

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА»

**И.Ю. Скобелева, И.А. Ширшова**

## **НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

*Рекомендовано Ученым советом Нижегородского государственного  
технического университета им. Р.Е. Алексева в качестве  
учебного пособия для студентов заочной и дистанционной  
форм обучения по техническим специальностям*

Нижний Новгород 2013

УДК 514.18  
ББК 22.151.1  
С925

**Рецензент**

доцент, кандидат технических наук, зав. кафедрой  
«Начертательная геометрия и графика» ВГАВТ

**Скобелева И.Ю., Ширшова И.А.**

**С925 Начертательная геометрия:** учеб. пособие / И.Ю. Скобелева, И.А. Ширшова; НГТУ. Нижний Новгород, 2013. – 152с.

Приведены материалы по курсу «Начертательная геометрия». Рассмотрены методы построения пространственных объектов на плоскости, представлены позиционные и метрические задачи, имеющие исключительно практическое значение. Приведены примеры решения типовых задач, задачи для самостоятельного решения студентами, примеры решения и варианты заданий графических работ.

Методическое пособие может быть использовано студентами заочной и дистанционной форм обучения.

Предназначено для студентов технических специальностей.

Рис. 230. Табл. 8. Библиогр.: 11 назв.

УДК 514.18  
ББК 22.151.1

- © Нижегородский государственный  
технический университет  
им. Р.Е. Алексеева, 2013
- © Скобелева И. Ю., Ширшова И.А., 2013

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ</b> .....	6
<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....	7
<b>РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ</b> .....	8
<b>1. ПРЕДМЕТ КУРСА</b> .....	8
1.1. Метод начертательной геометрии .....	8
1.2. Задачи начертательной геометрии .....	8
<b>2. МЕТОДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ</b> .....	8
2.1. Центральный метод проецирования .....	8
2.2. Параллельный метод проецирования .....	9
2.3. Свойства параллельных проекций .....	9
2.4. Ортогональные проекции.....	10
<b>3. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ</b> .....	11
3.1. Ортогональные (прямоугольные) проекции точки. Проецирование точки на три плоскости проекций .....	11
3.2. Основные свойства комплексного чертежа .....	13
3.3. Комплексный чертеж без указания осей.....	13
<b>4. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ</b> .....	14
4.1. Классификация прямых.....	14
4.1.1. Линии уровня.....	15
4.1.2. Проецирующие прямые.....	17
4.2. Взаимное положение прямых линий .....	18
4.3. Принадлежность точки прямой линии .....	20
4.4. Определение натуральной величины отрезка. Способ треугольника .....	20
<b>5. ПЛОСКОСТЬ</b> .....	22
5.1. Способы задания плоскости .....	22
5.2. Классификация плоскостей .....	23
5.2.1 Проецирующие плоскости .....	23
5.2.2. Плоскости уровня.....	25
5.3. Относительное положение двух плоскостей .....	26
<b>6. ПОВЕРХНОСТЬ</b> .....	28
6.1. Способы задания поверхностей .....	28
6.2. Классификация поверхностей .....	30
6.2.1. Поверхности вращения.....	31

6.2.2. Поверхности сдвига .....	34
6.2.3. Винтовые поверхности .....	35
6.3. Изображение поверхностей на комплексном чертеже .....	35
6.3.1. Построение очерков конических поверхностей .....	36
6.3.2. Построение очерков цилиндрических поверхностей .....	38
<b>7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДИМОСТИ. МЕТОД КОНКУРИРУЮЩИХ ТОЧЕК .....</b>	<b>38</b>
<b>8. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ .....</b>	<b>41</b>
8.1. Относительное положение прямой и плоскости .....	41
8.2. Принадлежность точки и прямой линии плоскости .....	41
8.3. Параллельность прямой и плоскости .....	42
8.4. Линии уровня плоскости .....	42
8.5. Пересечение прямой общего положения и плоскости частного положения .....	44
8.6. Пересечение двух плоскостей частного положения .....	44
8.7. Пересечение плоскости общего положения и плоскости частного положения .....	45
8.8. Пересечение прямой общего положения и плоскости общего положения. Первая позиционная задача .....	46
8.9. Пересечение двух плоскостей общего положения. Вторая основная позиционная задача .....	49
8.10. Сечение поверхности плоскостью .....	51
8.11. Точка на поверхности .....	51
8.14. Сечение поверхности вращения плоскостью частного положения .....	55
8.15. Цилиндрические сечения .....	56
8.16. Конические сечения .....	57
8.17. Пересечение прямой с поверхностью .....	62
<b>9. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ .....</b>	<b>65</b>
9.1. Способ вспомогательных параллельных плоскостей .....	66
9.2. Способ вспомогательных сфер .....	70
<b>10. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ .....</b>	<b>76</b>
10.1. Теорема о проекциях прямого угла .....	76
10.2. Линии наибольшего наклона плоскости .....	77
10.3. Перпендикулярность прямой и плоскости .....	78
10.4. Взаимная перпендикулярность плоскостей .....	79

<b>11. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА.....</b>	<b>80</b>
11.1. Способ замены плоскостей проекций .....	80
11.2. Способ плоскопараллельного движения .....	84
11.3. Вращение .....	88
<b>12. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ .....</b>	<b>91</b>
12.1. Виды аксонометрических проекций.....	92
12.2. Прямоугольные (ортогональные) аксонометрические проекции .....	93
12.3. Прямоугольная изометрическая и диметрическая проекции.....	93
12.4. Аксонометрические проекции окружности .....	97
12.4.1. Построение эллипсов по восьми точкам .....	99
12.4.2. Построение овалов .....	100
<b>РАЗДЕЛ ВТОРОЙ .....</b>	<b>103</b>
<b>13. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ .....</b>	<b>103</b>
<b>РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ.....</b>	<b>116</b>
<b>14. ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ .....</b>	<b>116</b>
14.1. Графическая работа 1 .....	117
«Построение линии пересечения треугольных пластин».....	117
14.2. Графическая работа 2 «Проекция пирамиды» .....	124
14.3. Графическая работа 3 «Проекция сферы с отверстием».....	129
14.4. Графическая работа 4 «Сечение комбинированной поверхности проецирующей плоскостью».....	134
14.5. Графическая работа 5 «Пересечение поверхностей».....	140
<b>КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....</b>	<b>146</b>
<b>СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>148</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ.....</b>	<b>149</b>

## ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

### Геометрические знаки:

$\Phi$  – геометрическая фигура;

$A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$  – точки в пространстве (прописные буквы латинского алфавита);

$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$  – прямые и кривые линии в пространстве (строчные буквы латинского алфавита);

$\text{A}\alpha$  (Альфа),  $\text{B}\beta$  (Бета),  $\text{Г}\gamma$  (Гамма),  $\Delta\delta$  (Дельта),  $\text{E}\varepsilon$  (Эпсилон),  $\text{Z}\zeta$  (Дзета),  $\text{H}\eta$  (Эта),  $\Theta\theta$  (Тета),  $\text{I}\iota$  (Йота),  $\text{K}\kappa$  (Каппа),  $\Lambda\lambda$  (Лямбда),  $\text{M}\mu$  (Мю),  $\text{N}\nu$  (Ню),  $\Xi\xi$  (Кси),  $\text{O}\omicron$  (Омикрон),  $\text{P}\pi$  (Пи),  $\text{P}\rho$  (Ро),  $\Sigma\sigma$  (Сигма),  $\text{T}\tau$  (Тау),  $\text{Y}\upsilon$  (Ипсилон),  $\Phi\phi$  (Фи),  $\text{X}\chi$  (Хи),  $\Psi\psi$  (Пси),  $\Omega\omega$  (Омега) – плоскости и углы (буквы греческого алфавита).

$(AB)$  – прямая неограниченной длины, проходящая через точки  $A$  и  $B$ ;

$[AB)$  – луч с началом в точке  $A$ , проходящий через точку  $B$ ;

$[AB]$  – отрезок прямой, ограниченный точками  $A$  и  $B$ ;

$|AB|$  – расстояние от точки  $A$  до точки  $B$ ;

$|A, a|$  – расстояние от точки  $A$  до прямой  $a$ ;

$|A, \alpha|$  – расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\alpha$ .

### Знаки, выражающие отношения между геометрическими образами:

$=$  – равенство, совпадение;

$\rightarrow$  – отображение;

$\Rightarrow$  – следовательно;

$\Leftrightarrow$  – если (в том только случае), эквивалентность;

$\times$  – пересечение в случае, когда результатом пересечения является точка  $A=c \times d$ ;

$\cap$  – пересечение в случае, когда результатом пересечения является множество точек:  $a=\beta \times \gamma$ ;

$\in$  – принадлежность:  $A \in \alpha$ ;

$\subset$  – включение:  $A \subset \alpha$ ;

$\cup$  – объединение:  $ABC=[AB] \cup [BC] \cup [CA]$ ;

$\parallel$  – параллельность;

$\perp$  – перпендикулярность.

"Очарование, сопровождающее науку, может победить свойственное людям отвращение к напряжению ума и заставить их находить удовольствие в упражнении своего разума, – что большинству людей представляется утомительным и скучным занятием"

*Гаспар Монж*

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

Теория начертательной геометрии составляет основу инженерной практики, геометрической и конструкторской подготовки инженера.

Учебное пособие по начертательной геометрии предназначено для студентов технических специальностей высших учебных заведений. Содержание, структура и методика представления учебного материала в пособии полностью соответствуют требованиям государственного образовательного стандарта профессионального высшего образования, учебному плану и государственным требованиям содержанию по дисциплине «Начертательная геометрия» для инженерных специальностей.

В пособии дается методика построения технического чертежа и широко используются средства наглядного показа: выразительные проекционные объекты и их объемные модели. Геометрические задачи решаются одновременно на комплексных чертежах и на наглядных изображениях по одним и тем же правилам. Как видно из опыта, использование средств наглядного показа способствует целенаправленному формированию пространственных представлений и развитию пространственного воображения, приобретению навыков чтения чертежей, геометрического конструирования.

