точки $M(x; y)$ кривой от прямой $x = a$ равно $d = |x - a|$. Если $x \to a$, то $d \to 0$. Согласно определению асимптоты, прямая $x = a$ является асимптотой кривой $y = f(x)$. Для отыскания вертикальных асимптот нужно найти те значения x, вблизи которых функция $f(x)$ неограниченно возрастает по модулю. Обычно это точки разрыва второго рода.

Например, кривая $y = \dfrac{2}{x+1}$ имеет вертикальную асимптоту (см. рис. 157) $x = -1$, так как $\lim\limits_{x \to -1+0} \dfrac{2}{x+1} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1-0} \dfrac{2}{x+1} = -\infty$.

Уравнение *наклонной асимптоты* будем искать в виде

$$y = kx + b. \tag{25.5}$$

Найдем k и b.

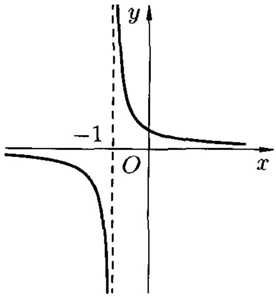


Рис. 157

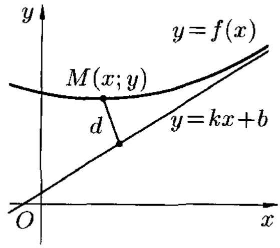


Рис 158

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка кривой $y = f(x)$ (см. рис. 158). По формуле расстояния от точки до прямой $\left(d = \left|\dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|\right)$ находим расстояние от точки M до прямой (25.5): $d = \left|\dfrac{kx - y + b}{\sqrt{k^2 + 1}}\right|$.

Условие $d \to 0$ будет выполняться лишь тогда, когда числитель дроби стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{x \to \infty} (kx - y + b) = 0. \tag{25.6}$$

Отсюда следует, что $kx - y + b = \alpha$, где $\alpha = \alpha(x)$ бесконечно малая: $\alpha \to 0$ при $x \to \infty$. Разделив обе части равенства $y = b + kx - \alpha$ на x и перейдя к пределу при $x \to \infty$, получаем:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{b}{x} + k - \frac{\alpha}{x}\right).$$

Так как $\frac{b}{x} \to 0$ и $\frac{\alpha}{x} \to 0$, то

$$\boxed{k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}.} \tag{25.7}$$

Из условия (25.6) находим b:

$$\boxed{b = \lim_{x \to \infty} (y - kx).} \tag{25.8}$$

Итак, если существует наклонная асимптота $y = kx + b$, то k и b находятся по формулам (25.7) и (25.8).

Верно и обратное утверждение: если существуют конечные пределы (25.7) и (25.8), то прямая (25.5) является наклонной асимптотой.

Если хотя бы один из пределов (25.7) или (25.8) не существует или равен бесконечности, то кривая $y = f(x)$ наклонной асимптоты не имеет.

В частности, если $k = 0$, то $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Поэтому $y = b$ — уравнение *горизонтальной асимптоты.*

Замечание: Асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ могут быть разными. Поэтому при нахождении пределов (25.7) и (25.8) следует отдельно рассматривать случай, когда $x \to +\infty$ и когда $x \to -\infty$.

Пример 25.13. Найти асимптоты графика функции $y = xe^x$.

○ Решение: Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, то график функции при $x \to +\infty$ наклонной асимптоты не имеет.

При $x \to -\infty$ справедливы соотношения

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (xe^x - 0x) = \lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-r}} = 0.$$

Следовательно, при $x \to -\infty$ график имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$. ●

25.8. Общая схема исследования функции и построения графика

Исследование функции $y = f(x)$ целесообразно вести в определенной последовательности.

1. Найти область определения функции.

2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.

3. Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$).

4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.

5. Найти асимптоты графика функции.

6. Найти интервалы монотонности функции.

7. Найти экстремумы функции.

8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

На основании проведенного исследования построить график функции. Заметим, что приведенная схема исследования не является обязательной. В более простых случаях достаточно выполнить лишь несколько операций, например 1, 2, 7. Если же график функции не совсем понятен и после выполнения всех восьми операций, то можно дополнительно исследовать функцию на периодичность, построить дополнительно несколько точек графика, выявить другие особенности функции. Иногда целесообразно выполнение операций исследования сопровождать постепенным построением графика функции.

Пример 25.14. Исследовать функцию $y = \frac{x}{1-x^2}$ и построить ее график.

○ Решение: Выполним все восемь операций предложенной выше схемы исследования.

1. Функция не определена при $x = 1$ и $x = -1$. Область ее определения состоит из трех интервалов $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$, а график из трех ветвей.

2. Если $x = 0$, то $y = 0$. График пересекает ось Oy в точке $O(0; 0)$; если $y = 0$, то $x = 0$. График пересекает ось Ox в точке $O(0; 0)$.

3. Функция знакоположительна ($y > 0$) в интервалах $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$; знакоотрицательна — в $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$.

4. Функция $y = \frac{x}{1-x^2}$ является нечетной, т. к.

$$y(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = -\frac{x}{1-x^2} = -y(x).$$

Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при $x \geqslant 0$.

5. Прямые $x = 1$ и $x = -1$ являются ее вертикальными асимптотами. Выясним наличие наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$$

($k = 0$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$),

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{1-x^2} - 0x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота, ее уравнение $y = 0$. Прямая $y = 0$ является асимптотой и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$.

6. Находим интервалы возрастания и убывания функции. Так как

$$y' = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{1(1-x^2) - x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2},$$

то $y' > 0$ в области определения, и функция является возрастающей на каждом интервале области определения.

7. Исследуем функцию на экстремум. Так как $y' = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$, то критическими точками являются точки $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ (y' не существует), но они не принадлежат области определения функции. Функция экстремумов не имеет.

8. Исследуем функцию на выпуклость. Находим y'':

$$y''=\left(\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\right)'=\frac{2x(1-x^2)^2-(x^2+1)2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4}=\frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

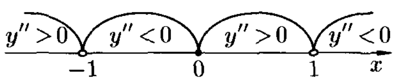


Рис. 159

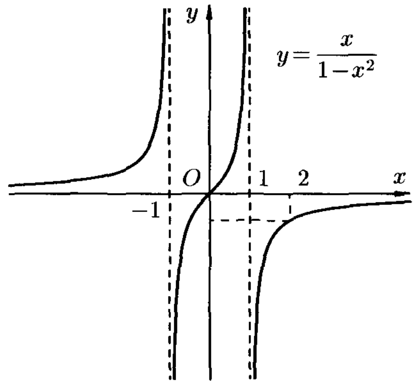


Рис. 160

Вторая производная равна нулю или не существует в точках $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. На рисунке 159 представлена схема изменения знаков второй производной исследуемой функции.

Точка $O(0,0)$ — точка перегиба графика функции.

График выпуклый вверх на интервалах $(-1;0)$ и $(1;\infty)$; выпуклый вниз на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$.

График функции изображен на рисунке 160. ●

§ 26. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

В определении функции $y = f(x)$ не говорится о том, при помощи каких средств находятся значения y по значениям x. В тех случаях, когда функция является формулой вида $y = \frac{x^3}{5} - 5x + 7$, значения функции найти легко с помощью четырех арифметических действий. Но как найти значения, например, функций $y = \sin x$, $y = \ln(1 + x)$ при любых (допустимых) значениях аргумента?

Для того, чтобы вычислить значения данной функции $y = f(x)$, ее заменяют многочленом $P_n(x)$ степени n, значения которого всегда и легко вычисляемы. Обоснование возможности представлять функцию многочленом дает формула Тейлора.

26.1. Формула Тейлора для многочлена

Пусть функция $f(x)$ есть многочлен $P_n(x)$ степени n:

$$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Преобразуем этот многочлен также в многочлен степени n относительно разности $x - x_0$, где x_0 — произвольное число, т. е. представим $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots + A_n(x - x_0)^n. \tag{26.1}$$

Для нахождения коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_n$ продифференцируем n раз равенство (26.1):

$$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + 3A_3(x - x_0)^2 + \ldots + nA_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$P_n''(x) = 2A_2 + 2 \cdot 3A_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2},$$

$$P_n'''(x) = 2 \cdot 3A_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4A_4(x - x_0) + \ldots$$
$$\ldots + n(n-1)(n-2)A_n(x - x_0)^{n-3},$$

....

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 A_n.$$

Подставляя $x = x_0$ в полученные равенства и равенство (26.1), имеем:

$$P_n(x_0) = A_0, \qquad \text{т. е.} \quad A_0 = P_n(x_0),$$

$$P_n'(x_0) = A_1, \qquad \text{т. е.} \quad A_1 = \frac{P_n'(x_0)}{1!},$$

$$P_n''(x_0) = 2A_2, \qquad \text{т. е.} \quad A_2 = \frac{P_n''(x_0)}{2!},$$

$$P_n'''(x_0) = 2 \cdot 3A_3, \qquad \text{т. е.} \quad A_3 = \frac{P_n'''(x_0)}{3!},$$

....

$$P_n^{(n)}(x_0) = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 A_n, \qquad \text{т. е.} \quad A_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Подставляя найденные значения $A_0, A_1, \ldots, A_n$ в равенство (26.1), получим разложение многочлена n-й степени $P_n(x)$ по степеням $(x - x_0)$:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{26.2}$$

Формула (26.2) называется ***формулой Тейлора для многочлена*** $P_n(x)$ ***степени*** n.

Пример 26.1. Разложить многочлен $P(x) = -4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ по степеням $x + 1$.

Решение: Здесь $x_0 = -1$, $P'(x) = -12x^2 + 6x - 2$, $P''(x) = -24x + 6$, $P'''(x) = -24$. Поэтому $P(-1) = 10$, $P'(-1) = -20$, $P''(-1) = 30$, $P'''(-1) = -24$. Следовательно,

$$P(x) = 10 + \frac{-20}{1}(x+1) + \frac{30}{2!}(x+1)^2 + \frac{-24}{3!}(x+1)^3,$$

т. е.

$$-4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 10 - 20(x+1) + 15(x+1)^2 - 4(x+1)^3.$$

26.2. Формула Тейлора для произвольной функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Формула Тейлора позволяет, при определенных условиях, приближенно представить функцию $f(x)$ в виде многочлена и дать оценку погрешности этого приближения.

Теорема 26.1. Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в ней производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то для любого x из этой окрестности найдется точка $c \in (x_0; x)$ такая, что справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$
$$(c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1). \quad (26.3)$$

Формула (26.3) называется ***формулой Тейлора для функции*** $f(x)$. Эту формулу можно записать в виде $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, где

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется ***многочленом Тейлора***, а

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

называется ***остаточным членом*** формулы Тейлора, записанным в форме Лагранжа. $R_n(x)$ есть погрешность приближенного равенства $f(x) \approx P_n(x)$. Таким образом, формула Тейлора дает возможность заменить функцию $y = f(x)$ многочленом $y = P_n(x)$ с соответствующей степенью точности, равной значению остаточного члена $R_n(x)$.

При $x_0 = 0$ получаем частный случай формулы Тейлора — ***формулу Маклорена***:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (26.4)$$

где c находится между 0 и x ($c = \theta x$, $0 < \theta < 1$).

При $n = 0$ формула Тейлора (26.3) имеет вид $f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$ или $f(x)-f(x_0) = f'(c)(x-x_0)$, т. е. совпадает с формулой Лагранжа конечных приращений. Рассмотренная ранее формула для приближенных вычислений $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (см. «дифференциал функции») является частным случаем более точной формулы

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Пример 26.2. Найти число e с точностью до 0,001.

Решение: Запишем формулу Маклорена для функции $f(x)=e^x$. Находим производные этой функции: $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$, ..., $f^{(n+1)}(x)=e^x$. Так как $f(0)=e^0=1$, $f'(0)=e^0=1$, ..., $f^{(n)}(0)=1$, $f^{(n+1)}(c)=e^c$, то по формуле (26.4) имеем:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Положим $x = 1$:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}.$$

Для нахождения e с точностью 0,001 определим n из условия, что остаточный член $\frac{e^c}{(n+1)!}$ меньше 0,001. Так как $0 < c < 1$, то $e^c < 3$ Поэтому при $n = 6$ имеем

$$\frac{e^c}{7!} < \frac{3}{5040} = 0{,}0006 < 0{,}001.$$

Итак, получаем приближенное равенство

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx$$

$$\approx 2 + 0{,}5 + 0{,}1\dot{6}67 + 0{,}0417 + 0{,}0083 + 0{,}0014 = 2{,}7181 \approx 2{,}718,$$

т. е. $e \approx 2{,}718$. ●

Приведем разложения по формуле Маклорена некоторых других элементарных функций:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \cos c,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \cos c,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}},$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!} x^n +$$
$$+ \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)(1+c)^{\mu-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Глава VI. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Лекции 23–24

§ 27. ПОНЯТИЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

27.1. Основные понятия

Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, а i так называемая ***мнимая единица***, $i^2 = -1$.

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется ***чисто мнимым***; если $y = 0$, то число $x + i0 = x$ отождествляется с действительным числом x, а это означает, что множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел является подмножеством множества $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел, т. е. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Число x называется ***действительной частью*** комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y ***мнимой частью*** z, $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются ***равными*** ($z_1 = z_2$) тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. В частности, комплексное число $z = x + iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = y = 0$. Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются ***сопряженными***.

27.2. Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x; y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И, наоборот, каждую точку $M(x; y)$ координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z = x + iy$ (см. рис. 161).

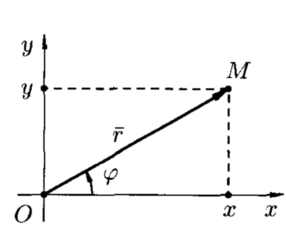


Рис. 161

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется ***комплексной плоскостью***. Ось абсцисс называется ***действительной осью***, так как на ней лежат действительные числа $z = x + 0i = x$. Ось ординат называется ***мнимой осью***, на ней лежат чисто мнимые комплексные числа $z = 0 + iy$.

Комплексное число $z = x + iy$ можно задавать с помощью радиус-вектора $\bar{r} = \overline{OM} = (x; y)$. Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число z, называется ***модулем*** этого числа и обозначается $|z|$ или r. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число, называется ***аргументом*** этого комплексного числа, обозначается $\operatorname{Arg} z$ или φ.

Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ — величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ ($k = 0, -1, 1, -2, 2 \ldots$): $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, где $\arg z$ — ***главное значение аргумента***, заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$, т. е. $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ (иногда в качестве главного значения аргумента берут величину, принадлежащую промежутку $[0; 2\pi)$).

27.3. Формы записи комплексных чисел

Запись числа z в виде $z = x + iy$ называют ***алгебраической формой*** комплексного числа.

Модуль r и аргумент φ комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора $\bar{r} = \overline{OM}$, изображающего комплексное число $z = x + iy$ (см. рис. 161). Тогда получаем $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно записать в виде $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ или

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая запись комплексного числа называется ***тригонометрической формой***.

Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Например, $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$. Аргумент φ определяется из формул

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Так как

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,$$

то

$$\cos\varphi = \cos(\arg z + 2k\pi) = \cos(\arg z), \quad \sin\varphi = \sin(\arg z).$$

Поэтому при переходе от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической достаточно определить лишь главное значение аргумента комплексного числа z, т. е. считать $\varphi = \arg z$.

Так как $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, то из формулы $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ получаем, что

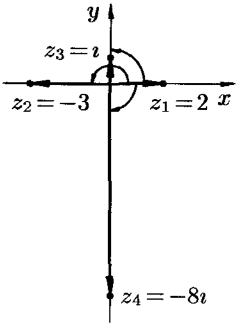


Рис 162

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{для внутренних точек I, IV четвертей,} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi & \text{для внутренних точек II четверти,} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi & \text{для внутренних точек III четверти.} \end{cases}$$

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то $\arg z$ можно найти непосредственно (см. рис. 162). Например, $\arg z_1 = 0$ для $z_1 = 2$; $\arg z_2 = \pi$ для $z_2 = -3$; $\arg z_3 = \frac{\pi}{2}$ для $z_3 = i$; и $\arg z_4 = -\frac{\pi}{2}$ для $z_4 = -8i$.

Используя *формулу Эйлера*

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,}$$

комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно записать в так называемой ***показательной*** (или ***экспоненциальной***) ***форме*** $z = re^{i\varphi}$, где $r = |z|$ — модуль комплексного числа, а угол $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$ $(k = 0, -1, 1, -2, 2, \ldots)$.

В силу формулы Эйлера, *функция $e^{i\varphi}$ периодическая с основным периодом 2π*. Для записи комплексного числа z в показательной форме, достаточно найти главное значение аргумента комплексного числа, т. е. считать $\varphi = \arg z$.

Пример 27.1. Записать комплексные числа $z_1 = -1+i$ и $z_2 = -1$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение: Для z_1 имеем

$$|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \arg z = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4},$$

т. е. $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$. Поэтому

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Для z_2 имеем

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1, \quad \arg z = \arg(-1) = \pi,$$

т. е. $\varphi = \pi$. Поэтому $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$. ●

§ 28. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

28.1. Сложение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$\boxed{z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).} \tag{28.1}$$

Сложение комплексных чисел обладает ***переместительным*** (коммутативным) и ***сочетательным*** (ассоциативным) свойствами:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

Из определения (28.1) следует, что геометрически комплексные числа складываются как векторы (см. рис. 163).

Непосредственно из рисунка видно, что $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$. Это соотношение называется *неравенством треугольника.*

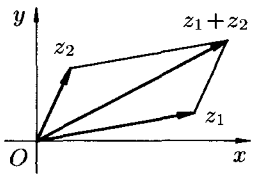


Рис 163

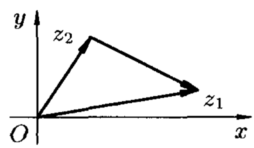


Рис. 164

28.2. Вычитание комплексных чисел

Вычитание определяется как действие, обратное сложению. ***Разностью*** двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z, которое, будучи сложенным с z_2, дает число z_1, т. е. $z = z_1 - z_2$, если $z + z_2 = z_1$.

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то из этого определения легко получить z:

$$\boxed{z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).} \tag{28.2}$$

Из равенства (28.2) следует, что геометрически комплексные числа вычитаются как векторы (см. рис. 164).

Непосредственно из рисунка видно, что $|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$. Отметим, что

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d,$$

т. е. модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию d между точками, изображающими эти числа на плоскости.

Поэтому, например, равенство $|z - 2i| = 1$ определяет на комплексной плоскости множество точек z, находящихся на расстоянии 1 от точки $z_0 = 2i$, т. е. окружность с центром в $z_0 = 2i$ и радиусом 1.

28.3. Умножение комплексных чисел

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$\boxed{z = z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).} \qquad (28.3)$$

Отсюда, в частности, следует важнейшее соотношение

$$\boxed{i^2 = -1.} \qquad (28.4)$$

Действительно, $i^2 = ii = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1$. Благодаря соотношению (28.4) формула (28.3) получается формально путем перемножения двучленов $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2 =$$
$$= x_1x_2 + i^2y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Например,

$$(2 - 3i)(-5 + 4i) = -10 + 8i + 15i - 12i^2 = -10 + 23i + 12 = 2 + 23i.$$

Заметим, что $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ — действительное число.

Умножение комплексных чисел обладает переместительным, сочетательным и распределительным (дистрибутивным) свойствами:

$$z_1z_2 = z_2z_1,$$
$$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3),$$
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3.$$

В этом легко убедиться, используя определение (28.3).

Найдем произведение комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, заданных в тригонометрической форме:

$$z_1z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) =$$
$$= r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

т. е.

$$\boxed{z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).}$$

Мы показали, что ***при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.***

Это правило распространяется на любое конечное число множителей. В частности, если есть n множителей и все они одинаковые, то

$$\boxed{z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).} \qquad (28.5)$$

Формула (28.5) называется ***формулой Муавра.***

Пример 28.1. Найти $(1 + \sqrt{3}i)^9$.

Решение: Запишем сначала число $z = 1+\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме:

$$r = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2; \quad \arg z = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \arg z = \frac{\pi}{3}, \quad z = 2\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big).$$

По формуле Муавра имеем

$$z^9 = (1+\sqrt{3}i)^9 = 2^9\Big(\cos 9\frac{\pi}{3} + i\sin 9\frac{\pi}{3}\Big) =$$
$$= 2^9(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 2^9(-1) = -512.$$ ●

28.4. Деление комплексных чисел

Деление определяется как действие, обратное умножению. ***Частным двух комплексных чисел*** z_1 и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число z, которое, будучи умноженным на z_2, дает число z_1, т. е. $\frac{z_1}{z_2} = z$, если $z_2 z = z_1$.

Если положить $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$, $z = x + iy$, то из равенства $(x_2 + iy_2)(x + iy) = x_1 + iy_1$ следует

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1, \\ xy_2 + yx_2 = y_1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем значения x и y:

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом,

$$\boxed{z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.}$$

На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

Пример 28.2. Выполнить деление $\frac{1+3i}{2+i}$.

Решение: $\dfrac{1+3i}{2+i} = \dfrac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{2-i+6i+3}{4+1} = \dfrac{5+5i}{5} = 1+i.$ ●

Для тригонометрической формы комплексного числа формула деления имеет вид

$$\boxed{\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).}$$

При делении комплексных чисел их модули, соответственно, делятся, а аргументы, соответственно, вычитаются.

28.5. Извлечение корней из комплексных чисел

Извлечение корня n-й степени определяется как действие, обратное возведению в натуральную степень.

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число ω, удовлетворяющее равенству $\omega^n = z$, т. е. $\sqrt[n]{z} = \omega$, если $\omega^n = z$.

Если положить $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, то, по определению корня и формуле Муавра, получаем

$$z = \omega^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда имеем $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2\pi k$, $k = 0, -1, 1, -2, 2, \ldots$ То есть $\theta = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$ и $\rho = \sqrt[n]{r}$ (арифметический корень).

Поэтому равенство $\sqrt[n]{z} = \omega$ принимает вид

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\\ k = 0, 1, \ldots, n-1.\end{gathered}}$$

Получим n различных значений корня. При других значениях k, в силу периодичности косинуса и синуса, получатся значения корня, совпадающие с уже найденными. Так, при $k = n$ имеем

$$\begin{aligned}\omega_n &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi n}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi n}{n}\right) = \\ &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right)\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) = \omega_0 \\ &\qquad (k = 0).\end{aligned}$$

Итак, для любого $z \neq 0$ корень n-й степени из числа z имеет ровно n различных значений.

Пример 28.3. Найти значения а) $\sqrt[3]{i} = \omega$; б) $\sqrt{-1} = \omega$.

❍ Решение: а) Запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме: $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Стало быть,

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right),$$

$$k = 0, 1, 2.$$

При $k = 0$ имеем

$$\omega_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

при $k = 1$ имеем

$$\omega_1 = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

при $k = 2$ имеем

$$\omega_2 = \cos\frac{\frac{9\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{9\pi}{2}}{3} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

б) Снова запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме:

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi.$$

Поэтому

$$\sqrt{-1} = \sqrt{\cos\pi + i\sin\pi} = \cos\frac{\pi+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}, \quad k = 0, 1.$$

При $k = 0$ получаем $\omega_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, а при $k = 1$ получаем $\omega_1 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$. Таким образом, $\sqrt{-1} = i$ и $\sqrt{-1} = -i$. ●

Глава VII. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Лекции 25–28

§ 29. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

29.1. Понятие неопределенного интеграла

В дифференциальном исчислении решается задача: *по данной функции $f(x)$ найти ее производную* (или дифференциал). Интегральное исчисление решает обратную задачу: *найти функцию $F(x)$, зная ее производную $F'(x) = f(x)$* (или дифференциал). Искомую функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$.

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если для любого $x \in (a; b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{или } dF(x) = f(x)\,dx).$$

Например, первообразной функции $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, является функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x).$$

Очевидно, что первообразными будут также любые функции

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C,$$

где C — постоянная, поскольку

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2 = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Теорема 29.1. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(a; b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где C — постоянное число

❏ Функция $F(x) + C$ является первообразной $f(x)$. Действительно, $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

Пусть $\Phi(x)$ — некоторая другая, отличная от $F(x)$, первообразная функции $f(x)$, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$. Тогда для любого $x \in (a; b)$ имеем

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

А это означает (см. следствие 25.1), что

$$\Phi(x) - F(x) = C,$$

где C — постоянное число. Следовательно, $\Phi(x) = F(x) + C$. ■

Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом от функции*** $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C.}$$

Здесь $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, $f(x)\,dx$ — ***подынтегральным выражением***, x — ***переменной интегрирования***, $\int$ — ***знаком неопределенного интеграла***.

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых $y = F(x) + C$ (каждому числовому значению C соответствует определенная кривая семейства) (см. рис. 165). График каждой первообразной (кривой) называется ***интегральной кривой***.

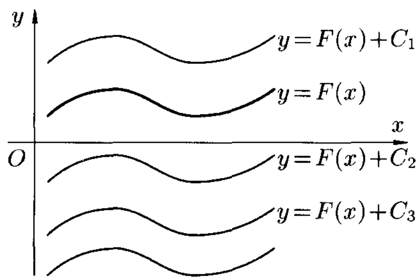


Рис. 165

Для всякой ли функции существует неопределенный интеграл?

Имеет место теорема, утверждающая, что «всякая непрерывная на $(a; b)$ функция имеет на этом промежутке первообразную», а следовательно, и неопределенный интеграл.

29.2. Свойства неопределенного интеграла

Отметим ряд свойств неопределенного интеграла, вытекающих из его определения.

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\Big(\int f(x)\,dx\Big) = f(x)\,dx, \quad \Big(\int f(x)\,dx\Big)' = f(x).$$

❑ Действительно,

$$d\Big(\int f(x)\,dx\Big) = d(F(x)+C) = dF(x) + d(C) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$$

и

$$\Big(\int f(x)\,dx\Big)' = (F(x)+C)' = F'(x) + 0 = f(x).$$ ■

Благодаря этому свойству *правильность интегрирования проверяется дифференцированием.* Например, равенство

$$\int (3x^2+4)\,dx = x^3 + 4x + C$$

верно, так как $(x^3+4x+C)' = 3x^2+4$.

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

❑ Действительно, $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C$. ■

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)\,dx = a\cdot\int f(x)\,dx, \quad a \neq 0 \text{ — постоянная.}$$

❑ Действительно,

$$\int af(x)\,dx = \int aF'(x)\,dx = \int (aF(x))'\,dx = \int d(aF(x)) =$$
$$= a\cdot F(x) + C_1 = a\cdot\Big(F(x)+\frac{C_1}{a}\Big) = a(F(x)+C) = a\int f(x)\,dx$$

$\Big($положили $\frac{C_1}{a} = C\Big)$. ■

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x)\pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

❑ Пусть $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$. Тогда

$$\int (f(x)\pm g(x))\,dx = \int (F'(x)\pm G'(x))\,dx =$$
$$= \int (F(x)\pm G(x))'\,dx = \int d(F(x)\pm G(x)) = F(x)\pm G(x) + C =$$
$$= (F(x)+C_1)\pm(G(x)+C_2) = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx,$$

где $C_1 \pm C_2 = C$. ■

5. (Инвариантность формулы интегрирования). Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)\,du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ — произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

❑ Пусть x — независимая переменная, $f(x)$ — непрерывная функция и $F(x)$ — ее первообразная. Тогда $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Положим теперь $u = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция. Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. В силу инвариантности формы первого дифференциала функции (см. с. 188) имеем

$$dF(u) = F'(u)\,du = f(u)\,du.$$

Отсюда $\int f(u)\,du = \int d(F(u)) = F(u) + C$. ■

Таким образом, формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от нее, имеющей непрерывную производную.

Так, из формулы $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$ путем замены x на u ($u = \varphi(x)$) получаем $\int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C$. В частности,

$$\int \sin^2 x\,d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C,$$

$$\int \ln^2 x\,d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C,$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

Пример 29.1. Найти интеграл $\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5)\,dx$.

❍ Решение:

$$\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5)\,dx = 2\int x^4\,dx - 3\int x^2\,dx + \int x\,dx - 5\int dx =$$

$$= 2\frac{x^5}{5} + C_1 - 3\frac{x^3}{3} + C_2 + \frac{x^2}{2} + C_3 - 5x + C_4 = \frac{2}{5}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C,$$

где $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$. ●

Пример 29.2. Найти интеграл $\int \frac{x+1}{x}\,dx$.

❍ Решение: $\int \frac{x+1}{x}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = x + \ln|x| + C$. ●

29.3. Таблица основных неопределенных интегралов

Пользуясь тем, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, можно получить таблицу основных интегралов путем обращения соответствующих формул дифференциального исчисления (таблица дифференциалов) и использования свойств неопределенного интеграла.

Например, так как

$$d(\sin u) = \cos u \cdot du,$$

то

$$\int \cos u\, du = \int d(\sin u) = \sin u + C.$$

Вывод ряда формул таблицы будет дан при рассмотрении основных методов интегрирования.

Интегралы в приводимой ниже таблице называются *табличными*. Их следует знать наизусть. В интегральном исчислении нет простых и универсальных правил отыскания первообразных от элементарных функций, как в дифференциальном исчислении. Методы нахождения первообразных (т. е. интегрирования функции) сводятся к указанию приемов, приводящих данный (искомый) интеграл к табличному. Следовательно, необходимо знать табличные интегралы и уметь их узнавать.

Отметим, что в таблице основных интегралов переменная интегрирования u может обозначать как независимую переменную, так и функцию от независимой переменной (согласно свойству инвариантности формулы интегрирования).

В справедливости приведенных ниже формул можно убедиться, взяв дифференциал правой части, который будет равен подынтегральному выражению в левой части формулы.

Докажем, например, справедливость формулы 2. Функция $\frac{1}{u}$ определена и непрерывна для всех значений u, отличных от нуля.

Если $u > 0$, то $\ln|u| = \ln u$, тогда $d\ln|u| = d\ln u = \frac{du}{u}$. Поэтому $\int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln|u| + C$ при $u > 0$.

Если $u < 0$, то $\ln|u| = \ln(-u)$. Но $d\ln(-u) = \frac{-du}{-u} = \frac{du}{u}$. Значит, $\int \frac{du}{u} = \ln(-u) + C = \ln|u| + C$ при $u < 0$.

Итак, формула 2 верна.

Аналогично, проверим формулу 15:

$$d\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C\right) = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+(\frac{u}{a})^2}\cdot\frac{1}{a}\,du = \frac{du}{a^2+u^2}.$$

Таблица основных интегралов

1. $\int u^{\alpha}\, du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \left(\int du = u + C\right);$

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$

3. $\int a^u\, du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C;$

4. $\int e^u\, du = e^u + C;$

5. $\int \sin u\, du = -\cos u + C \qquad \left(\int \operatorname{sh} u\, du = \operatorname{ch} u + C\right);$

6. $\int \cos u\, du = \sin u + C \qquad \left(\int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + C\right);$

7. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C;$

8. $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln|\sin u| + C;$

9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \qquad \left(\int \dfrac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C\right);$

10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C \qquad \left(\int \dfrac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C\right);$

11. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right| + C;$

12. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C;$

14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C;$

15. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + C;$

16. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a} \cdot \ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right| + C;$

17. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \dfrac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{u}{a} + C;$

18. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \dfrac{u}{2} \cdot \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

§ 30. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

30.1. Метод непосредственного интегрирования

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется ***непосредственным интегрированием***.

При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция «*подведения под знак дифференциала*»):

$$
\begin{aligned}
&du = d(u+a), \quad a \text{ — число},\\
&du = \frac{1}{a}d(au), \quad a \neq 0 \text{ — число},\\
&u \cdot du = \frac{1}{2}d(u^2),\\
&\cos u\, du = d(\sin u),\\
&\sin u\, du = -d(\cos u),\\
&\frac{1}{u}\, du = d(\ln u),\\
&\frac{1}{\cos^2 u}\, du = d(\operatorname{tg} u).
\end{aligned}
$$

Вообще, $f'(u)\,du = d(f(u))$, эта формула очень часто используется при вычислении интегралов.

Примеры:

1) $\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$ (формула 2 таблицы интегралов);

2) $\int (3x-1)^{24}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-1)^{24}\,d(3x-1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^{25}}{25} + C$ (формула 1);

3) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C$ (формулы 10 и 1);

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}\cdot x)}{\sqrt{(2)^2-(\sqrt{3}\cdot x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\arcsin\frac{\sqrt{3}\cdot x}{2} + C$ (формула 13);

5) $\int \sin^2 6x\,dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 12x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 12x\,dx =$
$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos 12x\,d(12x)\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{24}\sin 12x + C$ (формулы 1 и 6);

6) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{3}\int \frac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)(x+2)}\,dx =$
$= -\frac{1}{3}\int \frac{x-1}{(x-1)(x+2)}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{(x-1)(x+2)}\,dx =$
$= -\frac{1}{3}\int \frac{d(x+2)}{x+2} + \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} = -\frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}\ln|x-1| + C;$

7) $\int \operatorname{tg} u\,du = \int \frac{\sin u\,du}{\cos u} = -\int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C$ (вывод формулы 7);

8) $\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{\cos^2\frac{u}{2} + \sin^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\,du = \int \frac{\cos^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\,du +$
$+ \int \frac{\sin^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\,du = \int \operatorname{ctg}\frac{u}{2}\,d\left(\frac{u}{2}\right) + \int \operatorname{tg}\frac{u}{2}\,d\left(\frac{u}{2}\right) = \ln\left|\sin\frac{u}{2}\right| -$
$- \ln\left|\cos\frac{u}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C$ (вывод формулы 11);

9) $\int x(x+2)^9\,dx = \int(x+2-2)(x+2)^9\,dx = \int(x+2)^{10}\,dx -$
$- 2\int(x+2)^9\,dx = \int(x+2)^{10}\,d(x+2) - 2\int(x+2)^9\,d(x+2) =$
$= \frac{(x+2)^{11}}{11} - 2\frac{(x+2)^{10}}{10} + C$ (формула 1);

10) $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^5 x\cdot\sin^2 x} = -\int(\operatorname{ctg} x)^{-5}\,d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{\operatorname{ctg}^{-4} x}{-4} + C =$
$= \frac{1}{4\operatorname{ctg}^4 x} + C$ (формула 1);

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2+(x-1)^2}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(x-1)^2}} =$
$= \ln\left|x-1+\sqrt{3-2x+x^2}\right| + C$ (формула 14);

12) $\int\left(4x^3 - \frac{5}{\cos^2 2x} + 3^{1-x}\right)dx = 4\int x^3\,dx - \frac{5}{2}\int \frac{d(2x)}{\cos^2 2x} -$
$- \int 3^{1-x}\,d(1-x) = x^4 - \frac{5}{2}\operatorname{tg} 2x - \frac{3^{1-x}}{\ln 3} + C$ (формулы 1, 9, 3);

13) $\int x^3 \cdot \sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \int (1+x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot x \cdot (x^2+1-1)\,dx =$
$= \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{4}{3}}\,d(1+x^2) - \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{1}{3}}\,d(1+x^2) =$
$= \frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C.$

Как видно, вычисление интегралов иногда требует некоторой изобретательности, так сказать, «индивидуального подхода к каждой подынтегральной функции».

Соответствующие навыки приобретаются в результате значительного числа упражнений.

30.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (т. е. подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся (в случае «удачной» подстановки). Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную.

Тогда $dx = \varphi'(t)\,dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем *формулу интегрирования подстановкой*

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.} \qquad (30\ 1)$$

Формула (30.1) также называется формулой замены переменных в неопределенном интеграле. После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x.

Иногда целесообразно подбирать подстановку в виде $t = \varphi(x)$, тогда $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$, где $t = \varphi(x)$. Другими словами, формулу (30.1) можно применять справа налево.

Пример 30.1. Найти $\int e^{\frac{x}{4}}\,dx$.

Решение: Положим $x = 4t$, тогда $dx = 4\,dt$. Следовательно,

$$\int e^{\frac{x}{4}}\,dx = 4\int e^t\,dt = 4e^t + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C.$$

Пример 30.2. Найти $\int x \cdot \sqrt{x-3}\,dx$.

❍ Решение: Пусть $\sqrt{x-3} = t$, тогда $x = t^2 + 3$, $dx = 2t\,dt$. Поэтому

$$\int x \cdot \sqrt{x-3}\,dx = \int (t^2+3) \cdot t \cdot 2t\,dt =$$

$$= 2\int (t^4 + 3t^2)\,dt = 2\int t^4\,dt + 6\int t^2\,dt = 2 \cdot \frac{t^5}{5} + 6 \cdot \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{5}(x-3)^{5/2} + 2(x-3)^{3/2} + C. \quad \bullet$$

Пример 30.3. Получить формулу

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\,\right| + C.$$

❑ Обозначим $t = \sqrt{u^2+a^2} + u$ (подстановка Эйлера). Тогда

$$dt = \frac{2u}{2\sqrt{u^2+a^2}}\,du + du, \quad \text{т. е.} \quad dt = \frac{\sqrt{u^2+a^2}+u}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du.$$

Отсюда

$$\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{dt}{\sqrt{u^2+a^2}+u} = \frac{dt}{t}.$$

Стало быть,

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right| + C. \quad \blacksquare$$

Пример 30.4. Найти $\int x \cdot (x+2)^{100}\,dx$.

❍ Решение: Пусть $x + 2 = t$. Тогда $x = t - 2$, $dx = dt$. Имеем:

$$\int x \cdot (x+2)^{100}\,dx = \int (t-2) \cdot t^{100}\,dt = \int t^{101}\,dt - 2\int t^{100}\,dt =$$

$$= \frac{t^{102}}{102} - 2 \cdot \frac{t^{101}}{101} + C = \frac{(x+2)^{102}}{102} - \frac{2(x+2)^{101}}{101} + C. \quad \bullet$$

Пример 30.5. Найти $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

❍ Решение: Обозначим $e^x = t$. Тогда $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t+1} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{t^2+t} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} = -\int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})^2 - (t+\frac{1}{2})^2} = -\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln\left|\frac{\frac{1}{2}+t+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t-\frac{1}{2}}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{t+1}{-t}\right| = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| = \ln\frac{e^x}{e^x+1} + C.$$

Здесь используется формула 16 таблицы основных интегралов. ●

30.3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$. Интегрируя это равенство, получим

$$\boxed{\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du \quad \text{или} \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du.}$$

Полученная формула называется ***формулой интегрирования по частям***. Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей u и dv (это, как правило, можно осуществить несколькими способами); затем, после нахождения v и du, используется формула интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}\,dx$, $\int P(x)\cdot\sin kx\,dx$, $\int P(x)\cos kx\,dx$, где $P(x)$ — многочлен, k — число. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители.

2. Интегралы вида $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} x\,dx$. Удобно положить $P(x)\,dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx$, $\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx$, где a и b — числа. За u можно принять функцию $u = e^{ax}$.

Пример 30.6. Найти $\int(2x+1)e^{3x}\,dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lll} u = 2x+1 & \Longrightarrow & du = 2dx \\ dv = e^{3x}\,dx & \Longrightarrow & v = \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right]$ (можно положить $C = 0$). Следовательно, по формуле интегрирования по частям:

$$\int(2x+1)e^{3x}\,dx = (2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int\frac{1}{3}e^{3x}2\,dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C. \quad ●$$

Пример 30.7. Найти $\int \ln x\,dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lcl} u=\ln x & \Longrightarrow & du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv=dx & \Longrightarrow & v=x \end{array}\right]$. Поэтому

$$\int \ln x\,dx = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\cdot\ln x - x + C. \qquad \bullet$$

Пример 30.8. Найти $\int x^2 e^x\,dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lcl} u=x^2 & \Longrightarrow & du=2x\,dx \\ dv=e^x\,dx & \Longrightarrow & v=e^x \end{array}\right]$. Поэтому

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\int e^x\cdot x\,dx. \tag{30.2}$$

Для вычисления интеграла $\int e^x x\,dx$ снова применим метод интегрирования по частям: $u=x$, $dv=e^x\,dx \implies du=dx$, $v=e^x$. Значит,

$$\int e^x\cdot x\,dx = x\cdot e^x - \int e^x\,dx = x\cdot e^x - e^x + C. \tag{30.3}$$

Поэтому (см. (30.2)) $\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2(x\cdot e^x - e^x + C)$. ●

Пример 30.9. Найти $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lcl} u=\operatorname{arctg} x & \Longrightarrow & du=\frac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv=dx & \Longrightarrow & v=x \end{array}\right]$. Поэтому

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\cdot\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C. \qquad \bullet$$

§ 31. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

31.1. Понятия о рациональных функциях

Многочлен (некоторые сведения справочного характера)

Функция вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \tag{31.1}$$

где n — натуральное число, a_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) — постоянные коэффициенты, называется ***многочленом*** (или ***целой рациональной функцией***). Число n называется ***степенью*** многочлена.

Корнем многочлена (31.1) называется такое значение x_0 (вообще говоря, комплексное) переменной x, при котором многочлен обращается в нуль, т. е. $P_n(x_0) = 0$.

Теорема 31.1. Если x_1 есть корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен делится без остатка на $x - x_1$, т. е

$$P_n(x) = (x - x_1) \cdot P_{n-1}(x), \tag{31.2}$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени $(n-1)$.

Возникает вопрос: всякий ли многочлен имеет корень? Положительный ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 31.2 (основная теорема алгебры). Всякий многочлен n-й степени $(n > 0)$ имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный

Доказательство этой теоремы мы не приводим.

Пользуясь основной теоремой алгебры, докажем теорему о разложении многочлена на линейные множители.

Теорема 31.3. Всякий многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n), \tag{31.3}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни многочлена, a_0 — коэффициент многочлена при x^n.

❑ Рассмотрим многочлен (31.1). По теореме 31.2 он имеет корень. Обозначим его через x_1. Тогда имеет место соотношение (31.2). А так как $P_{n-1}(x)$ — также многочлен, то он имеет корень. Обозначим его через x_2. Тогда $P_{n-1}(x) = (x - x_2) \cdot P_{n-2}(x)$, где $P_{n-2}(x)$ — многочлен $(n-2)$-й степени. Следовательно, $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)P_{n-2}(x)$.

Продолжая этот процесс, получим в итоге:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n). \qquad ■$$

Множители $(x - x_i)$ в равенстве (31.3) называются ***линейными множителями***.

Пример 31.1. Разложить многочлен $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ на множители.

❍ Решение: Многочлен $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ обращается в нуль при $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Следовательно,

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2). \qquad \bullet$$

Пример 31.2. Представить выражение $x^3 - x^2 + 4x - 4$ в виде произведения линейных множителей.

❍ Решение: Легко проверить, что

$$x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x-1)(x-2i)(x+2i). \qquad \bullet$$

Если в разложении многочлена (31.3) какой-либо корень встретился k раз, то он называется *корнем кратности* k. В случае $k = 1$ (т. е. корень встретился один раз) корень называется *простым.*

Разложение многочлена (31.3) можно записать в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_r)^{k_r}, \tag{31.4}$$

если корень x_1 имеет кратность k_1, корень x_2 — кратность k_2 и так далее. При этом $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$, а r — число различных корней.

Например, разложение

$$P_8(x) = (x-3)(x+1)(x-4)(x-3)(x-3)x(x-4)(x-3)$$

можно записать так:

$$P_8(x) = (x-3)^4 \cdot (x+1) \cdot (x-4)^2 \cdot x.$$

Пользуясь теоремой 31.3, можно доказать следующие утверждения.

Теорема 31.4. Если многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ тождественно равен нулю, то все его коэффициенты равны нулю.

Теорема 31.5. Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого

Например, если $ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv x^3 - 3x^2 + 1$, то $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$, $d = 1$.

Теорема 31.6. Если многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a+ib$, то он имеет и сопряженный корень $a-ib$.

В разложении многочлена (31.3) комплексные корни входят сопряженными парами. Перемножив линейные множители

$$(x-(a+ib))\cdot(x-(a-ib)),$$

получим трехчлен второй степени с действительными коэффициентами x^2+px+q. В самом деле,

$$(x-(a+ib))(x-(a-ib)) = ((x-a)-ib)((x-a)+ib) =$$
$$= (x-a)^2+b^2 = x^2-2ax+a^2+b^2 = x^2+px+q,$$

где $p=-2a$, $q=a^2+b^2$.

Таким образом, произведение линейных множителей, соответствующих сопряженным корням, можно заменить квадратным трехчленом с действительными коэффициентами.

С учетом вышеизложенного справедлив следующий факт.

Теорема 31.7. Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т. е многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r}\times$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}. \quad (31.5)$$

При этом $k_1+k_2+\cdots+k_r+2(s_1+s_2+\cdots+s_m)=n$, все квадратные трехчлены не имеют вещественных корней

Примеры разложений (31.5):

1) $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$;

2) $x^3-16x=x(x^2-16)=x(x-4)(x+4)$;

3) $x^5-6x^4+9x^3-x^2+6x-9=x^3(x^2-6x+9)-(x^2-6x+9)=$ $=(x^2-6x+9)(x^3-1)=(x-3)^2\cdot(x-1)(x^2+x+1)$.

Дробно-рациональная функция

Дробно-рациональной функцией (или ***рациональной дробью***) называется функция, равная отношению двух многочленов, т. е. $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ — многочлен степени m, а $Q_n(x)$ — многочлен степени n.

Рациональная дробь называется ***правильной***, если степень числителя меньше степени знаменателя, т. е. $m < n$; в противном случае (если $m \geqslant n$) рациональная дробь называется ***неправильной***.

Всякую неправильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ***можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена*** $L(x)$ ***и правильной рациональной дроби*** $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, т. е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Например, $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$ — неправильная рациональная дробь. Разделим числитель на знаменатель в столбик:

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^4 \qquad\qquad\quad -5x + 9 & x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 - 2x^3} \qquad\qquad\qquad\quad & x^3 + 2x^2 + 4x + 3 \\
-\;2x^3 \qquad -5x + 9 & \\
\underline{2x^3 - 4x^2 \qquad\quad} & \\
-\;4x^2 - 5x + 9 & \\
\underline{4x^2 - 8x \quad\;\,} & \\
-\;3x + 9 & \\
\underline{3x - 6} & \\
15. &
\end{array}$$

Получим частное $L(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ и остаток $R(x) = 15$. Следовательно, $\dfrac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \dfrac{15}{x - 2}$.

Правильные рациональные дроби вида

(I). $\dfrac{A}{x - a}$;

(II). $\dfrac{A}{(x - a)^k}$ $(k \geqslant 2,\ k \in \mathbb{N})$;

(III). $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (корни знаменателя комплексные, т. е. $p^2 - 4q < 0$);

(IV). $\dfrac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k}$ ($k \geqslant 2$, корни знаменателя комплексные),

где A, a, M, N, p, q — действительные числа, называются ***простейшими рациональными дробями I, II, III и IV типов.***

Теорема 31.8. Всякую *правильную* рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q(x) = (x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\dots(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\dots(x^2+p_mx+q_m)^{s_m},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы простейших дробей

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} +$$
$$+ \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \dots$$
$$\dots + \frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \dots$$
$$\dots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_mx+q_m} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_mx+q_m)^2} + \dots + \frac{M_{s_m}x+N_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}}, \tag{31.6}$$

где $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C_1, D_1, \dots, M_1, N_1, \dots$ — некоторые действительные коэффициенты.

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

1) $\dfrac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3} + \dfrac{C}{(x-3)^2} + \dfrac{D}{(x-3)^3}$;

2) $\dfrac{x^3+1}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$;

3) $\dfrac{7x^2+8x+9}{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)^2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+x+1} +$
$+ \dfrac{Mx+N}{(x^2+x+1)^2}$.

Для нахождения неопределенных коэффициентов $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ в равенстве (31.6) можно применить *метод сравнивания коэффициентов*. Суть метода такова:

1. В правой части равенства (31.6) приведем к общему знаменателю $Q(x)$; в результате получим тождество $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)}$, где $S(x)$ — многочлен с неопределенными коэффициентами.

2. Так как в полученном тождестве знаменатели равны, то тождественно равны и числители, т. е.

$$P(x) \equiv S(x). \tag{31.7}$$

3. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x (по теореме 31.5 о тождестве многочленов) в обеих частях тождества (31.7), получим систему линейных уравнений, из которой и определим искомые коэффициенты A_1, $A_2, \dots$, $B_1, \dots$

Пример 31.3. Представить дробь $\dfrac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$ в виде суммы простейших дробей.

Решение: Согласно теореме 31.8 имеем:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5},$$

т. е.

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A(x^2-2x+5)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2-2x+5)}.$$

Отсюда следует

$$2x^2-3x-3 \equiv Ax^2-2Ax+5A+Bx^2-Bx+Cx-C,$$

т. е.

$$2x^2-3x-3 \equiv (A+B)x^2+(-2A-B+C)x+(5A-C).$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, x^1, x^0, получаем

$$\begin{cases} 2 = A+B, \\ -3 = -2A-B+C, \\ -3 = 5A-C. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что $A=-1$, $B=3$, $C=-2$. Следовательно,

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{3x-2}{x^2-2x+5}.$$ ●

Для нахождения неопределенных коэффициентов применяют также *метод отдельных значений аргумента:* после получения тождества (31.7) аргументу x придают конкретные значения столько раз, сколько неопределенных коэффициентов (обычно полагают вместо x значения действительных корней многочлена $Q(x)$).

Пример 31.4. Представить дробь $\dfrac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}$ в виде суммы простейших дробей.

Решение: Имеем: $\dfrac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x+1}$. Отсюда следует

$$3x-4 \equiv A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2).$$

Положим $x = 0$, тогда $-4 = -2A$, т. е. $A = 2$; положим $x = 2$, тогда $2 = 6B$, т. е. $B = \frac{1}{3}$; положим $x = -1$, тогда $-7 = 3C$, т. е. $C = -\frac{7}{3}$. Следовательно,

$$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{2}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{-\frac{7}{3}}{x+1}. \qquad \bullet$$

31.2. Интегрирование простейших рациональных дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей.

1. $\int \frac{A}{x-a}\,dx = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\cdot\ln|x-a| + C$ (формула (2) таблицы интегралов);

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\cdot\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) = A\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$ (формула (1));

3. Рассмотрим интеграл $J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$.

Выделив в знаменателе полный квадрат, получим:

$$J = \int \frac{Mx+N}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}\,dx,$$

причем $q - \frac{p^2}{4} > 0$. Сделаем подстановку $x + \frac{p}{2} = t$. Тогда $x = t - \frac{p}{2}$, $dx = dt$. Положим $q - \frac{p^2}{4} = a^2$. Следовательно, используя формулы (2) и (15) таблицы интегралов, получаем

$$\begin{aligned} J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx &= \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2+a^2}\,dt = \\ &= M\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \\ &= \frac{M}{2}\cdot\ln(t^2+a^2) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C, \end{aligned}$$

т. е., возвращаясь к переменной x,

$$J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Пример 31.5. Найти $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10}\,dx$.

◐ Решение: $x^2+2x+10=(x+1)^2+9$. Сделаем подстановку $x+1=t$. Тогда $x=t-1$, $dx=dt$ и

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9}\,dt = 3\int \frac{t\,dt}{t^2+9} - 2\int \frac{dt}{t^2+9} =$$
$$= \frac{3}{2}\ln(t^2+9) - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10) - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C.$$

●

4. Вычисление интеграла вида $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx$, $k\geqslant 2$, $q-\frac{p^2}{4}>0$.

Данный интеграл подстановкой $x+\frac{p}{2}=t$ сводится к сумме двух интегралов:

$$M\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}, \quad a^2=q-\frac{p^2}{4}.$$

Первый интеграл легко вычисляется:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-k}\,d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + C.$$

Вычислим второй интеграл:

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}\,dt =$$
$$= \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k}\right) = \frac{1}{a^2}\left(J_{k-1} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k}\right). \tag{31.8}$$

К последнему интегралу применим интегрирование по частям. Положим

$$u=t, \quad dv=\frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k}, \quad du=dt,$$
$$v=\frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-k}\,d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}},$$

тогда

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} =$$
$$= \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\cdot J_{k-1}.$$

Подставляя найденный интеграл в равенство (31.8), получаем

$$J_k = \frac{1}{a^2}\left(J_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(1-k)}J_{k-1}\right),$$

т. е.
$$J_k = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}J_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\right).$$
Полученная формула дает возможность найти интеграл J_k для любого натурального числа $k > 1$.

Пример 31.6. Найти интеграл $J_3 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^3}$.

○ Решение: Здесь $a = 1$, $k = 3$. Так как
$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C,$$
то
$$J_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}J_1 + \frac{t}{2\cdot(2-1)(t^2+1)} = \\ = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)} + C,$$
$$J_3 = \frac{3}{4}J_2 + \frac{t}{4(t^2+1)^2} = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)}\right) + C. \qquad \bullet$$

31.3. Интегрирование рациональных дробей

Рассмотренный в пунктах 31.1–31.2 материал позволяет сформулировать *общее правило интегрирования рациональных дробей.*

1. Если дробь неправильна, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби;

2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей;

3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Пример 31.7. Найти интеграл $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$.

○ Решение: Под знаком интеграла неправильная дробь; выделим ее целую часть путем деления числителя на знаменатель:
$$\begin{array}{rl}
x^5 \qquad + 2x^3 \qquad\qquad + 4x + 4 & \big|\, x^4 + 2x^3 + 2x^2 \\
-\ \underline{x^5 + 2x^4 + 2x^3} \qquad\qquad\qquad & \big|\, x - 2 \\
-2x^4 \qquad\qquad\quad + 4x + 4 & \\
-\ \underline{-2x^4 - 4x^3 - 4x^2} \qquad\quad & \\
4x^3 + 4x^2 + 4x + 4\ \text{(остаток)}. &
\end{array}$$

Получаем:
$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}.$$
Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:
$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2},$$
$$4x^3+4x^2+4x+4\equiv Ax(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)x^2,$$
т. е.
$$4x^3+4x^2+4x+4\equiv (A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(2A+2B)x+2B.$$
Отсюда следует, что
$$\begin{cases} A+C=4,\\ 2A+B+D=4,\\ 2A+2B=4,\\ 2B=4. \end{cases}$$
Находим: $B=2$, $A=0$, $C=4$, $D=2$. Стало быть,
$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}$$
и
$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}.$$
Интегрируем полученное равенство:
$$\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx=\int\left(x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}\right)dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+\int\frac{4x+2}{(x+1)^2+1}\,dx.$$
Обозначим $x+1=t$, тогда $x=t-1$ и $dx=dt$. Таким образом,
$$\int\frac{4x+2}{(x+1)^2+1}\,dx=\int\frac{4t-4+2}{t^2+1}\,dt=4\int\frac{t\,dt}{t^2+1}-2\int\frac{dt}{t^2+1}=$$
$$=4\cdot\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-2\operatorname{arctg}t+C=$$
$$=2\cdot\ln(x^2+2x+2)-2\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$
Следовательно,
$$\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln(x^2+2x+2)-2\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$
●

Отметим, что любая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях.

§ 32. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

32.1. Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим некоторые случаи нахождения интеграла от тригонометрических функций. Функцию с переменными $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложения, вычитание, умножение и деление) принято обозначать $R(\sin x; \cos x)$, где R — знак рациональной функции.

Вычисление неопределенных интегралов типа $\int R(\sin x; \cos x)\,dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, которая называется ***универсальной***.

Действительно, $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$. Поэтому

$$\int R(\sin x; \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t. Обычно этот способ весьма громоздкий, зато он *всегда* приводит к результату.

На практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств (и вида) подынтегральной функции. В частности, удобны следующие правила:

1) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *нечетна относительно* $\sin x$, т. е. $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то подстановка $\cos x = t$ рационализирует интеграл;

2) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *нечетна относительно* $\cos x$, т. е. $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то делается подстановка $\sin x = t$;

3) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *четна относительно* $\sin x$ *и* $\cos x$ $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\operatorname{tg} x = t$. Такая же подстановка применяется, если интеграл имеет вид $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$.

Пример 32.1. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Решение: Сделаем универсальную подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $dx =$

$= \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{t^2+t+2} =$$

$$= \int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{7}/2} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{7}} + C. \quad \bullet$$

Пример 32.2. Найти интеграл $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

○ Решение: Так как

$$R(-\sin x; -\cos x) = \frac{1}{1+(-\sin x)^2} = \frac{1}{1+\sin^2 x} = R(\sin x; \cos x),$$

то полагаем $\operatorname{tg} x = t$. Отсюда

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{и} \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Поэтому

$$I = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+\frac{t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}t)}{(\sqrt{2}t)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C. \quad \bullet$$

32.2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

1) подстановка $\sin x = t$, если n — целое положительное *нечетное* число;

2) подстановка $\cos x = t$, если m — целое положительное *нечетное* число;

3) формулы понижения порядка: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, если m и n — целые *неотрицательные четные* числа;

4) подстановка $\operatorname{tg} x = t$, если $m+n$ — есть четное отрицательное целое число.

Пример 32.3. Найти интеграл $I = \int \sin^4 x \cos^5 x\,dx$.

◯ Решение: Применим подстановку $\sin x = t$. Тогда $x = \arcsin t$, $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$, $\cos x = \sqrt{1-t^2}$ и

$$I = \int t^4 \cdot (\sqrt{1-t^2})^5 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^4(1-t^2)^2\,dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8)\,dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C. \quad \bullet$$

Пример 32.4. Найти интеграл $I = \int \sin^4 x \cos^2 x\,dx$.

◯ Решение:

$$I = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x\,dx = \int \frac{1}{4}\sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)\,dx -$$

$$- \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\,d(\sin 2x) = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C. \quad \bullet$$

Пример 32.5. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \int \cos^{-1} x \cdot \sin^{-3} x\,dx.$$

◯ Решение: Здесь $m + n = -4$. Обозначим $\operatorname{tg} x = t$. Тогда $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ и

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t^3}{(\sqrt{1+t^2})^3}} = \int \frac{1+t^2}{t^3}\,dt = \int t^{-3}\,dt + \int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = -\frac{1}{2}\cdot \operatorname{ctg}^2 x + \ln|\operatorname{tg} x| + C. \quad \bullet$$

32.3. Использование тригонометрических преобразований

Интегралы типа $\int \sin ax \cdot \cos bx\,dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx\,dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx\,dx$ вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).$$

Пример 32.6. Найти интеграл $I = \int \sin 8x\cos 2x\,dx$.

❍ Решение:

$$I = \int \sin 8x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin 10x + \sin 6x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{10}\cos 10x - \frac{1}{6}\cos 6x\Big) + C. \quad ●$$

§ 33. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

33.1. Квадратичные иррациональности

Рассмотрим некоторые типы интегралов, содержащих иррациональные функции.

Интегралы типа

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\qquad \int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx,\qquad \int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

называют неопределенными интегралами от квадратичных иррациональностей. Их можно найти следующим образом: под радикалом выделить полный квадрат

$$ax^2+bx+c =$$
$$= a\Big(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\Big) = a\Big(\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\Big) = a\Big(\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\Big)$$

и сделать подстановку $x+\dfrac{b}{2a} = t$. При этом первые два интеграла приводятся к табличным, а третий — к сумме двух табличных интегралов.

Пример 33.1. Найти интегралы $I = \displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$.

❍ Решение: Так как $4x^2+2x+1 = 4\Big(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\Big) = 4\Big(\Big(x+\frac{1}{4}\Big)^2+\frac{3}{16}\Big)$, то

$$I = \int\frac{dx}{\sqrt{4((x+\frac{1}{4})^2+\frac{3}{16})}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{4})^2+\frac{3}{16}}}.$$

Сделаем подстановку $x + \frac{1}{4} = t$, $x = t - \frac{1}{4}$, $dx = dt$. Тогда

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 3/16}} = \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{t^2 + \frac{3}{16}}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|x + \frac{1}{4} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}}\right| + C. \quad \bullet$$

Пример 33.2. Найти интеграл $I = \int \frac{x+4}{\sqrt{6 - 2x - x^2}}\,dx$

○ Решение: Так как $6 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x - 6) = -((x+1)^2 - 7) = 7 - (x+1)^2$, то подстановка имеет вид $x + 1 = t$, $x = t - 1$, $dx = dt$. Тогда

$$I = \int \frac{t - 1 + 4}{\sqrt{7 - t^2}}\,dt = \int \frac{t\,dt}{\sqrt{7 - t^2}} + 3\int \frac{dt}{\sqrt{7 - t^2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int (7 - t^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(7 - t^2) + 3\int \frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{7})^2 - t^2}} =$$
$$= -\sqrt{7 - t^2} + 3\cdot\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}} + C = 3\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{7}} - \sqrt{6 - 2x - x^2} + C. \quad \bullet$$

Интегралы типа $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n, можно вычислять, пользуясь формулой

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \tag{33.1}$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n - 1$ с неопределенными коэффициентами, λ — также неопределенный коэффициент.

Все неопределенные коэффициенты находятся из тождества, получаемого дифференцированием обеих частей равенства (33.1):

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \equiv \left(Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2 + bx + c}\right)' + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

после чего необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной x.

Пример 33.3. Найти интеграл $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}\,dx$.

○ Решение: По формуле (33.1) имеем:

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}\,dx = (Ax + B)\sqrt{1 - 2x - x^2} + \lambda\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}.$$

Дифференцируя это равенство, получаем:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} \equiv A\cdot\sqrt{1-2x-x^2}+(Ax+B)\cdot\frac{-2-2x}{2\sqrt{1-2x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}},$$

т. е.

$$x^2 \equiv A(1-2x-x^2)+(Ax+B)(-1-x)+\lambda,$$
$$x^2 \equiv A-2Ax-Ax^2-Ax-B-Ax^2-Bx+\lambda.$$

Сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} 1=-A-A & \text{при } x^2, \\ 0=-2A-A-B & \text{при } x^1, \\ 0=A-B+\lambda & \text{при } x^0. \end{cases}$$

Отсюда $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{3}{2}$, $\lambda=2$. Следовательно,

$$I=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2}+2\int\frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}}=$$
$$=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C. \quad \bullet$$

33.2. Дробно-линейная подстановка

Интегралы типа $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\delta/\gamma}\right)dx$, где a, b, c, d — действительные числа, $\alpha,\beta,\ldots,\delta,\gamma$ — натуральные числа, сводятся к интегралам от рациональной функции путем подстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, где k — наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{\alpha}{\beta},\ldots,\frac{\delta}{\gamma}$

Действительно, из подстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$ следует, что $x=\frac{b-dt^k}{ct^k-a}$ и $dx=\frac{-dkt^{k-1}(ct^k-a)-(b-dt^k)ckt^{k-1}}{(ct^k-a)^2}\,dt$, т. е. x и dx выражаются через рациональные функции от t. При этом и каждая степень дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ выражается через рациональную функцию от t.

Пример 33.4. Найти интеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}$.

❍ Решение: Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$ есть 6. Поэтому полагаем $x+2=t^6$, $x=t^6-2$, $dx=6t^5\,dt$, $t=\sqrt[6]{x+2}$.

Следовательно,

$$I=\int\frac{6t^5\,dt}{t^4-t^3}=6\int\frac{t^2\,dt}{t-1}=6\int\frac{(t^2-1)+1}{t-1}\,dt=$$
$$=6\int\Big(t+1+\frac{1}{t-1}\Big)\,dt=3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=$$
$$=3\cdot\sqrt[3]{x+2}+6\cdot\sqrt[6]{x+2}+6\ln|\sqrt[6]{x+2}-1|+C.\quad\bullet$$

Пример 33.5. Указать подстановку для нахождения интегралов:

$$I_1=\int\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-x}\,dx,\qquad I_2=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{(1-x)^2}.$$

○ Решение: Для I_1 подстановка $x=t^2$, для I_2 подстановка $\frac{x+1}{x-1}=t^3$. ●

33.3. Тригонометрическая подстановка

Интегралы типа

$$\int R(x;\sqrt{a^2-x^2})dx,\qquad\int R(x;\sqrt{a^2+x^2})dx,\qquad\int R(x;\sqrt{x^2-a^2})dx$$

приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, с помощью следующих *тригонометрических подстановок:* $x=a\cdot\sin t$ для первого интеграла; $x=a\cdot\operatorname{tg}t$ для второго интеграла; $x=\frac{a}{\sin t}$ для третьего интеграла.

Пример 33.6. Найти интеграл $I=\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$.

○ Решение: Положим $x=2\sin t$, $dx=2\cos t\,dt$, $t=\arcsin\frac{x}{2}$. Тогда

$$I=\int\frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt=\int\frac{4\cos^2 t}{4\sin^2 t}\,dt=$$
$$=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt=\int\frac{dt}{\sin^2 t}-\int dt=-\operatorname{ctg}t-t+C=$$
$$=C-\arcsin\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\Big(\arcsin\frac{x}{2}\Big)=C-\arcsin\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$$\Big(\operatorname{ctg}t=\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}=\frac{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}{\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\Big).\quad\bullet$$

33.4. Интегралы типа $\int R(x; \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

Здесь подынтегральная функция есть рациональная функция относительно x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Выделив под радикалом полный квадрат и сделав подстановку $x + \frac{b}{2a} = t$, интегралы указанного типа приводятся к интегралам уже рассмотренного типа, т. е. к интегралам типа $\int R(t; \sqrt{a^2-t^2})\,dt$, $\int R(t; \sqrt{a^2+t^2})\,dt$, $\int R(t; \sqrt{t^2-a^2})\,dt$. Эти интегралы можно вычислить с помощью соответствующих тригонометрических подстановок.

Пример 33.7. Найти интеграл $I = \int \frac{\sqrt{x^2+2x-4}}{(x+1)^3}\,dx$.

Решение: Так как $x^2+2x-4 = (x+1)^2-5$, то $x+1 = t$, $x = t-1$, $dx = dt$. Поэтому $I = \int \frac{\sqrt{t^2-5}}{t^3}\,dt$. Положим $t = \frac{\sqrt{5}}{\sin z}$, $dt = \frac{-\sqrt{5}\cdot\cos z}{\sin^2 z}\,dz$, $z = \arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}$. Тогда

$$I = \int \frac{\sqrt{\frac{5}{\sin^2 z}-5}}{\frac{5\sqrt{5}}{\sin^3 z}} \cdot \frac{(-\sqrt{5})\cos z}{\sin^2 z}\,dz = -\frac{1}{\sqrt{5}}\int \cos^2 z\,dz =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}\int(1+\cos 2z)\,dz = -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(z+\frac{1}{2}\sin 2z\right)+C =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}\right)\right)+C =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1}\right)\right)+C =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1}+\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2+2x-4}}{(x+1)^2}\right)+C.$$

Замечание: Интеграл типа $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ целесообразно находить с помощью подстановки $x = \frac{1}{t}$.

33.5. Интегрирование дифференциального бинома

Интегралы типа $\int x^m\cdot(a+bx^n)^p\,dx$ (называемые интегралами от *дифференциального бинома*), где a, b — действительные числа; m, n, p — рациональные числа, берутся, как показал Чебышев П.А., лишь в случае, когда хотя бы одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n}+p$ является целым.

Рационализация интеграла в этих случаях осуществляется следующими подстановками:

1) если p — целое число, то подстановка $x = t^k$, где k — наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n;

2) если $\frac{m+1}{n}$ — целое число, то подстановка $a+bx^n = t^s$, где s — знаменатель дроби p;

3) если $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число, то подстановка $a+bx^n = x^n \cdot t^s$, где s — знаменатель дроби p.

Во всех остальных случаях интегралы типа $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ не выражаются через известные элементарные функции, т. е. «не берутся».

Пример 33.8. Найти интеграл $I = \int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}\,dx$.

○ Решение: Так как

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\,dx,$$

то $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n} = 2$. Поэтому делаем подстановку $\sqrt[4]{x}+1 = t^3$, $x = (t^3-1)^4$, $dx = 4(t^3-1)^3 \cdot 3t^2\,dt$, $t = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}$. Таким образом,

$$I = \int \frac{t}{(t^3-1)^2} \cdot 12t^2(t^3-1)^3\,dt = 12\int (t^6-t^3)\,dt =$$

$$= 12 \cdot \frac{t^7}{7} - 12 \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{12}{7}(\sqrt[4]{x}+1)^{\frac{7}{3}} - 3 \cdot (\sqrt[4]{x}+1)^{\frac{4}{3}} + C. \quad \bullet$$

§ 34. «БЕРУЩИЕСЯ» И «НЕБЕРУЩИЕСЯ» ИНТЕГРАЛЫ

Как уже отмечалось выше, операция интегрирования функций значительно сложнее операции дифференцирования функций. Не всегда выбранный путь интегрирования является наилучшим, более коротким, простым. Интегрирование часто может быть выполнено не единственным способом. Многое зависит от знания рекомендуемых многих искусственных приемов интегрирования, от сообразительности, от тренированности. Например, $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$ можно найти, не используя рекомендуемую подстановку $\operatorname{tg} x = t$, а применив искусственный прием:

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)^2}{\cos^6 x}\, dx =$$
$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x} \right) dx = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C.$$

Вряд ли стоит вычислять интеграл

$$\int \frac{3x^2 + 4x + 1}{x(x^2 + 2x + 1)}\, dx,$$

разлагая подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{3x^2 + 4x + 1}{x(x^2 + 2x + 1)} = \frac{3x^2 + 4x + 1}{x(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}.$$

Заметив, что числитель $3x^2 + 4x + 1$ является производной знаменателя $x(x^2 + 2x + 1) = x^3 + 2x^2 + x$, легко получить:

$$\int \frac{3x^2 + 4x + 1}{x(x^2 + 2x + 1)}\, dx = \int \frac{d(x^3 + 2x^2 + x)}{x^3 + 2x^2 + x} = \ln|x^3 + 2x^2 + x| + C.$$

На практике при вычислении неопределенных интегралов используют различные справочники, содержащие таблицы особенно часто встречающихся интегралов. В частности, «Таблицы неопределенных интегралов» М. Л. Смолянского.

Изученные методы интегрирования позволяют во многих случаях вычислить неопределенный интеграл, т. е. найти первообразную функцию для подынтегральной функции.

Как известно, *всякая непрерывная функция имеет первообразную.* В том случае, когда первообразная некоторой элементарной функции $f(x)$ является также элементарной функцией, говорят, что $\int f(x)\, dx$ *«берется»*, т. е. интеграл выражается через элементарные функции (или интеграл вычисляется). Если же интеграл не выражается через элементарные функции, то говорят, что интеграл *«не берется»* (или «его найти нельзя»).

Так, например, нельзя взять интеграл $\int \sqrt{x} \cdot \cos x\, dx$, так как не существует элементарной функции, производная от которой была бы равна $\sqrt{x}\cos x$. Приведем еще примеры «неберущихся» интегралов, которые имеют большое значение в приложениях:

$\int e^{-x^2}\, dx$ — интеграл Пуассона (теория вероятностей),

$\int \frac{dx}{\ln x}$ — интегральный логарифм (теория чисел),

$\int \cos x^2\,dx$, $\int \sin x^2\,dx$ — интегралы Френеля (физика),

$\int \frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ — интегральные синус и косинус,

$\int \frac{e^x}{x}\,dx$ — интегральная показательная функция.

Первообразные от функции e^{-x^2}, $\cos x^2$, $\frac{1}{\ln x}$ и других хорошо изучены, для них составлены подробные таблицы значений для различных значений аргумента x.

Глава VIII. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Лекции 29–33

§ 35. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ КАК ПРЕДЕЛ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММЫ

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, $a < b$. Выполним следующие действия.

1. С помощью точек $x_0 = a$, x_1, $x_2, \ldots, x_n = b$ $(x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$ разобьем отрезок $[a, b]$ на n *частичных отрезков* $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2], \ldots$ $\ldots, [x_{n-1}, x_n]$ (см. рис. 166).

Рис. 166

2. В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и вычислим значение функции в ней, т. е. величину $f(c_i)$.

3. Умножим найденное значение функции $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка: $f(c_i) \cdot \Delta x_i$.

4. Составим сумму S_n всех таких произведений:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i. \qquad (35.1)$$

Сумма вида (35.1) называется ***интегральной суммой*** функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка: $\lambda = \max \Delta x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

5. Найдем предел интегральной суммы (35.1), когда $n \to \infty$ так, что $\lambda \to 0$.

Если при этом интегральная сумма S_n имеет предел I, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то число I называется ***определенным интегралом*** от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Таким образом,

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.} \qquad (35.2)$$

Числа a и b называются соответственно ***нижним*** и ***верхним пределами интегрирования***, $f(x)$ — ***подынтегральной функцией***, $f(x)\,dx$ — ***подынтегральным выражением***, x — ***переменной интегрирования***, отрезок $[a;b]$ — ***областью*** (***отрезком***) *интегрирования.*

Функция $y = f(x)$, для которой на отрезке $[a;b]$ существует определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, называется ***интегрируемой*** на этом отрезке.

Сформулируем теперь теорему существования определенного интеграла.

Теорема 35.1 (Коши). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует

Отметим, что непрерывность функции является достаточным условием ее интегрируемости. Однако определенный интеграл может существовать и для некоторых разрывных функций, в частности для всякой ограниченной на отрезке функции, имеющей на нем конечное число точек разрыва.

Укажем некоторые свойства определенного интеграла, непосредственно вытекающие из его определения (35.2).

1. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b f(z)\,dz.$$

Это следует из того, что интегральная сумма (35.1), а следовательно, и ее предел (35.2) не зависят от того, какой буквой обозначается аргумент данной функции.

2. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$$

3. Для любого действительного числа c: $\int\limits_a^b c\,dx = c \cdot (b-a)$.

§ 36. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Площадь криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geqslant 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу — осью Ox, сбоку — прямыми $x = a$ и $x = b$, называется ***криволинейной трапецией.*** Найдем площадь этой трапеции.

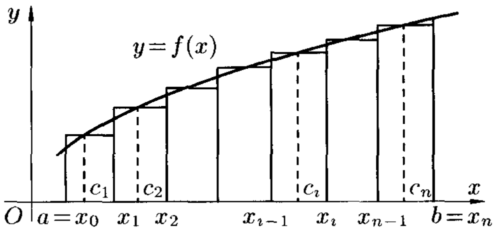


Рис 167

Для этого отрезок $[a;b]$ точками $a = x_0, x_1, \ldots, b = x_n$ $(x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$ разобьем на n частичных отрезков $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2], \ldots, [x_{n-1};x_n]$. (см рис. 167). В каждом частичном отрезке $[x_{i-1};x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ возьмем произвольную точку c_i и вычислим значение функции в ней, т. е. $f(c_i)$.

Умножим значением функции $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка. Произведение $f(c_i) \cdot \Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$. Сумма всех таких произведений

$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = S_n$$

равна площади ступенчатой фигуры и приближенно равна площади S криволинейной трапеции:

$$S \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i.$$

С уменьшением всех величин Δx_i точность приближения криволинейной трапеции ступенчатой фигурой и точность полученной формулы увеличиваются. Поэтому за точное значение площади S криволинейной трапеции принимается предел S, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры S_n, когда n неограниченно возрастает так, что $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \quad \text{то есть} \quad S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Итак, *определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.*

В этом состоит геометрический смысл определенного интеграла.

Работа переменной силы

Пусть материальная точка M перемещается под действием силы $\bar{F}$, направленной вдоль оси Ox и имеющей переменную величину $F = F(x)$, где x — абсцисса движущейся точки M.

Найдем работу A силы $\bar{F}$ по перемещению точки M вдоль оси Ox из точки $x = a$ в точку $x = b$ ($a < b$). Для этого отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0, x_1, \ldots, b = x_n$ ($x_0 < x_1 < \ldots < x_n$) разобьем на n частичных отрезков $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \ldots, [x_{n-1}; x_n]$. Сила, действующая на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, меняется от точки к точке. Но если длина отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ достаточно мала, то сила $\bar{F}$ на этом отрезке изменяется незначительно. Ее можно приближенно считать постоянной и равной значению функции $F = F(x)$ в произвольно выбранной точке $x = c_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Поэтому работа, совершенная этой силой на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, равна произведению $F(c_i) \cdot \Delta x_i$. (Как работа постоянной силы $F(c_i)$ на участке $[x_{i-1}; x_i]$.)

Приближенное значение работы A силы $\bar{F}$ на всем отрезке $[a; b]$ есть

$$A \approx F(c_1)\Delta x_1 + F(c_2)\Delta x_2 + \ldots + F(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i. \qquad (36.1)$$

Это приближенное равенство тем точнее, чем меньше длина Δx_i. Поэтому за точное значение работы A принимается предел суммы (36.1) при условии, что наибольшая длина λ частичных отрезков стремится к нулю:

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Итак, *работа переменной силы $\bar{F}$, величина которой есть непрерывная функция $F = F(x)$, действующей на отрезке $[a; b]$, равна определенному интегралу от величины $F(x)$ силы, взятому по отрезку $[a; b]$.*

В этом состоит физический смысл определенного интеграла.

Аналогично можно показать, что путь S, пройденный точкой за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, равен определенному интегралу от скорости $v(t)$:

$$S = \int_a^b v(t)\,dt;$$

масса m неоднородного стержня на отрезке $[a; b]$ равна определенному интегралу от плотности $\gamma(x)$: $m = \int\limits_a^b \gamma(x)\,dx$.

§ 37. ФОРМУЛА НЬЮТОНА–ЛЕЙБНИЦА

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$.

Теорема 37.1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ — какая-либо ее первообразная на $[a; b]$ ($F'(x) = f(x)$), то имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{37.1}$$

❑ Разобьем отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0, x_1, \ldots, b = x_n$ ($x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n$) на n частичных отрезков $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \ldots, [x_{n-1}; x_n]$, как это показано на рис. 168.

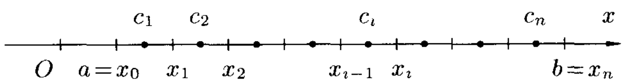


Рис. 168

Рассмотрим тождество

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \big(F(x_n) - F(x_{n-1})\big) +$$
$$+ \big(F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})\big) + \cdots + \big(F(x_2) - F(x_1)\big) + \big(F(x_1) - F(x_0)\big).$$

Преобразуем каждую разность в скобках по формуле Лагранжа

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Получим

$$F(b) - F(a) = F'(c_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) + F'(c_{n-1}) \cdot (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots$$
$$\cdots + F'(c_2) \cdot (x_2 - x_1) + F'(c_1)(x_1 - x_0) = \sum_{i=1}^{n} F'(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

т. е.

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \tag{37.2}$$

где c_i есть некоторая точка интервала $(x_{i-1}; x_i)$. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она интегрируема на $[a; b]$. Поэтому существует предел интегральной суммы, равный определенному интегралу от $f(x)$ на $[a; b]$.

Переходя в равенстве (37.2) к пределу при $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$, получаем

$$F(b) - F(a) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

т. е.

$$\boxed{F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.} \qquad \blacksquare$$

Равенство (37.1) называется ***формулой Ньютона–Лейбница***.

Если ввести обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b$, то формулу Ньютона–Лейбница (37.1) можно переписать так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b.$$

Формула Ньютона–Лейбница дает удобный способ вычисления определенного интеграла. Чтобы вычислить определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, надо найти ее первообразную функцию $F(x)$ и взять разность $F(b) - F(a)$ значений этой первообразной на концах отрезка $[a; b]$.

Например, $\int\limits_0^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 9 - 0 = 9$,

а $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$.

Пример 37.1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx$.

❍ Решение:

$$\int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx = \int_0^\pi \sqrt{\cos^2 x}\,dx = \int_0^\pi |\cos x|\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 + 1 = 2. \qquad \bullet$$

Пример 37.2. Вычислить интеграл $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

❍ Решение: $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_e^{e^2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$ $\bullet$

§ 38. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим основные свойства определенного интеграла, считая подынтегральную функцию интегрируемой на отрезке $[a;b]$. При выводе свойств будем использовать определение интеграла и формулу Ньютона–Лейбница

1. *Если c — постоянное число и функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то*

$$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx, \tag{38.1}$$

т. е. постоянный множитель c можно выносить за знак определенного интеграла.

❑ Составим интегральную сумму для функции $c\cdot f(x)$. Имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} c\cdot f(c_i)\Delta x_i = c\cdot\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} c\cdot f(x)\Delta x_i = c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i) = c\cdot\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Отсюда вытекает, что функция $c\cdot f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и справедлива формула (38.1). ■

2. *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, тогда интегрируема на $[a;b]$ их сумма и*

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx, \tag{38.2}$$

т. е. интеграл от суммы равен сумме интегралов.

❑
$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(f_1(c_i)+f_2(c_i))\Delta x_i =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f_1(c_i)\Delta x_i + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f_2(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx. \quad ■$$

Свойство 2 распространяется на сумму любого конечного числа слагаемых.

3. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$

Это свойство можно принять по определению. Это свойство также подтверждается формулой Ньютона–Лейбница.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

4. *Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$ и $a < c < b$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{38.3}$$

т. е. интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по частям этого отрезка. Это свойство называют ***аддитивностью*** определенного интеграла (или свойством аддитивности).

❑ При разбиении отрезка $[a; b]$ на части включим точку c в число точек деления (это можно сделать ввиду независимости предела интегральной суммы от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на части). Если $c = x_m$, то интегральную сумму можно разбить на две суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(c_i)\Delta x_i + \sum_{i=m}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Каждая из написанных сумм является интегральной соответственно для отрезков $[a; b]$, $[a; c]$ и $[c; b]$. Переходя к пределу в последнем равенстве при $n \to \infty$ $(\lambda \to 0)$, получим равенство (38.3). ■

Свойство 4 справедливо при любом расположении точек a, b, c (считаем, что функция $f(x)$ интегрируема на большем из получающихся отрезков).

Так, например, если $a < b < c$, то

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Отсюда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(использованы свойства 4 и 3).

5. «Теорема о среднем». *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует точка $c \in [a; b]$ такая, что*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b - a).}$$

❑ По формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$. Применяя к разности $F(b) - F(a)$ теорему Лагранжа (теорему о конечном приращении функции), получим

$$F(b) - F(a) = F'(c)\cdot(b-a) = f(c)\cdot(b-a). \qquad \blacksquare$$

Свойство 5 («теорема о среднем») при $f(x) \geqslant 0$ имеет простой геометрический смысл: значение определенного интеграла равно, при некотором $c \in (a;b)$, площади прямоугольника с высотой $f(c)$ и основанием $b-a$ (см. рис. 169). Число

$$\boxed{f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx}$$

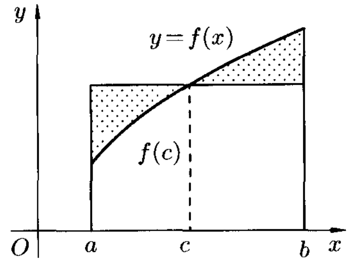


Рис. 169

называется ***средним значением*** функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

6. *Если функция $f(x)$ сохраняет знак на отрезке $[a;b]$, где $a < b$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ имеет тот же знак, что и функция.* Так, если $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

❑ По «теореме о среднем» (свойство 5)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a),$$

где $c \in [a;b]$. А так как $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [a;b]$, то и

$$f(c) \geqslant 0, \quad b - a > 0.$$

Поэтому $f(c)\cdot(b-a) \geqslant 0$, т. е. $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$. $\blacksquare$

7. *Неравенство между непрерывными функциями на отрезке $[a;b]$, $(a < b)$ можно интегрировать.* Так, если $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ при $x \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f_1(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f_2(x)\,dx$.

❑ Так как $f_2(x) - f_1(x) \geqslant 0$, то при $a < b$, согласно свойству 6, имеем

$$\int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx \geqslant 0.$$

Или, согласно свойству 2,

$$\int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx \geqslant 0, \quad \text{т. е.} \quad \int_a^b f_1(x)\,dx \leqslant \int_a^b f_2(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Отметим, что дифференцировать неравенства нельзя.

8. Оценка интеграла. *Если m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, $(a < b)$, то*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{38.4}$$

❑ Так как для любого $x \in [a; b]$ имеем $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то, согласно свойству 7, имеем

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx.$$

Применяя к крайним интегралам свойство 5, получаем

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \quad \blacksquare$$

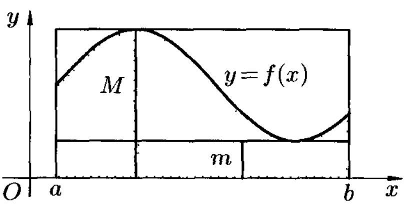


Рис. 170

Если $f(x) \geqslant 0$, то свойство 8 иллюстрируется геометрически: площадь криволинейной трапеции заключена между площадями прямоугольников, основание которых есть $[a; b]$, а высоты равны m и M (см. рис. 170).

9. *Модуль определенного интеграла не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции:*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx; \quad a < b.$$

❑ Применяя свойство 7 к очевидным неравенствам $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, получаем

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Отсюда следует, что

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \quad \blacksquare$$

10. *Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена этим пределом,* т. е.

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x).$$

❑ По формуле Ньютона–Лейбница имеем:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(t)\Big|_a^x = F(x) - F(a).$$

Следовательно,

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = (F(x) - F(a))'_x = F'(x) - 0 = f(x). \qquad \blacksquare$$

Это означает, что *определенный интеграл с переменным верхним пределом есть одна из первообразных подынтегральной функции.*

§ 39. ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

39.1. Формула Ньютона–Лейбница

Простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ от непрерывной функции является формула Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Применяется этот метод во всех случаях, когда может быть найдена первообразная функции $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$.

Например, $\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = 2.$

При вычислении определенных интегралов широко используется метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

39.2. Интегрирование подстановкой (заменой переменной)

Пусть для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi(t)$.

Теорема 39.1. Если·

1) функция $x = \varphi(t)$ и ее производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [\alpha; \beta]$,

2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$ является отрезок $[a; b]$,

3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$,

то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt. \tag{39.1}$$

❑ Пусть $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда по формуле Ньютона–Лейбница $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ Так как $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, то $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Поэтому по формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$$
$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \quad ■$$

Формула (39.1) называется *формулой замены переменной в определенном интеграле.*

Отметим, что:

1) при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется;

2) часто вместо подстановки $x = \varphi(t)$ применяют подстановку $t = g(x)$;

3) не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных!

Пример 39.1. Вычислить $\int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}\,dx$.

○ Решение: Положим $x = 2\sin t$, тогда $dx = 2\cos t\,dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = 2$, то $t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} 4\sin^2 t\sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t\,dt =$$

$$= 16 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t \, dt = 16 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \sin^2 2t \, dt = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 4t) \, dt =$$

$$= 2\Big(t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4} \sin 4t\Big|_0^{\pi/2}\Big) = 2\Big(\frac{\pi}{2} - 0\Big) = \pi. \quad \bullet$$

39.3. Интегрирование по частям

Теорема 39.2. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то имеет место формула

$$\int_a^b u \, dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v \, du. \qquad (39.2)$$

❑ На отрезке $[a, b]$ имеет место равенство $(uv)' = u'v + uv'$. Следовательно, функция uv есть первообразная для непрерывной функции $u'v + uv'$. Тогда по формуле Ньютона–Лейбница имеем:

$$\int_a^b (u'v + uv') \, dx = uv\Big|_a^b.$$

Следовательно,

$$\int_a^b v \cdot u' \, dx + \int_a^b uv' \, dx = uv\Big|_a^b \implies$$

$$\implies \int_a^b v \, du + \int_a^b u \, dv = uv\Big|_a^b \implies \int_a^b u \, dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v \, du. \quad \blacksquare$$

Формула (39.2) называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.*

Пример 39.2. Вычислить $\int_1^e x \ln x \, dx$.

○ Решение: Положим

$$\begin{bmatrix} u = \ln x & \implies & du = \frac{1}{x} \, dx \\ dv = x \, dx & \implies & v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix}.$$

Применяя формулу (39.2), получаем

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$
$$= \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2+1). \quad \bullet$$

Пример 39.3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^\pi x\sin x\,dx$.