Учебное пособие позволяет оптимально организовать самостоятельную работу студентов, так как содержит основные теоретические положения курса, описание выдаваемых студентам графических работ по начертательной геометрии, рекомендации по их выполнению с демонстрацией процесса решения и поэтапным выполнением чертежей, исходные чертежи-задания по вариантам и образцы этих работ.

Авторы выражают искреннюю благодарность декану ЗВФ Б. В. Устинову за помощь в создании пособия.

Пожелания и замечания следует направлять по адресу: 603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24, КСФ, кафедра «Инженерная графика».

## РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

### 1. ПРЕДМЕТ КУРСА

#### 1.1. Метод начертательной геометрии

Начертательная геометрия – это раздел геометрии, в котором трехмерные пространственные объекты изучаются по их плоским изображениям – чертежам. Чертежом называют изображение предмета, построенное по особым правилам при помощи чертежных инструментов или средствами компьютерной графики, в точной зависимости от размеров и положения в пространстве соответствующих линий предмета. «Чертеж – это язык техники», – говорил один из создателей начертательной геометрии Гаспар Монж. «Начертательная геометрия служит грамматикой этого языка, так как она учит нас правильно читать чужие и излагать наши собственные мысли, пользуясь в качестве слов одними только линиями и точками как элементами всякого изображения», – писал автор классического русского учебника начертательной геометрии В.И. Курдюмов.

#### 1.2. Задачи начертательной геометрии

Начертательная геометрия занимается двумя основными вопросами:

1. Изучением методов построения изображений трехмерных пространственных форм на плоскости.
2. Изучением пространственных форм по их плоским изображениям.

Основные требования, предъявляемые к чертежам:

- наглядность,
- простота и точность выполнения,
- обратимость, то есть возможность решения задачи о восстановлении формы и размеров изображаемого предмета.

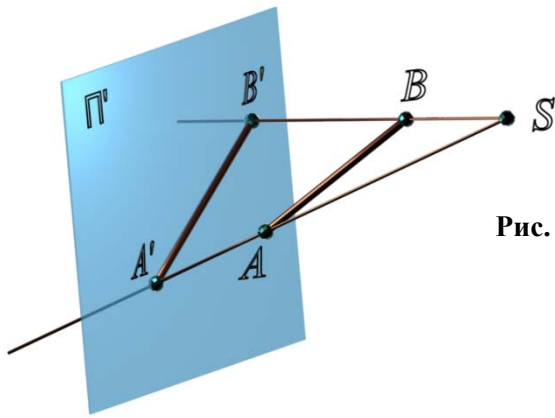
## 2. МЕТОДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ

### 2.1. Центральный метод проецирования

В пространстве выбирают произвольную точку  $S$  – центр проецирования и плоскость  $\Pi'$  – плоскость проекций или картинную плоскость (рис. 2.1). Для получения *центральной проекции* предмета, например отрезка  $[AB]$ , необходимо через центр проекций и каждую точку предмета (точки  $A$  и  $B$ ) провести прямые до пересечения с картинной плоскостью. Эти прямые называются проецирующими лучами. Точка пересечения проецирующего луча с картинной плоскостью называется проекцией точки на эту плоскость.

Проекция предмета на плоскость – это множество проекций всех его точек на заданную плоскость.



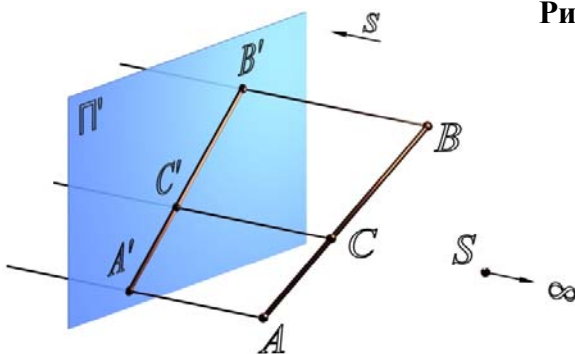


**Рис. 2.1. Центральный метод проецирования:**  
 $[SA)$  и  $[SB)$  – проецирующие лучи;  
 $A' = [SA) \cap \Pi'$  и  $B' = [SB) \cap \Pi'$  – центральные проекции точек  $A$  и  $B$  на плоскость  $\Pi'$

Чертежи, полученные методом центрального проецирования, отличаются большой наглядностью, поскольку построены на том же принципе, что и аппарат человеческого зрения. Однако такие чертежи сложно выполнять и измерять, поскольку размеры предмета искажаются.

## 2.2. Параллельный метод проецирования

Если центр проекций удалить в бесконечность, то угол между проецирующими лучами будет стремиться к нулю, и проецирующие лучи окажутся параллельными (рис. 2.2).



**Рис. 2.2. Параллельный метод проецирования:**  
 $s$  – направление проецирования;  
 $[SA)$ ,  $[SB)$  и  $[SC)$  – проецирующие лучи;  
 $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  – параллельные проекции точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  на плоскость  $\Pi'$  в направлении  $s$

## 2.3. Свойства параллельных проекций

1. Проекцией точки является точка (см. рис. 2.2).
2. Проекцией прямой линии является прямая линия (см. рис. 2.2), за исключением случая, когда прямая параллельна направлению проецирования.
3. При параллельном проецировании сохраняются пропорции.
4. Если точка принадлежит какой-либо линии, то проекция этой точки принадлежит проекции этой линии  $C \in AB \Rightarrow C' \in A'B'$  (см. рис. 2.2).
5. Если прямые параллельны между собой, то их проекции также параллельны (рис. 1.3).

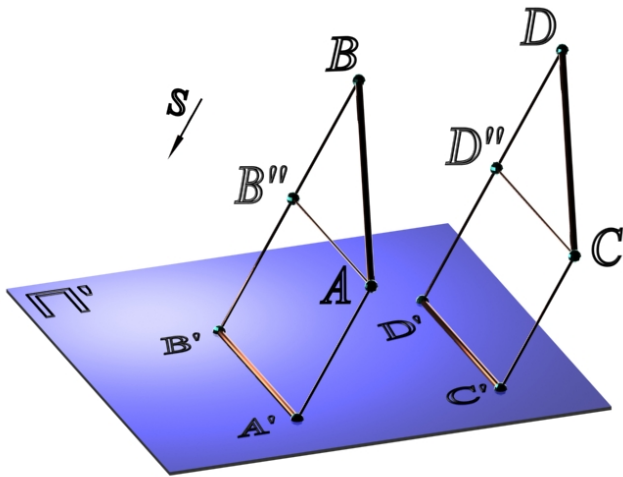


Рис. 2.3. Проекции параллельных прямых:  
 $[AB]//[DC]; [A'B']//[D'C']$

## 2.4. Ортогональные проекции

Если направление проецирования  $s$  перпендикулярно плоскости проекций, то метод проецирования называется *ортогональным* (рис. 2.4), а полученные проекции – ортогональными.

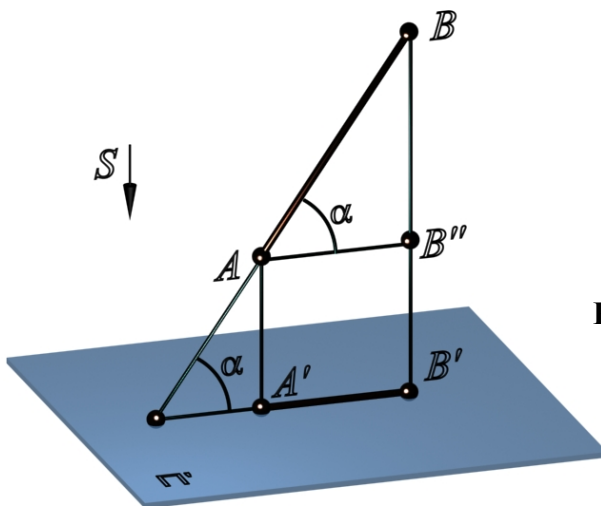


Рис. 2.4. Ортогональное проецирование:

$$s \perp \Pi',$$

$$|A'B'| = |AB''| = |AB| \times \cos \alpha$$

Ортогональное проецирование является частным случаем параллельного проецирования и имеет те же свойства.

Изображения, полученные при проецировании на одну плоскость проекций, не являются обратимыми, то есть задача о восстановлении оригинала по заданной проекции  $A'$  не решается однозначно. Проекции всех точек, расположенных на проецирующем луче  $AA'$  на плоскость  $\Pi'$ , совпадают.

Для получения обратимых чертежей нужны некоторые дополнительные условия. Например, изображаемый предмет жестко связывают с координатными осями и проецируют на плоскость вместе с ними. Такие чертежи называются аксонометрическими. Другой метод состоит в том, что предмет проецируют на несколько взаимно перпендикулярных плоскостей проекций. Такие чертежи называются ортогональными и именно они получили наибольшее распространение в технике.

### 3. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ

#### 3.1. Ортогональные (прямоугольные) проекции точки. Проецирование точки на три плоскости проекций

Рассмотрим систему трех взаимно перпендикулярных плоскостей проекций (рис. 3.1):  $\Pi_1$  – горизонтальная плоскость проекций,  $\Pi_2$  – фронтальная плоскость проекций и  $\Pi_3$  – профильная плоскость проекций.

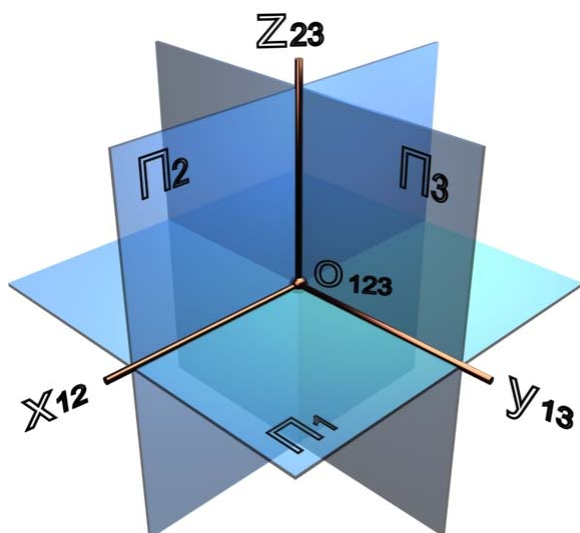


Рис. 3.1. Плоскости проекций:

$$x_{12} = \Pi_1 \cap \Pi_2;$$

$$y_{13} = \Pi_1 \cap \Pi_3;$$

$$z_{23} = \Pi_2 \cap \Pi_3$$

Точка пересечения трех плоскостей  $O_{123}$  – начало координат. Поскольку плоскости проекций бесконечны, три плоскости разделяют все пространство на восемь частей – октантов. Порядок отсчета октантов (см. рис. 3.1): слева от плоскости  $\Pi_3$  (против часовой стрелки) с первого по четвертый, справа – с пятого по восьмой.

Направление осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в первом октанте считается положительным. Знаки осей, продолженных за начало координат, считают отрицательными.

Для получения проекций точки  $A$  на три плоскости проекций (рис. 3.2)  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  через точку  $A$  проводятся проецирующие лучи  $[AA_1)$  – до пересечения с плоскостью  $\Pi_1$ ,  $[AA_2)$  – до пересечения с плоскостью  $\Pi_2$  и  $[AA_3)$  – до пересечения с плоскостью  $\Pi_3$ . Точка  $A_1$  – горизонтальная проекция точки  $A$ ,  $A_2$  – фронтальная проекция точки  $A$ ,  $A_3$  – профильная проекция точки  $A$ . Точки  $A_{12}$ ,  $A_{13}$ ,  $A_{23}$  – вспомогательные, лежащие соответственно на осях  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

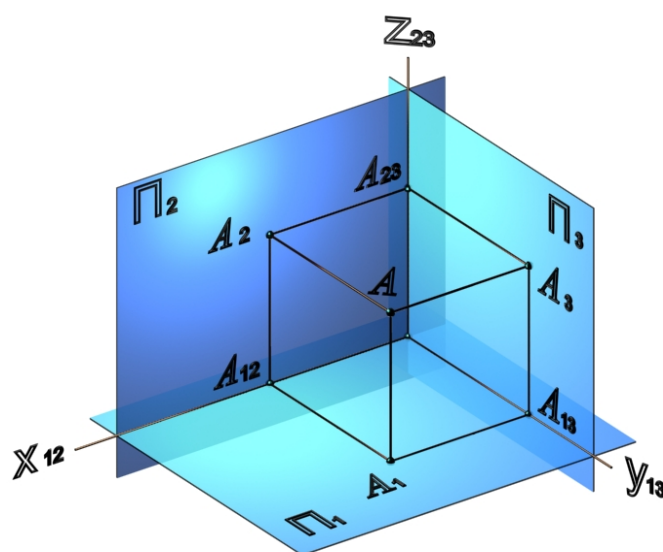
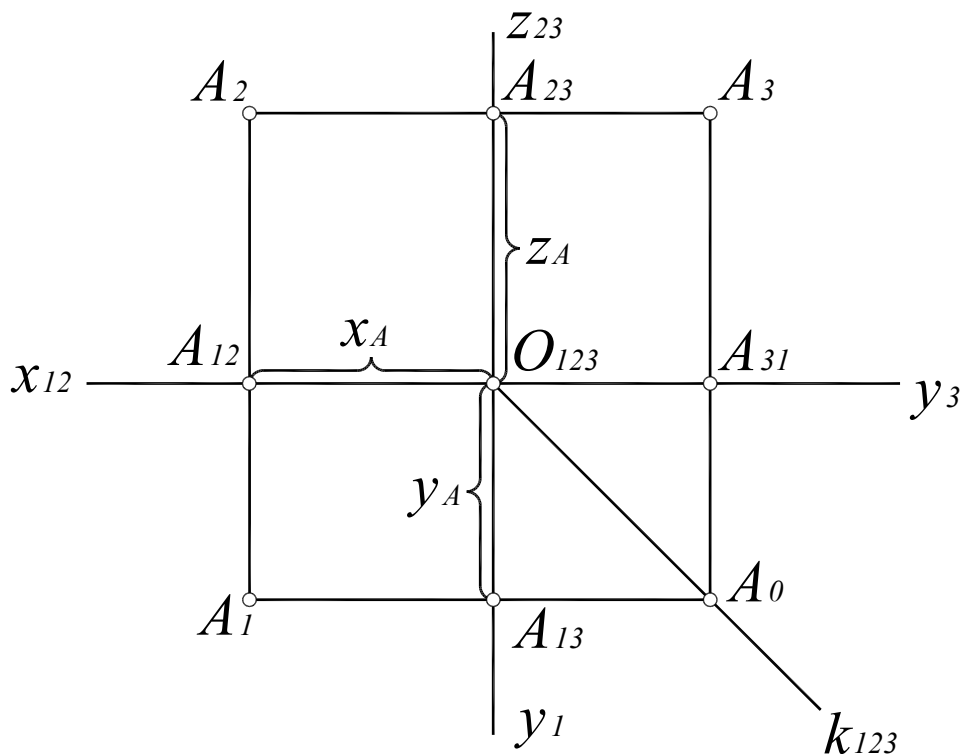


Рис. 3.2. Проецирование точки на три плоскости проекций

Для получения плоского чертежа точки  $A$  необходимо повернуть плоскость  $\Pi_1$  вокруг оси  $x$  по часовой стрелке, а плоскость  $\Pi_3$  – вокруг оси  $z$  до совмещения с  $\Pi_2$ . Плоскость  $\Pi_2$ , точки  $A_2$  и  $A_{12}$  остаются неподвижными (рис. 3.3), точки  $A_1$  и  $A_{13}$  и ось  $y_1$  поворачиваются вместе с  $\Pi_1$ . После поворота, точки  $A_1$ ,  $A_{12}$  и  $A_2$  образуют вертикальную линию связи. Точки  $A_{23}$  и  $A_3$ , поворачиваясь вместе с  $\Pi_3$  и осью  $y_3$ , образуют, после поворота, горизонтальную линию связи  $A_2A_3$ . Точки  $A_1$  и  $A_3$  соединяются ломаной линией связи  $A_1A_0A_3$ . Вершина ломаной линии связи или точка преломления  $A_0$  лежит на биссектрисе угла  $y_1O_{123}y_3$ . Множество вершин ломаных линий связи определяют условную линию, называемую постоянной прямой комплексного чертежа  $k_{123}$ .



**Рис. 3.3. Трехкартинный комплексный чертеж точки:**

$$\begin{aligned}
 A_1A_{13} = O_{123}A_{12} = A_2A_{23} &= x - \text{широта } A; \\
 A_1A_{12} = O_{123}A_{13} = A_{23}A_3 &= y - \text{глубина точки } A; \\
 A_1A_{12} = O_{123}A_{23} = A_{31}A_3 &= z - \text{высота точки } A
 \end{aligned}$$

Чертеж трех совмещенных плоскостей проекций называется *трехкартинным комплексным чертежом*. Метод образования комплексного чертежа называют методом Монжа, в честь французского ученого Гаспара Монжа, жившего в XIX веке, первым предложившего использовать совмещенные чертежи.

Для решения задач в начертательной геометрии часто используются чертежи на двух совмещенных плоскостях проекций, которые называются *двухкартинными комплексными чертежами* (рис. 3.4).

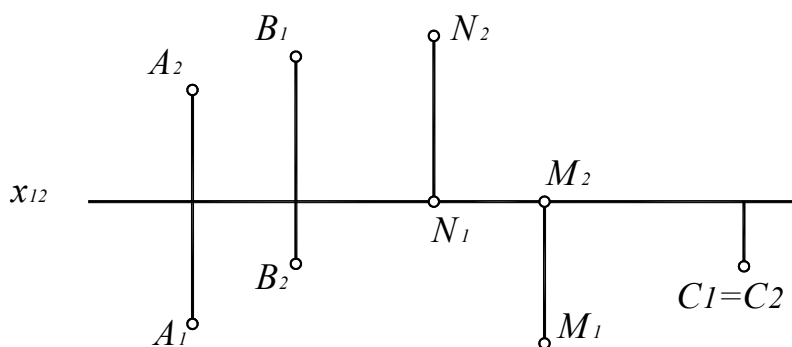


Рис. 3.4. Двухкартинный комплексный чертеж точек, занимающих различное положение относительно плоскостей проекций

### 3.2. Основные свойства комплексного чертежа

1. Горизонтальная и фронтальная проекция точки  $A$  лежат на вертикальной линии связи  $A_1A_2 \perp x_{12}$ .
2. Фронтальная и профильная проекции точки  $A$  лежат на горизонтальной линии связи  $A_2A_3 \perp z_{23}$ .
3. Горизонтальная и профильная проекция точки  $A$  лежат на ломаной линии связи  $A_1A_3 = A_1A_0 + A_0A_3$ , вершина которой находится на постоянной прямой комплексного чертежа  $k_{123}$ .

### 3.3. Комплексный чертеж без указания осей

Оси проекций фиксируют положение плоскостей проекций. Практически гораздо важнее установить взаимное расположение изображаемых объектов и их элементов, нежели расстояния до плоскостей проекций. На рис. 3.5,а представлен комплексный чертеж точки  $A$  без указания осей.

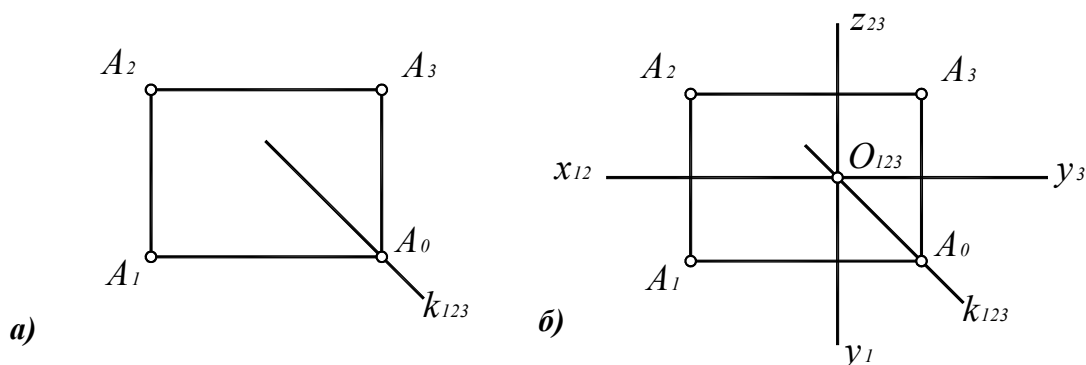


Рис. 3.5. Двухкартинные комплексные чертежи точки  $A$ :  
а – безосный; б – с восстановленными осями

На технических чертежах оси не проводят, предполагая, что проецирование ведется ортогонально на три взаимно перпендикулярные плоскости проекций.