○ Решение: Интегрируем по частям. Положим

$$\left[\begin{array}{lll} u = x & \Longrightarrow & du = dx \\ dv = \sin x\,dx & \Longrightarrow & v = -\cos x \end{array}\right].$$

Поэтому

$$J = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = -\pi\cdot(-1) + 0 + \sin x\Big|_0^\pi = \pi. \quad \bullet$$

39.4. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a;a]$, симметричном относительно точки $x=0$. Докажем, что

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\cdot\int\limits_0^a f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция.} \end{cases} \tag{39.3}$$

□ Разобьем отрезок интегрирования $[-a;a]$ на части $[-a;0]$ и $[0;a]$. Тогда по свойству аддитивности

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx. \tag{39.4}$$

В первом интеграле сделаем подстановку $x=-t$. Тогда

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-t)\,dt = \int_0^a f(-t)\,dt = \int_0^a f(-x)\,dx$$

(согласно свойству: «определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования»). Возвращаясь к равенству (39.4), получим

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a (f(-x)+f(x))\,dx. \tag{39.5}$$

Если функция $f(x)$ четная $(f(-x) = f(x))$, то $f(-x) + f(x) = 2f(x)$; если функция $f(x)$ нечетная $(f(-x) = -f(x))$, то $f(-x) + f(x) = 0$.

Следовательно, равенство (39.5) принимает вид (39.3). ■

Благодаря доказанной формуле можно, например, сразу, не производя вычислений, сказать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin^3 x \, dx = 0, \qquad \int_{-3}^{3} e^{-x^2} \cdot \sin x \, dx = 0.$$

§ 40. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, где промежуток интегрирования $[a;b]$ конечный, а подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, называют еще *собственным интегралом.*

Рассмотрим так называемые ***несобственные интегралы***, т. е. определенный интеграл от непрерывной функции, но с бесконечным промежутком интегрирования или определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования, но от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв.

40.1. Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования (несобственный интеграл I рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, то его называют *несобственным интегралом первого рода* и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx.}$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится.* Если же указанный предел не существует или он бесконечен, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится.*

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty; b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

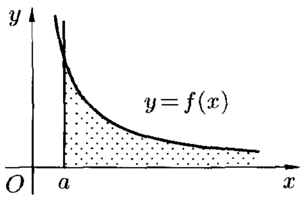


Рис. 171

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где c — произвольное число. В этом случае интеграл слева сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла справа. Отметим, что если непрерывная функция $f(x) \geqslant 0$ на промежутке $[a; +\infty)$ и интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то он выражает площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции (см. рис. 171).

Пример 40.1. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: 1) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int_{-\infty}^{0} \cos x\,dx$; 3) $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x}$.

○ Решение: 1) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} x^{-2}\,dx = -\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{x}\Big|_{1}^{b} = -(0-1) = 1,$ интеграл сходится;

$$2)\ \int_{-\infty}^{0} \cos x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \cos x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \sin x\Big|_{a}^{0} = 0 - \lim_{a\to-\infty} \sin a,$$

интеграл расходится, так как при $a \to -\infty$ предел $\lim\limits_{a\to-\infty} \sin a$ не существует.

$$3)\ \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty, \text{ интеграл расходится.}$$ ●

В некоторых задачах нет необходимости вычислять интеграл; достаточно лишь знать, сходится ли он или нет.

Приведем без доказательства некоторые признаки сходимости.

Теорема 40.1 (признак сравнения). Если на промежутке $[a; +\infty)$ непрерывные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $0 \leqslant f(x) \leqslant \leqslant \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$.

Пример 40.2. Сходится ли интеграл $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^2(1+3^x)}$?

Решение: При $x \geqslant 1$ имеем $\dfrac{1}{x^2(1+3^x)} < \dfrac{1}{x^2}$. Но интеграл $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^2} = 1$ сходится. Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^2(1+3^x)}$ также сходится (и его значение меньше 1). ●

Теорема 40.2. Если существует предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0 < k < \infty$ ($f(x) > 0$ и $\varphi(x) > 0$), то интегралы $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{\infty} \varphi(x)\,dx$ одновременно оба сходятся или оба расходятся (т. е. ведут себя одинаково в смысле сходимости).

Пример 40.3. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \ln \dfrac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$.

Решение: Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \ln \dfrac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$ сходится, так как интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ сходится и

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x^2+1})}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = 1.$$ ●

40.2. Интеграл от разрывной функции (несобственный интеграл II рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x = b$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, то его называют *несобственным интегралом второго рода* и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению,

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.}$$

Если предел в правой части существует, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится*. Если же указанный предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *расходится*.

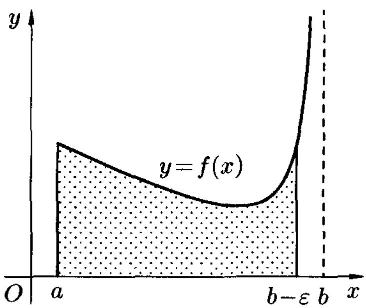


Рис. 172

Аналогично, если функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$, то полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ терпит разрыв во внутренней точке c отрезка $[a; b]$, то несобственный интеграл второго рода определяется формулой

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

В этом случае интеграл слева называют сходящимся, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

В случае, когда $f(x) > 0$, несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (разрыв в точке $x = b$) можно истолковать геометрически как площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции (см. рис. 172).

Пример 40.4. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

Решение: При $x = 0$ функция $y = \frac{1}{x^2}$ терпит бесконечный разрыв;

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-2}\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{x}\Big|_{0+\varepsilon}^1 = -\left(1 - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty,$$

интеграл расходится. ●

Сформулируем признаки сходимости для несобственных интегралов второго рода.

Теорема 40.3. Пусть на промежутке $[a; b)$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, при $x = b$ терпят бесконечный разрыв и удовлетворяют условию $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$. Из сходимости интеграла $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ вытекает сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ вытекает расходимость интеграла $\int_a^b \varphi(x)\,dx$.

Теорема 40.4. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на промежутке $[a; b)$ и в точке $x = b$ терпят разрыв. Если существует предел $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0 < k < \infty$, то интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Пример 40.5. Сходится ли интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$?

Решение: Функция $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ имеет на $[0; 1]$ единственный разрыв в точке $x = 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln x\Big|_\varepsilon^1 = 0 - \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon$$

расходится. И так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1,$$

то интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ также расходится. ●

§ 41. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

41.1. Схемы применения определенного интеграла

Пусть требуется найти значение какой-либо геометрической или физической величины A (площадь фигуры, объем тела, давление жидкости на вертикальную пластину и т. д.), связанной с отрезком $[a; b]$ изменения независимой переменной x. Предполагается, что эта величина A аддитивна, т. е. такая, что при разбиении отрезка $[a; b]$ точкой $c \in (a; b)$ на части $[a; c]$ и $[c; b]$ значение величины A, соответствующее всему отрезку $[a; b]$, равно сумме ее значений, соответствующих $[a; c]$ и $[c; b]$.

Для нахождения этой величины A можно руководствоваться одной из двух схем: I схема (или метод *интегральных сумм*) и II схема (или *метод дифференциала*).

Первая схема базируется на определении определенного интеграла.

1. Точками $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$ разбить отрезок $[a; b]$ на n частей. В соответствии с этим, интересующая нас величина A разобьется на n «элементарных слагаемых» ΔA_i ($i = 1, \ldots, n$): $A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \ldots$ $\ldots + \Delta A_n$.

2. Представить каждое «элементарное слагаемое» в виде произведения некоторой функции (определяемой из условия задачи), вычисленной в произвольной точке соответствующего отрезка на его длину: $\Delta A_i \approx f(c_i)\Delta x_i$.

При нахождении приближенного значения ΔA_i допустимы некоторые упрощения: дугу на малом участке можно заменить хордой, стягивающей ее концы; переменную скорость на малом участке можно приближенно считать постоянной и т. д.

Получим приближенное значение величины A в виде интегральной суммы:

$$A \approx f(c_1)\Delta x_1 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

3. Искомая величина A равна пределу интегральной суммы, т. е.

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Указанный «метод сумм», как видим, основан на представлении *интеграла как о сумме бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых.*

Схема I была применена для выяснения геометрического и физического смысла определенного интеграла.

Вторая схема представляет собой несколько видоизмененную схему I и называется «метод дифференциала» или «метод отбрасывания бесконечно малых высших порядков»:

1) на отрезке $[a; b]$ выбираем произвольное значение x и рассматриваем переменный отрезок $[a; x]$. На этом отрезке величина A становится функцией x: $A = A(x)$, т. е. считаем, что часть искомой величины A есть неизвестная функция $A(x)$, где $x \in [a; b]$ — один из параметров величины A;

2) находим главную часть приращения ΔA при изменении x на малую величину $\Delta x = dx$, т. е. находим дифференциал dA функции $A = A(x)$: $dA = f(x)\,dx$, где $f(x)$, определяемая из условия задачи, функция переменной x (здесь также возможны различные упрощения);

3) считая, что $dA \approx \Delta A$ при $\Delta x \to 0$, находим искомую величину путем интегрирования dA в пределах от a до b:

$$A(b) = A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

41.2. Вычисление площадей плоских фигур

Прямоугольные координаты

Как уже было установлено (см. «геометрический смысл определенного интеграла»), площадь криволинейной трапеции, расположенной «выше» оси абсцисс ($f(x) \geqslant 0$), равна соответствующему определенному интегралу:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{или} \quad S = \int_a^b y\,dx. \qquad (41.1)$$

Формула (41.1) получена путем применения схемы I — метода сумм. Обоснуем формулу (41.1), используя схему II.

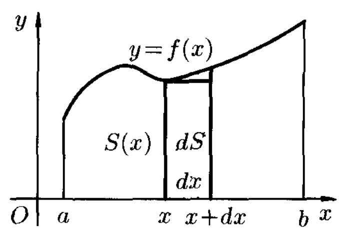


Рис. 173

Пусть криволинейная трапеция ограничена линиями $y = f(x) \geqslant 0$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (см. рис. 173). Для нахождения площади S этой трапеции проделаем следующие операции:

1. Возьмем произвольное $x \in [a; b]$ и будем считать, что $S = S(x)$.

2. Дадим аргументу x приращение $\Delta x = dx$ ($x + \Delta x \in [a; b]$). Функция $S = S(x)$ получит приращение ΔS, представляющее собой площадь «элементарной криволинейной трапеции» (на рисунке она выделена).

Дифференциал площади dS есть главная часть приращения ΔS при $\Delta x \to 0$, и, очевидно, он равен площади прямоугольника с основанием dx и высотой y: $dS = y \cdot dx$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, получаем $S = \int\limits_a^b y\,dx$.

Отметим, что если криволинейная трапеция расположена «ниже» оси Ox ($f(x) < 0$), то ее площадь может быть найдена по формуле

$$S = -\int\limits_a^b y\,dx. \tag{41.2}$$

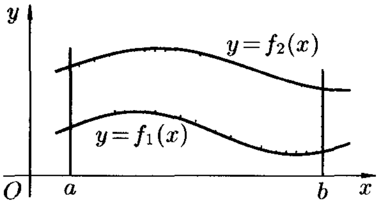


Рис 174

Формулы (41.1) и (41.2) можно объединить в одну:

$$S = \left|\int\limits_a^b y\,dx\right|.$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ (при условии $f_2(x) \geqslant f_1(x)$) (см. рис. 174), можно найти по формуле

$$S = \int\limits_a^b f_2(x)\,dx - \int\limits_a^b f_1(x)\,dx = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$

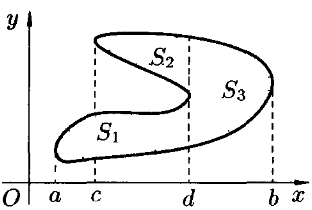


Рис 175

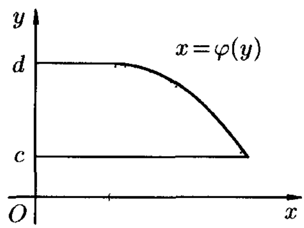


Рис 176

Если плоская фигура имеет «сложную» форму (см. рис. 175), то прямыми, параллельными оси Oy, ее следует разбить на части так, чтобы можно было бы применить уже известные формулы.

Если криволинейная трапеция ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$, осью Oy и непрерывной кривой $x = \varphi(y) \geqslant 0$ (см. рис. 176), то ее площадь находится по формуле $S = \int\limits_c^d x\,dy$.

И, наконец, если криволинейная трапеция ограничена *кривой, заданной параметрически*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta],$$

прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox, то площадь ее находится по формуле

$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)\, dt \right|,$$

где α и β определяются из равенств $x(\alpha) = a$ и $x(\beta) = b$.

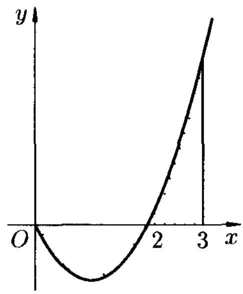


Рис 177

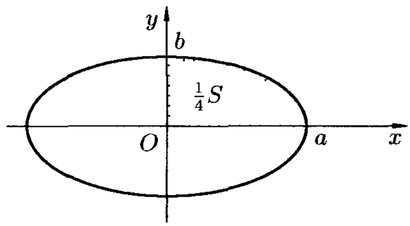


Рис 178

Пример 41.1. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и графиком функции $y = x^2 - 2x$ при $x \in [0; 3]$.

○ Решение: Фигура имеет вид, изображенный на рисунке 177. Находим ее площадь S:

$$S = -\int_0^2 (x^2 - 2x)\, dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)\, dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + x^2\Big|_0^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 - x^2\Big|_2^3 = -\frac{8}{3} + 4 + \frac{27}{3} - \frac{8}{3} - 9 + 4 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}. \quad ●$$

Пример 41.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

○ Решение: Найдем сначала $\frac{1}{4}$ площади S. Здесь x изменяется от 0 до a, следовательно, t изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0 (см. рис. 178). Находим:

$$\frac{1}{4}S = \int_{\pi/2}^{0} b\sin t \cdot (-a\sin t)\, dt = -ab \int_{\pi/2}^{0} \sin^2 t\, dt =$$

$$= \frac{ab}{2} \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t)\,dt = \frac{ab}{2}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi ab}{4}.$$

Таким образом, $\frac{1}{4}S = \frac{\pi ab}{4}$. Значит, $S = \pi ab$. ●

Полярные координаты

Найдем площадь S *криволинейного сектора*, т. е. плоской фигуры, ограниченной непрерывной линией $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, где r и φ — полярные координаты (см. рис. 179). Для решения задачи используем схему II — *метод дифференциала.*

1. Будем считать часть искомой площади S как функцию угла φ, т е. $S = S(\varphi)$, где $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ (если $\varphi = \alpha$, то $S(\alpha) = 0$, если$\varphi = \beta$, то $S(\beta) = S$)

2 Если текущий полярный угол φ получит приращение $\Delta\varphi = d\varphi$, то приращение площади ΔS равно площади «элементарного криволинейного сектора» OAB.

Дифференциал dS представляет собой главную часть приращения ΔS при $d\varphi \to 0$ и равен площади кругового сектора OAC (на рисунке она заштрихована) радиуса r с центральным углом $d\varphi$. Поэтому $dS = \frac{1}{2}r^2 \cdot d\varphi$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $\varphi = \alpha$ до $\varphi = \beta$, получим искомую площадь

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi.}$$

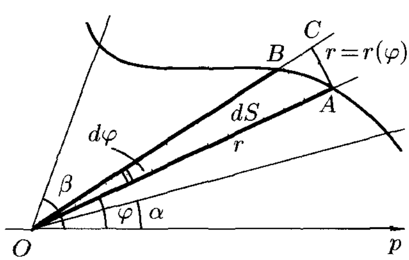


Рис. 179

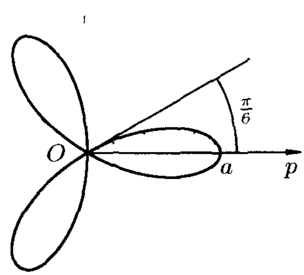


Рис 180

Пример 41.3. Найти площадь фигуры, ограниченной «трехлепестковой розой» $r = a\cos 3\varphi$ (см. рис. 180).

○ Решение: Найдем сначала площадь половины одного лепестка «розы», т. е. $\frac{1}{6}$ часть всей площади фигуры:

$$\frac{1}{6}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}(a\cos 3\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi/6}\frac{1}{2}(1+\cos 6\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\varphi\Big|_0^{\pi/6} + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big|_0^{\pi/6}\right) = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6}+0\right) = \frac{\pi a^2}{24},$$

т. е. $\frac{1}{6}S = \frac{\pi a^2}{24}$ Следовательно, $S = \frac{\pi a^2}{4}$ ●

Если плоская фигура имеет «сложную» форму, то лучами, выходящими из полюса, ее следует разбить на криволинейные секторы, к которым применить полученную формулу для нахождения площади. Так, для фигуры, изображенной на рисунке 181, имеем.

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\gamma r_3^2\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r_1^2\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_\beta^\gamma r_2^2\,d\varphi.$$

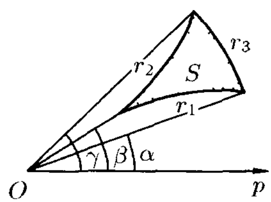


Рис 181

41.3. Вычисление длины дуги плоской кривой

Прямоугольные координаты

Пусть в прямоугольных координатах дана плоская кривая AB, уравнение которой $y = f(x)$, где $a \leqslant x \leqslant b$.

Под ***длиной дуги*** AB понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает, а длина наибольшего звена ее стремится к нулю.

Покажем, что если функция $y = f(x)$ и ее производная $y' = f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, то кривая AB имеет длину, равную

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.} \qquad (41.3)$$

Применим схему I (метод сумм).

1. Точками $x_0 = a$, x_1, .., $x_n = b$ ($x_0 < x_1 < \ldots < x_n$) разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей (см. рис. 182). Пусть этим точкам соответствуют точки $M_0 = A$, $M_1, \ldots, M_n = B$ на кривой AB. Проведем хорды M_0M_1, $M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n$, длины которых обозначим соответственно через ΔL_1, $\Delta L_2, \ldots, \Delta L_n$. Получим ломаную $M_0M_1M_2\ldots M_{n-1}M_n$, длина которой равна $L_n = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \ldots + \Delta L_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\Delta L_i$.

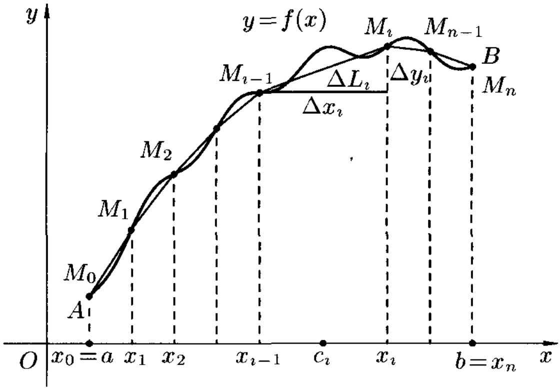


Рис 182

2. Длину хорды (или звена ломаной) ΔL_i можно найти по теореме Пифагора из треугольника с катетами Δx_i и Δy_i:

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2},$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. По теореме Лагранжа о конечном приращении функции $\Delta y_i = f'(c_i) \cdot \Delta x_i$, где $c_i \in (x_{i-1}; x_i)$. Поэтому

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i) \cdot \Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i,$$

а длина всей ломаной $M_0 M_1 \ldots M_n$ равна

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i. \tag{41.4}$$

3. Длина l кривой AB, по определению, равна

$$l = \lim_{\max \Delta L_i \to 0} L_n = \lim_{\max \Delta L_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i.$$

Заметим, что при $\Delta L_i \to 0$ также и $\Delta x_i \to 0$ ($\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$ и, следовательно, $|\Delta x_i| < \Delta L_i$). Функция $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, так как, по условию, непрерывна функция $f'(x)$. Следовательно, существует предел интегральной суммы (41.4), когда $\max \Delta x_i \to 0$:

$$l = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Таким образом, $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$, или в сокращенной записи $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$.

Если уравнение кривой AB задано в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные функции с непрерывными производными и $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, то длина l кривой AB находится по формуле

$$\boxed{l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.} \tag{41.5}$$

Формула (41.5) может быть получена из формулы (41.3) подстановкой $x = x(t)$, $dx = x'(t)\,dt$, $f'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Пример 41.4. Найти длину окружности радиуса R.

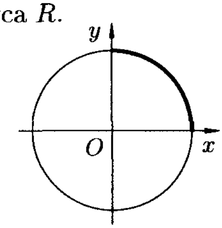


Рис. 183

○ Решение: Найдем $\frac{1}{4}$ часть ее длины от точки $(0; R)$ до точки $(R; 0)$ (см. рис. 183). Так как $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, то

$$\frac{1}{4}l = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = R \cdot \arcsin \frac{x}{R}\Big|_0^R = R \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Значит, $l = 2\pi R$. Если уравнение окружности записать в параметрическом виде $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, то

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\, dt = Rt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R. \qquad \bullet$$

Вычисление длины дуги может быть основано на применении метода дифференциала. Покажем, как можно получить формулу (41.3), применив схему II (метод дифференциала).

1. Возьмем произвольное значение $x \in [a; b]$ и рассмотрим переменный отрезок $[a; x]$. На нем величина l становится функцией от x, т. е. $l = l(x)$ $(l(a) = 0$ и $l(b) = l)$.

2. Находим дифференциал dl функции $l = l(x)$ при изменении x на малую величину $\Delta x = dx$: $dl = l'(x)\,dx$. Найдем $l'(x)$, заменяя бесконечно малую дугу $\overset{\frown}{MN}$ хордой Δl, стягивающей эту дугу (см. рис. 184):

$$l'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + (y'_x)^2}.$$

Стало быть, $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$.

3. Интегрируя dl в пределах от a до b, получаем $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + {y'_x}^2}\, dx$.

Равенство $dl = \sqrt{1 + {y'_x}^2}\, dx$ называется формулой ***дифференциала дуги*** в прямоугольных координатах.

Так как $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$, то

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Последняя формула представляет собой теорему Пифагора для бесконечно малого треугольника MCT (см. рис. 185).

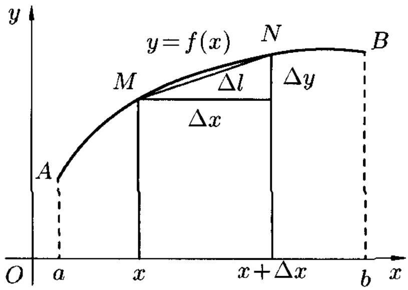


Рис. 184

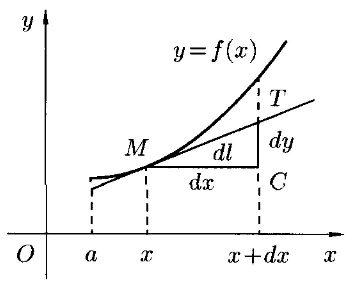


Рис 185

Полярные координаты

Пусть кривая AB задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$. Предположим, что $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$.

Если в равенствах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, связывающих полярные и декартовы координаты, параметром считать угол φ, то кривую AB можно задать параметрически $\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$ Тогда

$$\begin{cases} x'_\varphi = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi, \\ y'_\varphi = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi. \end{cases}$$

Поэтому

$$\sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2} =$$
$$= \sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2} =$$
$$= \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}.$$

Применяя формулу (41.5), получаем

$$\boxed{l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi.}$$

Пример 41.5. Найти длину кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi)$.

○ Решение: Кардиоида $r=a(1+\cos\varphi)$ имеет вид, изображенный на рисунке 186. Она симметрична относительно полярной оси. Найдем половину длины кардиоиды:

$$\frac{1}{2}l=\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{(a(1+\cos\varphi))^2+(a(-\sin\varphi))^2}\,d\varphi=a\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi=$$

$$=a\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=2a\int\limits_{0}^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=4a\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{0}^{\pi}=4a$$

Таким образом, $\frac{1}{2}l=4a$. Значит, $l=8a$ ●

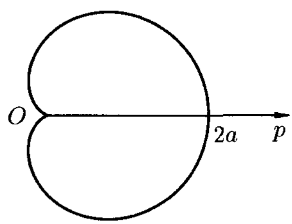


Рис 186

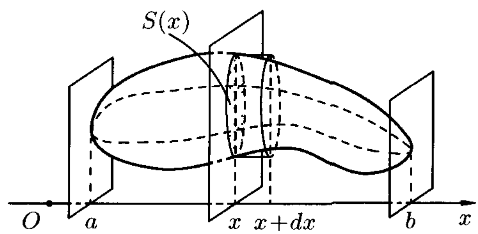


Рис 187

41.4. Вычисление объема тела

Вычисление объема тела по известным площадям параллельных сечений

Пусть требуется найти объем V тела, причем известны площади S сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными некоторой оси, например оси Ox: $S=S(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$.

Применим схему II (метод дифференциала).

1. Через произвольную точку $x\in[a;b]$ проведем плоскость П, перпендикулярную оси Ox (см. рис. 187). Обозначим через $S(x)$ площадь

сечения тела этой плоскостью; $S(x)$ считаем известной и непрерывно изменяющейся при изменении x. Через $v(x)$ обозначим объем части тела, лежащее левее плоскости П. Будем считать, что на отрезке $[a; x]$ величина v есть функция от x, т. е. $v = v(x)$ $(v(a) = 0,\ v(b) = V)$.

2. Находим дифференциал dV функции $v = v(x)$. Он представляет собой «элементарный слой» тела, заключённый между параллельными плоскостями, пересекающими ось Ox в точках x и $x + \Delta x$, который приближенно может быть принят за цилиндр с основанием $S(x)$ и высотой dx. Поэтому дифференциал объема $dV = S(x)\,dx$.

3. Находим искомую величину V путем интегрирования dA в пределах от a до b:

$$\boxed{V = \int\limits_a^b S(x)\,dx.} \tag{41.6}$$

Полученная формула называется ***формулой объема тела по площади параллельных сечений.***

Пример 41.6. Найти объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение: Рассекая эллипсоид плоскостью, параллельной плоскости Oyz и на расстоянии x от нее $(-a \leqslant x \leqslant a)$, получим эллипс (см. рис. 188):

$$\frac{y^2}{(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}})^2} + \frac{z^2}{(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}})^2} = 1.$$

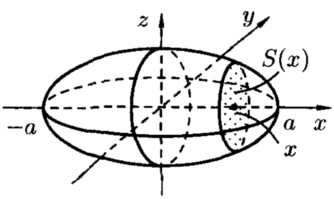


Рис. 188

Площадь этого эллипса равна $S(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Поэтому, по формуле (41.6), имеем

$$V = \pi bc \int\limits_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Объем тела вращения

Пусть вокруг оси Ox вращается криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной линией $y = f(x) \geqslant 0$, отрезком $a \leqslant x \leqslant b$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (см. рис. 189). Полученная от вращения фигура называется *телом вращения*. Сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, проведенной через произвольную точку x оси Ox $(x \in [a; b])$, есть круг с радиусом $y = f(x)$. Следовательно, $S(x) = \pi y^2$.

Применяя формулу (41.6) объема тела по площади параллельных сечений, получаем

$$\boxed{V_x = \pi \int\limits_a^b y^2\,dx.} \tag{41.7}$$

Если криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = \varphi(y) \geqslant 0$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, то объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy, по аналогии с формулой (41.7), равен

$$V_y = \pi \int_c^d x^2\,dy. \tag{41.8}$$

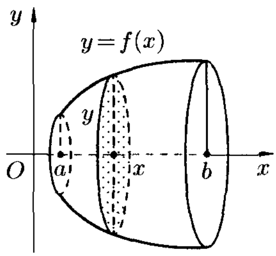


Рис. 189

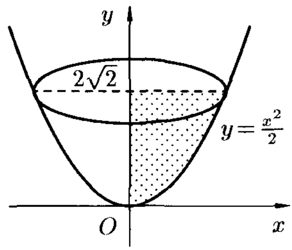


Рис. 190

Пример 41.7. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2}$, $x = 0$, $y = 2\sqrt{2}$ вокруг оси Oy (см. рис. 190).

○ Решение: По формуле (41.8) находим:

$$V_y = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} 2y\,dy = \pi y^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi. \qquad \bullet$$

41.5. Вычисление площади поверхности вращения

Пусть кривая AB является графиком функции $y = f(x) \geqslant 0$, где $x \in [a; b]$, а функция $y = f(x)$ и ее производная $y' = f'(x)$ непрерывны на этом отрезке.

Найдем площадь S поверхности, образованной вращением кривой AB вокруг оси Ox.

Применим схему II (метод дифференциала).

1. Через произвольную точку $x \in [a; b]$ проведем плоскость П, перпендикулярную оси Ox. Плоскость П пересекает поверхность вращения по окружности с радиусом $y = f(x)$ (см. рис. 191). Величина S поверхности части фигуры вращения, лежащей левее плоскости, является функцией от x, т. е. $s = s(x)$ $(s(a) = 0$ и $s(b) = S)$.

2. Дадим аргументу x приращение $\Delta x = dx$. Через точку $x + dx \in \in [a; b]$ также проведем плоскость, перпендикулярную оси Ox. Функция $s = s(x)$ получит приращение Δs, изображенного на рисунке в виде «пояска».

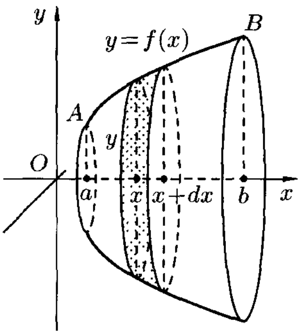


Рис. 191

Найдем дифференциал площади ds, заменяя образованную между сечениями фигуру усеченным конусом, образующая которого равна dl, а радиусы оснований равны y и $y + dy$. Площадь его боковой поверхности равна $ds = \pi(y + y + dy) \cdot dl = 2\pi y\, dl + \pi\, dy\, dl$. Отбрасывая произведение $dy\, dl$ как бесконечно малую высшего порядка, чем ds, получаем $ds = 2\pi y\, dl$, или, так как $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$, то $ds = 2\pi y \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, получаем

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx. \tag{41.9}$$

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то формула (41.9) для площади поверхности вращения принимает вид

$$\boxed{S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.}$$

Пример 41.8. Найти площадь поверхности шара радиуса R.

○ Решение: Можно считать, что поверхность шара образована вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leqslant x \leqslant R$, вокруг оси Ox. По формуле (41.9) находим

$$S = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2 + x^2}\, dx = 2\pi R \cdot x\Big|_{-R}^{R} = 4\pi R^2. \quad \bullet$$

Пример 41.9. Дана циклоида

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Найти площадь поверхности, образованной вращением ее вокруг оси Ox.

❍ Решение: При вращении половины дуги циклоиды вокруг оси Ox площадь поверхности вращения равна

$$\frac{1}{2}S_x = 2\pi \int_0^\pi a(1-\cos t)\cdot\sqrt{(a(1-\cos t))^2+(a\sin t)^2}\,dt =$$

$$= 2\pi \int_0^\pi a^2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^\pi \sin^2\frac{t}{2}\cdot\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 8\pi a^2\int_0^\pi \sin^2\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= -8\pi a^2\cdot 2\int_0^\pi\Big(1-\cos^2\frac{t}{2}\Big)\,d\Big(\cos\frac{t}{2}\Big) = -16\pi a^2\Big(\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi - \frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\Big|_0^\pi\Big) =$$

$$= -16\pi a^2\Big(0-1-0+\frac{1}{3}\Big) = -16\pi a^2\Big(-\frac{2}{3}\Big) = \frac{32\pi a^2}{3},$$

т. е. $\frac{1}{2}S_x = \frac{32}{3}\pi a^2$. Следовательно, $S_x = \frac{64}{3}\pi a^2$. ●

41.6. Механические приложения определенного интеграла

Работа переменной силы

Пусть материальная точка M перемещается вдоль оси Ox под действием переменной силы $F = F(x)$, направленной параллельно этой оси. Работа, произведенная силой при перемещении точки M из положения $x = a$ в положение $x = b$ ($a < b$), находится по формуле

$$A = \int_a^b F(x)\,dx \qquad (41.10)$$

(см. п. 36).

Пример 41.10. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

❍ Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т. е. $F = kx$, где k — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила $F = 100$ Н растягивает пружину на $x = 0{,}01$ м; следовательно, $100 = k\cdot 0{,}01$, откуда $k = 10000$; следовательно, $F = 10000x$.

Искомая работа на основании формулы (41.10) равна

$$A = \int\limits_0^{0,05} 10000x\,dx = 5000x^2\Big|_0^{0,05} = 12{,}5 \text{ (Дж)}. \qquad \bullet$$

Пример 41.11. Найти работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать через край жидкость из вертикального цилиндрического резервуара высоты H м и радиусом основания R м.

○ Решение: Работа, затрачиваемая на поднятие тела весом p на высоту h, равна $p \cdot h$. Но различные слои жидкости в резервуаре находятся на различных глубинах и высота поднятия (до края резервуара) различных слоев не одинакова.

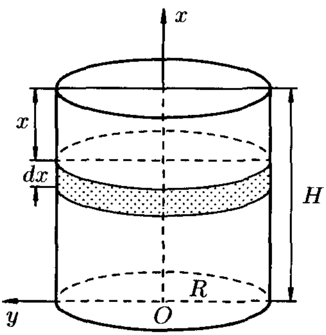


Рис. 192

Для решения поставленной задачи применим схему II (метод дифференциала). Введем систему координат так, как указано на рисунке 192.

1. Работа, затрачиваемая на выкачивание из резервуара слоя жидкости толщиной x ($0 \leqslant x \leqslant H$), есть функция от x, т. е. $A = A(x)$, где $0 \leqslant x \leqslant H$ ($A(0) = 0$, $A(H) = A_0$).

2. Находим главную часть приращения ΔA при изменении x на величину $\Delta x = dx$, т. е. находим дифференциал dA функции $A(x)$.

Ввиду *малости dx считаем, что «элементарный» слой жидкости находится на одной глубине x* (от края резервуара) (см. рис. 192). Тогда $dA = dp \cdot x$, где dp — вес этого слоя; он равен $g \cdot \gamma\, dv$, где g — ускорение свободного падения, γ — плотность жидкости, dv — объем «элементарного» слоя жидкости (на рисунке он выделен), т. е. $dp = g\gamma\, dv$. Объем указанного слоя жидкости, очевидно, равен $\pi R^2\, dx$, где dx — высота цилиндра (слоя), πR^2 — площадь его основания, т. е. $dv = \pi R^2\, dx$.

Таким образом, $dp = g\gamma \cdot \pi R^2\, dx$ и $dA = g\gamma\pi R^2\, dx \cdot x$.

3) Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = 0$ до $x = H$, находим

$$A_0 = \int\limits_0^H g\gamma\pi R^2 x\,dx = \frac{1}{2} g\gamma\pi R^2 H^2 \quad \text{(Дж)}. \qquad \bullet$$

Путь, пройденный телом

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью $v = v(t)$. Найдем путь S, пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2.

❍ Решение: Из физического смысла производной известно, что при движении точки в одном направлении «скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени», т. е. $v(t) = \frac{dS}{dt}$. Отсюда следует, что $dS = v(t)\,dt$. Интегрируя полученное равенство в пределах от t_1 до t_2, получаем $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$. ●

Отметим, что эту же формулу можно получить, пользуясь схемой I или II применения определенного интеграла.

Пример 41.12. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела $v(t) = 10t + 2$ (м/с).

❍ Решение: Если $v(t) = 10t + 2$ (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения ($t = 0$) до конца 4-й секунды, равен

$$S = \int\limits_0^4 (10t + 2)\,dt = 5t^2\Big|_0^4 + 2t\Big|_0^4 = 80 + 8 = 88 \quad (\text{м}).$$ ●

Давление жидкости на вертикальную пластинку

По закону Паскаля давление жидкости на горизонтальную пластину равно весу столба этой жидкости, имеющего основанием пластинку, а высотой — глубину ее погружения от свободной поверхности жидкости, т. е. $P = g \cdot \gamma \cdot S \cdot h$, где g — ускорение свободного падения, γ — плотность жидкости, S — площадь пластинки, h — глубина ее погружения.

По этой формуле нельзя искать давление жидкости на вертикально погруженную пластинку, так как ее разные точки лежат на разных глубинах.

Пусть в жидкость погружена вертикально пластина, ограниченная линиями $x = a$, $x = b$, $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$; система координат выбрана так, как указано на рисунке 193. Для нахождения давления P жидкости на эту пластину применим схему II (метод дифференциала).

1. Пусть часть искомой величины P есть функция от x: $p = p(x)$, т. е. $p = p(x)$ — давление на часть пластины, соответствующее отрезку $[a; x]$ значений переменной x, где $x \in [a; b]$ ($p(a) = 0$, $p(b) = P$).

2. Дадим аргументу x приращение $\Delta x = dx$. Функция $p(x)$ получит приращение Δp (на рисунке — полоска-слой толщины dx). Найдем дифференциал dp этой функции. Ввиду малости dx будем приближенно считать полоску прямоугольником, *все точки которого находятся на одной глубине x, т. е. пластинка эта — горизонтальная.*

Тогда по закону Паскаля $dp = g \cdot \gamma \underbrace{(y_2 - y_1) \cdot dx}_{S} \cdot \underbrace{x}_{h}$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, получим

$$P = g \cdot \gamma \int_a^b (y_2 - y_1) x \, dx \quad \text{или} \quad P = g\gamma \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \cdot x \, dx.$$

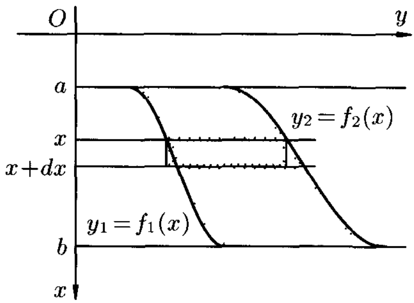


Рис 193

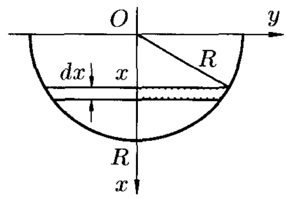


Рис 194

Пример 41.13. Определить величину давления воды на полукруг, вертикально погруженный в жидкость, если его радиус R, а центр O находится на свободной поверхности воды (см. рис. 194).

○ Решение: Воспользуемся полученной формулой для нахождения давления жидкости на вертикальную пластинку. В данном случае пластинка ограничена линиями $y_1 = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $y_2 = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x = 0$, $x = R$. Поэтому

$$P = g\gamma \int_0^R \left(\sqrt{R^2 - x^2} - \left(-\sqrt{R^2 - x^2}\right)\right) x \, dx =$$

$$= 2g\gamma \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} x \, dx = 2g\gamma \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^R (R^2 - x^2)^{1/2} \, d(R^2 - x^2) =$$

$$= -g\gamma \cdot \frac{2\sqrt{(R^2 - x^2)^3}}{3} \Bigg|_0^R = -\frac{2}{3} g\gamma (0 - R^3) = \frac{2}{3} g\gamma R^3. \quad \bullet$$

Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской кривой

Пусть на плоскости Oxy задана система материальных точек $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2), \ldots$, $M_n(x_n; y_n)$ соответственно с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Статическим моментом S_x системы материальных точек относительно оси Ox называется сумма произведений масс этих точек на их ординаты (т. е. на расстояния этих точек от оси Ox): $S_x = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i$.

Аналогично определяется *статический момент* S_y этой системы относительно оси Oy: $S_y = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i$.

Если массы распределены непрерывным образом вдоль некоторой кривой, то для выражения статического момента понадобится интегрирование.

Пусть $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ — это уравнение материальной кривой AB. Будем считать ее однородной с постоянной линейной плотностью γ $(\gamma = \text{const})$.

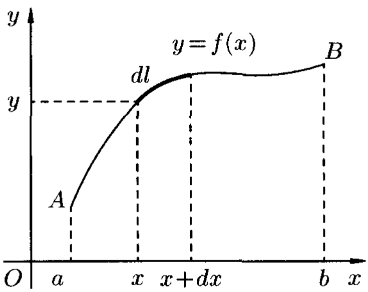


Рис. 195

Для произвольного $x \in [a, b]$ на кривой AB найдется точка с координатами $(x; y)$. Выделим на кривой элементарный участок длины dl, содержащий точку (x, y). Тогда масса этого участка равна $\gamma\, dl$. Примем этот участок dl *приближенно за точку*, отстоящую от оси Ox на расстоянии y. Тогда дифференциал статического момента dS_x («элементарный момент») будет равен $\gamma\, dl \cdot y$, т. е. $dS_x = \gamma\, dl \cdot y$ (см. рис. 195).

Отсюда следует, что статический момент S_x кривой AB относительно оси Ox равен

$$S_x = \gamma \int\limits_a^b y\, dl = \gamma \int\limits_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx.$$

Аналогично находим S_y:

$$S_y = \gamma \int\limits_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx.$$

Статические моменты S_x и S_y кривой позволяют легко установить положение ее центра тяжести (центра масс).

Центром тяжести материальной плоской кривой $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ называется точка плоскости, обладающая следующим свойством: если в этой точке сосредоточить всю массу m заданной кривой, то статический момент этой точки относительно любой координатной оси будет равен статическому моменту всей кривой $y = f(x)$ относительно той же оси. Обозначим через $C(x_c; y_c)$ центр тяжести кривой AB.

Из определения центра тяжести следуют равенства $m \cdot x_c = S_y$ и $m \cdot y_c = S_x$ или $\gamma l \cdot x_c = S_y$ и $\gamma l \cdot y_c = S_x$. Отсюда $x_c = \dfrac{S_y}{\gamma l}$, $y_c = \dfrac{S_x}{\gamma l}$ или

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x\,dl}{l} = \frac{\int\limits_a^b x\cdot\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx}; \quad y_c = \frac{\int\limits_a^b y\,dl}{l} = \frac{\int\limits_a^b y\cdot\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx}.$$

Пример 41.14. Найти центр тяжести однородной дуги окружности $x^2+y^2=R^2$, расположенной в первой координатной четверти (см. рис. 196).

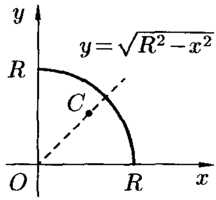


Рис. 196

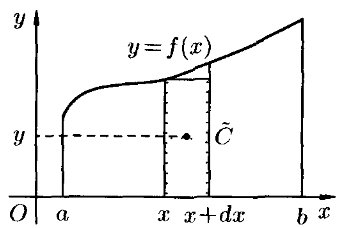


Рис. 197

○ Решение: Очевидно, длина указанной дуги окружности равна $\frac{\pi R}{2}$, т. е. $l=\frac{\pi R}{2}$. Найдем статический момент ее относительно оси Ox. Так как уравнение дуги есть $y=\sqrt{R^2-x^2}$ и $y'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, то ($\gamma = \text{const}$)

$$S_x = \gamma\int\limits_0^R \sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \gamma\int\limits_0^R \sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = \gamma R\int\limits_0^R dx = \gamma Rx\Big|_0^R = \gamma R^2.$$

Стало быть,
$$y_c = \frac{S_x}{\gamma l} = \frac{\gamma R^2}{\gamma\cdot\frac{\pi R}{2}} = \frac{2R}{\pi}.$$

Так как данная дуга симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла, то $x_c = y_c = \frac{2R}{\pi}$. Итак, центр тяжести имеет координаты $\left(\frac{2R}{\pi}; \frac{2R}{\pi}\right)$. ●

Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской фигуры

Пусть дана материальная плоская фигура (пластинка), ограниченная кривой $y=f(x)\geqslant 0$ и прямыми $y=0$, $x=a$, $x=b$ (см. рис. 197).

Будем считать, что поверхностная плотность пластинки постоянна ($\gamma = \text{const}$). Тогда масса всей пластинки равна $\gamma \cdot S$, т. е. $m = \gamma \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Выделим элементарный участок пластинки в виде бесконечно узкой вертикальной полосы и будем приближенно считать его прямоугольником.

Тогда масса его равна $\gamma \cdot y\,dx$. Центр тяжести $\tilde{C}$ прямоугольника лежит на пересечении диагоналей прямоугольника. Эта точка $\tilde{C}$ отстоит от оси Ox на $\frac{1}{2}y$, а от оси Oy на x (приближенно; точнее на расстоянии $x + \frac{1}{2}\Delta x$). Тогда для элементарных статических моментов относительно осей Ox и Oy выполнены соотношения

$$dS_x = \gamma \cdot y\,dx \cdot \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\gamma \cdot y^2\,dx \quad \text{и} \quad dS_y = \gamma \cdot y\,dx \cdot x = \gamma xy\,dx.$$

Следовательно, $S_x = \frac{1}{2}\gamma \int\limits_a^b y^2\,dx$, $S_y = \gamma \int\limits_a^b xy\,dx$.

По аналогии с плоской кривой получаем, обозначив координаты центра тяжести плоской фигуры (пластинки) через $C(x_c; y_c)$, что $m \cdot x_c = S_y$, $m \cdot y_c = S_x$. Отсюда

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{S_y}{\gamma S} \quad \text{и} \quad y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{S_x}{\gamma S}$$

или

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b xy\,dx}{\int\limits_a^b y\,dx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2\,dx}{\int\limits_a^b y\,dx}.$$

Пример 41.15. Найдем координаты центра тяжести полукруга $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $y \geqslant 0$ ($\gamma = \text{const}$) (см. рис. 198).

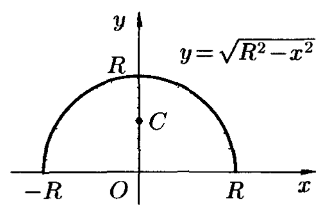


Рис. 198

◐ Решение: Очевидно (ввиду симметрии фигуры относительно оси Oy), что $x_c = 0$. Площадь полукруга равна $\frac{\pi R^2}{2}$. Находим S_x:

$$S_x = \frac{1}{2}\gamma \int\limits_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - x^2})^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} = \frac{1}{2}\gamma\left(R^3 + R^3 - \frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{3}\right) = \gamma \cdot \frac{2}{3}R^3.$$

Стало быть,

$$y_c = \frac{S_x}{\gamma S} = \frac{2\gamma R^3}{3\gamma \frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}.$$

Итак, центр тяжести имеет координаты $C\left(0; \frac{4R}{3\pi}\right)$. ●

§ 42. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть требуется найти определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ от непрерывной функции $f(x)$. Если можно найти первообразную $F(x)$ функции $f(x)$, то интеграл вычисляется по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Но отыскание первообразной функции иногда весьма сложно; кроме того, как известно, не для всякой непрерывной функции ее первообразная выражается через элементарные функции. В этих и других случаях (например, функция $y = f(x)$ задана графически или таблично) прибегают к приближенным формулам, с помощью которых определенный интеграл находится с любой степенью точности.

Рассмотрим три наиболее употребительные формулы приближенного вычисления определенного интеграла — формулу прямоугольников, формулу трапеций, формулу парабол (Симпсона), основанные на геометрическом смысле определенного интеграла.

42.1. Формула прямоугольников

Пусть на отрезке $[a; b]$, $a < b$, задана непрерывная функция $f(x)$. Требуется вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции, т. е. отрезок $[a; b]$, на n равных частей (отрезков) длины $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ (*шаг разбиения*) с помощью точек $x_0 = a$, $x_1, x_2, \ldots, x_n = b$. Можно записать, что $x_i = x_0 + h \cdot i$, где $i = 1, 2, \ldots, n$ (см. рис. 199).

В середине $c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ каждого такого отрезка построим ординату $\tilde{y}_i = f(c_i)$ графика функции $y = f(x)$. Приняв эту ординату за высоту, построим прямоугольник с площадью $h \cdot \tilde{y}_i$.

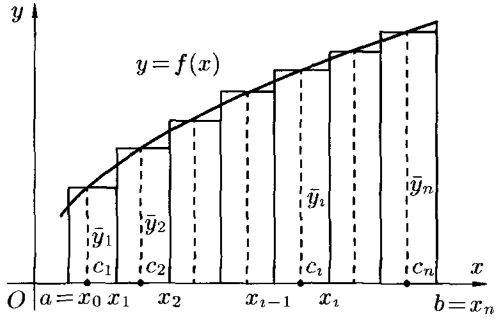


Рис. 199

Тогда сумма площадей всех n прямоугольников дает площадь ступенчатой фигуры, представляющую собой приближенное значение искомого определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \ldots + \tilde{y}_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right). \qquad (42.1)$$

Формула (42.1) называется ***формулой средних прямоугольников.***

Абсолютная погрешность приближенного равенства (42.1) оценивается с помощью следующей формулы:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2},$$

где M_2 — наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a; b]$,

$$|R_n| = \left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right|.$$

Отметим, что для линейной функции ($f(x) = kx + b$) формула (42.1) дает точный ответ, поскольку в этом случае $f''(x) = 0$.

42.2. Формула трапеций

Формулу трапеций получают аналогично формуле прямоугольников: на каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$. Абсциссы точек деления $a = x_0$, $x_1, x_2, \ldots, b = x_n$ (рис. 200). Пусть y_0, $y_1, \ldots, y_n$ — соответствующие им ординаты графика функции. Тогда

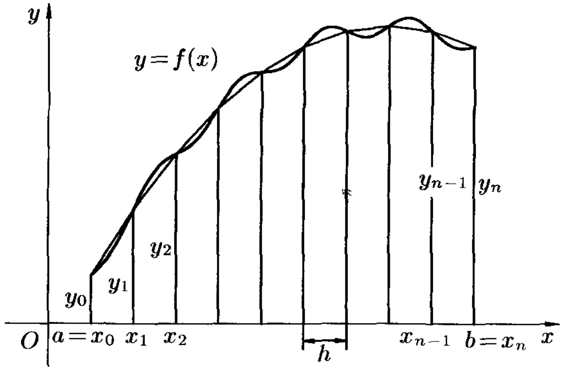


Рис. 200

расчетные формулы для этих значений примут вид $x_i = a + h \cdot i$, $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$; $h = \frac{b-a}{n}$.

Заменим кривую $y = f(x)$ ломаной линией, звенья которой соединяют концы ординат y_i и y_{i+1} $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей обычных трапеций с основаниями y_i, y_{i+1} и высотой $h = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h + \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h + \cdots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \tag{42.2}$$

Формула (42.2) называется ***формулой трапеций.***

Абсолютная погрешность R_n приближения, полученного по формуле трапеций, оценивается с помощью формулы $|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2$, где $M_2 = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|$. Снова для линейной функции $y = kx + b$ формула (42.2) — точная.

42.3. Формула парабол (Симпсона)

Если заменить график функции $y = f(x)$ на каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ разбиения не отрезками прямых, как в методах трапеций и прямоугольников, а дугами парабол, то получим более точную формулу приближенного вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Предварительно найдем площадь S криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком параболы $y = ax^2 + bx + c$, сбоку — прямыми $x = -h$, $x = h$ и снизу — отрезком $[-h; h]$.

Пусть парабола проходит через три точки $M_1(-h; y_0)$, $M_2(0; y_1)$, $M_3(h; y_2)$, где $y_0 = ah^2 - bh + c$ — ордината параболы в точке $x = -h$; $y_1 = c$ — ордината параболы в точке $x = 0$; $y_2 = ah^2 + bh + c$ — ордината параболы в точке $x = h$ (см. рис. 201). Площадь S равна

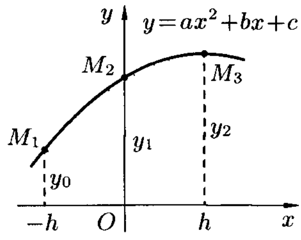


Рис. 201

$$S = \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\,dx =$$
$$= \left(a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right)\Big|_{-h}^{h} = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch. \quad (42.3)$$

Выразим эту площадь через h, y_0, y_1, y_2. Из равенств для ординат y_i находим, что $c = y_1$, $a = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$. Подставляя эти значения c и a в равенство (42.3), получаем

$$S = \frac{2}{3}h^3 \cdot \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + 2h \cdot y_1 =$$
$$= \frac{h}{3}(y_0 - 2y_1 + y_2) + 2hy_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \quad (42.4)$$

Получим теперь формулу парабол для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

Для этого отрезок $[a; b]$ разобьем на $2n$ равных частей (отрезков) длиной $h = \frac{b-a}{2n}$ точками $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, 2n$). В точках деления $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n} = b$ вычисляем значения подынтегральной функции $f(x)$: $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$, где $y_i = f(x_i)$ (см. рис. 202).

Заменяем каждую пару соседних элементарных криволинейных трапеций с основаниями, равными h, одной элементарной параболической трапецией с основанием, равным $2h$. На отрезке $[x_0; x_2]$ парабола проходит через три точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$. Используя формулу (42.4), находим

$$S_1 = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

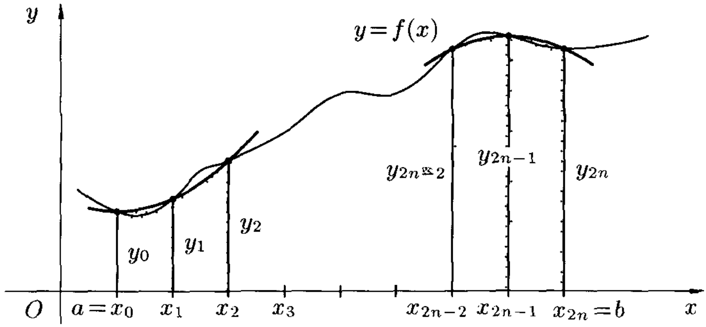


Рис 202

Аналогично находим

$$S_2 = \int\limits_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),\ \ldots,$$

$$S_n = \int\limits_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Сложив полученные равенства, имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\Big((y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})\Big). \quad (42.5)$$

Формула (42.5) называется ***формулой парабол*** (или Симпсона). *Абсолютная погрешность* вычисления по формуле (42.5) оценивается соотношением

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^5}{180 \cdot (2n)^4} \cdot M_4, \quad \text{где } M_4 = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{IV}(x)|.$$

Отметим, что формула (42.5) дает точное значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ во всех случаях, когда $f(x)$ — многочлен, степень которого меньше или равна трем (тогда $f^{IV} = 0$).

Пример 42.1. Вычислить $\int\limits_0^2 x^3\,dx$, разбив отрезок интегрирования $[0;2]$ на 4 части.

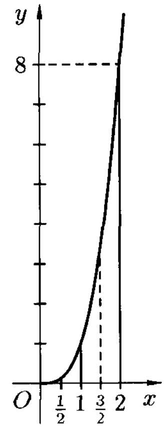


Рис 203

◐ Решение: Имеем: $f(x)=x^3$,

$$a=x_0=0;\quad b=x_4=2,\quad h=\frac{b-a}{n}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

$$x_0=0,\quad y_0=0;\quad x_1=\frac{1}{2},\quad y_1=\frac{1}{8};\quad x_2=1,\quad y_2=1;$$

$$x_3=\frac{3}{2},\quad y_3=\frac{27}{8};\quad x_4=2,\quad y_4=8;$$

(см. рис. 203)

а) по формуле прямоугольников:

$$c_1=\frac{1}{4},\quad \tilde{y}_1=\frac{1}{64};\quad c_2=\frac{3}{4},\quad \tilde{y}_2=\frac{27}{64};$$

$$c_3=\frac{5}{4},\quad \tilde{y}_3=\frac{125}{64};\quad c_4=\frac{7}{4},\quad \tilde{y}_4=\frac{343}{6},$$

$$\int\limits_0^2 x^3\,dx\approx\frac{1}{2}\left(\frac{1}{64}+\frac{27}{64}+\frac{125}{64}+\frac{343}{64}\right)=3{,}875,\ \text{т. е.}\ \int\limits_0^2 x^3\,dx\approx 3{,}875;$$

б) по формуле трапеции:

$$\int\limits_0^2 x^3\,dx\approx\frac{1}{2}\left(\frac{0+8}{2}+\frac{1}{8}+1+\frac{27}{8}\right)=4{,}25,\quad \text{т. е.}\quad \int\limits_0^2 x^3\,dx\approx 4{,}25;$$

в) по формуле парабол:

$$\int\limits_0^2 x^3\,dx\approx\frac{2}{6\cdot 2}\left(0+8+4\left(\frac{1}{8}+\frac{27}{8}\right)+2\cdot 1\right)=4,\quad \text{т. е.}\quad \int\limits_0^2 x^3\,dx\approx 4.$$

Точное значение интеграла $\int\limits_0^2 x^3\,dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2=4.$

Абсолютные погрешности соответствующих формул таковы: а) 0,125; б) 0,25; в) 0. ●

Глава IX. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Лекции 34–36

Функции одной независимой переменной не охватывают *все* зависимости, существующие в природе. Поэтому естественно расширить известное понятие функциональной зависимости и ввести понятие функции нескольких переменных.

Будем рассматривать функции двух переменных, так как все важнейшие факты теории функций нескольких переменных наблюдаются уже на функциях двух переменных. Эти факты обобщаются на случай большего числа переменных. Кроме того, для функций двух переменных можно дать наглядную геометрическую интерпретацию.

§ 43. ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

43.1. Основные понятия

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел $(x; y)$. Соответствие f, которое каждой паре чисел $(x; y) \in D$ сопоставляет одно и только одно число $z \in \mathbb{R}$, называется ***функцией двух переменных***, определенной на множестве D со значениями в $\mathbb{R}$, и записывается в виде $z = f(x; y)$ или $f : D \to \mathbb{R}$. При этом x и y называются *независимыми переменными (аргументами)*, а z — *зависимой переменной (функцией)*.

Множество $D = D(f)$ называется *областью определения* функции. Множество значений, принимаемых z в области определения, называется *областью изменения* этой функции, обозначается $E(f)$ или E.

Примером функции двух переменных может служить площадь S прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y: $S = xy$. Областью определения этой функции является множество $\{(x; y) \mid x > 0,\ y > 0\}$.

Функцию $z = f(x; y)$, где $(x; y) \in D$ можно понимать (рассматривать) как функцию точки $M(x; y)$ координатной плоскости Oxy. В частности, областью определения может быть вся плоскость или ее часть, ограниченная некоторыми линиями. Линию, ограничивающую область, называют ***границей области***. Точки области, не лежащие на границе, называются ***внутренними***. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется ***открытой***. Область с присоединенной к ней границей называется ***замкнутой***, обозначается $\overline{D}$. Примером замкнутой области является круг с окружностью.

Значение функции $z = f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ обозначают $z_0 = f(x_0;y_0)$ или $z_0 = f(M_0)$ и называют *частным значением функции.*

Функция двух независимых переменных допускает геометрическое истолкование. Каждой точке $M_0(x_0;y_0)$ области D в системе координат $Oxyz$ соответствует точка $M(x_0;y_0;z_0)$, где $z_0 = f(x_0;y_0)$ — *аппликата* точки M. Совокупность всех таких точек представляет собой некоторую поверхность, которая и будет геометрически изображать данную функцию $z = f(x;y)$.

Например, функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ имеет областью определения круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$ и изображается верхней полусферой с центром в точке $O(0;0;0)$ и радиусом $R = 1$ (см. рис. 204).

Функция двух переменных, как и функция одной переменной, может быть задана разными способами: таблицей, аналитически, графиком. Будем пользоваться, как правило аналитическим способом: когда функция задается с помощью формулы.

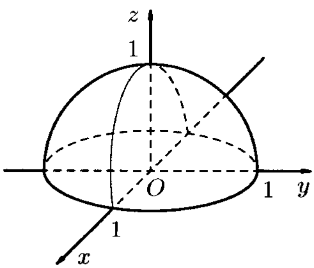


Рис. 204

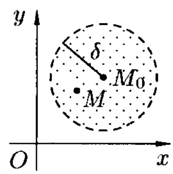


Рис. 205

43.2. Предел функции

Для функции двух (и большего числа) переменных вводится понятие предела функции и непрерывности, аналогично случаю функции одной переменной. Введем понятие окрестности точки. Множество всех точек $M(x;y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, называется *$\delta$-окрестностью точки* $M_0(x_0;y_0)$. Другими словами, δ-окрестность точки M_0 — это все внутренние точки круга с центром M_0 и радиусом δ (см. рис. 205).

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$, кроме, быть может, самой этой точки. Число A называется ***пределом функции*** $z = f(x;y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (или, что то же самое, при $M(x;y) \to M_0(x_0;y_0)$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$ и удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ выполняется неравенство $|f(x;y) - A| < \varepsilon$. Записывают:

$$\boxed{A = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) \text{ или } A = \lim_{M\to M_0} f(M).}$$

Из определения следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому M стремится к M_0 (число таких направлений бесконечно; для функции одной переменной $x \to x_0$ по двум направлениям: справа и слева!)

Геометрический смысл предела функции двух переменных состоит в следующем. Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется δ-окрестность точки $M_0(x_0; y_0)$, что во всех ее точках $M(x;y)$, отличных от M_0, аппликаты соответствующих точек поверхности $z = f(x;y)$ отличаются от числа A по модулю меньше, чем на ε.

Пример 43.1. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

○ Решение: Будем приближаться к $O(0;0)$ по прямой $y = kx$, где k – некоторое число. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-k^2}{1+k^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Функция $z = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ в точке $O(0;0)$ предела не имеет, т. к. при разных значениях k предел функции не одинаков (функция имеет различные предельные значения). ●

Предел функции двух переменных обладает свойствами, аналогичными свойствам предела функции одной переменной (см. п. 17.3). Это означает, что справедливы утверждения: если функции $f(M)$ и $g(M)$ определены на множестве D и имеют в точке M_0 этого множества пределы A и B соответственно, то и функции $f(M) \pm g(M)$, $f(M)\cdot g(M)$, $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ $(g(M) \neq 0)$ имеют в точке M_0 пределы, которые соответственно равны $A \pm B$, $A \cdot B$, $\dfrac{A}{B}$ $(B \neq 0)$.

43.3. Непрерывность функции двух переменных

Функция $z = f(x;y)$ (или $f(M)$) называется ***непрерывной в точке*** $M_0(x_0;y_0)$, если она:

а) определена в этой точке и некоторой ее окрестности,

б) имеет предел $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$, в) этот предел равен значению функции z в точке M_0, т. е.

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0) \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0).$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в этой области*. Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке), называются *точками разрыва* этой функции. Точки разрыва $z = f(x;y)$ могут образовывать целые *линии разрыва*. Так, функция $z = \dfrac{2}{y-x}$ имеет линию разрыва $y = x$.

Можно дать другое, равносильное приведенному выше, определение непрерывности функции $z = f(x;y)$ в точке. Обозначим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0)$. Величины Δx и Δy называются *приращениями аргументов* x и y, а Δz – *полным приращением функции* $f(x;y)$ *в точке* $M_0(x_0;y_0)$.

Функция $z = f(x;y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0;y_0) \in \in D$, если выполняется равенство $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$, т. е. полное приращение функции в этой точке стремится к нулю, когда приращения ее аргументов x и y стремятся к нулю.

Пользуясь определением непрерывности и теоремами о пределах, можно доказать, что арифметические операции над непрерывными функциями и построение сложной функции из непрерывных функций приводит к непрерывным функциям — подобные теоремы имели место для функций одной переменной (см. п. 19.4).

43.4. Свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области

Приведем свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области (они аналогичны свойствам непрерывных на отрезке функций одной переменной — см. п. 19.5). Предварительно уточним понятие области.

Областью называется множество точек плоскости, обладающих *свойствами открытости и связности*.

Свойство открытости: каждая точка принадлежит ей вместе с некоторой окрестностью этой точки.

Свойство связности: любые две точки области можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в этой области.

Точка N_0 называется ***граничной точкой*** области D, если она не принадлежит D, но в любой окрестности ее лежат точки этой области (см. рис. 206). Совокупность граничных точек области D называется ***границей*** D. Область D с присоединенной к ней границей называется ***замкнутой*** областью, обозначается $\overline{D}$. Область называется ***ограниченной***, если все ее точки принадлежат некоторому кругу радиуса R. В противном случае область называется ***неограниченной***. Примером неограниченной области может служить множество точек первого координатного угла, а примером ограниченной — δ-окрестность точки $M_0(x_0; y_0)$.

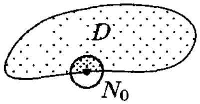


Рис. 206

Теорема 43.1. Если функция $z = f(N)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она в этой области: а) ограничена, т. е. существует такое число $R > 0$, что для всех точек N в этой области выполняется неравенство $|f(N)| < R$; б) имеет точки, в которых принимает наименьшее m и наибольшее M значения; в) принимает хотя бы в одной точке области любое численное значение, заключенное между m и M.

Теорема дается без доказательства.

§ 44. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

44.1. Частные производные первого порядка и их геометрический смысл

Пусть задана функция $z = f(x; y)$. Так как x и y — независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение. Дадим независимой переменной x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным. Тогда z получит приращение, которое называется *частным приращением* z по x и обозначается $\Delta_x z$. Итак,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Аналогично получаем частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Полное приращение Δz функции z определяется равенством

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x},$$

то он называется *частной производной* функции $z = f(x;y)$ в точке $M(x;y)$ по переменной x и обозначается одним из символов:

$$z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, f'_x, \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Частные производные по x в точке $M_0(x_0;y_0)$ обычно обозначают символами $f'_x(x_0;y_0)$, $f'_x\Big|_{M_0}$.

Аналогично определяется и обозначается частная производная от $z = f(x;y)$ по переменной y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x;y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функции нескольких (двух, трех и больше) переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $f(x;y)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом соответственно x или y считается постоянной величиной).

Пример 44.1. Найти частные производные функции

$$z = 2y + e^{x^2-y} + 1.$$

Решение:

$$z'_x = (2y + e^{x^2-y} + 1)'_x = (2y)'_x + (e^{x^2-y})'_x + (1)'_x =$$

$$= 0 + e^{x^2-y} \cdot (x^2 - y)'_x + 0 = e^{x^2-y} \cdot (2x - 0) = 2x \cdot e^{x^2-y};$$

$$z'_y = 2 + e^{x^2-y} \cdot (-1).$$ ●

Геометрический смысл частных производных функции двух переменных

Графиком функции $z=f(x;y)$ является некоторая поверхность (см. п. 12.1). График функции $z=f(x;y_0)$ есть линия пересечения этой поверхности с плоскостью $y=y_0$. Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной (см. п. 20.2), заключаем, что $f'_x(x_0;y_0)=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между осью Ox и касательной, проведенной к кривой $z=f(x;y_0)$ в точке $M_0(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$ (см. рис. 207).

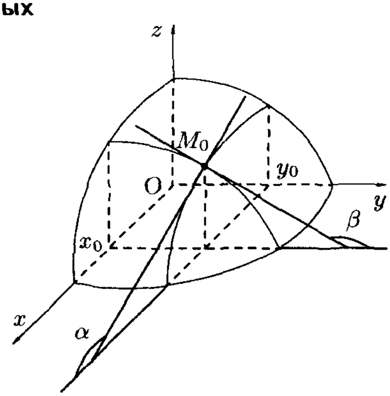


Рис. 207

Аналогично, $f'_y(x_0;y_0) = \operatorname{tg}\beta$.

44.2. Частные производные высших порядков

Частные производные $\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ называют *частными производными первого порядка*. Их можно рассматривать как функции от $(x;y) \in D$. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются *частными производными второго порядка*. Они определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = z''_{xy} = f''_{xy}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = z''_{yx} = f''_{yx}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{y^2}(x;y).$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т. д. порядков. Так, $z'''_{xxy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y\, \partial x}\right) = \frac{\partial^4 z}{\partial x\, \partial y\, \partial x^2}$ (или $(z'''_{xyx})'_x = z^{(4)}_{xyx^2}$) и т. д.

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется ***смешанной частной производной***. Таковыми являются, например, z''_{xy}, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, z'''_{xyx}.

Пример 44.2. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$.

Решение: Так как $z'_x = 4x^3 - 4xy^3$ и $z'_y = -6x^2y^2 + 5y^4$, то

$$z''_{xy} = (4x^3 - 4xy^3)'_y = -12xy^2,$$

$$z''_{yx} = (-6x^2y^2 + 5y^4)'_x = -12xy^2.$$

Оказалось, что $z''_{xy} = z''_{yx}$. ●

Этот результат не случаен. Имеет место теорема, которую приведем без доказательства.

Теорема 44.1 (Шварц). Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

В частности, для $z = f(x;y)$ имеем: $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$.

44.3. Дифференцируемость и полный дифференциал функции

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x;y)$. Составим полное приращение функции в точке M:

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x;y).$$

Функция $z = f(x;y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $M(x;y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \tag{44.1}$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Сумма первых двух слагаемых в равенстве (44.1) представляет собой *главную часть приращения функции.*

Главная часть приращение функции $z = f(x;y)$, линейная относительно Δx и Δy, называется *полным дифференциалом* этой функции и обозначается символом dz:

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y. \tag{44.2}$$

Выражения $A \cdot \Delta x$ и $B \cdot \Delta y$ называют *частными дифференциалами.* Для независимых переменных x и y полагают $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$. Поэтому равенство (44.2) можно переписать в виде

$$dz = A \cdot dx + B \cdot dy. \tag{44.3}$$

Теорема 44.2 (необходимое условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;y)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем $\frac{\partial z}{\partial x} = A$, $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.

☐ Так как функция дифференцируема в точке M, то имеет место равенство (44.1). Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$. Это означает, что функция непрерывна в точке M. Положив $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq 0$ в равенстве (44.1), получим: $\Delta_x z = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$. Отсюда находим $\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A$, т. е. $\frac{\partial z}{\partial x} = A$. Таким образом, в точке M существует частная производная $f'_x(x;y) = A$. Аналогично доказывается, что в точке M существует частная производная $f'_y(x;y) = \frac{\partial x}{\partial y} = B$. ■

Равенство (44.1) можно записать в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \gamma, \tag{44.4}$$

где $\gamma = \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Отметим, что обратное утверждение не верно, т. е. из непрерывности функции или существования частных производных не следует дифференцируемость функции. Так, непрерывная функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ не дифференцируема в точке $(0; 0)$.

Как следствие теоремы получаем формулу для вычисления полного дифференциала. Формула (44.3) принимает вид:

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy} \tag{44.5}$$

или

$$\boxed{dz = d_x z + d_y z,}$$

где $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx$, $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$ — частные дифференциалы функции $z = f(x; y)$.

Теорема 44.3 (достаточное условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y в точке $M(x; y)$, то она дифференцируема в этой точке и ее полный дифференциал выражается формулой (44.5).

Примем теорему без доказательства.

Отметим, что для функции $y = f(x)$ одной переменной существование производной $f'(x)$ в точке является необходимым и достаточным условием ее дифференцируемости в этой точке.

Чтобы функция $z = f(x; y)$ была дифференцируема в точке, необходимо, чтобы она имела в ней частные производные, и достаточно, чтобы она имела в точке непрерывные частные производные.

Арифметические свойства и правила исчисления дифференциалов функции одной переменной сохраняются и для дифференциалов функции двух (и большего числа) переменных.

44.4. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям

Из определения дифференциала функции $z = f(x; y)$ следует, что при достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ имеет место приближенное равенство

$$\Delta z \approx dz. \tag{44.6}$$

Так как полное приращение $\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)$, равенство (44.6) можно переписать в следующем виде:

$$\boxed{f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x;y) + f'_x(x;y)\Delta x + f'_y(x;y)\Delta y.} \tag{44.7}$$

Формулой (44.7) пользуются в приближенных расчетах.

Пример 44.3. Вычислить приближенно $1{,}02^{3{,}01}$.

○ Решение: Рассмотрим функцию $z = x^y$. Тогда $1{,}02^{3{,}01} = (x+\Delta x)^{y+\Delta y}$, где $x=1$, $\Delta x = 0{,}02$, $y=3$, $\Delta y = 0{,}01$. Воспользуемся формулой (44.7), предварительно найдя z'_x и z'_y: $z'_x = (x^y)'_x = y\cdot x^{y-1}$, $z'_y = (x^y)'_y = x^y \cdot \ln x$. Следовательно, $1{,}02^{3{,}01} \approx 1^3 + 3\cdot 1^{3-1}\cdot 0{,}02 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0{,}01$, т. е. $1{,}02^{3{,}01} \approx$ $\approx 1{,}06$.

Для сравнения: используя микрокалькулятор, находим: $1{,}02^{3{,}01} \approx 1{,}061418168$. ●

Отметим, что с помощью полного дифференциала можно найти: границы абсолютной и относительной погрешностей в приближенных вычислениях; приближенное значение полного приращения функции и т. д.

44.5. Дифференциалы высших порядков

Введем понятие дифференциала высшего порядка. Полный дифференциал функции (формула (44.5)) называют также дифференциалом первого порядка.

Пусть функция $z = f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. *Дифференциал второго порядка* определяется по формуле $d^2z = d(dz)$. Найдем его:

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x \cdot dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y \cdot dy =$$
$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right)\cdot dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)\cdot dy.$$

Отсюда: $d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\cdot dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$. Символически это записывается так:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 \cdot z.$$

Аналогично можно получить формулу для *дифференциала третьего порядка*:

$$d^3z = d(d^2z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 \cdot z,$$

где

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 = \frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}\,dy + 3\frac{\partial}{\partial x}dx \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3}dy^3.$$

Методом математической индукции можно показать, что

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n \cdot z, \quad n \in \mathbb{N}$$

Отметим, что полученные формулы справедливы лишь в случае, когда переменные x и y функции $z = f(x;y)$ являются независимыми.

Пример 44.4. (*Для самостоятельного решения.*) Найти d^2z, если $z = x^3y^2$.

Ответ: $d^2z = 6xy^2\,dx^2 + 12x^2y\,dx\,dy + 2x^3\,dy^2$.

44.6. Производная сложной функции. Полная производная

Пусть $z = f(x;y)$ — функция двух переменных x и y, каждая из которых является функцией независимой переменной t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. В этом случае функция $z = f(x(t);y(t))$ является сложной функцией одной независимой переменной t; переменные x и y — *промежуточные переменные*.

Теорема 44.4. Если $z = f(x;y)$ — дифференцируемая в точке $M(x;y) \in D$ функция и $x = x(t)$ и $y = y(t)$ — дифференцируемые функции независимой переменной t, то производная сложной функции $z(t) = f(x(t);y(t))$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \tag{44.8}$$

❑ Дадим независимой переменной t приращение Δt. Тогда функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ получат приращения Δx и Δy соответственно. Они, в свою очередь, вызовут приращение Δz функции z.

Так как по условию функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;y)$, то ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ (см. п. 44.3). Разделим выражение Δz на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Тогда $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ в силу непрерывности функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ (по условию теоремы — они дифференцируемые). Получаем:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \alpha \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \beta \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t},$$

т. е.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt},$$

или

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \qquad \blacksquare$$

Частный случай: $z = f(x; y)$, где $y = y(x)$, т. е. $z = f(x; y(x))$ — сложная функция одной независимой переменной x. Этот случай сводится к предыдущему, причем роль переменной t играет x. Согласно формуле (44.8) имеем:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.} \tag{44.9}$$

Формула (44.9) носит название *формулы полной производной*.

Общий случай: $z = f(x; y)$, где $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$. Тогда $z = f(x(u; v); y(u; v))$ — сложная функция независимых переменных u и v. Ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ можно найти, используя формулу (44.8) следующим образом. Зафиксировав v, заменяем в ней $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ соответствующими частными производными $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}.} \tag{44.10}$$

Аналогично получаем: $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$.

Таким образом, производная сложной функции (z) по каждой независимой переменной (u и v) равна сумме произведений частных производных этой функции (z) по ее промежуточным переменным (x и y) на их производные по соответствующей независимой переменной (u и v).

Пример 44.5. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = u \cdot v$, $y = \frac{u}{v}$.

❍ Решение: Найдем $\frac{\partial z}{\partial u}$ ($\frac{\partial z}{\partial v}$ — самостоятельно), используя формулу (44.10):

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x\cdot v+\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y\cdot\frac{1}{v}.$$

Упростим правую часть полученного равенства:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2}{x^2+y^2}\left(x\cdot v+\frac{y}{v}\right)=\frac{2}{(uv)^2+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\cdot\left(uv\cdot v+\frac{u}{v\cdot v}\right)=$$

$$=\frac{2v^2}{u^2(v^4+1)}\cdot\frac{u\cdot(v^4+1)}{v^2}=\frac{2}{u},$$

т. е. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2}{u}$. ●

44.7. Инвариантность формы полного дифференциала

Используя правило дифференцирования сложной функции, можно показать, что полный дифференциал обладает *свойством инвариантности*: полный дифференциал функции $z=f(x;y)$ сохраняет один и тот же вид независимо от того, являются ли аргументы независимыми переменными или функциями независимых переменных.

❑ Пусть $z=f(x;y)$, где x и y — независимые переменные. Тогда полный дифференциал (1-го порядка) функции имеет вид

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy$$

(формула (44.5)).

Рассмотрим сложную функцию $z=f(x;y)$, где $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$, т. е. функцию $z=f(x(u;v);y(u;v))=F(u;v)$, где u и v — независимые переменные. Тогда имеем:

$$dz=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot dv=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot dv=$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)du+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv=$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial x}{\partial v}\cdot dv\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot dv\right).$$

Выражения в скобках представляют собой полные дифференциалы dx и dy функций $x=x(u;v)$ и $y=y(u;v)$. Следовательно, и в этом случае,

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy.$$ ■

44.8. Дифференцирование неявной функции

Функция $z = f(x;y)$ называется *неявной*, если она задается уравнением

$$F(x;y;z) = 0, \tag{44.11}$$

неразрешенным относительно z. Найдем частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции z, заданной уравнением (44.11). Для этого, подставив в уравнение вместо z функцию $f(x;y)$, получим тождество

$$F(x;y;f(x;y)) \equiv 0.$$

Частные производные по x и по y функции, тождественно равной нулю, также равны нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x;y;f(x;y)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ (y — считаем постоянным)},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x;y;f(x;y)) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ (x — считаем постоянным)},$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}, \ (F'_z \neq 0). \tag{44.12}$$

Замечания.

а) Уравнение вида (44.11) не всегда определяет одну переменную как неявную функцию двух других. Так, уравнение $x^2+y^2+z^2-4=0$ определяет функции $z_1 = \sqrt{4-x^2-y^2}$ и $z_2 = -\sqrt{4-x^2-y^2}$, определенные в круге $x^2+y^2 \leqslant 4$, $z_3 = \sqrt{4-x^2-y^2}$, определенную в полукруге $x^2+y^2 \leqslant 4$ при $y \geqslant 0$ и т. д., а уравнение $\cos(x+2y+3z)-4=0$ не определяет никакой функции.

Имеет место ***теорема существования неявной функции*** двух переменных: если функция $F(x;y;z)$ и ее производные $F'_x(x;y;z)$, $F'_y(x;y;z)$, $F'_z(x;y;z)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, причем $F(x_0;y_0;z_0)=0$, а $F'_z(x_0;y_0;z_0) \neq 0$, то существует окрестность точки M_0, в которой уравнение (44.11) определяет единственную функцию $z = f(x;y)$, непрерывную и дифференцируемую в окрестности точки $(x_0;y_0)$ и такую, что $f(x_0;y_0) = z_0$.

б) Неявная функция $y = f(x)$ одной переменной задается уравнением $F(x;y) = 0$. Можно показать, что в случае, если удовлетворены условия существования неявной функции одной переменной (имеется теорема, аналогичная вышеуказанной), то производная неявной функции находится по формуле

$$\boxed{y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}} \quad (F'_y \neq 0).$$

Пример 44.6. Найти частные производные функции z, заданной уравнением $e^z + z - x^2y + 1 = 0$.

◯ Решение: Здесь $F(x;y;z) = e^z + z - x^2y + 1$, $F'_x = -2xy$, $F'_y = -x^2$, $F'_z = e^z + 1$. По формулам (44.12) имеем: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = +\dfrac{2xy}{e^z+1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2}{e^z+1}$. ●

Пример 44.7. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если неявная функция $y = f(x)$ задана уравнением $y^3 + 2y = 2x$.

◯ Решение: Здесь $F(x;y) = y^3 + 2y - 2x$, $F'_x = -2$, $F'_y = 3y^2 + 2$. Следовательно, $y'_x = -\dfrac{-2}{3y^2+2}$, т. е. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{3y^2+2}$. ●

§ 45. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим одно из геометрических приложений частных производных функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $(x_0;y_0)$ некоторой области $D \in \mathbb{R}^2$. Рассечем поверхность S, изображающую функцию z, плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$ (см. рис. 208). Плоскость $x = x_0$ пересекает поверхность S по некоторой линии $z_0(y)$, уравнение которой получается подстановкой в выражение исходной функции $z = f(x;y)$ вместо x числа x_0. Точка $M_0(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$ принадлежит кривой $z_0(y)$. В силу дифференцируемости функции z в точке M_0 функция $z_0(y)$ также является дифференцируемой в точке $y = y_0$. Следовательно, в этой точке в плоскости $x = x_0$ к кривой $z_0(y)$ может быть проведена касательная l_1.

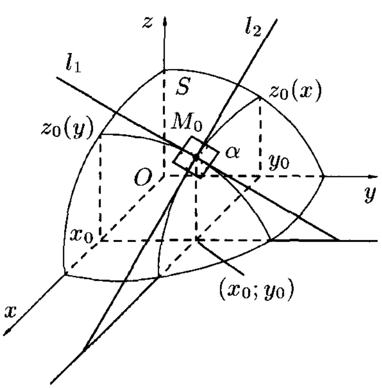


Рис. 208

Проводя аналогичные рассуждения для сечения $y = y_0$, построим касательную l_2 к кривой $z_0(x)$ в точке $x = x_0$. Прямые l_1 и l_2 определяют плоскость α, которая называется *касательной плоскостью* к поверхности S в точке M_0.

Составим ее уравнение. Так как плоскость α проходит через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, то ее уравнение может быть записано в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

которое можно переписать так:

$$z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) \tag{45.1}$$

(разделив уравнение на $-C$ и обозначив $\frac{A}{-C} = A_1$, $\frac{B}{-C} = B_1$).

Найдем A_1 и B_1.

Уравнения касательных l_1 и l_2 имеют вид

$$z - z_0 = f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0), \quad x = x_0;$$
$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0), \quad y = y_0$$

соответственно.

Касательная l_1 лежит в плоскости α, следовательно, координаты всех точек l_1 удовлетворяют уравнению (45.1). Этот факт можно записать в виде системы

$$\begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0; y_0)(y - y_0), \\ x = x_0, \\ z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0). \end{cases}$$

Разрешая эту систему относительно B_1, получим, что $B_1 = f'_y(x_0; y_0)$.

Проводя аналогичные рассуждения для касательной l_2, легко установить, что $A_1 = f'_x(x_0; y_0)$.

Подставив значения A_1 и B_1 в уравнение (45.1), получаем искомое уравнение касательной плоскости:

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0).} \qquad (45.2)$$

Прямая, проходящая через точку M_0 и перпендикулярная касательной плоскости, построенной в этой точке поверхности, называется ее ***нормалью***.

Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости (см. с. 103), легко получить канонические уравнения нормали:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.} \qquad (45.3)$$

Если поверхность S задана уравнением $F(x; y; z) = 0$, то уравнения (45.2) и (45.3), с учетом того, что частные производные могут быть найдены как производные неявной функции:

$$f'_x(x_0; y_0) = -\frac{F'_x(x_0; y_0)}{F'_z(x_0; y_0)}, \qquad f'_y(x_0; y_0) = -\frac{F'_y(x_0; y_0)}{F'_z(x_0; y_0)}$$

(см. формулы (44.12)), примут соответственно вид

$$F'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(x_0; y_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

и

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0)}.$$

Замечание. Формулы касательной плоскости и нормали к поверхности получены для обыкновенных, т. е. не особых, точек поверхности. Точка M_0 поверхности называется *особой*, если в этой точке все частные производные равны нулю или хотя бы одна из них не существует. Такие точки мы не рассматриваем.

Пример 45.1. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к параболоиду вращения $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1; -1; 2)$.

○ Решение: Здесь $z'_x = f'_x(x; y) = 2x$, $f'_y(x; y) = 2y$, $f'_x(1; -1) = 2$, $f'_y(1; -1) = -2$. Пользуясь формулами (45.2) и (45.3) получаем уравнение касательной плоскости: $z - 2 = 2 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (y + 1)$ или $2x - 2y - z - 2 = 0$ и уравнение нормали: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-1}$. ●

§ 46. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

46.1. Основные понятия

Понятие максимума, минимума, экстремума функции двух переменных аналогичны соответствующим понятиям функции одной независимой переменной (см. п. 25.4).

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой области D, точка $N(x_0; y_0) \in D$.

Точка $(x_0; y_0)$ называется ***точкой максимума*** функции $z = f(x; y)$, если существует такая δ-окрестность точки $(x_0; y_0)$, что для каждой точки $(x; y)$, отличной от $(x_0; y_0)$, из этой окрестности выполняется неравенство $f(x; y) < f(x_0; y_0)$.

Аналогично определяется ***точка минимума*** функции: для всех точек $(x; y)$, отличных от $(x_0; y_0)$, из δ-окрестности точки $(x_0; y_0)$ выполняется неравенство: $f(x; y) > f(x_0; y_0)$.

На рисунке 209: N_1 — точка максимума, а N_2 — точка минимума функции $z = f(x; y)$.

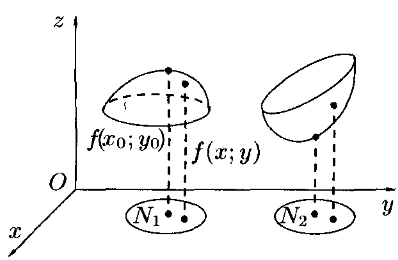


Рис. 209

Значение функции в точке максимума (минимума) называется ***максимумом*** (***минимумом***) функции. Максимум и минимум функции называют ее ***экстремумами***.

Отметим, что, в силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения функции; максимум и минимум имеют *локальный* (местный) характер: значение функции в точке

$(x_0; y_0)$ сравнивается с ее значениями в точках, достаточно близких к $(x_0; y_0)$. В области D функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

46.2. Необходимые и достаточные условия экстремума

Рассмотрим условия существования экстремума функции.

Теорема 46.1 (необходимые условия экстремума). Если в точке $N(x_0; y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x; y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю: $f'_x(x_0; y_0) = 0$, $f'_y(x_0; y_0) = 0$.

☐ Зафиксируем одну из переменных. Положим, например, $y = y_0$. Тогда получим функцию $f(x; y_0) = \varphi(x)$ одной переменной, которая имеет экстремум при $x = x_0$. Следовательно, согласно необходимому условию экстремума функции одной переменной (см. п. 25.4), $\varphi'(x_0) = 0$, т. е. $f'_x(x_0; y_0) = 0$.

Аналогично можно показать, что $f'_y(x_0; y_0) = 0$. ■

Геометрически равенства $f'_x(x_0; y_0) = 0$ и $f'_y(x_0; y_0) = 0$ означают, что в точке экстремума функции $z = f(x; y)$ касательная плоскость к поверхности, изображающей функцию $f(x; y)$, параллельна плоскости Oxy, т. к. уравнение касательной плоскости есть $z = z_0$ (см. формулу (45.2)).

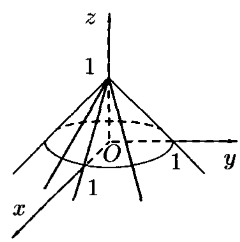


Рис. 210

Замечание. Функция может иметь экстремум в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Например, функция $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ имеет максимум в точке $O(0; 0)$ (см. рис. 210), но не имеет в этой точке частных производных.

Точка, в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x; y)$ равны нулю, т. е. $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, называется ***стационарной точкой*** функции z.

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются ***критическими точками***.

В критических точках функция может иметь экстремум, а может и не иметь. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума. Рассмотрим, например, функцию $z = xy$. Для нее точка $O(0; 0)$ является критической (в ней $z'_x = y$ и $z'_y = x$ обращаются в ноль). Однако экстремума в ней функция $z = xy$ не имеет, т. к. в достаточно малой окрестности точки $O(0;0)$ найдутся точки для которых $z > 0$ (точки I и III четвертей) и $z < 0$ (точки II и IV четвертей).