Если же оси показать необходимо, их можно восстановить (рис. 3.5,б) таким образом, чтобы  $x_{12} \perp A_1A_2$ ,  $z_{23} \perp A_2A_3$ , а начало координат находилось на постоянной прямой комплексного чертежа  $k_{123}$ .

## 4. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

*Прямая* линия в системе плоскостей проекций занимает определенное положение. Прямая может располагаться относительно плоскостей проекций произвольно или занимать некоторое частное положение – быть параллельной, перпендикулярной или принадлежать какой-либо плоскости проекций.

### *Способы задания прямой*

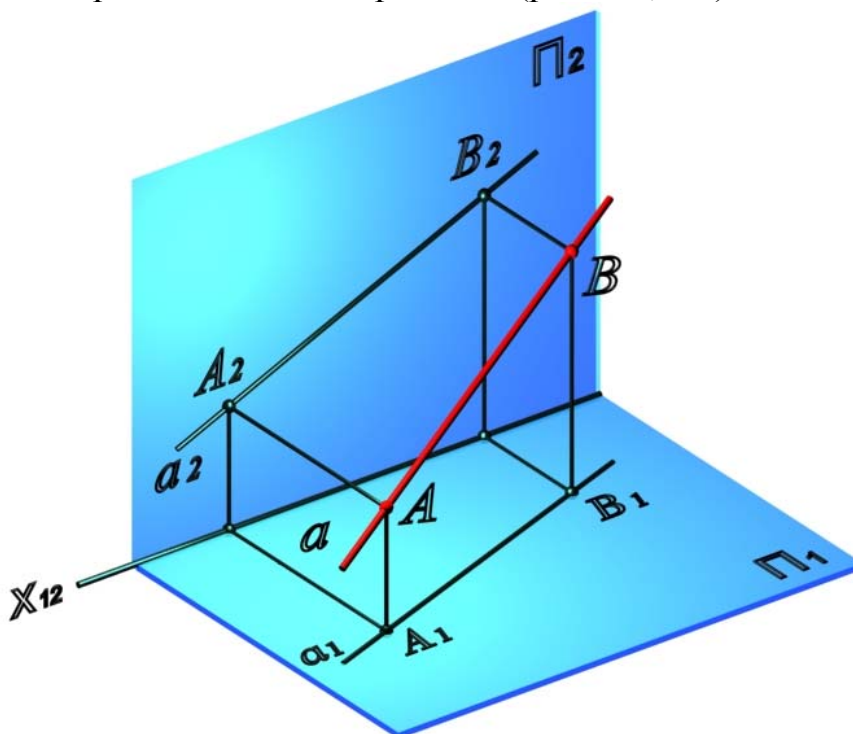
- Двумя точками.
- Точкой и направлением.
- Линией пересечения двух плоскостей.
- Своими проекциями.

### 4.1. Классификация прямых

В зависимости от положения прямых относительно плоскостей проекций различают прямые общего положения и прямые частного положения.

#### *Прямые общего положения*

*Прямая общего положения* – прямая, наклоненная под произвольными углами ко всем трем плоскостям проекций (рис. 4.1, 4.2).

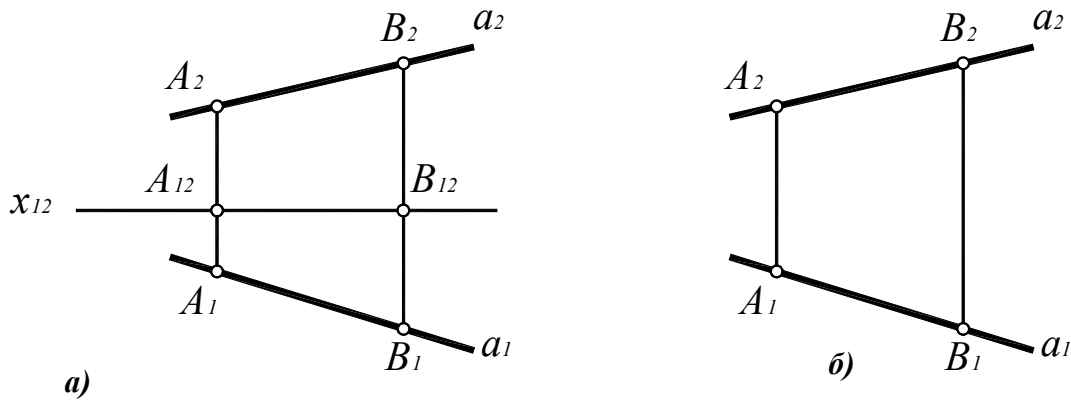


**Рис. 4.1. Прямая общего положения:**

$a(AB)$  – прямая общего положения;

$a_1(A_1B_1)$  – горизонтальная проекция прямой  $a(AB)$ ;

$a_2(A_2B_2)$  – фронтальная проекция прямой  $a(AB)$



**Рис. 4.2. Комплексный чертёж прямой общего положения:**  
*a* – двухкартинный комплексный чертёж;  
*б* – безосный комплексный чертёж

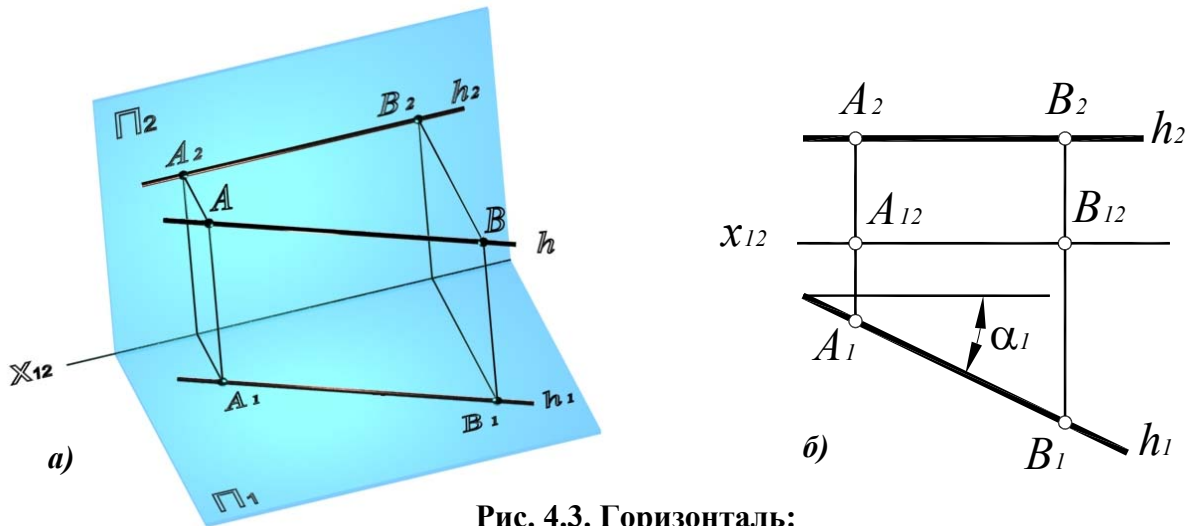
### Прямые частного положения

Среди прямых частного положения различают линии уровня и проецирующие прямые.

#### 4.1.1. Линии уровня

Прямые линии, параллельные какой-либо плоскости проекций, называются *линиями уровня*.

**Горизонталь  $h$**  – прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций  $h \parallel \Pi_1$ , (рис. 4.3).



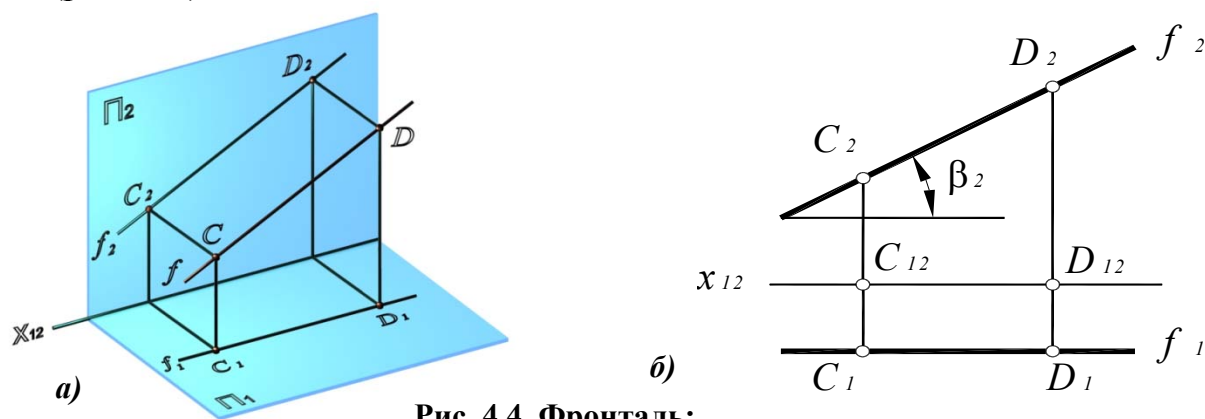
**Рис. 4.3. Горизонталь:**  
*a* – наглядное изображение;  
*б* – комплексный чертёж

Поскольку высоты всех точек горизонтали равны между собой:  $h_2 \perp A_1A_2$  или  $h \parallel \Pi_1$ .

Любой отрезок горизонтали проецируется на  $\Pi_1$  в натуральную величину:  
 $[A_1B_1] = [AB]$ .