Таким образом, для нахождения экстремумов функции в данной области необходимо каждую критическую точку функции подвергнуть дополнительному исследованию.

Теорема 46.2 (достаточное условие экстремума). Пусть в стационарной точке $(x_0;y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке $(x_0;y_0)$ значения $A = f''_{xx}(x_0;y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0;y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0;y_0)$. Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция $f(x;y)$ в точке $(x_0;y_0)$ имеет экстремум: максимум, если $A < 0$; минимум, если $A > 0$;

2) если $\Delta < 0$, то функция $f(x;y)$ в точке $(x_0;y_0)$ экстремума не имеет.

В случае $\Delta = 0$ экстремум в точке $(x_0;y_0)$ может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Примем без доказательства.

Пример 46.1. Найти экстремум функции $z = 3x^2y - x^3 - y^4$.

○ Решение: Здесь $z'_x = 6xy - 3x^2$, $z'_y = 3x^2 - 4y^3$. Точки, в которых частные производные не существуют, отсутствуют.

Найдем стационарные точки, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем точки $M_1(6;3)$ и $M_2(0;0)$.

Находим частные производные второго порядка данной функции: $z''_{xx} = 6y - 6x$, $z''_{xy} = 6x$, $z''_{yy} = -12y^2$.

В точке $M_1(6;3)$ имеем: $A = -18$, $B = 36$, $C = -108$, отсюда

$$AC - B^2 = -18 \cdot (-108) - 36^2 = 648,$$

т. е. $\Delta > 0$.

Так как $A < 0$, то в точке M_1 функция имеет локальный максимум: $z_{max} = z(6;3) = 3 \cdot 36 \cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 324 - 216 - 81 = 27$.

В точке $M_2(0;0)$: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ и, значит, $\Delta = 0$. Проведем дополнительное исследование. Значение функции z в точке M_2 равно нулю: $z(0;0) = 0$. Можно заметить, что $z = -y^4 < 0$ при $x = 0$, $y \neq 0$; $z = -x^3 > 0$ при $x < 0$, $y = 0$. Значит, в окрестности точки $M_2(0;0)$ функция z принимает как отрицательные, так и положительные значения. Следовательно, в точке M_2 функция экстремума не имеет. ●

46.3. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$. Тогда она достигает в некоторых точках $\overline{D}$ своего наибольшего M и наименьшего m значений (т. н. *глобальный экстремум*). Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области $\overline{D}$, или в точках, лежащих на границе области.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой в области $\overline{D}$ функции $z = f(x;y)$ состоит в следующем:

1. Найти все критические точки функции, принадлежащие $\overline{D}$, и вычислить значения функции в них;

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x;y)$ на границах области;

3. Сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее M и наименьшее m.

Пример 46.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2y + xy^2 + xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = -1{,}5$ (см. рис. 211).

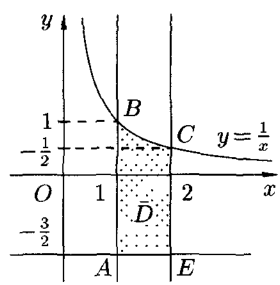


Рис. 211

○ Решение: Здесь $z'_x = 2xy + y^2 + y$, $z'_y = x^2 + 2xy + x$.

1. Находим все критические точки:

$$\begin{cases} y(2x + y + 1) = 0, \\ x(x + 2y + 1) = 0. \end{cases}$$

Решением системы являются точки $(0;0)$, $(-1;0)$, $(0;-1)$, $\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Ни одна из найденных точек не принадлежит области $\overline{D}$.

2. Исследуем функцию z на границе области, состоящей из участков AB, BC, CE и EA (рис. 211).

На участке AB: $x = 1$, $z = y^2 + 2y$, где $y \in \left[-\frac{3}{2}; 1\right]$, $z'_y = 2y + 2$, $2y + 2 = 0$, $y = -1$. Значения функции $z(-1) = -1$, $z\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$, $z(1) = 3$.

На участке BC: $y = \frac{1}{x}$, $z = x + \frac{1}{x} + 1$, где $x \in [1; 2]$, $z'_x = 1 - \frac{1}{x^2}$, $1 - \frac{1}{x^2} = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1 \notin [1; 2]$. Значения функции $z(1) = 3$, $z(2) = 3{,}5$.

На участке CE: $x = 2$, $z = 2y^2 + 6y$, $y \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $z'_y = 4y + 6$, $4y + 6 = 0$, $y = -\frac{3}{2}$. Значения функции $z\left(-\frac{3}{2}\right) = -4{,}5$, $z\left(\frac{1}{2}\right) = 3{,}5$.

На участке AE: $y = -\frac{3}{2}$, $z = -\frac{3x^2}{2} + \frac{3}{4}x$, $x \in [1; 2]$, $z'_x = -3x + \frac{3}{4}$, $-3x + \frac{3}{4} = 0$, $x = \frac{1}{4} \notin [1; 2]$. Значения функции $z(1) = -\frac{3}{4}$, $z(2) = -4{,}5$.

3. Сравнивая полученные результаты, имеем

$$M = +3{,}5 = z\left(2; \frac{1}{2}\right) = z(C),$$

а $m = -4{,}5 = z\left(2; -\frac{3}{2}\right) = z(E)$. ●

Глава X. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лекции 37–43

§ 47. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

47.1. Основные понятия

При решении различных задач математики, физики, химии и других наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такие уравнения называются ***дифференциальными*** (термин принадлежит Г. Лейбницу, 1676 г). ***Решением*** дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Так, решением уравнения $y' = f(x)$ является функция $y = F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$.

Рассмотрим некоторые общие сведения о дифференциальных уравнениях (ДУ).

Если искомая (неизвестная) функция зависит от одной переменной, то ДУ называют *обыкновенным*; в противном случае — ДУ *в частных производных*. Далее будем рассматривать только обыкновенные ДУ.

Наивысший порядок производной, входящей в ДУ, называется *порядком* этого уравнения

Например, уравнение $y''' - 3y'' + 2y = 0$ — обыкновенное ДУ третьего порядка, а уравнение $x^2y' + 5xy = y^2$ — первого порядка; $y \cdot z'_x = x \cdot z'_y$ — ДУ в частных производных первого порядка.

Процесс отыскания решения ДУ называется его *интегрированием*, а график решения ДУ — *интегральной кривой*.

Рассмотрим некоторые задачи, решение которых приводит к дифференциальным уравнениям.

47.2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Задача 1

Материальная точка массы m замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости V. Найти зависимость скорости от времени. Найти скорость точки через 3 с после начала замедления, если $V(0)=100$ м/с, а $V(1)=50$ м/с.

❍ Решение: Примем за независимую переменную время t, отсчитываемое от начала замедления движения материальной точки. Тогда скорость точки V будет функцией t, т. е. $V \doteq V(t)$. Для нахождения $V(t)$ воспользуемся вторым законом Ньютона (основным законом механики): $m \cdot a = F$, где $a = V'(t)$ — есть ускорение движущегося тела, F — результирующая сила, действующая на тело в процессе движения.

В данном случае $F = -kV^2$, $k > 0$ — коэффициент пропорциональности (знак минус указывает на то, что скорость тела уменьшается). Следовательно, функция $V = V(t)$ является решением дифференциального уравнения $m \cdot V' = -k \cdot V^2$ или $V' = -\frac{k}{m}V^2$. Здесь m — масса тела.

Как будет показано ниже (пример 48.5), $V = \dfrac{1}{\frac{k}{m} \cdot t + c}$, где c — const. Найдя зависимость скорости от времени, легко найти скорость точки через 3 с после начала замедления.

Найдем сначала параметры $\frac{k}{m}$ и c. Согласно условию задачи, имеем: $V(0) = \frac{1}{c} = 100$ и $V(1) = \dfrac{1}{\frac{k}{m} + c} = 50$. Отсюда $c = \frac{1}{100}$, $\frac{k}{m} = \frac{1}{100}$. Следовательно, скорость точки изменяется по закону $V = \frac{100}{t+1}$. Поэтому $V(3) = 25$ м/с. ●

Задача 2

Найти кривую, проходящую через точку $(4;1)$, зная, что отрезок любой касательной к ней, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

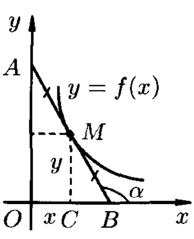


Рис. 212

❍ Решение: Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка кривой, уравнение которой $y = f(x)$. Для определенности предположим, что кривая расположена в первой четверти (см. рис. 212).

Для составления дифференциального уравнения воспользуемся геометрическим смыслом первой производной: $\operatorname{tg}\alpha$ есть угловой коэффициент касательной; в точке $M(x;y)$ он равен y', т. е. $y' = \operatorname{tg}\alpha$.

Из рисунка видно, что $\operatorname{tg}(\angle MBC) = \frac{MC}{BC}$. Но

$$\operatorname{tg}(\angle MBC) = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$

$MC = y$. По условию задачи $AM = MB$, следовательно, $OC = CB = x$.

Таким образом, получаем $-\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ или $y' = -\frac{y}{x}$. Решением полученного дифференциального уравнения является функция $y = \frac{4}{x}$ (гипербола). Решение будет приведено в п. 48.2 (пример 48.4). ●

Другие задачи

Можно показать, что:

- закон изменения массы радия в зависимости от времени («радиоактивный распад») описывается дифференциальным уравнением $\frac{dm}{dt} = -k \cdot m$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности, $m(t)$ — масса радия в момент t;

- «закон охлаждения тел», т. е. закон изменения температуры тела в зависимости от времени, описывается уравнением $\frac{dT}{dt} = k(T - t_0)$, где $T(t)$ — температура тела в момент времени t, k — коэффициент пропорциональности, t_0 — температура воздуха (среды охлаждения);

- зависимость массы x вещества, вступившего в химическую реакцию, от времени t во многих случаях описывается уравнением $\frac{dx}{dt} = k \cdot x$, где k — коэффициент пропорциональности;

- «закон размножения бактерий» (зависимость массы m бактерий от времени t) описывается уравнением $m'_t = k \cdot m$, где $k > 0$;

- закон изменения давления воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря описывается уравнением $\frac{dp}{dh} = -k \cdot p$, где $p(h)$ — атмосферное давление воздуха на высоте h, $k > 0$.

Уже приведенные примеры указывают на исключительно важную роль дифференциальных уравнений при решении самых разнообразных задач.

§ 48. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

48.1. Основные понятия

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае можно записать в виде

$$F(x; y; y') = 0. \tag{48.1}$$

Уравнение связывает независимую переменную x, искомую функцию y и ее производную y'. Если уравнение (48.1) можно разрешить относительно y', то его записывают в виде

$$y' = f(x; y) \tag{48.2}$$

и называют *ДУ первого порядка, разрешенным относительно производной.* Мы в основном будем рассматривать эту форму записи ДУ.

Уравнение (48.2) устанавливает связь (зависимость) между координатами точки $(x; y)$ и угловым коэффициентом y' касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Следовательно, ДУ $y' = f(x; y)$ дает совокупность направлений (*поле направлений*) на плоскости Oxy. Таково геометрическое истолкование ДУ первого порядка.

Кривая, во всех точках которой направление поля одинаково, называется *изоклиной.* Изоклинами можно пользоваться для приближенного построения интегральных кривых. Уравнение изоклины можно получить, если положить $y' = c$, т. е. $f(x; y) = c$.

Пример 48.1. С помощью изоклин начертить вид интегральных кривых уравнения $y' = 2x$.

Решение: Уравнение изоклин этого ДУ будет $2x = c$, т. е. изоклинами здесь будут прямые, параллельные оси Oy $(x = \frac{c}{2})$. В точках прямых проведем отрезки, образующие с осью Ox один и тот же угол α, тангенс которого равен c.

Так, при $c = 0$ имеем $x = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$, поэтому $\alpha = 0$;

при $c = 1$ уравнение изоклины $x = \frac{1}{2}$, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = 1$ и $\alpha = 45°$;

при $c = -1$: $x = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\alpha = -45°$;

при $c = 2$: $x = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63°$ и т. д.

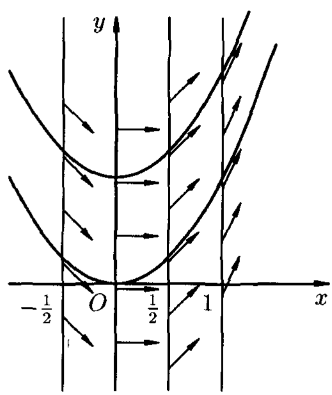


Рис. 213

Построив четыре изоклины и отметив на каждой из них ряд стрелочек, наклоненных к оси Ox под определенным углом (см. рис. 213), по их направлениям строим линии. Они, как видно, представляют собой семейство парабол. ●

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, можно записать в *дифференциальной форме*:

$$P(x; y)\,dx + Q(x; y)\,dy = 0, \tag{48.3}$$

где $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ — известные функции. Уравнение (48.3) удобно тем, что переменные x и y в нем равноправны, т. е. любую из них можно рассматривать как функцию другой. Отметим, что от одного вида записи ДУ можно перейти к другому.

Интегрирование ДУ в общем случае приводит к бесконечному множеству решений (отличающихся друг от друга постоянными величинами). Легко догадаться, что решением уравнения $y' = 2x$ является функция $y = x^2$, а также $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - \sqrt{2}$ и вообще $y = x^2 + c$, где c — const.

Чтобы решение ДУ приобрело конкретный смысл, его надо подчинить некоторым дополнительным условиям.

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна быть равна заданному числу y_0, т. е. $y = y_0$ называется ***начальным условием.*** Начальное условие записывается в виде

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{или} \quad y\Big|_{x=x_o} = y_0. \tag{48.4}$$

Общим решением ДУ первого порядка называется функция $y = \varphi(x; c)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

1. Функция $\varphi(x; c)$ является решением ДУ при каждом фиксированном значении c.

2. Каково бы ни было начальное условие (48.4), можно найти такое значение постоянной $c = c_0$, что функция $y = \varphi(x; c_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Частным решением ДУ первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x; c_0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x; c)$ при конкретном значении постоянной $c = c_0$.

Если общее решение ДУ найдено в неявном виде, т. е. в виде уравнения $\Phi(x; y; c) = 0$, то такое решение называется ***общим интегралом*** ДУ. Уравнение $\Phi(x; y; c_0) = 0$ в этом случае называется ***частным интегралом*** уравнения.

С геометрической точки зрения $y = \varphi(x; c)$ есть семейство интегральных кривых на плоскости Oxy; частное решение $y = \varphi(x; c_0)$ - одна кривая из этого семейства, проходящая через точку $(x_0; y_0)$.

Задача отыскания решения ДУ первого порядка (48.3), удовлетворяющего заданному начальному условию (48.4), называется ***задачей Коши.***

Теорема 48.1 (существования и единственности решения задачи Коши). Если в уравнении (48.2) функция $f(x; y)$ и ее частная производная $f'_y(x; y)$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку $(x_0; y_0)$, то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию (48.4).

(Без доказательства).

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что при выполнении ее условий существует единственная интегральная кривая ДУ, проходящая через точку $(x_0; y_0)$.

Рассмотрим теперь методы интегрирования ДУ первого порядка определенного типа.

48.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Наиболее простым ДУ первого порядка является, уравнение *вида*

$$P(x) \cdot dx + Q(y) \cdot dy = 0. \tag{48.5}$$

В нем одно слагаемое зависит только от x, а другое — от y. Иногда такие ДУ называют уравнениями *с разделенными переменными*. Проинтегрировав почленно это уравнение, получаем:

$$\int P(x) \cdot dx + \int Q(y) \cdot dy = c$$

— его общий интеграл.

Пример 48.2. Найти общий интеграл уравнения $x \cdot dx + y \cdot dy = 0$.

○ Решение: Данное уравнение есть ДУ с разделенными переменными. Поэтому $\int x \cdot dx - \int y \cdot dy = c_1$ или $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c_1$. Обозначим $\frac{c}{2} = c_1$. Тогда $x^2 - y^2 = c$ — общий интеграл ДУ. ●

Более общий случай описывают уравнения с *разделяющимися переменными*, которые имеют вид

$$\boxed{P_1(x) \cdot Q_1(y) \cdot dx + P_2(x) \cdot Q_2(y) \cdot dy = 0.} \tag{48.6}$$

Особенность уравнения (48.6) в том, что коэффициенты при dx и dy представляют собой произведения двух функций (чисел), одна из которых зависит только от x, другая — только от y.

Уравнение (48.6) легко сводится к уравнению (48.5) путем почленного деления его на $Q_1(y) \cdot P_2(x) \neq 0$. Получаем:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} \cdot dy = 0, \qquad \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} \cdot dy = c$$

— общий интеграл.

Замечания. 1. При проведении почленного деления ДУ на $Q_1(y) \times$ $\times P_2(x)$ могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует отдельно решить уравнение $Q_1(y) \cdot P_2(x) = 0$ и установить те решения ДУ, которые не могут быть получены из общего решения, — ***особые решения***.

2. Уравнение $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ также сводится к уравнению с разделенными переменными. Для этого достаточно положить $y' = \frac{dy}{dx}$ и разделить переменные.

3. Уравнение $y' = f(ax + by + c)$, где a, b, c — числа, путем замены $ax + by + c = u$ сводится к ДУ с разделяющимися переменными. Дифференцируя по x, получаем:

$$\frac{du}{dx} = a + b \cdot \frac{dy}{dx}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{du}{dx} = a + b \cdot f(u),$$

откуда следует

$$\frac{du}{a + b \cdot f(u)} = dx.$$

Интегрируя это уравнение и заменяя u на $ax + by + c$, получим общий интеграл исходного уравнения.

Пример 48.3. Решить уравнение $(y + xy) \cdot dx + (x - xy) \cdot dy = 0$.

◐ Решение: Преобразуем левую часть уравнения:

$$y \cdot (1 + x) \cdot dx + x \cdot (1 - y) \cdot dy = 0.$$

Оно имеет вид (48.6). Делим обе части уравнения на $xy \neq 0$:

$$\frac{1 + x}{x}\,dx + \frac{1 - y}{y}\,dy = 0.$$

Решением его является общий интеграл $x + \ln|x| + \ln|y| - y = c$, т. е. $\ln|xy| + x - y = c$.

Здесь уравнение $Q_1(y) \cdot P_2(x) = 0$ имеет вид $xy = 0$. Его решения $x = 0$, $y = 0$ являются решениями данного ДУ, но не входят в общий интеграл. Значит, решения $x = 0$, $y = 0$ являются особыми. ●

Пример 48.4. Решить уравнение $y' = -\frac{y}{x}$, удовлетворяющее условию $y(4) = 1$.

◐ Решение: Этот пример представляет собой решение задачи 2 из п. 47.2.

Имеем: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ или $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$. Проинтегрировав, получим:

$$\ln|y| = \ln|c| - \ln|x|,$$

т. е. $y = \frac{c}{x}$ — общее решение ДУ.

Оно представляет собой, геометрически, семейство равносторонних гипербол. Выделим среди них одну, проходящую через точку $(4; 1)$. Подставим $x = 4$ и $y = 1$ в общее решение уравнения: $1 = \frac{c}{4}$, $c = 4$.

Получаем: $y = \frac{4}{x}$ — частное решение уравнения $y' = -\frac{y}{x}$. ●

Пример 48.5. Найти общее решение ДУ $m \cdot V' = -k \cdot V^2$.

Решение: Этот пример демонстрирует решение задачи 1 из п. 47.2.

Приведем данное уравнение к виду (48.5):

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = -kV^2, \quad m \cdot dV + kV^2\,dt = 0, \quad \frac{dV}{V^2} + \frac{k}{m}\,dt = 0.$$

Интегрируем: $\int \frac{dV}{V^2} + \frac{k}{m}\int dt = -c$, т. е. $-\frac{1}{V} + \frac{k}{m}t + c = 0$. Отсюда $V = \dfrac{1}{\frac{k}{m}t + c}$ — общее решение уравнения. ●

48.3. Однородные дифференциальные уравнения

К уравнению с разделяющимися переменными приводятся однородные ДУ первого порядка.

Функция $f(x; y)$ называется *однородной функцией n-го порядка* (*измерения*), если при умножении каждого ее аргумента на произвольный множитель λ вся функция умножится на λ^n, т. е.

$$f(\lambda \cdot x; \lambda \cdot y) = \lambda^n \cdot f(x; y).$$

Например, функция $f(x; y) = x^2 - 2xy$ есть однородная функция второго порядка, поскольку

$$f(\lambda \cdot x; \lambda \cdot y) = (\lambda x)^2 - 2(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 \cdot (x^2 - 2xy) = \lambda^2 \cdot f(x; y).$$

Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x; y) \tag{48.7}$$

называется ***однородным***, если функция $f(x; y)$ есть однородная функция нулевого порядка.

Покажем, что однородное ДУ (48.7) можно записать в виде

$$\boxed{y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).} \tag{48.8}$$

Если $f(x; y)$ — однородная функция нулевого порядка, то, по определению, $f(x; y) = f(\lambda x; \lambda y)$. Положив $\lambda = \frac{1}{x}$, получаем:

$$f(x; y) = f\left(\frac{x}{x}; \frac{y}{x}\right) = f\left(1; \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$ ■

Однородное уравнение (48.8) преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной (подстановки)

$$\boxed{\frac{y}{x} = u} \quad \text{или, что то же самое,} \quad \boxed{y = u \cdot x.} \tag{48.9}$$

Действительно, подставив $y = ux$ и $y' = u'x + u$ в уравнение (48.8), получаем $u'x+u = \varphi(u)$ или $x\cdot\dfrac{du}{dx} = \varphi(u)-u$, т. е. уравнение с разделяющимися переменными. Найдя его общее решение (или общий интеграл), следует заменить в нем u на $\dfrac{y}{x}$. Получим общее решение (интеграл) исходного уравнения.

Однородное уравнение часто задается в дифференциальной форме:

$$\boxed{P(x;y)\cdot dx + Q(x;y)\cdot dy = 0.} \tag{48.10}$$

ДУ (48.10) будет однородным, если $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ — однородные функции одинакового порядка.

Переписав уравнение (48.10) в виде $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{P(x;y)}{Q(x;y)}$ и применив в правой части рассмотренное выше преобразование, получим уравнение $y' = \varphi\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$.

При интегрировании уравнений вида (48.10) нет необходимости предварительно приводить их (но можно) к виду (48.8): подстановка (48.9) сразу преобразует уравнение (48.10) в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 48.6. Найти общий интеграл уравнения

$$(x^2 - y^2)\cdot dx + 2xy\cdot dy = 0.$$

Решение: Данное уравнение однородное, т. к. функции $P(x;y) = x^2 - y^2$ и $Q(x;y) = 2xy$ — однородные функции второго порядка.

Положим $y = u\cdot x$. Тогда $dy = x\cdot du + u\cdot dx$. Подставляем в исходное уравнение:

$$(x^2 - u^2x^2)\cdot dx + 2x\cdot ux\cdot x\cdot du + 2x\cdot ux\cdot u\cdot dx,$$
$$x^2(1 - u^2 + 2u^2)\cdot dx + 2ux^3\cdot du = 0,$$
$$(1 + u^2)\cdot dx + 2ux\cdot du = 0,$$

последнее — уравнение с разделяющимися переменными. Делим переменные

$$\frac{dx}{x} + \frac{2u}{1+u^2}\cdot du = 0$$

и интегрируем

$$\ln|x| + \ln(1+u^2) = c_1, \quad \ln\big(|x|\cdot(1+u^2)\big) = c_1, \quad |x|(1+u^2) = e^{c_1}.$$

Обозначим $c = e^{c_1}$, $c > 0$. Тогда

$$|x|\cdot(1+u^2) = c.$$

Заменяя u на $\dfrac{y}{x}$, получаем: $x^2 + y^2 = cx$ — общий интеграл исходного уравнения.

Отметим, что данное уравнение можно было сначала привести к виду (48.8):

$$x^2 - y^2 + 2xy \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}, \quad y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2 \cdot \frac{y}{x}}.$$

Затем положить $y = u \cdot x$, тогда $y' = u'x + u$ и т. д. ●

Замечание. Уравнение вида $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$, где a, b, c, a_1, b_1, c_1 — числа, приводится к однородному или с разделяющимися переменными Для этого вводят новые переменные u и v, положив $x = u+\alpha$, $y = v+\beta$, где α и β — числа. Их подбирают так, чтобы уравнение стало однородным.

Пример 48.7. Найти общий интеграл уравнения

$$(x + 2y + 1) \cdot dx - (2x + y - 1) \cdot dy = 0,$$

т. е $y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + y - 1}$.

○ Решение: Положив $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, получаем:

$$dx = du, \ dy = dv,$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} = \frac{u + \alpha + 2v + 2\beta + 1}{2u + 2\alpha + v + \beta - 1} = \frac{u + 2v + (\alpha + 2\beta + 1)}{2u + v + (2\alpha + \beta - 1)}.$$

Подберем α и β так, чтобы

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 1 = 0, \\ 2\alpha + \beta - 1 = 0. \end{cases}$$

Находим, что $\alpha = 1$, $\beta = -1$. Заданное уравнение примет вид

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + 2v}{2u + v}$$

и будет являться однородным. Его решение получается, как это было показано выше, при помощи подстановки $v = tu$. Заметим, что, решив его, следует заменить u и v соответственно на $x - 1$ и $y + 1$. В итоге получим $(y-x+2)^3 = c(x+y)$ — общий интеграл данного уравнения. ●

48.4. Линейные уравнения. Уравнение Я. Бернулли

Дифференциальное уравнение первого порядка называется ***линейным***, если его можно записать в виде

$$y' + p(x) \cdot y = g(x), \tag{48.11}$$

где $p(x)$ и $g(x)$ — заданные функции, в частности — постоянные.

Особенность ДУ (48.11): искомая функция y и ее производная y' входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

Рассмотрим два метода интегрирования ДУ (48.11) — метод И. Бернулли и метод Лагранжа.

Метод И. Бернулли

Решение уравнения (48.11) ищется в виде произведения двух других функций, т. е. с помощью подстановки $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — неизвестные функции от x, причем одна из них произвольна (но не равна нулю — действительно любую функцию $y(x)$ можно записать как

$$y(x) = \frac{y(x)}{v(x)} \cdot v(x) = u(x) \cdot v(x),$$

где $v(x) \neq 0$). Тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставляя выражения y и y' в уравнение (48.11), получаем: $u' \cdot v + u \quad v' + p(x) \cdot u \cdot v = g(x)$ или

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + p(x) \cdot v) = g(x). \tag{48.12}$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т. е решим ДУ $v' + p(x) \cdot v = 0$. Итак, $\frac{dv}{dx} + p(x) \cdot v = 0$, т. е. $\frac{dv}{v} = -p(x) \cdot dx$. Интегрируя, получаем:

$$\ln|v| = -\int p(x) \cdot dx + \ln|c|.$$

Ввиду свободы выбора функции $v(x)$, можно принять $c = 1$. Отсюда

$$v = e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Подставляя найденную функцию v в уравнение (48.12), получаем

$$u' \cdot e^{-\int p(x)\,dx} = g(x).$$

Получено уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int p(x)\,dx} = g(x), \quad du = g(x) \cdot e^{+\int p(x)\,dx} dx,$$

$$u = \int g(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx} dx + c.$$

Возвращаясь к переменной y, получаем решение

$$y = u \cdot v = \left(\int g(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx} dx + c\right) \cdot e^{-\int p(x)\,dx} \tag{48.13}$$

исходного ДУ (48.11).

Пример 48.8. Проинтегрировать уравнение $y' + 2xy = 2x$.

❍ Решение: Полагаем $y = u \cdot v$. Тогда $u' \cdot v + u \cdot v' + 2x \cdot uv = 2x$, т. е. $u' \cdot v + u \cdot (v' + 2xv) = 2x$. Сначала решаем уравнение $v' + 2x \cdot v = 0$:

$$\frac{dv}{v} = -2x \cdot dx, \quad \ln|v| = -x^2, \quad v = e^{-x^2}.$$

Теперь решаем уравнение $u' \cdot e^{-x^2} + u \cdot 0 = 2x$, т. е.

$$\frac{du}{dx} = 2x \cdot e^{x^2}, \quad du = \int 2x \cdot e^{x^2} \cdot dx, \quad u = e^{x^2} + c.$$

Итак, общее решение данного уравнения есть $y = u \cdot v = (e^{x^2} + c) \cdot e^{-x^2}$, т. е. $y = 1 + c \cdot e^{-x^2}$. ●

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Уравнение (48.11) интегрируется следующим образом.

Рассмотрим соответствующее уравнение без правой части, т. е. уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$. Оно называется *линейным однородным ДУ первого порядка*. В этом уравнении переменные делятся:

$$\frac{dy}{y} = -p(x) \cdot dx \quad \text{и} \quad \ln|y| = -\int p(x) \cdot dx + \ln|c_1|.$$

Таким образом, $\left|\frac{y}{c_1}\right| = e^{-\int p(x)\,dx}$, т. е.

$$y = \pm c_1 e^{-\int p(x)\,dx} \quad \text{или} \quad y = c \cdot e^{-\int p(x)\,dx}, \quad \text{где} \quad c = \pm c_1.$$

Метод вариации произвольной постоянной состоит в том, что постоянную c в полученном решении заменяем функцией $c(x)$, т. е. полагаем $c = c(x)$. Решение уравнения (48.11) ищем в виде

$$y = c(x) \cdot e^{-\int p(x)\,dx}. \tag{48.14}$$

Находим производную[1]:

$$y' = c'(x)\exp\Big(-\int p(x)\,dx\Big) + c(x)\exp\Big(-\int p(x)\,dx\Big) \cdot \big(-p(x)\big).$$

Подставляем значения y и y' в уравнение (48.11):

$$c'(x)\exp\Big(-\int p(x)\,dx\Big) - c(x)p(x)\exp\Big(-\int p(x)\,dx\Big) +$$
$$+ c(x)p(x)\exp\Big(-\int p(x)\,dx\Big) = g(x).$$

Второе и третье слагаемые взаимно уничтожаются, и уравнение примет вид

$$c'(x)\exp\Big(-\int p(x)\,dx\Big) = g(x).$$

Следовательно,

$$dc(x) = g(x)\exp\Big(\int p(x)\,dx\Big) \cdot dx.$$

Интегрируя, находим:

$$c(x) = \int g(x) \cdot \exp\Big(\int p(x)\,dx\Big) \cdot dx + c.$$

Подставляя выражение $c(x)$ в равенство (48.14), получим общее решение ДУ (48.11):

$$y = \left[\int g(x) \cdot \exp\Big(\int p(x)\,dx\Big) \cdot dx + c\right] \cdot \exp\Big(-\int p(x)\,dx\Big).$$

Естественно, та же формула была получена методом Бернулли (ср. с (48 13)).

Пример 48.9. Решить пример 48.8 методом Лагранжа.

---

[1]Для удобства записи пользуемся обозначением $e^{F(x)} = \exp(F(x))$

○ Решение: Решаем уравнение $y' + 2xy = 0$. Имеем $\frac{dy}{y} = -2x \cdot dx$, или $y = c \cdot e^{-x^2}$. Заменяем c на $c(x)$, т. е. решение ДУ $y' + 2xy = 2x$ ищем в виде $y = c(x) \cdot e^{-x^2}$. Имеем

$$y' = c'(x) \cdot e^{-x^2} + c(x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x).$$

Тогда

$$c'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xc(x) \cdot e^{-x^2} + 2xc(x) \cdot e^{-x^2} = 2x, \quad \text{т. е.} \quad c'(x) \cdot e^{-x^2} = 2x,$$

или $c(x) = \int 2x \cdot e^{x^2} \cdot dx$, или $c(x) = e^{x^2} + c$. Поэтому $y = \left(e^{x^2} + c\right) \cdot e^{-x^2}$, или $y = 1 + c \cdot e^{-x^2}$ — общее решение данного уравнения. ●

Замечание. Уравнение вида $\big(x \cdot P(y) + Q(y)\big) \cdot y' = R(y)$, где $P(y)$, $Q(y)$, $R(y) \neq 0$ заданные функции, можно свести к линейному, если x считать функцией, а y – аргументом: $x = x(y)$. Тогда, пользуясь равенством $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, получаем $\frac{x \cdot P(y) + Q(y)}{x'} = R(y)$, т. е. $x' - \frac{P(y)}{R(y)} \cdot x = \frac{Q(y)}{R(y)}$ — линейное относительно x уравнение. Его решение ищем в виде $x = u \cdot v$, где $u = u(y)$, $v = v(y)$ — две неизвестные функции.

Пример 48.10. Найти общее решение уравнения $(x + y) \cdot y' = 1$.

○ Решение: Учитывая, что $y' = \frac{1}{x'}$, от исходного уравнения переходим к линейному уравнению $x' = x + y$.

Применим подстановку $x = u \cdot v$. Тогда $x' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Получаем: $u' \cdot v + u \cdot v' = u \cdot v + y$, или $u' \cdot v + u(v' - v) = y$.

Находим функцию v: $v' - v = 0$, $\frac{dv}{v} = dy$, $v = e^y$.

Находим функцию u: $u' \cdot e^y + u \cdot 0 = y$, т. е. $u' = y \cdot e^{-y}$, или $u = \int y \cdot e^{-y} \cdot dy$. Интегрируя по частям, находим: $u = -y \cdot e^{-y} - e^{-y} + c$.

Значит, общее решение данного уравнения:

$$x = u \cdot v = (-y \cdot e^{-y} - e^{-y} + c) \cdot e^y,$$

или $x = -y - 1 + c \cdot e^y$. ●

Уравнение Я. Бернулли

Уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = g(x) \cdot y^n, \ n \in \mathbb{R}, \ n \neq 0, \ n \neq 1 \tag{48.15}$$

называется ***уравнением Бернулли.*** Покажем, что его можно привести к линейному.

Если $n = 0$, то ДУ (48.15) — линейное, а при $n = 1$ — с разделяющимися переменными.

В общем случае, разделив уравнение (48.15) на $y^n \neq 0$, получим:

$$y^{-n} \cdot y' + p(x) \cdot y^{-n+1} = g(x). \tag{48.16}$$

Обозначим $y^{-n+1} = z$. Тогда $z' = \frac{dz}{dx} = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y'$. Отсюда находим $y^{-n} \cdot y' = \frac{z'}{1-n}$. Уравнение (48 16) принимает вид

$$\frac{1}{1-n} \cdot z' + p(x) \cdot z = g(x).$$

Последнее уравнение является линейным относительно z. Решение его известно. Таким образом, подстановка $z = y^{-n+1}$ сводит уравнение (48.15) к линейному. На практике ДУ (48.15) удобнее искать методом И. Бернулли в виде $y = u \cdot v$ (не сводя его к линейному).

48.5. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Уравнение

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = 0 \tag{48.17}$$

называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x;y)$, т. е.

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = du(x;y).$$

В этом случае ДУ (48.17) можно записать в виде $du(x;y) = 0$, а его общий интеграл будет:

$$u(x;y) = c. \tag{48.18}$$

Приведем условие, по которому можно судить, что выражение

$$\Delta = P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy$$

есть полный дифференциал.

Теорема 48.2. Для того чтобы выражение $\Delta = P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy$, где функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy, было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{48.19}$$

Необходимость

❑ Пусть Δ есть полный дифференциал, т. е.

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = du(x;y).$$

Учитывая, что $du(x;y) = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$ (см. п. 44.3), имеем:

$$P(x;y) = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad Q(x;y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Дифференцируя эти равенства по y и по x соответственно, получаем

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial x}.$$

А так как смешанные частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial x}$ равны между собой (см. п. 44.2), получаем (48.19).

Достаточность

Пусть в области D выполняется условие (48.19). Покажем, что существует функция $u(x;y)$ в области D такая, что

$$du(x;y) = P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy.$$

Найдем эту функцию. Искомая функция должна удовлетворять требованиям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x;y) \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x;y). \tag{48.20}$$

Если в первом уравнении (48.20) зафиксировать y и проинтегрировать его по x, то получим:

$$u(x;y) = \int P(x;y)\,dx + \varphi(y). \tag{48.21}$$

Здесь произвольная постоянная $c = \varphi(y)$ зависит от y (либо является числом). В решении (48.21) не известна лишь $\varphi(y)$. Для ее нахождения продифференцируем функцию (48.21) по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\int P(x;y)\,dx\right)'_y + \varphi'(y).$$

Используя второе равенство (48.20), можно записать:

$$Q(x;y) = \left(\int P(x,y)\,dx\right)'_y + \varphi'(y).$$

Отсюда

$$\varphi'(y) = Q(x;y) - \left(\int P(x;y)\,dx\right)'_y. \tag{48.22}$$

В равенстве (48.22) левая часть зависит от y. Покажем, что и правая часть равенства зависит только от y.

Для этого продифференцируем правую часть по x и убедимся, что производная равна нулю. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int P(x;y)\,dx\Big)\Big) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big(\int P(x;y)\,dx\Big)\Big) =$$
$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big(\int P(x;y)\,dx\Big)\Big) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(P) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

в силу условия (48.19).

Из равенства (48.22) находим $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) = \int\Big(Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int P(x;y)\,dx\Big)\Big)\,dy + c, \quad c\text{ — const}.$$

Подставляя найденное значение для $\varphi(y)$ в равенство (48.21), находим функцию $u(x;y)$ такую, что $du(x;y) = P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy$. ■

Таким образом, при решении ДУ вида (48.17) сначала проверяем выполнение условия (48.19). Затем, используя равенства (48.20), находим функцию $u(x;y)$. Решение записываем в виде (48.18).

Пример 48.11. Решить уравнение $y' = \dfrac{5-2xy}{3y^2+x^2}$.

Решение: Запишем уравнение в дифференциальной форме:

$$(2xy-5)\,dx + (3y^2+x^2)\,dy = 0.$$

Здесь $P(x;y) = 2xy-5$, $Q(x;y) = 3y^2+x^2$. Проверяем выполнение условия (48.19):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Следовательно, данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Условия (48.20) будут здесь выглядеть как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy-5, \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2+x^2.$$

Отсюда имеем

$$u(x;y) = \int(2xy-5)\,dx = x^2y - 5x + \varphi(y);$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^2y - 5x + \varphi(y))'_y = x^2 + \varphi'(y).$$

Далее

$$3y^2 + x^2 = x^2 + \varphi'(y), \quad \varphi'(y) = 3y^2,$$
$$\varphi(y) = y^3 + c_1, \quad u(x;y) = x^2y - 5x + y^3 + c_1.$$

Общим интегралом является $x^2y-5x+y^3+c_1 = c_2$, или $x^2y-5x+y^3 = c$, где $c = c_2 - c_1$. ●

Если условие (48.19) не выполняется, то ДУ (48.17) не является уравнением в полных дифференциалах.

Однако это уравнение иногда можно привести к уравнению в полных дифференциалах умножением его на некоторую функцию $t(x;y)$, называемую *интегрирующим множителем.*

Чтобы уравнение $t(x;y)\cdot P(x;y)\,dx + t(x;y)\cdot Q(x;y)\,dy = 0$ было уравнением в полных дифференциалах, должно выполняться условие

$$\frac{\partial}{\partial y}(t(x;y)\cdot P(x;y)) = \frac{\partial}{\partial x}(t(x;y)\cdot Q(x;y)).$$

Выполнив дифференцирование $\frac{\partial t}{\partial y}\cdot P + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot t = \frac{\partial t}{\partial x}\cdot Q + \frac{\partial Q}{\partial x}\cdot t$ и приведя подобные слагаемые, получим

$$\frac{\partial t}{\partial y}\cdot P - \frac{\partial t}{\partial x}\cdot Q = t\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big). \tag{48.23}$$

Для нахождения $t(x;y)$ надо проинтегрировать полученное ДУ в частных производных. Решение этой задачи не простое. Нахождение интегрирующего множителя может быть упрощено, если допустить существование t как функции только одного аргумента x либо только y. Пусть, например, $t = t(x)$. Тогда уравнение (48.23) принимает вид

$$-\frac{dt}{dx}\cdot Q = t\cdot\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big), \quad \text{или} \quad \frac{dt}{t} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\cdot dx.$$

Отсюда

$$t(x) = \exp\Bigg(\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\,dx\Bigg). \tag{48.24}$$

При этом выражение $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ должно зависеть только от x.

Аналогично получаем, что если $t = t(y)$ (t не зависит от x), то

$$t(y) = \exp\Bigg(\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}\,dy\Bigg),$$

а подынтегральное выражение должно зависеть только от y.

Пример 48.12. Решить уравнение $(x^2 - y)\cdot dx + (x^2y^2 + x)\cdot dy = 0$.

○ Решение: Здесь $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy^2 + 1$, т. е. $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. Однако

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-1 - 2xy^2 - 1}{x^2y^2 + x} = \frac{-2}{x}$$

зависит только от x.

Следовательно, уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x, выражение которого может быть получено при помощи формулы (48.24). В нашем случае получим, что

$$t(x) = \exp\Big(-\int \frac{2}{x}\,dx\Big) = \exp(-2\ln|x|) = \frac{1}{x^2}.$$

Умножая исходное уравнение на $t = \frac{1}{x^2}$, получаем:

$$\Big(1 - \frac{y}{x^2}\Big)dx + \Big(y^2 + \frac{1}{x}\Big)dy = 0,$$

т. е. уравнение в полных дифференциалах! Решив его, найдем, что общий интеграл заданного уравнения имеет вид

$$x + \frac{y}{x} + \frac{y^3}{3} = c.$$ ●

48.6. Уравнения Лагранжа и Клеро

Рассмотрим дифференциальные уравнения, неразрешенные относительно производной. К ним, в частности, относятся уравнения Лагранжа и Клеро.

Уравнение Лагранжа

Уравнение вида

$$y = x \cdot \varphi(y') + \psi(y'), \tag{48.25}$$

где φ и ψ — известные функции от $y' = \frac{dy}{dx}$, называется ***уравнением Лагранжа***.

Введем вспомогательный параметр, положив $y' = p$. Тогда уравнение (48.25) примет вид

$$y = x \cdot \varphi(p) + \psi(p). \tag{48.26}$$

Дифференцируя по x, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(p) + x \cdot \varphi'(p) \cdot \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \cdot \frac{dp}{dx},$$

т. е. $p - \varphi(p) = (x \cdot \varphi'(p) + \psi'(p)) \cdot \frac{dp}{dx}$, или

$$(p - \varphi(p)) \cdot \frac{dx}{dp} - x \cdot \varphi'(p) = \psi'(p). \tag{48.27}$$

Уравнение (48.27) есть линейное уравнение относительно неизвестной функции $x = x(p)$. Решив его, найдем:

$$x = \lambda(p; c). \tag{48.28}$$

Исключая параметр p из уравнений (48.26) и (48.28), получаем общий интеграл уравнения (48.25) в виде $y = \gamma(x; c)$.

Отметим, что, переходя к уравнению (48.27), мы делили на $\frac{dp}{dx}$. При этом могли быть потеряны решения, для которых $\frac{dp}{dx} = 0$, т. е. $p = p_0 = \text{const}$. Это значение p_0 является корнем уравнения $p - \varphi(p) = 0$ (см. (48.27)).

Решение $y = x \cdot \varphi(p_0) + \psi(p_0)$ является *особым* для уравнения (48.25) (см. понятие особого решения в п. 48.2).

Уравнение Клеро

Рассмотрим частный случай уравнения Лагранжа при $\varphi(y') \equiv y'$. Уравнение (48.25) принимает вид

$$\boxed{y = x \cdot y' + \psi(y')} \tag{48.29}$$

и называется ***уравнением Клеро***.

Положив $y' = p$, получаем:

$$y = xp + \psi(p). \tag{48.30}$$

Дифференцируя по x, имеем:

$$p = p + x \cdot \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \cdot \frac{dp}{dx}, \quad \text{или} \quad (x + \psi'(p)) \cdot \frac{dp}{dx} = 0.$$

Если $\frac{dp}{dx} = 0$, то $p = c$. Поэтому, с учетом (48.30), ДУ (48.29) имеет общее решение

$$y = xc + \psi(c). \tag{48.31}$$

Если $x + \psi'(p) = 0$, то получаем частное решение уравнения в параметрической форме:

$$x = -\psi'(p), \quad y = xp + \psi(p). \tag{48.32}$$

Это решение — *особое* решение уравнения Клеро: оно не содержится в формуле общего решения уравнения.

Пример 48.13. Решить уравнение Клеро $y = xy' + y'^2$.

○ Решение: Общее решение, согласно формуле (48.31), имеет вид $y = cx + c^2$. Особое решение уравнения получаем согласно формулам (48.32) в виде $x = -2p$, $y = xp + p^2$. Отсюда следует: $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}$, т. е. $y = -\frac{x^2}{4}$. ●

§ 49. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

49.1. Основные понятия

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются ДУ *высших порядков*. ДУ второго порядка в общем случае записывается в виде

$$F(x; y; y'; y'') = 0 \tag{49.1}$$

или, если это возможно, в виде, *разрешенном относительно старшей производной*:

$$y'' = f(x; y; y'). \tag{49.2}$$

Будем в основном рассматривать уравнение вида (49.2): от него всегда можно перейти к (49.1).

Решением ДУ (49.2) называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Общим решением ДУ (49.2) называется функция $y = \varphi(x; c_1; c_2)$, где c_1 и c_2 — не зависящие от x произвольные постоянные, удовлетворяющая условиям:

1. $\varphi(x; c_1; c_2)$ является решением ДУ для каждого фиксированного значения c_1 и c_2.

2. Каковы бы ни были начальные условия

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\Big|_{x=x_0} = y'_0, \tag{49.3}$$

существуют единственные значения постоянных $c_1 = c_1^0$ и $c_2 = c_2^0$ такие, что функция $y = \varphi(x; c_1^0; c_2^0)$ является решением уравнения (49.2) и удовлетворяет начальным условиям (49.3).

Всякое решение $y = \varphi(x; c_1^0; c_2^0)$ уравнения (49.2), получающееся из общего решения $y = \varphi(x; c_1; c_2)$ при конкретных значениях постоянных $c_1 = c_1^0$, $c_2 = c_2^0$, называется ***частным решением***.

Решения ДУ (49.2), записанные в виде

$$\Phi(x; y; c_1; c_2) = 0, \quad \Phi(x; y; c_1^0; c_2^0) = 0,$$

называются *общим и частным интегралом* соответственно.

График всякого решения ДУ второго порядка называется *интегральной кривой*. Общее решение ДУ (49.2) представляет собой множество интегральных кривых; частное решение — одна интегральная кривая этого множества, проходящая через точку $(x_0; y_0)$ и имеющая в ней касательную с заданным угловым коэффициентом $y'(x_0) = y'$.

Переписав ДУ (49.1) в виде

$$F\left(x; y; y'; \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \cdot (1 + y'^2)^{3/2}\right) = 0,$$

видим, что ДУ второго порядка устанавливает связь между координатами точки $(x; y)$ интегральной кривой, угловым коэффициентом $k = y'$ касательной к ней и кривизной $K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ в точке $(x; y)$. В этом состоит геометрическое истолкование ДУ второго порядка.

Как и в случае уравнения первого порядка, задача нахождения решения ДУ (49.2), удовлетворяющего заданным начальным условиям (49.3), называется *задачей Коши.*

Теорема 49.1 (существования и единственности задачи Коши). Если в уравнении (49.2) функция $f(x; y; y')$ и ее частные производные f'_y и $f'_{y'}$ непрерывны в некоторой области D изменения переменных x, y и y', то для всякой точки $(x_0; y_0; y'_0) \in D$ существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (49 2), удовлетворяющее начальным условиям (49.3)

Примем теорему без доказательства.

Аналогичные понятия и определения имеют место для *ДУ n-го порядка*, которое в общем виде записывается ка

$$F(x; y; y'; y''; \ldots; y^{(n)}) = 0,$$

или

$$y^{(n)} = f(x; y; y'; y''; \ldots; y^{(n-1)}) = 0, \tag{49.4}$$

если его можно разрешить относительно старшей производной.

Начальные условия для ДУ (49.4) имеют вид

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\Big|_{x=x_0} = y'_0,\ y''\Big|_{x=x_0} = y''_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \tag{49.5}$$

Общее решение ДУ n-го порядка является функцией вида

$$y = \varphi(x; c_1; c_2; \ldots; c_n),$$

содержащей n произвольных, не зависящих от x постоянных.

Решение ДУ (49.4), получающееся из общего решения при конкретных значениях постоянных $c_1 = c_1^0$, $c_2 = c_2^0$, ..., $c_n = c_n^0$, называется *частным решением.*

Задача Коши для ДУ n-го порядка: найти решение ДУ (49.4), удовлетворяющее начальным условиям (49.5).

Проинтегрировать (решить) ДУ n-го порядка означает следующее: найти его общее или частное решение (интеграл) в зависимости от того, заданы начальные условия или нет.

Задача нахождения решения ДУ n-го порядка сложнее, чем первого. Поэтому рассмотрим лишь отдельные виды ДУ высших порядков.

49.2. Уравнения, допускающие понижение порядка

Одним из методов интегрирования ДУ высших порядков является *метод понижения порядка*. Суть метода состоит в том, что с помощью замены переменной (подстановки) данное ДУ сводится к уравнению, порядок которого ниже.

Рассмотрим три типа уравнений, допускающих понижение порядка.

I. Пусть дано уравнение

$$\boxed{y'' = f(x).} \tag{49.6}$$

Порядок можно понизить, введя новую функцию $p(x)$, положив $y' = p(x)$. Тогда $y'' = p'(x)$ и получаем ДУ первого порядка: $p' = f(x)$. Решив его, т. е. найдя функцию $p = p(x)$, решим уравнение $y' = p(x)$. Получим общее решение заданного уравнения (49.6).

На практике поступают иначе: порядок понижается непосредственно путем последовательного интегрирования уравнения.

Так как $y'' = (y')' = \frac{dy'}{dx}$, уравнение (49.6) можно записать в виде $dy' = f(x)\,dx$. Тогда, интегрируя уравнение $y'' = f(x)$, получаем: $y' = \int f(x)\,dx$, или $y' = \varphi_1(x) + c_1$. Далее, интегрируя полученное уравнение по x, находим: $y = \int(\varphi_1(x) + c_1)\,dx$, т. е. $y = \varphi_2(x) + c_1x + c_2$ — общее решение данного уравнения.

Если дано уравнение

$$y^{(n)} = f(x),$$

то, проинтегрировав его последовательно n раз, найдем общее решение уравнения: $y = \varphi_n(x) + c_1 \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \cdot \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + c_n$.

Пример 49.1. Решить уравнение $y^{IV} = \sin 2x$.

Решение: Последовательно интегрируя четыре раза данное уравнение, получим

$$y''' = \int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c_1,$$

$$y'' = \int -\frac{1}{2}\cos 2x\,dx + \int c_1\,dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + c_1x + c_2,$$

$$y' = \frac{1}{8}\cos 2x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3,$$

$$y = \frac{1}{16}\sin 2x + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3x + c_4.$$

II. Пусть дано уравнение

$$\boxed{y'' = f(x; y'),} \tag{49.7}$$

не содержащее явно искомой функции y.

Обозначим $y' = p$, где $p = p(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = p'$ и уравнение (49.7) принимает вид $p' = f(x; p)$. Пусть $p = \varphi(x; c_1)$ — общее решение полученного ДУ первого порядка. Заменяя функцию p на y', получаем ДУ: $y' = \varphi(x; c_1)$. Оно имеет вид (49.6). Для отыскания y достаточно проинтегрировать последнее уравнение. Общее решение уравнения (49.7) будет иметь вид $y = \int \varphi(x; c_1)\, dx + c_2$.

Частным случаем уравнения (49.7) является уравнение

$$\boxed{y'' = f(y'),} \tag{49.8}$$

не содержащее также и независимую переменную x. Оно интегрируется тем же способом: $y' = p(x)$, $y'' = p' = \frac{dp}{dx}$. Получаем уравнение $p' = f(p)$ с разделяющимися переменными.

Если задано уравнение вида

$$\boxed{F(x; y^{(k)}; y^{(k+1)}; \ldots; y^{(n)}) = 0,} \tag{49.9}$$

которое также не содержит явно искомой функции, то его порядок можно понизить на k единиц, положив $y^{(k)} = p(x)$. Тогда $y^{(k+1)} = p'$; $\ldots$; $y^{(n)} = p^{(n-k)}$ и уравнение (49.9) примет вид $F(x; p; p'; \ldots; p^{(n-k)}) = 0$.

Частным случаем уравнения (49.9) является уравнение

$$F(x; y^{(n-1)}; y^{(n)}) = 0,$$

или

$$\boxed{y^{(n)} = f(x; y^{(n-1)}).}$$

С помощью замены $y^{(n-1)} = p(x)$, $y^{(n)} = p'$ это уравнение сводится к ДУ первого порядка.

Пример 49.2. Решить уравнение $y'' - \frac{y'}{x} = 0$.

Решение: Полагаем $y' = p$, где $p = p(x)$, $y'' = p'$.

Тогда $p' - \frac{p}{x} = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}$, $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, получим $\ln|p| = \ln|x| + \ln|c_1|$, $\ln|p| = \ln|c_1 x|$, $p = c_1 x$. Возвращаясь к исходной переменной, получим $y' = c_1 x$, $y = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2$ — общее решение уравнения. ●

III. Рассмотрим уравнение

$$\boxed{y'' = f(y; y'),} \qquad (49.10)$$

которое *не содержит* явно *независимой переменной* x.

Для понижения порядка уравнения введем новую функцию $p = p(y)$, зависящую от переменной y, полагая $y' = p$. Дифференцируем это равенство по x, учитывая, что $p = p(y(x))$:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot p,$$

т. е. $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$. Теперь уравнение (49.10) запишется в виде $p \cdot \frac{dp}{dy} = f(y; p)$. Пусть $p = \varphi(y; c_1)$ является общим решением этого ДУ первого порядка. Заменяя функцию $p(y)$ на y', получаем $y' = \varphi(y; c_1)$ — ДУ с разделяющимися переменными. Интегрируя его, находим общий интеграл уравнения (49.10):

$$\int \frac{dy}{\varphi(y; c_1)} = x + c_2.$$

Частным случаем уравнения (49.10) является ДУ

$$\boxed{y'' = f(y).}$$

Такое уравнение решается при помощи аналогичной подстановки: $y' = p(y)$, $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$.

Так же поступаем при решении уравнения $F(y; y'; y''; \ldots; y^{(n)}) = 0$. Его порядок можно понизить на единицу, положив $y' = p$, где $p = p(y)$. По правилу дифференцирования сложной функции находим $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Затем найдем $y''' = \frac{d}{dx}(p \cdot p'_y) = \frac{d}{dy}(p \cdot p'_y) \cdot \frac{dy}{dx} = p((p'_y)^2 + p \cdot p''_{yy})$ и т. д.

Замечание. Уравнение (49.8) также можно решать, применяя подстановку $y' = p$, где $p = p(y)$.

Пример 49.3. Найти частное решение уравнения

$$y'' - (y')^2 + y'(y - 1) = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

Решение: Уравнение имеет вид (49.10). Положив $y' = p(y)$, $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$, получаем:

$$p \cdot \frac{dp}{dy} - p^2 + p(y - 1) = 0.$$

Так как $p \neq 0$ (иначе $y' = 0$, что противоречит начальному условию $y' = 2$), то $\frac{dp}{dy} - p + y - 1 = 0$ — получили линейное ДУ первого порядка.

Проведем решение полученного линейного ДУ методом Бернулли (п. 48.4). Полагаем $p = u \cdot v$. Имеем: $u'v + uv' - uv + y - 1 = 0$, или $u'v + u(v' - v) = 1 - y$.

Подберем функцию v так, чтобы $v' - v = 0$. Тогда $\frac{dv}{v} = dy$, $v = e^y$. Получаем:

$$u' \cdot e^y + u \cdot 0 = 1 - y, \quad \text{т. е.} \quad du = (1 - y) \cdot e^{-y}\, dy.$$

Интегрируя это равенство, находим, что $u = -(1 - y) \cdot e^{-y} + e^{-y} + c_1$. Следовательно,

$$p = uv = ((-1 + y)e^{-y} + e^{-y} + c_1) \cdot e^{+y}, \quad \text{или} \quad p = c_1 e^y + y.$$

Заменяя p на y', получаем: $y' = c_1 \cdot e^y + y$. Подставляя $y' = 2$ и $y = 2$ в это равенство, находим c_1:

$$2 = c_1 e^2 + 2, \quad c_1 = 0.$$

Имеем $y' = y$. Отсюда $y = c_2 e^x$. Находим c_2 из начальных условий: $2 = c_2 e^0$, $c_2 = 2$. Таким образом, $y = 2e^x$ — частное решение данного ДУ. ●

49.3. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Основные понятия

Многие задачи математики, механики, электротехники и других технических наук приводят к линейным дифференциальным уравнениям.

Уравнение вида

$$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + b_n(x)y = g(x), \tag{49.11}$$

где $b_0(x) \neq 0$, $b_1(x), \ldots, b_n(x), g(x)$ — заданные функции (от x), называется ***линейным ДУ n-го порядка***.

Оно содержит искомую функцию y и все ее производные лишь в первой степени. Функции $b_0(x), b_1(x), \ldots, b_n(x)$ называются *коэффициентами* уравнения (49.11), а функция $g(x)$ — его *свободным членом*.

Если свободный член $g(x) \equiv 0$, то уравнение (49.11) называется ***линейным однородным*** уравнением; если $g(x) \neq 0$, то уравнение (49.11) называется ***неоднородным***.

Разделив уравнение (49.11) на $b_0(x) \neq 0$ и обозначив

$$\frac{b_1(x)}{b_0(x)} = a_1(x), \ldots, \frac{b_n(x)}{b_0(x)} = a_n(x), \frac{g(x)}{b_0(x)} = f(x),$$

запишем уравнение (49.11) в виде *приведенного*:

$$\boxed{y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x).} \qquad (49.12)$$

Далее будем рассматривать линейные ДУ вида (49.12) и считать, что коэффициенты и свободный член уравнения (49.12) являются непрерывными функциями (на некотором интервале $(a; b)$). При этих условиях справедлива теорема существования и единственности решения ДУ (49.12) (см. теорему 49.1).

49.4. Линейные однородные ДУ второго порядка

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) второго порядка:

$$\boxed{y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0} \qquad (49.13)$$

и установим некоторые свойства его решений.

Теорема 49.2. Если функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ являются частными решениями уравнения (49 13), то решением этого уравнения является также функция

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \qquad (49.14)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные

❑ Подставим функцию $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ и ее производные в левую часть ЛОДУ (49.13). Получаем:

$$\begin{aligned}
&(c_1y_1 + c_2y_2)'' + a_1(x)\cdot(c_1y_1 + c_2y_2)' + a_2(x)\cdot(c_1y_1 + c_2y_2) = \\
&\quad = c_1y_1'' + c_2y_2'' + a_1(x)\cdot(c_1y_1' + c_2y_2') + a_2(x)\cdot(c_1y_1 + c_2y_2) = \\
&\quad = c_1(y_1'' + a_1(x)\cdot y_1' + a_2(x)\cdot y) + c_2(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2) = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = c_1\cdot 0 + c_2 \quad 0 = 0,
\end{aligned}$$

так как функции y_1 и y_2 — решения уравнения (49.13) и, значит, выражения в скобках тождественно равны нулю.

Таким образом, функция $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ также является решением уравнения (49 13). ■

Из теоремы 49.2, как следствие, вытекает, что если y_1 и y_2 — решения уравнения (49.13), то решениями его будут также функции $y = y_1 + y_2$ и $y = c \cdot y_1$.

Функция (49.14) содержит две произвольные постоянные и является решением уравнения (49.13). Может ли она являться общим решением уравнения (49.13)?

Для ответа на вопрос введем понятие линейной зависимости и линейной независимости функций.

Функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ называются ***линейно независимыми*** на интервале $(a; b)$, если равенство

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0, \tag{49.15}$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Если хотя бы одно из чисел α_1 или α_2 отлично от нуля и выполняется равенство (49.15), то функции y_1 и y_2 называются ***линейно зависимыми*** на $(a; b)$.

Очевидно, что функции y_1 и y_2 линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т. е для всех $x \in (a; b)$ выполняется равенство $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$, или $y_1 = \lambda y_2$, $\lambda = \text{const}$.

Например, функции $y_1 = 3e^x$ и $y_2 = e^x$ линейно зависимы: $\frac{y_1}{y_2} = 3 = \text{const}$; функции y_1 и $y_3 = e^{2x}$ — линейно независимы: $\frac{y_1}{y_2} = \frac{3e^x}{e^{2x}} = 3e^{-x} \neq \text{const}$; функции $y_4 = \sin x$ и $y_5 = \cos x$ являются линейно независимыми: равенство $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = 0$ выполняется для всех $x \in \mathbb{R}$ лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (или $\frac{y_4}{y_5} = \operatorname{tg} x \neq \text{const}$).

Средством изучения линейной зависимости системы функций является так называемый *определитель Вронского* или *вронскиан* (Ю. Вронский — польский математик).

Для двух дифференцируемых функций $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ вронскиан имеет вид

$$\boxed{W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.}$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 49.3. Если дифференцируемые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на $(a; b)$, то определитель Вронского на этом интервале тождественно равен нулю

❑ Так как функции y_1 и y_2 линейно зависимы, то в равенстве (49.15) значение α_1 или α_2 отлично от нуля. Пусть $\alpha_1 \neq 0$, тогда $y_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2$; поэтому для любого $x \in (a; b)$

$$W(x) = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 & y_2 \\ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0. \qquad \blacksquare$$

Теорема 49.4. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые решения уравнения (49.13) на $(a; b)$, то определитель Вронского на этом интервале нигде не обращается в нуль

Доказательство теоремы опустим.

Из теорем 49.3 и 49.4 следует, что *вронскиан не равен нулю ни в одной точке интервала* $(a; b)$ *тогда и только тогда, когда частные решения линейно независимы.*

Совокупность любых двух линейно независимых на интервале $(a; b)$ частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ЛОДУ второго порядка определяет ***фундаментальную систему решений*** этого уравнения: любое произвольное решение может быть получено как комбинация $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$.

Пример 49.4. Частные решения $y_1 = \sin x$ и $y_2 = \cos x$, $y_3 = 2\sin x$ и $y_4 = 5\cos x$ (их бесчисленное множество!) уравнения $y'' + y = 0$ образуют фундаментальную систему решений; решения же $y_5 = 0$ и $y_6 = \cos x$ — не образуют.

Теперь можно сказать, при каких условиях функция (49.14) будет общим решением уравнения (49.13).

Теорема 49.5 (структура общего решения ЛОДУ второго порядка). Если два частных решения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ ЛОДУ (49 13) образуют на интервале $(a; b)$ фундаментальную систему, то общим решением этого уравнения является функция

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \tag{49.16}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Согласно теореме 49.2, функция (49.16) является решением уравнения (49.13). Остается доказать, что это решение о б щ е е, т. е. что из него можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\Big|_{x=x_0} = y_0', \tag{49.17}$$

где $x_0 \in (a; b)$.

Подставив начальные условия (49.17) в решение (49.14), получим систему уравнений

$$\begin{cases} y_0 = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0), \\ y_0' = c_1' y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0), \end{cases}$$

где $y_0 = y(x_0)$, $y_0' = y'(x_0)$, с неизвестными c_1 и c_2.

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0)$$

равен значению вронскиана $W(x)$ при $x = x_0$.

Так как решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений на $(a;b)$ и $x_0 \in (a;b)$, то, согласно теореме 49.4, $W(x_0) \neq 0$. Поэтому система уравнений имеет единственное решение:

$$c_1 = c_1^0 = \frac{1}{W(x_0)} \cdot \begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix}, \quad c_2 = c_2^0 = \frac{1}{W(x_0)} \cdot \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & y_0' \end{vmatrix}.$$

Решение $y = c_1^0 y_1(x) + c_2^0 y_2(x)$ является частным решением (единственным, в силу теоремы единственности) уравнения (49.13), удовлетворяющим начальным условиям (49.17). Теорема доказана. ■

Пример 49.5. На основании теоремы 49.5 общим решением уравнения $y'' + y = 0$ (см. пример 49.4) является функция $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$.

49.5. Линейные однородные ДУ n-го порядка

Полученные результаты можно распространить на линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка, имеющие вид

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + a_2(x) \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x) \cdot y = 0. \tag{49.18}$$

1. Если функции $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ являются частными решениями уравнения (49.18), то его решением является и функция $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$.

2. Функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называются *линейно независимыми* на $(a;b)$, если равенство $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0$ выполняется лишь в случае, когда все числа $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; в противном случае (если хотя бы одно из чисел α_i не равно нулю) функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — *линейно зависимы*.

3. Определитель Вронского имеет вид

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

4. Частные решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнения (49.18) образуют *фундаментальную систему решений* на $(a;b)$, если ни в одной точке этого интервала вронскиан не обращается в нуль, т. е. $W(x) \neq 0$ для всех $x \in (a;b)$.

5. Общее решение ЛОДУ (49.18) имеет вид $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$, где c_i $(i = 1, \ldots, n)$ — произвольные постоянные, y_i — частные решения уравнения (49.18), образующие фундаментальную систему.

Пример 49.6. Показать, что функции $y_1=e^x$, $y_2=x\cdot e^x$, $y_3=x^2\cdot e^x$ образуют фундаментальную систему решений некоторого ЛОДУ третьего порядка (дополнительно: составить это уравнение).

○ Решение: Найдем $W(x)$:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & (x+1)e^x & (x^2+2x)e^x \\ e^x & (x+2)e^x & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix}=$$

$$=e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix}=e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 4x+2 \end{vmatrix}=$$

$$=e^{3x}\cdot(4x+2-4x)=2e^{3x}.$$

Ясно, что $W(x)\neq 0$ для всех $x\in\mathbb{R}$. Следовательно, данные функции образуют фундаментальную систему решений ЛОДУ третьего порядка. В общем виде ЛОДУ третьего порядка выглядит так:

$$y'''+a_1(x)y''+a_2(x)y'+a_3(x)y=0.$$

Подставив функции y_1, y_2, y_3 в это уравнение, получим систему из трех уравнений относительно функций $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$. Решая ее, получим ЛОДУ $y'''-3y''+3y'-y=0$; его общее решение:

$$y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x. \qquad \bullet$$

§ 50. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

50.1. Интегрирование ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

Частным случаем рассмотренных выше линейных однородных дифференциальных уравнений являются *ЛОДУ с постоянными коэффициентами*.

Пусть дано ЛОДУ второго порядка

$$\boxed{y''+p\cdot y'+q\cdot y=0,} \tag{50.1}$$

где p и q постоянны.

Для нахождения общего решения уравнения (50.1) достаточно найти два его частных решения, образующих фундаментальную систему (см. теорему 49.5).

Будем искать частные решения уравнения (50.1) в виде

$$y=e^{kx},$$

где k — некоторое число (предложено Л. Эйлером). Дифференцируя эту функцию два раза и подставляя выражения для y, y' и y'' в уравнение (50.1), получим: $k^2 \cdot e^{kx} + p \cdot k \cdot e^{kx} + q \cdot e^{kx} = 0$, т. е.

$$e^{kx} \cdot (k^2 + pk + q) = 0, \quad \text{или} \quad k^2 + pk + q = 0 \ (e^{kx} \neq 0). \tag{50.2}$$

Уравнение (50.2) называется ***характеристическим уравнением*** ДУ (50.1) (для его составления достаточно в уравнении (50.1) заменить y'', y' и y соответственно на k^2, k и 1).

При решении характеристического уравнения (50.2) возможны следующие три случая.

Случай 1. Корни k_1 и k_2 уравнения (50.2) действительные и различные: $k_1 \neq k_2$ $\left(D = \frac{p^2}{4} - q > 0\right)$.

В этом случае частными решениями уравнения (50.1) являются функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$. Они образуют фундаментальную систему решений (линейно независимы), т. к. их вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = k_2 e^{(k_1+k_2)x} - k_1 e^{(k_1+k_2)x} =$$

$$= e^{(k_1+k_2)x} \cdot (k_2 - k_1) \neq 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения (50.1), согласно формуле (49.16), имеет вид

$$\boxed{y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}.} \tag{50.3}$$

Пример 50.1. Решить уравнение $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение: Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 5k + 6 = 0$. Решаем его: $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Записываем общее решение данного уравнения: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$, где c_1 и c_2 — произвольные постоянные (формула (50.3)). ●

Случай 2. Корни k_1 и k_2 характеристического уравнения (50.2) действительные и равные: $k_1 = k_2$ $\left(D = \frac{p^2}{4} - q = 0,\ k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}\right)$.

В этом случае имеем лишь одно частное решение $y_1 = e^{k_1 x}$.

Покажем, что наряду с y_1 решением уравнения (50.1) будет и $y_2 = x e^{k_1 x}$.

Действительно, подставим функцию y_2 в уравнение (50.1). Имеем:

$$y_2'' + p y_2' + q y_2 = (x e^{k_1 x})'' + p(x e^{k_1 x})' + q(x e^{k_1 x}) =$$

$$= (2k_1 e^{k_1 x} + x k_1^2 e^{k_1 x}) + p(e^{k_1 x} + x k_1 e^{k_1 x}) + q(x e^{k_1 x}) =$$

$$= e^{k_1 x}(2k_1 + k_1^2 x + p + pxk_1 + qx) = e^{k_1 x}(x(k_1^2 + pk_1 + q) + (p + 2k_1)).$$

Но $k_1^2+pk_1+q=0$, т. к. k_1 есть корень уравнения (50.2); $p+2k_1=0$, т. к. по условию $k_1=k_2=-\frac{p}{2}$.

Поэтому $y_2''+py_2'+qy_2=0$, т. е. функция $y_2=xe^{k_1x}$ является решением уравнения (50.1).

Частные решения $y_1=e^{k_1x}$ и $y_2=xe^{k_1x}$ образуют фундаментальную систему решений: $W(x)=e^{2k_1x}\neq 0$. Следовательно, в этом случае общее решение ЛОДУ (50.1) имеет вид

$$\boxed{y=c_1e^{k_1x}+c_2xe^{k_1x}.} \tag{50.4}$$

Случай 3. Корни k_1 и k_2 уравнения (50.2) комплексные: $k_1=\alpha+\beta i$, $k_2=\alpha-\beta i$ ($D=\frac{p^2}{4}-q<0$, $\alpha=-\frac{p}{2}$, $\beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}>0$).

В этом случае частными решениями уравнения (50.1) являются функции $y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}$ и $y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$. По формулам Эйлера (см. п. 27.3)

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi,\quad e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi$$

имеем

$$y_1=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$y_2=e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x}=e^{\alpha x}\cos\beta x-ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Найдем два действительных частных решения уравнения (50.1). Для этого составим две линейные комбинации решений y_1 и y_2:

$$\frac{y_1+y_2}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x=\widetilde{y}_1 \quad \text{и} \quad \frac{y_1-y_2}{2i}=e^{\alpha x}\sin\beta x=\widetilde{y}_2.$$

Функции $\widetilde{y}_1$ и $\widetilde{y}_2$ являются решениями уравнения (50.1), что следует из свойств решений ЛОДУ второго порядка (см. теорему 49.2).Эти решения $\widetilde{y}_1$ и $\widetilde{y}_2$ образуют фундаментальную систему решений, так как $W(x)\neq 0$ (убедитесь самостоятельно!). Поэтому общее решение уравнения (50.1) запишется в виде $y=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x$, или

$$\boxed{y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x).} \tag{50.5}$$

Пример 50.2. Решить уравнение $y''-6y'+25y=0$.

○ Решение: Имеем: $k^2-6k+25=0$, $k_1=3+4i$, $k_2=3-4i$. По формуле (50.5) получаем общее решение уравнения:

$$y=e^{3x}(c_1\cos 4x+c_2\sin 4x).$$ ●

Таким образом, нахождение общего решения ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами (50.1) сводится к нахождению корней характеристического уравнения (50.2) и использованию формул (50.3)–(50.5) общего решения уравнения (не прибегая к вычислению интегралов).

50.2. Интегрирование ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

Задача нахождения общего решения *ЛОДУ n-го порядка* ($n > 2$) *с постоянными коэффициентами*

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = 0, \tag{50.6}$$

где p_i, $i = \overline{1,n}$, — числа, решается аналогично случаю уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Сформулируем необходимые утверждения и рассмотрим примеры.

Частные решения уравнения (50.6) также ищем в виде $y = e^{kx}$, где k – постоянное число.

Характеристическим для уравнения (50.6) является алгебраическое уравнение n-го порядка вида

$$k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \ldots + p_{n-1}k + p_n = 0. \tag{50.7}$$

Уравнение (50.7) имеет, как известно, n корней (в их числе могут быть и комплексные). Обозначим их через k_1, k_2, ..., k_n.

Замечание. Не все из корней уравнения (50.7) обязаны быть различными. Так, в частности, уравнение $(k-3)^2 = 0$ имеет два равных корня: $k_1 = k_2 = 3$. В этом случае говорят, что корень один ($k = 3$) и имеет *кратность* $m_k = 2$. Если кратность корня равна единице: $m_k = 1$, его называют *простым.*

Случай 1. Все корни уравнения (50.7) действительны и просты (различны). Тогда функции $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$, ..., $y_n = e^{k_n x}$ являются частными решениями уравнения (50.6) и образуют фундаментальную систему решений (линейно независимы). Поэтому общее решение уравнения (50.6) записывается в виде

$$\boxed{y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \ldots + c_n e^{k_n x}.}$$

Пример 50.3. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

Решение: Характеристическое уравнение $k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0$ имеет корни $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$. Следовательно, $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$ — общее решение данного уравнения. ●

Случай 2. Все корни характеристического уравнения действительные, но не все простые (есть корни, имеющие кратность $m > 1$). Тогда каждому простому корню k соответствует одно частное решение вида e^{kx}, а каждому корню k кратности $m > 1$ соответствует m частных решений: e^{kx}, xe^{kx}, $x^2 e^{kx}$ ..., $x^{m-1}e^{kx}$.

Пример 50.4. Решить уравнение $y^{IV} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 0$.

○ Решение: Характеристическое уравнение

$$k^4 - k^3 - 3k^2 + 5k - 2 = (k+2)(k-1)^3 = 0$$

имеет корни $k_1 = -2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $k_4 = 1$. Следовательно,

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + c_3 x e^x + c_4 x^2 e^x$$

— общее решение уравнения. ●

Случай 3. Среди корней уравнения (50.7) есть комплексно-сопряженные корни. Тогда каждой паре $\alpha \pm \beta i$ простых комплексно-сопряженных корней соответствует два частных решения $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$, а каждой паре $\alpha \pm \beta i$ корней кратности $m > 1$ соответствуют $2m$ частных решений вида

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, x \cdot e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{m-1} \cdot e^{\alpha x}\cos\beta x;$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, x \cdot e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{m-1} \cdot e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Эти решения, как можно доказать, образуют фундаментальную систему решений.

Пример 50.5. Решить уравнение $y^V + y^{IV} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$.

○ Решение: Характеристическое уравнение

$$k^5 + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + 1 = (k+1)(k^4 + 2k^2 + 1) = 0$$

имеет корни $k_1 = -1$, $k_2 = i$, $k_3 = -i$, $k_4 = i$, $k_5 = -i$. Следовательно,

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x + c_4 x \cdot \cos x + c_5 x \cdot \sin x$$

— общее решение уравнения. ●

§ 51. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (ЛНДУ)

51.1. Структура общего решения ЛНДУ второго порядка

Рассмотрим ЛНДУ второго порядка

$$\boxed{y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),} \tag{51.1}$$

где $a_1(x), a_2(x), f(x)$ — заданные, непрерывные на $(a; b)$ функции. Уравнение

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{51.2}$$

левая часть которого совпадает с левой частью ЛНДУ (51.1), называется ***соответствующим*** ему ***однородным уравнением.***

Теорема 51.1 (структура общего решения ЛНДУ). Общим решением y уравнения (51 1) является сумма его произвольного частного решения y^* и общего решения $\widehat{y} = c_1y_1 + c_2y_2$ соответствующего однородного уравнения (51 2), т е

$$y = y^* + \widehat{y}. \tag{51.3}$$

❑ Убедимся, что функция (51.3) — решение уравнения (51.1). Так как y^* есть решение уравнения (51.1), а $\widehat{y}$ — решение уравнения (51.2), то

$$(y^*)'' + a_1(x)(y^*)' + a_2(x)y^* = f(x) \quad \text{и} \quad (\widehat{y})'' + a_1(x)(\widehat{y})' + a_2(x)\widehat{y} = 0.$$

В таком случае имеем:

$$\begin{aligned}(y^* + \widehat{y})'' &+ a_1(x)(y^* + \widehat{y})' + a_2(x)(y^* + \widehat{y}) = \\ &= \big((y^*)'' + a_1(x)(y^*)' + a_2(x)y^*\big) + \big((\widehat{y})'' + a_1(x)(\widehat{y})' + a_2(x)\widehat{y}\big) = \\ &= f(x) + 0 = f(x).\end{aligned}$$

Это означает, что функция $(y^* + \widehat{y})$ является решением уравнения (51.1). Покажем теперь, что функция

$$y = y^* + c_1y_1 + c_2y_2 \tag{51.4}$$

является общим решением уравнения (51.1). Для этого надо доказать, что из решения (51.4) можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'. \tag{51.5}$$

Продифференцировав функцию (51.4) и подставив начальные условия (51.5) в функцию (51.4) и ее производную, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y_0 - y^*(x_0), \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = y_0' - (y^*)'(x_0), \end{cases}$$

где $y_0 = y(x_0)$, $y_0' = y'(x_0)$, с неизвестными c_1 и c_2. Определителем этой системы является определитель Вронского $W(x_0)$ для функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в точке $x = x_0$. Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы (образуют фундаментальную систему решений), т. е. $W(x_0) \neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение: $c_1 = c_1^0$ и $c_2 = c_2^0$.

Решение $y = y^* + c_1^0y_1(x) + c_2^0y_2(x)$ является частным решением уравнения (51.1), удовлетворяющим заданным начальным условиям (51.5). Теорема доказана. ■

51.2. Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим ЛНДУ (51.1). Его общим решением является функция (51.3), т. е.

$$y = y^* + \widehat{y}.$$

Частное решение y^* уравнения (51.1) можно найти, если известно общее решение $\widehat{y}$ соответствующего однородного уравнения (51.2), *методом вариации произвольных постоянных* (метод Лагранжа), состоящим в следующем. Пусть $\widehat{y} = c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ — общее решение уравнения (51.2). Заменим в общем решении постоянные c_1 и c_2 неизвестными функциями $c_1(x)$ и $c_2(x)$ и подберем их так, чтобы функция

$$y^* = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x) \tag{51.6}$$

была решением уравнения (51.1). Найдем производную

$$(y^*)' = c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_2(x)y_2'(x).$$

Подберем функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ так, чтобы

$$c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0. \tag{51.7}$$

Тогда

$$(y^*)' = c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x),$$
$$(y^*)'' = c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_1(x) \cdot y_1''(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) + c_2(x) \cdot y_2''(x).$$

Подставляя выражение для y^*, $(y^*)'$ и $(y^*)''$ в уравнение (51.1), получим:

$$c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_1(x) \cdot y_1''(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) + c_2(x) \cdot y_2''(x)+$$
$$+a_1(x)\big[c_1(x)y_1'(x)+c_2(x)y_2'(x)\big]+a_2(x)\big[c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)\big] = f(x),$$

или

$$c_1(x) \cdot \big[y_1''(x) + a_1(x) \cdot y_1'(x) + a_2(x) \cdot y_1(x)\big]+$$
$$+c_2(x)\big[y_2''(x)+a_1(x)y_2'(x)+a_2(x)y_2(x)\big]+c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Поскольку $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения (51.2), то выражения в квадратных скобках равны нулю, а потому

$$c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x). \tag{51.8}$$

Таким образом, функция (51.6) будет частным решением y^* уравнения (51.1), если функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений (51.7) и (51.8):

$$\boxed{\begin{cases} c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0, \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x). \end{cases}} \tag{51.9}$$

Определитель системы $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$, так как это определитель Вронского для фундаментальной системы частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (51.2). Поэтому система (51.9) имеет единственное решение: $c_1'(x) = \varphi_1(x)$ и $c_2'(x) = \varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — некоторые функции от x. Интегрируя эти функции, находим $c_1(x)$ и $c_2(x)$, а затем по формуле (51.6) составляем частное решение уравнения (51.1).

Пример 51.1. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

○ Решение: Найдем общее решение $\widehat{y}$ соответствующего однородного уравнения $y''+y=0$. Имеем: $k^2+1=0$, $k_1=i$, $k_2=-i$. Следовательно, $\widehat{y} = c_1\cdot\cos x + c_2\cdot\sin x$. Найдем теперь частное решение y^* исходного уравнения. Оно ищется в виде (51.6): $y^* = c_1(x)\cdot\cos x + c_2(x)\cdot\sin x$. Для нахождения $c_1(x)$ и $c_2(x)$ составляем систему уравнений вида (51.9):

$$\begin{cases} c_1'(x)\cdot\cos x + c_2'(x)\cdot\sin x = 0, \\ c_1'(x)\cdot(-\sin x) + c_2'(x)\cdot\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решаем ее:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1;$$

$$c_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\operatorname{tg} x, \quad c_1(x) = \int(-\operatorname{tg} x)\,dx = \ln|\cos x|;$$

$$c_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad c_2(x) = \int 1\cdot dx = x.$$

Запишем частное решение данного уравнения: $y^* = \ln|\cos x|\cdot\cos x + {}$ $+\, x\cdot\sin x$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = (\widehat{y} + y^*) = c_1\cdot\cos x + c_2\cdot\sin x + \cos x\cdot\ln|\cos x| + x\cdot\sin x. \quad \bullet$$

При нахождении частных решений ЛНДУ может быть полезной следующая теорема.

Теорема 51.2 (о наложении решений). Если правая часть уравнения (51 1) представляет собой сумму двух функций: $f(x) = f_1(x) + {}$ $+\, f_2(x)$, а y_1^* и y_2^* — частные решения уравнений $y'' + a_1(x)\cdot y' + {}$ $+\, a_2(x)\cdot y = f_1(x)$ и $y'' + a_1(x)\cdot y' + a_2(x)y = f_2(x)$ соответственно, то функция $y^* = y_1^* + y_2^*$ является решением данного уравнения.

❑ Действительно,

$$(y_1^* + y_2^*)'' + a_1(x) \cdot (y_1^* + y_2^*)' + a_2(x) \cdot (y_1^* + y_2^*) =$$
$$= \big((y_1^*)'' + a_1(x) \cdot (y_1^*)' + a_2(x) \cdot y_1^*\big) + \big((y_2^*)'' + a_1(x) \cdot (y_2^*)' + a_2(x) \cdot y_2^*\big) =$$
$$= f_1(x) + f_2(x) = f(x). \qquad \blacksquare$$

51.3. Интегрирование ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Рассмотрим *ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами,* т. е. уравнение

$$\boxed{y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x),} \tag{51.10}$$

где p и q — некоторые числа.

Согласно теореме 51.1, общее решение уравнения (51.10) представляет собой сумму общего решения $\widehat{y}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения y^* неоднородного уравнения. Частное решение уравнения (51.10) может быть найдено методом вариации произвольных постоянных (п. 51.2).

Для уравнений с постоянными коэффициентами (51.10) существует более простой способ нахождения y^*, если правая часть $f(x)$ уравнения (51.10) имеет так называемый «специальный вид»:

I. $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$

или

II. $f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \sin \beta x)$.

Суть метода, называемого *методом неопределенных коэффициентов*, состоит в следующем: по виду правой части $f(x)$ уравнения (51.10) записывают ожидаемую форму частного решения с неопределенными коэффициентами, затем подставляют ее в уравнение (51.10) и из полученного тождества находят значения коэффициентов.

Случай 1. Правая часть (51.10) имеет вид $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $P_n(x)$ — многочлен степени n. Уравнение (51.10) запишется в виде

$$\boxed{y'' + p \cdot y' + q \cdot y = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}.} \tag{51.11}$$

В этом случае частное решение y^* ищем в виде:

$$\boxed{y^* = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x},} \tag{51.12}$$

где r — число, равное кратности α как корня характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ (т. е. r — число, показывающее, сколько раз α является корнем уравнения $k^2 + pk + q = 0$), а $Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$ — многочлен степени n, записанный с неопределенными коэффициентами A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

❑ а) Пусть α не является корнем характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0,$$

т. е. $\alpha \neq k_{1,2}$. Следовательно,

$$r = 0, \quad y^* = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}, \quad (y^*)' = Q_n'(x) \cdot e^{\alpha x} + Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \alpha,$$
$$(y^*)'' = Q_n''(x) \cdot e^{\alpha x} + 2Q_n'(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \alpha + Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \alpha^2.$$

После подстановки функции y^* и ее производных в уравнение (51.11), сокращения на $e^{\alpha x}$, получим:

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q) \cdot Q_n(x) = P_n(x). \qquad (51.13)$$

Слева — многочлен степени n с неопределенными коэффициентами, справа — многочлен степени n, но с известными коэффициентами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему $(n+1)$ алгебраических уравнений для определения коэффициентов $A_0, A_1, ..., A_n$.

б) Пусть α является однократным (простым) корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, т. е. $\alpha = k_1 \neq k_2$.

В этом случае искать решение в форме $y^* = Q_n(x)e^{\alpha x}$ нельзя, т. к. $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, и уравнение (51.13) принимает вид

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p) \cdot Q_n'(x) = P_n(x).$$

В левой части — многочлен степени $(n-1)$, в правой части — многочлен степени n. Чтобы получить тождество многочленов в решении y^*, нужно иметь многочлен степени $(n+1)$. Поэтому частное решение y^* следует искать в виде $y^* = x \cdot Q_n(x)e^{\alpha x}$ (в равенстве (51.12) положить $r = 1$).

в) Пусть α является двукратным корнем характеристического уравнения $k^2+pk+q = 0$, т. е. $\alpha = k_1 = k_2$. В этом случае $\alpha^2+p\alpha+q = 0$ и $2\alpha+p = 0$, а поэтому уравнение (51.13) принимает вид $Q_n''(x) = P_n(x)$.

Слева стоит многочлен степени $n-2$. Понятно, чтобы иметь слева многочлен степени n, частное решение y^* следует искать в виде

$$y^* = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$$

(в равенстве (51.12) положить $r = 2$). ■

Случай 2. Правая часть (51.10) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x),$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно, α и β — действительные числа. Уравнение (51.10) запишется в виде

$$\boxed{y'' + py' + qy = e^{\alpha x} \cdot \big(P_n(x) \cdot \cos\beta x + Q_m(x) \cdot \sin\beta x\big).} \qquad (51.14)$$

Можно показать, что в этом случае частное решение y^* уравнения (51.14) следует искать в виде

$$\boxed{y^* = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot \big(M_l(x) \cdot \cos\beta x + N_l(x) \cdot \sin\beta x\big),} \tag{51.15}$$

где r — число, равное кратности $\alpha+\beta i$ как корня характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$, $M_l(x)$ и $N_l(x)$ — многочлены степени l с неопределенными коэффициентами, l — наивысшая степень многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, т. е. $l = \max(n, m)$.

Замечания.

1. После подстановки функции (51.15) в (51.14) приравнивают многочлены, стоящие перед одноименными тригонометрическими функциями в левой и правой частях уравнения.

2. Форма (51.15) сохраняется и в случаях, когда $P_n(x) \equiv 0$ или $Q_m(x) \equiv 0$.

3. Если правая часть уравнения (51.10) есть сумма функций вида I или II, то для нахождения y^* следует использовать теорему 51.2 о наложении решений.

Пример 51.2. Найти общее решение уравнения $y''-2y'+y = x-4$.