Угол наклона  $h$  к  $\Pi_2$  также проецируется на  $\Pi_1$  в натуральную величину:  
 $\angle \alpha_1 = \angle \alpha = \angle h, \Pi_2$ .

**Фронталь**  $f$  – прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций  $f \parallel \Pi_2$  (рис. 4.4).



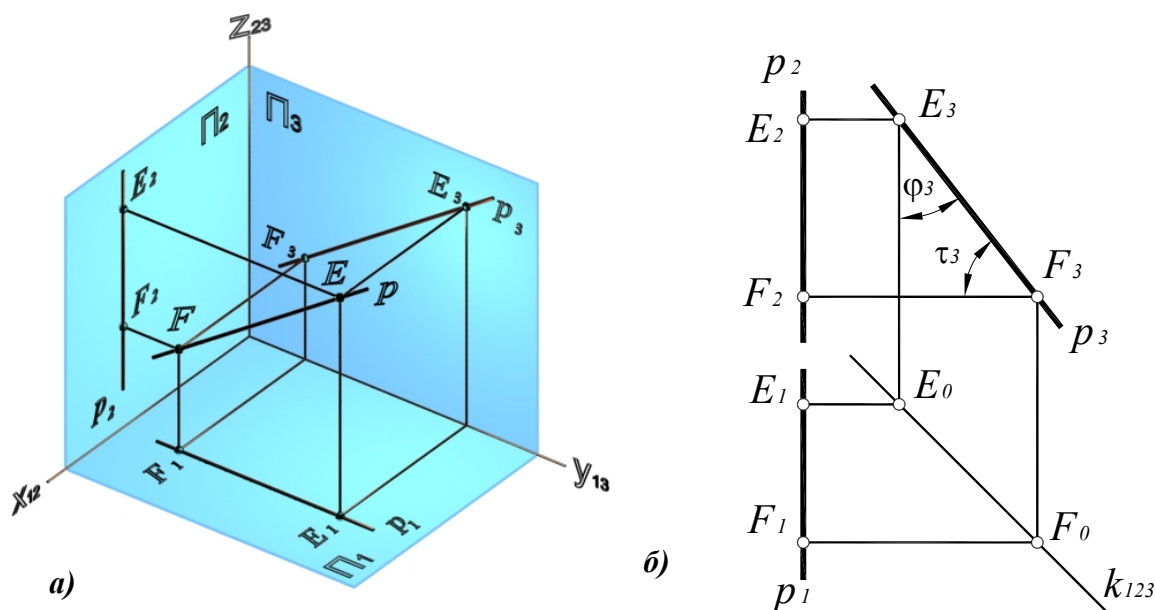
**Рис. 4.4. Фронталь:**

*a* – наглядное изображение;  
*б* – комплексный чертеж

Поскольку глубина всех точек фронтали одинакова:  $f_1 \perp C_1C_2$

Отрезки фронтали и угол наклона к  $\Pi_1$  проецируются на  $\Pi_1$  в натуральную величину:  $[C_2D_2] = [CD]$ ;  $\angle \beta_1 = \angle \beta = \angle f$ ,  $\Pi_1$ .

**Профильная прямая** – прямая, параллельная профильной плоскости проекций  $p \parallel \Pi_3$  (рис. 4.5).



**Рис. 4.5. Профильная прямая:**

*a* – наглядное изображение;  
*б* – комплексный чертеж

Поскольку ширина всех точек профильной прямой одинакова:  $p_2 \perp E_2E_1$ .

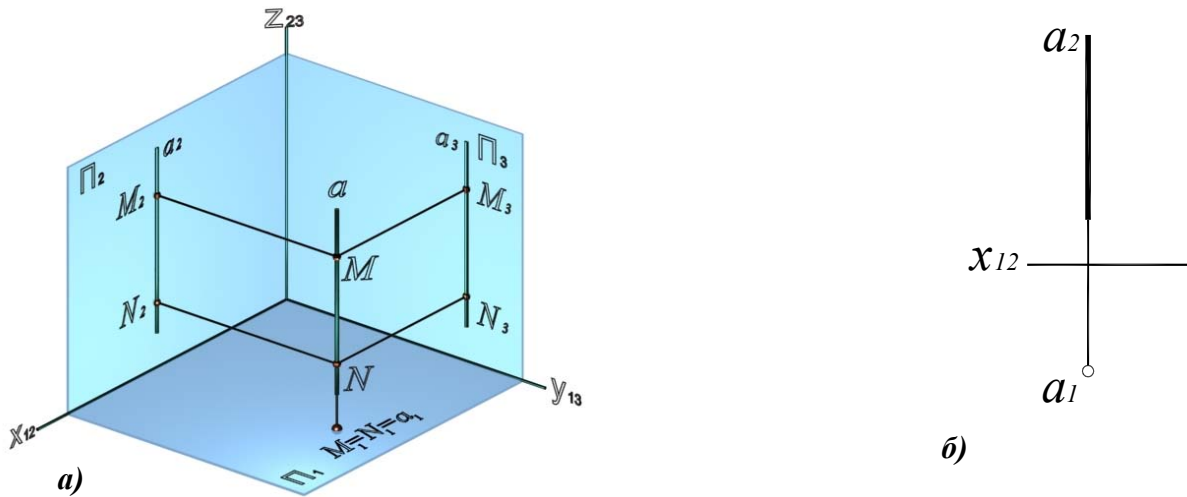
Отрезки профильной прямой и углы наклона к  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  проецируются на  $\Pi_3$  в натуральную величину:  $[E_3F_3] = [EF]$ ;  $\angle \tau_3 = \angle \tau = \angle p$ ,  $\Pi_1$ ;  $\angle \varphi_3 = \angle \varphi = \angle p$ ,  $\Pi_2$ .



### 4.1.2. Проецирующие прямые

Прямая линия, перпендикулярная одной из плоскостей проекций или параллельная направлению проецирования, называется проецирующей.

**Горизонтально-проецирующая прямая** – прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций  $a_1 \perp \Pi_1$  (рис. 4.6).

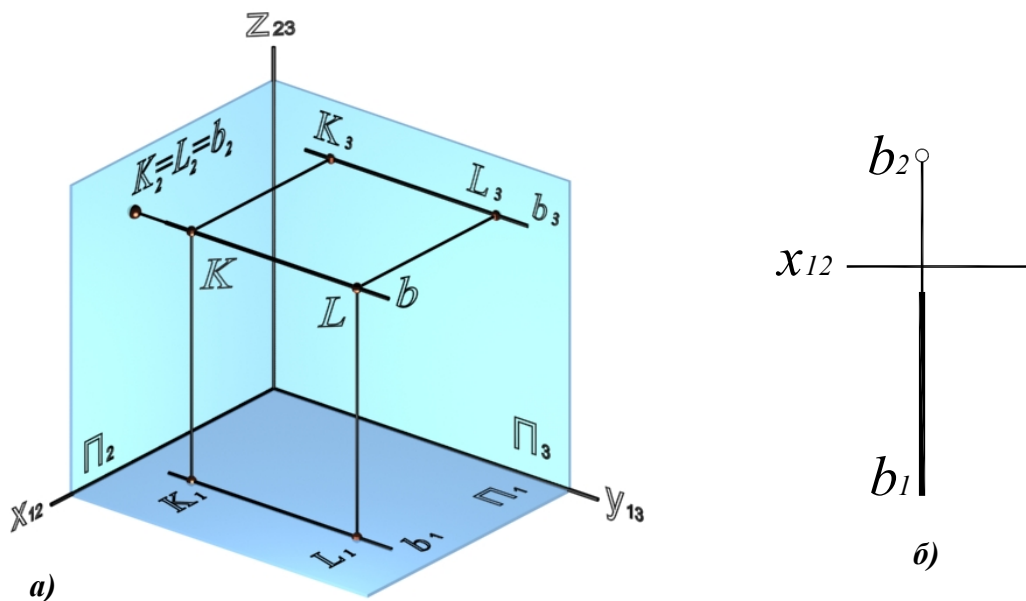


**Рис. 4.6. Горизонтально-проецирующая прямая:**

$a$  – наглядное изображение;

$\bar{a}$  – комплексный чертеж

**Фронтально-проецирующая прямая** – прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций  $b \perp \Pi_2$  (рис. 4.7).

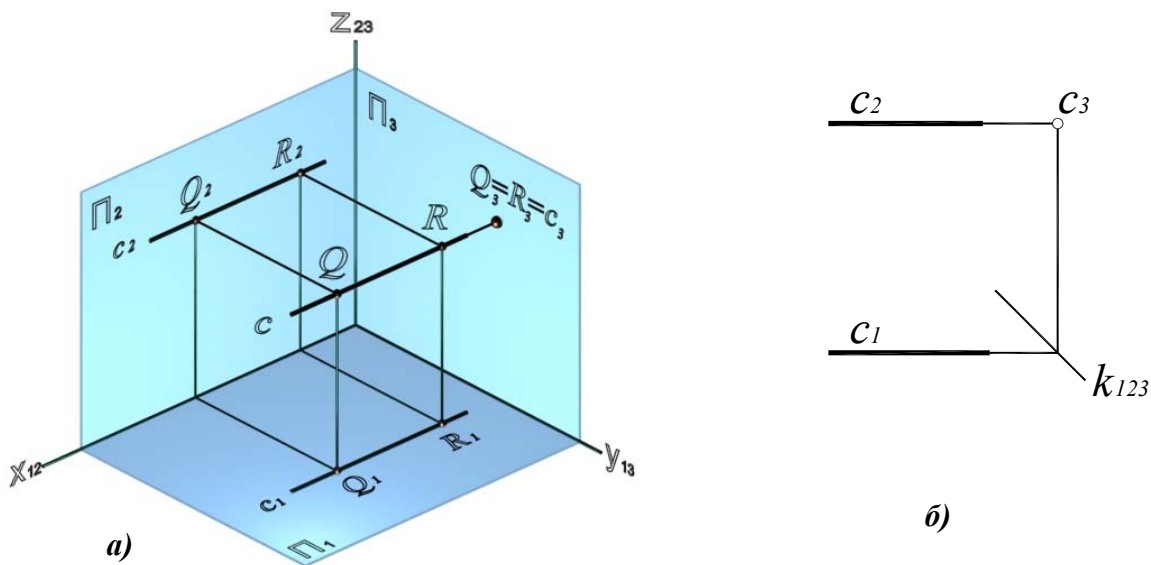


**Рис. 4.7. Фронтально-проецирующая прямая:**

$a$  – наглядное изображение;

$\bar{a}$  – комплексный чертеж

**Профильно-проецирующая прямая** – прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций  $c \perp \Pi_3$  (рис. 4.8).

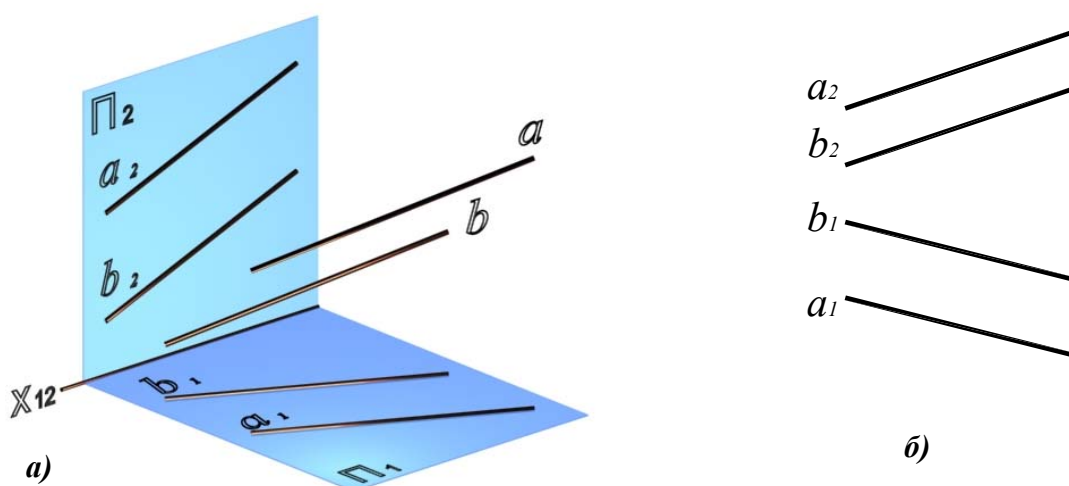


**Рис. 4.8. Профильно-проецирующая прямая:**  
*a* – наглядное изображение;  
*b* – комплексный чертеж

#### 4.2. Взаимное положение прямых линий

Прямые линии в пространстве могут быть параллельными, пересекающимися или скрещивающимися.

Если прямые *параллельны* (рис. 4.9), то их одноименные проекции параллельны:  $a \parallel b \Rightarrow (a_1 \parallel b_1) \text{ и } (a_2 \parallel b_2)$ .

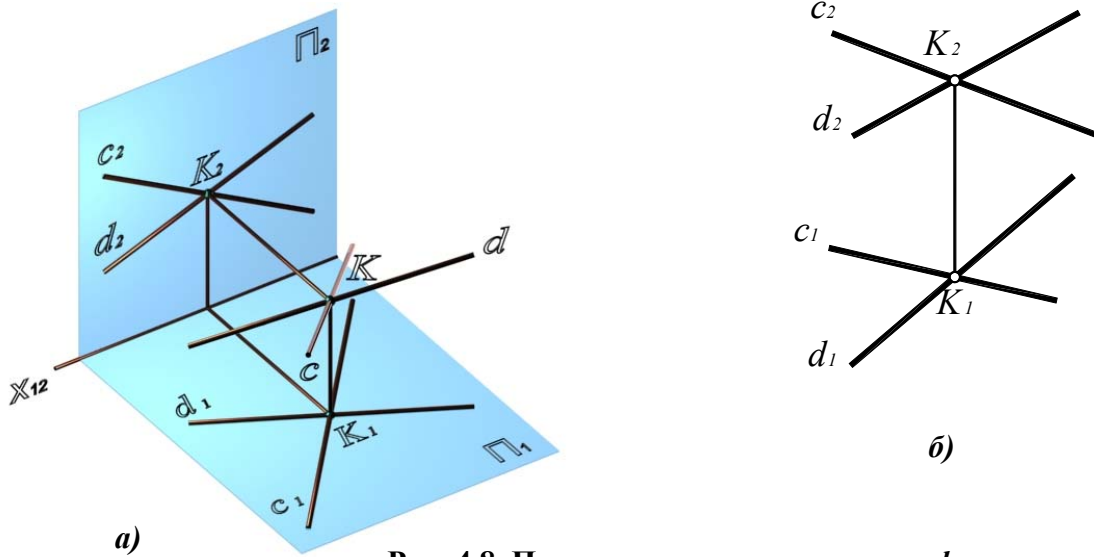


**Рис. 4.9. Параллельные прямые *a* и *b*:**  
*a* – наглядное изображение;  
*b* – комплексный чертеж

Пересекающиеся прямые имеют общую точку (рис. 4.10), то есть точки пересечения их одноименных проекций лежат на общей линии связи:

$$c \times d = K \Rightarrow c_1 \times d_1 = K_1;$$

$$c_2 \times d_2 = K_2 \text{ и } K_1 K_2 \perp x_{12}.$$

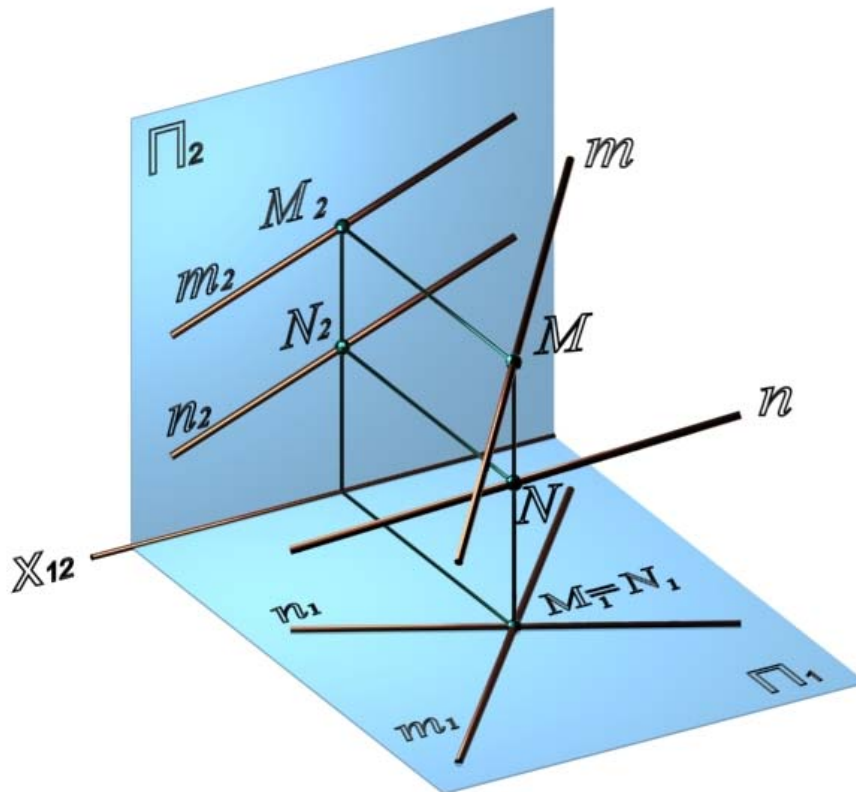


**Рис. 4.8. Пересекающиеся прямые  $c$  и  $d$ :**

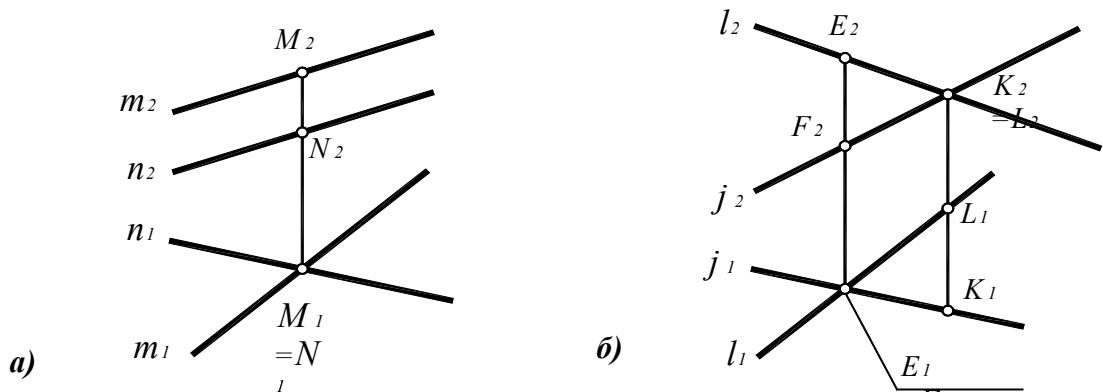
$a$  – наглядное изображение;

$b$  – комплексный чертеж

Прямые, не имеющие общей точки и не параллельные между собой, являются скрещивающимися (рис. 4.11, 4.12).



**Рис. 28. Скрещивающиеся прямые  $m$  и  $n$**



**Рис. 4.12. Проекция скрещивающихся прямых:**

*a* – скрещивающиеся прямые *mij*;

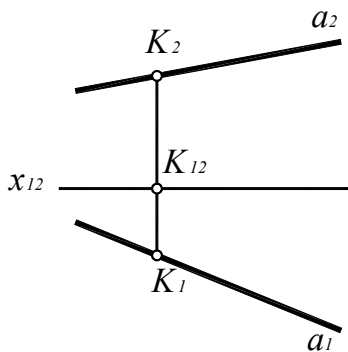
*б* – скрещивающиеся прямые *lij*

Проекция прямых пересекаются  $l_1 \times j_1 = E_1$  и  $l_2 \times j_2 = K_2$ , но  $E_1 K_2$  не является общей линией связи (см. рис. 4.12, б).