○ Решение: Найдем общее решение $\widehat{y}$ ЛОДУ $y''-2y'+y=0$. Характеристическое уравнение $k^2-2k+1=0$ имеет корень $k_1 = 1$ кратности 2. Значит, $\widehat{y} = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x$. Находим частное решение исходного уравнения. В нем правая часть $x-4 = (x-4)\cdot e^{0\,x}$ есть формула вида $P_1(x)\cdot e^{0\cdot x}$, причем $\alpha = 0$, не является корнем характеристического уравнения: $\alpha \neq k_1$. Поэтому, согласно формуле (51.12), частное решение y^* ищем в виде $y^* = Q_1(x) \cdot e^{0\,x}$, т. е. $y^* = Ax+B$, где A и B — неопределенные коэффициенты. Тогда $(y^*)' = A$, $(y^*)'' = 0$. Подставив y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ в исходное уравнение, получим $-2A+Ax+B = x-4$, или $Ax+(-2A+B) = x-4$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A = 1, \\ -2A+B = -4. \end{cases}$$

Отсюда $A = 1$, $B = -2$. Поэтому частное решение данного уравнения имеет вид $y^* = x-2$. Следовательно, $y = (\widehat{y}+y^*) = c_1e^x + c_2xe^x + x - 2$ — искомое общее решение уравнения. ●

Пример 51.3. Решить уравнение $y''-4y'+13y = 40\cdot\cos 3x$.

○ Решение: Общее решение ЛНДУ имеет вид $y = \widehat{y} + y^*$. Находим решение однородного уравнения $\widehat{y}$: $y''-4y'+13y=0$. Характеристическое уравнение $k^2-4k+13=0$ имеет корни $k_1 = 2+3i$, $k_2 = 2-3i$. Следовательно, $\widehat{y} = e^{2x}\cdot(c_1\cdot\cos 3x + c_2\cdot\sin 3x)$.

Находим частное решение y^*. Правая часть ЛНДУ в нашем случае имеет вид $f(x) = e^{0\,x} \cdot (40\cos 3x + 0 \cdot \sin 3x)$. Так как $\alpha = 0$, $\beta = 3$, $\alpha + \beta i = 3i$ не совпадает с корнем характеристического уравнения, то $r = 0$. Согласно формуле (51.15), частное решение ищем в виде $y^* = A\cos 3x + B\sin 3x$. Подставляем y^* в исходное уравнение. Имеем: $(y^*)' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$, $(y^*)'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$. Получаем:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 4(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) + \\ + 13(A\cos 3x + B\sin 3x) = 40\cos 3x,$$

или

$$(-9A - 12B + 13A)\cos 3x + (-9B + 12A + 13B)\sin 3x = 40\cos 3x + 0 \cdot \sin 3x.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{cases} 4A - 12B = 40, \\ 12A + 4B = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $A = 1$, $B = -3$. Поэтому $y^* = \cos 3x - 3\sin 3x$. И наконец, $y = e^{2x}(c_1 \cdot \cos 3x + c_2 \cdot \sin 3x) + \cos 3x - 3\sin 3x$ — общее решение уравнения. ●

Пример 51.4. (*Для самостоятельного решения.*) Для предложенных дифференциальных уравнений получить вид частного решения:

а) $y'' - 3y' + 2y = 5 + e^x$;
б) $y'' - 2y' + y = 2$;
в) $y'' + 4y = \sin 2x + \cos 7x$;
г) $y'' + y = 5\cos 2x - x\sin 2x$;
д) $y'' - 3y' = x^2 - 1 + \cos x$.

Ответы: а) $A + x \cdot B \cdot e^x$; б) A; в) $x(A\cos 2x + B\sin 2x) + C\cos 7x + D\sin 7x$; г) $(Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x$; д) $x(Ax^2 + Bx + C) + D\cos x + E\sin x$.

51.4. Интегрирование ЛНДУ n-го порядка ($n > 2$) с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Рассмотрим линейное неоднородное ДУ n-го ($n > 2$) порядка

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + a_2(x) \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x) \cdot y = f(x),$$

где $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$, $f(x)$ — заданные непрерывные функции на $(a; b)$.

Соответствующее ему однородное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) \cdot y = 0.$$

Теорема 51.3 (о структуре общего решения ЛНДУ n-го порядка). Общее решение y ЛНДУ n-го порядка равно сумме частного решения y^* неоднородного уравнения и общего решения $\widehat{y}$ соответствующего ему однородного уравнения, т. е. $y = y^* + \widehat{y}$.

Частное решение y^* ЛНДУ n-го порядка может быть найдено, если известно общее решение $\widehat{y}$ однородного уравнения, методом вариации произвольных постоянных. Оно ищется в виде

$$y^* = c_1(x)\cdot y_1(x) + c_2(x)\cdot y_2(x) + \ldots + c_n(x)\cdot y_n(x),$$

где $y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, — частные решения, образующие фундаментальную систему, однородного уравнения.

Система уравнений для нахождения неизвестных $c_i(x)$ имеет вид

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_3'y_3 + \ldots + c_n'y_n = 0, \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_3'y_3' + \ldots + c_n'y_n' = 0, \\ c_1'y_1'' + c_2'y_2'' + c_3'y_3'' + \ldots + c_n'y_n'' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + c_3'y_3^{(n-1)} + \ldots + c_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Однако для ЛНДУ n-го порядка с *постоянными коэффициентами*, правая часть которого имеет специальный вид, частное решение y^* может быть найдено методом неопределенных коэффициентов.

Метод подбора частного решения y^* уравнения

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \ldots + p_ny = f(x),$$

где p_i — числа, а правая часть $f(x)$ имеет специальный вид, описанный в п. 51.3 для случая $n = 2$, переносится без всякого изменения и на случай уравнения, имеющего порядок $n > 2$.

Пример 51.5. Решить уравнение $y^{IV} - y' = 2x$.

○ Решение: Находим $\widehat{y}$:

$$k^4 - k = 0, \quad k(k-1)\cdot(k^2+k+1) = 0,$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 1, \quad k_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\widehat{y} = c_1 + c_2e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Находим y^*: $f(x) = 2x\ \Big(= e^{0\cdot x}\cdot P_1(x)\Big)$, $r = 1$, $y^* = x(Ax+B) = Ax^2+Bx$, отсюда

$$(y^*)' = 2Ax + B, \quad (y^*)'' = 2A, \quad (y^*)''' = 0, \quad (y^*)^{IV} = 0.$$

Тогда $-(2Ax + B) = 2x$. Отсюда $A = -1$, $B = 0$ и получаем $y^* = -x^2$. Следовательно, функция

$$y = (\widehat{y} + y^*) = c_1 + c_2 e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - x^2$$

является общим решением уравнения. ●

§ 52. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

52.1. Основные понятия

Для решения многих задач математики, физики, техники (задач динамики криволинейного движения; задач электротехники для нескольких электрических цепей; определения состава системы, в которой протекают несколько последовательных химических реакций I порядка; отыскания векторных линий поля и других) нередко требуется несколько функций. Нахождение этих функций может привести к нескольким ДУ, образующим систему.

Системой ДУ называется совокупность ДУ, каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные.

Общий вид системы ДУ первого порядка, содержащей n искомых функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, следующий:

$$\begin{cases} F_1(x; y_1; y_2; \ldots; y_n; y_1'; y_2'; \ldots; y_n') = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x; y_1; y_2; \ldots; y_n; y_1'; y_2'; \ldots; y_n') = 0. \end{cases}$$

Система ДУ первого порядка, разрешенных относительно производной, т. е. система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1; y_2; \ldots; y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x; y_1; y_2; \ldots; y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x; y_1; y_2; \ldots; y_n), \end{cases} \tag{52.1}$$

называется ***нормальной системой ДУ***. При этом предполагается, что число уравнений равно числу искомых функций.

Замечание. Во многих случаях системы уравнений и уравнения высших порядков можно привести к нормальной системе вида (52.1).

Так, система трех ДУ второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = F_1(x; y; z; t; x'; y'; z'), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = F_2(x; y; z; t; x'; y'; z'), \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = F_3(x; y; z; t; x'; y'; z'), \end{cases}$$

описывающая движение точки в пространстве, путем введения новых переменных: $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$, $\frac{dz}{dt} = w$, приводится к нормальной системе ДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u, \\ \dfrac{dy}{dt} = v, \\ \dfrac{dz}{dt} = w, \\ \dfrac{du}{dt} = F_1(x; y; z; t; u; v; w), \\ \dfrac{dv}{dt} = F_2(x; y; z; t; u; v; w), \\ \dfrac{dw}{dt} = F_3(x; y; z; t; u; v; w). \end{cases}$$

Уравнение третьего порядка $y''' = f(x; y; y'; y'')$ путем замены $y' = p$, $y'' = p' = q$ сводится к нормальной системе ДУ

$$\begin{cases} y' = p, \\ p' = q, \\ q' = f(x; y; p; q). \end{cases}$$

Из сказанного выше следует полезность изучения именно нормальных систем.

Решением системы (52.1) называется совокупность из n функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющих каждому из уравнений этой системы.

Начальные условия для системы (52.1) имеют вид

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0, \ldots, y_n(x_0) = y_n^0. \qquad (52.2)$$

Задача Коши для системы (52.1) ставится следующим образом: найти решение системы (52.1), удовлетворяющее начальным условиям (52.2).

Условия существования и единственности решения задачи Коши описывает следующая теорема, приводимая здесь без доказательства.

Теорема 52.1 (Коши). Если в системе (52.1) все функции

$$f_i(x; y_1; \ldots, y_n)$$

непрерывны вместе со всеми своими частными производными по y_i в некоторой области D ($(n+1)$-мерного пространства), то в каждой точке $M_0(x_0; y_1^0; y_2^0; \ldots; y_n^0)$ этой области существует, и притом единственное, решение $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, ..., $y_n = \varphi_n(x)$ системы, удовлетворяющее начальным условиям (52 2)

Меняя в области D точку M_0 (т. е. начальные условия), получим бесчисленное множество решений, которое можно записать в виде решения, зависящего от n произвольных постоянных:

$$y_1 = \varphi_1(x; c_1; c_2; \ldots; c_n), \ldots, y_n = \varphi_n(x; c_1; c_2; \ldots; c_n).$$

Это решение является *общим*, если по заданным начальным условиям (52.2) можно однозначно определить постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_n$ из системы уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x; c_1; c_2; \ldots; c_n) = y_1^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x; c_1; c_2; \ldots; c_n) = y_n^0. \end{cases}$$

Решение, получающееся из общего при конкретных значениях постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$, называется *частным решением системы* (52.1).

52.2. Интегрирование нормальных систем

Одним из основных методов интегрирования нормальной системы ДУ является *метод сведения системы к одному ДУ высшего порядка*. (Обратная задача — переход от ДУ к системе — рассмотрена выше на примере.) Техника этого метода основана на следующих соображениях.

Пусть задана нормальная система (52.1). Продифференцируем по x любое, например первое, уравнение:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}.$$

Подставив в это равенство значения производных $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ из системы (52.1), получим

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot f_n,$$

или, коротко,
$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x; y_1; y_2; \ldots; y_n).$$
Продифференцировав полученное равенство еще раз и заменив значения производных $\frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ из системы (52.1), получим
$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x; y_1; y_2; \ldots; y_n).$$
Продолжая этот процесс (дифференцируем — подставляем — получаем), находим:
$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x; y_1; y_2; \ldots; y_n).$$
Соберем полученные уравнения в систему:
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1; y_2; \ldots; y_n), \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x; y_1; y_2; \ldots; y_n), \\ \frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x; y_1; y_2; \ldots; y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x; y_1; y_2; \ldots; y_n). \end{cases} \tag{52.3}$$
Из первых $(n-1)$ уравнений системы (52.3) выразим функции $y_2, y_3, \ldots, y_n$ через x, функцию y_1 и ее производные $y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$. Получим:
$$\begin{cases} y_2 = \psi_2(x; y_1; y_1'; \ldots; y_1^{(n-1)}), \\ y_3 = \psi_3(x; y_1; y_1'; \ldots; y_1^{(n-1)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \psi_n(x; y_1; y_1'; \ldots; y_1^{(n-1)}). \end{cases} \tag{52.4}$$
Найденные значения $y_2, y_3, \ldots, y_n$ подставим в последнее уравнение системы (52.3). Получим одно ДУ n-го порядка относительно искомой функции y_1: $\frac{d^ny_1}{dx} = \Phi(x; y_1; y_1'; \ldots; y_1^{(n-1)})$. Пусть его общее решение есть
$$y_1 = \varphi_1(x; c_1; c_2; \ldots; c_n).$$
Продифференцировав его $(n - 1)$ раз и подставив значения производных $y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$ в уравнения системы (52.4), найдем функции $y_2, y_3, \ldots, y_n$:
$$y_2 = \varphi_2(x; c_1; c_2; \ldots; c_n), \ldots, y_n = \varphi_n(x; c_1; c_2; \ldots; c_n).$$

Пример 52.1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4y - 3z, \\ \frac{dz}{dx} = 2y - 3z. \end{cases}$$

❍ Решение: Продифференцируем первое уравнение: $y'' = 4y' - 3z'$. Подставляем $z' = 2y - 3z$ в полученное равенство: $y'' = 4y' - 3(2y - 3z)$, $y'' - 4y' + 6y = 9z$. Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} y' = 4y - 3z, \\ y'' - 4y' + 6y = 9z. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выражаем z через y и y':

$$z = \frac{4y - y'}{3}. \tag{52.5}$$

Подставляем значение z во второе уравнение последней системы:

$$y'' - 4y' + 6y = \frac{9(4y - y')}{3},$$

т. е. $y'' - y' - 6y = 0$. Получили одно ЛОДУ второго порядка. Решаем его: $k^2 - k - 6 = 0$, $k_1 = -2$, $k_2 = 3$ и $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$ — общее решение уравнения. Находим функцию z. Значения y и $y' = (c_1e^{-2x} + c_2e^{3x})' = -2c_1e^{-2x} + 3c_2e^{3x}$ подставляем в выражение z через y и y' (формула (52.5)). Получим:

$$z = 2c_1e^{-2x} + \frac{1}{3}c_2e^{3x}.$$

Таким образом, общее решение данной системы уравнений имеет вид $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$, $z = 2c_1e^{-2x} + \frac{1}{3}c_2e^{3x}$. ●

Замечание. Система уравнений (52.1) можно решать *методом интегрируемых комбинаций*. Суть метода состоит в том, что посредством арифметических операций из уравнений данной системы образуют так называемые интегрируемые комбинации, т. е. легко интегрируемые уравнения относительно новой неизвестной функции.

Проиллюстрируем технику этого метода на следующем примере.

Пример 52.2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 1. \end{cases}$$

❍ Решение: Сложим почленно данные уравнения: $x' + y' = x + y + 2$, или $(x+y)' = (x+y) + 2$. Обозначим $x + y = z$. Тогда имеем $z' = z + 2$. Решаем полученное уравнение: $\frac{dz}{z+2} = dt$, $\ln(z + 2) - \ln c_1 = t$, $\frac{z+2}{c_1} = e^t$, $z + 2 = c_1e^t$, или $x + y = c_1e^t - 2$.

Получили так называемый *первый интеграл системы.* Из него можно выразить одну из искомых функций через другую, тем самым уменьшить на единицу число искомых функций. Например, $y = c_1e^t - 2 - x$. Тогда первое уравнение системы примет вид

$$x' = c_1e^t - 2 - x + 1, \quad \text{т. е.} \quad x' + x = c_1e^t - 1.$$

Найдя из него x (например, с помощью подстановки $x = uv$), найдем и y.

Замечание. Данная система «позволяет» образовать еще одну интегрируемую комбинацию: $x' - y' = y - x$, т. е. $(x - y)' = -(x - y)$. Положив $x - y = p$, имеем: $p' = -p$, или $\frac{dp}{p} = -dt$, $\ln p - \ln c_2 = -t$, $p = c_2e^{-t}$, или $x - y = c_2e^{-t}$. Имея два первых интеграла системы, т. е. $x + y = c_1e^t - 2$ и $x - y = c_2e^{-t}$, легко найти (складывая и вычитая первые интегралы), что $x = \frac{1}{2}c_1e^t + \frac{1}{2}c_2e^{-t} - 1$, $y = \frac{1}{2}c_1e^t - \frac{1}{2}c_2e^{-t} - 1$. ●

52.3. Системы линейных ДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим еще один метод интегрирования нормальной системы уравнений (52.1) в случае, когда она представляет собой *систему линейных однородных ДУ с постоянными коэффициентами*, т. е. систему вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{cases}$$

Для простоты ограничимся рассмотрением системы трех уравнений с тремя неизвестными функциями y_1, y_2 и y_3:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, \end{cases} \tag{52.6}$$

где все коэффициенты a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ — постоянные.

Будем искать частное решение системы (52.6) в виде

$$y_1 = \alpha \cdot e^{kx}, \ y_2 = \beta \cdot e^{kx}, \ y_3 = \gamma \cdot e^{kx}, \tag{52.7}$$

где α, β, γ, k — постоянные, которые надо подобрать (найти) так, чтобы функции (52.7) удовлетворяли системе (52.6).

Подставив эти функции в систему (52.6) и сократив на множитель $e^{kx} \neq 0$, получим:

$$\begin{cases} \alpha k = a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma, \\ \beta k = a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma, \\ \gamma k = a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma, \end{cases}$$

или
$$\begin{cases} (a_{11}-k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22}-k)\beta + a_{23}\gamma = 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33}-k)\gamma = 0. \end{cases} \tag{52.8}$$

Систему (52.8) можно рассматривать как однородную систему трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными α, β, γ. Чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю:
$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0. \tag{52.9}$$

Уравнение (52.9) называется ***характеристическим уравнением*** системы (52.6). Раскрыв определитель, получим уравнение третьей степени относительно k. Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. Корни характеристического уравнения действительны и различны: k_1, k_2, k_3. Для каждого корня k_i $(i = 1, 2, 3)$ напишем систему (52.8) и определим коэффициенты α_i, β_i, γ_i (один из коэффициентов можно считать равным единице). Таким образом, получаем:

для корня k_1 частное решение системы (52.6): $y_1^{(1)} = \alpha_1 e^{k_1 x}$, $y_2^{(1)} = \beta_1 e^{k_1 x}$, $y_3^{(1)} = \gamma_1 e^{k_1 x}$;

для корня k_2 — $y_1^{(2)} = \alpha_2 e^{k_2 x}$, $y_2^{(2)} = \beta_2 e^{k_2 x}$, $y_3^{(2)} = \gamma_2 e^{k_2 x}$;

для корня k_3 — $y_1^{(3)} = \alpha_3 e^{k_3 x}$, $y_2^{(3)} = \beta_3 e^{k_3 x}$, $y_3^{(3)} = \gamma_3 e^{k_3 x}$.

Можно показать, что эти функции образуют фундаментальную систему, общее решение системы (52.6) записывается в виде
$$\begin{aligned} y_1 &= c_1\alpha_1 e^{k_1 x} + c_2\alpha_2 e^{k_2 x} + c_3\alpha_3 e^{k_3 x}, \\ y_2 &= c_1\beta_1 e^{k_1 x} + c_2\beta_2 e^{k_2 x} + c_3\beta_3 e^{k_3 x}, \\ y_3 &= c_1\gamma_1 e^{k_1 x} + c_2\gamma_2 e^{k_2 x} + c_3\gamma_3 e^{k_3 x}. \end{aligned} \tag{52.10}$$

Пример 52.3. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -4y_1 + y_2. \end{cases}$$

Решение: Характеристическое уравнение (52.9) данной системы имеет вид
$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ -4 & 1-k \end{vmatrix} = 0,$$
или $1-2k+k^2-4=0$, $k^2-2k-3=0$, $k_1=-1$, $k_2=3$. Частные решения данной системы ищем в виде $y_1^{(1)} = \alpha_1 e^{k_1 x}$, $y_2^{(1)} = \beta_1 e^{k_1 x}$ и $y_1^{(2)} = \alpha_2 e^{k_2 x}$, $y_2^{(2)} = \beta_2 e^{k_2 x}$. Найдем α_i и β_1 $(i = 1, 2)$.

При $k_1 = -1$ система (52.8) имеет вид

$$\begin{cases} (1-(-1))\alpha_1 - \beta_1 = 0, \\ -4\alpha_1 + (1-(-1))\beta_1 = 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} 2\alpha_1 - \beta_1 = 0, \\ -4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет бесчисленное множество решений. Положим $\alpha_1 = 1$, тогда $\beta_1 = 2$. Получаем частные решения

$$y_1^{(1)} = e^{-x} \quad \text{и} \quad y_2^{(1)} = 2e^{-x}.$$

При $k_2 = 3$ система (52.8) имеет вид

$$\begin{cases} -2\alpha_2 - \beta_2 = 0, \\ -4\alpha_2 - 2\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Положим $\alpha_2 = 1$, тогда $\beta_2 = -2$. Значит, корню $k_2 = 3$ соответствуют частные решения:

$$y_1^{(2)} = e^{3x} \quad \text{и} \quad y_2^{(2)} = -2e^{3x}.$$

Общее решение исходной системы, согласно формуле (52.10), запишется в виде: $y_1 = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$, $y_2 = 2c_1e^{-x} - 2c_2e^{3x}$. ●

Случай 2. Корни характеристического уравнения различные, но среди них есть комплексные: $k_1 = a + ib$, $k_2 = a - ib$, k_3. Вид частных решений в этой ситуации определяют так же, как и в случае 1.

Замечание. Вместо полученных частных решений можно взять их линейные комбинации (п. 50.1, случай 3), применяя формулы Эйлера; в результате получим два действительных решения, содержащих функции вида $e^{ax} \cdot \cos bx$, $e^{ax} \cdot \sin bx$. Или, выделяя действительные и мнимые части в найденных комплексных частных решениях, получим два действительных частных решения (можно показать, что они тоже являются решениями уравнения). При этом понятно, что комплексно-сопряженный корень $k_2 = a - ib$ не даст новых линейно независимых действительных решений.

Пример 52.4. Найти частное решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 + y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = 3y_2 + y_3, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y_1(0) = 7$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 1$.

○ Решение: Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-k & 1 & 0 \\ -1 & 1-k & -1 \\ 0 & 3 & 1-k \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1-k)\cdot\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 3 & 1-k \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1-k \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1-k)(k^2-2k+4)-(k-1)=0, \quad (1-k)(k^2-2k+5)=0,$$
$$k_1=1, \quad k_2=1+2i, \quad k_3=1-2i.$$

Для $k_1 = 1$ получаем:

$$\begin{cases} 0\cdot\alpha_1+\beta_1+0\cdot\gamma_1=0, \\ -\alpha_1+0\cdot\beta_1-\gamma_1=0, \\ 0\cdot\alpha_1+3\beta_1+0\cdot\gamma_1=0 \end{cases}$$

(см. (52.8)). Отсюда находим: $\beta_1 = 0$, $\alpha_1 = 1$ (положили), $\gamma_1 = -1$. Частное решение системы: $y_1^{(1)} = e^x$, $y_2^{(1)} = 0$, $y_3^{(1)} = -e^x$.

Для $k_2 = 1+2i$ получаем (см. (52.8)):

$$\begin{cases} -2i\alpha_2+\beta_2=0, \\ -\alpha_2-2i\beta_2-\gamma_2=0, \\ 3\beta_2-2i\gamma_2=0. \end{cases}$$

Отсюда находим: $\alpha_2 = 1$ (положили), $\beta_2 = 2i$, $\gamma_2 = 3$. Частное комплексное решение системы:

$$y_1^{(2)} = e^{(1+2i)x}, \quad y_2^{(2)} = 2ie^{(1+2i)x}, \quad y_3^{(2)} = 3e^{(1+2i)x}.$$

В найденных решениях выделим действительную (Re) и мнимую (Im) части:

$$y_1^{(2)} = e^{(1+2i)x} = e^x(\cos 2x + i\sin 2x),$$
$$\operatorname{Re} y_1^{(2)} = e^x\cos 2x, \quad \operatorname{Im} y_1^{(2)} = e^x \sin 2x;$$
$$y_2^{(2)} = 2ie^{(1+2i)x} = e^x(2i\cos 2x - 2\sin 2x),$$
$$\operatorname{Re} y_2^{(2)} = -2e^x\sin 2x, \quad \operatorname{Im} y_2^{(2)} = 2e^x\cos 2x;$$
$$y_3^{(2)} = 3e^{(1+2i)x} = e^x(3\cos 2x + i3\sin 2x),$$
$$\operatorname{Re} y_3^{(2)} = 3e^x\cos 2x, \quad \operatorname{Im} y_3^{(2)} = 3e^x\sin 2x.$$

Как уже отмечено, корень $k_3 = 1-2i$ приведет к этим же самым решениям.

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 e^x \cos 2x + c_3 e^x \sin 2x,$$
$$y_2 = c_1 \cdot 0 - 2c_2 e^x \sin 2x + 2c_3 e^x \cos 2x,$$
$$y_3 = -c_1 e^x + 3c_2 e^x \cos 2x + 3c_3 e^x \sin 2x.$$

Выделим частное решение системы. При заданных начальных условиях получаем систему уравнений для определения постоянных c_1, c_2, c_3:

$$\begin{cases} 7 = c_1 + c_2 + 0, \\ 2 = 0 - 0 + 2c_3, \\ 1 = -c_1 + 3c_2 + 0, \end{cases} \qquad \Longrightarrow c_1 = 5, \ c_2 = 2, \ c_3 = 1.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y_1 = 5e^x + 2e^x \cos 2x + e^x \sin 2x, \quad y_2 = -4e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x,$$
$$y_3 = -5e^x + 6e^x \cos 2x + 3e^x \sin 2x.$$ ●

Случай 3. Характеристическое уравнение имеет корень k кратности m ($m = 2, 3$). Решение системы, соответствующее кратному корню, следует искать в виде:

а) если $m = 2$, то $y_1 = (A + Bx)e^{kx}$, $y_2 = (C + Dx)e^{kx}$, $y_3 = (E + Fx)e^{kx}$;

б) если $m = 3$, то $y_1 = (A + Bx + Cx^2)e^{kx}$, $y_2 = (D + Ex + Fx^2)e^{kx}$, $y_3 = (G + Hx + Nx^2)e^{kx}$.

Это решение зависит от m произвольных постоянных. Постоянные $A, B, C, \ldots, N$ определяются методом неопределенных коэффициентов. Выразив все коэффициенты через m из них, полагаем поочередно один из них равным единице, а остальные равными нулю. Получим m линейно независимых частных решений системы (52.6).

Пример 52.5. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = -y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

❍ Решение: Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 & 1 \\ 1 & 1-k & -1 \\ 0 & -1 & 2-k \end{vmatrix} = 0,$$

$(1-k)(2-2k-k+k^2-1)-1(-2+k+1)=0$, $k_1=2$, $k_2=k_3=1$. Корню $k_1=2$ соответствует система (см. (52.8)):

$$\begin{cases} -\alpha_1-\beta_1+\gamma_1=0, \\ \alpha_1-\beta_1-\gamma_1=0, \\ -\beta_1=0, \end{cases} \implies \begin{cases} \beta_1=0, \\ \alpha_1-\gamma_1=0. \end{cases}$$

Полагая $\gamma_1=1$, находим $\alpha_1=1$. Получаем одно частное решение исходной системы: $y_1^{(1)}=e^{2x}$, $y_2^{(1)}=0$, $y_3^{(1)}=e^{2x}$.

Двукратному корню $k=k_2=k_3=1$ $(m=2)$ соответствует решение вида $y_1^{(2,3)}=(A+Bx)e^x$, $y_2^{(2,3)}=(C+Dx)e^x$, $y_3^{(2,3)}=(E+Fx)e^x$. Подставляем эти выражения (решения) в уравнения исходной системы:

$$\begin{cases} B\cdot e^x+(A+Bx)e^x=(A+Bx)e^x-(C+Dx)e^x+(E+Fx)e^x, \\ D\cdot e^x+(C+Dx)e^x=(A+Bx)e^x+(C+Dx)e^x-(E+Fx)e^x, \\ F\cdot e^x+(E+Fx)e^x=-(C+Dx)e^x+2(E+Fx)e^x, \end{cases}$$

или, после сокращения на $e^x\neq 0$ и группировки,

$$\begin{cases} (D-F)x+B+C-E=0, \\ (B-F)x+A-D-E=0, \\ (D-F)x+C+F-E=0. \end{cases}$$

Эти равенства тождественно выполняются лишь в случае, когда

$$\begin{cases} D-F=0, \\ B-F=0, \\ B+C-E=0, \\ A-D-E=0, \\ C+F-E=0. \end{cases}$$

Выразим все коэффициенты через два из них $(m=2)$, например через A и B. Из второго уравнения имеем $F=B$. Тогда, с учетом первого уравнения, получаем $D=B$. Из четвертого уравнения находим $E=A-D$, т. е. $E=A-B$. Из третьего уравнения: $C=E-B$, т. е. $C=A-B-B$, или $C=A-2B$. Коэффициенты A и B — произвольные.

Полагая $A=1$, $B=0$, находим: $C=1$, $D=0$, $E=1$, $F=0$.

Полагая $A=0$, $B=1$, находим: $C=-2$, $D=1$, $E=-1$, $F=1$.

Получаем два линейно независимых частных решения, соответствующих двукратному корню $k=1$:

$$y_1^{(2)}=e^x,\quad y_2^{(2)}=e^x,\quad y_3^{(2)}=e^x \quad \text{и}$$

$$y_1^{(3)}=xe^x,\quad y_2^{(3)}=(-2+x)e^x,\quad y_3^{(3)}=(-1+x)e^x.$$

Записываем общее решение исходной системы:

$$y_1=c_1e^{2x}+c_2e^x+c_3xe^x,\quad y_2=c_2e^x+c_3(x-2)e^x,$$

$$y_3=c_1e^{2x}+c_2e^x+c_3(x-1)e^x.$$

●

Глава XI. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Лекции 44–46

§ 53. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

53.1. Основные понятия и определения

Обобщением определенного интеграла на случай функций двух переменных является так называемый двойной интеграл.

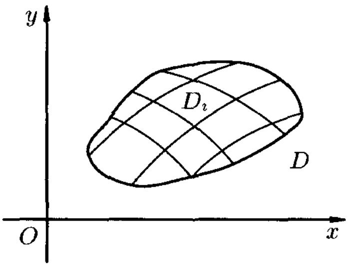


Рис 214

Пусть в замкнутой области D плоскости Oxy задана непрерывная функция $z = f(x;y)$. Разобьем область D на n «элементарных областей» D_i ($i = \overline{1,n}$), площади которых обозначим через ΔS_i, а диаметры (наибольшее расстояние между точками области) — через d_i (см. рис. 214).

В каждой области D_i выберем произвольную точку $M_i(x_i;y_i)$, умножим значение $f(x_i;y_i)$ функции в этой точке на ΔS_i и составим сумму всех таких произведений:

$$f(x_1;y_1)\Delta S_1 + f(x_2;y_2)\Delta S_2 + \cdots + f(x_n;y_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta S_i. \tag{53.1}$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $f(x;y)$ в области D.

Рассмотрим предел интегральной суммы (53.1), когда n стремится к бесконечности таким образом, что $\max d_i \to 0$. Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек в них, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x;y)$ по области D и обозначается $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$ $\Big($или $\iint\limits_D f(x;y)\,dS\Big)$.

Таким образом, ***двойной интеграл*** определяется равенством

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\cdot\Delta S_i. \tag{53.2}$$

В этом случае функция $f(x;y)$ называется ***интегрируемой в области*** D; D — ***область интегрирования***; x и y — ***переменные интегрирования***; $dx\,dy$ (или dS) — ***элемент площади***.

Для всякой ли функции $f(x;y)$ существует двойной интеграл? На этот вопрос отвечает следующая теорема, которую мы приведем здесь без доказательства.

Теорема 53.1 (достаточное условие интегрируемости функции). Если функция $z = f(x;y)$ непрерывна в замкнутой области D, то она интегрируема в этой области

Замечания.

1. Далее будем рассматривать только функции, непрерывные в области интегрирования, хотя двойной интеграл может существовать не только для непрерывных функций.

2. Из определения двойного интеграла следует, что для интегрируемой в области D функции предел интегральных сумм существует и не зависит от способа разбиения области. Таким образом, мы можем разбивать область D на площадки прямыми, параллельными координатным осям (см. рис. 215). При этом $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$, равенство (53.2) можно записать в виде

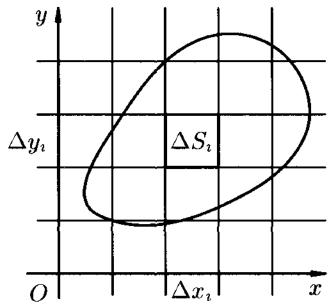


Рис 215

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i.$$

53.2. Геометрический и физический смысл двойного интеграла

Рассмотрим две задачи, приводящие к двойному интегралу.

Объем цилиндрического тела

Рассмотрим тело, ограниченное сверху поверхностью $z = f(x;y) \geqslant 0$, снизу — замкнутой областью D плоскости Oxy, с боков — цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz, а направляющей служит граница области D (см. рис. 216). Такое тело называется *цилиндрическим*. Найдем его объем V. Для этого разобьем область D (проекция поверхности $z = f(x;y)$ на плоскость Oxy) произвольным образом на n областей D_i, площади которых равны ΔS_i ($i = \overline{1,n}$). Рассмотрим цилиндрические столбики с основаниями D_i, ограниченные сверху кусками поверхности $z = f(x;y)$ (на рис. 216 один из них выделен). В своей совокупности они составляют тело V. Обозначив объем столбика с основанием D_i через ΔV_i, получим

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i.$$

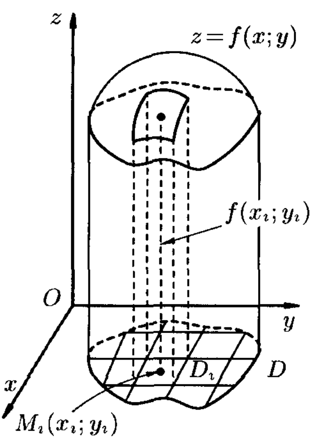


Рис. 216

Возьмем на каждой площадке D_i произвольную точку $M_i(x_i; y_i)$ и заменим каждый столбик прямым цилиндром с тем же основанием D_i и высотой $z_i = f(x_i; y_i)$. Объем этого цилиндра приближенно равен объему ΔV_i цилиндрического столбика, т. е. $\Delta V_i \approx f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$. Тогда получаем:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i) \Delta S_i. \qquad (53.3)$$

Это равенство тем точнее, чем больше число n и чем меньше размеры «элементарных областей» D_i. Естественно принять предел суммы (53.3) при условии, что число площадок D_i неограниченно увеличивается ($n \to \infty$), а каждая площадка стягивается в точку ($\max d_i \to 0$), за объем V цилиндрического тела, т. е.

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i) \Delta S_i,$$

или, согласно равенству (53.2),

$$V = \iint\limits_D f(x; y)\, dx\, dy. \qquad (53.4)$$

Итак, *величина двойного интеграла от неотрицательной функции равна объему цилиндрического тела.* В этом состоит геометрический смысл двойного интеграла.

Масса плоской пластинки

Требуется найти массу m плоской пластинки D, зная, что ее поверхностная плотность $\gamma = \gamma(x; y)$ есть непрерывная функция координат точки $(x; y)$. Разобьем пластинку D на n элементарных частей D_i ($i = \overline{1, n}$), площади которых обозначим через ΔS_i. В каждой области D_i возьмем произвольную точку $M_i(x_i; y_i)$ и вычислим плотность в ней: $\gamma(x_i; y_i)$.

Если области D_i достаточно малы, то плотность в каждой точке $(x; y) \in D_i$ мало отличается от значения $\gamma(x_i; y_i)$. Считая приближенно плотность в каждой точке области D_i постоянной, равной $\gamma(x_i; y_i)$, можно найти ее массу m_i: $m_i \approx \gamma(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$. Так как масса m всей пластинки D равна $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$, то для ее вычисления имеем приближенное равенство

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i. \tag{53.5}$$

Точное значение массы получим как предел суммы (53.5) при условии $n \to \infty$ и $\max d_i \to 0$:

$$m = \lim_{\substack{n \to \infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i; y_i) \Delta S_i,$$

или, согласно равенству (53.2),

$$m = \iint_D \gamma(x; y)\, dx\, dy. \tag{53.6}$$

Итак, двойной интеграл от функции $\gamma(x; y)$ численно равен массе пластинки, если подынтегральную функцию $\gamma(x; y)$ считать плотностью этой пластинки в точке $(x; y)$. В этом состоит физический смысл двойного интеграла.

53.3. Основные свойства двойного интеграла

Можно заметить, что процесс построения интеграла в области D дословно повторяет уже знакомую нам процедуру определения интеграла функции одной переменной на отрезке (см. § 35). Аналогичны и свойства этих интегралов и их доказательства (см. § 38). Поэтому перечислим основные свойства двойного интеграла, считая подынтегральные функции интегрируемыми.

1. $\iint\limits_D c \cdot f(x; y)\, dx\, dy = c \cdot \iint\limits_D f(x; y)\, dx\, dy$, c — const.

2. $\iint\limits_D (f_1(x; y) \pm f_2(x; y))\, dx\, dy = \iint\limits_D f_1(x; y)\, dx\, dy \pm \iint\limits_D f_2(x; y)\, dx\, dy$.

3. Если область D разбить линией на две области D_1 и D_2 такие, что $D_1 \bigcup D_2 = D$, а пересечение D_1 и D_2 состоит лишь из линии, их разделяющей (см. рис. 217), то

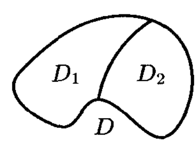


Рис. 217

$$\iint_D f(x; y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x; y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x; y)\, dx\, dy.$$

4. Если в области D имеет место неравенство $f(x;y) \geqslant 0$, то и $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy \geqslant 0$. Если в области D функции $f(x;y)$ и $\varphi(x;y)$ удовлетворяют неравенству $f(x;y) \geqslant \varphi(x;y)$, то и

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy \geqslant \iint\limits_D \varphi(x;y)\,dx\,dy.$$

5. $\iint\limits_D dS = S$, так как $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i = S$.

6. Если функция $f(x;y)$ непрерывна в замкнутой области D, площадь которой S, то $mS \leqslant \iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy \leqslant MS$, где m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции в области D.

7. Если функция $f(x;y)$ непрерывна в замкнутой области D, площадь которой S, то в этой области существует такая точка $(x_0;y_0)$, что $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = f(x_0;y_0)\cdot S$. Величину

$$f(x_0;y_0) = \frac{1}{S}\cdot \iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$$

называют *средним значением функции $f(x;y)$ в области D*.

53.4. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Покажем, что вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов.

Пусть требуется вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$, где функция $f(x;y) \geqslant 0$ непрерывна в области D. Тогда, как это было показано в п. 53.2, двойной интеграл выражает объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x;y)$. Найдем этот объем, используя метод параллельных сечений. Ранее (см. (41.6)) было показано, что

$$V = \int\limits_a^b S(x)\,dx,$$

где $S(x)$ — площадь сечения плоскостью, перпендикулярной оси Ox, а $x = a$, $x = b$ — уравнения плоскостей, ограничивающих данное тело.

Положим сначала, что область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную прямыми $x = a$ и $x = b$ и кривыми $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, причем функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны и таковы, что $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ для всех $x \in [a; b]$ (см. рис. 218). Такая область называется *правильной в направлении оси* Oy: любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу области не более чем в двух точках.

Построим сечение цилиндрического тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox: $x = \text{const}$, где $x \in [a; b]$.

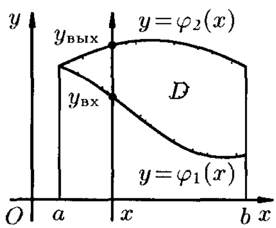


Рис. 218

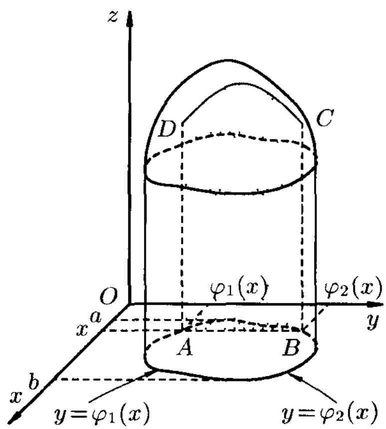


Рис. 219

В сечении получим криволинейную трапецию $ABCD$, ограниченную линиями $z = f(x; y)$, где $x = \text{const}$, $z = 0$, $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ (см. рис. 219).

Площадь $S(x)$ этой трапеции находим с помощью определенного интеграла

$$S(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y)\, dy.$$

Теперь, согласно методу параллельных сечений, искомый объем цилиндрического тела может быть найден так:

$$V = \int\limits_a^b S(x)\, dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y)\, dy \right) dx.$$

С другой стороны, в п. 53.2 было доказано, что объем цилиндрического тела определяется как двойной интеграл от функции $f(x; y) \geqslant 0$

по области D. Следовательно,

$$V = \iint_D f(x;y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy \right) dx.$$

Это равенство обычно записывается в виде

$$\boxed{\iint_D f(x;y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \cdot \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy.} \tag{53.7}$$

Формула (53.7) представляет собой способ вычисления двойного интеграла в декартовых координатах. Правую часть формулы (53.7) называют *двукратным* (или *повторным*) *интегралом* от функции $f(x;y)$ по области D. При этом $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy$ называется *внутренним* интегралом.

Для вычисления двукратного интеграла сначала берем внутренний интеграл, считая x постоянным, затем берем внешний интеграл, т. е. результат первого интегрирования интегрируем по x в пределах от a до b.

Если же область D ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$ $(c < d)$, кривыми $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$, причем $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ для всех $y \in [c;d]$, т. е. область D — *правильная в направлении оси* Ox, то, рассекая тело плоскостью $y = \text{const}$, аналогично получим:

$$\boxed{\iint_D f(x;y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \cdot \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)\,dx.} \tag{53.8}$$

Здесь, при вычислении внутреннего интеграла, считаем y постоянным.

Замечания.

1. Формулы (53.7) и (53.8) справедливы и в случае, когда $f(x;y) < 0$, $(x;y) \in D$.

2. Если область D правильная в обоих направлениях, то двойной интеграл можно вычислять как по формуле (53.7), так и по формуле (53.8).

3. Если область D не является правильной ни «по x», ни «по y», то для сведения двойного интеграла к повторным ее следует разбить на части, правильные в направлении оси Ox или оси Oy.

4. Полезно помнить, что внешние пределы в двукратном интеграле всегда постоянны, а внутренние, как правило, переменные.

Пример 53.1. Вычислить $\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy$, где область D ограничена линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x + y - 2 = 0$.

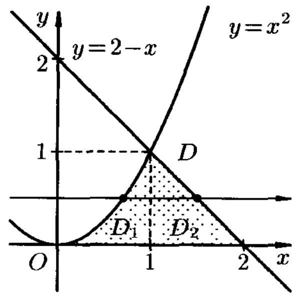


Рис. 220

◑ Решение: На рисунке 220 изображена область интегрирования D. Она правильная в направлении оси Ox. Для вычисления данного двойного интеграла воспользуемся формулой (53.8):

$$\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} (x+2y)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 dy\left(\frac{x^2}{2} + 2yx\right)\Bigg|_{\sqrt{y}}^{2-y} = \int\limits_0^1 \left(\frac{(2-y)^2}{2} + 4y - 2y^2 - \frac{y}{2} - 2y^{\frac{3}{2}}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{(y-2)^3}{6} + \frac{7\cdot y^2}{2\cdot 2} - 2\cdot\frac{y^3}{3} - 2\cdot 2\cdot\frac{y^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{8}{6} + \frac{7}{4} - \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{29}{20} = 1{,}45.$$

Отметим, что для вычисления данного двойного интеграла можно воспользоваться формулой (53.7). Но для этого область D следует разбить на две области: D_1 и D_2. Получаем:

$$\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} (x+2y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} (x+2y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} (x+2y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} (x+2y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx\cdot(xy+y^2)\Big|_0^{x^2} + \int\limits_1^2 dx\cdot(xy+y^2)\Big|_0^{2-x} =$$

$$= \int\limits_0^1 (x^3+x^4)\,dx + \int\limits_1^2 (2x - x^2 + (2-x)^2)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{(x-2)^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(4 - 1 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{20} + 3 - 2 = 1{,}45.$$

Ответ, разумеется, один и тот же. ●

53.5. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Для упрощения вычисления двойного интеграла часто применяют метод подстановки (как это делалось и при вычислении определенного интеграла), т. е. вводят новые переменные под знаком двойного интеграла.

Определим преобразование независимых переменных x и y (замену переменных) как

$$x = \varphi(u; v) \quad \text{и} \quad y = \psi(u; v). \tag{53.9}$$

Если функции (53.9) имеют в некоторой области D^* плоскости Ouv непрерывные частные производные первого порядка и отличный от нуля определитель

$$I(u; v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \tag{53.10}$$

а функция $f(x; y)$ непрерывна в области D, то справедлива *формула замены переменных в двойном интеграле*:

$$\iint\limits_D f(x; y)\, dx\, dy = \iint\limits_{D^*} f\big(\varphi(u; v); \psi(u; v)\big) \cdot |I(u; v)|\, du\, dv. \tag{53.11}$$

Функциональный определитель (53.10) называется *определителем Якоби* или *якобианом* (Г. Якоби — немецкий математик). Доказательство формулы (53.11) не приводим.

Рассмотрим частный случай замены переменных, часто используемый при вычислении двойного интеграла, а именно замену декартовых координат x и y полярными координатами r и φ.

В качестве u и v возьмем полярные координаты r и φ. Они связаны с декартовыми координатами формулами $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (см. п. 9.1).

Правые части в этих равенствах — непрерывно дифференцируемые функции. Якобиан преобразования определяется из (53.10) как

$$I(r; \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Формула замены переменных (53.11) принимает вид:

$$\iint\limits_D f(x; y)\, dx\, dy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi) \cdot r \cdot dr\, d\varphi, \tag{53.12}$$

где D^* — область в полярной системе координат, соответствующая области D в декартовой системе координат.

Для вычисления двойного интеграла в полярных координатах применяют то же правило сведения его к двукратному интегралу. Так, если область D^* имеет вид, изображенный на рисунке 221 (ограничена лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, где $\alpha < \beta$, и кривыми $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$, где $r_1(\varphi) \leqslant r_2(\varphi)$, т. е. область D^* *правильная*: луч, выходящий из полюса, пересекает ее границу не более чем в двух точках), то правую часть формулы (53.12) можно записать в виде

$$\iint\limits_{D^*} r \cdot f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\,dr\,d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r \cdot f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\,dr. \quad (53.13)$$

Внутренний интеграл берется при постоянном φ.

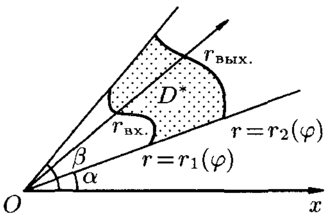


Рис. 221

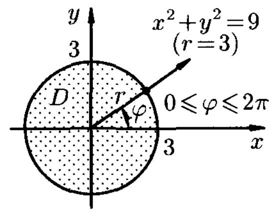


Рис. 222

Замечания.

1. Переход к полярным координатам полезен, когда подынтегральная функция имеет вид $f(x^2 + y^2)$; область D есть круг, кольцо или часть таковых.

2. На практике переход к полярным координатам осуществляется путем замены $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$; уравнения линий, ограничивающих область D, также преобразуются к полярным координатам. Преобразование области D в область D^* не выполняют, а, совместив декартову и полярную системы координат, находят нужные пределы интегрирования по r и φ (исследуя закон изменения r и φ точки $(r;\varphi)$ при ее отождествлении с точкой $(x;y)$ области D).

Пример 53.2. Вычислить $\iint\limits_{D} \sqrt{9 - x^2 - y^2}\,dx\,dy$, где область D — круг $x^2 + y^2 \leqslant 9$.

❍ Решение: Применив формулу (53.12), перейдем к полярным координатам:

$$\iint\limits_{D} \sqrt{9 - x^2 - y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{D} \sqrt{9 - (r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2} \cdot r\,dr\,d\varphi =$$
$$= \iint\limits_{D} r \cdot \sqrt{9 - r^2}\,dr\,d\varphi.$$

Область D в полярной системе координат определяется неравенствами (см. рис. 222) $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant 3$. Заметим: область D —

круг — преобразуется в область D^* — прямоугольник. Поэтому, согласно формуле (53.13), имеем:

$$\iint\limits_D r\cdot\sqrt{9-r^2}\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 r\cdot\sqrt{9-r^2}\,dr =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 (9-r^2)^{\frac{1}{2}}\cdot d(9-r^2) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\Big(\frac{(9-r^2)^{\frac{3}{2}}\cdot 2}{3}\Big)\Big|_0^3 =$$

$$= -\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}(0-27)\,d\varphi = 9\varphi\Big|_0^{2\pi} = 18\pi. \qquad \bullet$$

53.6. Приложения двойного интеграла

Приведем некоторые примеры применения двойного интеграла.

Объем тела

Как уже показано (п. 53.2), обьем цилиндрического тела находится по формуле

$$\boxed{V = \iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy,}$$

где $z = f(x;y)$ — уравнение поверхности, ограничивающей тело сверху.

Площадь плоской фигуры

Если положить в формуле (53.4) $f(x;y) = 1$, то цилиндрическое тело «превратится» в прямой цилиндр с высотой $H = 1$. Объем такого цилиндра, как известно, численно равен площади S основания D. Получаем формулу для вычисления площади S области D:

$$\boxed{S = \iint\limits_D dx\,dy,}$$

или, в полярных координатах,

$$\boxed{S = \iint\limits_D r\cdot dr\,d\varphi.}$$

Масса плоской фигуры

Как уже показано (п. 53.2), масса плоской пластинки D с переменной плотностью $\gamma = \gamma(x;y)$ находится по формуле

$$\boxed{m = \iint\limits_D \gamma(x;y)\,dx\,dy.}$$

Статические моменты и координаты центра тяжести плоской фигуры

Статические моменты фигуры D относительно осей Ox и Oy (см. п. 41.6) могут быть вычислены по формулам

$$S_x = \iint\limits_D y \cdot \gamma(x;y)\,dx\,dy \quad \text{и} \quad S_y = \iint\limits_D x \cdot \gamma(x;y)\,dx\,dy;$$

а координаты центра масс фигуры — по формулам

$$x_c = \frac{S_y}{m} \quad \text{и} \quad y_c = \frac{S_x}{m}.$$

Моменты инерции плоской фигуры

Моментом инерции материальной точки массы m относительно оси l называется произведение массы m на квадрат расстояния d точки до оси, т. е. $M_l = m \cdot d^2$. Моменты инерции плоской фигуры относительно осей Ox и Oy могут быть вычислены по формулам:

$$M_x = \iint\limits_D y^2 \cdot \gamma(x;y)\,dx\,dy, \qquad M_y = \iint\limits_D x^2 \cdot \gamma(x;y)\,dx\,dy.$$

Момент инерции фигуры относительно начала координат — по формуле $M_O = M_x + M_y$.

Замечание. Приведенными примерами не исчерпывается применение двойного интеграла. Далее мы встретим приложение двойного интеграла к вычислению площадей поверхностей фигур (п. 57.3).

Пример 53.3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$ и $x^2 + y^2 + 3z - 7 = 0$

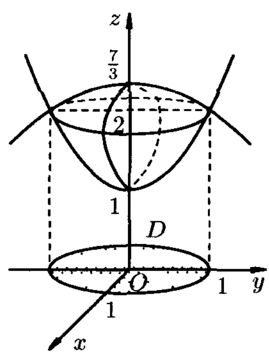


Рис 223

○ Решение: Данное тело ограничено двумя параболоидами (см. рис. 223). Решая систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z - 1, \\ x^2 + y^2 = -3z + 7, \end{cases}$$

находим уравнение линии их пересечения: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$.

Искомый объем равен разности обьемов двух цилиндрических тел с одним основанием (круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$) и ограниченных сверху соответственно поверхностями $z = \frac{1}{3}(7 - x^2 - y^2)$ и $z = 1 + x^2 + y^2$. Используя формулу (53.4), имеем

$$V = V_1 - V_2 = \iint\limits_D \frac{1}{3}(7 - x^2 - y^2)\,dx\,dy - \iint\limits_D (1 + x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Переходя к полярным координатам, находим:

$$V = \frac{1}{3}\iint_D (7-r^2)r\cdot dr\,d\varphi - \iint_D (1+r^2)r\cdot dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (7r-r^3)\,dr - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r+r^3)\,dr =$$

$$= \frac{1}{3}\Big(\frac{7}{2}-\frac{1}{4}\Big)\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} - \Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\Big)\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{13}{12}\cdot 2\pi - \frac{3}{4}\cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi. \qquad \bullet$$

Пример 53.4. Найти массу, статические моменты S_x и S_y и координаты центра тяжести фигуры, лежащей в первой четверти, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ и координатными осями (см. рис. 224). Поверхностная плотность в каждой точке фигуры пропорциональна произведению координат точки.

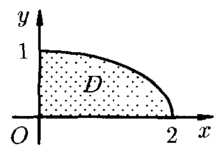


Рис. 224

○ Решение: По формуле (53.6) находим массу пластинки. По условию, $\gamma = \gamma(x;y) = k\cdot xy$, где k — коэффициент пропорциональности.

$$m = \iint_D kxy\,dx\,dy = k\int_0^2 x\cdot dx \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} y\,dy = \frac{k}{2}\int_0^2 x\,dx\cdot y^2\Big|_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} =$$

$$= \frac{k}{2}\cdot\frac{1}{4}\int_0^2 x(4-x^2)\,dx = \frac{k}{8}\Big(2x^2-\frac{x^4}{4}\Big)\Big|_0^2 = \frac{k}{2}.$$

Находим статические моменты пластинки:

$$S_x = \iint_D y\cdot kxy\,dx\,dy = k\int_0^2 x\,dx \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} y^2\,dy = \dots = \frac{4}{15}k,$$

$$S_y = \iint_D x\cdot kxy\,dx\,dy = k\int_0^2 x^2\,dx \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} y\,dy = \dots = \frac{8}{15}k.$$

Находим координаты центра тяжести пластинки, используя формулы $x_c = \frac{S_y}{m}$ и $y_c = \frac{S_y}{m}$: $x_c = \frac{16}{15}$, $y_c = \frac{8}{15}$. $\bullet$

§ 54. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

54.1. Основные понятия

Обобщением определенного интеграла на случай функции трех переменных является так называемый «тройной интеграл».

Теория тройного интеграла аналогична теории двойного интеграла. Поэтому изложим ее в несколько сокращенном виде.

Пусть в замкнутой области V пространства $Oxyz$ задана непрерывная функция $u = f(x; y; z)$. Разбив область V сеткой поверхностей на n частей V_i $(i = \overline{1, n})$ и выбрав в каждой из них произвольную точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$, составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\Delta V_i$ для функции $f(x; y; z)$ по области V (здесь ΔV_i — объем элементарной области V_i).

Если предел интегральной суммы существует при неограниченном увеличении числа n таким образом, что каждая «элементарная область» V_i стягивается в точку (т. е. диаметр области d_i стремится к нулю, т. е. $d_i \to 0$), то его называют *тройным интегралом* от функции $u = f(x; y; z)$ по области V и обозначают

$$\iiint\limits_V f(x; y; z) \cdot dx\, dy\, dz \quad \left(\text{или } \iiint\limits_V f(x; y; z)\, dv\right).$$

Таким образом, по определению, имеем:

$$\boxed{\begin{aligned}\iiint\limits_V f(x; y; z) \cdot dx\, dy\, dz &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\Delta V_i = \\ &= \iiint\limits_V f(x; y; z)\, dv.\end{aligned}} \tag{54.1}$$

Здесь $dv = dx\, dy\, dz$ — элемент объема.

Теорема 54.1 (существования). Если функция $u = f(x; y; z)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области V, то предел интегральной суммы (54.1) при $n \to \infty$ и $\max d_i \to 0$ существует и не зависит ни от способа разбиения области V на части, ни от выбора точек $M_i(x_i; y_i; z_i)$ в них.

Тройной интеграл обладает теми же свойствами, что и двойной интеграл:

1. $\iiint\limits_V c \cdot f(x; y; z)\, dv = c \cdot \iiint\limits_V f(x; y; z)\, dv$, c — const.

2. $\iiint\limits_V (f_1(x;y;z) \pm f_2(x;y;z))\,dv =$
$= \iiint\limits_V f_1(x;y;z)\,dv \pm \iiint\limits_V f_2(x;y;z))\,dv.$

3. $\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dv = \iiint\limits_{V_1} f(x;y;z)\,dv + \iiint\limits_{V_2} f(x;y;z)\,dv$, если $V =$ $= V_1 \bigcup V_2$, а пересечение V_1 и V_2 состоит из границы, их разделяющей.

4. $\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dv \geqslant 0$, если в области V функция $f(x;y;z) \geqslant 0$. Если в области интегрирования $f(x;y;z) \geqslant \varphi(x;y;z)$, то и

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dv \geqslant \iiint\limits_V \varphi(x;y;z)\,dv.$$

5. $\iiint\limits_V dv = V$, так как в случае $f(x;y;z) = 1$ любая интегральная сумма имеет вид $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta V_i = V$ и численно равна объему тела.

6. Оценка тройного интеграла:

$$m \cdot V \leqslant \iiint\limits_V f(x;y;z)\,dv \leqslant M \cdot V,$$

где m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x;y;z)$ в области V.

7. Теорема о среднем значении: если функция $f(x;y;z)$ непрерывна в замкнутой области V, то в этой области существует такая точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, что

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dv = f(x_0;y_0;z_0) \cdot V,$$

где V — объем тела.

54.2. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

В декартовых координатах вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Пусть областью интегрирования V является тело, ограниченное снизу поверхностью $z = z_1(x;y)$, сверху — поверхностью $z = z_2(x;y)$, причем $z_1(x;y)$ и $z_2(x;y)$ $(z_1(x;y) \leqslant z_2(x;y))$ — непрерывные функции в замкнутой области D, являющейся проекцией тела на плоскость Oxy

(см. рис. 225). Будем считать область V — ***правильной в направлении оси*** Oz: любая прямая, параллельная оси Oz, пересекает границу области не более чем в двух точках. Тогда для любой непрерывной в области V функции $f(x;y;z)$ имеет место формула

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dv = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)\,dz \right) ds, \qquad (54.2)$$

сводящая вычисление тройного интеграла к вычислению двойного интеграла от однократного (доказательство формулы (54.2) не приводим). При этом сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной z при постоянных x и y в пределах изменения z. Нижней границей интеграла является аппликата точки A — точки входа прямой, параллельной оси Oz в область V, т. е. $z = z_1(x;y)$; верхней границей — аппликата точки B — точки выхода прямой из области V, т. е. $z = z_2(x;y)$. Результат вычисления этого интеграла есть функция двух переменных: x и y.

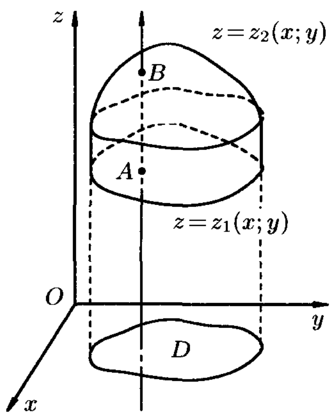


Рис. 225

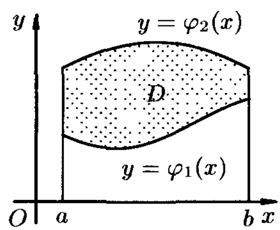


Рис. 226

Если область D ограничена линиями $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, причем $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ (см. рис. 226), то, переходя от двойного интеграла по области D к повторному, получаем формулу

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)\,dz,} \qquad (54.3)$$

по которой вычисляется тройной интеграл в декартовых координатах.

Замечания.

1. Если область V более сложная, чем рассмотренная, то ее следует разбить на конечное число таких областей (правильных), к которым можно применить формулу (54.3).

2. Порядок интегрирования в формуле (54.3), при определенных условиях, может быть иным.

Пример 54.1. Вычислить

$$\iiint\limits_V (x+z)\,dx\,dy\,dz,$$

где V ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=1$, $x+y+z=2$ (рис. 227).

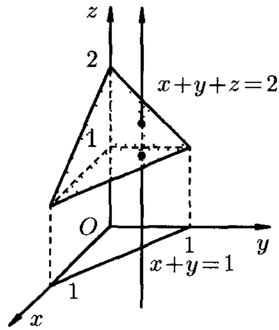


Рис 227

○ Решение· Область V является правильной в направлении оси Oz (как, заметим, и в направлении осей Ox и Oy). Ее проекция на плоскость Oxy является правильной в направлении оси Oy (и оси Ox). Согласно формуле (54.3), имеем:

$$\iiint\limits_V (x+z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_1^{2-x-y} (x+z)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \cdot \left(xz + \frac{z^2}{2}\right)\Big|_1^{2-x-y} =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(2x - x^2 - xy - x + \frac{(2-x-y)^2}{2} - \frac{1}{2}\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \left(xy - x^2y - x\frac{y^2}{2} - \frac{(2-x-y)^3}{6} - \frac{1}{2}y\right)\Big|_0^{1-x} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x - x^2 - x^2 + x^3 - \frac{x(1-x)^2}{2} - \frac{1}{6} + \frac{(2-x)^3}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right) dx =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - 2\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - 2\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right) - \frac{2}{3}\cdot x - \frac{(2-x)^4}{24}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} - \frac{2}{3} - \frac{1}{24} + \frac{16}{24} = \frac{1}{4}. \qquad \bullet$$

54.3. Замена переменных в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах

При вычислении тройного интеграла, как и двойного, часто применяется метод подстановки, т. е. совершается преобразование переменных.

Пусть совершена подстановка $x = \varphi(u;v;w)$, $y = \psi(u;v;w)$, $z = \chi(u;v;w)$. Если эти функции имеют в некоторой области V^* пространства $Ouvw$ непрерывные частные производные и отличный от нуля определитель

$$I(u;v;w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix},$$

то справедлива *формула замены переменных* в тройном интеграле:

$$\iiint\limits_V f(x,y;z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \iiint\limits_{V^*} f(\varphi(u;v;w);\psi(u;v;w);\chi(u;v;w)) \cdot |I(u;v;w)|\,du\,dv\,dw. \quad (54.4)$$

Здесь $I(u;v;w)$ — определитель Якоби, или якобиан преобразования (примем без доказательства).

Для вычисления тройного интеграла часто используют так называемые цилиндрические координаты.

Положение точки $M(x;y;z)$ в пространстве $Oxyz$ можно определить заданием трех чисел r, φ, z, где r — длина радиуса-вектора проекции точки M на плоскость Oxy, φ — угол, образованный этим радиусом-вектором с осью Ox, z — аппликата точки M (см. рис. 228).

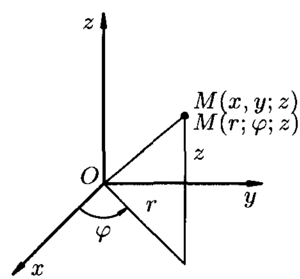


Рис 228

Эти три числа (r, φ, z) называются *цилиндрическими координатами* точки M.

Цилиндрические координаты точки связаны с ее декартовыми координатами следующими соотношениями:

$$\boxed{x = r\cdot\cos\varphi, \quad y = r\cdot\sin\varphi, \quad z = z}$$
$$(r \geqslant 0,\ \varphi \in [0;2\pi],\ z \in \mathbb{R}).$$

Возьмем в качестве u, v, w цилиндрические координаты r, φ, z и вычислим якобиан преобразования:

$$I(r;\varphi;z)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \geqslant 0.$$

Формула замены переменных (54.4) принимает вид

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V^*} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi; z) r\,dr\,d\varphi\,dz. \qquad (54.5)$$

Таким образом, вычисление тройного интеграла приводится к интегрированию по r, по φ и по z аналогично тому, как это делается в декартовых координатах.

Замечание. К цилиндрическим координатам бывает удобно перейти в случае, если область интегрирования образована цилиндрической поверхностью.

Пример 54.2. Вычислить $\iiint\limits_V z\cdot dx\,dy\,dz$, где V — область, ограниченная верхней частью конуса $x^2+y^2=z^2$ и плоскостью $z=1$.

○ Решение: На рис. 229 изображена область интегрирования V. Вычислим интеграл путем перехода к цилиндрическим координатам: $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$, $z=z$. Здесь $dx\,dy\,dz = r\cdot dr\,d\varphi\,dz$. Уравнение конуса примет вид $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = z^2$, т. е. $z=r$. Уравнение окружности $x^2+y^2=1$ (границы области D) запишется так: $r=1$. Новые переменные изменяются в следующих пределах: r — от 0 до 1, φ — от 0 до 2π, а z — от r до 1 (прямая, параллельная оси Oz, пересекающая область D, входит в конус $z=r$ и выходит из него на высоте $z=1$).

Таким образом, согласно формуле (54.5), получаем:

$$\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_V z\cdot r\cdot dr\,d\varphi\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_r^1 z\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\,dr\cdot \frac{z^2}{2}\Big|_r^1 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{r^2}{2}\right)dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\cdot\left(\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{8}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{8}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Заметим, что, не переходя к цилиндрическим координатам, получим:

$$\iiint\limits_V z\cdot dx\,dy\,dz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} z\cdot dz. \quad \bullet$$

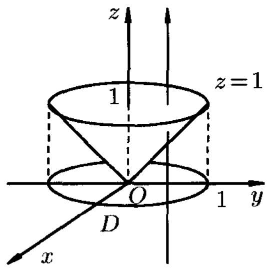


Рис 229

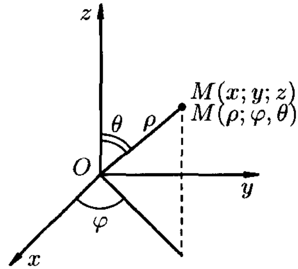


Рис 230

Сферическими координатами точки $M(x; y; z)$ пространства $Oxyz$ называется тройка чисел ρ, φ, θ, где ρ – длина радиуса-вектора точки M, φ - угол, образованный проекцией радиуса-вектора $\overline{OM}$ на плоскость Oxy и осью Ox, θ – угол отклонения радиуса-вектора $\overline{OM}$ от оси Oz (см. рис. 230).

Сферические координаты ρ, φ, θ связаны с декартовыми координатами x, y, z соотношениями:

$$\boxed{x = \rho\cos\varphi\cdot\sin\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\cdot\sin\theta, \quad z = \rho\cos\theta}$$

$$(\rho \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

В некоторых случаях вычисление тройного интеграла удобно производить, перейдя к сферическим координатам. Для этого нужно воспользоваться формулой замены переменных в тройном интеграле (54.4). Так как якобиан преобразования

$$I(r;\varphi;z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \rho\sin\varphi\sin\theta\cdot\begin{vmatrix} \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} +$$

$$+ \rho\cos\varphi\sin\theta\cdot\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \rho\sin\varphi\sin\theta(-\rho\sin\varphi\sin^2\theta - \rho\sin\varphi\cos^2\theta) +$$

$$+ \rho\cos\varphi\sin\theta(-\rho\cos\varphi\sin^2\theta - \rho\cos\varphi\cos^2\theta) =$$

$$= -\rho^2\sin^2\varphi\sin\theta\cdot 1 - \rho^2\cos^2\varphi\sin\theta\cdot 1 = -\rho^2\sin\theta\cdot 1 = -\rho^2\sin\theta,$$

то

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{V^*} f(\rho\cos\varphi\sin\theta; \rho\sin\varphi\sin\theta; \rho\cos\theta) \cdot \rho^2 \sin\theta \cdot d\rho\, d\varphi\, d\theta. \quad (54.6)$$

Замечание. Переходить к сферическим координатам удобно, когда область интегрирования V есть шар (уравнение его границы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в сферических координатах имеет вид $\rho = R$) или его часть, а также если подынтегральная функция имеет вид $f(x^2 + y^2 + z^2)$.

Пример 54.3. Вычислить

$$\iiint\limits_V \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где V — шар $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

○ Решение: Вычислим интеграл путем перехода к сферическим координатам: $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Тогда

$$dV = dx\, dy\, dz = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta.$$

Граница области V — сфера и ее уравнение имеет вид $\rho = 1$, подынтегральная функция после замены переменных примет вид $\frac{1}{1 + (\rho^2)^{3/2}}$, т. е. $\frac{1}{1 + \rho^3}$. Новые переменные изменяются в следующих пределах: ρ — от 0 до 1, φ — от 0 до 2π, θ — от 0 до π. Таким образом, согласно формуле (54.6),

$$I = \iiint\limits_V \frac{1}{1 + \rho^3} \cdot \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \int\limits_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{\rho^2}{1 + \rho^3}\, d\rho =$$

$$= \int\limits_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1}{3} \ln|1 + \rho^3|\right)\Big|_0^1 = \int\limits_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{3} \ln 2\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3} \ln 2 \int\limits_0^\pi \sin\theta\, d\theta \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3} \ln 2 \int\limits_0^\pi \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \ln 2(-\cos\theta)\Big|_0^\pi = \frac{4\pi}{3} \ln 2. \quad ●$$

54.4. Некоторые приложения тройного интеграла

Объем тела

Объем области V выражается формулой $V = \iiint\limits_V dv$ или

$V = \iiint\limits_V dx\, dy\, dz$ — в декартовых координатах,

$$V = \iiint\limits_V r\,dr\,d\varphi\,dz \text{ — в цилиндрических координатах,}$$

$$V = \iiint\limits_V \rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta \text{ — в сферических координатах.}$$

Масса тела

Масса тела m при заданной объемной плотности γ вычисляется с помощью тройного интеграла как

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x;y;z)\,dx\,dy\,dz,$$

где $\gamma(x;y;z)$ — объемная плотность распределения массы в точке $M(x;y;z)$.

Статические моменты

Моменты S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} тела относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz вычисляются по формулам

$$S_{xy} = \iiint\limits_V z \cdot \gamma(x;y;z)\,dv, \qquad S_{yz} = \iiint\limits_V x \cdot \gamma(x;y;z)\,dv,$$

$$S_{xz} = \iiint\limits_V y \cdot \gamma(x;y;z)\,dv.$$

Центр тяжести тела

Координаты центра тяжести тела V находятся по формулам

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{S_{xy}}{m}.$$

Моменты инерции тела

Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2 \cdot \gamma(x;y;z)\,dv, \qquad I_{yz} = \iiint\limits_V x^2 \cdot \gamma(x;y;z)\,dv,$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_V y^2 \cdot \gamma(x;y;z)\,dv,$$

а моменты инерции относительно координатных осей:

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2+z^2) \cdot \gamma(x;y;z)\,dv, \qquad I_y = \iiint\limits_V (x^2+z^2) \cdot \gamma(x;y;z)\,dv,$$

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2) \cdot \gamma(x;y;z)\,dv.$$

Пример 54.4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 1$.

○ Решение: Данное тело ограничено сверху плоскостью $z = 1$, снизу — параболоидом $z = x^2+y^2$ (см. рис. 231). Объем тела находим, используя цилиндрические координаты:

$$V = \iiint\limits_V r \cdot dr\, d\varphi\, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r \cdot dr \int\limits_{r^2}^1 dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r(1-r^2)\, dr = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) d\varphi = \frac{1}{4}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}. \quad \bullet$$

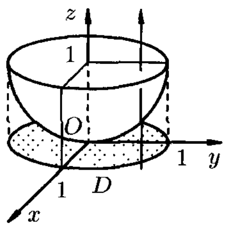


Рис. 231

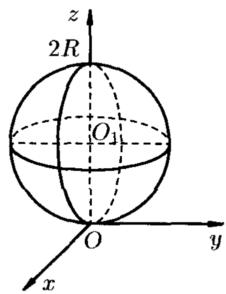


Рис. 232

Пример 54.5. Найти массу шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz$, если плотность в каждой точке шара обратно пропорциональна расстоянию от нее до начала координат (дополнительно: найти координаты центра тяжести).

○ Решение: Уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ можно записать так: $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$. Центр шара расположен в точке $O_1(0; 0; R)$ (см. рис. 232). Пусть $M(x; y; z)$ — произвольная точка шара. Тогда, по условию, плотность γ определяется формулой

$$\gamma(x; y; z) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

где k — коэффициент пропорциональности, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние от точки M до начала координат.

Итак, $m = \iiint\limits_V \gamma(x; y; z)\, dv = \iiint\limits_V \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dv.$

Вычислять интеграл будем в сферических координатах. Уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ примет вид $\rho^2 = 2R\rho \cdot \cos\theta$, т. е. $\rho = 2R\cos\theta$.

Поэтому сферические координаты будут изменяться в следующих пределах: ρ — от 0 до $2R\cos\theta$; θ — от 0 до $\frac{\pi}{2}$; φ — от 0 до 2π. Подынтегральная функция примет вид $\dfrac{k}{\sqrt{\rho^2}} = \dfrac{k}{\rho}$. Поэтому

$$m = \iiint\limits_V \frac{k}{\rho} \cdot \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = k \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} \rho \, d\rho =$$

$$= k \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \cdot \frac{1}{2} \cdot 4R^2 \cos^2\theta = -2R^2 k \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d(\cos\theta) =$$

$$= -2R^2 k \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{\cos^3\theta}{3}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -2R^2 k \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3} k R^2 \varphi \bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi k R^2.$$

Из соображений симметрии следует, что $x_c = 0$, $y_c = 0$; вычислив интеграл $\frac{1}{m} \cdot \iiint\limits_V z \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \, dv$, найдем $z_c = \frac{4}{5}R$. Итак, координаты центра тяжести $(0; 0; \frac{4}{5}R)$. ●

Глава XII. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Лекции 47–50

Обобщением определенного интеграла на случай, когда область интегрирования есть некоторая кривая, является так называемый криволинейный интеграл.

§ 55. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ I РОДА

55.1. Основные понятия

Пусть на плоскости Oxy задана непрерывная кривая AB (или L) длины l Рассмотрим непрерывную функцию $f(x;y)$, определенную в точках дуги AB. Разобьем кривую AB точками $M_0 = A, M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_n = B$ на n произвольных дуг $M_{i-1}M_i$ с длинами Δl_i ($i = 1, 2, \ldots, n$)(см. рис. 233). Выберем на каждой дуге $M_{i-1}M_i$ произвольную точку $(\widehat{x}_i; \widehat{y}_i)$ и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\widehat{x}_i; \widehat{y}_i)\Delta l_i. \tag{55.1}$$

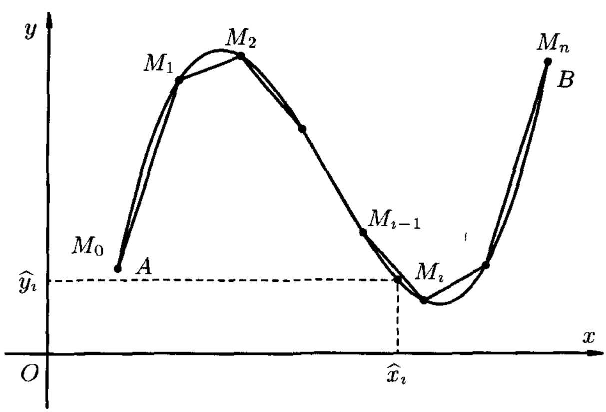


Рис 233

Ее называют *интегральной суммой* для *функции* $f(x;y)$ *по кривой* AB.

Пусть $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta l_i$ — наибольшая из длин дуг деления. Если при $\lambda \to 0$ (тогда $n \to \infty$) существует конечный предел интегральных сумм (55.1), то его называют *криволинейным интегралом от функции* $f(x;y)$ *по длине кривой* AB (или I рода) и обозначают $\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl$ (или $\int\limits_{L} f(x;y)\,dl$).

Таким образом, по определению,

$$\boxed{\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\Delta l_i.} \tag{55.2}$$

Условие существования криволинейного интеграла I рода (существования предела интегральной суммы (55.1) при $n \to \infty$ ($\lambda \to 0$)) представляет следующая теорема, которую мы приводим здесь без доказательства.

Теорема 55.1. Если функция $f(x;y)$ непрерывна в каждой точке гладкой кривой (в каждой точке $(x;y) \in L$ существует касательная к данной кривой и положение ее непрерывно меняется при перемещении точки по кривой), то криволинейный интеграл I рода существует и его величина не зависит ни от способа разбиения кривой на части, ни от выбора точек в них

Аналогичным образом вводится понятие криволинейного интеграла от функции $f(x;y;z)$ по пространственной кривой L.

Приведем основные свойства криволинейного интеграла по длине дуги (I рода).

1. $\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = \int\limits_{BA} f(x;y)\,dl$, т. е. криволинейный интеграл I рода не зависит от направления пути интегрирования.

2. $\int\limits_{L} c\cdot f(x;y)\,dl = c\cdot \int\limits_{L} f(x;y)\,dl$, $c = \mathrm{const}$

3. $\int\limits_{L} (f_1(x;y) \pm f_2(x;y))\,dl = \int\limits_{L} f_1(x;y)\,dl \pm \int\limits_{L} f_2(x;y)\,dl.$

4. $\int\limits_{L} f(x;y)dl = \int\limits_{L_1} f(x;y)dl + \int\limits_{L_2} f(x;y)dl$, если путь интегрирования L разбит на части L_1 и L_2 такие, что $L = L_1 \bigcup L_2$ и L_1 и L_2 имеют единственную общую точку.

5. Если для точек кривой L выполнено неравенство $f_1(x;y) \leqslant f_2(x;y)$, то $\int\limits_L f_1(x;y)\,dl \leqslant \int\limits_L f_2(x;y)\,dl$.

6. $\int\limits_{AB} dl = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta l_i = l$, где l — длина кривой AB.

7. Если функция $f(x;y)$ непрерывна на кривой AB, то на этой кривой найдется точка $(x_c;y_c)$ такая, что $\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = f(x_c;y_c)\cdot l$ (теорема о среднем).

55.2. Вычисление криволинейного интеграла I рода

Вычисление криволинейного интеграла I рода может быть сведено к вычислению определенного интеграла. Приведем без доказательства правила вычисления криволинейного интеграла I рода в случаях, если кривая L задана параметрическим, полярным и явным образом.

Параметрическое представление кривой интегрирования

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем точке A соответствует $t = \alpha$, точке B — значение $t = \beta$, то

$$\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t);y(t)\big)\cdot\sqrt{x_t^{2\prime} + y_t^{2\prime}}\,dt. \tag{55.3}$$

Аналогичная формула имеет место для криволинейного интеграла от функции $f(x;y;z)$ по пространственной кривой AB, задаваемой уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$:

$$\int\limits_{AB} f(x;y;z)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t);y(t);z(t)\big)\cdot\sqrt{x_t^{2\prime} + y_t^{2\prime} + z_t^{2\prime}}\,dt. \tag{55.4}$$

Явное представление кривой интегрирования

Если кривая AB задана уравнением $y = \varphi(x)$, $x \in [a;b]$, где $\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = \int\limits_{a}^{b} f\big(x;\varphi(x)\big)\cdot\sqrt{1 + y_x^{2\prime}}\,dx. \tag{55.5}$$

Подынтегральное выражение в правой части формулы (55.5) получается заменой в левой части $y = \varphi(x)$ и $dl = \sqrt{1 + y_x^{2\prime}}\,dx$ (дифференциал дуги кривой — см. п. 41.3).

Пример 55.1. Вычислить $\int\limits_L xy^2\,dl$, где L — отрезок прямой между точками $O(0;0)$ и $A(4;3)$.

◯ Решение: Уравнение прямой OA есть $y = \frac{3}{4}x$, $0 \leqslant x \leqslant 4$. Согласно формуле (55.5), имеем:

$$\int\limits_L xy^2\,dl = \int\limits_0^4 x\cdot\left(\frac{3}{4}x\right)^2\cdot\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}dx = \frac{45}{64}\int\limits_0^4 x^3\,dx = 45. \qquad \bullet$$

Полярное представление кривой интегрирования

Если плоская кривая L задана уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ в полярных координатах, то $dl = \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}d\varphi$ и

$$\int\limits_L f(x;y)\,dl = \int\limits_\alpha^\beta f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\cdot\sqrt{r^2 + {r'_\varphi}^2}d\varphi. \tag{55.6}$$

Подчеркнем, что нижний предел определенного интеграла в формулах (55.3)–(55.6) должен быть меньше верхнего.

Пример 55.2. Вычислить $\int\limits_L (x+y)dl$, где L — лепесток лемнискаты $r = \sqrt{\sin 2\varphi}$, расположенной в I координатном углу.

◯ Решение: Кривая интегрирования изображена на рисунке 234. Воспользуемся формулой (55.6). Так как

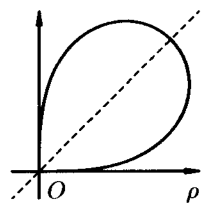


Рис. 234

$$dl = \sqrt{\sin 2\varphi + \frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}d\varphi = \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{d\varphi}{r},$$

то, заметив, что $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, получаем:

$$\int\limits_L (x+y)\,dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\varphi + r\sin\varphi)\frac{d\varphi}{r} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi = 2. \qquad \bullet$$

55.3. Некоторые приложения криволинейного интеграла I рода

Криволинейный интеграл I рода имеет разнообразные приложения в математике и механике.

Длина кривой

Длина l кривой AB плоской или пространственной линии вычисляется по формуле $l = \int\limits_{AB} dl$.

Площадь цилиндрической поверхности

Если направляющей цилиндрической поверхности служит кривая AB, лежащая в плоскости Oxy, а образующая параллельна оси Oz (см рис. 235), то площадь поверхности, задаваемой функцией $z = f(x;y)$, находится по формуле $Q = \int\limits_{AB} f(x;y)\,dl$.

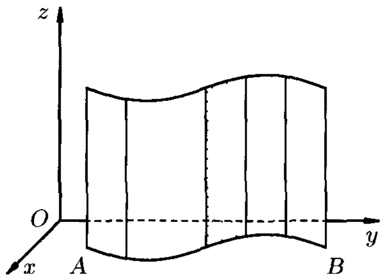


Рис. 235

Масса кривой

Масса материальной кривой AB (провод, цепь, трос, ...) определяется формулой $m = \int\limits_{AB} \gamma(M)\,dl$, где $\gamma = \gamma(M) = \gamma(x;y)$ — плотность кривой в точке M.

❑ Разобьем кривую AB на n элементарных дуг $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ $(i = \overline{1,n})$. Пусть $(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)$ — произвольная точка дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$. Считая приближенно участок дуги однородным, т. е. считая, что плотность в каждой точке дуги такая же, как и в точке $(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)$, найдем приближенное значение массы m_i дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$:

$$m_i \approx \gamma(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\Delta l_i.$$

Суммируя, находим приближенное значение массы m:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\Delta l_i. \tag{55.7}$$

За массу кривой AB примем предел суммы (55.7) при условии, что $\max \Delta l_i \to 0$ $(n \to \infty)$, т. е.

$$m = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max \Delta l_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \gamma(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\Delta l_i,$$

или, согласно формуле (55.2),

$$m = \int\limits_{AB} \gamma(x;y)\,dl.$$

(Заметим, что предел существует, если кривая AB гладкая, а плотность задана непрерывной в каждой точке AB функцией.) ■

Статические моменты, центр тяжести

Статические моменты относительно осей Ox и Oy и координаты центра тяжести материальной кривой AB определяются по формулам

$$S_x = \int\limits_{AB} y \cdot \gamma(x;y)\,dl, \quad S_y = \int\limits_{AB} x \cdot \gamma(x;y)\,dl, \quad x_c = \frac{S_y}{m}, \quad y_c = \frac{S_x}{m}.$$

Моменты инерции

Для материальной кривой AB моменты I_x, I_y, I_O инерции относительно осей Ox, Oy и начала координат соответственно равны:

$$I_x = \int\limits_{AB} y^2 \cdot \gamma(x;y)\,dl, \quad I_y = \int\limits_{AB} x^2 \cdot \gamma(x;y)\,dl, \quad I_O = \int\limits_{AB} (x^2+y^2) \cdot \gamma(x;y)\,dl.$$

Пример 55.3. Найти центр тяжести полуокружности $x^2+y^2=R^2$, лежащей в верхней полуплоскости. Плотность считать равной единице в каждой точке кривой ($\gamma = 1$).

○ Решение: Из соображений симметрии ясно, что центр тяжести находится на оси Oy (см. рис. 236). Поэтому $x_c = 0$. Ордината центра тяжести

$$y_c = \frac{\int\limits_{AB} y \cdot dl}{\int\limits_{AB} dl}.$$

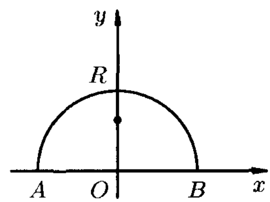


Рис 236

Знаменатель дроби — длина полуокружности. Поэтому $\int\limits_{AB} dl = \pi R$.

Для вычисления числителя воспользуемся параметрическими уравнениями окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Имеем:

$$\int\limits_{AB} y \cdot dl = \int\limits_0^\pi R\sin t \cdot \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} \cdot dt = R^2 \int\limits_0^\pi \sin t\,dt = 2R^2.$$

Следовательно, $y_c = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}$. Итак, $x_c = 0$, $y_c = \frac{2R}{\pi}$. ●

§ 56. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ II РОДА

56.1. Основные понятия

Решение задачи о вычислении работы переменной силы при перемещении материальной точки вдоль некоторой кривой (и других) приводит к понятию криволинейного интеграла II рода.

Криволинейный интеграл II рода определяется почти так же, как и интеграл I рода.

Пусть в плоскости Oxy задана непрерывная кривая AB (или L) и функция $P(x;y)$, определенная в каждой точке кривой. Разобьем кривую AB точками $M_0 = A, M_1, \ldots, M_n = B$ в направлении от точки A к точке B на n дуг $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ с длинами Δl_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

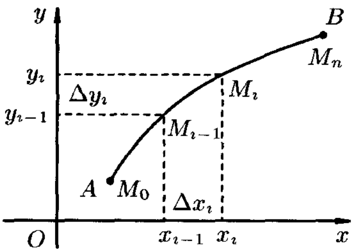


Рис. 237

На каждой «элементарной дуге» $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ возьмем точку $(\widehat{x}_i; \widehat{y}_i)$ и составим сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} P(\widehat{x}_i; \widehat{y}_i) \cdot \Delta x_i, \tag{56.1}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — проекция дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ на ось Ox (см. рис. 237).

Сумму (56.1) называют *интегральной суммой для функции* $P(x;y)$ *по переменной* x. Таких сумм можно составить бесчисленное множество. (Отличие сумм (55.1) и (56.1) очевидно.)

Если при $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta l_i \to 0$ интегральная сумма (56.1) имеет конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения кривой AB, ни от выбора точек $(\widehat{x}_i; \widehat{y}_i)$, то его называют *криволинейным интегралом по координате* x (или II рода) *от функции* $P(x;y)$ *по кривой* AB и обозначают $\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx$ или $\int\limits_{L} P(x;y)\,dx$.

Итак,

$$\boxed{\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ (\lambda \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} P(\widehat{x}_i; \widehat{y}_i) \Delta x_i.}$$

Аналогично вводится криволинейный интеграл от функции $Q(x;y)$ по координате y:

$$\boxed{\int\limits_{AB} Q(x;y)\,dy = \lim_{\substack{n \to \infty \\ (\lambda \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} Q(\widehat{x}_i; \widehat{y}_i) \Delta y_i,}$$

где Δy_i — проекция дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ на ось Oy.

Криволинейный интеграл II рода общего вида

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy$$

определяется равенством

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + \int\limits_{AB} Q(x;y)\,dx.$$

Криволинейный интеграл $\int\limits_L Q(x;y;z)\,dx+Q(x;y;z)\,dy+R(x;y;z)\,dz$ по пространственной кривой L определяется аналогично.

Теорема 56.1. Если кривая AB гладкая, а функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывные на кривой AB, то криволинейный интеграл II рода существует.

Отметим лишь некоторые свойства криволинейного интеграла II рода.

1. При изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл II рода изменяет свой знак на противоположный, т. е.

$$\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}$$

(проекция дуги $\widehat{M_{i-1}M_i}$ на оси Ox и Oy меняют знаки с изменением направления).

2. Если кривая AB точкой C разбита на две части AC и CB, то интеграл по всей кривой равен сумме интегралов по ее частям, т. е.

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB}.$$

3. Если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Ox, то

$$\int\limits_L P(x;y)dx = 0 \quad (\text{все } \Delta x_i = 0);$$

аналогично для кривой, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси Oy:

$$\int\limits_L Q(x;y)dy = 0 \quad (\text{все } \Delta y_i = 0).$$

4. Криволинейный интеграл по замкнутой кривой $\Big($обозначается $\oint\Big)$ не зависит от выбора начальной точки (зависит только от направления обхода кривой).

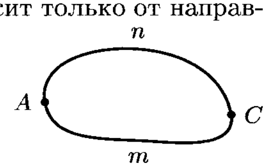


Рис. 238

❑ Действительно,

$$\oint\limits_{AmCnA} = \int\limits_{AmC} + \int\limits_{CnA}$$

(см. рис. 238). С другой стороны,

$$\oint\limits_{CnAmC} = \int\limits_{CnA} + \int\limits_{AmC} .$$

Таким образом,

$$\oint\limits_{AmCnA} = \oint\limits_{CnAmC} . \qquad \blacksquare$$

56.2. Вычисление криволинейного интеграла II рода

Вычисление криволинейного интеграла II рода, как и I рода, может быть сведено к вычислению определенного интеграла.

Параметрическое представление кривой интегрирования

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны вместе со своими производными $x'(t)$ и $y'(t)$ на отрезке $[\alpha; \beta]$, причем начальной точке A кривой соответствует значение параметра $t = \alpha$, а конечной точке B — значение $t = \beta$. И пусть функция $P(x; y)$ непрерывна на кривой AB. Тогда, по определению,

$$\int\limits_{AB} P(x; y)\, dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} P(\widehat{x}_i; \widehat{y}_i)\Delta x_i.$$

Преобразуем интегральную сумму к переменной t. Так как

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1}),$$

то по формуле Лагранжа (см. (25.2)) имеем: $\Delta x_i = x'(c_i)\Delta t_i$, где $c_i \in \in (t_{i-1}; t_i)$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Выберем точку $(\widehat{x}_i; \widehat{y}_i)$ так, чтобы $\widehat{x}_i = x(c_i)$, $\widehat{y}_i = y(c_i)$. Тогда преобразованная интегральная сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} P(x(c_i); y(c_i)) \cdot x'(c_i) \cdot \Delta t_i$ будет интегральной суммой для функции одной переменной $P(x(t); y(t)) \cdot x'(t)$ на промежутке $[\alpha; \beta]$. Поэтому

$$\int\limits_{AB} P(x; y)\, dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\big(x(t); y(t)\big) x'(t)\, dt. \tag{56.2}$$

Аналогично получаем:

$$\int\limits_{AB} Q(x; y)\, dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q\big(x(t); y(t)\big) y'(t)\, dt. \tag{56.3}$$

Складывая почленно полученные равенства (56.2) и (56.3), получаем:

$$\int\limits_{AB} P(x; y)\, dx + Q(x; y)\, dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(P\big(x(t); y(t)\big) x'(t) + Q\big(x(t); y(t)\big) y'(t)\Big)\, dt. \tag{56.4}$$

Явное представление кривой интегрирования

Если кривая AB задана уравнением $y = \varphi(x)$, $x \in [a;b]$, где функция $\varphi(x)$ и ее производная $\varphi'(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, то из формулы (56.4), приняв x за параметр, имеем параметрические уравнения кривой AB: $x = x$, $y = \varphi(x)$, $x \in [a;b]$, откуда получим:

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \int\limits_a^b \Big[P\big(x;\varphi(x)\big) + Q\big(x;\varphi(x)\big)\varphi'(x)\Big]\,dx. \quad (56.5)$$

В частности,

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx = \int\limits_a^b P\big(x;\varphi(x)\big)\,dx. \quad (56.6)$$

Если AB — гладкая пространственная кривая, которая описывается непрерывными на отрезке $[\alpha;\beta]$ функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$, то криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} P(x;y;z)\,dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)\,dz$$

вычисляется по формуле

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_\alpha^\beta \big[P\big(x(t);y(t);z(t)\big)x'(t) +$$
$$+ Q\big(x(t);y(t);z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t);y(t);z(t)\big)z'(t)\big]dt. \quad (56.7)$$

Замечание. Криволинейные интегралы I и II рода связаны соотношением $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\,dl$, где α и β — углы, образованные касательной к кривой AB в точке $M(x;y)$ с осями Ox и Oy соответственно.

Пример 56.1. Вычислить $I = \int\limits_L (x-y)^2\,dx + (x+y)^2\,dy$, L — ломаная OAB, где $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(4;2)$.

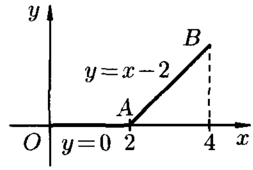


Рис 239

Решение: Так как $L = OAB = OA + AB$ (см. рис. 239), то $I = \int\limits_L = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AB}$.

Уравнение отрезка OA есть $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 2$; уравнение отрезка AB: $y = x - 2$, $x \in [2;4]$. Согласно формуле (56.5), имеем:

$$I = \int_0^2 [(x-0)^2 + 0]\,dx + \int_2^4 [2^2 + (2x-2)^2 \cdot 1]\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + 4x\Big|_2^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-2)^3}{3}\Big|_2^4 = \frac{8}{3} + (16-8) + \frac{1}{6}(216-8) = \frac{136}{3}. \quad \bullet$$

Пример 56.2. Вычислить $I = \int\limits_L y^2\,dx + (x^2+z)\,dy + (x+y+z^2)\,dz$, L — отрезок прямой в пространстве от точки $A(1;0;2)$ до точки $B(3;1;4)$.

○ Решение: Составим уравнение прямой, проходящей через точки A и B: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ или в параметрической форме: $x = 2t+1$, $y = t$, $z = 2t+2$. При перемещении от точки A к точке B параметр t меняется от 0 до 1. По формуле (56.7) находим, что

$$I = \int_0^1 \Big[t^2 \cdot 2 + \big((2t+1)^2 + 2t + 2\big) \cdot 1 + \big(2t+1+t+(2t+2)^2\big) \cdot 2\Big]\,dt =$$

$$= \int_0^1 (14t^2 + 28t + 13)\,dt = \frac{95}{3}. \quad \bullet$$

56.3. Формула Остроградского–Грина

Связь между двойным интегралом по области D и криволинейным интегралом по границе L этой области устанавливает формула Остроградского-Грина, которая широко применяется в математическом анализе.

Пусть на плоскости Oxy задана область D, ограниченная кривой, пересекающейся с прямыми, параллельными координатным осям не более чем в двух точках, т. е. область D — правильная.

Теорема 56.2. Если функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области D, то имеет место формула

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint\limits_L P\,dx + Q\,dy, \tag{56.8}$$

где L — граница области D и интегрирование вдоль кривой L производится в положительном направлении (при движении вдоль кривой, область D остается слева).

Формула (56.8) называется формулой Остроградского–Грина.

❑ Пусть $y = \varphi_1(x)$ — уравнение дуги AnB, а $y = \varphi_2(x)$ — уравнение дуги AmB (см. рис. 240). Найдем сначала $\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$. По правилу вычисления двойного интеграла, имеем:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_a^b dx \cdot P(x;y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} = \int\limits_a^b P\big(x;\varphi_2(x)\big)\,dx - \int\limits_a^b P\big(x;\varphi_1(x)\big)\,dx.$$

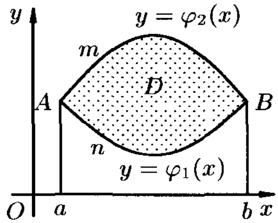


Рис. 240

Или, согласно формуле (56.6),

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy = \int\limits_{AmB} P(x;y)\,dx - \int\limits_{AnB} P(x;y)\,dx =$$
$$= -\int\limits_{BmA} P(x;y)\,dx - \int\limits_{AnB} P(x;y)\,dx = -\oint\limits_L P(x;y)\,dx. \quad (56.9)$$

Аналогично доказывается, что

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx\,dy = \oint\limits_L Q(x;y)\,dx. \quad (56.10)$$

Если из равенства (56.10) вычесть равенство (56.9), то получим формулу (56.8). ■

Замечание. Формула (56.8) справедлива и для произвольной области, которую можно разбить на конечное число правильных областей.

Пример 56.3. С помощью формулы Остроградского–Грина вычислить

$$I = \oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y \cdot \big(xy + \ln\big(x + \sqrt{x^2+y^2}\big)\big)\,dy,$$

где L — контур прямоугольника с вершинами $A(3;2)$, $B(6;2)$, $C(6;4)$, $D(3;4)$.

❍ Решение: На рисунке 241 изображен контур интегрирования. Поскольку $\frac{\partial Q}{\partial x} = y \cdot \left(\frac{y \cdot \sqrt{x^2+y^2}+1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$; $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, по формуле (56.8) имеем:

$$I = \iint\limits_D \left(\frac{y(y\sqrt{x^2+y^2}+1)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D y^2\,dx\,dy = \int\limits_3^6 dx \int\limits_2^4 y^2\,dy = 56. \quad \bullet$$

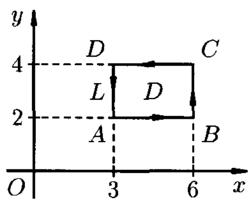


Рис. 241

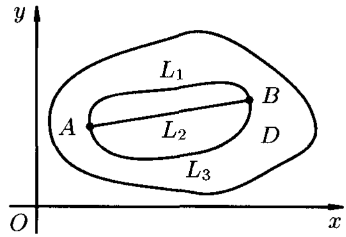


Рис. 242

56.4. Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования

Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ — две произвольные точки односвязной области D плоскости Oxy (область D называется ***односвязной***, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит D (область без «дыр»)). Точки A и B можно соединить различными линиями (на рис. 242 это L_1, L_2 и L_3). По каждой из этих кривых интеграл

$$I = \int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy$$

имеет, вообще говоря, свое значение.

Если же его значения по всевозможным кривым AB одинаковы, то говорят, что интеграл I не зависит от вида пути интегрирования. В этом случае для интеграла I достаточно отметить лишь его начальную точку $A(x_1; y_1)$ и его конечную точку $B(x_2; y_2)$ пути. Записывают:

$$I = \int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy. \qquad (56.11)$$

Каковы же условия, при которых криволинейный интеграл II рода не зависел от вида пути интегрирования?

Теорема 56.3. Для того чтобы криволинейный интеграл

$$I = \int_L P dx + Q dy$$

не зависел от пути интегрирования в односвязной области D, в которой функции $P(x;y)$, $Q(x;y)$ непрерывны вместе со своими частными производными, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (56.12)$$

❑ Докажем достаточность условия (56.12). Рассмотрим произвольный замкнутый контур $AmBnA$ (или L) в области D (см. рис. 243). Для него имеет место формула Остроградского–Грина (56.8). В силу условия (56.12) имеем:

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = 0, \quad \text{или} \quad \oint_{AmBnA} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Учитывая свойства криволинейного интеграла, имеем:

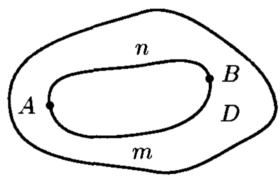


Рис. 243

$$\oint_{AmBnA} P\,dx + Q\,dy =$$
$$= \int_{AmB} P\,dx + Q\,dy + \int_{BnA} P\,dx + Q\,dy =$$
$$= \int_{AmB} P\,dx + Q\,dy - \int_{AnB} P\,dx + Q\,dy = 0,$$

т. е.

$$\int_{AmB} P\,dx + Q\,dy = \int_{AnB} P\,dx + Q\,dy.$$

Полученное равенство означает, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования. ■

В ходе доказательства теоремы получено, что если выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то интеграл по замкнутому контуру равен нулю:

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0.$$

Верно и обратное утверждение.

Следствие 56.1. Если выполнено условие (56.12), то подынтегральное выражение $P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x;y)$ (см. (44.5)), т. е.

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = dU(x;y). \tag{56.13}$$

Тогда (см. (56.11)):

$$I = \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} dU(x;y) =$$

$$= U(x;y)\Big|_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} = U(x_2;y_2) - U(x_1;y_1),$$

т. е.

$$\int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = U(x_2;y_2) - U(x_1;y_1). \tag{56.14}$$

Формула (56.14) называется обобщенной формулой Ньютона-Лейбница для криволинейного интеграла от полного дифференциала.

Следствие 56.2. Если подынтегральное выражение $Pdx + Qdy$ есть полный дифференциал и путь интегрирования L замкнутый, то

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Замечания.

1. Чтобы не спутать переменную интегрирования x с верхним пределом x, переменную интегрирования обозначают другой буквой (например, t, ξ, и т. д.).

2. Функцию $U = U(x;y)$, удовлетворяющую условию (56.12), можно найти, используя формулу

$$U(x;y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\chi;y_0)\,d\chi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x;\xi)\,d\xi + C. \tag{56.15}$$

В качестве начальной точки $(x_0;y_0)$ обычно берут точку $(0;0)$ — начало координат (см. пример 56.5).

3. Аналогичные результаты справедливы для криволинейного интеграла

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

по пространственной кривой. Условие (56.12), равенство (56.13), формулы (56.14) и (56.15) имеют соответственно вид:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z};$$

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dU(x;y;z),$$

$$\int\limits_{(x_1;y_1;z_1)}^{(x_2;y_2;z_2)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = U(x_2;y_2;z_2) - U(x_1;y_1;z_1),$$

$$U(x;y;z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\chi;y_0;z_0)\,d\chi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x;\xi;z_0)\,d\xi + \int\limits_{z_0}^{z} R(x;y;\zeta)\,d\zeta + C$$

(см. пример 73.1).

Пример 56.4. Найти $I = \int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} y\,dx + x\,dy.$

◑ Решение: Здесь $P = y$, $Q = x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Согласно вышеприведенной теореме, интеграл не зависит от пути интегрирования. В качестве пути интегрирования можно взять отрезок прямой $y = x$, дугу параболы $y = x^2$ и т. д. или воспользоваться формулой (56.14). Так как $ydx + xdy = d(xy)$, то

$$I = \int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} d(x \cdot y) = xy\Big|_{(0;0)}^{(1;1)} = 1 - 0 = 1. \qquad \bullet$$

Пример 56.5. Убедиться, что выражение $e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x;y)$ и найти ее.

◑ Решение: Для того чтобы указанное выражение являлось полным дифференциалом, необходимо выполнение условий (56.12):

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^{-y}) = -e^{-y}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\big(-(2y + xe^{-y})\big) = -e^{-y}$$

— условия выполнены, следовательно, $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = dU(x;y)$. А так как полный дифференциал имеет вид

$$dU(x;y) = \frac{\partial}{\partial x}U(x;y)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}U(x;y)\,dy$$

(см. п. 44.3), то верны соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x;y) = e^{-y}; \quad \frac{\partial}{\partial y}U(x;y) = -(2y + xe^{-y}). \qquad (56.16)$$

Интегрируем по x первое из уравнений, считая y постоянным, при этом вместо постоянной интегрирования следует поставить $\varphi(y)$ — неизвестную функцию, зависящую только от y:

$$U(x;y) = \int e^{-y}\,dx = xe^{-y} + \varphi(y).$$

Подставляя полученное выражение во второе из уравнений (56.16), найдем $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(xe^{-y} + \varphi(y)\big) = -xe^{-y} + \varphi'(y) = -(2y + xe^{-y});$$

$$\varphi'(y) = -2y, \quad \varphi(y) = -y^2 + c.$$

Таким образом, $U(x;y) = xe^{-y} - y^2 + c$. ●

Отметим, что функцию U проще найти, используя формулу (56.15):

$$U(x;y) = \int\limits_0^x e^{-0}\,d\chi + \int\limits_0^y (-2\xi + xe^{-\xi})\,d\xi + C = \\ = x - y^2 + xe^{-y} - x + C = xe^{-y} - y^2 + C.$$

56.5. Некоторые приложения криволинейного интеграла II рода

Площадь плоской фигуры

Площадь S плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной замкнутой линией L, можно найти по формуле

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy - y\,dx,} \tag{56.17}$$

при этом кривая L обходится против часовой стрелки.

❑ Действительно, положив в формуле Остроградского-Грина (56.8) $P(x;y) = 0$, $Q(x;y) = x$, получим:

$$\iint\limits_D (1-0)\,dx\,dy = \oint\limits_L 0\cdot dx + x\,dy,$$

или

$$S = \oint\limits_L x\,dy. \tag{56.18}$$

Аналогично, полагая $P = -y$, $Q = 0$, найдем еще одну формулу для вычисления площади фигуры с помощью криволинейного интеграла:

$$S = -\oint\limits_L y\,dx. \tag{56.19}$$

Сложив почленно равенства (56.18) и (56.19) и разделив на два, получим:

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy - y\,dx. \qquad \blacksquare$$

Формула (56.17) используется чаще, чем формулы (56.18) и (56.19).

Работа переменной силы

Переменная сила $\bar{F}(P(x;y);Q(x;y))$ на криволинейном участке AB производит работу, которая находится по формуле

$$A = \int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy. \tag{56.20}$$

❑ Действительно, пусть материальная точка $(x;y)$ под действием переменной силы $\bar{F}$ перемещается в плоскости Oxy по некоторой кривой AB (от точки A до точки B).

Разобьем кривую AB точками $M_0 = A, M_1, M_2, \ldots, M_n = B$ на n «элементарных» дуг $\widehat{M_{i-1}M_i}$ длины Δl_i и в каждой из них возьмем произвольную точку $C_i(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)$, $i = 1;2;\ldots;n$ (см. рис. 244). Заменим каждую дугу $\widehat{M_{i-1}M_i}$ вектором $\overline{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i; \Delta y_i)$, а силу $\bar{F}$ будем считать постоянной на векторе перемещения $\overline{M_{i-1}M_i}$ и равной заданной силе в точке C_i дуги $\widehat{M_{i-1}M_i}$: $\bar{F}_i = \big(P(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i); Q(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\big)$.

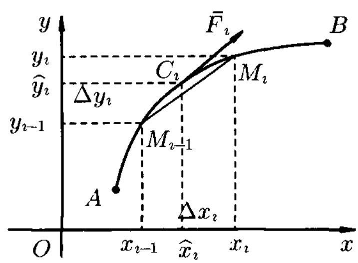


Рис. 244

Тогда скалярное произведение $\bar{F}_i \cdot \overline{M_{i-1}M_i}$ можно рассматривать как приближенное значение работы $\bar{F}_i$ вдоль дуги $\widehat{M_{i-1}M_i}$:

$$A_i \approx \bar{F}_i \cdot \overline{M_{i-1}M_i} = P(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\cdot\Delta x_i + Q(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\cdot\Delta y_i.$$

Приближенное значение работы A силы $\bar{F}$ на всей кривой составит величину

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} P(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\cdot\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\cdot\Delta y_i.$$

За точное значение работы A примем предел полученной суммы при $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta l_i \to 0$ (тогда, очевидно, $\Delta x_i \to 0$ и $\Delta y_i \to 0$):

$$A = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} P(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\cdot\Delta x_i + Q(\widehat{x}_i;\widehat{y}_i)\cdot\Delta y_i = \int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy. \qquad \blacksquare$$

Замечание. В случае пространственной кривой AB имеем:

$$A = \int\limits_{AB} P(x;y;z)\,dx + Q(x;y;z)\,dy + R(x;y;z)\,dz.$$

Пример 56.6. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a \cdot \cos^3 t$, $y = a \cdot \sin^3 t$.

○ Решение: При обхождении астроиды в положительном направлении параметр t изменяется от 0 до 2π (см. рис. 245).

Применяя формулы (56.17) и (56.4), получим:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 3a^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 2t}{4}dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{3a^2\pi}{8}. \quad ●$$

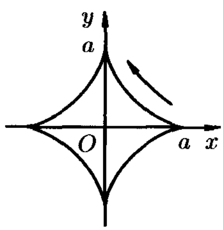


Рис. 245

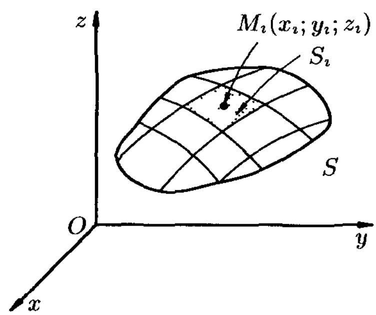


Рис. 246

Пример 56.7. Найти работу силы $\bar{F} = 4x^6\bar{i} + xy\bar{j}$ вдоль кривой $y = x^3$ от точки $O(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

○ Решение: По формуле (56.20) находим:

$$A = \int_L 4x^6\,dx + xy\,dy = \int_0^1(4x^6 + x\cdot x^3\cdot 3x^2)\,dx = \int_0^1 7x^6\,dx = 1. \quad ●$$

§ 57. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ I РОДА

57.1. Основные понятия

Обобщением двойного интеграла является так называемый поверхностный интеграл.

Пусть в точках некоторой поверхности S, с площадью S, пространства $Oxyz$ определена непрерывная функция $f(x; y; z)$. Разобьем поверхность S на n частей S_i, площади которых обозначим через ΔS_i (см. рис. 246), а диаметры — через d_i, $i = \overline{1; n}$. В каждой части S_i

возьмем произвольную точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$ и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\Delta S_i. \qquad (57.1)$$

Она называется *интегральной* для функции $f(x; y; z)$ *по поверхности* S.

Если при $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} d_i \to 0$ интегральная сумма (57.1) имеет предел, то он называется ***поверхностным интегралом I рода*** от функции $f(x; y; z)$ по поверхности S и обозначается $\iint\limits_S f(x; y; z)\,ds$.

Таким образом, по определению,

$$\boxed{\iint\limits_S f(x; y; z)\,ds = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\Delta S_i.} \qquad (57.2)$$

Отметим, что «если поверхность S гладкая (в каждой ее точке существует касательная плоскость, которая непрерывно меняется с перемещением точки по поверхности), а функция $f(x; y; z)$ непрерывна на этой поверхности, то поверхностный интеграл существует» (теорема существования).

Поверхностный интеграл I рода обладает следующими свойствами:

1. $\iint\limits_S c\cdot f(x; y; z)\,ds = c\cdot \iint\limits_S f(x; y; z)\,ds$, где c — число.

2. $\iint\limits_S (f_1(x; y; z) \pm f_2(x; y; z))\,ds = \iint\limits_S f_1(x; y; z)\,ds \pm \iint\limits_S f_2(x; y; z)\,ds$.

3. Если поверхность S разбить на части S_1 и S_2 такие, что $S = S_1 \bigcup S_2$, а пересечение S_1 и S_2 состоит лишь из границы, их разделяющей, то

$$\iint\limits_S f(x; y; z)\,ds = \iint\limits_{S_1} f(x; y; z)\,ds + \iint\limits_{S_2} f(x; y; z)\,ds.$$

4. Если на поверхности S выполнено неравенство $f_1(x; y; z) \leqslant f_2(x; y; z)$, то $\iint\limits_S f_1(x; y; z)\,ds \leqslant \iint\limits_S f_2(x; y; z)\,ds$.

5. $\iint\limits_S ds = S$, где S — площадь поверхности S.

6. $\left|\iint\limits_S f(x; y; z)\,ds\right| \leqslant \iint\limits_S |f(x; y; z)|\,ds$.

7. Если $f(x;y;z)$ непрерывна на поверхности S, то на этой поверхности существует точка $(x_c;y_c;z_c)$ такая, что

$$\iint\limits_S f(x;y;z)\,ds = f(x_c;y_c;z_c)\cdot S$$

(теорема о среднем значении).

57.2. Вычисление поверхностного интеграла I рода

Вычисление поверхностного интеграла I рода сводится к вычислению двойного интеграла по области D — проекции поверхности S на плоскость Oxy.

Разобьем поверхность S на части S_i, $i=\overline{1;n}$. Обозначим через σ_i проекцию S_i на плоскость Oxy. При этом область D окажется разбитой на n частей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Возьмем в σ_i произвольную точку $P_i(x_i;y_i)$ и восстановим перпендикуляр к плоскости Oxy до пересечения с поверхностью S. Получим точку $M_i(x_i;y_i;z_i)$ на поверхности S_i. Проведем в точке M_i касательную плоскость и рассмотрим ту ее часть T_i, которая на плоскость Oxy проектируется в область σ_i (см. рис. 247). Площади элементарных частей S_i, T_i и σ_1 обозначим как ΔS_i, ΔT_i и $\Delta\sigma_i$ соответственно. Будем приближенно считать, что

$$\Delta T_i \approx \Delta S_i. \tag{57.3}$$

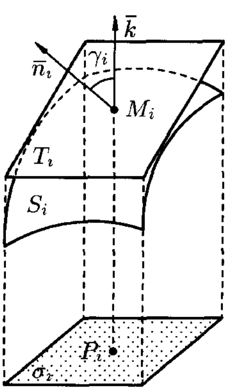


Рис. 247

Обозначив через γ_i острый угол между осью Oz и нормалью $\bar{n}_i$ к поверхности в точке M_i, получаем:

$$\Delta T_i\cdot\cos\gamma_i = \Delta\sigma_i \tag{57.4}$$

(область σ_i есть проекция T_i на плоскость Oxy).

Если поверхность S задана уравнением $z = z(x;y)$, то, как известно (см. (45.2)), уравнение касательной плоскости в точке M_i есть

$$z'_x(x_i;y_i)\cdot(x-x_i)+z'_y(x_i;y_i)\cdot(y-y_i)-(z-z_i)=0,$$

где $z'_x(x_i;y_i)$, $z'_y(x_i;y_i)$, -1 — координаты нормального вектора к плоскости. Острый угол γ_i есть угол между векторами $\bar{k}=(0;0;1)$ и

$$\bar{n}_i = (-z'_x(x_i;y_i); -z'_y(x_i;y_i); 1).$$

Следовательно,

$$\cos\gamma_i = \frac{\bar{k}\bar{n}_i}{|\bar{k}|\cdot|\bar{n}_i|} = \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x(x_i;y_i)+z'^2_y(x_i;y_i)}}.$$

Равенство (57.4) принимает вид

$$\Delta T_i = \sqrt{1 + z'^2_x(x_i; y_i) + z'^2_y(x_i; y_i)}\Delta\sigma_i.$$

В правой части формулы (57.2) заменим ΔS_i (учитывая (57.3)) на полученное выражение для ΔT_i, а z_i заменим на $z(x_i; y_i)$. Поэтому, переходя к пределу при стремлении к нулю наибольшего диаметра S_i (а следовательно, и σ_i), получаем формулу

$$\iint\limits_S f(x; y; z)\,ds = \iint\limits_D f(x; y; z(x; y)) \cdot \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dx\,dy, \qquad (57.5)$$

выражающую интеграл по поверхности S через двойной интеграл по проекции S на плоскость Oxy.

Отметим, что если поверхность S задана уравнением вида $y = y(x; z)$ или $x = x(y; z)$, то аналогично получим:

$$\iint\limits_S f(x; y; z)\,ds = \iint\limits_{D_1} f(x; y(x; z); z) \cdot \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z}\,dx\,dz$$

и

$$\iint\limits_S f(x; y; z)\,ds = \iint\limits_{D_2} f(x(y; z); y; z) \cdot \sqrt{1 + x'^2_y + x'^2_z}\,dy\,dz, \qquad (57.6)$$

где D_1 и D_2 — проекции поверхности S на координатные плоскости Oxz и Oyz соответственно.

Пример 57.1. Вычислить $I = \iint\limits_S (x - 3y + 2z)\,ds$, где S — часть плоскости $4x + 3y + 2z - 4 = 0$, расположенной в I октанте (см. рис. 248).

○ Решение: Запишем уравнение плоскости в виде $z = 2 - 2x - \frac{3}{2}y$. Находим $z_x{}' = -2$, $z_y{}' = -\frac{3}{2}$. По формуле (57.5) имеем:

$$I = \iint\limits_D (x - 3y + 4 - 4x - 3y) \cdot \sqrt{1 + 4 + \frac{9}{4}}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{\sqrt{29}}{2} \iint\limits_D (4 - 3x - 6y)\,dx\,dy = \frac{\sqrt{29}}{2} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\frac{4}{3}(1-x)} (4 - 3x - 6y)\,dy =$$

$$= \frac{\sqrt{29}}{2} \int\limits_0^1 dx (4y - 3xy - 3y^2)\Big|_0^{\frac{4}{3}(1-x)} =$$

$$= \frac{\sqrt{29}}{2}\int\limits_0^1 \Big(\frac{16}{3}(1-x) - 4x(1-x) - \frac{16}{3}(1-x)^2\Big)dx =$$

$$= \frac{\sqrt{29}}{2}\Big(-\frac{16}{3}\cdot\frac{(1-x)^2}{2} - 2x^2 + 4\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{16}{3}\cdot\frac{(1-x)^3}{3}\Big)\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{29}}{9}. \quad \bullet$$

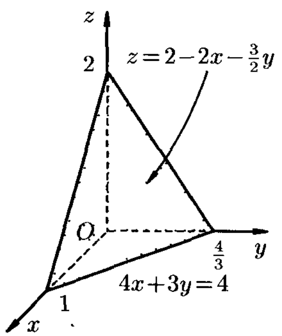


Рис 248

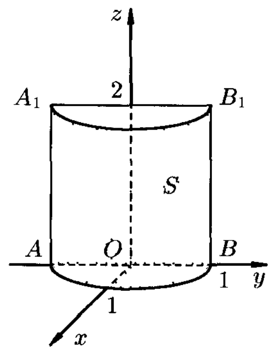


Рис 249

Пример 57.2. Вычислить

$$I = \iint\limits_S x(y+z)\,ds,$$

где S — часть цилиндрической поверхности $x = \sqrt{1-y^2}$, отсеченной плоскостями $z = 0$, $z = 2$ (см. рис. 249).

○ Решение: Воспользуемся формулой (57.6). Поскольку $x_y{}' = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$, $x_z{}' = 0$, то

$$I = \iint\limits_{D_1} \sqrt{1-y^2}\cdot(y+z)\cdot\sqrt{1+\frac{y^2}{1-y^2}}\,dy\,dz = \iint\limits_{D_1}(y+z)\,dy\,dz =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dy\int\limits_0^2 (y+z)\,dz = \int\limits_{-1}^{1}\Big(yz + \frac{z^2}{2}\Big)\Big|_0^2 dy = \int\limits_{-1}^{1}(2y+2)\,dy = 4,$$

где D_1 — прямоугольник AA_1B_1B. ●

57.3. Некоторые приложения поверхностного интеграла I рода

Приведем некоторые примеры применения поверхностного интеграла I рода.

Площадь поверхности

Если поверхность S задана уравнением $z = z(x;y)$, а ее проекция на плоскость Oxy есть область D, в которой $z(x;y)$, $z_x'(x;y)$ и $z_y'(x;y)$ — непрерывные функции, то ее площадь S вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_S ds,$$

или $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + {z_x'}^2 + {z_y'}^2}\,dx\,dy.$

Кроме того, поверхностный интеграл применяют для вычисления массы, координат центра масс, моментов инерции материальных поверхностей с известной поверхностной плотностью распределения массы $\gamma = \gamma(x;y;z)$. Все эти величины определяются одним и тем же способом: данную область разбивают на конечное число «мелких» частей, делая для каждой области деления упрощающие задачу предположения; находят приближенное значение искомой величины; переходят к пределу при неограниченном измельчении области деления. Проиллюстрируем описанный способ на примере определения массы материальной поверхности.

Масса поверхности

Пусть плотность распределения массы материальной поверхности есть $\gamma = \gamma(x;y;z)$. Для нахождения массы поверхности:

1. Разбиваем поверхность S на n частей S_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, площадь которой обозначим ΔS_i.

2. Берем произвольную точку $M_i(x_i;y_i;z_i)$ в каждой области S_i. Предполагаем, что в пределах области S_i плотность постоянна и равна значению ее в точке M_i.

3. Масса m_i области S_i мало отличается от массы $\gamma(x_i;y_i;z_i)\Delta S_i$ фиктивной однородной области с постоянной плотностью

$$\gamma = \gamma(x_i;y_i;z_i).$$

4. Суммируя m_i по всей области, получаем: $m \approx \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma(x_i;y_i;z_i)\Delta S_i$.

5. За точное значение массы материальной поверхности S принимается предел, к которому стремится полученное приближенное значение

при стремлении к нулю диаметров областей S_i, т. е.

$$m = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i; y_i; z_i)\Delta S_i,$$

т. е.

$$m = \iint_S \gamma(x; y; z)\, ds. \qquad (57.7)$$

Моменты, центр тяжести поверхности

Статистические моменты, координаты центра тяжести, моменты инерции материальной поверхности S находятся по соответствующим формулам:

$$S_{xy} = \iint_S z \cdot \gamma(x; y; z)\, ds, \quad M_x = \iint_S (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x; y; z)\, ds,$$

$$S_{yz} = \iint_S x \cdot \gamma(x; y; z)\, ds, \quad M_y = \iint_S (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x; y; z)\, ds,$$

$$S_{xz} = \iint_S y \cdot \gamma(x; y; z)\, ds, \quad M_z = \iint_S (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x; y; z)\, ds,$$

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m},\ y_c = \frac{S_{xz}}{m},\ z_c = \frac{S_{xy}}{m}, \quad M_O = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(x; y; z)\, ds.$$

Пример 57.3. Найти массу полусферы радиуса R, если в каждой точке поверхности плотность численно равна расстоянию этой точки от радиуса, перпендикулярного основанию полусферы.

❍ Решение: На рисунке 250 изображена полусфера радиуса R. Ее уравнение $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$; $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$ – поверхностная плотность полусферы.

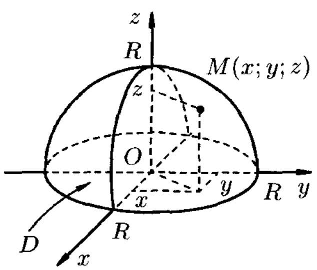


Рис. 250

По формуле (57.7) находим:

$$m = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\, ds = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \times$$

$$\times \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy =$$

$$= R \iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}\, dx\, dy.$$

Переходим к полярным координатам:

$$m = R \iint_D \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot r\, dr\, d\varphi = R \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^R \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = \frac{\pi^2 R^3}{2}.$$

Внутренний интеграл вычислен с помощью подстановки $r = R\sin t$:

$$\int_0^R \frac{r^2}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2\sin^2 t}{R\cos t}\cdot R\cos t\,dt = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= R^2\left(\frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = R^2\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{\pi R^2}{4}. \qquad \bullet$$

§ 58. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ II РОДА

58.1. Основные понятия

Поверхностный интеграл II рода строится по образцу криволинейного интеграла II рода, где направленную кривую разлагали на элементы и проектировали их на координатные оси; знак брали в зависимости от того, совпадало ли ее направление с направлением оси или нет.

Пусть задана ***двусторонняя поверхность*** (таковой является плоскость, эллипсоид, любая поверхность, задаваемая уравнением $z = f(x;y)$, где $f(x;y)$, $f_x{}'$ и $f_y{}'$ — функции, непрерывные в некоторой области D плоскости Oxy и т. д.). После обхода такой поверхности, не пересекая ее границы, направление нормали к ней не меняется. Примером *односторонней* поверхности является так называемый *лист Мебиуса*, получающийся при склеивании сторон AB и CD прямоугольника $ABCD$ так, что точка A совмещается с точкой C, а B — с D (см. рис. 251).

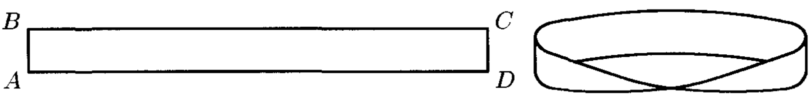


Рис. 251

Далее, пусть в точках рассматриваемой двусторонней поверхности S в пространстве $Oxyz$ определена непрерывная функция $f(x;y;z)$. Выбранную сторону поверхности (в таком случае говорят, что поверхность *ориентирована*) разбиваем на части S_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$, и проектируем их на координатные плоскости. При этом площадь проекции $\Delta\sigma_i$ берем со знаком «плюс», если выбрана верхняя сторона поверхности, или, что то же самое, если нормаль $\bar{n}$ к выбранной стороне поверхности составляет с осью Oz острый угол (см. рис. 252, *а*), т. е. $\cos\gamma_i > 0$; со знаком «минус», если выбрана нижняя сторона поверхности (или $\cos\gamma_i < 0$) (см. рис. 252, *б*). В этом случае интегральная сумма имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta\sigma_i, \tag{58.1}$$

где $\Delta\sigma_i = (S_i)_{Oxy}$ — площадь проекции S_i на плоскость Oxy. Ее отличие от интегральной суммы (57.1) очевидно.

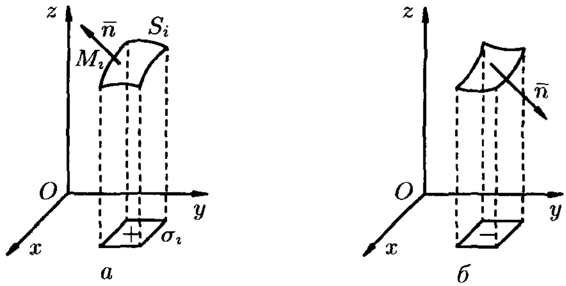


Рис. 252

Предел интегральной суммы (58.1) при $\lambda = \max d_i \to 0$, если он существует и не зависит от способа разбиения поверхности S на части S_i и от выбора точек $M_i \in S_i$, называется *поверхностным интегралом II рода* (по координатам) от функции $f(x;y;z)$ по переменным x и y по выбранной стороне поверхности и обозначается

$$\iint\limits_S f(x;y;z)\,dx\,dy.$$

Итак,

$$\boxed{\iint\limits_S f(x;y;z)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta\sigma_i.}$$

Аналогично определяются поверхностные интегралы II рода по переменным y и z и z и x:

$$\iint\limits_S f(x;y;z)\,dy\,dz = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\cdot(S_i)_{Oyz},$$

$$\iint\limits_S f(x;y;z)\,dx\,dz = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\cdot(S_i)_{Oxz}.$$

Общим видом поверхностного интеграла II рода служит интеграл

$$\iint\limits_S P(x;y;z)\,dy\,dz + Q(x;y;z)\,dz\,dx + R(x;y;z)\,dx\,dy$$

$$\left(= \iint\limits_S P\,dy\,dz + \iint\limits_S Q\,dz\,dx + \iint\limits_S R\,dx\,dy\right),$$

где P, Q, R — непрерывные функции, определенные в точках двусторонней поверхности S.

Отметим, что если S — замкнутая поверхность, то поверхностный интеграл по внешней стороне ее обозначается $\oiint\limits_{S}$, по внутренней $\oiint\limits_{-S}$.

Из определения поверхностного интеграла II рода вытекают следующие его свойства:

1. Поверхностный интеграл II рода изменяет знак при перемене стороны поверхности.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак поверхностного интеграла.

3. Поверхностный интеграл от суммы функций равен сумме соответствующих интегралов от слагаемых.

4. Поверхностный интеграл II рода по всей поверхности $S = S_1 + S_2$ равен сумме интегралов по ее частям S_1 и S_2 (аддитивное свойство), если S_1 и S_2 пересекаются лишь по границе, их разделяющей.

5. Если S_1, S_2, S_3 — цилиндрические поверхности с образующими, параллельными соответственно осям Oz, Ox, Oy, то

$$\iint\limits_{S_1} R(x;y;z)\,dx\,dy = \iint\limits_{S_2} P(x;y;z)\,dy\,dz = \iint\limits_{S_3} Q(x;y;z)\,dx\,dz = 0.$$

58.2. Вычисление поверхностного интеграла II рода

Вычисление поверхностного интеграла II рода сводится к вычислению двойного интеграла.

Пусть функция $R(x;y;z)$ непрерывна во всех точках поверхности S, заданной уравнением $z = z(x;y)$, где $z(x;y)$ — непрерывная функция в замкнутой области D (или D_{xy}) — проекции поверхности S на плоскость Oxy.

Выберем ту сторону поверхности S, где нормаль к ней образует с осью Oz острый угол. Тогда $\Delta\sigma_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Так как $z_i = z(x_i; y_i)$, то интегральная сумма (58.1) может быть записана в виде

$$\sum_{i=1}^{n} R(x_i;y_i;z_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} R\big(x_i;y_i;z(x_i;y_i)\big)\Delta\sigma_i. \qquad (58.2)$$

Правая часть этого равенства есть интегральная сумма для функции $R(x;y;z(x;y))$, непрерывной в области D. Переходя к пределу в равенстве (58.2) при $\lambda \to 0$, получаем формулу

$$\iint\limits_{S} R(x;y;z)\,dx\,dy = \iint\limits_{D} R\big(x;y;z(x;y)\big)\,dx\,dy, \qquad (58.3)$$

выражающую поверхностный интеграл II рода по переменным x и y через двойной интеграл. Если выбрать вторую сторону, т. е. нижнюю, поверхности S, то полученный двойной интеграл берут со знаком «минус». Поэтому

$$\iint\limits_S R(x;y;z)\,dx\,dy = \pm \iint\limits_D R\bigl(x;y;z(x;y)\bigr)\,dx\,dy. \tag{58.4}$$

Аналогично

$$\iint\limits_S Q(x;y;z)\,dx\,dz = \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q\bigl(x;y(x;z);z\bigr)\,dx\,dz, \tag{58.5}$$

$$\iint\limits_S P(x;y;z)\,dy\,dz = \pm \iint\limits_{D_{yz}} P\bigl(x(y;z);y;z\bigr)\,dy\,dz, \tag{58.6}$$

где D_{xz} и D_{yz} — проекции поверхности S на плоскости Oxz и Oyz соответственно (замкнутые области).

В формуле (58.5) поверхность S задана уравнением $y = y(x;z)$, а в формуле (58.6) — уравнением $x = x(y;z)$. Знаки перед интегралами выбираются в зависимости от ориентации поверхности S (так, в формуле (58.5) берем знак «плюс», если нормаль к поверхности образует с осью Oy острый угол, а знак «минус» — если тупой угол).

Для вычисления общего поверхностного интеграла II рода используют формулы (58.4)–(58.6), проектируя поверхность S на все три координатные плоскости:

$$\iint\limits_S P(x;y;z)\,dy\,dz + Q(x;y;z)\,dx\,dz + R(x;y;z)\,dx\,dy =$$

$$= \pm \iint\limits_{D_{yz}} P\bigl(x(y;z);y;z\bigr)\,dy\,dz \pm$$

$$\pm \iint\limits_{D_{xz}} Q\bigl(x;y(x;z);z\bigr)\,dx\,dz \pm \iint\limits_{D_{xy}} R\bigl(x;y;z(x;y)\bigr)\,dx\,dy.$$

Замечание. Можно показать справедливость равенств

$$dx\,dy = \cos\gamma \cdot ds, \quad dx\,dz = \cos\beta \cdot ds, \quad dy\,dz = \cos\alpha \cdot ds, \tag{58.7}$$

где ds — элемент площади поверхности S; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали $\bar{n}$ к выбранной стороне поверхности S.

Поверхностные интегралы I и II рода связаны соотношением

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds. \tag{58.8}$$

Пример 58.1. Вычислить

$$I_1 = \iint\limits_S -x\,dy\,dz + z\,dz\,dx + 5\,dx\,dy$$

по верхней стороне части плоскости $2x - 3y + z = 6$, лежащей в IV октанте.

◐ Решение: На рисунке 253 изображена заданная часть плоскости. Нормаль $\bar{n}$, соответствующая указанной стороне поверхности, образует с осью Oy тупой угол, а с осями Ox и Oz — острые. В этом можно убедиться, найдя направляющие косинусы нормального вектора $\bar{n} = (2; -3; 1)$ плоскости:

$$|\bar{n}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}, \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}} > 0,$$

$$\cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{14}} < 0, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}} > 0.$$

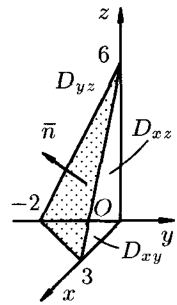


Рис. 253

Поэтому перед двойными интегралами в формулах (58.4) и (58.6) следует брать знак «плюс», а в формуле (58.5) — знак «минус». Следовательно,

$$I_1 = +\iint\limits_{D_{yz}} \left(-3 - \frac{3}{2}y + \frac{z}{2}\right) dy\,dz - \iint\limits_{D_{xz}} z\,dz\,dx + 5\iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{0}^{3y+6} \left(-3 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z\right) dz - \int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{6-2x} z\,dz + 5\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 = -9. \qquad \bullet$$

58.3. Формула Остроградского–Гаусса

Связь между поверхностным интегралом II рода по замкнутой поверхности и тройным интегралом по объему, ограниченному этой поверхностью устанавливает следующая теорема.

Теорема 58.1. Если функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в пространственной области V, то имеет место формула

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \oiint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy, \qquad (58.9)$$

где S — граница области V и интегрирование по S производится по ее *внешней стороне*.

Формула (58.9) называется *формулой Остроградского–Гаусса* (является аналогом формулы Остроградского–Грина (см. п. 56.3).

❑ Пусть область V ограничена снизу поверхностью S_1, уравнение которой $z = z_1(x;y)$; сверху — поверхностью S_2, уравнение которой

$z = z_2(x;y)$ (функции $z_1(x;y)$ и $z_2(x;y)$ непрерывны в замкнутой области D — проекции V на плоскость Oxy, $z_1(x;y) \leqslant z_2(x;y)$); сбоку — цилиндрической поверхностью S_3, образующие которой параллельны оси Oz (см. рис. 254).

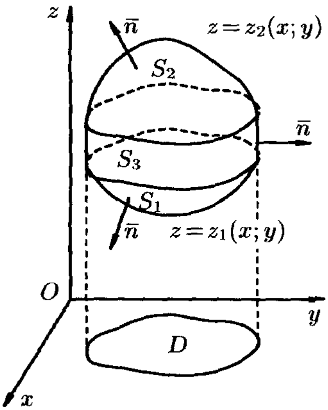


Рис. 254

Рассмотрим тройной интеграл

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dx\,dy\,dz = \\ = \iint\limits_D dx\,dy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ = \iint\limits_D R(x;y;z_2(x;y))\,dx\,dy - \\ - \iint\limits_D R(x;y;z_1(x;y))\,dx\,dy.$$

Двойные интегралы в правой части равенства заменим поверхностными интегралами II рода по внешней стороне поверхностей S_1 и S_2 соответственно (см. (58.3)). Получаем:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S_2} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_1} R\,dx\,dy.$$

Добавляя равный нулю интеграл $\iint\limits_{S_3} R\,dx\,dy$ по внешней стороне S_3 (см. свойство 5 п. 58.1), получим:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S_2} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_1} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_3} R\,dx\,dy,$$

или

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dx\,dy\,dz = \oiint\limits_S R(x;y;z)\,dx\,dy, \tag{58.10}$$

где S — поверхность, ограничивающая область V.

Аналогично доказываются формулы

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx\,dy\,dz = \oiint\limits_S Q(x;y;z)\,dx\,dz, \tag{58.11}$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x} dx\,dy\,dz = \oiint\limits_S P(x;y;z)\,dy\,dz. \tag{58.12}$$

Складывая почленно равенства (58.10), (58.11) и (58.12), получаем формулу (58.9) Остроградского–Гаусса. ■

Замечания.

1. Формула (58.9) остается справедливой для любой области V, которую можно разбить на конечное число областей рассмотренного вида.

2. Формулу Остроградского–Гаусса можно использовать для вычисления поверхностных интегралов II рода по замкнутым поверхностям.

Пример 58.2. Вычислить $I = \oiint\limits_{+S} -x\,dy\,dz + z\,dz\,dx + 5\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $2x - 3y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

○ Решение: По формуле (58.9) находим:

$$I = \iiint\limits_V (-1 + 0 + 0)\,dx\,dy\,dz = -\iiint\limits_V dv = -\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 6 = -6. \quad \bullet$$

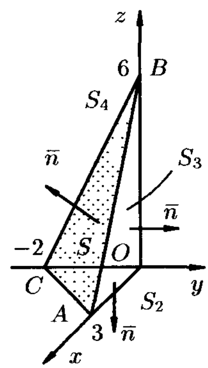


Рис. 255

Заметим, что интеграл I_1 (см. пример 58.1) можно вычислить иначе:

$$I_1 = I - \iint\limits_{S_2} - \iint\limits_{S_3} - \iint\limits_{S_4},$$

где поверхности S_2, S_3, S_4 есть соответственно треугольники OAC, AOB, COB (см. рис. 255).

Имеем:

$$I_1 = -6 + \iint\limits_{(OAC)} 5\,dx\,dy - \iint\limits_{(AOB)} z\,dz\,dx +$$

$$+ \iint\limits_{(COB)} (-0)\,dy\,dz = -6 + 5\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 - \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{6-2x} z\,dz =$$

$$= +9 - \frac{1}{2}\int\limits_0^3 (6-2x)^2\,dx = 9 - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{(6-2x)^3}{3}\Bigg|_0^3 = -9.$$

58.4. Формула Стокса

Связь между поверхностными и криволинейными интегралами II рода устанавливает следующая теорема.

Теорема 58.2. Если функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$ и $R(x;y;z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в точках ориентированной поверхности S, то имеет место формула

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dx\,dz =$$

$$= \oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \qquad (58.13)$$

где L — граница поверхности S и интегрирование вдоль кривой L производится в положительном направлении (т. е. при обходе границы L поверхность S должна оставаться все время слева).

Формула (58.13) называется *формулой Стокса* (Д. Г. Стокс — английский математик, физик).

❑ Пусть $z = f(x;y)$ — уравнение поверхности S, функции $f(x;y)$, $f_x'(x;y)$, $f_y'(x;y)$ непрерывны в замкнутой области D (проекции поверхности S на плоскость Oxy), L_1 — граница области D (см. рис. 256). Будем считать, что поверхность S пересекается с любой прямой, параллельной оси Oz, не более чем в одной точке. Выберем верхнюю сторону поверхности S. Рассмотрим сначала интеграл вида $\oint\limits_L P(x;y;z)\,dx$.

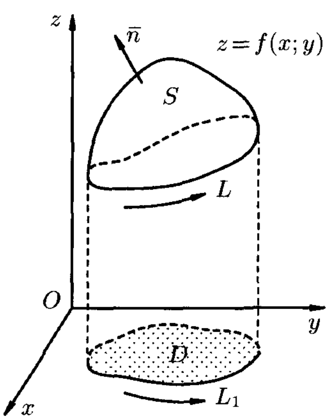


Рис. 256

Значения функции $P(x;y;z)$ на L равны значениям функции $P(x;y;z(x;y))$ на L_1. Интегральные суммы для криволинейных интегралов II рода по контурам L и L_1 совпадают. Поэтому

$$\oint\limits_L P(x;y;z)\,dx = \oint\limits_{L_1} P(x;y;z(x;y))\,dx.$$

Применим к этому интегралу формулу Остроградского–Грина (см. п. 56.3). Тогда получим:

$$\int\limits_{L_1} P(x;y;z(x;y))dx = \iint\limits_D \left(0 - \frac{\partial}{\partial y}\big(P(x;y;z(x;y))\big)\right)dx\,dy =$$

$$= -\iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Преобразуем полученный двойной интеграл в равный ему поверхностный интеграл II рода (см. п. 58.2). Для этого последнее равенство перепишем в виде

$$\int\limits_{L_1} P(x;y;z(x;y))\,dx = -\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cos\gamma ds$$

(см. 58.7) и используем уравнение нормали к поверхности S (см. (45.3)). Так как выбрана верхняя сторона поверхности S, т. е. $\cos\gamma > 0$ (γ — острый угол между нормалью $\overline{n}$ к поверхности S и осью Oz), то нормаль $\overline{n}$ имеет проекции $-\frac{\partial z}{\partial x}$, $-\frac{\partial z}{\partial y}$, 1. Направляющие косинусы пропорциональны соответствующим проекциям:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = -\frac{\partial z}{\partial x} : -\frac{\partial z}{\partial y} : 1.$$

Отсюда $-\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$. Тогда

$$-\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cos\gamma\,ds = -\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\cos\gamma\,ds =$$

$$= -\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\,ds - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\,ds = \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z}dx\,dz - \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_L P(x;y;z)\,dx = \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z}dx\,dz - \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy.$$

Аналогично получаются при соответствующих условиях еще два равенства:

$$\oint\limits_L Q(x;y;z)\,dy = \iint\limits_S \frac{\partial Q}{\partial x}dx\,dy - \frac{\partial Q}{\partial z}dy\,dz,$$

$$\oint\limits_L R(x;y;z)\,dz = \iint\limits_S \frac{\partial R}{\partial y}dy\,dz - \frac{\partial R}{\partial x}dx\,dz.$$

Складывая почленно три последних равенства, получаем формулу Стокса (58.13). ■

Отметим, что формулу Стокса (58.13) можно применить и для поверхностей более сложного вида (разбив ее на части рассмотренного выше типа).

Формулу Стокса можно применять для вычисления криволинейного интеграла по замкнутому контуру с помощью поверхностного интеграла.

Из формулы Стокса вытекает, что если выполняются условия

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$$

(см. п. 56.4), то криволинейный интеграл по произвольному пространственному замкнутому контуру L равен нулю: $\oint\limits_L P\,dx+Q\,dy+P\,dz=0.$

Следовательно, в данном случае криволинейный интеграл не зависит от вида пути интегрирования.

Пример 58.3. Вычислить $I=\oint\limits_L x^2y^3\,dx+dy+z\,dz$, где контур L — окружность $x^2+y^2=R^2$; $z=0$: а) непосредственно, б) используя формулу Стокса, взяв в качестве поверхности полусферу $z=+\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

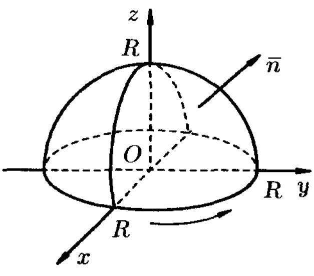


Рис. 257

○ Решение: Поверхность интегрирования изображена на рисунке 257.

а) Запишем уравнение окружности в параметрической форме:

$x=R\cos t,\quad y=R\sin t,\quad z\equiv 0,\quad t\in[0;2\pi].$

По формуле (56.7) имеем:

$$I=\int_0^{2\pi}R^2\cos^2t\cdot R^3\sin^3t(-R\sin t)\cdot dt+$$

$$+\int_0^{2\pi}R\cos t\,dt=-R^6\int_0^{2\pi}\sin^4t\cos^2t\,dt+0=$$

$$=-R^6\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-\cos 2t)dt=-\frac{R^6}{8}\cdot\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt+$$

$$+\frac{R^6}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\cos 2t\,dt=-\frac{R^6}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt+0=-\frac{R^6}{16}2\pi=-\frac{\pi R^6}{8}.$$

б) По формуле Стокса (58.13) находим:

$$I=\iint\limits_S(0-0)\,dy\,dz+(0-0)\,dx\,dz+(0-3x^2y^2)\,dx\,dy=$$

$$=-3\iint\limits_S x^2y^2\,dx\,dy=-3\iint\limits_D x^2y^2\,dx\,dy.$$

Переходя к полярным координатам, получаем:

$$I=-3\iint\limits_D r^5\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\,dr\,d\varphi=-3\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^R r^5\,dr=$$

$$= -\frac{3}{6}R^6 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4} \cdot \sin^2 2\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{8}R^6 \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi)\, d\varphi =$$

$$= -\frac{R^6}{16} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} + 0 = -\frac{\pi R^6}{8}. \qquad \bullet$$

58.5. Некоторые приложения поверхностного интеграла II рода

С помощью поверхностного интеграла II рода можно найти объем тела, ограниченного сверху поверхностью S_2 ($z = z_2(x;y)$), снизу — поверхностью S_1 ($z = z_1(x;y)$), сбоку — цилиндрической поверхностью S_3, образующие которой параллельны оси Oz:

$$V = \frac{1}{3} \oiint\limits_S x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy, \tag{58.14}$$

где $S = S_1 + S_2 + S_3$.

Действительно, положив в формуле Остроградского–Гаусса (58.9) $P(x;y;z) = x$, $Q(x;y;z) = 0$, $R(x,y;z) = 0$, находим:

$$\oiint\limits_S x\, dy\, dz = \iiint\limits_V dx\, dy\, dz, \quad \text{т. е.} \quad V = \oiint\limits_S x\, dy\, dz. \tag{58.15}$$

Аналогично, полагая $P = 0$, $Q = y$, $R = 0$, находим еще одну формулу для нахождения объема тела с помощью поверхностного интеграла II рода:

$$V = \oiint\limits_S y\, dx\, dz. \tag{58.16}$$

Наконец, положив $P = 0$, $Q = 0$, $R = z$, по формуле (58.9) находим третью формулу

$$V = \oiint\limits_S z\, dx\, dy, \tag{58.17}$$

выражающую объем тела через поверхностный интеграл II рода.

Сложив почленно равенства (58.15)–(58.17) и разделив на три, получим формулу (58.14).

Другие применения поверхностного интеграла II рода рассмотрим в главе XVI «Элементы теории поля»

Глава XIII. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Лекции 51–52

§ 59. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

59.1. Основные понятия

Бесконечные ряды широко используются в теоретических исследованиях математического анализа, имеют разнообразные практические применения.

Числовым рядом (или просто *рядом*) называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{59.1}$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — действительные или комплексные числа, называемые ***членами ряда***, u_n ***общим членом*** ряда.

Ряд (59.1) считается заданным, если известен общий член ряда u_n, выраженный как функция его номера n: $u_n = f(n)$.

Сумма первых n членов ряда (59.1) называется n-й ***частичной суммой*** ряда и обозначается через S_n, т. е. $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Рассмотрим частичные суммы

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots$$

Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ последовательности частичных сумм ряда (59.1), то этот предел называют ***суммой ряда*** (59.1) и говорят, что ряд ***сходится***. Записывают: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд (59.1) называют ***расходящимся***. Такой ряд суммы не имеет.

Рассмотрим примеры.

1. Ряд $2 + 17 - 3\frac{1}{4} + 196 + \ldots$ нельзя считать заданным, а ряд $2+5+8+\ldots$ — можно: его общий член задается формулой $u_n = 3n-1$.

2. Ряд $0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$ сходится, его сумма равна 0.

3. Ряд $1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$ расходится, $S_n = n \to \infty$ при $n \to \infty$.

4. Ряд $1-1+1-1+1-1+\ldots$ расходится, так как последовательность частичных сумм $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ ($S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, \ldots$) не имеет предела.

5. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится. Действительно,

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},$$
$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно,
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$
т. е. ряд сходится, его сумма равна 1.

Рассмотрим некоторые важные свойства рядов.

Свойство 1. Если ряд (59.1) сходится и его сумма равна S, то ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n + \ldots, \tag{59.2}$$
где c — произвольное число, также сходится и его сумма равна cS. Если же ряд (59.1) расходится и $c \neq 0$, то и ряд (59.2) расходится.

❑ Обозначим n-ю частичную сумму ряда (59.2)через $S_n^{(u)}$. Тогда
$$S_n^{(u)} = cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = c \cdot S_n.$$
Следовательно,
$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} S_n = c \cdot S,$$
т. е. ряд (59.2) сходится и имеет сумму cS.

Покажем теперь, что если ряд (59.1) расходится, $c \neq 0$, то и ряд (59.2) расходится. Допустим противное: ряд (59.2) сходится и имеет сумму S_1. Тогда
$$S_1 = \lim_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \lim_{n\to\infty} S_n.$$
Отсюда получаем:
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{c},$$
т. е. ряд (59.1) сходится, что противоречит условию о расходимости ряда (59.1). ■

Свойство 2. Если сходится ряд (59.1) и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n, \tag{59.3}$$

а их суммы равны S_1 и S_2 соответственно, то сходятся и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n), \tag{59.4}$$

причем сумма каждого равна соответственно $S_1 \pm S_2$.

❑ Обозначим n-е частичные суммы рядов (59.1), (59.3) и (59.4) через $S_n^{(u)}$, $S_n^{(v)}$ и S_n соответственно. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (S_n^{(u)} \pm S_n^{(v)}) = \lim_{n\to\infty} S_n^{(u)} \pm \lim_{n\to\infty} S_n^{(v)} = S_1 \pm S_2,$$

т. е. каждый из рядов (59.4) сходится, и сумма его равна $S_1 \pm S_2$ соответственно ■

Из свойства 2 вытекает, что сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд.

В справедливости этого утверждения можно убедиться методом от противного.

Заметим, что сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

Свойство 3. Если к ряду (59.1) прибавить (или отбросить) конечное число членов, то полученный ряд и ряд (59.1) сходятся или расходятся одновременно.

❑ Обозначим через S сумму отброшенных членов, через k — наибольший из номеров этих членов. Чтобы не менять нумерацию оставшихся членов ряда (59.1), будем считать, что на месте отброшенных членов поставили нули. Тогда при $n > k$ будет выполняться равенство $S_n - S'_n = S$, где S'_n — это n-я частичная сумма ряда, полученного из ряда (59.1) путем отбрасывания конечного числа членов. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S + \lim\limits_{n\to\infty} S'_n$. Отсюда следует, что пределы в левой и правой частях одновременно существуют или не существуют, т. е. ряд (59.1) сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходятся (расходятся) ряды без конечного числа его членов.

Аналогично рассуждаем в случае приписывания к ряду конечного числа членов. ■

Ряд

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \tag{59.5}$$

называется n-м *остатком ряда* (59.1). Он получается из ряда (59.1) отбрасыванием n первых его членов. Ряд (59.1) получается из остатка добавлением конечного числа членов. Поэтому, согласно свойству 3, ряд (59.1) и его остаток (59.5) одновременно сходятся или расходятся.

Из свойства 3 также следует, что если ряд (59.1) сходится, то его остаток $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

59.2. Ряд геометрической прогрессии

Исследуем сходимость ряда

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \quad (a \neq 0), \tag{59.6}$$

который называется *рядом геометрической прогрессии*. Ряд (59.6) часто используется при исследовании рядов на сходимость.

Как известно, сумма первых n членов прогрессии находится по формуле $S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$. Найдем предел этой суммы:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q}$$

Рассмотрим следующие случаи в зависимости от величины q:

1. Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$, ряд (59.6) сходится, его сумма равна $\dfrac{a}{1-q}$;

2. Если $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, ряд (59.6) расходится;

3. Если $|q| = 1$, то при $q = 1$ ряд (59.6) принимает вид $a+a+a+\cdots+a+\cdots$, для него $S_n = n \cdot a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т. е. ряд (59.6) расходится; при $q = -1$ ряд (59 6) принимает вид $a - a + a - a + \ldots$ — в этом случае $S_n = 0$ при четном n и $S_n = a$ при нечетном n. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, ряд (59.6) расходится.

Итак, ряд геометрической прогрессии сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$.

Пример 59.1. Показать, что ряд $2^3 + 2^2 + 2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-3}} + \ldots$ сходится.

Решение: Данный ряд можно переписать так:

$$2^3 \cdot 1 + 2^3 \cdot \frac{1}{2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^2} + \ldots + 2^3 \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Как видно, он представляет собой ряд геометрической прогрессии с $a = 2^3$ и $q = \frac{1}{2} < 1$. Этот ряд сходится согласно свойству 1 числовых рядов. ●

59.3. Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд

Нахождение n-й частичной суммы S_n и ее предела для произвольного ряда во многих случаях является непростой задачей. Поэтому для выяснения сходимости ряда устанавливают специальные *признаки сходимости*. Первым из них, как правило, является необходимый признак сходимости.

Теорема 59.1. Если ряд (59 1) сходится, то его общий член u_n стремится к нулю, т е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

❑ Пусть ряд (59.1) сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ (при $n \to \infty$ и $(n-1) \to \infty$). Учитывая, что $u_n = S_n - S_{n-1}$ при $n > 1$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \quad \blacksquare$$

Следствие 59.1 (достаточное условие расходимости ряда). Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится

❑ Действительно, если бы ряд сходился, то (по теореме) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Но это противоречит условию. Значит, ряд расходится. ■

Пример 59.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-2}{n+5}$.

○ Решение: Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-2}{n+5}$ расходится, т. к.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{n+5} = 3 \neq 0,$$

т. е. выполняется достаточное условие расходимости ряда. ●

Пример 59.3. Исследовать сходимость ряда

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 + \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \ldots$$

○ Решение: Данный ряд расходится, т. к. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$. ●

Теорема 59.1 дает необходимое условие сходимости ряда, но не достаточное: из условия $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ не следует, что ряд сходится. Это означает, что существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

В качестве примера рассмотрим так называемый *гармонический ряд*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots} \tag{59.7}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Однако ряд (59.7) расходится. Покажем это.

❑ Как известно (см. (17.14)), $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Отсюда следует, что при любом $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$. Логарифмируя это неравенство по основанию e, получим:

$$n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1,$$

т. е.

$$\frac{1}{n} > \ln\frac{n+1}{n}, \quad \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n.$$

Подставляя в полученное неравенство поочередно $n = 1, 2, \ldots, n-1, n$, получим:

$$\begin{aligned}
&1 > \ln 2,\\
&\frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2,\\
&\frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n.
\end{aligned}$$

Сложив почленно эти неравенства, получим $S_n > \ln(n+1)$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т. е. гармонический ряд (59.7) расходится. ■

В качестве второго примера можно взять ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Однако этот ряд расходится.

☐ Действительно,

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n = \sqrt{n},$$

т. е. $S_n > \sqrt{n}$. Следовательно, $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$, ряд расходится. ■

§ 60. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЗНАКОПОСТОЯННЫХ РЯДОВ

Необходимый признак сходимости не дает, вообще говоря, возможности судить о том, сходится ли данный ряд или нет. Сходимость и расходимость ряда во многих случаях можно установить с помощью так называемых *достаточных признаков*.

Рассмотрим некоторые из них для ***знакоположительных*** рядов, т. е. рядов с неотрицательными членами (знакоотрицательный ряд переходит в знакоположительный путем умножения его на (-1), что, как известно, не влияет на сходимость ряда).

60.1. Признаки сравнения рядов

Сходимость или расходимость знакоположительного ряда часто устанавливается путем сравнения его с другим («эталонным») рядом, о котором известно, сходится он или нет. В основе такого сравнения лежат следующие теоремы.

Теорема 60.1. Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{60.1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{60.2}$$

Если для всех n выполняется неравенство

$$u_n \leqslant v_n, \tag{60.3}$$

то из сходимости ряда (60 2) следует сходимость ряда (60.1), из расходимости ряда (60 1) следует расходимость ряда (60 2)

☐ Обозначим n-е частичные суммы рядов (60.1) и (60.2) соответственно через $S_n^{(u)}$ и $S_n^{(v)}$. Из неравенства (60.3) следует, что

$$S_n^{(u)} \leqslant S_n^{(v)}. \tag{60.4}$$

Пусть ряд (60.2) сходится и его сумма равна S_2. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(v)} = S_2$. Члены ряда (60.2) положительны, поэтому $S_n^{(v)} < S_2$ и, следовательно, с учетом неравенства (60.4), $S_n^{(u)} \leqslant S_2$. Таким образом, последовательность $S_1^{(u)}, S_2^{(u)}, S_n^{(u)}, \ldots$ монотонно возрастает ($u_n > 0$) и ограничена сверху числом S_2. По признаку существования предела (см. теорема 15.3) последовательность $\{S_n^{(u)}\}$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(n)} = S_1$, т. е. ряд (60.1) сходится.

Пусть теперь ряд (60.1) расходится. Так как члены ряда неотрицательны, в этом случае имеем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \infty$. Тогда, с учетом неравенства (60.4), получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(v)} = \infty$, т. е. ряд (60.2) расходится. ■

Замечание. Теорема 60.1 справедлива и в том случае, когда неравенство (60.3) выполняется не для всех членов рядов (60.1) и (60.2), а начиная с некоторого номера N. Это вытекает из свойства 3 числовых рядов (см. п. 59.1).

Теорема 60.2 (предельный признак сравнения). Пусть даны два знакоположительных ряда (60 1) и (60 2) Если существует конечный, отличный от 0, предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$ $(0 < A < \infty)$, то ряды (60.1) и (60.2) сходятся или расходятся одновременно.

❏ По определению предела последовательности (см. п. 15.2) для всех n, кроме, возможно, конечного числа их, для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\left|\frac{u_n}{v_n} - A\right| < \varepsilon$, или

$$(A-\varepsilon)\cdot v_n < u_n < (A+\varepsilon)\cdot v_n. \tag{60.5}$$

Если ряд (60.1) сходится, то из левого неравенства (60.5) и теоремы 60.1 вытекает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A-\varepsilon)v_n$ также сходится. Но тогда, согласно свойству 1 числовых рядов (см. п. 59.1), ряд (60.2) сходится.

Если ряд (60.1) расходится, то из правого неравенства (60.5), теоремы 60.1, свойства 1 вытекает, что и ряд (60.2) расходится.

Аналогично, если ряд (60.2) сходится (расходится), то сходящимся (расходящимся) будет и ряд (60.1). ■

Пример 60.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+2^n}$.

Решение: Сравним данный ряд с рядом геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, который сходится ($q = \frac{1}{2} < 1$). Имеем $\frac{1}{3+2^n} < \frac{1}{2^n}$. Следовательно, данный ряд сходится. ●

Пример 60.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Решение: Здесь $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Возьмем ряд с общим членом $v_n = \frac{1}{n}$, который расходится (гармонический ряд). Имеем $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \geqslant \frac{1}{n}$. Следовательно, данный ряд расходится. ●

Пример 60.3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{5n}$.

Решение: Применим предельный признак сравнения. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{5} \neq 0$ (см. пример 17.7), то по теореме 60.2 исходный ряд расходится, как сравнимый с гармоническим рядом. ●

60.2. Признак Даламбера

В отличие от признаков сравнения, где все зависит от догадки и запаса известных сходящихся и расходящихся рядов, признак Даламбера (1717–1783, французский математик) позволяет часто решить вопрос о сходимости ряда, проделав лишь некоторые операции над самим рядом.

Теорема 60.3. Пусть дан ряд (59.1) с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то по определению предела для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что при $n > N$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \varepsilon \quad \text{или} \quad l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon. \tag{60.6}$$

Пусть $l < 1$. Можно подобрать ε так, что число $l+\varepsilon < 1$. Обозначим $l + \varepsilon = q$, $q < 1$. Тогда из правой части неравенства (60.6) получаем $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$, или $u_{n+1} < q \cdot u_n$, $n > N$. В силу свойства 3 числовых рядов можно считать, что $u_{n+1} < q \cdot u_n$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ Давая номеру n эти значения, получим серию неравенств:

$$\begin{aligned}
&u_2 < q \cdot u_1, \\
&u_3 < q \cdot u_2 < q^2 u_1, \\
&u_4 < q \cdot u_3 < q^3 u_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&u_n < q \cdot u_n < q^{n-1} u_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

т. е. члены ряда $u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots$ меньше соответствующих членов ряда $qu_1 + q^2u_1 + q^3u_1 + \ldots + q^{n+1}u_1 + \ldots$, который сходится как ряд геометрической прогрессии со знаменателем $0 < q < 1$. Но тогда, на основании признака сравнения, сходится ряд $u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$, следовательно, сходится и исходный ряд (59.1).

Пусть $l > 1$. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l > 1$. Отсюда следует, что, начиная с некоторого номера N, выполняется неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, или $u_{n+1} > u_n$, т. е. члены ряда возрастают с увеличением номера n. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. На основании следствия из необходимого признака (см. п. 59.3) ряд (59.1) расходится. ■

Замечания.

1. Если $l = 1$, то ряд (59.1) может быть как сходящимся, так и расходящимся.

2. Признак Даламбера целесообразно применять, когда общий член ряда содержит выражение вида $n!$ или a^n.

Пример 60.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

❍ Решение: Находим

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Так как $l = 0 < 1$, то данный ряд по признаку Даламбера сходится. ●

Пример 60.5. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$.

○ Решение: Вычисляем

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} : \frac{3^n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3\cdot n^2}{3^n\cdot(n+1)^2} =$$

$$= 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = 3.$$

Так как $l = 3 > 1$, то данный ряд по признаку Даламбера расходится. ●

60.3. Радикальный признак Коши

Иногда удобно пользоваться *радикальным признаком Коши* для исследования сходимости знакоположительного ряда. Этот признак во многом схож с признаком Даламбера, о чем говорят его формулировка и доказательство.

Теорема 60.4. Пусть дан ряд (59.1) с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = l$. Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Как и для признака Даламбера, в случае, когда $l = 1$, вопрос о сходимости ряда остается открытым. Доказательство теоремы аналогично доказательству признака Даламбера. Поэтому опустим его.

Пример 60.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

○ Решение: Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},$$

то применим радикальный признак Коши к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Вычисляем

$$l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{e} < 1.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ сходится, а значит, сходится и исходный ряд, согласно свойству 1 числовых рядов. ●

60.4. Интегральный признак Коши. Обобщенный гармонический ряд

Теорема 60.5. Если члены знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1; +\infty)$ функции $f(x)$ так, что $u_1 = f(1), u_2 = f(2), \ldots, u_n = f(n), \ldots$, то:

1) если $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то сходится и ряд (59.1);

2) если $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то расходится также и ряд (59.1).

О сходимости несобственных интегралов см. § 40.

❑ Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $y = f(x)$, основанием которой служит отрезок оси Ox от $x = 1$ до $x = n$ (см. рис. 258).

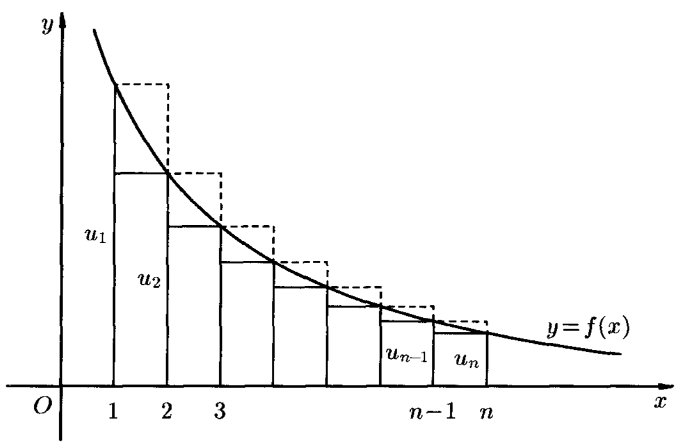


Рис. 258

Построим входящие и выходящие прямоугольники, основаниями которых служат отрезки $[1; 2]$, $[2; 3]$, ... Учитывая геометрический смысл определенного интеграла, запишем:

$$f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + \ldots + f(n)\cdot 1 < \int\limits_1^n f(x)\,dx < f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + \ldots + f(n-1)\cdot 1,$$

или
$$u_2+u_3+\ldots+u_n<\int\limits_1^n f(x)\,dx<u_1+u_2+\ldots+u_{n-1},$$
или
$$S_n-u_1<\int\limits_1^n f(x)\,dx<S_n-u_n. \tag{60.7}$$

Случай 1. Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, т. е. $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = A$. Поскольку $\int\limits_1^n f(x)\,dx < \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = A$, то с учетом неравенства (60.7) имеем: $S_n-u_1<A$, т. е. $S_n<u_1+A$. Так как последовательность частичных сумм монотонно возрастает и ограничена сверху (числом u_1+A), то, по признаку существования предела, имеет предел. Следовательно, ряд (59.1) сходится.

Случай 2. Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится. Тогда $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$ и интегралы $\int\limits_1^n f(x)\,dx$ неограниченно возрастают при $n\to\infty$. Учитывая, что $S_n>\int\limits_1^n f(x)\,dx+u_n$ (см. (60.7)), получаем, что $S_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Следовательно, данный ряд (59.1) расходится. ■

Замечание. Вместо интеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ можно брать интеграл $\int\limits_k^{+\infty} f(x)\,dx$, где $k\in\mathbb{N}$, $k>1$. Отбрасывание k первых членов ряда в ряде (59.1), как известно, не влияет на сходимость (расходимость) ряда.

Пример 60.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$.

Решение: Воспользуемся интегральным признаком Коши. Функция $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ удовлетворяет условиям теоремы 60.5. Находим
$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\ln|\ln x|\Big|_2^{\infty}=\infty.$$
Значит, ряд с общим членом $u_n=\frac{1}{x\ln x}$ расходится. ●

Ряд

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots,} \tag{60.8}$$

где $p > 0$ — действительное число, называется *обобщенным гармоническим рядом.* Для исследования ряда (60.8) на сходимость применим интегральный признак Коши (признаки Даламбера и Коши ответа о сходимости не дают).

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x^p}$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает на промежутке $[1;+\infty)$ и $f(n)=\frac{1}{n^p}=u_n$. При $p\neq 1$ имеем:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{a\to\infty}\int_1^a x^{-p}\,dx=\lim_{a\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_1^a=$$

$$=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{a^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & \text{если } p>1,\\ \infty, & \text{если } p<1.\end{cases}$$

При $p=1$ имеем гармонический ряд $u_n=\frac{1}{n}$, который расходится (второй способ: $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\infty$). Итак, ряд (60.8) сходится при $p>1$, расходится при $p\leqslant 1$. В частности, ряд $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$ сходится (полезно знать).

Рассмотренные признаки сходимости (есть и другие) знакоположительных рядов позволяют судить о сходимости практически любого положительного ряда. Необходимые навыки приобретаются на практике.

§ 61. ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ И ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

61.1. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Рассмотрим важный класс рядов, называемых знакочередующимися. *Знакочередующимся рядом* называется ряд вида

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n, \tag{61.1}$$

где $u_n>0$ для всех $n\in\mathbb{N}$ (т. е. ряд, положительные и отрицательные члены которого следуют друг за другом поочередно).

Для знакочередующихся рядов имеет место *достаточный* признак сходимости (установленный в 1714 г. Лейбницем в письме к И. Бернулли).

Теорема 61.1 (признак Лейбница). Знакочередующийся ряд (61.1) сходится, если:

1. Последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т. е. $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$;
2. Общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

При этом сумма S ряда (61.1) удовлетворяет неравенствам

$$0 < S < u_1. \tag{61.2}$$

❑ Рассмотрим сначала частичную сумму четного числа ($2m$) членов ряда (61.1). Имеем

$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2m-1} - u_{2m} = \\ = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Выражение в каждой скобке, согласно первому условию теоремы, положительно. Следовательно, сумма $S_{2m} > 0$ и возрастает с возрастанием номера $2m$.

С другой стороны, S_{2m} можно переписать так:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

Легко видеть, что $S_{2m} < u_1$. Таким образом, последовательность $S_2, S_4, S_6, \ldots, S_{2m}, \ldots$ возрастает и ограничена сверху. Следовательно, она имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2m} = S$, причем $0 < S < u_1$.

Рассмотрим теперь частичные суммы нечетного числа ($2m+1$) членов ряда (61.1). Очевидно, что $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$. Отсюда следует, что

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} (S_{2m} + u_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + 0 = S,$$

т. к. $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$ в силу второго условия теоремы. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ как при четном n, так и при нечетном n. Следовательно, ряд (61.1) сходится, причем $0 < S < u_1$. ■

Замечания.

1. Исследование знакочередующегося ряда вида

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots \tag{61.3}$$

(с отрицательным первым членом) сводится путем умножения всех его членов на (-1) к исследованию ряда (61.1).

Ряды (61.1) и (61.3), для которых выполняются условия теоремы Лейбница, называются *лейбницевскими* (или рядами Лейбница).

2. Соотношение (61.2) позволяет получить простую и удобную оценку ошибки, которую мы допускаем, заменяя сумму S данного

ряда его частичной суммой S_n. Отброшенный ряд (остаток) представляет собой также знакочередующийся ряд $(-1)^{n+1}(u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots)$, сумма которого по модулю меньше первого члена этого ряда, т. е. $S_n < u_{n+1}$. Поэтому ошибка меньше модуля первого из отброшенных членов.

Пример 61.1. Вычислить приближительно сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^n}.$$

Решение: Данный ряд лейбницевского типа. Он сходится. Можно записать: $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \cdots = S$. Взяв пять членов, т. е. заменив S на

$$S_5 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} \approx 0{,}7834,$$

сделаем ошибку, меньшую, чем $\frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656} < 0{,}00003$. Итак, $S \approx 0{,}7834$. ●

61.2. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов

Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется ***знакопеременным***.

Для знакопеременных рядов имеет место следующий *общий достаточный признак сходимости*.

Теорема 61.2. Пусть дан знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{61.4}$$

Если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots, \tag{61.5}$$

составленный из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд (61.4).

❑ Рассмотрим вспомогательный ряд, составленный из членов рядов (61.4) и (61.5):

$$(u_1 + |u_1|) + (u_2 + |u_2|) + \ldots + (u_n + |u_n|) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n + |u_n|).$$

Очевидно, что $0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2|u_n|$ сходится в силу условия теоремы и свойства 1 числовых рядов (п. 59.1) . Следовательно, на основании признака сравнения (п. 59.3) сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + |u_n|)$. Поскольку данный знакопеременный ряд (61.4) представляет собой разность двух сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n + |u_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|,$$

то, на основании свойства 2 числовых рядов, он (ряд (61.4)) сходится. ■

Отметим, что обратное утверждение несправедливо: если сходится ряд (61.4), то это не означает, что будет сходиться ряд (61.5).

Пример 61.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$.

◑ Решение: Это знакочередующийся ряд, для которого выполнены условия признака Лейбница. Следовательно, указанный ряд сходится. Однако ряд, составленный из модулей членов данного ряда, т. е. ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

расходится (гармонический ряд). ●

61.3. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов

Знакопеременный ряд называется ***абсолютно сходящимся***, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится.

Знакопеременный ряд называется ***условно сходящимся***, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Так, ряд, показанный в примере (61.2), условно сходящийся. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}$$

абсолютно сходится, т. к. ряд, составленный из модулей его членов, сходится (см. пример 60.4).

Среди знакопеременных рядов абсолютно сходящиеся ряды занимают особое место: на такие ряды переносятся основные свойства конечных сумм (переместительность, сочетательность, распределительность).

Основные свойства абсолютно сходящихся рядов приводим без доказательства.

1. Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму S, то ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму S, что и исходный ряд (теорема Дирихле).

2. Абсолютно сходящиеся ряды с суммами S_1 и S_2 можно почленно складывать (вычитать). В результате получается абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 + S_2$ (или соответственно $S_1 - S_2$).

3. Под произведением двух рядов $u_1 + u_2 + \ldots$ и $v_1 + v_2 + \ldots$ понимают ряд вида

$$(u_1v_1) + (v_1v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1) + \ldots \\ \ldots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \ldots + u_nv_1) + \ldots$$

Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с суммами S_1 и S_2 есть абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 \cdot S_2$.

Таким образом, абсолютно сходящиеся ряды суммируются, вычитаются, перемножаются как обычные ряды. Суммы таких рядов не зависят от порядка записи членов.

В случае условно сходящихся рядов соответствующие утверждения (свойства), вообще говоря, не имеют места.

Так, переставляя члены условно сходящегося ряда, можно добиться того, что сумма ряда изменится. Например, ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ условно сходится по признаку Лейбница. Пусть его сумма равна S. Перепишем его члены так, что после одного положительного члена будут идти два отрицательных. Получим ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots = \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots = \\ = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\Big) = \frac{1}{2}S.$$

Сумма уменьшилась вдвое!

Более того, путем перестановки членов условно сходящегося ряда можно получить сходящийся ряд с заранее заданной суммой или расходящийся ряд (теорема Римана).

Поэтому действия над рядами нельзя производить, не убедившись в их абсолютной сходимости. Для установления абсолютной сходимости используют все признаки сходимости знакоположительных рядов, заменяя всюду общий член ряда его модулем.

Глава XIV. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Лекции 53–55

§ 62. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

62.1. Основные понятия

Ряд, членами которого являются функции от x, называется *функциональным:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x_1) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{62.1}$$

Придавая x определенное значение x_0, мы получим числовой ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ \ldots + u_n(x_0) + \ldots,$$

который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если полученный числовой ряд сходится, то точка x_0 называется ***точкой сходимости*** ряда (62.1); если же ряд расходится — ***точкой расходимости*** функционального ряда.

Совокупность числовых значений аргумента x, при которых функциональный ряд сходится, называется его *областью сходимости.*

В области сходимости функционального ряда его сумма является некоторой функцией от x: $S = S(x)$. Определяется она в области сходимости равенством

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \quad \text{где} \quad S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) \ —$$

частичная сумма ряда.

Пример 62.1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

Решение: Данный ряд является рядом геометрической прогрессии со знаменателем $q = x$. Следовательно, этот ряд сходится при $|x| < 1$, т. е. при всех $x \in (-1; 1)$; сумма ряда равна $\frac{1}{1-x}$:

$$S(x) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{при} \quad |x| < 1.}$$

●

Пример 62.2. Исследовать сходимость функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}.$$

Решение: Составим ряд из абсолютных величин членов исходного ряда:

$$\left|\frac{\sin x}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2^2 x}{2^2}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| + \ldots \qquad (62.2)$$

Так как при любом $x \in \mathbb{R}$ имеет место соотношение $\left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, а ряд с общим членом $\frac{1}{n^2}$ сходится (обобщенный гармонический ряд, $p = 2 > 1$, см. п. 60.4), то по признаку сравнения ряд (62.2) сходится при $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, исходный ряд абсолютно сходится при всех $x \in \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$. ●

Среди функциональных рядов в математике и ее приложениях особую роль играет ряд, членами которого являются степенные функции аргумента x, т. е. так называемый ***степенной ряд***:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (62.3)$$

Действительные (или комплексные) числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются ***коэффициентами ряда*** (62.3), $x \in \mathbb{R}$ — действительная переменная.

Ряд (62.3) расположен по степеням x. Рассматривают также степенной ряд, расположенный по степеням $(x - x_0)$, т. е. ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \qquad (62.4)$$

где x_0 — некоторое постоянное число.

Ряд (62.4) легко приводится к виду (62.3), если положить $x - x_0 = z$. Поэтому при изучении степенных рядов можем ограничиться степенными рядами вида (62.3).

§ 63. СХОДИМОСТЬ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Выясним вопрос о сходимости степенного ряда (62.3).

Область сходимости степенного ряда (62.3) содержит по крайней мере одну точку: $x = 0$ (ряд (62.4) сходится в точке $x = x_0$).

63.1. Теорема Н. Абеля

Об области сходимости степенного ряда можно судить, исходя из следующей теоремы.

Теорема 63.1 (Абель). Если степенной ряд (62.3) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$.

□ По условию ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится. Следовательно, по необходимому признаку сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Отсюда следует, что величина $a_n x_0^n$ ограничена, т. е. найдется такое число $M > 0$, что для всех n выполняется неравенство $|a_n x_0^n| \leqslant M, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть $|x| < |x_0|$, тогда величина $q = \left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$ и, следовательно,

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \leqslant M \cdot q^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

т. е. модуль каждого члена ряда (62.3) не превосходит соответствующего члена сходящегося ($q < 1$) ряда геометрической прогрессии. Поэтому по признаку сравнения при $|x| < |x_0|$ ряд (62.3) абсолютно сходящийся. ■

Следствие 63.1. Если ряд (62.3) расходится при $x = x_1$, то он расходится и при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_1|$.