Если пересекающиеся и параллельные прямые лежат в одной плоскости, то скрещивающиеся прямые лежат в двух параллельных плоскостях.

### 4.3. Принадлежность точки прямой линии

Точка принадлежит прямой, если ее проекции принадлежат соответствующим (одноименным) проекциям прямой (рис. 4.13).



**Рис. 4.13. Принадлежность точки прямой линии:**

$$K \in a \Leftrightarrow K_1 \in a_1 \text{ и } K_2 \in a_2;$$

$$[K_1 K_2] \perp x_{12}$$

### 4.4. Определение натуральной величины отрезка. Способ треугольника

Отрезок  $[AB]$  – отрезок прямой общего положения. Ни одна из проекций отрезка не равна его натуральной величине.

На рис. 4.14  $A_1 A B B_1$  – прямоугольная трапеция, наклонной стороной которой является отрезок  $[AB]$ , высотой – его горизонтальная проекция  $[A_1 B_1]$ , основаниями – горизонтально-проецирующие прямые  $(AA_1)$  и  $(BB_1)$ .

Если провести прямую  $(AB^0) \parallel (A_1 B_1)$ , то от трапеции  $A_1 A B B_1$  отсекается прямоугольный треугольник  $AB B^0$  с гипотенузой  $[AB]$ , один катет которого  $[AB^0] = [A_1 B_1]$ , другой –  $[BB^0]$  равен разности высот точек  $A$  и  $B$ .

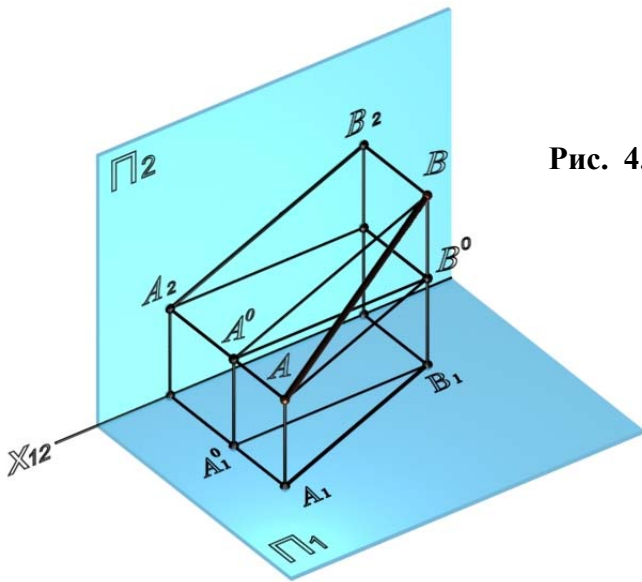


Рис. 4.14. Определение натуральной величины отрезка способом треугольника

На комплексном чертеже (рис. 4.15,а) прямоугольный треугольник строится непосредственно при горизонтальной проекции отрезка:  $\Delta A_1 B_1 B' = \Delta A B B^0$ . Одним катетом прямоугольного треугольника является горизонтальная проекция  $[A_1 B_1]$ , вторым – разность высот точек  $A$  и  $B$  (отрезок  $[B B^0] = [B_1 B']$ ), гипотенуза  $[A_1 B']$  и будет равна натуральной величине отрезка  $[AB]$ .

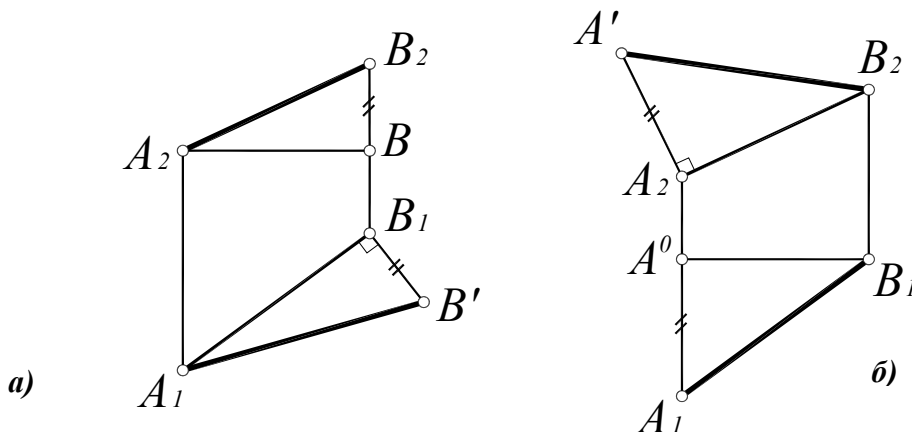


Рис. 4.15. Определение натуральной величины отрезка:

а – на горизонтальной проекции;  
б – на фронтальной проекции

Аналогичные построения возможны и на фронтальной проекции (рис. 4.15,б), тогда одним катетом прямоугольного треугольника является фронтальная проекция  $[A_2 B_2]$ , а вторым – разность глубин точек  $A$  и  $B$  (отрезок  $[A_2 A'] = [A_1 A^0]$ ), гипотенуза  $[B_2 A']$  будет равна натуральной величине отрезка  $[AB]$ .

Таким образом, можно сформулировать общее правило:

*Натуральная величина отрезка прямой определяется гипотенузой прямоугольного треугольника, одним катетом которого является одна из проекций отрезка, а вторым – разность расстояний концов другой проекции отрезка относительно друг друга.*

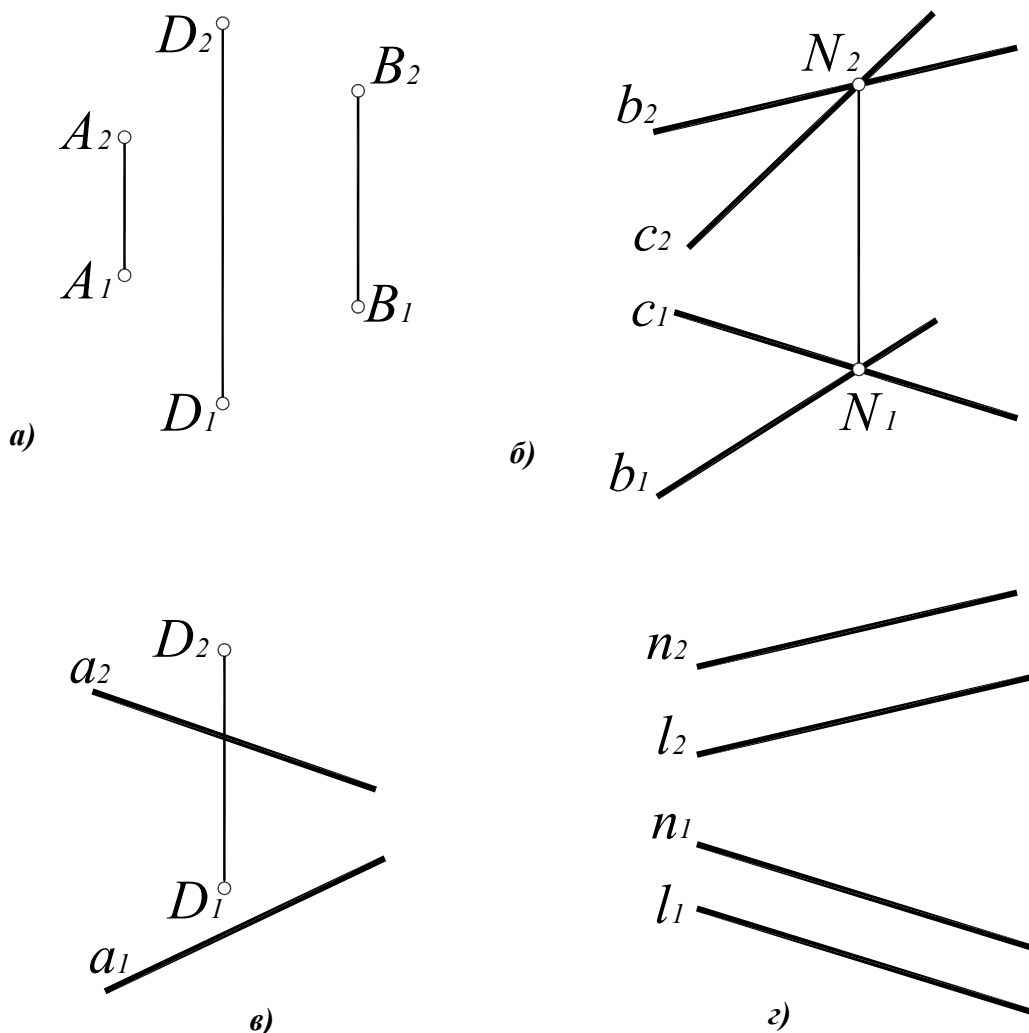
## 5. ПЛОСКОСТЬ

В геометрии *плоскость* представляют как бесконечную поверхность, имеющую на всем протяжении одинаковое направление. Плоскость безгранична и бесконечна.