□ Действительно, если допустить сходимость ряда в точке x_2, для которой $|x_2| > |x_1|$, то по теореме Абеля ряд сходится при всех x, для которых $|x| < |x_2|$, и, в частности, в точке x_1, что противоречит условию. ■

63.2. Интервал и радиус сходимости степенного ряда

Из теоремы Абеля следует, что если $x_0 \neq 0$ есть точка сходимости степенного ряда, то интервал $(-|x_0|; |x_0|)$ весь состоит из точек сходимости данного ряда; при всех значениях x вне этого интервала ряд (62.3) расходится.

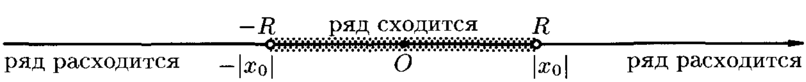


Рис. 259

Интервал $(-|x_0|; |x_0|)$ и называют ***интервалом сходимости*** степенного ряда. Положив $|x_0| = R$, интервал сходимости можно записать в виде $(-R; R)$. Число R называют ***радиусом сходимости*** степенного ряда, т. е. $R > 0$ — это такое число, что при всех x, для которых $|x| < R$, ряд (62.3) абсолютно сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится (см. рис. 259).

В частности, когда ряд (62.3) сходится лишь в одной точке $x_0 = 0$, то считаем, что $R = 0$. Если же ряд (62.3) сходится при всех значениях $x \in \mathbb{R}$ (т. е. во всех точках числовой оси), то считаем, что $R = \infty$.

Отметим, что на концах интервала сходимости (т. е. при $x = R$ и при $x = -R$) сходимость ряда проверяется в каждом случае отдельно.

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (62.3) можно поступить следующим образом. Составим ряд из модулей членов данного степенного ряда

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots$$

и применим к нему признак Даламбера. Допустим, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0, \quad x \neq 0.$$

По признаку Даламбера ряд сходится, если $|x| \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, т. е. ряд сходится при тех значениях x, для которых

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|;$$

ряд, составленный из модулей членов ряда (62.3), расходится при тех значениях x, для которых $|x| > \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Таким образом, для ряда (62.3) радиус абсолютной сходимости

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.} \tag{63.1}$$

Аналогично, воспользовавшись радикальным признаком Коши, можно установить, что

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{63.2}$$

Замечания.

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, то можно убедиться, что ряд (62.3) абсолютно сходится на всей числовой оси. В этом случае $R = \infty$. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, то $R = 0$.

2. Интервал сходимости степенного ряда (62.4) находят из неравенства $|x - x_0| < R$; имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$.

3. Если степенной ряд содержит не все степени x, т. е. задан неполный степенной ряд, то интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости (формулы (63.1) и (63.2)), а непосредственно

применяя признак Даламбера (или Коши) для ряда, составленного из модулей членов данного ряда.

Пример 63.1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

○ Решение: Воспользуемся формулой (63.1):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Следовательно, данный ряд абсолютно сходится на всей числовой оси. ●

Пример 63.2. Найти область сходимости ряда

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

○ Решение: Заданный ряд неполный. Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем:

$$|u_n| = \frac{|x^{2n-1}|}{2n-1}, \quad |u_{n+1}| = \frac{|x^{2n+1}|}{2n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x^{2n+1}| \cdot (2n-1)}{(2n+1) \cdot |x^{2n-1}|} = |x^2| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = x^2.$$

Ряд абсолютно сходится, если $x^2 < 1$ или $-1 < x < 1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -1$ имеем ряд $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \ldots$, который сходится по признаку Лейбница.

При $x = 1$ имеем ряд $+1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ — это тоже сходящийся лейбницевский ряд. Следовательно, областью сходимости исходного ряда является отрезок $[-1; 1]$. ●

Пример 63.3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 2^{n-1}}.$$

○ Решение: Находим радиус сходимости ряда по формуле (63.1):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} : \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n}{n \cdot 2^{n-1}} = 2.$$

Следовательно, ряд сходится при $-2 < x+2 < 2$, т. е. при $-4 < x < 0$.

При $x = -4$ имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n},$$

который сходится по признаку Лейбница.

При $x = 0$ имеем расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является полуотрезок $[-4; 0)$. ●

63.3. Свойства степенных рядов

Сформулируем без доказательства *основные свойства* степенных рядов.

1. Сумма $S(x)$ степенного ряда (62.3) является непрерывной функцией в интервале сходимости $(-R; R)$.

2. Степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, имеющие радиусы сходимости соответственно R_1 и R_2, можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости произведения, суммы и разности рядов не меньше, чем меньшее из чисел R_1 и R_2.

3. Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать; при этом для ряда

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{63.3}$$

при $-R < x < R$ выполняется равенство

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n \cdot a_n x^{n-1} + \ldots \tag{63.4}$$

4. Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости; при этом для ряда (63.3) при $-R < a < x < R$ выполняется равенство (см. замечание 1, с. 416)

$$\int_a^x S(t)\,dt = \int_a^x a_0\,dt + \int_a^x a_1 t\,dt + \int_a^x a_2 t^2\,dt + \ldots + \int_a^x a_n t^n\,dt + \ldots \tag{63.5}$$

Ряды (63.4) и (63.5) имеют тот же радиус сходимости, что и исходный степенной ряд.

Перечисленные свойства 1–4 остаются справедливыми и для степенных рядов вида (62.4).

Свойства степенных рядов широко используются в теоретических исследованиях и в приближенных вычислениях.

§ 64. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

64.1. Ряды Тейлора и Маклорена

Для приложений важно уметь данную функцию $f(x)$ разлагать в степенной ряд, т. е. функцию $f(x)$ представлять в виде суммы степенного ряда.

Как известно (см. теорема 26.1), для любой функции $f(x)$, определенной в окрестности точки x_0 и имеющей в ней производные до $(n+1)$-го порядка включительно, справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x), \quad (64.1)$$

где $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, $c \in (x_0, x)$, — остаточный член в форме Лагранжа. Число c можно записать в виде $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, где $0 < \theta < 1$. Формулу (64.1) кратко можно записать в виде

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + R_n(x),}$$

где $P_n(x) = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ — многочлен Тейлора.

Если функция $f(x)$ имеет производные любых порядков (т. е. бесконечно дифференцируема) в окрестности точки x_0 и остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$), то из формулы Тейлора получается разложение функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$, называемое *рядом Тейлора*:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.} \quad (64.2)$$

Если в ряде Тейлора положить $x_0 = 0$, то получим разложение функции по степеням x в так называемый *ряд Маклорена*:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.} \quad (64.3)$$

Отметим, что ряд Тейлора можно формально построить для любой бесконечно дифференцируемой функции (это необходимое условие) в окрестности точки x_0. Но отсюда еще не следует, что он будет сходиться к данной функции $f(x)$; он может оказаться расходящимся или сходиться, но не к функции $f(x)$. Так, например, функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ производные всех порядков, причем $f^{(n)}(0) = 0$ при всяком n (см. пример 19.5). Ряд Маклорена имеет вид

$$0 + \frac{0}{2!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \ldots + \frac{0}{n!}x^n + \ldots$$

Он сходится, но его сумма $S(x)$ в любой точке x равна нулю, а не $f(x)$.

Пусть для функции $f(x)$ составлен соответствующий ей ряд Тейлора.

Теорема 64.1. Для того чтобы ряд Тейлора (64.2) функции $f(x)$ сходился к $f(x)$ в точке x, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке остаточный член формулы Тейлора (64.1) стремился к нулю при $n \to \infty$, т. е. чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

❑ Пусть ряд Тейлора (64.2) сходится к функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0, т. е. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$. Так как n-я частичная сумма $S_n(x)$ ряда (64.2) совпадает с многочленом Тейлора $P_n(x)$, т. е. $S_n(x) = P_n(x)$, находим:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}(f(x) - P_n(x)) = \lim_{n\to\infty}(f(x) - S_n(x)) =$$
$$= f(x) - \lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Обратно, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty}(f(x) - R_n(x)) =$$
$$= f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x) - 0 = f(x). \quad ■$$

Замечание. Если ряд Тейлора (64.2) сходится к порождающей функции $f(x)$, то остаточный член формулы Тейлора равен остатку ряда Тейлора, т. е. $R_n(x) = r_n(x)$. (Напомним, что $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$, а $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$, где $S(x)$ — сумма ряда Тейлора.)

Таким образом, задача разложения функции $f(x)$ в степенной ряд сведена по существу к определению значений x, при которых

$R_n(x) \to 0$ (при $n \to \infty$). Если сделать это не просто, то следует каким-нибудь иным способом убедиться, что написанный ряд Тейлора сходится к данной функции.

На практике часто пользуются следующей теоремой, которая дает простое достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.

Теорема 64.2. Если модули всех производных функций $f(x)$ ограничены в окрестности точки x_0 одним и тем же числом $M > 0$, то для любого x из этой окрестности ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к функции $f(x)$, т. е. имеет место разложение (64.2).

❑ Согласно теореме 64.1, достаточно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. По условию теоремы 64.2 для любого n имеет место неравенство $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$. Тогда имеем:

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} M \cdot \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = M \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right|.$$

Осталось показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0$. Для этого рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(x-x_0)^{n+1}|}{(n+1)!}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-x_0|^{n+2} \cdot (n+1)!}{(n+2)! \cdot |x-x_0|^{n+1}} = |x-x_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0 < 1,$$

то по признаку Даламбера этот ряд сходится на всей числовой оси. Но тогда, в силу необходимого признака сходимости,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. ■

64.2. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена)

Для разложения функции $f(x)$ в ряд Маклорена (64.3) нужно:

а) найти производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$;

б) вычислить значения производных в точке $x_0 = 0$;

в) написать ряд (64.3) для заданной функции и найти его интервал сходимости;

г) найти интервал $(-R; R)$, в котором остаточный член ряда Маклорена $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Если такой интервал существует, то в нем функция $f(x)$ и сумма ряда Маклорена совпадают.

Замечание. В интервале сходимости степенного ряда остаточный член стремится к нулю при $n \to \infty$.

Приведем таблицу, содержащую разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций (эти разложения следует запомнить):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \tag{64.4}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \tag{64.5}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \tag{64.6}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

$$x \in \begin{cases} [-1; 1], & \text{если } \alpha \geqslant 0, \\ (-1; 1], & \text{если } -1 < \alpha < 0, \\ (-1; 1), & \text{если } \alpha \leqslant -1, \end{cases} \tag{64.7}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \qquad x \in (-1; 1), \tag{64.8}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \qquad x \in (-1; 1], \tag{64.9}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ldots, \qquad x \in [-1; 1], \tag{64.10}$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots \tag{64.11}$$

$$\ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \qquad x \in [-1; 1], \tag{64.12}$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \tag{64.13}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty). \tag{64.14}$$

Докажем формулу (64.4). Пусть $f(x) = e^x$.

❏ Имеем:

а) $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, …, $f^{(n)}(x) = e^x$, …;

б) $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, …, $f^{(n)}(0) = 1$, …;

в) $e^x \sim 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$; $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \infty$, т. е. ряд сходится в интервале $(-\infty; \infty)$;

г) для всех $x \in (-R; R)$ имеем $|f^{(n)}(x)| = e^x < e^R = M$, т. е. все производные в этом интервале ограничены одним и тем же числом $M = e^R$. Следовательно, по теореме 64.2 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Таким образом, $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ ■

Докажем формулу (64.5). Пусть $f(x) = \sin x$.

❏ Имеем:

а) $f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2\cdot\frac{\pi}{2})$, $f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3\cdot\frac{\pi}{2})$, …, $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\cdot\frac{\pi}{2})$ …;

б) $f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots, \\ -1, & n = 3,\ 7,\ 11,\ \ldots, \\ +1, & n = 1,\ 5,\ 9,\ \ldots; \end{cases}$

в) $\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ Легко проверить, что полученный ряд сходится на всей числовой оси, т. е. при всех $x \in (-\infty; \infty)$;

г) любая производная функции $f(x) = \sin x$ по модулю не превосходит единицы, $|f^{(n)}(x)| = \left|\sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1$. Следовательно, по теореме 64.2 имеет место разложение (64.5). ■

Докажем формулу (64.6). Пусть $f(x) = \cos x$.

❏ Формулу (64.6) можно доказать так же, как и формулу (64.5). Однако проще получить разложение функции $\cos x$, воспользовавшись свойством 3 степенных рядов. Продифференцировав почленно ряд (64.5), получим:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty).$$ ■

Докажем формулы (64.13), (64.14). Пусть $f(x) = \operatorname{ch} x$ (или $f(x) = \operatorname{sh} x$).

❑ Заменив в формуле (64.4) x на $-x$, получим разложение функции e^{-x}:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!} + \ldots, \tag{64.15}$$

справедливое для всех $x \in (-\infty; \infty)$.

Суммируя (и вычитая) почленно равенства (64.4) и (64.15), получим разложение гиперболического косинуса (синуса):

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty),$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

Формулы (64.13) и (64.14) доказаны. ■

Докажем формулу (64.7). Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

❑ Имеем:

а) $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, ..., $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$, ..., $n \in \mathbb{N}$;

б) $f(0) = 1$, $f'(0) = \alpha$, $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$, ..., $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$, ...;

в) $(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots$
$\ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$;

г) $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))\cdot(n+1)!}{n!\cdot\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))(\alpha-n)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1$, т. е. составленный для функции $(1+x)^\alpha$ ряд сходится в интервале $(-1; 1)$.

Можно показать, что и в данном случае, т. е. при $x \in (-1; 1)$, остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. ■

Ряд (64.7) называется *биномиальным*. Если $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то все члены ряда с $(n+1)$-го номера равны 0, так как содержат множитель $\alpha - n = n - n = 0$. В этом случае ряд (64.7) представляет собой известную формулу бинома Ньютона:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots1}{n!}x^n.$$

Докажем формулу (64.8). Пусть $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

❑ Формула (64.8) может быть получена разными способами:

1) пользуясь правилом разложения функции в ряд;

2) рассматривая ряд $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$ как ряд геометрической прогрессии, первый член которой равен единице и знаменатель $q = x$; известно (см. пример 62.1), что данный ряд сходится при $x \in (-1; 1)$ и его сумма равна $\frac{1}{1-x}$;

3) воспользовавшись формулой (64.7): положив в ней $\alpha = -1$ и заменив x на $-x$, получим формулу (64.8). ■

Докажем формулу (64.9). Пусть $f(x) = \ln(1 + x)$.

Формула (64.9) также может быть доказана разными способами. Приведем один из них.

❑ Рассмотрим равенство

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots,$$

справедливое для всех $x \in (-1; 1)$. Используя свойство 4 степенных рядов, проинтегрируем данный ряд на отрезке $[0; x]$, $x \in (-1; 1)$:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2\,dt - \int_0^x t^3\,dt + \ldots + (-1)^n \int_0^x t^n\,dt + \ldots,$$

или

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

Можно показать, что это равенство справедливо и для $x = 1$. ■

Докажем формулу (64.10). Пусть $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

❑ Положив в формуле (64.7) $\alpha = -1$ и заменив x на x^2, получим равенство

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n \cdot x^{2n} + \ldots, \qquad x \in (-1; 1).$$

Тогда

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x 1\,dt - \int_0^x t^2\,dt + \int_0^x t^4\,dt - \ldots + \int_0^x (-1)^n t^{2n}\,dt + \ldots,$$

или

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Можно показать, что равенство справедливо и при $x = \pm 1$, т. е. при всех $x \in [-1; 1]$. ■

Докажем формулу (64.12). Пусть $f(x) = \arcsin x$.

❑ Положив в формуле (64.7) $\alpha = -\frac{1}{2}$ и заменив x на $(-x^2)$, получим равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots, \quad x \in [-1;1].$$

Тогда

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^x dt + \int_0^x \frac{t^2}{2}\,dt + \int_0^x \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4\,dt + \ldots,$$

или

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots$$

Можно показать, что полученное равенство справедливо при всех $x \in [-1;1]$. ■

Ряды (64.4)-(64.14) в комбинации с правилами сложения, вычитания, умножения, дифференцирования, интегрирования степенных рядов (см. свойства степенных рядов) могут быть использованы при разложении (некоторых) других функций в ряд Маклорена (Тейлора).

Пример 64.1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = 3^x$.

○ Решение: Так как $3^x = e^{\ln 3^x} = e^{x\ln 3}$, то, заменяя x на $x\ln 3$ в разложении (64.4), получим:

$$3^x = 1 + \frac{\ln 3}{1!}x + \frac{\ln^2 3}{2!}x^2 + \frac{\ln^3 3}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\ln^n 3}{n!}x^n + \ldots, \quad x \in (-\infty;\infty). \bullet$$

Пример 64.2. Выписать ряд Маклорена функции $f(x) = \ln(4-x)$,

○ Решение: Так как

$$f(x) = \ln(4-x) = \ln 4\left(1 - \frac{x}{4}\right) = \ln 4 + \ln\left[1 + \left(-\frac{x}{4}\right)\right],$$

то, воспользовавшись формулой (64.9), в которой заменим x на $(-\frac{x}{4})$, получим:

$$\ln(4-x) = \ln 4 + \left(-\frac{x}{4}\right) - \frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^3}{3} - \ldots,$$

или

$$\ln(4-x) = \ln 4 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4^2}\cdot\frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{1}{4^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} - \ldots,$$

если $-1 < -\frac{x}{4} \leqslant 1$, т. е. $-4 \leqslant x < 4$. ●

Пример 64.3. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x)=\frac{2}{3-x}.$$

○ Решение: Воспользуемся формулой (64.8). Так как

$$f(x)=\frac{2}{3-x}=\frac{2}{3\cdot\left(1-\frac{x}{3}\right)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}},$$

то, заменив x на $\frac{x}{3}$ в формуле (64.8), получим:

$$\frac{2}{3-x}=\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3+\ldots\right),$$

или

$$\frac{2}{3-x}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{3^2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{3^2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3^3}+\ldots+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^n}{3^n}+\ldots,$$

где $-1<\frac{x}{3}<1$, т. е. $-3<x<3$. ●

§ 65. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

65.1. Приближенное вычисление значений функции

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x=x_1$ с заданной точностью $\varepsilon>0$.

Если функцию $f(x)$ в интервале $(-R;R)$ можно разложить в степенной ряд

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

и $x_1\in(-R;R)$, то точное значение $f(x_1)$ равно сумме этого ряда при $x=x_1$, т. е.

$$f(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n+\ldots,$$

а приближенное — частичной сумме $S_n(x_1)$, т. е.

$$f(x_1)\approx S_n(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n.$$

Точность этого равенства увеличивается с ростом n. Абсолютная погрешность этого приближенного равенства равна модулю остатка ряда, т. е.

$$|f(x_1)-S_n(x_1)|=|r_n(x_1)|,$$

где

$$r_n(x_1)=a_{n+1}x_1^{n+1}+a_{n+2}x_1^{n+2}+\ldots$$

Таким образом, ошибку $|f(x_1) - S_n(x_1)|$ можно найти, оценив остаток $r_n(x_1)$ ряда.

Для рядов лейбницевского типа

$$|r_n(x_1)| = |u_{n+1}(x_1) + u_{n+2}(x_1) + u_{n+3}(x_1) + \ldots| < |u_{n+1}(x_1)|$$

(см. п. 61.1).

В остальных случаях (ряд знакопеременный или знакоположительный) составляют ряд из модулей членов ряда и для него стараются найти (подобрать) положительный ряд с большими членами (обычно это сходящийся ряд геометрической прогрессии), который легко бы суммировался. И в качестве оценки $|r_n(x_1)|$ берут величину остатка этого нового ряда.

Пример 65.1. Найти $\sin 1$ с точностью до 0,001.

○ Решение: Согласно формуле (64.5),

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!}1^3 + \frac{1}{5!}1^5 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}.$$

Стоящий справа ряд сходится абсолютно (проверить самостоятельно). Так как $\frac{1}{5!} \approx 0{,}008(3) > 0{,}001$, а $\frac{1}{7!} \approx 0{,}0002 < 0{,}001$, то для нахождения $\sin 1$ с точностью до 0,001 достаточно первых трех слагаемых:

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 0{,}842.$$

Допускаемая при этом ошибка меньше, чем первый отброшенный член (т. е. меньше, чем 0,0002). Вычисленное микрокалькулятором значение $\sin 1$ примерно равно 0,84147. ●

Пример 65.2. Вычислить число e с точностью до 0,001.

○ Решение: Подставляя $x = 1$ в формулу (64.4), получим:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Справа стоит знакоположительный ряд. Возьмем n слагаемых и оценим ошибку $r_n(x)$:

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}\right) = \frac{1}{n! \cdot n},$$

т. е. $r_n(x) < \frac{1}{n!\cdot n}$. Остается подобрать наименьшее натуральное число n, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{n!\cdot n} < 0{,}001$.

Нетрудно вычислить, что это неравенство выполняется при $n \geqslant 6$. Поэтому имеем:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2\frac{517}{720} \approx 2{,}718. \qquad \bullet$$

Замечание. Оценку остатка ряда можно производить с помощью остаточного члена ряда Маклорена

$$|f(x_1) - S_n(x_1)| = |R_n(x_1)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right|,$$

где c находится между 0 и x_1. В последнем примере $R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}$, $0 < c < 1$. Так как $e^c < e^1 < 3$, то $R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$. При $n = 6$ имеем: $R_6(1) < \frac{3}{7!} < 0{,}001$, $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{6!} \approx 2{,}718$.

65.2. Приближенное вычисление определенных интегралов

Бесконечные ряды применяются также для приближенного вычисления неопределенных и определенных интегралов в случаях, когда первообразная не выражается в конечном виде через элементарные функции (см. § 34) либо нахождение первообразной сложно.

Пусть требуется вычислить $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ с точностью до $\varepsilon > 0$. Если подынтегральную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по степеням x и интервал сходимости $(-R; R)$ включит в себя отрезок $[a; b]$, то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда. Ошибку вычислений определяют так же, как и при вычислении значений функций.

Пример 65.3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}\,dx$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

○ Решение: Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, заменяя x на $(-x^2)$ в формуле (64.4):

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty). \tag{65.1}$$

Интегрируя обе части равенства (65.1) на отрезке $\left[0; \frac{1}{4}\right]$, лежащем внутри интервала сходимости $(-\infty; \infty)$, получим:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx = \int\limits_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right) dx =$$
$$= \left(x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \ldots\right)\Big|_0^{\frac{1}{4}} =$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} + \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} - \frac{1}{3! \cdot 7 \cdot 4^7} + \ldots$$

Получили ряд лейбницевского типа. Так как $\frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} = 0{,}0052\ldots >$ $> 0{,}001$, а $\frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} < 0{,}001$, то с точностью до 0,001 имеем:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0{,}245.$$

●

Замечание. Первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = e^{-x^2}$ легко найти в виде степенного ряда, проинтегрировав равенство (65.1) в пределах от 0 до x:

$$F(x) = \int\limits_0^x e^{-t^2} dt = \int\limits_0^x \left(1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \ldots\right) dt =$$
$$= x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

Функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ и $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ играют очень важную роль в теории вероятностей. Первая — *плотность стандартного распределения вероятностей*, вторая — *функция Лапласа* $F(x) =$ $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (или *интеграл вероятностей*). Мы получили, что функция Лапласа представляется рядом

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2^2 2! \cdot 5} - \frac{x^7}{2^3 \cdot 3! \cdot 7} + \ldots\right),$$

который сходится на всей числовой оси.

65.3. Приближенное решение дифференциальных уравнений

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции в конечном виде или способ его решения слишком сложен, то для приближенного решения уравнения можно воспользоваться рядом Тейлора.

Познакомимся с двумя способами решения дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

Пусть, например, требуется решить уравнение

$$y'' = f(x; y; y'), \tag{65.2}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0. \tag{65.3}$$

Способ последовательного дифференцирования

Решение $y = y(x)$ уравнения (65.2) ищем в виде ряда Тейлора:

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots, \tag{65.4}$$

при этом первые два коэффициента находим из начальных условий (65.3). Подставив в уравнение (65.2) значения $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$, находим третий коэффициент: $y''(x_0) = f(x_0; y_0; y'_0)$. Значения $y'''(x_0), y^{(4)}(x_0), \ldots$ находим путем последовательного дифференцирования уравнения (65.2) по x и вычисления производных при $x = x_0$. Найденные значения производных (коэффициентов) подставляем в равенство (65.4). Ряд (65.4) представляет искомое частное решение уравнения (65.2) для тех значений x, при которых он сходится. Частичная сумма этого ряда будет приближенным решением дифференциального уравнения (65.2).

Рассмотренный способ применим и для построения общего решения уравнения (65.2), если y_0 и y'_0 рассматривать как произвольные постоянные.

Способ последовательного дифференцирования применим для решения дифференциальных уравнений любого порядка.

Пример 65.4. Методом последовательного дифференцирования найти пять первых членов (отличных от нуля) разложения в ряд решения уравнения $y'' = x^2 + y^2$, $y(-1) = 2$, $y'(-1) = \frac{1}{2}$.

❍ Решение: Будем искать решение уравнения в виде

$$y = y(-1) + \frac{y'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{y''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{y'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \ldots$$

Здесь $y(-1) = 2, y'(-1) = \frac{1}{2}$. Находим $y''(-1)$, подставив $x = -1$ в исходное уравнение: $y''(-1) = (-1)^2 + 2^2 = 5$. Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем заданное дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} y''' &= 2x + 2yy', \\ y^{(4)} &= 2 + 2(y')^2 + 2yy'', \\ y^{(5)} &= 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' = 6y'y'' + 2yy''', \ldots \end{aligned}$$

При $x = -1$ имеем:

$$\begin{aligned} y'''(-1) &= -2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 0, \\ y^{(4)}(-1) &= 2 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 2 \cdot 5 = 22{,}5, \\ y^{(5)}(-1) &= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 0 = 15, \ldots \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получим:

$$y = 2 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{5}{2}(x+1)^2 + \frac{15}{16}(x+1)^4 + \frac{1}{8}(x+1)^5 + \ldots \qquad \bullet$$

Способ неопределенных коэффициентов

Этот способ приближенного решения наиболее удобен для интегрирования линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Пусть, например, требуется решить уравнение

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \tag{65.5}$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Предполагая, что коэффициенты $p_1(x)$, $p_2(x)$ и свободный член $f(x)$ разлагаются в ряды по степеням $x - x_0$, сходящиеся в некотором интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$, искомое решение $y = y(x)$ ищем в виде степенного ряда

$$y = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots \tag{65.6}$$

с неопределенными коэффициентами.

Коэффициенты c_0 и c_1 определяются при помощи начальных условий $c_0 = y_0$, $c_1 = y'_0$.

Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем ряд (65.6) два раза (каков порядок уравнения) и подставляем выражения для функции y и ее производных в уравнение (65.5), заменив в нем $p_1(x)$, $p_2(x)$, $f(x)$ их разложениями. В результате получаем тождество, из которого методом неопределенных коэффициентов находим недостающие коэффициенты. Построенный ряд (65.6) сходится в том же интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ и служит решением уравнения (65.5).

Пример 65.5. Найти решение уравнения

$$y'' + xy' + y = x\cos x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$$

используя метод неопределенных коэффициентов.

○ Решение: Разложим коэффициенты уравнения в степенные ряды: $p_1(x) = x$, $p_2 = 1$,

$$f(x) = x\cos x = x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right).$$

Ищем решение уравнения в виде ряда

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots$$

Тогда

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots,$$

$$y'' = 2c_2 + 2\cdot 3\cdot c_3x + 3\cdot 4\cdot c_4x^2 + \ldots$$

Из начальных условий находим: $c_0 = 0$, $c_1 = 1$. Подставляем полученные ряды в дифференциальное уравнение:

$$(2c_2 + 2\cdot 3\cdot c_3x + 3\cdot 4\cdot c_4x^2 + \ldots) + x(c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots) +$$
$$+ (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots) = x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{aligned}
x^0 &: \quad 2c_2 = 0,\\
x^1 &: \quad 2\cdot 3\cdot c_3 + 2 = 1,\\
x^2 &: \quad 3\cdot 4\cdot c_4 + 2c_2 + c_2 = 0,\\
x^3 &: \quad 4\cdot 5\cdot c_5 + 3c_3 + c_3 = -\frac{1}{2},\\
x^4 &: \quad 5\cdot 6\cdot c_6 + 4c_4 + c_4 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Отсюда находим, что $c_2 = c_4 = c_6 = \ldots = 0$, $c_3 = -\frac{1}{3!}$, $c_5 = \frac{1}{5!}$, $c_7 = -\frac{1}{7!}, \ldots$ Таким образом, получаем решение уравнения в виде

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

т. е. $y = \sin x$. ●

Глава XV. РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Лекции 56–58

§ 66. РЯДЫ ФУРЬЕ

66.1. Периодические функции. Периодические процессы

При изучении разнообразных *периодических процессов*, т е процессов, которые через определенный промежуток времени повторяются (встречаются в радиотехнике, электронике, теории упругости, теории и практике автоматического регулирования и т. д.), целесообразнее разлагать периодические функции, описывающие эти процессы, не в степенной ряд, а в так называемый тригонометрический ряд.

Напомним, что функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется *периодической* (см. п. 14.3) *с периодом* $T > 0$, если при каждом $x \in D$ значение $(x+T) \in D$ и выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$.

Для построения графика периодической функции периода T достаточно построить его на любом отрезке длины T и периодически продолжить его во всю область определения.

Отметим основные свойства периодической функции.

1. Алгебраическая сумма периодических функций, имеющих один и тот же период T, есть периодическая функция с периодом T.

2. Если функция $f(x)$ имеет период T, то функция $f(ax)$ имеет период $\frac{T}{a}$: действительно, $f\left(a \cdot \left(x + \frac{T}{a}\right)\right) = f(ax+T) = f(ax)$

3. Если функция $f(x)$ имеет период T и интегрируема на отрезке $[x_0; x_1] \in \mathbb{R}$, то $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_b^{b+T} f(x)\,dx$ при любых a и $b \in [x_0; x_1]$.

❑ Пусть, например, $0 < a < b < T$, тогда

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_a^{b} f(x)\,dx + \int\limits_b^{a+T} f(x)\,dx. \tag{66.1}$$

С другой стороны,

$$\int\limits_b^{b+T} f(x)\,dx = \int\limits_b^{a+T} f(x)\,dx + \int\limits_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx. \tag{66.2}$$

Но $\int\limits_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx =$ (подстановка $x = u+T$) $= \int\limits_a^b f(u+T)\,du = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.
Подставляем полученный результат в (66.2) и, сравнивая с (66.1), имеем $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_b^{b+T} f(x)\,dx$. ■

В частности, $\int\limits_0^T f(x)\,dx = \int\limits_b^{b+T} f(x)\,dx$.

Простейшими периодическими функциями являются тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$. Период этих функций равен 2π, т. е. $T = 2\pi$.

Простейшим периодическим процессом (движением) является *простое гармоническое колебание* (движение), описываемое функцией

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0), \tag{66.3}$$

$t \geqslant 0$, где A — *амплитуда колебания*, ω — *частота*, φ_0 — *начальная фаза*.

Функцию такого вида (и ее график) называют *простой гармоникой*. Основным периодом функции (66 3) является $T = \frac{2\pi}{\omega}$, т. е. одно полное колебание совершается за промежуток времени $\frac{2\pi}{\omega}$ (ω показывает, сколько колебаний совершает точка в течение 2π единиц времени)

Проведем преобразование функции (66.3):

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin\omega t\cos\varphi_0 + A\cos\omega t\sin\varphi_0 = a\cos\omega t + b\sin\omega t, \tag{66.4}$$

где $a = A\sin\varphi_0$, $b = A\cos\varphi_0$. Отсюда видно, что простое гармоническое колебание описывается периодическими функциями $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$.

Сложное гармоническое колебание, возникающее в результате наложения конечного (или бесконечного) числа простых гармоник, также описывается функциями вида $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$. Так, функция

$$\varphi(t) = A_0 + A_1\sin(t+\varphi_1) + A_2\sin(2t+\varphi_2) + \ldots + A_{30}\sin(30t+\varphi_{30}) = \\ = A_0 + \sum_{n=1}^{30} A_n\sin(nt+\varphi_n)$$

или, что равносильно, функция $\varphi(t) = A_0 + \sum\limits_{n=1}^{30}(a_n\cos nt + b_n\sin nt)$ задает сложное гармоническое колебание. Так как период первой гармоники есть $T_1 = 2\pi$, второй $T_2 = \frac{2\pi}{2}$, третьей $T_3 = \frac{2\pi}{3}$, $\ldots$, тридцатой

$T_{30} = \frac{2\pi}{30}$, а период функции $y = A_0$ («нулевая гармоника») есть любое число, то функция $\varphi(t)$ имеет период, равный 2π, т. е. $T = 2\pi$.

Понятно, что при наложении простых гармоник получаем периодическую функцию, описывающую сложное периодическое колебание (периодический процесс).

Возникает вопрос: всякую ли периодическую функцию, описывающую периодический процесс, можно представить в виде суммы простых гармоник вида (66.3) или (66.4)? Если да, то как найти неизвестные параметры (коэффициенты) каждой из этих гармоник? Ответим сначала на второй вопрос, а потом и на первый.

66.2. Тригонометрический ряд Фурье

С помощью так называемого тригонометрического ряда любую (практически) периодическую функцию можно представить в виде ряда, членами которого являются простые гармоники.

Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \cdots =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx, \qquad (66.5)$$

где действительные числа a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ называются *коэффициентами* ряда.

Ряд (66.5) можно записать в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(nx + \varphi_n). \qquad (66.6)$$

Действительно, положив $a_n = A_n\sin\varphi_n$, $b_n = A_n\cos\varphi_n$, получим: $a_n\cos nx + b_n\sin nx = A_n\sin(nx + \varphi_n)$; ряд (66.5) принимает вид (66.6), при этом $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ и $\operatorname{tg}\varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$.

Свободный член ряда записан в виде $\frac{a_0}{2}$ для единообразия получающихся в дальнейшем формул.

Приведем формулы, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Считая m и n целыми положительными, находим:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = \begin{cases} \left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0 & (n \neq 0)\\ \left.x\right|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi & (n = 0), \end{cases} \qquad (66.7)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx = 0 \quad \text{при любом } n, \qquad (66.8)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \\ = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \big(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\big)\, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi & (m = n), \end{cases} \tag{66.9}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = \\ = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \big(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\big)\, dx = 0, \tag{66.10}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = \\ = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \big(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\big)\, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi & (m = n). \end{cases} \tag{66.11}$$

Замечания.

1. Формулы (66.7)–(66.11) показывают, что семейство функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

обладает ***свойством ортогональности***: интеграл от произведения любых двух функций этого семейства на интервале, имеющем длину 2π, равен нулю.

2. Формулы (66.7)–(66.11) справедливы и в случае, когда область интегрирования есть отрезок $[0; 2\pi]$ (см. свойство 3 периодических функций, п. 66.1).

Пусть $f(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом 2π. Предположим, что функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд, т. е. $f(x)$ является суммой ряда (66.5):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{66.12}$$

Так как функция $f(x)$ (и сумма ряда) имеет период 2π, то ее можно рассматривать в любом промежутке длины 2π. В качестве основного промежутка возьмем отрезок $[-\pi; \pi]$ (также удобно взять отрезок $[0; 2\pi]$) и предположим, что ряд (66.12) на этом отрезке можно почленно интегрировать. Вычислим коэффициенты a_n и b_n. Для этого проинтегрируем обе части равенства (66.12) в пределах от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx \right) = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\, dx = \pi a_0.$$

Интегралы от всех, кроме нулевого, членов ряда равны нулю в силу формул (66.7) и (66.8).

Отсюда

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.} \tag{66.13}$$

Умножив обе части равенства (66.12) на $\cos mx$ и проинтегрировав полученный ряд в пределах от $-\pi$ до π, получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,dx +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\,dx\right).$$

В силу формул (66.7), (66.9) и (66.10) из последнего равенства при $m = n$ получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n\pi.$$

Отсюда

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots} \tag{66.14}$$

Аналогично, умножив равенство (66.12) на $\sin mx$ и проинтегрировав почленно на отрезке $[-\pi; \pi]$, найдем:

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots} \tag{66.15}$$

Числа a_0, a_n, b_n, определяемые по формулам (66.13)–(66.15), называются ***коэффициентами Фурье*** функции $f(x)$, а тригонометрический ряд (66.5) с такими коэффициентами — ***рядом Фурье*** функции $f(x)$.

Для интегрируемой на отрезке $[-\pi; \pi]$ функции $f(x)$ записывают

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

и говорят: функции $f(x)$ соответствует (поставлен в соответствие) ее ряд Фурье. Если ряд Фурье сходится, то его сумму обозначим $S(x)$.

§ 67. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

67.1. Теорема Дирихле

Выясним условия, при которых знак соответствия ($\sim$) можно заменить знаком равенства ($=$), т. е. условия, при которых ряд Фурье функции $f(x)$ сходится и имеет своей суммой как раз функцию $f(x)$.

Будем рассматривать функции $f(x)$, имеющие период $T = 2\pi$. Такие функции называют 2π-*периодическими*.

Сформулируем теорему, представляющую достаточное условие разложимости функции в ряд Фурье.

Теорема 67.1 (Дирихле). Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ удовлетворяет двум условиям:

1. $f(x)$ кусочно-непрерывна, т е непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода,

2. $f(x)$ кусочно-монотонна, т. е. монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

1. В точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x) = f(x)$,

2. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна
$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$
т. е. равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева;

3. В точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ (на концах отрезка) сумма ряда равна
$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Таким образом, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям 1 и 2 теоремы (*условия Дирихле*), то на отрезке $[-\pi; \pi]$ имеет место разложение (66.12):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

причем коэффициенты вычисляются по формулам (66.13)–(66.15). Это равенство может нарушиться только в точках разрыва функции $f(x)$ и на концах отрезка $[-\pi; \pi]$.

В силу периодичности исходной функции и суммы ряда Фурье может быть получено указанное разложение во всей области определения функции.

Замечания.

1. Если функция $f(x)$ с периодом 2π на отрезке $[0; 2\pi]$ удовлетворяет условиям Дирихле, то для нее имеет место разложение (66.12), где коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

(Интегралы $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ и $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx$ равны в силу свойства 3 периодической функции — см. п. 66.1.)

2. Условиям Дирихле удовлетворяют большинство функций, которые встречаются в математике и ее приложениях. Существуют функции, не удовлетворяющие условиям Дирихле, но при этом разложимые в ряд Фурье, т. е. теорема Дирихле дает лишь достаточное условие разложимости, но не необходимое.

Пример 67.1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ -x & \text{при } -\pi \leqslant x < 0. \end{cases}$$

○ Решение: На рисунке 260 изображен график функции $f(x)$. Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле, значит, она разложима в ряд Фурье. Находим коэффициенты ряда:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-x)\,dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x\,dx = \frac{3\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-x) \cos nx\,dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x \cos nx\,dx =$$

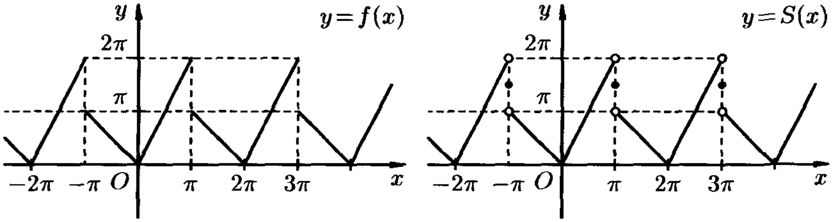


Рис. 260

$$\left(\text{интегрируем по частям: } \left[\begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx\,dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right]\right)$$

$$= \frac{-1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}\right) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2}(1 - \cos\pi n) + \frac{2}{\pi n^2}(\cos\pi n - 1) = -\frac{3}{\pi n^2}\big(1 - (-1)^n\big).$$

Аналогично находим

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \dots = \frac{1}{n}(-1)^{n+1}.$$

Исходной функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim S(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{3}{\pi n^2}\big(1 - (-1)^n\big)\cos nx + \frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin nx.$$

Функция $f(x)$ непрерывна во всех внутренних точкой отрезка $[-\pi;\pi]$, поэтому, согласно теореме Дирихле, для всех этих точек имеем равенство $f(x) = S(x)$, т. е.

$$f(x) = S(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right) +$$

$$+ \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \dots\right).$$

В точках $x = \pm\pi$ сумма $S(x)$ ряда равна

$$\frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2} = \frac{\pi + 2\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi.$$

Графики функций $f(x)$ и $S(x)$ показаны на рис. 260. ●

67.2. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Если разлагаемая на отрезке $[-\pi; \pi]$ в ряд Фурье функция $f(x)$ является четной или нечетной, то это отражается на формулах коэффициентов Фурье (вычисление их упрощается) и на виде самого ряда (он становится так называемым неполным).

Если функция $f(x)$ *четная*, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{67.1}$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx\,dx, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{67.2}$$

Если функция $f(x)$ *нечетная*, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{67.3}$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx\,dx, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{67.4}$$

❑ Как известно (см. п. 39.4), если функция $f(x)$ интегрируема на симметричном отрезке $[-a; a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2 \cdot \int_0^a f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция.} \end{cases} \tag{67.5}$$

Если функция $f(x)$ — четная, то $f(x)\cos nx$ — четная функция ($f(-x)\cos(-nx) = f(x)\cos nx$), а $f(x)\sin nx$ — нечетная функция ($f(-x)\sin(-nx) = -f(x)\sin nx$).

Если же $f(x)$ — нечетная функция, то, очевидно, функция $f(x)\cos nx$ — нечетная, а $f(x)\sin nx$ — четная.

С учетом формулы (67.5) из формул (66.13)–(66.15) получаем формулы (67.1)–(67.4). ■

Ряды (67.1) и (67.3) называются ***неполными*** тригонометрическими рядами, или рядами *по косинусам* и *по синусам* соответственно.

Пример 67.2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$, $x \in (-\pi; \pi)$, $T = 2\pi$.

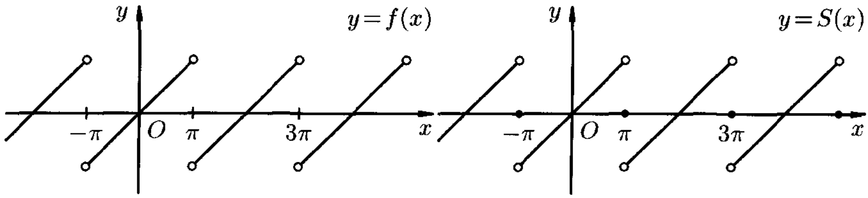


Рис. 261

◯ Решение: На рисунке 261 изображен график заданной функции. Условиям Дирихле функция $y = x$ удовлетворяет. Эта функция — нечетная. Следовательно, $a_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, а

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\right)\cos\pi n,$$

т. е. $b_n = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ряд Фурье содержит только синусы:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}\cdot\sin nx = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

При этом $S(\pm\pi) = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0$ (см. рис. 261). ●

67.3. Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода

Разлагать в ряд Фурье можно и периодические функции с периодом, отличным от 2π.

Пусть функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l; l]$, имеет период $2l$ $(f(x + 2l) = f(x)$, где l — произвольное положительное число) и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле.

Сделав подстановку $x = \frac{l}{\pi}t$, данную функцию $f(x)$ преобразуем в функцию $\varphi(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$, которая определена на отрезке $[-\pi; \pi]$ и имеет период $T = 2\pi$.

Действительно, если $t = -\pi$, то $x = -l$, если $t = \pi$, то $x = l$ и при $-\pi < t < \pi$ имеем $-l < x < l$;

$$\varphi(t + 2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(t + 2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi}t + 2l\right) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \varphi(t),$$

т. е. $\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t)$.

Разложение функции $\varphi(t)$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$ имеет вид

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+b_n\sin nt,$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt\quad(n=0,1,2,\ldots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,dt\quad(n=1,2,\ldots).$$

Возвращаясь к переменной x и заметив, что $t=\frac{\pi x}{l}$, $dt=\frac{\pi}{l}dx$, получим

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l},}\tag{67.6}$$

где

$$\boxed{\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx\quad(n=0,1,2,\ldots),\\ b_n&=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx\quad(n=1,2,\ldots).\end{aligned}}\tag{67.7}$$

Ряд (67.6) с коэффициентами, вычисляемыми по формулам (67.7), называется ***рядом Фурье** для **функции*** $f(x)$ с периодом $T=2l$.

Замечание. Все теоремы, имеющие место для рядов Фурье 2π-периодических функций, остаются в силе и для рядов Фурье функций, период которых $T=2l$. В частности, если $f(x)$ на отрезке $[-l;l]$ ***четная***, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l},\tag{67.8}$$

где

$$a_0=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx,\quad n=1,2,\ldots;\tag{67.9}$$

если $f(x)$ — ***нечетная*** функция, то

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l},\tag{67.10}$$

где

$$b_n=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx,\quad n=1,2,\ldots\tag{67.11}$$

Пример 67.3. Разложить функцию $f(x) = x$ на интервале $(-4; 4)$ в ряд Фурье.

○ Решение: Данная функция нечетная, удовлетворяет условиям Дирихле. По формулам (67.10) и (67.11), при $l = 4$, имеем:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{4},$$

где $b_n = \frac{2}{4}\int\limits_0^4 x \sin\frac{\pi n x}{4}\,dx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Вычисляем b_n:

$$b_n = \frac{1}{2}\left(-x\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{4}\Big|_0^4 + \frac{4}{\pi n}\cdot\frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{4}\Big|_0^4\right) =$$

$$= -\frac{8}{\pi n}\cos\pi n = \frac{8}{\pi n}\cdot(-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Таким образом,

$$x = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{4}}{1} - \frac{\sin\frac{2\pi x}{4}}{2} + \frac{\sin\frac{3\pi x}{4}}{3} - \ldots\right)$$

для $-4 < x < 4$. ●

67.4. Представление непериодической функции рядом Фурье

Пусть $y = f(x)$ — непериодическая функция, заданная на всей числовой оси $(-\infty < x < \infty)$.

Такая функция не может быть разложена в ряд Фурье, т. к. сумма ряда Фурье есть функция периодическая и, следовательно, не может быть равна $f(x)$ для всех x.

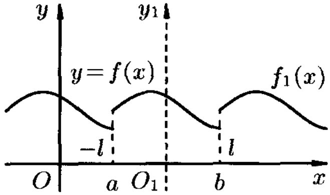


Рис. 262

Однако *непериодическая функция $f(x)$ может быть представлена в виде ряда Фурье* на любом *конечном промежутке* $[a; b]$, на котором она удовлетворяет условиям Дирихле. Для этого можно поместить начало координат в середину отрезка $[a; b]$ и построить функцию $f_1(x)$ периода $T = 2l = |b - a|$ такую, что $f_1(x) = f(x)$ при $-l \leqslant x \leqslant l$. На рисунке 262 приведена иллюстрация построения функции $f_1(x)$.

Разлагаем функцию $f_1(x)$ в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка $[a; b]$ (кроме точек разрыва) совпадает с заданной функцией $f(x)$. Вне этого промежутка сумма ряда и $f(x)$ являются совершенно различными функциями.

Пусть теперь непериодическую функцию $f(x)$ требуется разложить в ряд Фурье на отрезке $[0; l]$. (Это частный случай: начало координат перенесено в точку $x = a$ отрезка $[a; b]$; область определения функции $f(x)$ будет иметь вид $[0; l]$, где $l = |b - a|$.)

Такую функцию можно произвольным образом доопределить на отрезке $[-l; 0]$, а затем осуществить ее периодическое продолжение с периодом $T = 2l$. Разложив в ряд Фурье на отрезке $[-l; l]$ полученную таким образом периодическую функцию $f_1(x)$, получим искомый ряд для функции $f(x)$ при $x \in [0; l]$.

В частности, функцию $f(x)$ можно доопределить на отрезке $[-l; 0]$ четным образом (т. е. чтобы при $-l \leqslant x \leqslant 0$ было $f(x) = f(-x)$) — см. рис. 263. В этом случае функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье, который содержит только косинусы (см. формулы (67.8) и (67.9)).

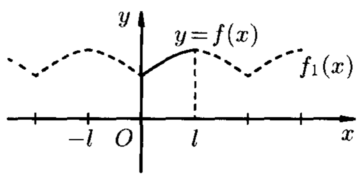


Рис. 263

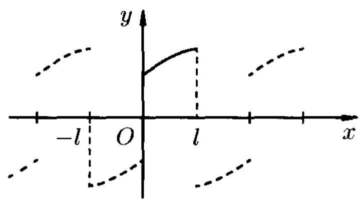


Рис. 264

Если же функцию $f(x)$ продолжить на отрезок $[-l; 0]$ нечетным образом (см. рис. 264), то она разлагается в ряд, состоящий только из синусов (см. формулы (67.10) и (67.11)).

Ряд косинусов и ряд синусов для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0; l]$, имеют одну и ту же сумму. Если x_0 — точка разрыва функции $f(x)$, то сумма как одного, так и другого ряда равна одному и тому же числу: $S(x_0) = \dfrac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$.

Замечание. Все, что было сказано о разложении в ряд Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[0; l]$, переносится практически без изменения на случай, когда функция задана на отрезке $[0; \pi]$; такую функцию можно разложить как в ряд косинусов, так и в ряд синусов (формулы (67.1) и (67.3)).

Пример 67.4. Разложить в ряд косинусов функцию $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$, $0 < x < \pi$.

○ Решение: Продолжим функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi; 0]$ четным образом (см. рис. 265). Разлагаем в ряд функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, & 0 < x < \pi, \\ \dfrac{\pi + x}{2}, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

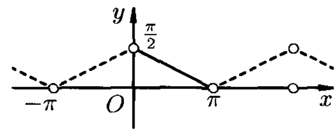


Рис. 265

с периодом $T = 2\pi$. Условиям теоремы Дирихле функция $f_1(x)$ удовлетворяет. Используя формулы (67.1) и (67.2), находим:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi - x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi - x}{2}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n^2}(1 - \cos\pi n).$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right),$$

где $0 < x < \pi$ $\left(\text{при этом } S(0) = \dfrac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi}{2},\ S(\pm\pi) = \dfrac{0+0}{2} = 0\right)$. ●

67.5. Комплексная форма ряда Фурье

Ряды Фурье часто применяются в комплексной форме записи. Преобразуем ряд (66.12) и его коэффициенты (66.13)–(66.15) к комплексной форме. Для этого используем формулы Эйлера, выражающие косинус и синус через показательную функцию:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

(из формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и вытекающего из нее равенства $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ находим, что $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$). Подставив эти выражения в ряд (66.12), находим:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n\cdot\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n\cdot\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a_n - ib_n)e^{inx}}{2} + \frac{(a_n + ib_n)e^{-inx}}{2} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}, \quad (67.12)$$

где обозначено $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$.

Найдем выражения для комплексных коэффициентов c_n и c_{-n}. Используя выражения для a_n и b_n (формулы (66.14) и (66.15)), получим:

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,$$

т. е.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{67.13}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \tag{67.14}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx + i\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx \quad (n = 1, 2, 3\ldots). \tag{67.15}$$

Таким образом, формулу (67.12) можно записать в виде

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}, \quad \text{или} \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \tag{67.16}$$

Коэффициенты этого ряда, согласно формулам (67.13)–(67.15), можно записать в виде

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots). \tag{67.17}$$

Равенство (67.16) называется ***комплексной формой ряда Фурье функции*** $f(x)$, а числа c_n, найденные по формуле (67.17), — ***комплексными коэффициентами ряда Фурье***.

Если функция $f(x)$ задается на отрезке $[-l; l]$, то комплексная форма ее ряда Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}, \quad c_n = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{l}}dx \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots). \tag{67.18}$$

Как видим, комплексная форма ряда Фурье (и коэффициентов) более компактна, чем обыкновенный ряд Фурье.

В электротехнике и радиотехнике члены ряда $c_n e^{i\frac{\pi n x}{l}}$ называются *гармониками*, коэффициенты c_n — *комплексными амплитудами* гармоник, а числа $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — *волновыми числами* функции $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}$.

Совокупность величин $\{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$ называется *амплитудным спектром.*

Графически амплитудный спектр изображается в виде вертикальных отрезков длиной c_n, расположенных в точках $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$ числовой оси.

Пример 67.5. Построить ряд Фурье в комплексной форме для 2-периодической функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0), \\ 1 & x \in [0; 1], \end{cases} \qquad T = 2.$$

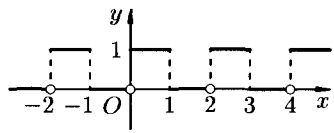


Рис 266

Решение: На рисунке 266 изображен график функции $f(x)$. По формулам (67.18) находим ($l = 1$):

$$c_n = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 e^{-i\pi n x} dx = -\frac{e^{-i\pi n x}}{2\pi n i}\Bigg|_0^1 = \frac{-1}{2\pi n i}\left(e^{-i\pi n} - 1\right) =$$

$$= \frac{i}{2\pi n}(\cos \pi n - i \sin \pi n - 1) = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n} i, \quad n \neq 0; \quad c_0 = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, для всех точек непрерывности функции $f(x)$ справедливо равенство

$$f(x) = \frac{1}{2} + i \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n} e^{i\pi n x} =$$

$$= \frac{1}{2} - i\left(\frac{e^{i\pi x}}{\pi} + \frac{e^{-\pi x}}{\pi} + \frac{e^{3i\pi x}}{3\pi} + \frac{e^{-3i\pi x}}{3\pi} + \ldots\right)$$

$\left(S(0) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2},\ S(\pm 1) = \frac{1+1}{2} = 1, \text{ на графике } S(x) \text{ не отмечена}\right)$.

§ 68. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Как известно, всякую (периодическую или непериодическую) функцию $f(x)$, удовлетворяющую на отрезке $[-l; l]$ условиям теоремы

Дирихле, можно разложить в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\omega_n x + b_n \sin\omega_n x, \tag{68.1}$$

где $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_n t\,dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\omega_n t\,dt \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \tag{68.2}$$

Это разложение будет справедливым на всей числовой оси Ox в том случае, когда $f(x)$ — периодическая функция с периодом $T = 2l$.

Рассмотрим случай, когда $f(x)$ — непериодическая функция, заданная на бесконечном промежутке $(-\infty; \infty)$ (т. е. $l = +\infty$).

Будем предполагать, что на любом конечном промежутке $[-l; l]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле и что сходится следующий несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = M < \infty.$$

Говорят: $f(x)$ *абсолютно интегрируема* на всей числовой оси.

Подставляя в ряд (68.1) значения коэффициентов a_n и b_n (68.2), получим:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)(\cos\omega_n t\cdot\cos\omega_n x + \sin\omega_n t\cdot\sin\omega_n x)\,dt,$$

т. е.

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t - x)\,dt. \tag{68.3}$$

Будем теперь неограниченно увеличивать l. Первое слагаемое в правой части равенства (68.3) при $l \to +\infty$ стремится к нулю, т. к.

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} |f(t)|dt \leqslant \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt = \frac{M}{2l} \to 0.$$

Рассмотрим второе слагаемое в равенстве (68.3). Величина $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$ принимает значения $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$, $\omega_2 = \frac{2\pi}{l}$, $\omega_3 = \frac{3\pi}{l}$, ..., образующие бесконечную арифметическую прогрессию с разностью $\Delta\omega_n = \frac{\pi}{l}$

($\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$), при этом $\Delta\omega_n \to 0$ при $l \to +\infty$. Итак,

$$\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt\cdot\frac{\pi}{l} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt\Bigr)\Delta\omega_n = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(\omega_n)\cdot\Delta\omega_n,$$

где $\varphi(\omega_n) = \int\limits_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt$, $\omega_n = \frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \ldots, \frac{n\pi}{l}, \ldots$

Полученная сумма напоминает интегральную сумму для функции

$$\varphi(\omega) = \int\limits_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega(t-x)\,dt, \quad \omega\in(0;+\infty)$$

(доказывается, что так оно и есть), поэтому, переходя в равенстве (68.3) к пределу при $l \to +\infty$, получаем

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(\omega_n)\Delta\omega_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(\omega)\,d\omega,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt \tag{68.4}$$

Формула (68.4) называется ***формулой Фурье***, а интеграл в правой части формулы — ***интегралом Фурье*** для функции $f(x)$.

Формула Фурье имеет место в точках непрерывности функции $f(x)$; в точках разрыва данной функции интеграл Фурье равен среднему арифметическому ее односторонних пределов:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Формулу (68.4) можно переписать в другом виде (в виде однократного интеграла):

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\bigl(\cos\omega t\cdot\cos\omega x + \sin\omega t\cdot\sin\omega x\bigr)dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty}d\omega\Bigl(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt\cdot\cos\omega x + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\cdot\sin\omega x\Bigr),$$

т. е.

$$\boxed{f(x) = \int\limits_0^\infty \big(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\big)\,d\omega,} \tag{68.5}$$

где

$$\boxed{\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt,\\ B(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt. \end{aligned}}$$

Как видно, есть аналогия между рядом Фурье и интегралом Фурье. в обоих случаях функция $f(x)$ раскладывается на сумму гармонических составляющих. Однако, ряд Фурье суммируется по индексу n, принимающему дискретные значения $n = 1, 2, 3, \ldots$, в интеграле Фурье производится интегрирование по непрерывной переменной ω.

Некоторые сведения, связанные с интегралом Фурье, изложим в виде замечаний.

Замечания.

1. Если функция $f(x)$ - *четная*, то формула Фурье (68.5) принимает вид

$$f(x) = \int\limits_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\,d\omega, \quad \text{где} \quad A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(t)\cos\omega t\,dt; \tag{68.6}$$

в случае нечетной функции —

$$f(x) = \int\limits_0^\infty B(\omega)\sin\omega x\,d\omega, \quad \text{где} \quad B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(t)\sin\omega t\,dt. \tag{68.7}$$

2. Если функция $f(x)$ задана лишь на промежутке $(0; +\infty)$, то ее можно продолжить на промежуток $(-\infty; 0)$ разными способами, в частности — четным или нечетным образом: в первом случае она будет представлена формулой (68.6), во втором — формулой (68.7).

3 Формулу Фурье (68.5) можно представить в симметричной форме записи, если положить в формулах (68.6) и (68.7) $A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\widetilde{A}(\omega)$, $B(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\widetilde{B}(\omega)$. В случае четной функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \widetilde{A}(\omega)\cos\omega x\,d\omega, \quad \text{где} \quad \widetilde{A}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(t)\cos\omega t\,dt;$$

в случае нечетной функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \widetilde{B}(\omega)\sin\omega x\,d\omega, \quad \text{где} \quad \widetilde{B}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(t)\sin\omega t\,dt.$$

Функции $\widetilde{A}(\omega)$ и $\widetilde{B}(\omega)$ называются соответственно ***косинус-преобразованием*** и ***синус-преобразованием Фурье*** для функции $f(x)$.

4. *Интеграл Фурье* (68.4) *в комплексной форме* имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt;$$

интеграл Фурье (68.5) имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

где $c(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$; или в симметричной форме записи

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{c}(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

где

$$\widetilde{c}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$(c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widetilde{c}(\omega))$.

Пример 68.1. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \in (0; +\infty), \\ 0, & x = 0, \\ e^{x}, & x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

Решение: Функция удовлетворяет условиям представимости интегралом Фурье, абсолютно интегрируема на промежутке $(-\infty; +\infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{x} dx + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = 2.$$

Функция нечетная, применим формулу (68.7):

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t} \sin \omega t\, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega}{1+\omega^2}.$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\omega}{1+\omega^2} \cdot \sin \omega x\, d\omega, \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty). \qquad \bullet$$

Замечание. Интересно отметить, что если $x = 1$, то

$$f(1) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\omega \sin \omega}{1+\omega^2}\, d\omega.$$

С другой стороны, $f(1) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. Таким образом,

$$\int\limits_0^\infty \frac{y \sin y}{1+y^2}\, dy = f(1) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2e}.$$

Иными словами, при помощи представления функций интегралом Фурье иногда можно вычислить величины несобственных интегралов.

Глава XVI. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Лекции 59–62

§ 69. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Теория поля — крупный раздел физики, механики, математики, в котором изучаются скалярные, векторные, тензорные поля.

К рассмотрению скалярных и векторных полей приводят многие задачи физики, электротехники, математики, механики и других технических дисциплин. Изучение одних физических полей способствует изучению и других. Так, например, силы всемирного тяготения, магнитные, электрические силы — все они изменяются обратно пропорционально квадрату расстояния от своего источника; диффузия в растворах происходит по законам, общим с распространением тепла в различных средах; вид силовых магнитных линий напоминает картину обтекания препятствий жидкостью и т. д.

Математическим ядром теории поля являются такие понятия, как градиент, поток, потенциал, дивергенция, ротор, циркуляция и другие. Эти понятия важны и в усвоении основных идей математического анализа функций многих переменных.

Полем называется область V пространства, в каждой точке которой определено значение некоторой величины. Если каждой точке M этой области соответствует определенное число $U = U(M)$, говорят, что в области определено (задано) ***скалярное поле*** (или ***функция точки***). Иначе говоря, скалярное поле — это скалярная функция $U(M)$ вместе с ее областью определения. Если же каждой точке M области пространства соответствует некоторый вектор $\bar{a} = \bar{a}(M)$, то говорят, что задано ***векторное поле*** (или *векторная функция точки*).

Примерами скалярных полей могут быть поля температуры (воздуха, тела, ...), атмосферного давления, плотности (массы, воздуха, ...), электрического потенциала и т. д. Примерами векторных полей являются поле силы тяжести, поле скоростей частиц текущей жидкости (ветра), магнитное поле, поле плотности электрического тока и т. д.

Если функция $U(M)$ ($\bar{a}(M)$) не зависит от времени, то скалярное (векторное) поле называется *стационарным* (или установившимся), поле, которое меняется с течением времени (меняется, например, скалярное поле температуры при охлаждении тела), называется *нестационарным* (или неустановившимся).

Далее будем рассматривать только стационарные поля.

Если V — область трехмерного пространства, то скалярное поле U можно рассматривать как функцию трех переменных x, y, z (координат точки M):

$$U = U(x; y; z). \tag{69.1}$$

(Наряду с обозначениями $U = U(M)$, $U = U(x; y; z)$, используют запись $U = U(\bar{r})$, где $\bar{r}$ — радиус-вектор точки M.)

Если скалярная функция $U(M)$ зависит только от двух переменных, например x и y, то соответствующее скалярное поле $U(x; y)$ называют *плоским*.

Аналогично: вектор $\bar{a} = \bar{a}(M)$, определяющий векторное поле, можно рассматривать как векторную функцию трех скалярных аргументов x, y и z: $\bar{a} = \bar{a}(x; y; z)$ (или $\bar{a} = \bar{a}(\bar{r})$).

Вектор $\bar{a} = \bar{a}(M)$ можно представить (разложив его по ортам координатных осей) в виде

$$\bar{a} = P(x; y; z)\bar{i} + Q(x; y; z)\bar{j} + R(x; y; z)\bar{k},$$

где $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$, $R(x; y; z)$ — проекции вектора $\bar{a}(M)$ на оси координат. Если в выбранной системе координат $Oxyz$ одна из проекций вектора $\bar{a} = \bar{a}(M)$ равна нулю, а две другие зависят только от двух переменных, то векторное поле называется *плоским*. Например, $\bar{a} = P(x; y)\bar{i} + Q(x; y)\bar{j}$.

Векторное поле называется *однородным*, если $\bar{a}(M)$ — постоянный вектор, т. е. P, R и Q — постоянные величины. Таким полем является поле тяжести. Здесь $P = 0$, $Q = 0$, $R = -mg$, g — ускорение силы тяжести, m — масса точки.

В дальнейшем будем предполагать, что скалярные функции ($U(x; y; z)$ — определяющая скалярное поле, $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$ и $R(x; y; z)$ — задающие векторное поле) непрерывны вместе со своими частными производными.

Пример 69.1. Функция $U = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ определяет скалярное поле в точках пространства, ограниченного сферой с центром в начале координат и радиусом $R = 1$; скалярное поле $U = \dfrac{z}{x^2 + y^2}$ определено во всем пространстве, за исключением точек оси Oz (на ней $x^2 + y^2 = 0$).

Пример 69.2. Найти поле линейной скорости $\bar{V}$ материальной точки M, вращающейся против часовой стрелки с угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг оси Oz (см. п. 7.4).

Решение: Угловую скорость представим в виде вектора $\bar{\omega}$, лежащего на оси Oz, направленного вверх. Имеем:

$$\bar{\omega} = (0; 0; \omega) \quad (\bar{\omega} = \omega\bar{k}).$$

Построим радиус-вектор $\bar{r} = (x; y; z)$ точки M (см. рис. 267).

Численное значение линейной скорости $\bar{V}$ (модуль), как известно из курса физики, равно $\omega\rho$, где ρ — расстояние вращающейся точки

$M(x;y;z)$ от оси вращения (оси Oz).Но $\rho = r\sin\varphi$ (φ — угол между вектором $\bar{r}$ и осью Oz). Следовательно, $V = \omega\rho = \omega \cdot r \cdot \sin\varphi$, т. е. $V = |\bar{\omega} \times \bar{r}|$.

Вектор скорости $\overline{V}$ направлен в сторону вращения, совпадает с направлением векторного произведения $\bar{\omega} \times \bar{r}$ ($\overline{V} \perp \bar{r}$, $\overline{V} \perp \bar{\omega}$, векторы $\bar{\omega}$, $\bar{r}$, $\overline{V}$ образуют правую тройку). Следовательно, $\overline{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}$, т. е.

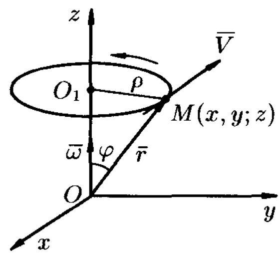


Рис 267

$$\overline{V} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\bar{i} + \omega x\bar{j} + 0 \cdot \bar{k}$$

или $\overline{V} = (-\omega y; \omega x; 0)$.

Поле линейных скоростей $\overline{V}$ тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, есть плоское векторное поле. ●

§ 70. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

70.1. Поверхности и линии уровня

Рассмотрим скалярное поле, задаваемое функцией $U = U(x;y;z)$. Для наглядного представления скалярного поля используют поверхности и линии уровня.

Поверхностью уровня скалярного поля называется геометрическое место точек, в которых функция $U(M)$ принимает постоянное значение, т. е.

$$U(x;y;z) = c. \tag{70.1}$$

Давая в уравнении (70.1) величине c различные значения, получим различные поверхности уровня, которые в совокупности как бы расслаивают поле. Через каждую точку поля проходит только одна поверхность уровня. Ее уравнение можно найти путем подстановки координат точки в уравнение (70.1).

Для скалярного поля, образованного функцией

$$U = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2},$$

поверхностями уровня является множество концентрических сфер с центрами в начале координат: $\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} = c$. В частности, при $c = 1$ получим $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, т. е. сфера стягивается в точку.

Для равномерно раскаленной нити поверхности уровня температурного поля (изотермические поверхности) представляют собой круговые цилиндры, общей осью которых служит нить.

В случае плоского поля $U = U(x;y)$ равенство $U(x;y) = c$ представляет собой уравнение **_линии уровня_** поля, т. е. линия уровня —

это линия на плоскости Oxy, в точках которой функция $U(x;y)$ сохраняет постоянное значение.

В метеорологии, например, сети изобар и изотерм (линии одинаковых средних давлений и одинаковых средних температур) являются линиями уровня и представляют собой функции координат точек местности.

Линии уровня применяются в математике при исследовании поверхностей методом сечений (см. п. 12.9).

70.2. Производная по направлению

Для характеристики скорости изменения поля $U = U(M)$ в заданном направлении введем понятие «производной по направлению».

Возьмем в пространстве, где задано поле $U = U(x;y,z)$, некоторую точку M и найдем скорость изменения функции U при движении точки M в произвольном направлении $\bar{\lambda}$. Пусть вектор $\bar{\lambda}$ имеет начало в точке M и направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

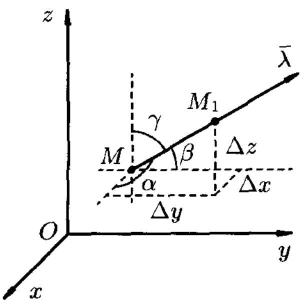


Рис. 268

Приращение функции U, возникающее при переходе от точки M к некоторой точке M_1 в направлении вектора $\bar{\lambda}$ определяется как

$$\Delta U = U(M_1) - U(M),$$

или

$$\Delta U = U(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z) - U(x, y; z)$$

(см. рис. 268). Тогда

$$\Delta\lambda = |MM_1| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Производной от функции $U = U(M)$ ***в точке*** M ***по направлению*** $\bar{\lambda}$ называется предел

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta \lambda} = \lim_{M_1 \to M} \frac{U(M_1) - U(M)}{|MM_1|}.$$

Производная по направлению $\bar{\lambda}$ и характеризует скорость изменения функции (поля) в точке M по этому направлению. Если $\frac{\partial U}{\partial \lambda} > 0$, то функция U возрастает в направлении $\bar{\lambda}$, если $\frac{\partial U}{\partial \lambda} < 0$, то функция U в направлении $\bar{\lambda}$ убывает. Кроме того, величина $\left|\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|$ представляет собой мгновенную скорость изменения функции U в направлении $\bar{\lambda}$ в точке M: чем больше $\left|\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|$, тем быстрее изменяется функция U. В этом состоит физический смысл производной по направлению.

Выведем формулу для вычисления производной по направлению, считая, что функция $U(x;y;z)$ дифференцируема в точке M. Тогда ее полное приращение в этой точке M можно записать так:

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\Delta z + \xi_1\Delta x + \xi_2\Delta y + \xi_3\Delta z,$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — бесконечно малые функции при $\Delta\lambda \to 0$ (см. п. 44.3).

Поскольку $\Delta x = \Delta\lambda\cos\alpha$, $\Delta y = \Delta\lambda\cos\beta$, $\Delta z = \Delta\lambda\cos\gamma$, то

$$\frac{\Delta U}{\Delta\lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma + \xi_1\cos\alpha + \xi_2\cos\beta + \xi_3\cos\gamma$$

Переходя к пределу при $\Delta\lambda \to 0$, получим формулу для вычисления производной по направлению:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial\lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma} \qquad (70\ 2)$$

В случае плоского поля $U = U(x;y)$ имеем· $\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$, $\cos\gamma = 0$. Формула (70 2) принимает вид.

$$\frac{\partial U}{\partial\lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\sin\alpha.$$

Замечание Понятие производной по направлению является обобщением понятия частных производных $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ Их можно рассматривать как производные от функции u по направлению координатных осей Ox, Oy и Oz. Так, если направление $\bar{\lambda}$ совпадает с положительным направлением оси Ox, то, положив в формуле (70.2) $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, получим $\frac{\partial U}{\partial\lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}$.

Пример 70.1. Найти производную функции $U = x^2 + y^2 - 4yz$ в точке $M(0;1;2)$ в направлении от этой точки к точке $M_1(2;3;3)$.

Решение: Находим вектор $\overline{MM_1}$ и его направляющие косинусы:

$$\overline{MM_1} = (2;2;1), \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}, \quad \cos\beta = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

Находим частные производные функции и вычисляем их значения в точке M:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2y - 4z, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -4y,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_M = 2\cdot 0 = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_M = 2 - 4\cdot 2 = -6, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_M = -4.$$

Следовательно, по формуле (70.2) имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda}\bigg|_M = 0 \cdot \frac{2}{3} - 6 \cdot \frac{2}{3} - 4 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{16}{3}.$$

Поскольку $\frac{\partial U}{\partial \lambda} < 0$, то заданная функция в данном направлении убывает. ●

70.3. Градиент скалярного поля и его свойства

В каком направлении $\bar{\lambda}$ производная $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$ имеет наибольшее значение? Это направление указывает вектор, называемый градиентом скалярного поля.

Можно заметить, что правая часть равенства (70.2) представляет собой скалярное произведение единичного вектора

$$\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$$

и некоторого вектора $\bar{g} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z}\right)$.

Вектор, координатами которого являются значения частных производных функции $U(x; y; z)$ в точке $M(x; y; z)$, называют ***градиентом функции*** и обозначают $\operatorname{grad} U$, т. е. $\operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z}\right)$, или

$$\boxed{\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}.}$$

Отметим, что $\operatorname{grad} U$ есть векторная величина. Говорят: скалярное поле U порождает векторное поле градиента U. Теперь равенство (70.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \bar{e} \cdot \operatorname{grad} U,$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = |\operatorname{grad} U| \cdot \cos\varphi, \qquad (70.3)$$

где φ — угол между вектором $\operatorname{grad} U$ и направлением $\bar{\lambda}$ (см. рис. 269).

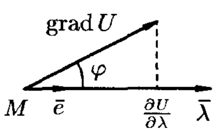


Рис. 269

Из формулы (70.3) сразу следует, что производная по направлению достигает наибольшего значения, когда $\cos\varphi = 1$, т. е. при $\varphi = 0$. Таким образом, направление градиента совпадает с направлением $\bar{\lambda}$, вдоль которого функция (поле) меняется быстрее всего, т. е. *градиент функции указывает направление наибыстрейшего возрастания функции.* Наибольшая скорость изменения функции U в точке M равна

$$|\operatorname{grad} U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

В этом состоит физический смысл градиента. На указанном свойстве градиента основано его широкое применение в математике и других дисциплинах.

Приведем важные *свойства градиента* функции.

1. Градиент направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку.

❑ Действительно, по любому направлению вдоль поверхности уровня $(U = c)$ $\frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0$. Но тогда из (70.3) следует, что $\cos\varphi = 0$, т. е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$. ■

2. $\operatorname{grad}(U + V) = \operatorname{grad} U + \operatorname{grad} V$,

3. $\operatorname{grad}(c \cdot U) = c \cdot \operatorname{grad} U$, $c = \mathrm{const}$,

4. $\operatorname{grad}(U \cdot V) = U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U$,

5. $\operatorname{grad}(\frac{U}{V}) = \dfrac{V \operatorname{grad} U - U \operatorname{grad} V}{V^2}$,

6. $\operatorname{grad} F(U) = \dfrac{\partial f}{\partial U} \operatorname{grad} U$.

❑ Доказываются эти свойства на основании определения градиента. Докажем, например, последнее свойство. Имеем:

$$\operatorname{grad} f(U) = \frac{\partial}{\partial x}(f(U))\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}(f(U))\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}(f(U))\bar{k} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \bar{k} = \frac{\partial f}{\partial U} \cdot \operatorname{grad} U. \quad ■$$

Замечание. Приведенные свойства градиента функции остаются справедливыми и для плоского поля.

Пример 70.2. Найти наибольшую скорость возрастания функции $U = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ в точке $A(-1; 1; -1)$.

❍ Решение: Имеем:

$$\operatorname{grad} U = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)\bar{i} + \left(\frac{-x}{y^2} + \frac{1}{z}\right)\bar{j} + \left(\frac{-y}{z^2} + \frac{1}{x}\right)\bar{k};$$
$$\operatorname{grad} U(-1; 1; -1) = 2\bar{i} + 0\bar{j} - 2\bar{k} = 2\bar{i} - 2\bar{k}.$$

Наибольшая скорость возрастания функции равна

$$|\operatorname{grad} U(A)| = \sqrt{4 + 0 + 4} = 2\sqrt{2}.$$

Отметим, что функция U будет убывать с наибольшей скоростью $(2\sqrt{2})$, если точка A движется в направлении $-\operatorname{grad} U(A) = -2\bar{i} + 2\bar{k}$ (антиградиентное направление). ●

§ 71. ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

71.1. Векторные линии поля

Рассмотрим векторное поле, задаваемое вектором $\bar{a} = \bar{a}(M)$. Изучение поля удобно начинать с понятия векторных линий; они являются простейшими геометрическими характеристиками поля.

Векторной линией поля $\bar{a}$ называется линия, касательная к которой в каждой ее точке M имеет направление соответствующего ей вектора $\bar{a}(M)$.

Это понятие для конкретных полей имеет ясный физический смысл. Например, в поле скоростей текущей жидкости векторными линиями будут линии, по которым движутся частицы жидкости (линии тока), для магнитного поля векторными (силовыми) линиями будут линии, выходящие из северного полюса и оканчивающиеся в южном.

Совокупность всех векторных линий поля, проходящих через некоторую замкнутую кривую, называется *векторной трубкой*.

Изучение векторного поля обычно начинают с изучения расположения его векторных линий. Векторные линии поля

$$\bar{a} = P(x;y;z)\bar{i} + Q(x;y;z)\bar{j} + R(x;y;z)\bar{k} \tag{71.1}$$

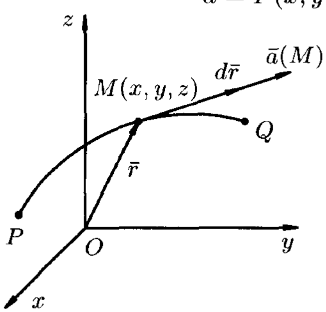


Рис. 270

описываются системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{P(x;y;z)} = \frac{dy}{Q(x;y;z)} = \frac{dz}{R(x;y;z)}. \tag{71.2}$$

☐ Действительно, пусть PQ — векторная линия поля, $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ — ее радиус-вектор. Тогда вектор $d\bar{r} = dx \cdot \bar{i} + dy \cdot \bar{j} + dz \cdot \bar{k}$ направлен по касательной к линии PQ в точке M (см. рис. 270).

В силу коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $d\bar{r}$ следует пропорциональность их проекций, т. е. равенства (71.2). ■

Пример 71.1. Найти векторные линии поля линейных скоростей тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг оси Oz.

○ Решение: Это поле определено вектором $\bar{V} = -\omega y\bar{i} + \omega x\bar{j}$ (см. пример 69.2). Согласно (71.2), имеем:

$$\frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x} = \frac{dz}{0} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \omega x\, dx = -\omega y\, dy, \\ 0 \cdot dy = \omega x\, dz. \end{cases}$$

Интегрируя, получим: $\begin{cases} x^2+y^2=c_1, \\ z=c_2, \end{cases}$ т. е. векторные линии данного поля представляют собой окружности с центрами на оси Oz, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к этой оси. ●

71.2. Поток поля

Пусть векторное поле образовано вектором (71.1). Для наглядности будем считать $\bar{a}(M)$ вектором скорости некоторого потока жидкости, движущейся стационарно. Представим, что некоторая поверхность S находится в этом потоке и пропускает жидкость. Подсчитаем, какое количество жидкости протекает через поверхность S.

Выберем определенную сторону поверхности S. Пусть $\bar{n}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$ — единичный вектор нормали к рассматриваемой стороне поверхности S. Разобьем поверхность на элементарные площадки $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Выберем в каждой площадке точку M_i $(i=1,2,\ldots,n)$ (см. рис. 271) и вычислим значения вектора скорости $\bar{a}(M)$ в каждой точке: $\bar{a}(M_1)$, $\bar{a}(M_2), \ldots, \bar{a}(M_n)$.

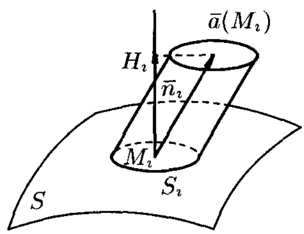


Рис. 271

Будем приближенно считать каждую площадку плоской, а вектор $\bar{a}$ постоянным по модулю и одинаково направленным в каждой точке площадки. Тогда за единицу времени через S_i протекает количество жидкости, приближенно равное $K_i \approx H_i \cdot \Delta S_i$, где ΔS_i — площадь i-й площадки, H_i — высота i-го цилиндра с образующей $\bar{a}(M_i)$. Но H_i является проекцией вектора $\bar{a}(M_i)$ на нормаль $\bar{n}_i$: $H_i = \text{пр}_{\bar{n}_i}\bar{a}(M_i) = \bar{a}(M_i)\cdot\bar{n}_i$, где $\bar{n}_i$ — единичный вектор нормали к поверхности в точке M_i. Следовательно, общее количество жидкости, протекающее через всю поверхность S за единицу времени, найдем, вычислив сумму

$$K \approx \sum_{i=1}^{n} \bar{a}(M_i)\cdot\bar{n}_i\cdot\Delta S_i.$$

Точное значение искомого количества жидкости получим, взяв предел найденной суммы при неограниченном увеличении числа элементарных площадок и стремлении к нулю их размеров (диаметров d_i площадок):

$$K = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \bar{a}(M_i)\cdot\bar{n}_i\cdot\Delta S_i = \iint\limits_S \bar{a}(M)\cdot\bar{n}\cdot ds.$$

Независимо от физического смысла поля $\bar{a}(M)$ полученный интеграл называют потоком векторного поля.

Потоком вектора $\bar{a}$ ***через поверхность*** S называется интеграл по поверхности от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности, т. е.

$$K = \iint\limits_S \bar{a}\bar{n}\,ds. \tag{71.3}$$

Рассмотрим различные формы записи потока вектора. Так как

$$\bar{a}\cdot\bar{n} = |\bar{n}|\cdot \text{пр}_{\bar{n}}\bar{a} = \text{пр}_{\bar{n}}\bar{a} = a_n$$

(см. (6.2)), то

$$K = \iint\limits_S a_n\,ds, \tag{71.4}$$

где a_n — проекция вектора $\bar{a}$ на направление нормали $\bar{n}$, ds – дифференциал (элемент) площади поверхности.

Иногда формулу (71.3) записывают в виде

$$K = \iint\limits_S \bar{a}\,\overline{ds},$$

где вектор $\overline{ds}$ направлен по нормали к поверхности, причем $|\overline{ds}| = ds$.

Так как $\bar{n} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, $\bar{a} = (P; Q; R)$, где $P = P(x;y;z)$, $Q = Q(x;y;z)$, $R = R(x;y;z)$ — проекции вектора $\bar{a}$ на соответствующие координатные оси, то поток (71.3) вектора $\bar{a}$, можно записать в виде

$$K = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds.$$

Используя взаимосвязь поверхностных интегралов I и II рода (см. формулу (58.8)), поток вектора можно записать как

$$\boxed{K = \iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy.} \tag{71.5}$$

Отметим, что поток K вектора $\bar{a}$ есть скалярная величина. Величина K равна объему жидкости, которая протекает через поверхность S за единицу времени. В этом состоит физический смысл потока (независимо от физического смысла поля).

Особый интерес представляет случай, когда поверхность замкнута и ограничивает некоторый объем V. Тогда поток вектора записывается в виде $K = \oiint\limits_S \bar{a}\bar{n}\,ds$ $\left(\text{иногда } \oint\limits_S \bar{a}\bar{n}\,ds \text{ или } \oint\limits_S a_n\,ds, \ldots\right)$.

В этом случае за направление вектора $\bar{n}$ обычно берут направление внешней нормали и говорят о потоке изнутри поверхности S (см. рис. 272).

Если векторное поле $\bar{a} = \bar{a}(M)$ есть поле скоростей текущей жидкости, то величина потока K через замкнутую поверхность дает разность между количеством жидкости, вытекающей из области V (объема V) и втекающей в нее за единицу времени (в точках поверхности S, где векторные линии выходят из объема V, внешняя нормаль образует с вектором $\bar{a}$ острый угол и $\bar{a} \cdot \bar{n} > 0$; в точках, где векторные линии входят в объем, $\bar{a} \cdot \bar{n} < 0$).

При этом если $K > 0$, то из области V вытекает больше жидкости, чем в нее втекает. Это означает, что внутри области имеются дополнительные *источники*.

Если $K < 0$, то внутри области V имеются *стоки*, поглощающие избыток жидкости.

Можно сказать, что источники — точки, откуда векторные линии начинаются, а стоки — точки, где векторные линии кончаются. Так, в электростатическом поле источником является положительный заряд, стоком — отрицательный заряд магнита (см. рис. 273).

Если $K = 0$, то из области V вытекает столько же жидкости, сколько в нее втекает в единицу времени; внутри области либо нет ни источников, ни стоков, либо они таковы, что их действие взаимно компенсируется.

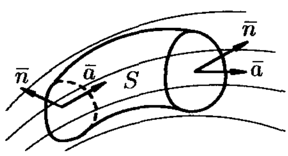


Рис. 272

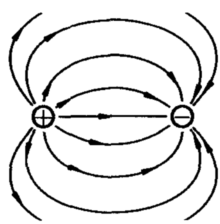


Рис. 273

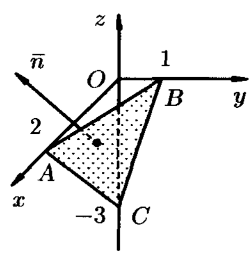


Рис. 274

Пример 71.2. Найти поток вектора $\bar{a} = z \cdot \bar{i} - x \cdot \bar{j} + y \cdot \bar{k}$ через верхнюю сторону треугольника, полученного при пересечении плоскости $3x + 6y - 2z - 6 = 0$ с координатными плоскостями (см. рис. 274).

◯ Решение: Поток найдем методом проектирования на три координатные плоскости. Для этого воспользуемся формулой (71.5). В нашем случае $P = z$, $Q = -x$, $R = y$. Имеем:

$$K = \iint\limits_S z\,dy\,dz - x\,dx\,dz + y\,dx\,dy.$$

Расчленим этот поверхностный интеграл на три слагаемых, затем сведем их вычисление к вычислению двойных интегралов. Нормаль к верхней стороне треугольника образует с осью Ox тупой угол, с осью Oy — тупой, а с осью Oz — острый угол. (Единичный вектор данной плоскости есть $\bar{n} = \pm\left(\frac{3}{7}\bar{i} + \frac{6}{7}\bar{j} - \frac{2}{7}\bar{k}\right)$; на верхней стороне $\cos\gamma > 0$, поэтому надо выбрать знак «минус»; получим: $\cos\alpha = -\frac{3}{7}$, $\cos\beta = -\frac{6}{7}$, $\cos\gamma = \frac{2}{7}$.)

Итак, $K = K_1 + K_2 + K_3$. Находим K_1, K_2, K_3:

$$K_1 = \iint\limits_S z\,dy\,dz = -\iint\limits_{BOC} z\,dy\,dz = -\int\limits_0^1 dy \int\limits_{3y-3}^{0} z\,dz = \cdots = \frac{3}{2},$$

$$K_2 = -\iint\limits_S x\,dx\,dz = \iint\limits_{AOC} x\,dx\,dz = \int\limits_0^2 x\,dx \int\limits_{\frac{3x-6}{2}}^{0} dz = \cdots = 2,$$

$$K_3 = \iint\limits_S y\,dx\,dy = \iint\limits_{AOB} y\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\frac{6-3x}{6}} y\,dy = \cdots = \frac{1}{3}.$$

В результате имеем: $K = \frac{3}{2} + 2 + \frac{1}{3} = 3\frac{5}{6}$. ●

Пример 71.3. Найти поток радиус-вектора $\bar{r}$ через внешнюю сторону поверхности прямого конуса, вершина которого совпадает с точкой $O(0;0;0)$, если известны радиус основания R и высота конуса H (см. рис. 275).

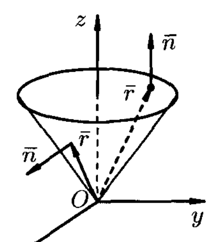


Рис. 275

❍ Решение:

$$K = \oiint\limits_S r_n ds = \iint\limits_{\text{бок пов}} r_n ds + \iint\limits_{\text{осн}} r_n ds = K_1 + K_2.$$

Очевидно, что $K_1 = 0$, т. к. $\text{пр}_{\bar{n}}\bar{r} = 0$;

$$K_2 = \iint\limits_{\text{осн}} r_n ds = H \cdot \iint\limits_{\text{осн}} ds = H \cdot \pi R^2,$$

т. к. $\text{пр}_{\bar{n}}\bar{r} = H$. Итак, $K = \pi H R^2$. ●

71.3. Дивергенция поля. Формула Остроградского–Гаусса

Важной характеристикой векторного поля (71.1) является так называемая дивергенция, характеризующая распределение и интенсивность источников и стоков поля.

Дивергенцией (или расходимостью) ***векторного поля***

$$\bar{a}(M) = P(x;y;z)\bar{i} + Q(x;y;z)\bar{j} + R(x;y;z)\bar{k}$$

в точке M называется скаляр вида $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ и обозначается символом $\operatorname{div}\bar{a}(M)$, т. е.

$$\boxed{\operatorname{div}\bar{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.} \tag{71.6}$$

Отметим некоторые *свойства* дивергенции.

1. Если $\bar{a}$ — постоянный вектор, то $\operatorname{div}\bar{a} = 0$.

2. $\operatorname{div}(c \cdot \bar{a}) = c \cdot \operatorname{div}\bar{a}$, где $c = \text{const}$.

3. $\operatorname{div}(\bar{a}+\bar{b}) = \operatorname{div}\bar{a} + \operatorname{div}\bar{b}$, т. е. дивергенция суммы двух векторных функций равна сумме дивергенции слагаемых.

4. Если U — скалярная функция, $\bar{a}$ — вектор, то

$$\operatorname{div}(U \cdot \bar{a}) = U \cdot \operatorname{div}\bar{a} + \bar{a}\operatorname{grad}U.$$

Эти свойства легко проверить, используя формулу (71.6). Докажем, например, справедливость свойства 4.

❑ Так как $U \cdot \bar{a} = U \cdot P \cdot \bar{i} + U \cdot Q \cdot \bar{j} + U \cdot R \cdot \bar{k}$, то

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(U \cdot \bar{a}) &= \frac{\partial}{\partial x}(U \cdot P) + \frac{\partial}{\partial y}(U \cdot Q) + \frac{\partial}{\partial z}(U \cdot R) = \\ &= U\frac{\partial P}{\partial x} + P\frac{\partial U}{\partial x} + U\frac{\partial Q}{\partial y} + Q\frac{\partial U}{\partial y} + U\frac{\partial R}{\partial z} + R\frac{\partial U}{\partial z} = \\ &= U\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + P\frac{\partial U}{\partial x} + Q\frac{\partial U}{\partial y} + R\frac{\partial U}{\partial z} = \\ &= U \cdot \operatorname{div}\bar{a} + \bar{a} \cdot \operatorname{grad}U. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Используя понятия потока и дивергенции векторного поля, запишем известную в анализе (см. (58.9)) формулу Остроградского–Гаусса

$$\oint\!\!\!\oint_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv \tag{71.7}$$

в так называемой векторной форме.

Рассматривая область V, ограниченную замкнутой поверхностью S, в векторном поле (71.1), можно утверждать, что левая часть формулы (71.7) есть поток вектора $\bar{a}$ через поверхность S; подынтегральная функция правой части формулы есть дивергенция вектора $\bar{a}$. Следовательно, формулу (71.7) можно записать в виде

$$\oint\!\!\!\oint_S a_n\,ds = \iiint_V \operatorname{div}\bar{a} \cdot dv \tag{71.8}$$

(в котором она чаще всего и встречается).

Формула Остроградского–Гаусса означает, что *поток векторного поля через замкнутую поверхность* S (*в направлении внешней нормали*, т. е. изнутри) *равен тройному интегралу от дивергенции* этого *поля по объему* V, *ограниченному данной поверхностью.*

Используя формулу (71.8), можно дать другое определение дивергенции векторного поля $\bar{a}(M)$ в точке M (не связанное с выбором координатных осей).

По теореме о среднем для тройного интеграла (см. п. 54.1) имеем:

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \bar{a}(M)\, dv = V \cdot \operatorname{div} \bar{a}(M_0),$$

где M_0 – некоторая (средняя) точка области V. Тогда формулу (71.8) можно переписать в виде $\oiint\limits_S a_n\, dS = V \cdot \operatorname{div} \bar{a}(M_0)$. Отсюда

$$\operatorname{div} \bar{a}(M_0) = \frac{1}{V} \oiint\limits_S a_n\, ds.$$

Пусть поверхность S стягивается в точку. Тогда $V \to 0$, $M_0 \to M$, и мы получаем выражение для $\operatorname{div} \bar{a}(M)$ в точке M:

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oiint\limits_S a_n\, ds. \tag{71.9}$$

Дивергенцией векторного поля в точке M называется предел отношения потока поля через (замкнутую) поверхность S, окружающую точку M, к объему тела, ограниченного этой поверхностью, при условии, что вся поверхность стягивается в точку M ($V \to 0$).

Определение (71.9) дивергенции эквивалентно (можно показать) определению (71.6).

Как видно из определения, дивергенция векторного поля в точке является скалярной величиной. Она образует скалярное поле в данном векторном поле.

Исходя из физического смысла потока (обычно условно считают, что $\bar{a}(M)$ есть поле скоростей фиктивного стационарного потока несжимаемой жидкости), можно сказать, что: при $\operatorname{div} \bar{a}(M) > 0$ точка M представляет собой источник, откуда жидкость вытекает; при $\operatorname{div} \bar{a}(M) < 0$ точка M есть сток, поглощающий жидкость. Как следует из равенства (71.9), величина $\operatorname{div} \bar{a}(M)$ характеризует мощность (интенсивность, плотность) источника или стока в точке M. В этом состоит физический смысл дивергенции.

Понятно, что если в объеме V, ограниченном замкнутой поверхностью S, нет ни источников, ни стоков, то $\operatorname{div} \bar{a} = 0$.

Векторное поле, в каждой точке которого дивергенция поля равна нулю, т. е. $\operatorname{div} \bar{a}(M) \equiv 0$, называется *соленоидальным* (или трубчатым).

Пример 71.4. Найти дивергенцию поля линейных скоростей $\overline{V}$ жидкости, вращающейся как твердое тело вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью $\overline{\omega}$.

Решение: Примем ось вращения жидкости за ось Oz. Тогда, как показано ранее (см. пример 69.2), $\overline{V} = -\omega y\bar{i} + \omega x\bar{j} + 0 \cdot \bar{k}$. Имеем:

$$\operatorname{div} \overline{V}(M) = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega y) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega x) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = 0.$$

Поле $\overline{V}$ - соленоидальное. ●

71.4. Циркуляция поля

Пусть векторное поле образовано вектором (71.1). Возьмем в этом поле некоторую замкнутую кривую L и выберем на ней определенное направление.

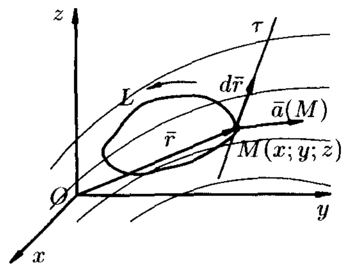


Рис. 276

Пусть $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ — радиус-вектор точки M на контуре L. Известно, что вектор $\overline{dr} = dx \cdot \bar{i} + dy \cdot \bar{j} + dz \cdot \bar{k}$ направлен по касательной к кривой в направлении ее обхода (см. рис. 276) и $|\overline{dr}| = dl$, где dl — дифференциал дуги кривой ($dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$).

Криволинейный интеграл по замкнутому контуру L от скалярного произведения вектора $\bar{a}$ на вектор $\overline{dr}$, касательный к контуру L, называется ***циркуляцией вектора*** $\bar{a}$ вдоль L, т. е.

$$\boxed{C = \oint_L \bar{a}\,\overline{dr}.} \tag{71.10}$$

Рассмотрим различные формы записи циркуляции. Так как

$$\bar{a} \cdot \overline{dr} = |\overline{dr}| \cdot \text{пр}_{\overline{dr}}\bar{a} = a_\tau \cdot dl = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

где a_τ — проекция вектора $\bar{a}$ на касательную τ, проведенную в направлении обхода кривой L, то равенство (71.10) можно записать в виде

$$C = \oint_L a_\tau \cdot dl, \tag{71.11}$$

или

$$\boxed{C = \oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz.} \tag{71.12}$$

Циркуляция C, записанная в виде (71.12) имеет простой физический смысл: если кривая L расположена в силовом поле, то циркуляция — это работа силы $\bar{a}(M)$ поля при перемещении материальной точки вдоль L (п.56.5).

Отметим, что вдоль замкнутых векторных линий циркуляция отлична от нуля, потому что в каждой точке векторной линии скалярное произведение $\bar{a}d\bar{r}$ сохраняет знак: положительный, если направление вектора $\bar{a}$ совпадает с направлением обхода векторной линии; отрицательный — в противном случае.

Пример 71.5. Найти циркуляцию вектора поля линейных скоростей вращающегося тела (см. пример 69.2) $\overline{V} = -\omega y\bar{i} + \omega x\bar{j}$ вдоль замкнутой кривой L, лежащей в плоскости α, перпендикулярной оси вращения.

○ Решение: Будем считать, что направление нормали к плоскости α совпадает с направлением оси Oz. Согласно формуле (71.12), имеем:

$$C = \oint\limits_L -\omega y\,dx + \omega x\,dy = \omega \oint\limits_L -y\,dx + x\,dy = \\ = 2\omega\left(\frac{1}{2}\oint\limits_L -y\,dx + x\,dy\right) = 2\omega\cdot S,$$

где S — площадь поверхности, ограниченной кривой L (см. 56.17).

Заметим, что если нормаль к поверхности S образует угол γ с осью Oz, то циркуляция будет равна $C = 2\omega\cdot S\cdot\cos\gamma$; с изменением угла γ величина C изменяется. ●

Пример 71.6. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\bar{a} = (x-2z)\bar{i} + (x+3y+z)\bar{j} + (5x+y)\bar{k}$$

вдоль периметра треугольника с вершинами $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$ (см. рис. 277).

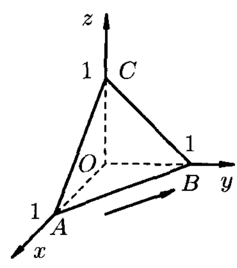


Рис. 277

○ Решение: Согласно формуле (71.12), имеем:

$$C = \oint\limits_L (x-2z)\,dx + (x+3y+z)\,dy + (5x+y)\,dz = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA}.$$

На отрезке AB: $x+y=1$, $z=0$, следовательно,

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_1^0 (x-0)\,dx + (x+3-3x+0)\cdot(-dx) + 0 = \frac{3}{2}.$$

На отрезке BC: $y+z=1$, $x=0$, следовательно,

$$\int\limits_{BC} = \int\limits_1^0 (0-2+2y)\cdot 0 + (0+3y+1-y)\,dy + (0+y)\cdot(-dy) = -\frac{3}{2}.$$

На отрезке CA: $x+z=1$, $y=0$, следовательно,

$$\int\limits_{CA} = \int\limits_0^1 (x-2+2x)\,dx + 0 - 1(5x+0)\cdot(-dx) = -3.$$

Следовательно,

$$C = \oint\limits_{ABCA} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA} = \frac{3}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) + (-3) = -3. \qquad \bullet$$

71.5. Ротор поля. Формула Стокса

Ротором (или вихрем) ***векторного поля***

$$\bar{a} = P(x;y;z)\bar{i} + Q(x;y;z)\bar{j} + R(x;y;z)\bar{k}$$

называется вектор, обозначаемый $\operatorname{rot}\bar{a}(M)$ и определяемый формулой

$$\boxed{\operatorname{rot}\bar{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}.} \qquad (71.13)$$

Формулу (71.13) можно записать с помощью символического определителя в виде, удобном для запоминания:

$$\operatorname{rot}\bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Отметим некоторые *свойства* ротора.

1. Если $\bar{a}$ — постоянный вектор, то $\operatorname{rot}\bar{a} = 0$.

2. $\operatorname{rot}(c\cdot\bar{a}) = c\cdot\operatorname{rot}\bar{a}$, где $c = \text{const}$.

3. $\operatorname{rot}(\bar{a}+\bar{b}) = \operatorname{rot}\bar{a} + \operatorname{rot}\bar{b}$, т. е. ротор суммы двух векторов равен сумме роторов слагаемых.

4. Если U — скалярная функция, а $\bar{a}(M)$ — векторная, то

$$\operatorname{rot}(U\cdot\bar{a}) = U\operatorname{rot}\bar{a} + \operatorname{grad}U\times\bar{a}.$$

Эти свойства легко проверить, используя формулу (71.13). Покажем, например, справедливость свойства 3:

$$\text{rot}(\bar{a}+\bar{b})=\left(\frac{\partial}{\partial y}(R_1+R_2)-\frac{\partial}{\partial z}(Q_1+Q_2)\right)\bar{i}+$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}(P_1+P_2)-\frac{\partial}{\partial x}(R_1+R_2)\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}(Q_1+Q_2)-\frac{\partial}{\partial y}(P_1+P_2)\right)\bar{k}=$$
$$=\left(\frac{\partial R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)\bar{k}+\ldots$$
$$\ldots=\text{rot}\,\bar{a}+\text{rot}\,\bar{b}.$$ ■

Используя понятия ротора и циркуляции, векторного поля, запишем известную в математическом анализе (см. п. 58.4) формулу Стокса:

$$\oint\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+$$
$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dx\,dz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy. \quad (71.14)$$

Левая часть формулы (71.14) представляет собой циркуляцию вектора $\bar{a}$ по контуру L, т. е. $\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\oint\limits_L a_\tau dl$ (см. (71.11)). Интеграл в правой части формулы (71.14) представляет собой поток вектора $\text{rot}\,\bar{a}$ через поверхность S, ограниченную контуром L (см. (71.3)), т. е.

$$\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dx\,dz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=$$
$$=\iint\limits_S \text{rot}_n\,\bar{a}\,ds.$$

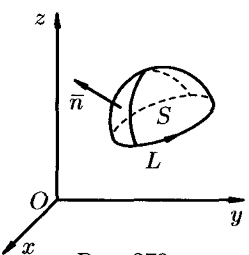


Рис. 278

Следовательно, формулу Стокса можно записать в виде

$$\oint\limits_L a_\tau dl=\iint\limits_S \text{rot}_n\,\bar{a}\,ds. \quad (71.15)$$

Такое представление формулы Стокса называют ее *векторной формой*. В этой формуле положительное направление на контуре L и выбор стороны у поверхности S согласованы между собой так же, как в теореме Стокса.

Формула (71.15) показывает, что *циркуляция вектора $\bar{a}$ вдоль замкнутого контура L равна потоку ротора этого вектора $\bar{a}$ через поверхность S, лежащую в поле вектора $\bar{a}$ и ограниченную контуром L* (натянутую на контур) (см. рис. 278).

Используя формулу (71.14), можно дать другое определение ротора поля, эквивалентное первому и не зависящее от выбора координатной системы.

Для этого применим формулу Стокса (71.15) для достаточно малой плоской площадки S с контуром L, содержащей точку M.

По теореме о среднем для поверхностного интеграла (п. 57.1, свойство 7) имеем:

$$\iint\limits_S \mathrm{rot}_n\,\bar{a}ds = \mathrm{rot}_n\,\bar{a}(M_0)\cdot S,$$

где M_0 — некоторая (средняя) точка площадки S (см. рис. 279).

Тогда формулу (71.15) можно записать в виде

$$\oint\limits_L a_\tau dl = \mathrm{rot}_n\,\bar{a}(P)\cdot S.$$

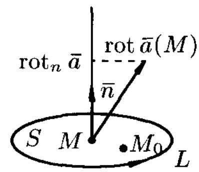


Рис 279

Отсюда:

$$\mathrm{rot}_n\,\bar{a}(P) = \frac{1}{S}\oint\limits_L a_\tau\,dl.$$

Пусть контур L стягивается в точку M. Тогда $M_0 \to M$, а $S \to 0$. Перейдя к пределу, получаем:

$$\mathrm{rot}_n\,\bar{a}(M) = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint\limits_L a_\tau\,dl.$$

Ротором вектора $\bar{a}$ ***в точке*** M называется вектор, проекция которого на каждое направление равна пределу отношения циркуляции вектора $\bar{a}$ по контуру L плоской площадки S, перпендикулярной этому направлению, к площади этой площадки.

Как видно из определения, ротор вектора $\bar{a}(M)$ есть векторная величина, образующая собственное векторное поле.

Дадим физическое истолкование понятия ротора векторного поля. Найдем ротор поля линейных скоростей твердого тела, вращающегося вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью (пример 69.2) $\bar{\omega}$, т. е. ротор вектора $\bar{V} = -\omega\cdot y\cdot\bar{i} + \omega\cdot x\cdot\bar{j}$.

По определению ротора

$$\mathrm{rot}\,\bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(0 - \frac{\partial(\omega x)}{\partial z}\right)\bar{i} - \left(0 - \frac{\partial(-y\omega)}{\partial z}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial(x\omega)}{\partial x} - \frac{\partial(-y\omega)}{\partial y}\right)\bar{k} =$$

$$= 0 - 0 + 2\omega\cdot\bar{k} = 2\bar{\omega}.$$

Ротор этого поля направлен параллельно оси вращения, его модуль равен удвоенной угловой скорости вращения.

С точностью до числового множителя ротор поля скоростей $\overline{V}$ представляет собой угловую скорость вращения твердого тела. С этим связано само название «ротор» (лат. «вращатель»).

Замечание. Из определения (71.13) ротора вытекает, что направление ротора — это направление, вокруг которого циркуляция имеет наибольшее значение (плотность) по сравнению с циркуляцией вокруг любого направления, не совпадающего с нормалью к площадке S.

Так что связь между ротором и циркуляцией аналогична связи между градиентом и производной по направлению (см. п. 70.3).

§ 72. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА

72.1. Векторные дифференциальные операции первого порядка

Основными дифференциальными операциями (действиями) над скалярным полем U и векторным полем $\bar{a}$ являются $\operatorname{grad} U$, $\operatorname{div} \bar{a}$, $\operatorname{rot} \bar{a}$. Действия взятия градиента, дивергенции и ротора называются *векторными операциями первого порядка* (в них участвуют только первые производные).

Эти операции удобно записывать с помощью так называемого *оператора Гамильтона*

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}.}$$

Этот символический вектор называют также оператором ∇ (читается «набла»); он приобретает определенный смысл лишь в комбинации со скалярными или векторными функциями. Символическое «умножение» вектора ∇ на скаляр U или вектор $\bar{a}$ производится по обычным правилам векторной алгебры, а «умножение» символов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ на величины U, P, Q, R понимают как взятие соответствующей частной производной от этих величин.

Применяя оператор Гамильтона, получим дифференциальные операции первого порядка:

1. $\nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right) \cdot U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k} = \operatorname{grad} U.$

2. $\nabla \bar{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\cdot(P\cdot\bar{i}+Q\cdot\bar{j}+R\cdot\bar{k}) = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \bar{a}.$

3. $\nabla \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \bar{a}.$

Оператор Гамильтона применяется для записи и других операций и для вывода различных формул в теории поля. При действиях с ним надо пользоваться правилами векторной алгебры и правилами дифференцирования.

В частности, производная по направлению (70.2) может быть записана в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \nabla U \cdot \bar{e} = (\bar{e} \cdot \nabla) \cdot U,$$

где $\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

72.2. Векторные дифференциальные операции второго порядка

После применения оператора Гамильтона к скалярному или векторному полю получается новое поле, к которому можно снова применить этот оператор. В результате получаются *дифференциальные операции второго порядка*. Нетрудно убедиться, что имеется лишь пять дифференциальных операций второго порядка: $\operatorname{div}\operatorname{grad} U$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a}$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{a}$.

(Понятно, что операция $\operatorname{div}\operatorname{div}\bar{a}$, например, не имеет смысла: $\operatorname{div}\bar{a}$ — скаляр, говорить о дивергенции скаляра, т. е. о $\operatorname{div}\operatorname{div}\bar{a}$, бессмысленно.)

Запишем явные выражения для дифференциальных операций второго порядка, используя оператор Гамильтона. Заметим при этом, что оператор действует только на множитель, расположенный непосредственно за оператором.

1. $\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \nabla(\nabla U) = (\nabla \cdot \nabla)U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \cdot U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$. Правая часть этого равенства называется *оператором Лапласа* скалярной функции U и обозначается ΔU. Таким образом,

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \tag{72.1}$$

Дифференциальное уравнение Лапласа $\Delta U = 0$ играет важную роль в различных разделах математической физики. Решениями уравнения Лапласа являются так называемые *гармонические функции*.

Замечание. К равенству (72.1) можно прийти, введя в рассмотрение скалярный оператор дельта:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(который тоже называют оператором Лапласа).

2. $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = \nabla \times (\nabla U) = (\nabla \times \nabla)U = 0$, так как векторное произведение двух одинаковых векторов равно нулю (нуль-вектор). Это означает, что поле градиента есть поле безвихревое.

3. $\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a} =$

$$= \nabla(\nabla\cdot\bar{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\bar{a})\cdot\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div}\bar{a})\cdot\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{div}\bar{a})\cdot\bar{k} =$$

$$= \Big(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial z\partial x}\Big)\bar{i} + \Big(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z}\Big)\bar{j} +$$
$$+ \Big(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\Big)\bar{k}.$$

4. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a} = \nabla\cdot(\nabla\times\bar{a}) = 0$, так как смешанное произведение трех векторов, из которых два одинаковые, равно нулю. Это означает, что поле вихря — соленоидальное.

5. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{a} = \nabla\times(\nabla\times\bar{a}) = \nabla(\nabla\cdot\bar{a}) - (\nabla\cdot\nabla)\bar{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a} - \Delta\bar{a}$, так как двойное векторное произведение обладает свойством

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{b}\cdot\bar{a}\cdot\bar{c} - \bar{c}\cdot\bar{a}\cdot\bar{b}.$$

Здесь $\Delta\bar{a} = \Delta P\,\bar{i} + \Delta Q\,\bar{j} + \Delta R\,\bar{k}$ векторная величина, полученная в результате применения оператора Лапласа к вектору $\bar{a}$.

§ 73. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОСНОВНЫХ КЛАССОВ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

73.1. Соленоидальное поле

Напомним, что векторное поле $\bar{a}$ называется *соленоидальным*, если во всех точках его дивергенция поля равна нулю, т. е. $\operatorname{div}\bar{a} = 0$.

Примерами соленоидальных полей являются: поле линейных скоростей вращающегося твердого тела (см. пример 71.4); магнитное поле, создаваемое прямолинейным проводником, вдоль которого течет электрический ток, и другие.

Приведем некоторые *свойства* соленоидального поля.

1. В соленоидальном поле $\bar{a}$ поток вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю. Это свойство непосредственно вытекает из формулы (71.8). Таким образом, соленоидальное поле не имеет источников и стоков.

2. Соленоидальное поле является полем ротора некоторого векторного поля, т. е. если $\operatorname{div}\bar{a} = 0$, то существует такое поле $\bar{b}$, что $\bar{a} = \operatorname{rot}\bar{b}$. Вектор $\bar{b}$ называется *векторным потенциалом* поля $\bar{a}$.

Любое из свойств 1–2 можно было бы взять в качестве определения соленоидального поля.

Доказывать свойство 2 не будем. Отметим лишь, что обратное утверждение — поле ротора векторного поля есть соленоидальное — нами доказано (выше мы показали, что $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a} = 0$).

3. В соленоидальном поле $\bar{a}$ поток вектора через поперечное сечение векторной трубки сохраняет постоянное значение (называемое *интенсивностью* трубки).

❑ Рассмотрим векторную трубку между двумя ее произвольными сечениями S_1 и S_2; боковую поверхность трубки обозначим через S (см. рис. 280). Поток вектора через замкнутую поверхность, состоящую из S_1, S_2 и S, равен нулю. Следовательно,

$$\iint\limits_{S} a_n\,ds + \iint\limits_{S_1} a_n\,ds + \iint\limits_{S_2} a_n\,ds = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}\bar{a}\,dv = 0,$$

где $\bar{n}$ — внешняя нормаль.

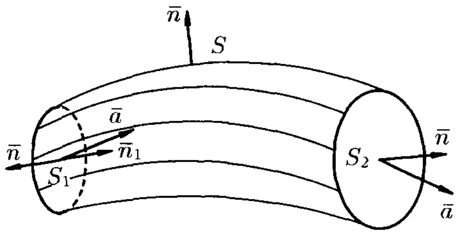


Рис. 280

Так как на боковой поверхности векторной трубки нормаль $\bar{n}$ перпендикулярна к векторам поля, то $\iint\limits_{S} a_n\,ds = 0$ и, следовательно,

$$\iint\limits_{S_1} a_n\,ds = -\iint\limits_{S_2} a_n\,ds.$$

Переменив направление нормали на площадке S_1, т. е. взяв внутреннюю нормаль $\bar{n}_1$, получим:

$$\iint\limits_{S_1} a_{n_1}\,ds = \iint\limits_{S_2} a_n\,ds. \qquad \blacksquare$$

В поле скоростей текущей жидкости полученный результат означает, что количество жидкости, втекающей в трубку за единицу времени, равно количеству жидкости, вытекающей из нее.

73.2. Потенциальное поле

Векторное поле $\bar{a}$ называется *потенциальным* (или *безвихревым*, или *градиентным*), если во всех точках поля ротор равен нулю, т. е.

$\operatorname{rot}\bar{a} = 0$. Примером потенциального поля является электрическое поле напряженности точечного заряда (и другие).

Приведем основные свойства потенциального поля.

Свойство 1. Циркуляция потенциального поля $\bar{a}$ по любому замкнутому контуру в этом поле равна нулю.

❑ Это непосредственно вытекает из формулы (71.14). Следовательно, $C = \oint\limits_L a_\tau dl = 0$. ■

В частности, для силового потенциального поля это означает, что работа силы по любому замкнутому контуру равна нулю; в поле скоростей текущей жидкости равенство $C = 0$ означает, что в потоке нет замкнутых струек, т. е. нет водоворотов.

Свойство 2. В потенциальном поле $\bar{a}$ криволинейный интеграл $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ вдоль любой кривой L с началом в точке M_1 и концом в точке M_2 зависит только от положения точек M_1 и M_2 и не зависит от формы кривой.

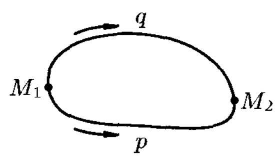


Рис. 281

❑ Это свойство вытекает из свойства 1. Действительно, взяв в поле две точки M_1 и M_2, соединим их двумя кривыми M_1pM_2 и M_1qM_2 так, чтобы контур $M_1pM_2qM_1$ лежал внутри поля (см. рис. 281). Тогда, в силу свойства 1, имеем

$$\oint\limits_{M_1pM_2qM_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Учитывая свойства криволинейного интеграла, получаем:

$$\oint\limits_{M_1pM_2qM_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int\limits_{M_1pM_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int\limits_{M_2qM_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int\limits_{M_1pM_2} - \int\limits_{M_1qM_2} = 0,$$

т. е.

$$\int\limits_{M_1pM_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{M_1qM_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \quad ■$$

Свойство 3. Потенциальное поле является полем градиента некоторой скалярной функции $U(x;y;z)$, т. е. если $\operatorname{rot}\bar{a} = 0$, то существует функция $U(x;y;z)$ такая, что $\bar{a} = \operatorname{grad} U$.

❑ Из равенства $\operatorname{rot}\bar{a} = 0$ вытекает, что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$, т. е. выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом некоторой функции $U = U(x; y; z)$ (следствие 56.1). Эту функцию называют потенциалом векторного поля $\bar{a} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$; $dU = Pdx + Qdy + Rdz$.

Отсюда: $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$, $R = \frac{\partial U}{\partial z}$. Следовательно,

$$\bar{a} = P \cdot \bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \bar{k} = \operatorname{grad} U,$$

т. е. вектор поля $\bar{a}$ является градиентом скалярного поля. ■

Замечание. Из равенства $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = 0$ следует обратное утверждение — поле градиента скалярной функции $U = U(x; y; z)$ является потенциальным.

Из равенства $\bar{a} = \operatorname{grad} \overline{U}$ следует, что потенциальное поле определяется заданием *одной* скалярной функции $U = U(x; y; z)$ — его потенциала. Потенциал векторного поля может быть найден по формуле

$$U(x; y; z) = \int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(\chi; y_0; z_0)\,d\chi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x; \xi; z_0)\,d\xi + \int\limits_{z_0}^{z} R(x; y; \zeta)\,d\zeta + c, \quad (73.1)$$

где $(x_0; y_0; z_0)$ — координаты фиксированной точки, $(x; y; z)$ — координаты произвольной точки. Потенциал определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого (из-за того, что $\operatorname{grad}(U + a) = \operatorname{grad} U$).

Произвольное же векторное поле требует задания *трех* скалярных функций ($P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$, $R(x; y; z)$ — проекции вектора поля на оси координат).

Замечание. Определение потенциального поля может быть дано иначе — векторное поле $\bar{a}$ называется потенциальным, если оно является градиентом некоторого скалярного поля, т. е. $\bar{a} = \operatorname{grad} U$. (Иногда пишут $\bar{a} = -\operatorname{grad} U$; знак «минус» пишут для удобства, обычно векторные линии направлены в сторону убывания U: поток жидкости направлен туда, где давление меньше; теплота перемещается от более нагретого места к менее нагретому и т. д.)

Пример 73.1. Установить потенциальность поля

$$\bar{a}(M) = (yz - 2x)\bar{i} + (xz - 2y)\bar{j} + xy\bar{k}$$

и найти его потенциал.

○ Решение: Имеем:

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz - 2x & xz - 2y & xy \end{vmatrix} = (x - x)\bar{i} - (y - y)\bar{j} + (z - z)\bar{k} = 0.$$

Следовательно, поле вектора $\bar{a}$ потенциальное.

Найдем потенциал U по формуле (73.1), выбирая в качестве фиксированной точки начало координат, т. е. $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Так как $P(x; y_0; z_0) = -2x$, $Q(x; y; z_0) = -2y$, $R(x; y; z) = xy$, то

$$U(x; y; z) = \int_0^x (-2\chi)\, d\chi + \int_0^y (-2\xi)\, d\xi + \int_0^z xy\, d\zeta + c = -x^2 - y^2 + xyz + c. \quad \bullet$$

73.3. Гармоническое поле

Векторное поле $\bar{a}$ называется *гармоническим* (или *лапласовым*), если оно одновременно является потенциальным и соленоидальным, т. е. если $\operatorname{rot}\bar{a} = 0$ и $\operatorname{div}\bar{a} = 0$.

Примером гармонического поля является поле линейных скоростей стационарного безвихревого потока жидкости при отсутствии в нем источников и стоков.

Так как поле $\bar{a}$ потенциально, то его можно записать в виде $\bar{a} = \operatorname{grad} U$, где $U = U(x; y; z)$ — потенциал поля.

Но так как поле одновременно и соленоидальное, то

$$\operatorname{div}\bar{a} = \operatorname{div}\operatorname{grad} U = 0,$$

или, что то же самое,

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0,$$

т. е. потенциальная функция U гармонического поля $\bar{a}$ является решением дифференциального уравнения Лапласа. Такая функция называется, как уже упоминали, гармонической.

Глава XVII. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Лекции 63–68

§ 74. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

74.1. Основные понятия

Пусть даны два множества D и E, элементами которых являются комплексные числа (см. гл. VI). Числа $z = x + iy$ множества D будем изображать точками комплексной плоскости z, а числа $w = u + iv$ множества E — точками комплексной плоскости w.

Если каждому числу (точке) $z \in D$ по некоторому правилу поставлено в соответствие определенное число (точка) $w \in E$, то говорят, что на множестве определена ***однозначная функция комплексного переменного*** $w = f(z)$, отображающая множество D в множество E (см. рис. 282).

Если каждому $z \in D$ соответствует несколько значений w, то функция $w = f(z)$ называется *многозначной.*

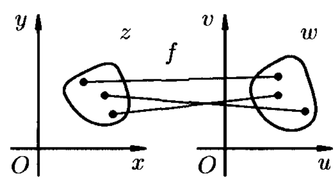


Рис. 282

Множество D называется *областью определения* функции $w = f(z)$; множество E_1 всех значений w, которые $f(z)$ принимает на E, называется *областью значений* этой функции (если же каждая точка множества E является значением функции, то E — область значений функции; в этом случае функция f отображает D на E).

Далее, как правило, будем рассматривать такие функции $w = f(z)$, для которых множества D и E_1 являются областями. *Областью* комплексной плоскости называется множество точек плоскости, обладающих свойствами открытости и связности (см. п. 43.1).

Функцию $w = f(z)$ можно записать в виде

$$u + iv = f(x + iy),$$

т. е.

$$f(x + iy) = u(x; y) + iv(x; y),$$

где

$$u = u(x; y) = \mathrm{Re} f(z), \quad v = v(x; y) = \mathrm{Im} f(z), \quad (x; y) \in D.$$

Функцию $u(x; y)$ при этом называют *действительной частью функции* $f(z)$, а $v(x; y)$ — *мнимой.*

Таким образом, задание функции комплексного переменного равносильно заданию двух функций двух действительных переменных.

Пример 74.1. Найти действительную и мнимую части функции $w = z^2$.

○ Решение: Функцию $w = z^2$ можно записать в виде $u + iv = (x + iy)^2$, т. е.

$$u + iv = x^2 - y^2 + i2xy.$$

Отсюда следует: $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. ●

74.2. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0, исключая, может быть, саму точку z_0. Под *δ-окрестностью точки* z_0 комплексной плоскости понимают внутренность круга радиуса δ с центром в точке z_0.

Число w_0 называется ***пределом функции*** $w = f(z)$ ***в точке*** z_0 (или при $z \to z_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех $z \neq z_0$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$. Это определение коротко можно записать так:

$$\big(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall z : 0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon\big) \Longleftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = w_0.$$

Из определения следует, что если предел w_0 существует, то существуют и пределы

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x; y) = u_0 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x; y) = v_0.$$

Верно и обратное утверждение.

Теоремы об арифметических свойствах пределов для функции одного (или нескольких) действительного переменного остаются справедливыми и для функции комплексного переменного. Так, если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ имеют пределы в точке $z_0 \in D$, то

$$\lim_{z \to z_0} (c_1 f_1(z) \pm c_2 f_2(z)) = c_1 \lim_{z \to z_0} f_1(z) \pm c_2 \lim_{z \to z_0} f_2(z),$$

где c_1, c_2 — постоянные;

$$\lim_{z \to z_0} f_1(z) \cdot f_2(z) = \lim_{z \to z_0} f_1(z) \cdot \lim_{z \to z_0} f_2(z)$$

и

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{\lim\limits_{z \to z_0} f_1(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} f_2(z)},$$

если $\lim\limits_{z \to z_0} f_2(z) \neq 0$.

Пусть функция $w = f(z)$ определена в точке $z = z_0$ и в некоторой ее окрестности. Функция $w = f(z)$ называется ***непрерывной в точке*** z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Определение непрерывности можно сформулировать и так: функция $f(x)$ непрерывна в точке z_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta f(z) = 0.$$

Функция $f(z)$ непрерывна в области D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Модуль непрерывной функции комплексного переменного обладает теми же свойствами, что и непрерывная функция действительного переменного (см. теорема 43.1).

74.3. Основные элементарные функции комплексного переменного

Определим основные элементарные функции комплексного переменного $z = x + iy$.

Показательная функция

Показательная функция $w = e^z$ определяется формулой

$$w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{74.1}$$

Положив в этом равенстве $y = 0$, устанавливаем, что для действительных значений $z = x$ показательная функция e^z совпадает с показательной функцией действительного переменного: $e^z = e^x$.

Показательная функция $w = e^z$ обладает «известным» свойством: $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. Действительно, по правилу умножения комплексных чисел («модули перемножаются, а аргументы складываются», п. 28.3), имеем:

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1} \cdot e^{x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = \\ &= e^{x_1+x_2} \cdot (\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

Аналогично можно убедиться в справедливости свойств: $e^{z_1} : e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$, $(e^z)^n = e^{nz}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Учитывая, что $|e^z| = e^x$, а $e^x \neq 0$, утверждаем, что показательная функция e^z нигде в нуль не обращается, т. е. $e^z \neq 0$.

Исходя из определения (74.1), легко убедиться, что

$$\lim_{\substack{\operatorname{Re} z \to -\infty \\ (x \to -\infty)}} e^z = 0, \qquad \lim_{\substack{\operatorname{Re} z \to +\infty \\ (x \to +\infty)}} e^z = \infty,$$

выражение e^z при $z \to \infty$ не имеет смысла.

Положив в равенстве (74.1) $x = 0$, $y = \varphi$, получим классическую формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. С ее помощью, в частности, можно представить тригонометрическую форму комплексного числа $z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в более компактной форме $z = r\cdot e^{i\varphi}(= |z|\cdot e^{i\arg z})$, называемой ***показательной формой*** комплексного числа (см. п. 27.3)

Показательная функция комплексного переменного обладает и специфическим свойством: она является ***периодической*** с мнимым основным периодом $2\pi i$.

Действительно,

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot (\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z,$$

т. е. $e^{z+2\pi i} = e^z$. Отметим, что e^z не всегда больше нуля. Например, $e^{\pi i} = -1 < 0$. ■

Логарифмическая функция

Эта функция определяется как функция, обратная показательной: число w называется ***логарифмом числа*** $z \neq 0$, если $e^w = z$, обозначается $w = \operatorname{Ln} z$. Так как значения показательной функции $e^w = z$ всегда отличны от нуля, то логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ определена на всей плоскости z, кроме точки $z = 0$ (стало быть, имеет смысл и выражение $\operatorname{Ln}(-2)$).

Положив $z = r\cdot e^{i\varphi}, w = u + iv$, получим, согласно определению логарифмической функции, $e^{u+iv} = r\cdot e^{i\varphi}$, или $e^u \cdot e^{iv} = r\cdot e^{i\varphi}$. Отсюда имеем:

$$e^u = r,\ v = \varphi + 2k\pi,\ \text{т. е. } u = \ln r,\ v = \varphi + 2k\pi\ (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

Следовательно,

$$w = \operatorname{Ln} z = u + iv = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \qquad (74.2)$$

т. е. $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$ или, $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$, где $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$.

Формула (74.2) показывает, что логарифмическая функция комплексного переменного имеет бесчисленное множество значений, т. е. $w = \operatorname{Ln} z$ — многозначная функция.

Однозначную ветвь этой функции можно выделить, подставив в формулу (74.2) определенное значение k. Положив $k = 0$, получим однозначную функцию, которую называют *главным значением* логарифма $\operatorname{Ln} z$ и обозначают символом $\ln z$:

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z, \quad \text{где } -\pi < \arg z \leqslant \pi. \qquad (74.3)$$

Если z — действительное положительное число, то $\arg z = 0$ и $\ln z = \ln|z|$, т. е. главное значение логарифма действительного положительного числа совпадает с обычным натуральным логарифмом этого числа.

Формулу (74.2) можно переписать так: $\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i$.

Из формулы (74.2) следует, что логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ обладает известными свойствами логарифма действительного переменного:

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} z^n = n \cdot \operatorname{Ln} z,$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \cdot \operatorname{Ln} z.$$

❑ Докажем, например, первое свойство:

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \ln|z_1 \cdot z_2| + i\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \ln(|z_1| \cdot |z_2|) + i(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) =$$
$$= (\ln|z_1| + i\operatorname{Arg} z_1) + (\ln|z_2| + i\operatorname{Arg} z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2. \quad ■$$

Пример 74.2. Вычислить $\operatorname{Ln}(-1)$ и $\ln(-1)$; $\ln 2i$.

○ Решение: Для числа $z = -1$ имеем $|z| = 1, \arg z = \pi$. Следовательно, $\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2k\pi) = i\pi(2k + 1)$, $\ln(-1) = \pi i$ (формулы (74.2) и (74.3)); $\ln 2i = \ln|2i| + i\arg 2i = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}$. ●

Степенная функция $w = z^n$

Если n — натуральное число, то степенная функция определяется равенством $w = z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. Функция $w = z^n$ — однозначная. Если $n = \frac{1}{q}$ ($q \in \mathbb{N}$), то в этом случае

$$w = z^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{z} = \sqrt[q]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{q} + i \sin\frac{\arg z + 2k\pi}{q}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, q - 1$.

Здесь функция $w = z^{\frac{1}{q}}$ есть многозначная (q-значная) функция. Однозначную ветвь этой функции можно получить, придав k определенное значение, например $k = 0$.

Если $n = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{N}$, то степенная функция определяется равенством

$$w = z^{\frac{p}{q}} = (z^{\frac{1}{q}})^p = \sqrt[q]{|z|^p}\left(\cos\frac{p(\arg z + 2k\pi)}{q} + i \sin\frac{p(\arg z + 2k\pi)}{q}\right).$$

Функция $w = z^{\frac{p}{q}}$ — многозначная.

Степенная функция $w = z^a$ с произвольным комплексным показателем $a = \alpha + i\beta$ определяется равенством

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}.$$

Функция $w = z^a$ определена для всех $z \neq 0$, является многозначной функцией. Так, $i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i \cdot i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} = e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k}$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ При $k = 0$ имеем: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Тригонометрические функции

Тригонометрические функции комплексного аргумента $z = x + iy$ определяются равенствами

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

При действительных z эти определения приводят к тригонометрическим функциям действительного переменного. Так, при $z = x$ ($y = 0$)

$$\sin z = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}\big(\cos x + i \sin x - (\cos x - i \sin x)\big) = \frac{1}{2i} 2i \sin x = \sin x.$$

Тригонометрические функции комплексного переменного сохраняют многие свойства тригонометрических функций действительного переменного. В частности,

$$\begin{aligned}
&\sin^2 z + \cos^2 z = 1,\\
&\sin 2z = 2 \sin z \cos z,\\
&\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,\\
&\sin(z + 2\pi) = \sin z,\\
&\cos(-z) = \cos z,\\
&\sin(-z) = -\sin z,\\
&\operatorname{tg}(z + \pi) = \operatorname{tg} z,\\
&\cos z = 0 \quad \text{при} \quad z = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),\\
&\operatorname{tg} 2z = \frac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z},\\
&\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z,\\
&\sin(z + \frac{3\pi}{2}) = -\cos z,
\end{aligned}$$

и т. д. Докажем, например, первое свойство:

❑ $$\begin{aligned}
\sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 =\\
&= \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} =\\
&= \frac{-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = \frac{4}{4} = 1.
\end{aligned}$$ ■

Отметим, что тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ в комплексной плоскости z неограничены:

$$\lim_{\operatorname{Im} z\to\pm\infty} \sin z = \infty, \qquad \lim_{\operatorname{Im} z\to\pm\infty} \cos z = \infty.$$

Так, например, $\cos i = \dfrac{e+e^{-1}}{2} \approx 1{,}54 > 1$, $\cos 3i > 10$.

Гиперболические функции

Эти функции определяются равенствами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Легко заметить связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями. Заменяя в указанных функциях z на iz, получим:

$$\operatorname{sh} iz = i\sin z, \quad \text{или} \quad \sin z = -i\operatorname{sh} iz,$$
$$\operatorname{ch} iz = \cos z$$

(а также $\operatorname{tg} iz = i\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} iz = -i\operatorname{ctg} z$).

Пользуясь этими равенствами, можно получить ряд формул, связывающих гиперболические функции. Так, заменяя в формуле $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ тригонометрические функции гиперболическими, получим

$$(-i\operatorname{sh} iz)^2 + (\operatorname{ch} iz)^2 = 1,$$

или $-\operatorname{sh}^2 iz + \operatorname{ch}^2 iz = 1$. Так как здесь z — любое комплексное число, то iz можно заменить на z; получим формулу $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$. Приведем еще ряд формул:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z, && \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z,\\
&\operatorname{sh} 2z = 2\operatorname{sh} z\operatorname{ch} z, && \operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z,\\
&\operatorname{ch}(z_1+z_2) = \operatorname{ch} z_1\operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1\operatorname{sh} z_2, && \operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z = e^z,
\end{aligned}$$

и т. д.

Из определения гиперболических функций следует, что функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ периодические с периодом $2\pi i$; функции $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ имеют период πi.

Обратные тригонометрические и гиперболические функции

Число w называется ***арксинусом*** числа z, если $\sin w = z$, и обозначается $w = \operatorname{Arcsin} z$.

Используя определение синуса, имеем $z = \sin w = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$, или $e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$. Отсюда $e^{iw} = iz + \sqrt{(iz)^2+1}$, т. е. $e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2}$ (перед корнем можно не писать знак $\pm$, так как $\sqrt{1-z^2}$ имеет два значения). Тогда $iw = \mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2})$, или $w = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2})$. Таким образом,

$$w = \mathrm{Arcsin}\, z = -i\,\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}).$$

Функция $w = \mathrm{Arcsin}\, z$ многозначна (бесконечнозначна). Аналогично определяются другие обратные тригонометрические функции. Можно показать, что

$$\mathrm{Arccos}\, z = -i\,\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}),$$
$$\mathrm{Arctg}\, z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\,\frac{i-z}{i+z} \quad (z \neq \pm i),$$
$$\mathrm{Arcctg}\, z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\,\frac{z-i}{z+i} \quad (z \neq \pm i).$$

Функции, обратные гиперболическим, обозначаются соответственно $w = \mathrm{Arsh} z$ (*ареасинус*), $w = \mathrm{Arch} z$ (*ареакосинус*), $w = \mathrm{Arth} z$ (*ареатангенс*), $w = \mathrm{Arcth} z$ (*ареакотангенс*).

Обратные гиперболические функции имеют следующие выражения:

$$\mathrm{Arsh} z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2+1}), \quad \mathrm{Arch} z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}),$$
$$\mathrm{Arth} z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,\frac{1+z}{1-z}, \quad \mathrm{Arcth} z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,\frac{z+1}{z-1}.$$

Все эти функции бесконечнозначны.

74.4. Дифференцирование функции комплексного переменного. Условия Эйлера–Даламбера

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z, включая и саму точку. Тогда предел

$$\lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z), \tag{74.4}$$

если он существует, называется ***производной функции*** $f(z)$ ***в точке*** z, а функция $f(z)$ называется ***дифференцируемой в точке*** z.

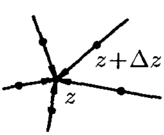


Рис. 283

Подчеркнем, что в равенстве (74.4) Δz любым образом стремится к нулю, т. е. точка $z + \Delta z$ может приближаться к точке z по любому из бесконечного множества различных направлений (см. рис. 283) (в аналогичной ситуации для функции одного действительного переменного точка $x + \Delta x$ приближается к точке x лишь по двум направлениям: слева и справа).

Из дифференцируемости функции $f(z)$ в некоторой точке z следует ее непрерывность в этой точке (отношение $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$ может стремиться к конечному пределу $f'(z)$ лишь при условии, что и $\Delta w \to 0$). Обратное утверждение не имеет места.

При каких условиях функция $w = f(z)$ будет дифференцируемой в данной точке?

Теорема 74.1. Если функция $w = u(x;y) + iv(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $z = x + iy$, причем в этой точке действительные функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ дифференцируемы, то для дифференцируемости функции $w = f(z)$ в точке z необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялись равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{74.5}$$

Равенства (74.5) называются *условиями Эйлера–Даламбера* (или условиями *Коши–Римана*).

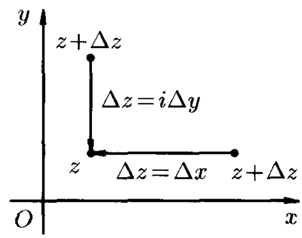


Рис. 284

❑ ***Необходимость***

Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке z, тогда предел (74.4) существует и не зависит от пути, по которому $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \to 0$. Можно считать, что точка $z + \Delta z$ приближается к точке z по прямой, параллельной действительной оси (оси Ox), т. е. $\Delta z = \Delta x \to 0$, $\Delta y = 0$ (рис. 284). Тогда

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(u(x+\Delta x;y) + iv(x+\Delta x;y)\big) - \big(u(x;y) + iv(x;y)\big)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(u(x+\Delta x;y) - u(x;y)\big) + i\big(v(x+\Delta x;y) - v(x;y)\big)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u + i\Delta_x v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если же точка $z + \Delta z$ приближается к точке z по прямой, параллельной мнимой оси (оси Oy), то $\Delta z = i\Delta y \to 0$, $\Delta x = 0$. В этом случае

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\big(u(x;y+\Delta y) + iv(x;y+\Delta y)\big) - \big(u(x;y) + iv(x;y)\big)}{i\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u + i\Delta_y v}{i\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Сравнив найденные пределы, получим $\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y} = f'(z)$. Отсюда следует: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Достаточность

Пусть теперь условия (74.5) выполняются. Докажем, что функция $f(z)$ дифференцируема.

Так как функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ дифференцируемы в точке $z = x + iy$, то их полные приращения можно представить (см. (44.4)) в виде $\Delta u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1$, $\Delta v = \dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2$, где α_1 и α_2 — бесконечно малые более высокого порядка, чем $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Тогда

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\big(u(x+\Delta x; y+\Delta y) + iv(x+\Delta x; y+\Delta y)\big) - \big(u(x;y) + iv(x;y)\big)}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2\right)}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + i\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\alpha_1 + i\alpha_2}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Заменяя в числителе правой части $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ на $-\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ на $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, согласно условиям (74.5), получаем:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + i\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \alpha_3,$$

где

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_1 + i\alpha_2}{\Delta x + i\Delta y},$$

т. е.

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \alpha_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha_3,$$

а α_3 — бесконечно малая высшего порядка относительно $|\Delta z|$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z)$ существует. При этом $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$. ■

С учетом условий Эйлера–Даламбера (74.5) производную дифференцируемой функции $f(z)$ можно находить по формулам

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \\ f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \tag{74.6}$$

Правила дифференцирования функций действительного переменного справедливы и для функций комплексного переменного, дифференцируемых в точке z. Это означает, что если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ дифференцируемы в некоторой точке z комплексной плоскости, то верно следующее:

1. $\big(f_1(z) \pm f_2(z)\big)' = f_1'(z) \pm f_2'(z)$,

2. $\big(f_1(z) \cdot f_2(z)\big)' = f_1'(z) \cdot f_2(z) + f_1(z) \cdot f_2'(z)$,

3. $\left(\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)' = \dfrac{f_1'(z) \cdot f_2(z) - f_1(z) \cdot f_2'(z)}{f_2^2(z)} \quad (f_2(z) \neq 0)$.

4. Если $\varphi(z)$ дифференцируема в точке z, а $f(w)$ дифференцируема в точке $w = \varphi(z)$, то $\big(f(\varphi(z))\big)' = f_\varphi'(\varphi) \cdot \varphi_z'(z)$.

5. Если в некоторой точке z функция $f(z)$ дифференцируема и существует функция $f^{-1}(w)$, дифференцируемая в точке $w = f(z)$, причем $\big(f^{-1}(w)\big)' \neq 0$, то $f'(z) = \dfrac{1}{\big(f^{-1}(w)\big)'}$, где $f^{-1}(w)$ функция, обратная функции $f(z)$.

Приведем без доказательства ***теорему о дифференцируемости основных элементарных функций комплексного переменного***: функции $w = e^z$, $w = \sin z$, $w = \cos z$, $w = \operatorname{sh} z$, $w = \operatorname{ch} z$, $w = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ дифференцируемы в любой точке комплексной плоскости; функции $w = \operatorname{tg} z$ и $w = \operatorname{th} z$ также дифференцируемы в любой точке плоскости, кроме точек $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$ и $z = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cdot i$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ соответственно; для функций $w = \operatorname{Ln} z, w = z^a$ в окрестности каждой точки $z \neq 0$ можно выделить однозначную ветвь, которая является дифференцируемой в точке z функцией.

74.5. Аналитическая функция. Дифференциал

Фундаментальным понятием в теории функций комплексного переменного является понятие аналитической функции.

Однозначная функция $f(z)$ называется ***аналитической*** (голоморфной) ***в точке*** z, если она дифференцируема (выполнены условия Эйлера–Даламбера) в некоторой окрестности этой точки. Функция $f(z)$ называется ***аналитической в области*** D, если она дифференцируема в каждой точке $z \in D$.

Как видно из этого определения, условие аналитичности ***в точке*** не совпадает с условием дифференцируемости функции в этой же точке (первое условие — более сильное).

Точки плоскости z, в которых однозначная функция $f(z)$ аналитична, называются ***правильными*** точками $f(z)$. Точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, называются ***особыми*** точками этой функции.

Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в точке z. Тогда $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z)$. Отсюда следует, что $\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Тогда приращение функции можно записать так: $\Delta w = f'(z)\Delta z + \alpha \Delta z$. Если $f'(z) \neq 0$, то первое слагаемое $f'(z)\Delta z$ является при $\Delta z \to 0$ бесконечно малой того же порядка, что и Δz; второе слагаемое $\alpha \Delta z$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δz. Следовательно, первое слагаемое составляет главную часть приращения функции $w = f(z)$.

Дифференциалом dw аналитической функции $w = f(z)$ в точке z называется главная часть ее приращения, т. е. $dw = f'(z)\Delta z$, или $dw = f'(z)dz$ (так как при $w = z$ будет $dz = z'\Delta z = \Delta z$). Отсюда следует, что $f'(z) = \frac{dw}{dz}$, т. е. производная функции равна отношению дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного.

Замечание. Если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x; y)$ аналитична в некоторой области D, то функции $u(x; y)$ и $v(x; y)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению Лапласа ($\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$, см. п. 72.2).

❑ Действительно, дифференцируя первое из равенств Эйлера–Даламбера по y, а второе по x, получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

откуда $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. ■

Функции $u(x; y)$ и $v(x; y)$ являются *гармоническими функциями.*

Пример 74.3. Проверить, является ли функция $w = z^2$ аналитической. Найти ее производную.

○ Решение: Находим действительную $\operatorname{Re} w = u$ и мнимую $\operatorname{Im} w = v$ части функции:

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Таким образом, $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Проверяем условия Эйлера–Даламбера (74.5):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y.$$

Условия (74.5) выполняются во всех точках комплексной плоскости z. Функция $w = z^2$ дифференцируема, следовательно, аналитична во всех точках этой плоскости. Ее производную найдем по одной из формул (74.6), например по первой:

$$(z^2)' = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) + i\frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z,$$

т. е. $(z^2)' = 2z$.

Заметим, что производную функции $w = z^2$ можно найти, воспользовавшись определением производной (74.4):

$$w' = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} =$$
$$= \lim_{\Delta z\to 0}(2z + \Delta z) = 2z. \quad \bullet$$

Пример 74.4. Найти аналитическую функцию $w = u + iv$ по ее заданной действительной части $u = x^3 - 3xy^2 + 2$.

○ Решение. Отметим, что функция u является гармонической функцией ($u''_{xx} = 6x$, $u''_{yy} = -6x$, следовательно, $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$).

Для определения мнимой части v воспользуемся условиями Эйлера–Даламбера (74 5). Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = (x^3 - 3xy^2 + 2)'_x = 3x^2 - 3y^2$, то, согласно первому условию, $\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$. Отсюда, интегрируя по y, находим:

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial y}\,dy = \int (3x^2 - 3y^2)\,dy = 3x^2y - y^3 + \varphi(x).$$

Для определения функции $\varphi(x)$ воспользуемся вторым условием Эйлера–Даламбера. Так как

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^3 - 3xy^2 + 2)'_y = -6xy,$$

а

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (3x^2y - y^3 + \varphi(x))'_x = 6xy + \varphi'(x),$$

то $-6xy = -(6xy + \varphi'(x))$. Отсюда $\varphi'(x) = 0$ и $\varphi(x) = C$, где $C = \text{const}$. Поэтому $v = 3x^2y - y^3 + C$. Находим функцию $w = u + iv$:

$$w = u + iv = x^3 - 3xy^2 + 2 + i(3x^2y - y^3 + C) =$$
$$= x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3 + 2 + Ci = (x + iy)^3 + 2 + iC = z^3 + 2 + iC. \quad \bullet$$

74.6. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие о конформном отображении

Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Выясним геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Функция $w = f(z)$ отображает точку z_0 плоскости z в точку $w_0 = f(z_0)$ плоскости w.

Пусть произвольная точка $z = z_0 + \Delta z$ из окрестности точки z_0 перемещается к точке z_0 по некоторой непрерывной кривой l. Тогда в плоскости w соответствующая точка $w = w_0 + \Delta w$ будет перемещаться к точке w_0 по некоторой кривой L, являющейся отображением кривой l в плоскости w (рис. 285).

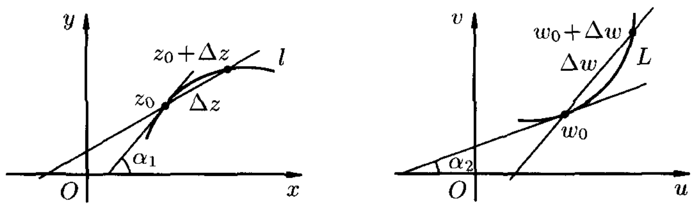


Рис. 285

По определению производной $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$. Отсюда следует, что $|f'(z_0)| = |\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}| = \lim\limits_{\Delta z \to 0} |\dfrac{\Delta w}{\Delta z}| = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$. Величина $|\Delta z| = |z - z_0|$ представляет собой расстояние между точками z_0 и $z_0 + \Delta z$, а $|\Delta w|$ — расстояние между точками w_0 и $w_0 + \Delta w$. Следовательно, $|f'(z_0)|$ есть предел отношения бесконечно малого расстояния между отображенными точками w_0 и $w_0 + \Delta w$ к бесконечно малому расстоянию между точками z_0 и $z_0 + \Delta z$. Этот предел не зависит ($f(z)$ аналитична в точке z_0) от выбора кривой l, проходящей через точку z_0. Следовательно, предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = |f'(z_0)|$ в точке z_0 постоянен, т. е. одинаков во всех направлениях.

Отсюда вытекает геометрический смысл модуля производной: величина $|f'(z_0)|$ определяет коэффициент растяжения (подобия) в точке z_0 при отображении $w = f(z)$. Величину $|f'(z_0)|$ называют ***коэффициентом растяжения***, если $|f'(z_0)| > 1$, или ***коэффициентом сжатия***, если $|f'(z_0)| < 1$.

Пример 74.5. Найти коэффициент растяжения (сжатия) для функции $w = \frac{1}{2}z^2$ в точке $z_0 = 3 - 4i$.

Решение: Функция $w = \frac{1}{2}z^2$ аналитична в точке $z_0 = 3 - 4i$, при этом $w' = z$. Следовательно, $|f'(z_0)| = |z_0| = |3 - 4i| = 5 > 1$. Коэффициент растяжения для функции $w = \frac{1}{2}z^2$ в точке z_0 равен 5 (плоскость растягивается). ●

Для аргумента производной в точке z_0 имеем:

$$\arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (\arg \Delta w - \arg \Delta z) =$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \alpha_2 - \alpha_1,$$

где α_1 и α_2 — углы, которые образуют касательные к кривым l и L соответственно в точках z_0, и w_0 с положительными направлениями действительных осей на плоскостях z и w (см. рис. 285).

Отсюда $\alpha_2 = \alpha_1 + \arg f'(z_0)$. Это означает, что $\arg f'(z_0)$ — это угол, на который нужно повернуть касательную к кривой l в точке z_0 для того, чтобы получить направление касательной к кривой L в точке w_0. Другими словами, $\arg f'(z_0)$ — это угол между отображенным и первоначальным направлениями касательных к кривым l и L в точках z_0 и w_0 соответственно. В этом состоит геометрический смысл аргумента производной $\arg f'(z_0)$.

В силу аналитичности функции $f(z)$ в точке z_0 (мы предположили, что $f(z_0) \neq 0$) угол $\arg f'(z_0)$ один и тот же для всех кривых, проходящих через точку z_0. Для другой пары кривых l_1 и L_1 в тех же точках z_0 и w_0 будем иметь $\arg f'(z_0) = \alpha_2' - \alpha_1' = \varphi$. Таким образом, $\arg f'(z_0) = \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_2' - \alpha_1'$, т. е. если кривые l и l_1 образуют в точке z_0 на плоскости z угол $\varphi = \arg f'(z_0)$, то такой же угол $\varphi = \arg f'(z_0)$ будут образовывать в точке w_0 кривые L и L_1, являющиеся отображениями кривых l и l_1 на плоскости w (см. рис. 286).

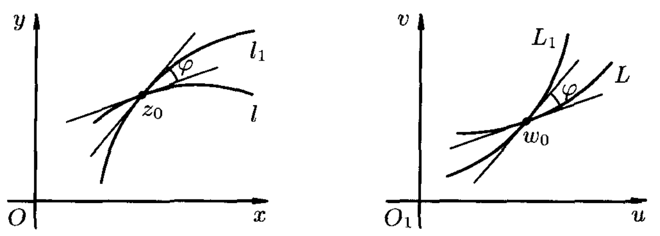


Рис. 286

Это свойство отображения $w = f(z)$ называется *свойством сохранения (консерватизма) углов* в точке z_0.

Отображение $w = f(z)$, обладающее свойством сохранения углов и постоянством растяжений в точке z_0, называется ***конформным*** (т. е. отображением, сохраняющим форму). Если при этом сохраняется и направление отсчета углов, то такое отображение называется ***конформным отображением* 1-*го рода***; если направление отсчета углов изменяется на противоположное — ***конформным отображением* 2-*го рода***.

Таким образом, если функция $f(z)$ является аналитической в некоторой точке z_0 комплексной плоскости z и в этой точке ее производная отлична от нуля, то отображение $w = f(z)$ конформно в этой точке

Отображение $w = f(z)$ называется конформным в области D, если оно конформно в каждой точке этой области.

Справедливо следующее утверждение: если функция $w = f(z)$ аналитична в области D, причем во всех точках области $f'(z) \neq 0$, то отображение конформно в D; если отображение $w = f(z)$ конформно в области D, то функция $w = f(z)$ аналитична в D и во всех точках этой области $f'(z) \neq 0$.

Пример 74.6. Выяснить геометрическую картину отображения, осуществляемого функцией $w = 2z$.

Решение. Отображение $w = 2z$ конформно во всех точках плоскости z, т.к. $w' = 2 \neq 0$.

Коэффициент растяжения в любой точке плоскости z равен 2. Так как $\arg w' = \arg 2 = 0$, то направление при отображении не меняется. Таким образом, отображение $w = 2z$ есть преобразование гомотетии с центром в нулевой точке ($w = 0$ при $z = 0$) и коэффициентом гомотетии, равным 2. ●

§ 75. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

75.1. Определение, свойства и правила вычисления интеграла

Пусть в каждой точке некоторой гладкой кривой L с началом в точке z_0 и концом в точке Z определена непрерывная функция $f(z)$.

Разобьем кривую L на n частей (элементарных дуг) в направлении от z_0 к z точками $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ (см. рис. 287)

В каждой «элементарной дуге» $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ выберем произвольную точку C_k и составим интегральную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k$, где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

Предел такой интегральной суммы при стремлении к нулю длины наибольшей из элементарных дуг, если он существует, называется

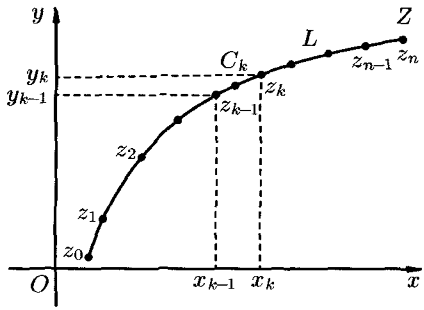


Рис. 287

интегралом от функции $f(z)$ ***по кривой*** (***по контуру***) L и обозначается символом $\int\limits_L f(z)\,dz$.

Таким образом,

$$\boxed{\int\limits_L f(z)\,dz = \lim_{\substack{\max|\Delta z_k|\to 0\\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k} \tag{75.1}$$

Покажем, что если L — гладкая кривая, а $f(z)$ — непрерывная и однозначная функция, то интеграл (75.1) существует.

Действительно, пусть $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$, $z = x + iy$, $C_k = \widehat{x}_k + i\widehat{y}_k$. Тогда

$$f(C_k) = u(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k) + iv(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k),$$

$$\Delta z_k = (x_k + iy_k) - (x_{k-1} + iy_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}\big(u(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k) + iv(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k)\big)\cdot(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\big(u(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k)\Delta x_k - v(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k)\Delta y_k\big) + i\sum_{k=1}^{n}\big(v(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k)\Delta x_k + u(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k)\Delta y_k\big).$$

Обе суммы, находящиеся в правой части последнего равенства, являются интегральными суммами для соответствующих криволинейных интегралов (см. п. 56.1).

При сделанных предположениях о кривой L и функции $f(z)$ пределы этих сумм существуют. Поэтому после перехода к пределу (в последнем равенстве) при $\max|\Delta z_k| \to 0$ получим:

$$\boxed{\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_L u\,dx - v\,dy + i\int\limits_L v\,dx + u\,dy.} \tag{75.2}$$

Формула (75.2) показывает, что вычисление интеграла от функции комплексного переменного сводится к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций действительных переменных.

Формулу (75.2) можно записать в удобном для запоминания виде:

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_L (u + iv)(dx + i\,dy). \tag{75.3}$$

Если $x = x(t), y = y(t)$, где $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ — параметрические уравнения кривой L, то $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ называют ***комплексным параметрическим уравнением*** кривой L; формула (75.3) преобразуется в формулу

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt. \tag{75.4}$$

❑ Действительно, считая $z(t)$ непрерывной и дифференцируемой функцией, получаем

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_L (u + iv)(dx + i\,dy) = \int\limits_{t_1}^{t_2} (u + iv)(x'_t + iy'_t)\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt. \quad ■$$

Приведем основные *свойства* интеграла от функции комплексного переменного.

1. $\int\limits_L dz = z - z_0$.

❑ $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta z_k = \Delta z_1 + \ldots + \Delta z_n = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \ldots + z_n - z_{n-1} = z - z_0$. ■

2. $\int\limits_L \big(f_1(z) \pm f_2(z)\big)\,dz = \int\limits_L f_1(z)\,dz \pm \int\limits_L f_2(z)\,dz$.

3. $\int\limits_L af(z)\,dz = a\int\limits_L f(z)\,dz$, a — комплексное число.

4. $\int\limits_L f(z)\,dz = -\int\limits_{L^-} f(z)\,dz$, т. е. при перемене направления пути интегрирования интеграл изменяет свой знак на противоположный (в других обозначениях кривой: $\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}$).

5. $\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_{L_1} f(z)\,dz + \int\limits_{L_2} f(z)\,dz$, где $L = L_1 + L_2$, т. е. интеграл по всему пути L равен сумме интегралов по его частям L_1 и L_2.

6. *Оценка модуля интеграла.* Если $|f(z)| \leqslant M$ во всех точках кривой L, то $\left|\int\limits_L f(z)\,dz\right| \leqslant Ml$, где l — длина кривой L.

❑ Действительно,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(C_k)\Delta z_k| \leqslant M \sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| \leqslant Ml,$$

где $\sum\limits_{k=1}^{n} |\Delta z_k|$ — длина ломаной $z_0 z_1 z_2 \ldots z_n$, вписанной в кривую L. ■

Все приведенные свойства интеграла функции комплексного переменного непосредственно вытекают из его определения (75.1) и представления (75.2).

Пример 75.1. Вычислить

$$I = \int\limits_L \operatorname{Im} z\,dz,$$

где L — полуокружность $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ (см. рис. 288).

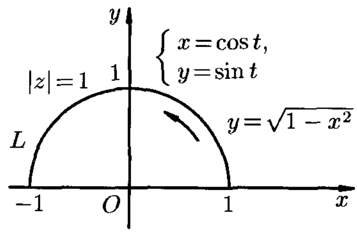


Рис. 288

◐ Решение: Используя формулу (75.3), имеем:

$$I = \int\limits_L y(dx + i\,dy) = \int\limits_L y\,dx + i\int\limits_L y\,dy =$$

$$= \int\limits_1^{-1} \sqrt{1-x^2}\,dx + i\int\limits_1^{-1} \sqrt{1-x^2}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right)\Bigg|_1^{-1} - i\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^{-1} = -\frac{\pi}{2}.$$

Используя формулу (75.4), имеем ($z = \cos t + i\sin t$):

$$I = \int\limits_0^{\pi} \sin t(-\sin t + i\cos t)\,dt = \int\limits_0^{\pi} -\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt + i\int\limits_0^{\pi} \sin t\cos t\,dt =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi} + i\frac{1}{2}\sin^2 t\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}. \quad ●$$

75.2. Теорема Коши. Первообразная и неопределенный интеграл. Формула Ньютона–Лейбница

Теорема 75.1 (Коши). Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру L, лежащему в области D, равен нулю, т. е. $\oint\limits_L f(z)dz = 0$.

❏ Докажем теорему, предполагая непрерывность производной $f'(z)$ (это упрощает доказательство). По формуле (75.2) имеем:

$$\oint\limits_L f(z)dz = \oint\limits_L u\,dx - v\,dy + i\oint\limits_L v\,dx + u\,dy.$$

В силу аналитичности $f(z) = u + iv$ и непрерывности $f'(z)$ в односвязной области D, функции $u = u(x;y)$ и $v = v(x;y)$ непрерывны и дифференцируемы в этой области и удовлетворяют условиям Эйлера–Даламбера: $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(-v)}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$. Эти условия означают равенство нулю интегралов $\oint\limits_L u\,dx - v\,dy$ и $\oint\limits_L v\,dx + u\,dy$ (см. теорему 56.3). Следовательно, $\oint\limits_L f(z)dz = 0$. ■

Теорема Коши допускает распространение на случай многосвязной области.

Рассмотрим для определенности трехсвязную область D, ограниченную внешним контуром L и внутренними контурами L_1 и L_2. Выберем положительное направление обхода контуров: при обходе область D остается слева (см. рис. 289).

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и на контурах L, L_1 и L_2 (т. е. в замкнутой области $\overline{D}$; функция называется аналитической в замкнутой области $\overline{D}$, если она аналитична в некоторой области, содержащей внутри себя область D и ее границу L).

Проведя два разреза (две дуги) γ_1 и γ_2 области D (см. рис. 289), получим новую односвязную область D_1, ограниченную замкнутым ориентированным контуром Γ, состоящим из контуров L, L_1, L_2 и разрезов γ_1 и γ_2: $\Gamma = L + \gamma_1^+ + L_1 + \gamma_2^+ + L_2 + \gamma_2^- + \gamma_1^-$. По теореме Коши для односвязной области $\oint\limits_\Gamma f(z)\,dz = 0$, но

$$\int\limits_{\gamma_1^+ + \gamma_2^+ + \gamma_2^- + \gamma_1^-} = \int\limits_{\gamma_1^+} + \int\limits_{\gamma_1^-} + \int\limits_{\gamma_2^+} + \int\limits_{\gamma_2^-} = 0,$$

т. к. каждый из разрезов (дуг) γ_1 и γ_2 при интегрировании проходится дважды в противоположных направлениях. Поэтому получаем:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \oint\limits_{L} f(z)\,dz + \oint\limits_{L_1} f(z)\,dz + \oint\limits_{L_2} f(z)\,dz = 0,$$

т. е. интеграл от аналитической в замкнутой многосвязной области $\overline{D}$ функции $f(z)$ по границе области D, проходимой в положительном направлении, равен нулю.

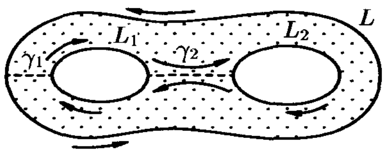


Рис. 289

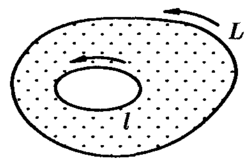


Рис. 290

Замечание. Изменив направление обхода внутренних контуров L_1 и L_2, будем иметь $\oint\limits_{L} f(z)\,dz = \oint\limits_{L_1} f(z)\,dz + \oint\limits_{L_2} f(z)\,dz$, где все контуры ($L$, L_1 и L_2) обходятся в одном направлении: против часовой стрелки (или по часовой стрелке). В частности, если $f(z)$ аналитична в двусвязной области, ограниченной контурами L и l и на самих этих контурах (см. рис. 290), то $\oint\limits_{L} f(z)\,dz = \oint\limits_{l} f(z)\,dz$, т. е. «интеграл от функции $f(z)$ по внешнему контуру L равен интегралу от функции $f(z)$ по внутреннему контуру l» (контуры L и l обходят в одном направлении).

Следствие 75.1. Если $f(z)$ — аналитическая функция в односвязной области D, то интеграл от нее не зависит от формы пути интегрирования, а зависит лишь от начальной точки z_0 и конечной точки z пути интегрирования.

❑ Действительно, пусть L_1 и L_2 — две кривые в области D, соединяющие точки z_0 и z (рис. 291).

По теореме Коши $\oint\limits_{L_1+L_2^-} f(z)dz = 0$, т. е. $\int\limits_{L_1} f(z)\,dz + \int\limits_{L_2^-} f(z)\,dz = 0$,

или $\int\limits_{L_1} f(z)\,dz - \int\limits_{L_2} f(z)\,dz = 0$, откуда $\int\limits_{L_1} f(z)\,dz = \int\limits_{L_2} f(z)\,dz$. ■

В таких случаях, когда интеграл зависит только от начальной точки и конечной точки пути интегрирования, пользуются обозначением $\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$. Если здесь зафиксировать точку z_0, а точку z изменять, то $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ будет функцией от z. Обозначим эту функцию через $F(z)$: $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$. Можно доказать, что если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то функция $F(z)$ также аналитична в D, причем

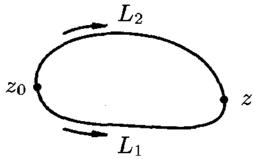


Рис. 291

$$F'(z) = \left(\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz\right)' = f(z).$$

Функция $F(z)$ называется ***первообразной*** для функции $f(z)$ в области D, если $F'(z) = f(z)$.

Можно показать, что если $F(z)$ есть некоторая первообразная для $f(z)$, то совокупность всех первообразных $f(z)$ определяется формулой $F(z) + C$, где $C = \text{const}$.

Совокупность всех первообразных функций $f(z)$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(z)$ и обозначается символом $\int f(z)\,dz$, т. е.

$$\boxed{\int f(z)\,dz = F(z) + C, \quad \text{где} \quad F'(z) = f(z).}$$

Пусть функция $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ есть первообразная функция для $f(z)$. Следовательно, $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z) + C$. Положив здесь $z = z_0$, получим $0 = F(z_0) + C$ (контур замкнется, интеграл равен нулю). Отсюда $C = -F(z_0)$, а значит,

$$\boxed{\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z) - F(z_0).}$$

Полученная формула называется *формулой Ньютона–Лейбница.*

Интегралы от элементарных функций комплексного переменного в области их аналитичности вычисляются с помощью тех же формул и методов, что и в действительном анализе.

Так, $\int e^z\,dz = e^z + C$; $\int \sin z\,dz = -\cos z + C$; $\int\limits_0^i 3z^2\,dz = 3\cdot\frac{z^3}{3}\Big|_0^i = -i$ и т. д.

Пример 75.2. Вычислить интегралы: а) $\oint\limits_L \frac{dz}{z-z_0}$; б) $\oint\limits_L (z-z_0)^n dz$ ($n \neq -1$), где L есть окружность радиуса R с центром в точке z_0, обходимая против часовой стрелки (см. рис. 292).

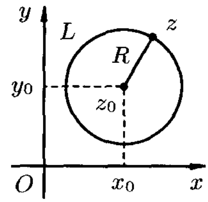


Рис. 292

○ Решение: а) Теорема Коши неприменима, т.к. функция $\frac{1}{z-z_0}$ не аналитична в точке z_0. Параметрические уравнения окружности L есть $x = x_0 + R\cos t$, $y = y_0 + R\sin t$, где $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Следовательно,

$$z = x + iy = x_0 + R\cos t + iy_0 + iR\sin t = (x_0 + iy_0) + R(\cos t + i\sin t) = z_0 + R\cdot e^{it}.$$

Таким образом, мы получили, что комплексно-параметрическое уравнение данной окружности есть $z = z_0 + R\cdot e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Поэтому по формуле (75.4) получим:

$$\oint\limits_L \frac{dz}{z-z_0} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{i\cdot R\cdot e^{it}}{R\cdot e^{it}}\,dt = i\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

б) При $n \neq -1$ имеем:

$$\oint\limits_L (z-z_0)^n\,dz = \int\limits_0^{2\pi} \left(R\cdot e^{it}\right)^n R\cdot i\cdot e^{it}\,dt = iR^{n+1}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt = R^{n+1}\cdot\frac{e^{i(n+1)t}}{n+1}\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{R^{n+1}}{n+1}\left(\cos 2\pi(n+1) + i\sin 2\pi(n+1) - e^0\right) = \frac{R^{n+1}}{n+1}(1-1) = 0.$$

Итак,

$$\boxed{\oint\limits_L \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i, \quad \oint\limits_L (z-z_0)^n dz = 0,\ n \text{ — целое},\ n \neq -1.}$$ ●

75.3. Интеграл Коши. Интегральная формула Коши

Теорема 75.2. Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой односвязной области $\overline{D}$ и L — граница области D. Тогда имеет место формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz, \tag{75.5}$$

где $z_0 \in D$ — любая точка внутри области D, а интегрирование по контуру L производится в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки).

Интеграл, находящийся в правой части равенства (75.5), называется ***интегралом Коши***, а сама эта формула называется ***интегральной формулой Коши***.

Формула Коши (75.5) является одной из важнейших в теории функций комплексного переменного. Она позволяет находить значения аналитической функции $f(z)$ в любой точке z_0, лежащей внутри области D через ее значения на границе этой области.

❑ Построим окружность l_r с центром в точке z_0, взяв радиус r столь малым, чтобы данная окружность была расположена внутри области (чтобы l_r не пересекала L).

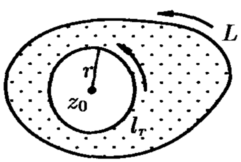


Рис. 293

Получим двусвязную область D_1 (заштрихованную на рис. 293), ограниченную контурами L и l_r, в которой функция $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ аналитична.

Тогда, согласно замечанию к теореме Коши (с. 545), имеем:

$$\oint_L \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = \oint_{l_r} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{l_r} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{l_r} \frac{f(z_0)+f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}f(z_0)\oint_{l_r} \frac{dz}{z-z_0} + \frac{1}{2\pi i}\oint_{l_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz.$$

Но $\displaystyle\oint_{l_r} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$ (см. пример 75.2). Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i}f(z_0)\cdot 2\pi i + \frac{1}{2\pi i}\oint_{l_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz,$$

т. е.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{l_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz. \qquad (75.6)$$

Оценим разность в левой части равенства (75.6). Так как аналитическая функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0 \in D$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $r > 0$ такое, что при $|z-z_0| \leqslant r$ (на окружности l_r имеем $|z-z_0| = r$) справедливо неравенство $|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$.

Применяя свойство 6 об оценке модуля интеграла (п. 75.1), имеем:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L}\frac{f(z)\,dz}{z-z_0}-f(z_0)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{l_r}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\,dz\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{r}2\pi r=\varepsilon.$$

Так как ε может быть выбран сколь угодно малым, а левая часть последнего неравенства не зависит от ε, то она равна нулю:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L}\frac{f(z)\,dz}{z-z_0}-f(z_0)=0,$$

откуда следует формула (75.5). ■

Отметим, что интегральная формула Коши (75.5) справедлива и для многосвязной области: каждый из контуров обходится так, чтобы область D оставалась слева.

Применяя интегральную формулу Коши, можно доказать следующие теоремы-следствия.

Теорема 75.3. Для всякой дифференцируемой в точке z_0 функции $f(z)$ существуют производные всех порядков, причем n-я производная имеет вид:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{L}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz. \tag{75.7}$$

Теорема 75.4. В окрестности каждой точки z_0, где существует производная $f'(z_0)$, функция $f(z)$ может быть представлена сходящимся рядом:

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\ldots \tag{75.8}$$

Таким образом, ***производная аналитической функции также является аналитической функцией.***

Напомним, что из дифференцируемости действительной функции не следует даже существования второй производной (функция $y=\sqrt[3]{x}$

имеет производную в точке $x = 0$, а производная этой функции $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ при $x = 0$ не существует).

Ряд (75.8) называется ***рядом Тейлора*** функции $f(z)$ в точке z_0.

Ряд Тейлора дифференцируемой в точке z_0 функции существует и сходится к самой функции. Ряд же Тейлора для действительной функции $f(x)$ может сходиться к другой функции или быть расходящимся.

Замечание. Формула n-й производной функции $f(z)$ может быть получена из формулы Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \tag{75.9}$$

(в формуле (75.5) заменено z на ξ, z_0 на z) путем последовательного дифференцирования равенства (75.9) по z:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi. \tag{75.10}$$

Формулы (75.5) и (75.7) можно использовать для вычисления интегралов по замкнутым контурам.

Пример 75.3. Вычислить $\oint\limits_L \frac{dz}{z^2+4}$, где а) L — окружность $|z| = 1$, б) L — окружность $|z - i| = 2$.

Решение: а) функция $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$ является аналитической в области $|z| \leqslant 1$. В силу теоремы Коши имеем $\oint \frac{dz}{z^2+4} = 0$.

б) На рисунке 294 представлена область, ограниченная контуром интегрирования.

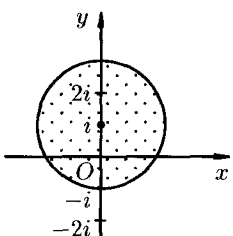


Рис. 294

В этой области $|z - i| \leqslant 2$ находится точка $z = 2i$, в которой знаменатель подынтегральной функции равен нулю. Перепишем интеграл в виде

$$\oint\limits_L \frac{dz}{z^2+4} = \oint\limits_L \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i}\, dz.$$

Функция $f(z) = \frac{1}{z+2i}$ является аналитической в данной области. Применяя интегральную формулу Коши (75.5), находим:

$$\oint\limits_L \frac{dz}{z^2+4} = 2\pi i \left(\frac{1}{z+2i}\right)\Big|_{z=2i} = 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$ ●

Пример 75.4. Вычислить $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\, dz$.

○ Решение: Внутри круга и на его границе $|z| = 1$ функция $f(z) = \cos z$ аналитична. Поэтому, в силу формулы (75.7), имеем

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\,dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{(z-0)^{2+1}}\,dz =$$

$$= \frac{2\pi i}{2!}(\cos z)''\Big|_{z=0} = \pi i(-\cos z)\Big|_{z=0} = -\pi i. \quad \bullet$$

§ 76. РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

76.1. Числовые ряды

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{76.1}$$

членами которого являются комплексные числа, называется ***числовым рядом*** (в комплексной области). Ряд (76.1) с комплексными членами $u_n = a_n + ib_n$ можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n) = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + \ldots + (a_n + ib_n) + \ldots,$$

где a_n и b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ — действительные числа.

Сумма $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k + ib_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + i\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ первых n членов ряда (76.1) называется n-й *частичной суммой ряда.*

Если существует конечный предел S последовательности частичных сумм S_n ряда: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k + i\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, то ряд (76.1) называется *сходящимся*, а S — суммой ряда; если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд (76.1) называется *расходящимся.*

Очевидно, что ряд (76.1) сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый из рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{76.2}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{76.3}$$

При этом $S = S_1 + iS_2$, где S_1 — сумма ряда (76.2), а S_2 — сумма ряда (76.3). Это означает, что исследование сходимости ряда с комплексными членами сводится к исследованию сходимости рядов (76.2) и (76.3) с действительными членами.

В теории рядов с комплексными членами основные определения, многие теоремы и их доказательства аналогичны соответствующим определениям и теоремам из теории рядов с действительными членами.

Приведем некоторые из них.

Остатком ряда (76.1) называется разность

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k + i \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k.$$

Теорема 76.1 (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд (76.1) сходится, то его общий член u_n при $n \to \infty$ стремится к нулю $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

Ряд (76.1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \qquad (76.4)$$

Теорема 76.2. Если сходится ряд (76 4), то абсолютно сходится ряд (76 1).

☐ По условию ряд с общим членом $|u_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ сходится. Тогда в силу очевидных неравенств $|a_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ и $|b_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ и на основании признака сравнения (теорема 60.1) сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$. Отсюда следует сходимость рядов (76.2) и (76.3), а значит, и абсолютная сходимость ряда (76.1). ■

Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму S, то ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму S, что и исходный ряд.

Абсолютно сходящиеся ряды можно почленно складывать и перемножать.

При исследовании на сходимость рядов с комплексными членами применимы все известные из действительного анализа признаки сходимости знакопостоянных рядов, в частности признак Даламбера: если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$, то при $l < 1$ ряд (76.4) абсолютно сходится, а при $l > 1$ — расходится.

76.2. Степенные ряды

Степенным рядом в комплексной области называют ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \qquad (76.5)$$

где c_n — комплексные числа (*коэффициенты ряда*), $z = x + iy$ — комплексная переменная.

Рассматривают также и степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad (76.6)$$

который называют рядом по степеням разности $z - z_0$, z_0 — комплексное число. Подстановкой $z - z_0 = t$ ряд (76.6) сводится к ряду (76.5).

Ряд (76.5) при одних значениях аргумента z может сходиться, при других расходиться.

Совокупность всех значений z, при которых ряд (76.5) сходится, называется ***областью сходимости*** этого ряда.

Основной теоремой теории степенных рядов является теорема Абеля, устанавливающая область сходимости степенного ряда.

Теорема 76.3 (Абель). Если степенной ряд (76 5) сходится при $z = z_0 \neq 0$ (в точке z_0), то он абсолютно сходится при всех значениях z, удовлетворяющих условию $|z| < |z_0|$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы Абеля в действительном анализе (теорема 63.1).

Следствие 76.1. Если ряд (76.5) расходится при $z = z_0$, то он расходится при всех значениях z, удовлетворяющих условию $|z| > |z_0|$ (т. е. вне круга радиуса $|z_0|$ с центром в начале координат)

Из теоремы Абеля следует существование числа $R = |z_0|$ такого, что при всех значениях z, удовлетворяющих неравенству $|z| < R$, степенной ряд (76.5) абсолютно сходится. Неравенству $|z| < R$ удовлетворяют точки комплексной области, лежащие внутри круга радиуса R с центром в точке $z = 0$.

Величина R называется ***радиусом сходимости*** ряда (76.5), а круг $|z| < R$ — ***кругом сходимости*** ряда. В круге $|z| < R$ ряд (76.5) сходится, вне этого круга — расходится; на окружности $|z| = R$ могут располагаться как точки сходимости, так и точки расходимости ряда.

Принято считать, что $R = 0$, когда ряд (76.5) сходится в одной точке $z = 0$; $R = \infty$, когда ряд сходится на всей комплексной плоскости. Кругом сходимости ряда (76.6) является круг $|z - z_0| < R$ с центром в точке $z = z_0$.

Радиус сходимости ряда (76.5) можно вычислить по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ (или $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$), получаемой после применения признака Даламбера (или Коши) к ряду из модулей его членов исходного ряда.

Приведем (без доказательств) некоторые *свойства* степенного ряда.

1. Сумма степенного ряда внутри круга его сходимости есть аналитическая функция.

2. Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно дифференцировать и почленно интегрировать любое число раз. Полученный при этом ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

Пример 76.1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.

Решение: Здесь $c_n = \frac{1}{n!}$, $c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$,

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

т. е. $R = \infty$. Следовательно, областью сходимости является вся плоскость z. ●

Пример 76.2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(n+1)2^n}$.

Решение: Здесь $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+2)}{(n+1)2^n}\right| = 2$. Данный ряд сходится в области $|z - i| < 2$. ●

Пример 76.3. Определить радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{\sqrt{n}}$$

и исследовать сходимость ряда в точках $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = 3 - 2i$.

○ Решение: Воспользуемся признаком Даламбера. Здесь

$$|u_n|=\frac{|z^{2n}|}{\sqrt{n}},\quad |u_{n+1}|=\frac{|z^{2n+2}|}{\sqrt{n+1}},\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|z^{2n+2}|\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}|z^{2n}|}=|z|^2.$$

Ряд сходится при всех z, удовлетворяющих неравенству $|z|^2 < 1$, т. е. $|z| < 1$. Кругом сходимости является круг с центром в точке $z = 0$ и радиусом 1.

Точка $z_1 = 0$ лежит внутри круга сходимости, в этой точке ряд сходится абсолютно. Точка $z_2 = i$ лежит на границе круга сходимости, в этой точке ряд может сходиться (абсолютно или условно) и расходиться. Подставляя значение $z_2 = i$ в выражение общего члена ряда, получим $(-1)^{n+1}\frac{(i)^{2n}}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{n}} = -\frac{1}{\sqrt{n}}$. Числовой ряд с общим членом $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится согласно интегральному признаку Коши (теорема 60.5). Следовательно, в точке $z_2 = i$ степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{\sqrt{n}}$ расходится.

Точка $z_3 = 3 - 2i$ лежит вне круга сходимости, ряд в этой точке расходится. ●

76.3. Ряд Тейлора

Теорема 76.4. Всякая аналитическая в круге $|z - z_0| < R$ функция $f(z)$ может быть единственным образом разложена в этом круге в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \tag{76.7}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots), \tag{76.8}$$

где l_r — произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри круга

Степенной ряд (76.7) называется *рядом Тейлора* для функции $f(z)$ в рассматриваемом круге.

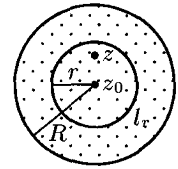


Рис. 295

□ Возьмем произвольную точку z внутри данного круга и проведем окружность с центром в точке z_0 и радиусом $r < R$ так, чтобы точка z находилась внутри круга $|z - z_0| < r$ (см. рис. 295).

Так как функция $f(z)$ аналитична в круге $|z-z_0|<r$ и на его границе l_r, то ее значение в точке z можно найти по формуле Коши (75.9): $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r}\dfrac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$, где ξ — точка на окружности l_r. Имеем:

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{(\xi-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)}=\frac{\frac{1}{\xi-z_0}}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}.$$

Так как $|z-z_0|<|\xi-z_0|$, то $\left|\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|<1$, следовательно, выражение $\dfrac{\frac{1}{\xi-z_0}}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}$ можно рассматривать как сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\dfrac{1}{\xi-z_0}$ и знаменателем $\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}$. Таким образом,

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0}+\frac{z-z_0}{(\xi-z_0)^2}+\frac{(z-z_0)^2}{(\xi-z_0)^3}+\ldots+\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}+\ldots$$

Умножим обе части этого равенства на величину $\dfrac{1}{2\pi i}f(\xi)$ и проинтегрируем его почленно по контуру l_r. Получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi+(z-z_0)\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^2}d\xi+$$

$$+(z-z_0)^2\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^3}d\xi+\ldots+(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi+\ldots,$$

т. е. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r}\dfrac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}$, или $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, где $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_r}\dfrac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Используя формулу (75.10), получим представление коэффициентов ряда через n-е производные функции $f(z)$ в точке z_0: $c_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ $(n=0,1,2,\ldots)$.

Таким образом, мы получили разложение функции $f(z)$ в степенной ряд (76.7), коэффициенты которого определяются по формулам (76.8).

Докажем единственность этого разложения.

Допустим, что функция $f(z)$ в круге $|z-z_0|<R$ представлена другим степенным рядом

$$f(z)=b_0+b_1(z-z_0)+b_2(z-z_0)^2+\ldots+b_n(z-z_0)^n+\ldots$$

Последовательно дифференцируя почленно этот ряд бесконечное число раз, будем иметь:

$$f'(z) = b_1 + 2b_2(z - z_0) + 3b_3(z - z_0)^2 + \ldots + nb_n(z - z_0)^{n-1} + \ldots,$$
$$f''(z) = 2b_2 + 3 \cdot 2b_3(z - z_0) + \ldots + n(n-1)b_n(z - z_0)^{n-2} + \ldots,$$
$$f'''(z) = 3 \cdot 2b_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)b_n(z - z_0)^{n-3} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$
$$f^{(n)}(z) = n! \cdot b_n + (n+1)! \cdot b_{n+1} \cdot (z - z_0) + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Полагая в этих равенствах, а также в исходном ряде $z = z_0$, получаем: $b_0 = f(z_0)$, $b_1 = f'(z_0)$, $b_2 = \dfrac{f''(z_0)}{2!}, \ldots, b_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \ldots$ Сравнивая найденные коэффициенты b_n ряда с коэффициентами ряда (76.7), устанавливаем, что $b_n = c_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, а это означает, что указанные ряды совпадают.

Функция $f(z)$ разлагается в степенной ряд единственным образом. ■

Приведем разложения некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена):

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots,$$
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots,$$
$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots,$$
$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots,$$
$$(1 + z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + \ldots$$

Первые три разложения справедливы во всех точках комплексной плоскости, последние два — в круге $|z| < 1$.

Заменив z на iz в разложении функции e^z, получим:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots =$$
$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right),$$

т. е. формулу Эйлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

76.4. Нули аналитической функции

Как показано выше, всякая функция $f(z)$, аналитическая в окрестности точки z_0, разлагается в этой окрестности в степенной ряд (76.7): коэффициенты которого определяются по формулам (76.8).

Точка z_0 называется ***нулем функции*** $f(z)$, если $f(z_0) = 0$. В этом случае разложение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 в степенной ряд не содержит нулевого члена, т. к. $c_0 = f(z_0) = 0$. Если не только $c_0 = 0$, но и $c_1 = c_2 = \ldots = c_{m-1} = 0$, а $c_m \neq 0$, то разложение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots, \quad (76.9)$$

а точка z_0 называется *нулем кратности* m (или нулем m-го порядка). Если $m = 1$, то z_0 называется *простым нулем.*

Из формул (76.8) для коэффициентов ряда Тейлора следует, что если z_0 является нулем кратности m функции $f(z)$, то $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, но $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. В этом случае представление функции степенным рядом (76.9) можно переписать в виде $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, где

$$\varphi(z) = c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \ldots \quad (76.10)$$

Для функции $\varphi(z)$ точка $z = z_0$ уже не является нулем, так как $\varphi(z_0) = c_m \neq 0$.

Справедливо и обратное утверждение: если функция $f(z)$ имеет вид (76.10), где m — натуральное число, а $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, то точка z_0 есть нуль кратности m функции $f(z)$.

76.5. Ряд Лорана

Теорема 76.5. Всякая аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$ ($0 \leqslant r < R \leqslant \infty$) функция $f(z)$ может быть разложена в этом кольце в ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad (76.11)$$

коэффициенты которого определяются формулой

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad (76.12)$$

где L — произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри данного кольца.

Ряд (76.11) называется *рядом Лорана* для функции $f(z)$ в рассматриваемом кольце.

❑ Возьмем произвольную точку z внутри кольца $r < |z - z_0| < R$ и проведем две окружности L_1 и L_2 с центрами в точке z_0 так, чтобы точка z была между ними и каждая окружность находилась внутри данного кольца (см. рис. 296).

Функция $f(z)$ аналитична в кольце между окружностями L_1 и L_2 и на самих окружностях. Поэтому по формуле Коши для многосвязной области имеем:

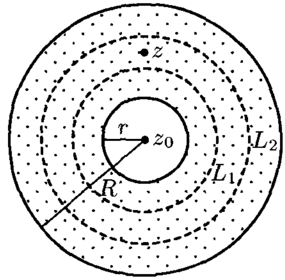


Рис. 296

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_1+L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad (76.13)$$

где обе окружности L_1 и L_2 обходятся против часовой стрелки.

Преобразуем слагаемые, стоящие в правой части равенства (76.13), рассуждая, как и при выводе формулы Тейлора.

На окружности L_2 выполняется неравенство $|z - z_0| < |\xi - z_0|$, или $\left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| < 1$. Поэтому дробь $\frac{1}{\xi - z}$ можно представить в виде

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} =$$
$$= \frac{1}{\xi - z_0} + \frac{z - z_0}{(\xi - z_0)^2} + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} + \ldots$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} + \frac{1}{2\pi i}(z - z_0) \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{2\pi i}(z - z_0)^n \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} + \ldots$$

Проинтегрируем это равенство по контуру L_2:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi + (z - z_0) \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi + \ldots$$
$$\ldots + (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi + \ldots, \quad (76.14)$$

т. е. $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, где

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

(здесь $c_n\neq\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, так как функция $f(z)$, возможно, не аналитична в точке z_0).

На окружности L_1 имеем $|\xi-z_0|<|z-z_0|$, т. е. $\left|\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right|<1$. Тогда

$$\frac{1}{\xi-z}=-\frac{1}{z-\xi}=-\frac{1}{(z-z_0)-(\xi-z_0)}=-\frac{1}{(z-z_0)\left(1-\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)}=$$
$$=-\left(\frac{1}{z-z_0}+\frac{\xi-z_0}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}+\ldots\right).$$

Значит,

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\xi)}{\xi-z}=\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\xi)}{(z-z_0)}+\frac{1}{2\pi i}\frac{\xi-z_0}{(z-z_0)^2}f(\xi)+\ldots+\frac{1}{2\pi i}\frac{(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}f(\xi)+\ldots$$

Проинтегрируем это равенство почленно по контуру L_1:

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=$$
$$=(z-z_0)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1}f(\xi)\,d\xi+(z-z_0)^{-2}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1}f(\xi)(\xi-z_0)\,d\xi+\ldots$$
$$\ldots+(z-z_0)^{-(n+1)}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1}f(\xi)(\xi-z_0)^n\,d\xi+\ldots=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(z-z_0)^{-n}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1}f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1}d\xi, \quad (76.15)$$

т. е. $-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}$, где

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{-n+1}}d\xi \quad (n=1,2,3,\ldots).$$

Подставив разложения (76.14) и (76.15) в равенство (76.13), получим

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

Формулы для коэффициентов c_n и c_{-n} можно объединить, взяв вместо контура L_1 и L_2 любую окружность L с центром в точке z_0, лежащую в кольце между L_1 и L_2 (следует из теоремы Коши для многосвязной области): $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. ■

Можно доказать, что функция $f(z)$, аналитическая в данном кольце $r < |z - z_0| < R$, разлагается в ряд Лорана (76.11) единственным образом.

Ряд Лорана для функции

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

состоит из двух частей. Первая часть ряда Лорана, т. е. ряд

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

называется ***правильной частью ряда Лорана***; этот ряд сходится к аналитической функции $f_1(z)$ внутри круга $|z - z_0| < R$. Вторая часть ряда Лорана, т. е. ряд

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n},$$

называется ***главной частью ряда Лорана***; этот ряд сходится к аналитической функции $f_2(z)$ вне круга $|z - z_0| > r$.

Внутри кольца $r < |z - z_0| < R$ ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ сходится к аналитической функции $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

В частности, если функция $f(z)$ не имеет особых точек внутри круга $|z - z_0| < R$, то ее разложение в ряд Лорана обращается в ряд Тейлора.

Замечание. На практике при разложении функции в ряд Лорана используют известные разложения основных элементарных функций; дробь вида $\dfrac{1}{z - z_0}$ разлагается в ряд, являющийся рядом геометрической прогрессии; дробь вида $\dfrac{1}{(z - z_0)^k}$, где $k > 1$ — целое, разлагается в ряд, который получается из ряда геометрической прогрессии последовательным дифференцированием $(k-1)$ раз; сложная дробь представляется в виде суммы простейших дробей.

Пример 76.4. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точки $z_0 = 0$.

○ Решение: Воспользуемся известным разложением

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + \ldots,$$

справедливым на всей комплексной плоскости. Положив $u = \frac{1}{z}$, получим

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots + \frac{1}{n!z^n} + \ldots, \quad z \neq 0.$$ ●

Пример 76.5. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 6}$$

в окрестности точки $z_0 = 0$.

○ Решение: Функция имеет две особые точки: $z_1 = -2$ и $z_2 = 3$. Она аналитична в областях: а) $0 \leqslant |z| < 2$; б) $2 < |z| < 3$; в) $|z| > 3$.

Представим функцию $f(z)$ в виде $f(z) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+2}\right)$.

а) В круге $|z| < 2$ (рис. 297) имеем:

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \ldots\right) \quad \left(\text{здесь } \left|\frac{z}{3}\right| < 1, \text{ т. е. } |z| < 3\right),$$

$$-\frac{1}{z+2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} - \ldots\right) \quad \left(\text{здесь } \left|-\frac{z}{2}\right| < 1, \text{ т. е. } |z| < 2\right).$$

Следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 6} = -\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}} + (-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n =$$
$$= -\frac{1}{6} + \frac{1}{36}z - \frac{7}{27 \cdot 8}z^2 + \ldots,$$

ряд Лорана функции $f(z)$ обращается в ряд Тейлора.

б) В кольце $2 < |z| < 3$ (рис. 298) имеем:

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \ldots\right) \quad (|z| < 3),$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} - \ldots\right) =$$
$$= +\frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} - \ldots \quad (|z| > 2).$$

Следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 6} = -\frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}\right).$$

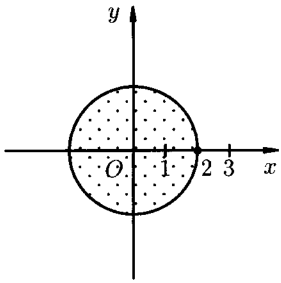


Рис. 297

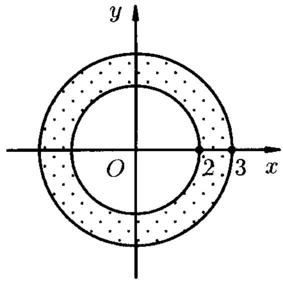


Рис. 298

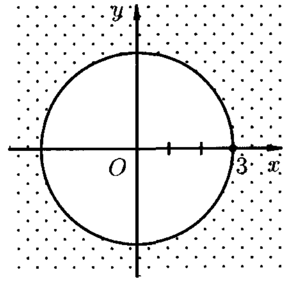


Рис. 299

в) В области $|z| > 3$ (рис. 299) имеем:

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{z^2} + \ldots\right) \quad (|z| > 3),$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} - \ldots\right) \quad (|z| > 2).$$

Следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 6} = \frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{z^{n+1}}\right). \qquad \bullet$$

76.6. Классификация особых точек. Связь между нулем и полюсом функции

Как уже знаем, *особой точкой* функции $f(z)$ называется точка, в которой функция не является аналитической.

Особая точка $z = z_0$ функции $f(z)$ называется ***изолированной***, если в некоторой окрестности ее функция $f(z)$ не имеет других особых точек.

Если z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)$, то существует такое число $R > 0$, что в кольце $0 < |z - z_0| < R$ функция $f(z)$ будет аналитической и, следовательно, разлагается в ряд Лорана (76.11): $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$.

При этом возможны следующие случаи:

1) Ряд Лорана не содержит главной части, т. е. в ряде нет членов с отрицательными показателями. В этом случае точка z_0 называется ***устранимой особой точкой*** функции $f(z)$.

2) Разложение Лорана содержит в своей главной части конечное число членов, т. е. в ряде есть конечное число членов с отрицательными показателями. В этом случае точка z_0 называется ***полюсом*** функции $f(z)$.

3) Разложение Лорана содержит в своей главной части бесконечное множество членов, т. е. в ряде есть бесконечно много членов с отрицательными показателями. В этом случае точка z_0 называется ***существенно особой точкой*** функции $f(z)$.

Укажем особенности поведения аналитической функции $f(z)$ в окрестности особой точки каждого типа.

Устранимые особые точки

Если z_0 — устранимая особая точка, то в окрестности точки z_0 разложение (76.11) имеет вид $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$. Это разложение справедливо во всех точках круга $|z-z_0| < R$, кроме точки $z = z_0$. Если положить $f(z_0) = c_0$, где $c_0 = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ (т. е. определить функцию $f(z)$ в точке z_0), то функция $f(z)$ станет аналитической во всем круге $|z-z_0| < R$ (включая его центр $z = z_0$); особенность точки z_0 устраняется, точка z_0 становится правильной точкой функции $f(z)$).

Из равенства $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c_0$ ($c_0 \neq \infty$) следует, что в достаточно малой окрестности устраняемой особой точки z_0 функция $f(z)$ является ограниченной.

Справедливо и обратное утверждение: ***изолированная особая точка $z = z_0$ является устранимой, если существует конечный предел*** $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$.

Полюсы

Если z_0 — полюс, то в окрестности точки z_0 разложение (76.11) имеет вид $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \dfrac{c_{-1}}{z-z_0} + \dfrac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots + \dfrac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}$, где $c_{-m} \neq 0$. В этом случае полюс z_0 называется *полюсом m-го порядка* функции $f(z)$; если $m = 1$, то полюс z_0 называется *простым*.

Запишем последнее равенство в виде

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m}\Big((z-z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \\ + c_{-2}(z-z_0)^{m-2} + \ldots + c_{-m}\Big)$$

или

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}, \tag{76.16}$$

где $g(z)$ — аналитическая функция, причем $g(z_0) = c_{-m} \neq 0$. Отсюда следует, что $f(z) \to \infty$ при $z \to z_0$, т. е. в достаточно малой окрестности полюса функция $f(z)$ бесконечно велика.

Справедливо и обратное утверждение: ***изолированная особая точка*** $z = z_0$ ***является полюсом, если*** $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Из равенства (76.16) имеем $(z - z_0)^m f(z) = g(z)$. Отсюда получаем удобный способ определения порядка полюса z_0: если

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^m f(z) = c_{-m} \quad (c_{-m} \neq 0,\ c_{-m} \neq \infty), \tag{76.17}$$

то точка z_0 есть полюс m-го порядка.

Имеется связь между нулем и полюсом функции.

Теорема 76.6. Если точка z_0 — нуль m-го порядка функции $f(z)$, то z_0 является полюсом m-го порядка функции $\frac{1}{f(z)}$; если точка z_0 — полюс m-го порядка функции $f(z)$, то z_0 является нулем m-го порядка функции $\frac{1}{f(z)}$.

❑ Докажем первую часть теоремы. Пусть $z = z_0$ есть нуль m-го порядка для функции $f(z)$. Тогда имеет место равенство $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0, причем $\varphi(z_0) \neq 0$. Тогда $(z - z_0)^m \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\varphi(z)}$ и $\lim\limits_{z\to z_0}\left((z - z_0)^m \frac{1}{f(z)}\right) = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0\ (\neq \infty)$. Это означает (см. (76.17)), что для функции $\frac{1}{f(z)}$ точка $z = z_0$ является полюсом m-го порядка. Вторая часть теоремы (обратной) доказывается аналогично. ■

Существенно особая точка

Если z_0 — существенно особая точка, то, как доказывается (теорема Сохоцкого–Вейерштрасса), в достаточно малой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ становится неопределенной. В такой точке аналитическая функция не имеет ни конечного, ни бесконечного предела. Выбирая различные последовательности точек $\{z_n\}$, сходящихся к существенно особой точке z_0, можно получать различные последовательности соответствующих значений функций, сходящиеся к различным пределам.

Пример 76.6. Определить тип особенности функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ в точке $z = 0$.

○ Решение: Функция $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точки $z=0$ имеет следующее лорановское разложение: $e^{\frac{1}{z}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$ (см. пример 76.4). Точка $z=0$ является существенно особой точкой. Если $z\to 0$ вдоль положительной части действительной оси, то $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}=\lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$; если $z\to 0$ вдоль отрицательной части действительной оси, то $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}=$ $=\lim\limits_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}}=0$. ●

Замечание. Классификацию изолированных особых точек можно распространить на случай, когда особой точкой функции $f(z)$ является бесконечно удаленная точка, $z=\infty$.

Окрестностью точки $z=\infty$ называют внешность какого-либо круга с центром в точке $z=0$ и достаточно большим радиусом R (чем больше R, тем меньше окрестность точки $z=\infty$).

Точку $z=\infty$ называют изолированной особой точкой, если в некоторой окрестности ее нет других особых точек функции $f(z)$.

Бесконечно удаленная изолированная особая точка может оказаться устранимой особой точкой, полюсом порядка m или существенно особой точкой. В первом случае лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ не имеет членов с положительными показателями, во втором — имеет их лишь конечное число, в третьем случае в разложении имеется бесконечно много членов с положительными показателями.

Изучение функции $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ можно свести путем подстановки $z=\frac{1}{w}$ к изучению функции $f\left(\frac{1}{w}\right)$ в окрестности точки $z=0$.

Пример 76.7. Найти особые точки функции $f(z)=\frac{\sin z}{z^4}$.

○ Решение: Особой точкой функции $f(z)$ является $z=0$. Найдем предел функции при $z\to 0$: $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z^4}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\frac{1}{z^3}=\infty$. Следовательно, точка $z=0$ является полюсом. Можно убедиться, что $\lim\limits_{z\to 0} z^2\frac{\sin z}{z^4}=\infty$, $\lim\limits_{z\to 0} z^3\frac{\sin z}{z^4}=1\neq 0$. Следовательно (см. (76.17)), точка $z=0$ — полюс третьего порядка. ●

Пример 76.8. Исследовать особенности функции

$$f(z)=\frac{z+3}{z(z+2)(z-1)^2}.$$

Решение: Для данной функции точки $z_1 = 0$ и $z_2 = -2$ — простые полюсы, $z_3 = 1$ — полюс второго порядка. ●

Пример 76.9. Выяснить поведение функций $f(z) = \frac{1}{z-3}$, $g(z) = \frac{z^2}{1+z^2}$ в окрестности точки $z = \infty$.

Решение: Сделаем подстановку $z = \frac{1}{w}$. Тогда функция $f(z) = \frac{1}{z-3}$ примет вид $f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{w}{1-3w}$. При условии $|3w| < 1$ имеет место разложение $f\left(\frac{1}{w}\right) = w\bigl(1 + 3w + (3w)^2 + \ldots\bigr)$. Возвращаясь к старой переменной, имеем

$$f(z) = \frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{3^2}{z^2}+\ldots\right) = \frac{1}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{3^2}{z^3}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 3.$$

Поэтому точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой (см. последнее замечание).

Можно убедиться, что $z = \infty$ для функции $g(z) = \frac{z^2}{1+z^2}$ является правильной точкой. ●

§ 77. ВЫЧЕТ ФУНКЦИИ

77.1. Понятие вычета и основная теорема о вычетах

Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)\,dz$, взятого в положительном направлении по окружности L с центром в точке z_0, лежащей в области аналитичности функции $f(z)$ (т. е. в кольце $0 < |z - z_0| < R$).

Обозначается вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 символом $\operatorname{Res} f(z_0)$ или $\operatorname{Res}(f(z); z_0)$. Таким образом,

$$\boxed{\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)\,dz.} \qquad (77.1)$$

Если в формуле (76.12) положить $n = -1$, то получим

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)\,dz \quad \text{или} \quad \operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1},$$

т. е. вычет функции $f(z)$ относительно особой точки z_0 равен коэффициенту при первом члене с отрицательным показателем в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана (76.11).

Теорема 77.1 (Коши). Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной контуром L, за исключением конечного числа особых точек z_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, лежащих внутри области D, то

$$\oint\limits_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k). \tag{77.2}$$

❑ Вокруг каждой особой точки z_k опишем окружность l_k так, чтобы она целиком содержалась в области D, не содержала внутри других особых точек и чтобы никакие две из этих окружностей не имели общих точек (см. рис. 300).

Тогда на основании теоремы Коши для многосвязной области (см. замечание на с. 545) имеем:

$$\oint\limits_L f(z)\,dz = \oint\limits_{l_1} f(z)\,dz + \oint\limits_{l_2} f(z)\,dz + \ldots + \oint\limits_{l_n} f(z)\,dz,$$

где при интегрировании все контуры обходятся против часовой стрелки. Но, согласно формуле (77.1), имеем:

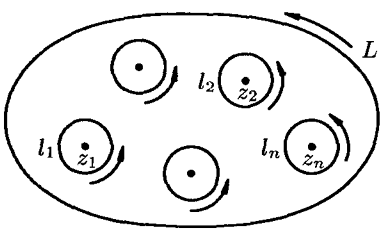


Рис. 300

$$\oint\limits_{l_1} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_1),$$

$$\oint\limits_{l_2} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\oint\limits_{l_n} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_n).$$

Следовательно,

$$\oint\limits_L f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_1) + \ldots + 2\pi i \operatorname{Res} f(z_n),$$

т. е. $\oint\limits_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k)$. ■

77.2. Вычисление вычетов. Применение вычетов в вычислении интегралов

Правильные или устранимые особые точки. Очевидно, если $z = z_0$ есть правильная или устранимая особая точка функции $f(z)$, то $\operatorname{Res} f(z_0) = 0$ (в разложении Лорана (76.11) в этих случаях отсутствует главная часть, поэтому $c_{-1} = 0$).

Полюс. Пусть точка z_0 является простым полюсом функции $f(z)$. Тогда ряд Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \dfrac{c_{-1}}{z-z_0}$. Отсюда

$$(z-z_0)f(z) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n+1}.$$

Поэтому, переходя в этом равенстве к пределу при $z \to z_0$, получаем

$$\boxed{\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).} \tag{77.3}$$

Замечание. Формуле (77.3) для вычисления вычета функции $f(z)$ в простом полюсе можно придать другой вид, если функция $f(z)$ является частным двух функций, аналитических в окрестностях точки z_0.

Пусть $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{g(z)}$, где $\varphi(z_0) \neq 0$, а $g(z)$ имеет простой нуль при $z = z_0$ (т. е. $g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$). Тогда, применяя формулу (77.3), имеем: $\operatorname{Res} f(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)\dfrac{\varphi(z)}{g(z)} = \lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\varphi(z)}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \dfrac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}$, т. е.

$$\boxed{\operatorname{Res}\left(\frac{\varphi(z)}{g(z)}; z_0\right) = \frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}.} \tag{77.4}$$

Пусть точка z_0 является полюсом m-го порядка функции $f(z)$. Тогда лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \dfrac{c_{-1}}{z-z_0} + \dfrac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots + \dfrac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}$. Отсюда
$(z-z_0)^m f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n+m} + c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1}$.

Дифференцируя последнее равенство $(m-1)$ раз, получим:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\big((z-z_0)^m f(z)\big) =$$

$$= (m-1)!c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+m)(n+m-1)(n+m-2)\ldots(n+2)(z-z_0)^{n+1}.$$

Переходя здесь к пределу при $z \to z_0$, получаем

$$\boxed{\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\big((z-z_0)^m f(z)\big).} \tag{77.5}$$

Существенно особая точка. Если точка z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то для вычисления вычета функции в этой точке обычно непосредственно определяют коэффициент c_{-1} в разложении функции в ряд Лорана.

Пример 77.1. Найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{z+2}{z^3 - z^4}$ в ее особых точках.

○ Решение: Особыми точками функции $f(z)$ являются: $z_1 = 1$ — простой полюс, $z_2 = 0$ — полюс третьего порядка ($m = 3$). Следовательно, по формуле (77.4) имеем $\operatorname{Res}(f(z); 1) = \dfrac{z+2}{(z^3 - z^4)'}\Big|_{z=1} = \dfrac{1+2}{3-4} = -3$.

Используя формулу (77.5), находим:

$$\operatorname{Res}(f(z); 0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left((z-0)^3\frac{z+2}{z^3 - z^4}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z+2}{1-z}\right)'' = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3. \quad ●$$

Пример 77.2. Найти вычет функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ в особой точке $z = 0$.

○ Решение: Лорановское разложение данной функции в окрестности точки $z = 0$ было найдено в примере 76.4. Из него находим $c_{-1} = 1$, т. е. $\operatorname{Res}(f(z); 0) = 1$. ●

Теорема о вычетах часто используется для вычисления интеграла от функции комплексного переменного по замкнутому контуру.

Пример 77.3. Вычислить $\oint\limits_L \dfrac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, где L — окружность $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$.

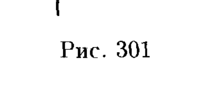


Рис. 301

○ Решение: Функция $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$ имеет в круге $|z - 1 - i| < \sqrt{2}$ (см. рис. 301) простой полюс $z_1 = i$ и полюс второго порядка $z_2 = 1$. Применяя формулы (77.2), (77.3) и (77.5), получаем:

$$\oint\limits_L \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} = 2\pi i\big(\operatorname{Res}(f(z); i) + \operatorname{Res}(f(z); 1)\big) =$$

$$= 2\pi i\left[\lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z-1)^2(z+i)(z-i)} + \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\left((z-1)^2\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\right)'\right] =$$

$$= 2\pi i\left(\lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z+i)} + \lim_{z\to 1}\frac{-2z}{(z^2+1)^2}\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi i}{2}. \quad ●$$

Определенный интеграл вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x; \cos x)\,dx$ с помощью замены $z = e^{ix}$ в некоторых случаях удается преобразовать в интеграл по замкнутому контуру $|z| = 1$ от функции комплексного переменного, к которому уже применима основная теорема о вычетах.

Пример 77.4. Вычислить с помощью вычетов интеграл

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + 2\cos x)^2}.$$

○ Решение: Произведем замену переменного, положив $z = e^{ix}$. Тогда $dz = ie^{ix}dx = iz\,dx$, $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \dfrac{z + \frac{1}{z}}{2} = \dfrac{z^2 + 1}{2z}$. При изменении x от 0 до 2π точка z опишет в положительном направлении окружность $|z| = 1$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + 2\cos x)^2} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(3 + 2\frac{z^2+1}{2z}\right)^2} = \frac{1}{i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(z^2 + 3z + 1)^2} = I.$$

В круге $|z| < 1$ функция $f(z) = \dfrac{z}{(z^2 + 3z + 1)^2}$ имеет полюс второго порядка $z_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2}$. По формуле (77.5) находим

$$\operatorname{Res}\left(f(z); \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1!} \lim_{z \to \frac{-3+\sqrt{5}}{2}} \left(\left(z - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 \frac{z}{\left(z - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot \left(z - \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z \to \frac{-3+\sqrt{5}}{2}} \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - z}{\left(z + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3} = \frac{3}{5\sqrt{5}}.$$

Следовательно, $I = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot \dfrac{3}{5\sqrt{5}} = \dfrac{6\sqrt{5}}{25}\pi$. ●

Глава XVIII. ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Лекции 69–71

Операционное исчисление играет важную роль при решении прикладных задач, особенно в современной автоматике и телемеханике.

Операционное исчисление — один из методов математического анализа, позволяющий в ряде случаев сводить исследование дифференциальных и некоторых типов интегральных операторов и решение уравнений, содержащих эти операторы, к рассмотрению более простых алгебраических задач.

Методы операционного исчисления предполагают реализацию следующей условной схемы решения задачи.

1. От искомых функций переходят к некоторым другим функциям — их изображениям.

2. Над изображениями производят операции, соответствующие заданным операциям над самими функциями.

3. Получив некоторый результат при действиях над изображениями, возвращаются к самим функциям.

В качестве преобразования, позволяющего перейти от функции к их изображениям, будем применять так называемое *преобразование Лапласа.*

§ 78. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

78.1. Оригиналы и их изображения

Основными первоначальными понятиями операционного исчисления являются понятия функции-оригинала и функции-изображения.

Пусть $f(t)$ — действительная функция действительного переменного t (под t будем понимать время или координату).

Функция $f(t)$ называется ***оригиналом***, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

2. $f(t)$ — кусочно-непрерывная при $t \geqslant 0$, т. е. она непрерывна или имеет точки разрыва I рода, причем на каждом конечном промежутке оси t таких точек лишь конечное число.

3. Существуют такие числа $M > 0$ и $s_0 \geqslant 0$, что для всех t выполняется неравенство $|f(t)| \leqslant M \cdot e^{s_0 t}$, т. е. при возрастании t функция $f(t)$ может возрастать не быстрее некоторой показательной функции. Число s_0 называется ***показателем роста*** $f(t)$.

Условия 1–3 выполняются для большинства функций, описывающих различные физические процессы.

Первое условие означает, что процесс начинается с некоторого момента времени; удобнее считать, что в момент $t = 0$. Третьему условию удовлетворяют ограниченные функции (для них можно положить $s_0 = 0$), степенные t^n $(n > 0)$ и другие (для функций вида $f(t) = \alpha e^{t^2}$ условие 3 не выполняется). Не является оригиналом, например, функция $f(t) = \frac{1}{t}$ (не удовлетворяет второму условию).

Замечание. Функция $f(t)$ может быть и комплексной функцией действительно переменного, т. е. иметь вид $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$; она считается оригиналом, если действительные функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются оригиналами.

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая интегралом

$$\boxed{F(p) = \int\limits_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt.} \tag{78.1}$$

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называют ***преобразованием Лапласа***. Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывается в виде $f(x) \risingdotseq F(p)$ или $F(p) \risingdotseq f(x)$ (принято оригиналы обозначать малыми буквами, а их изображения — соответствующими большими буквами).

Теорема 78.1 (существование изображения). Для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ существует (определено) в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p = s > s_0$, где s_0 — показатель роста функции $f(t)$, причем функция $F(p)$ является аналитической в этой полуплоскости $(s > s_0)$.

Докажем первую часть теоремы. Пусть $p = s + i\sigma$ произвольная точка полуплоскости $\mathrm{Re}\, p = s > s_0$ (см. рис. 302). Учитывая, что $|f(t)| \leqslant M \cdot e^{s_0 t}$, находим:

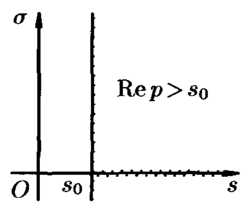


Рис. 302

$$\left| \int\limits_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt}\, dt \right| \leqslant \int\limits_0^\infty |f(t) \cdot e^{-pt}|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_0^\infty e^{s_0 t} |e^{-pt}|\, dt = M \int\limits_0^\infty e^{s_0 t} e^{-st}\, dt = M \int\limits_0^\infty e^{-(s-s_0)t}\, dt = \frac{M}{s - s_0},$$

так как $s - s_0 > 0$ и $|e^{-pt}| = |e^{-st} \cdot e^{-i\sigma t}| = e^{-st} \cdot |\cos\sigma t - i\sin\sigma t| = e^{-st}$. Таким образом,

$$|F(p)| = \left| \int\limits_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt}\, dt \right| \leqslant \frac{M}{s - s_0}. \tag{78.2}$$

Отсюда вытекает абсолютная сходимость интеграла (78.1), т. е. изображение $F(p)$ существует и однозначно в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p = s > s_0$. ■

Следствие 78.1 (необходимый признак существования изображения). Если функция $F(p)$ является изображением функции $f(t)$, то

$$\lim_{p \to \infty} F(p) = 0.$$

Это утверждение непосредственно вытекает из неравенства (78.2), когда $\mathrm{Re}\, p = s \to +\infty$.

Так как $F(p)$ — аналитическая функция в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > s_0$, то $F(p) \to 0$ при $p \to \infty$ по любому направлению. Отсюда, в частности, следует, что функции $F(p) = 5$, $F(p) = p^2$ не могут быть изображениями.

Отметим, что из аналитичности функции $F(p)$ следует, что все ее особые точки должны лежать левее прямой $\mathrm{Re}\, p = s = s_0$ или на самой этой прямой. Функция $F(p)$, не удовлетворяющая этому условию, не является изображением функции $f(t)$. Не является изображением, например, функция $F(p) = \mathrm{tg}\, p$ (ее особые точки расположены на всей оси s).

Теорема 78.2 (о единственности оригинала). Если функция $F(p)$ служит изображением двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы совпадают друг с другом во всех точках, в которых они непрерывны.

(Примем без доказательства.)

Пример 78.1. Найти изображение единичной функции Хевисайда

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

(см. рис. 303).

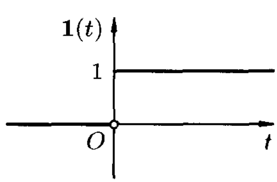


Рис. 303

○ Решение: По формуле (78.1) при $s = \operatorname{Re} p > 0$ ($s_0 = 0$) находим:

$$F(p) = \int\limits_0^\infty 1 \cdot e^{-pt}\,dt = \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b e^{-pt}\,dt = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{p} \cdot e^{-pt}\Big|_0^b = \frac{1}{p},$$

т. е. $F(p) = \frac{1}{p}$, или, в символической записи, $\mathbf{1}(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$, или $\mathbf{1} \risingdotseq \frac{1}{p}$. ●

Замечание. В дальнейшем функцию-оригинал будем кратко записывать в виде $f(t)$, подразумевая, что

$$f(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Пример 78.2. Найти изображение функции $f(t) = e^{at}$, где a — любое число.

○ Решение: Данная функция является оригиналом. По формуле (78.1) имеем

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{at} e^{-pt}\,dt = \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b e^{-(p-a)t}\,dt = -\lim_{b\to\infty} \frac{1}{p-a} \cdot e^{-(p-a)t}\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{p-a} - \frac{e^{-(p-a)\,b}}{p-a} \right) = \frac{1}{p-a},$$

если $\operatorname{Re}(p-a) > 0$. Таким образом,

$$e^{at} \risingdotseq \frac{1}{p-a} \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a). \tag{78.3}$$

●

Пример 78.3. Найти изображение функции $f(t) = t$.

○ Решение: В этом случае преобразование Лапласа имеет вид

$$\int\limits_0^\infty t \cdot e^{-pt}\,dt = \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b te^{-pt}\,dt = \left[\begin{array}{l|l} u = t & du = dt \\ dv = e^{-pt}\,dt & v = -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{t}{p} \cdot e^{-pt}\Big|_0^b - \frac{1}{p^2} e^{-pt}\Big|_0^b \right) = \frac{1}{p^2}$$

$\left(\text{т. к. } \lim\limits_{b\to\infty} \left| \frac{1}{p} \cdot b \cdot e^{-pb} \right| = \frac{1}{\sqrt{s^2+\sigma^2}} \cdot \lim\limits_{b\to\infty} b \cdot e^{-sb} = 0\right)$, т. е.

$$t \risingdotseq \frac{1}{p^2}. \tag{78.4}$$

●

Замечание. Функция $F(p) = \dfrac{1}{p-a}$ является аналитической не только в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$, где интеграл (78.1) сходится, а на всей комплексной плоскости p, кроме точки $p = a$. Такая особенность наблюдается и для многих других изображений. Далее для нас будет более важным, как правило, само изображение функции, а не область, в которой оно выражается интегралом (78.1).

78.2. Свойства преобразования Лапласа

Находить изображения, пользуясь только определением изображения, не всегда просто и удобно. Свойства преобразования Лапласа существенно облегчают задачу нахождения изображений для большого числа разнообразных функций, а также задачу отыскания оригиналов по их изображениям.

Линейность

Линейной комбинации оригиналов соответствует такая же линейная комбинация изображений, т. е. если $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$, c_1 и c_2 — постоянные числа, то $c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t) \risingdotseq c_1 \cdot F_1(p) + c_2 \cdot F_2(p)$.

☐ Используя свойства интеграла, находим

$$\int_0^\infty \big(c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\big) \cdot e^{-pt}\, dt =$$

$$= c_1 \cdot \int_0^\infty f_1(t) \cdot e^{-pt}\, dt + c_2 \int_0^\infty \cdot f_2(t) \cdot e^{-pt}\, dt = c_1 \cdot F_1(p) + c_2 \cdot F_2(p). \qquad \blacksquare$$

Пример 78.4. Найти изображения функций $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ (ω — любое число), c (const), $\operatorname{ch} \omega t$, $\operatorname{sh} \omega t$.

○ Решение: Пользуясь свойством линейности, формулой (78.3), находим:

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

т. е.

$$\sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \tag{78.5}$$

Аналогично получаем формулу

$$\cos \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \tag{78.6}$$

Далее, $c = c \cdot \mathbf{1} \risingdotseq c \cdot \dfrac{1}{p}$, т. е.

$$c \risingdotseq \frac{c}{p}.$$

Наконец, $\operatorname{ch}\omega t = \dfrac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \risingdotseq \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{p-\omega} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{p+\omega} = \dfrac{p}{p^2 - \omega^2}$ т. е.

$$\operatorname{ch}\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2 - \omega^2}. \tag{78.7}$$

Аналогично получаем формулу

$$\operatorname{sh}\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}. \tag{78.8}$$

●

Подобие

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\lambda > 0$, то $f(\lambda t) \risingdotseq \frac{1}{\lambda} \cdot F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$, т. е. умножение аргумента оригинала на положительное число λ приводит к делению изображения и его аргумента на это число.

❑ По формуле (78.1) имеем

$$f(\lambda t) \risingdotseq \int_0^\infty f(\lambda t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = [\text{положив } \lambda t = t_1] =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^\infty f(t_1) \cdot e^{-\frac{p}{\lambda} t_1} \cdot dt_1 = \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-\frac{p}{\lambda} t} \cdot dt = \frac{1}{\lambda} \cdot F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$$

(так как безразлично, какой буквой обозначена переменная интегрирования). ■

Например, пусть $\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2 + 1}$. Тогда

$$\cos \omega t \risingdotseq \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Смещение (затухание)

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $a = \text{const}$, то $e^{at} \cdot f(t) \risingdotseq F(p-a)$, т. е. умножение оригинала на функцию e^{at} влечет за собой смещение переменной p.

❑ В силу формулы (78.1) имеем

$$e^{at} \cdot f(t) \risingdotseq \int_0^\infty e^{at} \cdot f(t) e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-a)t}\, dt = F(p-a)$$

$(\operatorname{Re}(p-a) > s_0)$. ■

Благодаря этому свойству можно расширить таблицу соответствия между оригиналами и их изображениями:

$$e^{at} \cdot \sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}, \tag{78.9}$$

$$e^{at} \cdot \cos \omega t \risingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}, \tag{78.10}$$

$$e^{at} \cdot \operatorname{sh} \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2},$$

$$e^{at} \cdot \operatorname{ch} \omega t \risingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}.$$

Пример 78.5. Найти оригинал по его изображению

$$F(p) = \frac{2p-5}{p^2-6p+11}.$$

Решение: Преобразуем данную дробь так, чтобы можно было воспользоваться свойством смещения:

$$F(p) = \frac{2p-5}{p^2-6p+11} = \frac{2(p-3)+1}{(p-3)^2+2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{p-3}{(p-3)^2+(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(p-3)^2+(\sqrt{2})^2} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq 2 \cdot e^{3t} \cdot \cos \sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{3t} \sin \sqrt{2}t = f(t).$$

(См. формулы (78.9), (78.10) и свойство линейности.) ●

Запаздывание

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\tau > 0$, то $f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p)$, т. е. запаздывание оригинала на положительную величину τ приводит к умножению изображения оригинала без запаздывания на $e^{-p\tau}$.

❑ Положив $t - \tau = t_1$, получим

$$f(t-\tau) \risingdotseq \int_0^\infty f(t-\tau) \cdot e^{-pt}\, dt = \int_{-\tau}^\infty f(t_1) e^{-p(t_1+\tau)}\, dt_1 =$$

$$= \int_0^\infty f(t_1) e^{-p\tau} \cdot e^{-pt_1}\, dt_1 = e^{-p\tau} \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt = e^{-p\tau} F(p). \quad ■$$

Поясним термин «запаздывание». Графики функции $f(t)$ и $f(t-\tau)$ имеют одинаковый вид, но график функции $f(t-\tau)$ сдвинут на τ единиц

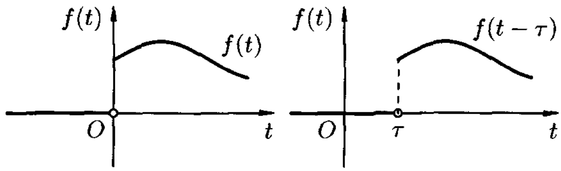


Рис. 304

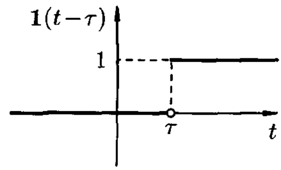


Рис. 305

вправо (см. рис. 304). Следовательно, функции $f(t)$ и $f(t-\tau)$ описывают один и тот же процесс, но процесс, описываемый функцией $f(t-\tau)$, начинается с опозданием на время τ.

Свойство запаздывания удобно применять при отыскании изображения функций, которые на разных участках задаются различными аналитическими выражениями; функций, описывающих импульсные процессы.

Функция $\mathbf{1}(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geqslant \tau, \\ 0 & \text{при } t < \tau \end{cases}$ называется *обобщенной единичной функцией* (см. рис 305).

Так как $\mathbf{1}(t) \doteqdot \frac{1}{p}$, то $\mathbf{1}(t-\tau) \doteqdot \frac{1}{p} \cdot e^{-p\tau}$.

Запаздывающую функцию

$$g(t) = \begin{cases} f(t-\tau) & \text{при } t \geqslant \tau, \\ 0 & \text{при } t < \tau \end{cases}$$

можно записать так: $g(t) = f(t-\tau) \cdot \mathbf{1}(t-\tau)$.

Пример 78.6. Найти изображение $f(t) = t - 1$.

❍ Решение: Для того чтобы быть оригиналом, функция $f(t)$ должна удовлетворять условиям 1–3 (см. п. 78.1). В этом смысле исходную задачу можно понимать двояко.

Если понимать функцию $f(t)$ как

$$f(t) = \begin{cases} t-1 & \text{при } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

т. е. $f(t) = (t-1) \cdot \mathbf{1}(t)$ (см. рис. 306, *а*), то, зная, что $t \doteqdot \frac{1}{p^2}$ (см. формулу (78.4)), $\mathbf{1} \doteqdot \frac{1}{p}$ и, используя свойство линейности, находим

$$f(t) = (t-1) \cdot \mathbf{1}(t) \doteqdot \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = F(p).$$

Если же понимать функцию $f(t)$ как

$$f(t) = \begin{cases} t-1 & \text{при } t \geqslant 1, \\ 0 & \text{при } t < 1, \end{cases}$$

т. е. $f(t) = (t-1) \cdot \mathbf{1}(t-1)$ (см. рис. 306, *б*), то, используя свойство запаздывания, находим $f(t) = (t-1) \cdot \mathbf{1}(t-1) \risingdotseq \frac{1}{p^2} \cdot e^{-p} = F(p)$. ●

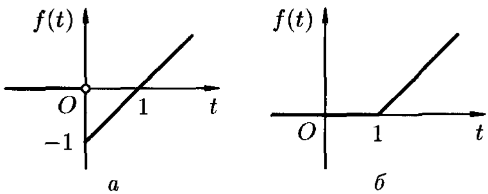


Рис. 306

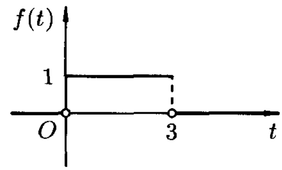


Рис. 307

Пример 78.7. Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 3, \\ 0 & \text{при } t > 3. \end{cases}$$

❍ Решение: Данная функция описывает единичный импульс (см. рис. 307), который можно рассматривать как разность двух оригиналов: единичной функции $\mathbf{1}(t)$ и обобщенной единичной функции $\mathbf{1}(t-3)$. Поэтому $f(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-3) \risingdotseq \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \cdot e^{-3p} = F(p)$. ●

Пример 78.8. Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0,\ t \geqslant 4, \\ t & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ 4-t & \text{при } 2 < t < 4. \end{cases}$$

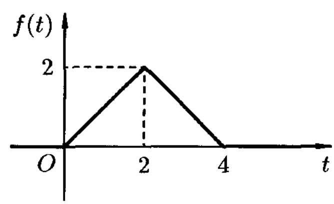


Рис. 308

❍ Решение: Функция-оригинал изображена на рис. 308. Запишем ее одним аналитическим выражением, используя функции Хевисайда $\mathbf{1}(t)$ и $\mathbf{1}(t-\tau)$:

$$f(t) = t \cdot \mathbf{1}(t) - t \cdot \mathbf{1}(t-2) + (4-t) \cdot \mathbf{1}(t-2) - (4-t) \cdot \mathbf{1}(t-4),$$

т. е.

$$f(t) = t \cdot \mathbf{1}(t) - (t-2+2) \cdot \mathbf{1}(t-2) - (t-2-2) \cdot \mathbf{1}(t-2) + (t-4) \cdot \mathbf{1}(t-4).$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$f(t) = t \cdot \mathbf{1}(t) - 2(t-2) \cdot \mathbf{1}(t-2) + (t-4) \cdot \mathbf{1}(t-4).$$

Изображение функции $f(t)$ будет равно

$$f(t) \doteqdot \frac{1}{p^2} - 2 \cdot \frac{1}{p^2} e^{-2p} + \frac{1}{p^2} e^{-4p} = F(p). \qquad \bullet$$

Замечания.

1. Изображение периодического оригинала с периодом, равным T, есть $F(p) = \dfrac{1}{1 - e^{-Tp}} \displaystyle\int_0^T f(t)e^{-pt}\,dt$.

2. Свойство опережения $f(t+\tau) \doteqdot e^{p\tau}\Big(F(p) - \displaystyle\int_0^\tau f(t)e^{-pt}\,dt\Big)$ применяется значительно реже.

Дифференцирование оригинала

Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и функции $f'(t)$, $f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$f'(t) \doteqdot p \cdot F(p) - f(0), \tag{78.11}$$

$$f''(t) \doteqdot p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0), \tag{78.12}$$

$$f'''(t) \doteqdot p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0), \tag{78.13}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0). \tag{78.14}$$

❑ По определению изображения находим

$$f'(t) \doteqdot \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = \left[\begin{array}{l|l} u = e^{-pt} & du = -pe^{-pt}\,dt \\ dv = f'(t)\,dt & v = f(t) \end{array}\right] =$$

$$= f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt = -f(0) + pF(p).$$

Итак, $f'(t) \doteqdot p \cdot F(p) - f(0)$. Пользуясь полученным результатом, найдем изображение второй производной $f''(t)$:

$$f''(t) = \big(f'(t)\big)' \doteqdot p\big(p \cdot F(p) - f(0)\big) - f'(0) = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0).$$

Аналогично найдем изображение третьей производной $f'''(t)$:

$$f'''(t) \doteqdot p\big(p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0)\big) - f''(0) =$$
$$= p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0).$$

Применяя формулу (78.11) $(n-1)$ раз, получим формулу (78.14). ■

Замечание. Формулы (78.11)–(78.14) просто выглядят при нулевых начальных условиях: если $f(0) = 0$, то $f'(t) \risingdotseq p \cdot F(p)$; если $f(0) = f'(0) = 0$, то $f''(t) \risingdotseq p^2 \cdot F(p)$, и, наконец, если $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n \cdot F(p)$, т. е. дифференцированию оригинала соответствует умножение его изображения на p.

Рассмотренное свойство дифференцирования оригинала вместе со свойством линейности широко используется при решении линейных дифференциальных уравнений.

Пример 78.9. Найти изображение выражения

$$x'''(t) - 2x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) + 2,$$

если $x(0) = 3$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = -2$.

Решение: Пусть $x(t) \risingdotseq X(p) = X$. Тогда, согласно формулам (78.11)-(78.13), имеем

$$\begin{aligned} x'(t) &\risingdotseq p \cdot X - 3, \\ x''(t) &\risingdotseq p^2 \cdot X - p \cdot 3 - 0, \\ x'''(t) &\risingdotseq p^3 \cdot X - p^2 \cdot 3 - p \cdot 0 + 2, \\ 2 &= 2 \cdot \mathbf{1} \risingdotseq \frac{2}{p}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x'''(t) - 2x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) + 2 \risingdotseq$$
$$\risingdotseq p^3 \cdot X - 3p^2 + 2 - 2(p^2 \cdot X - 3p) - 3(p \cdot X - 3) + 2X + \frac{2}{p}.$$ ●

Дифференцирование изображения

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\begin{aligned} F'(p) &\risingdotseq -t \cdot f(t), \\ F''(p) &\risingdotseq (-1)^2 \cdot t^2 \cdot f(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F^{(n)}(p) &\risingdotseq (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

т. е. дифференцированию изображения соответствует умножение его оригинала на $(-t)$.

Согласно теореме 78.1 существования изображения, $F(p)$ является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$. Следовательно, у нее существует производная любого порядка. Дифференцируя интеграл (78.1) по параметру p (обоснование законности этой операции опустим), получим

$$F'(p) = \left(\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}\,dt\right)'_p = \int_0^\infty \left(f(t)\cdot e^{-pt}\right)'_p dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\cdot(-t)e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty \left(-t\cdot f(t)\right)e^{-pt}\,dt \risingdotseq -t\cdot f(t),$$

т. е. $F'(p) \risingdotseq -t\cdot f(t)$. Тогда $F''(p) = \left(F'(p)\right)' \risingdotseq -t\left(-t\cdot f(t)\right) = t^2\cdot f(t)$, $F'''(p) \risingdotseq -t\left(t^2\cdot f(t)\right) = -t^3\cdot f(t)$ и вообще $F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^n\cdot t^n\cdot f(t)$. ■

Пример 78.10. Найти изображения функций t^n ($n\in\mathbb{N}$), $e^{at}\cdot t^n$, $t\cdot\sin\omega t$, $t\cdot\cos\omega t$, $t\cdot\operatorname{sh}\omega t$, $t\cdot\operatorname{ch}\omega t$, $e^{at}\cdot t\cdot\sin\omega t$, $e^{at}\cdot t\cdot\cos\omega t$.

◐ Решение: Так как $\mathbf{1} \risingdotseq \frac{1}{p}$, то, в силу свойства дифференцирования изображения, имеем $-t\cdot\mathbf{1} \risingdotseq -\frac{1}{p^2}$, т. е.

$$t \risingdotseq \frac{1}{p^2}.$$

Далее находим $-t^2 \risingdotseq \left(\frac{1}{p^2}\right)'_p = -\frac{2}{p^3}$, т. е. $t^2 \risingdotseq \frac{2!}{p^3}$. Продолжая дифференцирование, получим

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

С учетом свойства смещения получаем

$$e^{at}\cdot t^n \risingdotseq \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

Согласно формуле (78.5), $\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$. Следовательно,

$$\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)'_p \risingdotseq -t\sin\omega t,$$

т. е. $-\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2} \risingdotseq -t\sin\omega t$, или

$$t\sin\omega t \risingdotseq \frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}. \tag{78.15}$$

Аналогично, используя формулы (78.6), (78.7) и (78.8), находим

$$t\cos\omega t \risingdotseq \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}, \tag{78.16}$$

$$t\operatorname{sh}\omega t \risingdotseq \frac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2},$$

$$t\operatorname{ch}\omega t \risingdotseq \frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}.$$

С учетом свойства смещения и формул (78.15) и (78.16), получаем

$$e^{at}\cdot t\cdot\sin\omega t \risingdotseq \frac{2\omega(p-a)}{((p-a)^2+\omega^2)^2},$$

$$e^{at}\cdot t\cdot\cos\omega t \risingdotseq \frac{(p-a)^2-\omega^2}{((p-a)^2+\omega^2)^2}. \qquad \bullet$$

Интегрирование оригинала

Если $f(t)\risingdotseq F(p)$, то $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$, т. е. интегрированию оригинала от 0 до t соответствует деление его изображения на p.

❑ Функция $\varphi(t)=\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau$ является оригиналом (можно проверить). Пусть $\varphi(t)\risingdotseq\Phi(p)$. Тогда по свойству дифференцирования оригинала имеем

$$\varphi'(t)\risingdotseq p\cdot\Phi(p)-\varphi(0)=p\cdot\Phi(p)$$

(так как $\varphi(0)=0$). А так как

$$\varphi'(t)=\left(\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\right)'_t=f(t),$$

то $F(p)=p\cdot\Phi(p)$. Отсюда $\Phi(p)=\frac{F(p)}{p}$, т. е. $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\risingdotseq\frac{F(p)}{p}$. ■

Интегрирование изображения

Если $f(t)\risingdotseq F(p)$ и интеграл $\int\limits_p^\infty F(\rho)\,d\rho$ сходится, то $\int\limits_p^\infty F(\rho)\,d\rho\risingdotseq$ $\risingdotseq\frac{f(t)}{t}$, т. е. интегрированию изображения от p до ∞ соответствует деление его оригинала на t.

❑ Используя формулу (78.1) и изменяя порядок интегрирования (обоснование законности этой операции опускаем), получаем

$$\int\limits_p^\infty F(\rho)\,d\rho=\int\limits_p^\infty\left(\int\limits_0^\infty f(t)e^{-\rho t}\,dt\right)d\rho=\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_p^\infty e^{-\rho t}\,d\rho\right)f(t)\,dt=$$

$$=\int\limits_0^\infty\left(-\frac{1}{t}e^{-\rho t}\Big|_p^\infty\right)f(t)\,dt=\int\limits_0^\infty\frac{f(t)}{t}e^{-pt}\,dt\risingdotseq\frac{f(t)}{t}. \qquad ■$$

Пример 78.11. Найти изображение функции $\frac{\sin t}{t}$; найти изображение интегрального синуса $\int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau$.

○ Решение: Так как $\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$, то $\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty \frac{1}{\rho^2+1}\,d\rho = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p$, т. е. $\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p$. Применяя свойство интегрирования оригинала, получаем $\int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau \risingdotseq \frac{\pi}{2p} - \frac{\operatorname{arctg} p}{p}$. ●

Умножение изображений

Если $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$, то

$$F_1(p)\cdot F_2(p) \risingdotseq \int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau. \tag{78.17}$$

□ Можно показать, что функция $\int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau$ является оригиналом.

Используя преобразование Лапласа (78.1), можно записать

$$\int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau \risingdotseq \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau\right)e^{-pt}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-pt}\,dt \int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

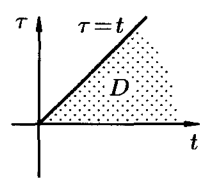


Рис. 309

Область D интегрирования полученного двукратного интеграла определяется условиями $0 \leqslant t < \infty$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$ (см. рис. 309).

Изменяя порядок интегрирования и полагая $t-\tau = t_1$, получим

$$\int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau \risingdotseq \int\limits_0^\infty f_1(\tau)\,d\tau \int\limits_\tau^\infty e^{-pt}\cdot f_2(t-\tau)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty f_1(\tau)e^{-p\tau}\,d\tau \int\limits_0^\infty f_2(t_1)e^{-pt_1}\,dt_1 = F_1(p)\cdot F_2(p). \quad ■$$

Интеграл в правой части формулы (78.17) называется ***сверткой функции*** $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и обозначается символом $f_1(t) * f_2(t)$, т. е.

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau.$$

Можно убедиться (положив $t - \tau = u$), что свертывание обладает свойством переместительности, т. е. $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$.

Итак, умножение оригиналов равносильно их свертыванию, т. е.

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \risingdotseq f_1(t) * f_2(t).$$

Пример 78.12. Найти оригинал функций

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+\omega^2)^2} \quad \text{и} \quad F(p) = \frac{p}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

Решение: Так как $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+\omega^2)} \cdot \dfrac{1}{(p^2+\omega^2)}$, и $\dfrac{1}{p^2+\omega^2} \risingdotseq \dfrac{1}{\omega} \cdot \sin\omega t$, то

$$F(p) \risingdotseq \int_0^t \frac{1}{\omega} \cdot \sin\omega\tau \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin\omega(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\omega^2} \cdot \int_0^t \big(\cos\omega(2\tau - t) - \cos\omega t\big)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{1}{2\omega} \cdot \sin\omega(2\tau - t)\Big|_0^t - \cos\omega t \cdot \tau\Big|_0^t\right) =$$

$$= \frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t - t\cos\omega t\right) = \frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t \cdot \cos\omega t),$$

т. е.

$$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2} \risingdotseq \frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t \cdot \cos\omega t).$$

Аналогично получаем

$$\frac{p}{(p^2+\omega^2)^2} \risingdotseq \frac{1}{2\omega} \cdot t \cdot \sin\omega t.$$

Следствие 78.2. Если $f_1 * f_2 \risingdotseq F_1(p) \cdot F_2(p)$ и $f_1'(t)$ также является оригиналом, то

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \risingdotseq \int_0^t f_1'(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau + f_1(0) \cdot f_2(t). \tag{78.18}$$

❑ Запишем произведение $p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p)$ в виде

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) = p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) - f_1(0) \cdot F_2(p) + f_1(0) \cdot F_2(p),$$

или

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) = \big(p \cdot F_1(p) - f_1(0)\big) \cdot F_2(p) + f_1(0) \cdot F_2(p).$$

Первое слагаемое в правой части есть произведение изображений, соответствующих оригиналам $f_1'(t)$ ($f_1'(t) \doteqdot p \cdot F_1(p) - f_1(0)$) и $f_2(t)$. Поэтому на основании свойства умножения изображений и линейности можно записать $p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteqdot f_1'(t) * f_2(t) + f_1(0) \cdot f_2(t)$ или

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteqdot \int_0^t f_1'(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau + f_1(0) \cdot f_2(t). \qquad \blacksquare$$

Формула (78.18) называется ***формулой Дюамеля***.

На основании свойства переместительности свертки формулу Дюамеля можно записать в виде

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteqdot \int_0^t f_2(\tau) \cdot f_1'(t-\tau)\, d\tau + f_2(t) \cdot f_1(0).$$

Формулу Дюамеля можно применять для определения оригиналов по известным изображениям.

Пример 78.13. Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{2p^2}{(p^2+1)^2}.$$

❍ Решение: Так как

$$\frac{2p^2}{(p^2+1)^2} = 2p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{p^2+1} \doteqdot \sin t, \quad \frac{p}{p^2+1} \doteqdot \cos t,$$

то на основании формулы Дюамеля (78.18) имеем

$$2p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} \doteqdot 2\int_0^t \cos\tau \cdot \cos(t-\tau)\, d\tau + 0 = t \cdot \cos t + \sin t. \qquad \bullet$$

Умножение оригиналов

Если $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$ и $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$, то

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \doteqdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(z) \cdot F_2(p-z) dz,$$

где путь интегрирования — вертикальная прямая $\operatorname{Re} z = \gamma > s_0$ (см. рис. 310) (примем без доказательства).

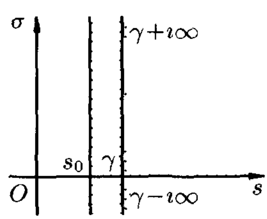


Рис. 310

Резюме

Рассмотренные свойства преобразования Лапласа представляют собой основные правила (аппарат) операционного исчисления. Для удобства пользования перечислим эти свойства.

1. Линейность: $c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t) \risingdotseq c_1 \cdot F_1(p) + c_2 \cdot F_2(p)$.
2. Подобие: $f(\lambda t) \risingdotseq \frac{1}{\lambda} \cdot F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \lambda > 0$.
3. Смещение: $e^{at} \cdot f(t) \risingdotseq F(p-a)$.
4. Запаздывание: $f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} \cdot F(p), \tau > 0$.
5. Дифференцирование оригинала:

$$\begin{aligned}
f'(t) &\risingdotseq p \cdot F(p) - f(0),\\
f''(t) &\risingdotseq p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0),\\
f'''(t) &\risingdotseq p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

6. Дифференцирование изображения

$$\begin{aligned}
F'(p) &\risingdotseq -t \cdot f(t),\\
F''(p) &\risingdotseq (-1)^2 \cdot t^2 \cdot f(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

7. Интегрирование оригинала: $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$.

8. Интегрирование изображения: $\int\limits_p^\infty F(\rho)\,d\rho \risingdotseq \frac{f(t)}{t}$.

9. Умножение изображений: $F_1(p) \cdot F_2(p) \risingdotseq \int\limits_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\,d\tau = f_1 * f_2$.

10. Умножение оригиналов: $f_1(t) \cdot f_2(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1(z) \cdot F_2(p-z)\,dz$.

78.3. Таблица оригиналов и изображений

Составим краткую таблицу, устанавливающую соответствие между некоторыми оригиналами (часто встречающимися на практике) и их изображениями. Достаточно полная таблица оригиналов и изображений, позволяющая по заданному оригиналу находить изображение и наоборот, есть, в частности, в книге «Справочник по операционному исчислению» (авторы В. А. Диткин и П. И. Кузнецов).

Таблица оригиналов и изображений

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$
1	$\mathbf{1}$	$\frac{1}{p}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$
4	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
5	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
6	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
7	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
8	$e^{at}\cdot\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
9	$e^{at}\cdot\cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
10	$e^{at}\cdot\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$
11	$e^{at}\cdot\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$
12	t^n (n — целое)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
13	$e^{at}\cdot t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
14	$t\cdot\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
15	$t\cdot\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
16	$t\cdot\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2-\omega^2)^2}$
17	$t\cdot\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
18	$e^{at}\cdot t\cdot\sin\omega t$	$\frac{2\omega(p-a)}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
19	$e^{at}\cdot t\cdot\cos\omega t$	$\frac{(p-a)^2-\omega^2}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
20	$\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$	$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$
21	$\frac{1}{2\omega^3}(\omega t\operatorname{ch}\omega t-\operatorname{sh}\omega t)$	$\frac{1}{(p^2-\omega^2)^2}$

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p) = \int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$
22	$\sin(\omega t \pm \varphi)$	$\dfrac{\omega\cos\varphi \pm p\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$
23	$\cos(\omega t \pm \varphi)$	$\dfrac{p\cos\varphi \mp \omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$

§ 79. ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

79.1. Теоремы разложения

Рассмотрим две теоремы, называемые *теоремами разложения*, позволяющие по заданному изображению $F(p)$ находить соответствующий ему оригинал $f(t)$.

Теорема 79.1. Если функция $F(p)$ в окрестности точки $p = \infty$ может быть представлена в виде ряда Лорана

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}} = \frac{c_0}{p} + \frac{c_1}{p^2} + \frac{c_2}{p^3} + \ldots,$$

то функция

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \frac{t^n}{n!} = c_0 + c_1 t + \ldots \quad (t > 0)$$

является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$, т. е.

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}} \doteqdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \frac{t^n}{n!} = f(t),$$

Примем эту теорему без доказательства.

Пример 79.1. Найти оригинал $f(t)$, если

$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot \sin\frac{1}{p}; \quad F(p) = \frac{p}{p^2+1}.$$

○ Решение: Имеем

$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot \sin\frac{1}{p} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{3!}\frac{1}{p^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{p^5} - \ldots\right) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{p^4} + \frac{1}{5!}\frac{1}{p^6} - \ldots$$

Следовательно, на основании теоремы 79.1 $f(t) = t - \frac{1}{3!}\frac{t^3}{3!} + \frac{1}{5!}\frac{t^5}{5!} - \ldots$, $t > 0$.

Запишем лорановское разложение функции $F(p) = \frac{p}{p^2+1}$ в окрестности точки $p = \infty$:

$$F(p) = \frac{p}{p^2+1} = \frac{p}{p^2\left(1+\frac{1}{p^2}\right)} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{p^2}\right)} =$$
$$= \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} - \ldots\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^5} - \ldots,$$

где $\left|\frac{1}{p^2}\right| < 1$, т. е. $|p| > 1$. Следовательно, $f(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots$, т. е. $f(t) = \cos t$, $t > 0$. ●

Теорема 79.2. Если $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ — правильная рациональная дробь, знаменатель которой $B(p)$ имеет лишь простые корни (нули) $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t} \tag{79.1}$$

является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$.

❑ Отметим, что дробь $\frac{A(p)}{B(p)}$ должна быть правильной (степень многочлена $A(p)$ ниже степени многочлена $B(p)$); в противном случае не выполняется необходимый признак существования изображения $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$ (п. 78.1), т. е. $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ не может быть изображением.

Разложим правильную рациональную дробь $\frac{A(p)}{B(p)}$ на простейшие:

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{c_1}{p-p_1} + \frac{c_2}{p-p_2} + \ldots + \frac{c_n}{p-p_n}, \tag{79.2}$$

где c_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) — неопределенные коэффициенты. Для определения коэффициента c_1 этого разложения умножим обе части этого равенства почленно на $p - p_1$:

$$\frac{A(p)}{B(p)}\cdot(p-p_1) = c_1 + (p-p_1)\left(\frac{c_2}{p-p_2} + \frac{c_3}{p-p_3} + \ldots + \frac{c_n}{p-p_n}\right).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $p \to p_1$, получаем

$$c_1 = \lim_{p\to p_1}\frac{A(p)}{B(p)}\cdot(p-p_1) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{p\to p_1}\frac{A(p)}{\frac{B(p)-B(p_1)}{p-p_1}} = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)}.$$

Итак, $c_1 = \dfrac{A(p_1)}{B'(p_1)}$. Аналогичным путем (умножая обе части равенства (79.2) на $p - p_i$) найдем $c_i = \dfrac{A(p_i)}{B'(p_i)}$, $i = 2, \ldots, n$.

Подставляя найденные значения $c_1, c_2, \ldots, c_n$ в равенство (79.2), получим

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} \cdot \frac{1}{p - p_1} + \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} \cdot \frac{1}{p - p_2} + \ldots + \frac{A(p_n)}{B'(p_n)} \cdot \frac{1}{p - p_n}.$$

Так как по формуле (78.3)

$$\frac{1}{p - p_1} \risingdotseq e^{p_1 t}, \quad \frac{1}{p - p_2} \risingdotseq e^{p_2 t}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{p - p_n} \risingdotseq e^{p_n t},$$

то на основании свойства линейности имеем

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k} \risingdotseq \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t} = f(t). \quad \blacksquare$$

Замечание. Легко заметить, что коэффициенты c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ определяются как вычеты комплексной функции $F(p)$ в простых полюсах (формула (77.4)): $c_k = \dfrac{A(p_k)}{B'(p_k)} = \operatorname{Res}\Big(\dfrac{A(p)}{B(p)}; p_k\Big)$.

Можно показать, что если $F(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$ — правильная дробь, но корни (нули) $p_1, p_2, \ldots, p_n$ знаменателя $B(p)$ имеют кратности $m_1, m_2, \ldots, m_n$ соответственно, то в этом случае оригинал изображения $F(p)$ определяется формулой

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{p \to p_k} \left(\frac{A(p)}{B(p)} e^{pt} \cdot (p - p_k)^{m_k} \right)^{(m_k - 1)}. \tag{79.3}$$

Теорему 79.2 можно сформулировать следующим образом:

Теорема 79.3. Если изображение $F(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$ является дробно-рациональной функцией от p и $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — простые или кратные полюсы этой функции, то оригинал $f(t)$, соответствующий изображению $F(p)$, определяется формулой

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \risingdotseq \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\big(F(p_k) \cdot e^{p_k t}\big) = f(t). \tag{79.4}$$

79.2. Формула Римана–Меллина

Общий способ определения оригинала по изображению дает *обратное преобразование Лапласа* (формула обращения Римана–Меллина), имеющее вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(p) \cdot e^{pt}\, dt, \tag{79.5}$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = \gamma > S_0$.

При определенных условиях интеграл (79.5) вычисляется по формуле $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(p) \cdot e^{pt}\, dt = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\big(F(p) \cdot e^{pt}; p_k\big)$.

Замечание. На практике отыскание функции-оригинала обычно проводят по следующему плану: прежде всего следует по таблице оригиналов и изображений попытаться отыскать для заданного изображения $F(p)$ соответствующий ему оригинал; второй путь состоит в том, что функцию $F(p)$ стараются представить в виде суммы простейших рациональных дробей, а затем, пользуясь свойством линейности, найти оригинал; наконец, использовать теоремы разложения, свойство умножения изображений, формулу обращения и т.д.

Пример 79.2. Найти оригинал по его изображению $F(p) = \frac{p-3}{p^2+4}$.

Решение: Проще всего поступить так:

$$F(p) = \frac{p-3}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+4} - \frac{3}{p^2+4} =$$

$$= \frac{p}{p^2+2^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{p^2+2^2} \risingdotseq \cos 2t - \frac{3}{2} \sin 2t = f(t)$$

(использовали свойство линейности и формулы (78.5) и (78.6)).

Если же использовать теорему 79.2 разложения, то будем иметь: $A(p) = p - 3$, $B(p) = p^2 + 4$, $B'(p) = 2p$, корни знаменателя $p_1 = 2i$ и $p_2 = -2i$ и, согласно формуле (79.1),

$$f(t) = \frac{2i-3}{2 \cdot 2i} e^{2it} + \frac{-2i-3}{2(-2i)} e^{-2it} = \frac{1}{4i}\big(2i(e^{2it} + e^{-2it}) - 3(e^{2it} - e^{-2it})\big) =$$

$$= \frac{1}{4i}\big(2i(\cos 2t + i \sin 2t + \cos 2t - i \sin 2t) -$$

$$- 3(\cos 2t + i \sin 2t - \cos 2t + i \sin 2t)\big) =$$

$$= \frac{1}{4i}(4i \cos 2t - 6i \sin 2t) = \cos 2t - \frac{3}{2} \sin 2t = f(t). \qquad \bullet$$

Пример 79.3. Найти функцию-оригинал, если ее изображение задано как $F(p) = \dfrac{1}{p^3(p-1)}$.

○ Решение: Здесь $A(p) = 1$, $B(p) = p^3(p-1)$, $B'(p) = 4p^3 - 3p^2$, $p_1 = 1$ — простой корень знаменателя, $p_2 = 0$ — 3-кратный корень ($m = 3$). Используя формулы (79.1) и (79.3), имеем:

$$f(t) = \frac{1}{4-3}\cdot e^{1\cdot t} + \frac{1}{2!}\lim_{p\to 0}\left(\frac{1}{p^3(p-1)}e^{pt}\cdot(p-0)^3\right)'' =$$

$$= e^t + \frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\left(\frac{e^{pt}}{p-1}\right)'' = \ldots = e^t - \frac{t^2}{2} - t - 1,$$

т. е. $f(t) = e^t - \frac{t^2}{2} - t - 1$.

Приведем другой способ нахождения $f(t)$. Разобьем дробь $\dfrac{1}{p^3(p-1)}$ на сумму простейших дробей: $F(p) = \dfrac{1}{p^3(p-1)} = -\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p^3} + \dfrac{1}{p-1}$. Следовательно, $f(t) = -1 - t - \frac{t^2}{2} + e^t$.

Приведем третий способ нахождения $f(t)$. Представим $F(p)$ как произведение $\dfrac{1}{p^3(p-1)} = \dfrac{1}{p^3}\cdot\dfrac{1}{p-1}$, и так как $\dfrac{1}{p^3} \risingdotseq \dfrac{t^2}{2}$ и $\dfrac{1}{p-1} \risingdotseq e^t$, то, пользуясь свойством умножения изображений, имеем:

$$F(p) \risingdotseq \int_0^t \frac{1}{2}\tau^2 e^{t-\tau}\,d\tau = \left[\begin{array}{l|l} u = \tau^2 & du = 2\tau\,d\tau \\ dv = e^{t-\tau}\,d\tau & v = -e^{t-\tau} \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{t-\tau}\tau^2\Big|_0^t + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\int_0^t \tau e^{t-\tau}\,d\tau = \left[\begin{array}{l|l} u = \tau & du = d\tau \\ dv = e^{t-\tau}\,d\tau & v = -e^{t-\tau} \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 + 0 + \left(-\tau\cdot e^{t-\tau}\right)\Big|_0^t - e^{t-\tau}\Big|_0^t = -\frac{1}{2}t^2 - t + 0 - 1 + e^t =$$

$$= e^t - \frac{t^2}{2} - t - 1 = f(t). \quad \bullet$$

§ 80. ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Пусть требуется найти частное решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t), \tag{80.1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ — заданные числа.

Будем считать, что искомая функция $y(t)$ вместе с ее рассматриваемыми производными и функция $f(t)$ являются оригиналами.

Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p) = Y$ и $f(t) \risingdotseq F(p) = F$. Пользуясь свойствами дифференцирования оригинала и линейности, перейдем в уравнении (80.1) от оригиналов к изображениям:

$$(p^n Y - p^{n-1}c_0 - p^{n-2}c_1 - \ldots - c_{n-1}) + a_1(p^{n-1}Y - p^{n-2}c_0 - \ldots - c_{n-2}) + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}(pY - c_0) + a_n Y = F.$$

Полученное уравнение называют *операторным* (или уравнением в изображениях). Разрешим его относительно Y:

$$Y(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n) = F + c_0(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) +$$
$$+ c_1(p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) + \ldots + c_{n-1},$$

т. е. $Y(p) \cdot Q_n(p) = F(p) + R_{n-1}(p)$, где $Q_n(p)$ и $R_{n-1}(p)$ — алгебраические многочлены от p степени n и $n-1$ соответственно.

Из последнего уравнения находим

$$Y(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}. \tag{80.2}$$

Полученное равенство называют *операторным решением* дифференциального уравнения (80.1). Оно имеет более простой вид, если все начальные условия равны нулю, т. е. $y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$. В этом случае $Y(p) = \dfrac{F(p)}{Q_n(p)}$.

Находя оригинал $y(t)$, соответствующий найденному изображению (80.2), получаем, в силу теоремы единственности, частное решение дифференциального уравнения (80.1).

Замечание. Полученное решение $y(t)$ во многих случаях оказывается справедливым при всех значениях t (а не только при $t \geqslant 0$).

Пример 80.1. Решить операционным методом дифференциальное уравнение $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$ при условиях $y(0) = 2, y'(0) = 6$.

❍ Решение: Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p) = Y$. Тогда

$$y'(t) \risingdotseq pY - y(0) = pY - 2,$$
$$y''(t) \risingdotseq p^2 Y - py(0) - y'(0) = p^2 Y - 2p - 6,$$
$$\text{и} \quad e^{3t} \risingdotseq \frac{1}{p-3}.$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение, получаем операторное уравнение: $p^2Y - 2p - 6 - 3(pY - 2) + 2Y = 12\frac{1}{p-3}$. Отсюда $Y(p) = \frac{2p^2 - 6p + 12}{(p-1)(p-2)(p-3)}$. Находим $y(t)$. Можно разбить дробь на сумму простейших ($Y(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-3}$), но так как корни знаменателя ($p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$) простые, то удобно воспользоваться второй теоремой разложения (формула (79.1)), в которой

$$A(p) = 2p^2 - 6p + 12,$$
$$B'(p) = (p-2)(p-3) + (p-1)(p-3) + (p-1)(p-2).$$

Получаем:

$$y(t) = \frac{8}{(-1)\cdot(-2)}e^{1\cdot t} + \frac{8}{1\cdot(-1)}e^{2\cdot t} + \frac{12}{2\cdot 1}e^{3\cdot t} = 4e^t - 8e^{2t} + 6e^{3t}. \quad \bullet$$

Пример 80.2. Найти решение уравнения

$$y'' + 4y = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot t, & \text{если } 0 \leqslant t < 2, \\ 3 - t, & \text{если } 2 \leqslant t < 3, \\ 0, & \text{если } t < 0,\ t \geqslant 3 \end{cases}$$

при условии $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

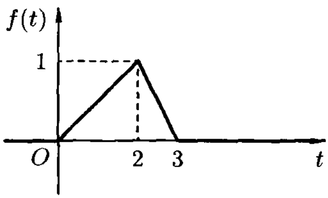


Рис. 311

Решение: График данной функции имеет вид, изображенный на рисунке 311. С помощью единичной функции правую часть данного дифференциального уравнения можно записать одним аналитическим выражением:

$$f(t) = \frac{1}{2}t\cdot\mathbf{1}(t) - \frac{1}{2}t\cdot\mathbf{1}(t-2) + (3-t)\cdot\mathbf{1}(t-2) - (3-t)\mathbf{1}(t-3) =$$
$$= \frac{1}{2}t\cdot\mathbf{1}(t) - \frac{1}{2}(t-2+2)\cdot\mathbf{1}(t-2) - (t-2-1)\cdot\mathbf{1}(t-2) + (t-3)\cdot\mathbf{1}(t-3) =$$
$$= \frac{1}{2}t\cdot\mathbf{1}(t) - \frac{1}{2}(t-2)\cdot\mathbf{1}(t-2) - \mathbf{1}(t-2) - (t-2)\cdot\mathbf{1}(t-2) +$$
$$+\mathbf{1}(t-2) + (t-3)\cdot\mathbf{1}(t-3) = \frac{1}{2}t\cdot\mathbf{1}(t) - \frac{3}{2}(t-2)\cdot\mathbf{1}(t-2) + (t-3)\cdot\mathbf{1}(t-3).$$

Таким образом, имеем

$$y'' + 4y = \frac{1}{2}t\cdot\mathbf{1}(t) - \frac{3}{2}(t-2)\cdot\mathbf{1}(t-2) + (t-3)\cdot\mathbf{1}(t-3).$$

Операторное уравнение, при нулевых начальных условиях имеет вид

$$p^2Y + 4Y = \frac{1}{2}\frac{1}{p^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{p^2}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}e^{-3p}.$$

Отсюда

$$Y(p) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2(p^2+4)} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p^2(p^2+4)}e^{-2p} + \frac{1}{p^2(p^2+4)}e^{-3p}.$$

Так как

$$\frac{1}{p^2(p^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2+2^2}\right) \risingdotseq \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right),$$

то по теореме запаздывания находим:

$$y(t) = \frac{1}{8}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) - \frac{3}{8}\left(t - 2 - \frac{1}{2}\sin 2(t-2)\right)\mathbf{1}(t-2) + \\ + \frac{1}{4}\left(t - 3 - \frac{1}{2}\sin 2(t-3)\right)\mathbf{1}(t-3). \quad \bullet$$

Аналогично применяется операционный метод для решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Покажем это на конкретном примере.

Пример 80.3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x + y, \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 2,\ z(0) = 3. \\ z' = x + z; \end{cases}$$

○ Решение: Пусть

$$x = x(t) \risingdotseq X(p) = X; \quad y = y(t) \risingdotseq Y(p) = Y; \quad z = z(t) \risingdotseq Z(p) = Z.$$

Находим, что

$$x' \risingdotseq pX - 1; \quad y' \risingdotseq pY - 2; \quad z' \risingdotseq pZ - 3.$$

Система операторных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} pX - Y + Z = 1, \\ X - (p-1)Y = -2, \\ X + (1-p)Z = -3. \end{cases}$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, находим:

$$X(p) = \frac{p-2}{p(p-1)},$$

$$Y(p) = \frac{2p^2 - p - 2}{p(p-1)^2},$$

$$Z(p) = \frac{3p^2 - 2p - 2}{p(p-1)^2}.$$

Переходя от изображений к оригиналам, получаем искомые решения:

$$X(p) = \frac{p-2}{p(p-1)} =$$
$$= \frac{2p-2-p}{p(p-1)} = \frac{2(p-1)}{p(p-1)} - \frac{p}{p(p-1)} = \frac{2}{p} - \frac{1}{p-1} \risingdotseq 2 - e^t = x(t),$$
$$Y(p) = \frac{2p^2-p-2}{p(p-1)^2} = -\frac{2}{p} + \frac{4}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} \risingdotseq -2 + 4e^t - te^t = y(t),$$
$$Z(p) = \frac{3p^2-2p-2}{p(p-1)^2} = -\frac{2}{p} + \frac{5}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} \risingdotseq -2 + 5e^t - te^t = z(t).$$

Ответ: $x(t) = 2 - e^t$, $y(t) = -2 + 4e^t - te^t$, $z(t) = -2 + 5e^t - te^t$. ●

С помощью операционного исчисления можно также находить решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, уравнений в частных производных, уравнений в конечных разностях (разностных уравнений); производить суммирование рядов; вычислять интегралы. При этом решение этих и других задач значительно упрощается.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности, $(cu)' = c \cdot u'$;
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$;
4. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$;
5. $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$, если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$.

Формулы дифференцирования

1. $(c)' = 0$;
2. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, в частности, $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности, $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, в частности, $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
7. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
8. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
9. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
10. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
11. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
12. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
13. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$;
14. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$;
15. $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$;
16. $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

Таблица основных интегралов

1. $\int u^\alpha\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \left(\int du = u + C\right);$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$

3. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$

4. $\int e^u\,du = e^u + C;$

5. $\int \sin u\,du = -\cos u + C \qquad \left(\int \operatorname{sh} u\,du = \operatorname{ch} u + C\right);$

6. $\int \cos u\,du = \sin u + C \qquad \left(\int \operatorname{ch} u\,du = \operatorname{sh} u + C\right);$

7. $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C;$

8. $\int \operatorname{ctg} u\,du = \ln|\sin u| + C;$

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \qquad \left(\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C\right);$

10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C \qquad \left(\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C\right);$

11. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C;$

12. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$

14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C;$

15. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C;$

16. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C;$

17. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C;$

18. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C.$

Таблица разложений в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \qquad x \in (-\infty; \infty),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \qquad x \in (-\infty; \infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \qquad x \in (-\infty; \infty),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots,$$

$$x \in \begin{cases} [-1; 1], & \text{если } \alpha \geqslant 0, \\ (-1; 1], & \text{если } -1 < \alpha < 0, \\ (-1; 1), & \text{если } \alpha \leqslant -1, \end{cases}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \qquad x \in (-1; 1),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, \qquad x \in (-1; 1],$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \dots, \qquad x \in [-1; 1],$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \qquad x \in [-1; 1],$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \qquad x \in (-\infty; \infty),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \qquad x \in (-\infty; \infty).$$

Таблица оригиналов и изображений

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p) = \int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$
1		$\dfrac{1}{p}$
2	e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$
3	t	$\dfrac{1}{p^2}$
4	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
5	$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
6	$\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
7	$\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
8	$e^{at}\cdot\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
9	$e^{at}\cdot\cos\omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
10	$e^{at}\cdot\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$
11	$e^{at}\cdot\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$
12	t^n (n — целое)	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
13	$e^{at}\cdot t^n$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
14	$t\cdot\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
15	$t\cdot\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
16	$t\cdot\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2-\omega^2)^2}$
17	$t\cdot\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
18	$e^{at}\cdot t\cdot\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega(p-a)}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
19	$e^{at}\cdot t\cdot\cos\omega t$	$\dfrac{(p-a)^2-\omega^2}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
20	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$	$\dfrac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$
21	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\omega t\operatorname{ch}\omega t-\operatorname{sh}\omega t)$	$\dfrac{1}{(p^2-\omega^2)^2}$

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p) = \int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$
22	$\sin(\omega t \pm \varphi)$	$\dfrac{\omega\cos\varphi \pm p\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$
23	$\cos(\omega t \pm \varphi)$	$\dfrac{p\cos\varphi \mp \omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$

По вопросам оптовых закупок обращаться:
тел./факс: (495) 785-15-30, e-mail: trade@airis.ru
Адрес: Москва, пр. Мира, 104

Наш сайт: www.airis.ru

Вы можете приобрести наши книги с 11^{00} до 17^{30},
кроме субботы, воскресенья, в киоске по адресу:
пр-т Мира, д. 104, 3 этаж, тел. (495) 785-15-30

Адрес редакции: 129626, Москва, а/я 66

Издательство «АЙРИС-пресс» приглашает к сотрудничеству
авторов образовательной и развивающей литературы.
По всем вопросам обращаться
по тел.: (495) 785-15-33, e-mail: editor@airis.ru

Учебное издание

Письменный Дмитрий Трофимович

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
Полный курс

Ведущий редактор *В. В. Мелентьева*
Редакторы *Л. В. Абламская, В В. Черноруцкий*
Художественный редактор, оформление *А. М. Драговой*
Иллюстрации *Е. В. Панкратьев, А. Ю. Терская*
Технический редактор *С. С. Коломеец*
Компьютерная верстка *Е Г Иванов*
Корректоры *Н С. Калашникова, З. А. Тихонова*

Подписано в печать 30.09.2009 Бумага офсетная. Формат 60×90 1/16.
Гарнитура «Компьютер Модерн». Печать офсетная Печ. л. 38.
Усл.-печ. л. 38. Тираж 10 000 экз. Заказ № 4991.

ООО «Издательство «АЙРИС-пресс»
129626, г. Москва, пр-т Мира, д. 104.

ОАО «Тверской ордена Трудового Красного Знамени
полиграфкомбинат детской литературы им 50-летия СССР»
170040, г Тверь, пр 50 лет Октября, 46

Д. Т. Письменный – автор известного пособия «Готовимся к экзамену по математике» серии «Домашний репетитор». Это пособие использовали при подготовке к экзаменам более полумиллиона школьников и абитуриентов.

АЙРИС ПРЕСС

Книга содержит необходимый материал по всем разделам курса высшей математики, который сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач.

Доступный, но строгий с научной точки зрения язык изложения позволяет эффективно подготовиться к сдаче зачетов и экзаменов по математическим дисциплинам.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Д. Т. ПИСЬМЕННЫЙ