### 5.1. Способы задания плоскости

На комплексном чертеже плоскость задается проекциями тех элементов, которыми она задана в пространстве. Плоскость (рис. 5.1, 5.2) однозначно определяют:

- три точки, не лежащие на одной прямой  $\alpha(ABC)$  (рис 5.1,а);
- пересекающиеся прямые  $\beta(b \times c)$  (рис 5.1,б);
- прямая и точка  $\gamma(a, D)$  (рис 5.1,в);
- параллельные прямые  $\delta(l \parallel n)$  (рис 5.1,г);



**Рис. 5.1. Способы задания плоскостей:**

$a - \alpha(ABC)$ ;  $б - \beta(b \times c)$ ;  $в - \gamma(a, D)$ ;  $г - \delta(l \parallel n)$

- *следы* плоскости – линии пересечения плоскости с плоскостями проекций  $\mu(\mu_1, \mu_2)$  (рис. 5.2);

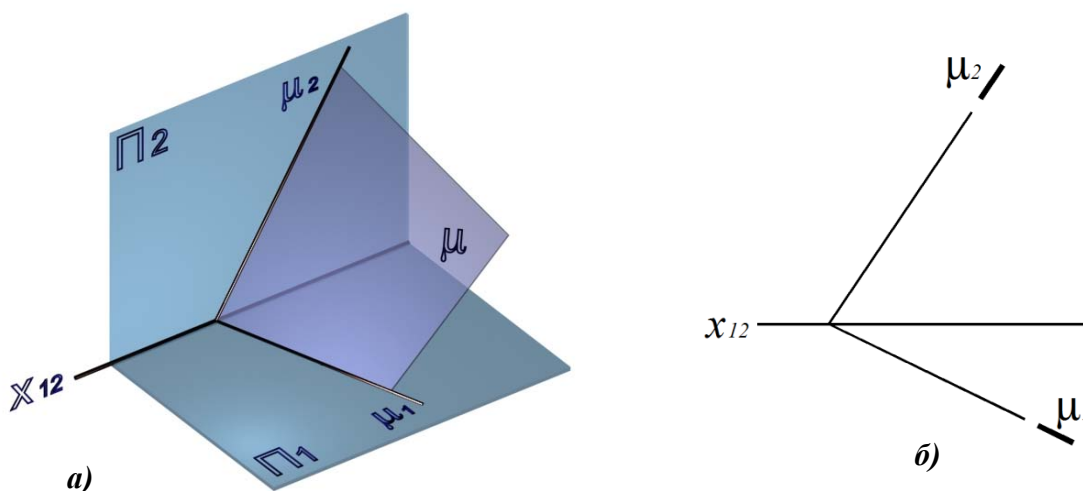


Рис. 5.2. Задание плоскости следами  $\mu(\mu_1, \mu_2)$ :

*a* – наглядное изображение;

*б* – комплексный чертеж

- проекции плоской фигуры (треугольника, окружности, и т. д.).

## 5.2. Классификация плоскостей

В зависимости от положения относительно плоскостей проекций различают плоскости общего положения и плоскости частного положения.

**Плоскость общего положения** – плоскость, наклоненная под произвольными углами к плоскостям проекций (см. рис. 5.1, 5.2).

**Плоскости частного положения** можно разделить на две группы – проецирующие плоскости и плоскости уровня. Плоскости частного положения чаще всего задаются следами.

### 5.2.1 Проецирующие плоскости

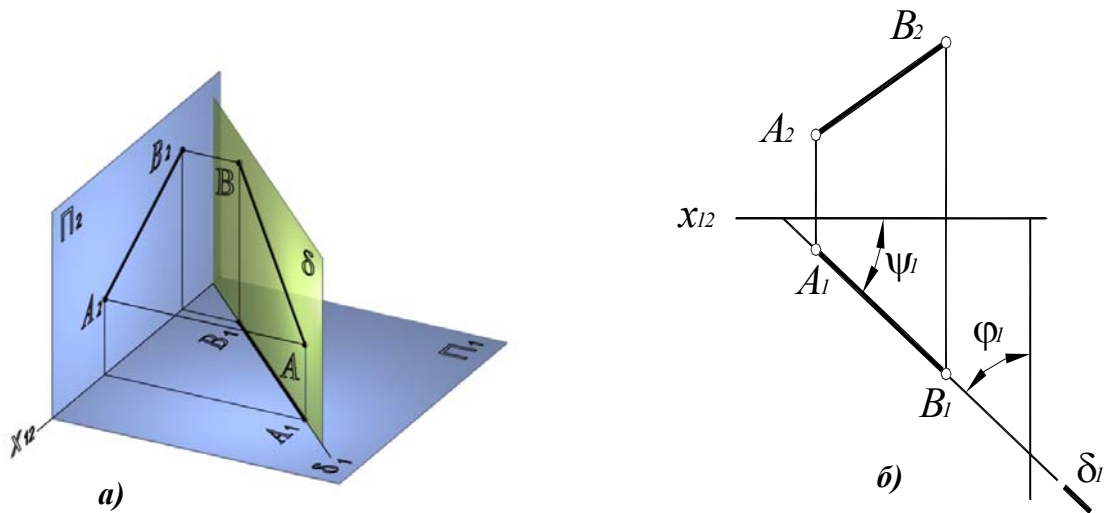
Плоскости, перпендикулярные одной из плоскостей проекций, называются *проецирующими*.

**Горизонтально-проецирующая плоскость**  $\delta(\delta_1) \perp \Pi_1$  – плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$  (рис. 5.3). Горизонтально-проецирующая плоскость задается горизонтальным следом плоскости  $\delta_1$ , который является геометрическим местом горизонтальных проекций всех точек, принадлежащих данной плоскости.

Углы наклона горизонтально-проецирующей плоскости к  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  проецируются на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину.

$$\psi = \angle \delta(\delta_1), \Pi_2; \varphi = \angle \delta(\delta_1), \Pi_3;$$

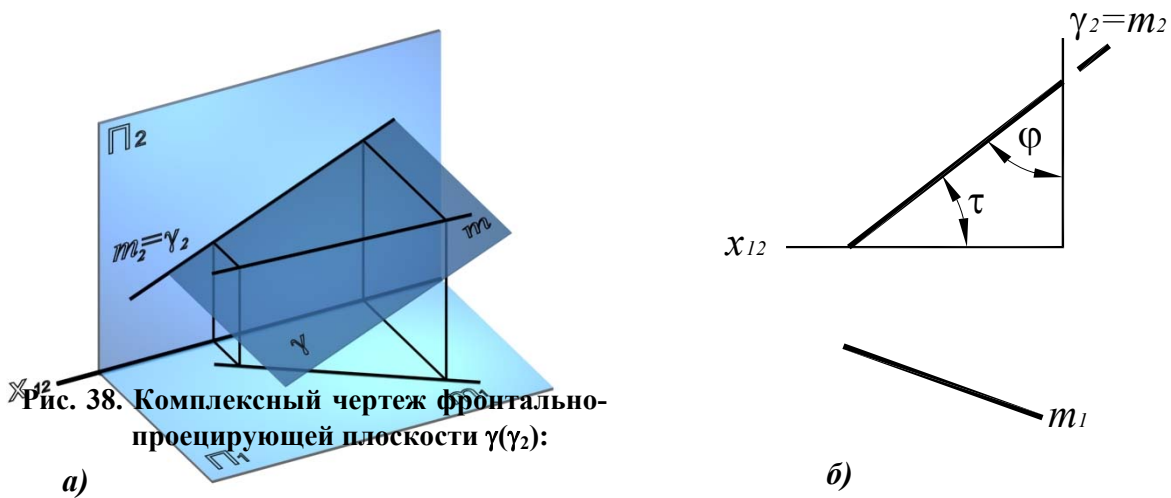
$$AB \subset \delta(\delta_1) \perp \Pi_1 \Rightarrow A_1B_1 \subset \delta_1$$



**Рис. 5.3. Горизонтально-проецирующая плоскость  $\delta(\delta_1)$ :**

*a* – наглядное изображение;  
*б* – комплексный чертеж

**Фронтально-проецирующая плоскость  $\gamma(\gamma_2) \perp \Pi_2$**  – плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$ , задается фронтальным следом плоскости  $\gamma_2$  (рис. 5.4).



**Рис. 38. Комплексный чертеж фронтально-проецирующей плоскости  $\gamma(\gamma_2)$ :**

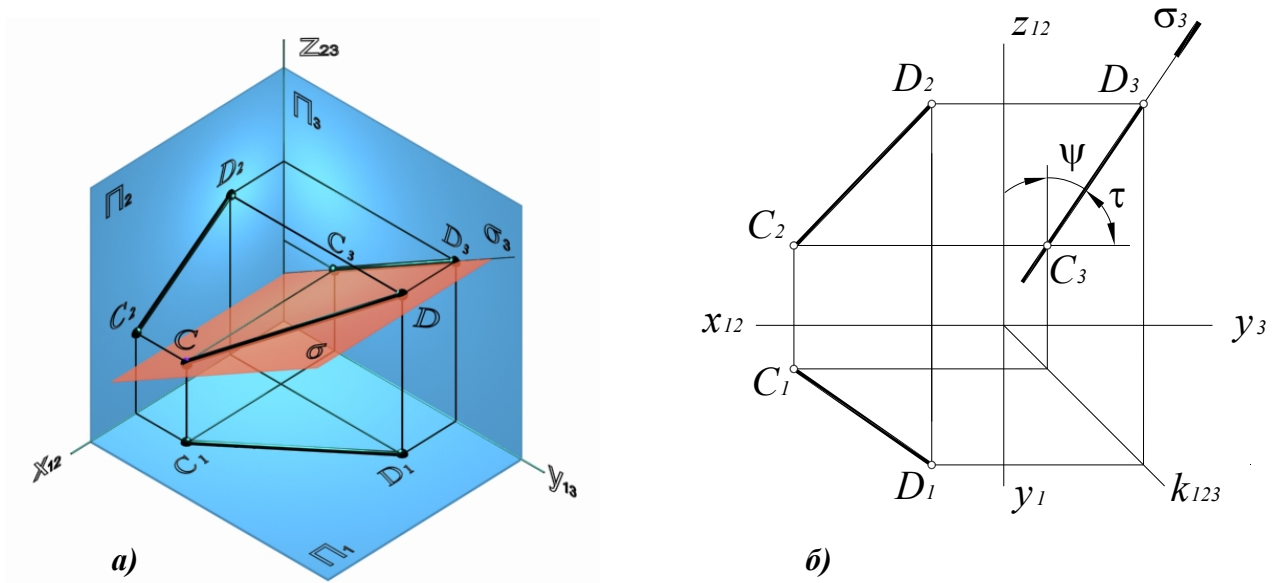
**Рис. 5.4. Фронтально-проецирующая плоскость  $\gamma(\gamma_2)$ :**

*a* – наглядное изображение;  
*б* – комплексный чертеж

Проекции всех линий и точек, лежащих во фронтально-проецирующей плоскости, совпадают с фронтальным следом этой плоскости. Углы наклона фронтально-проецирующей плоскости  $\tau$  – к  $\Pi_1$  и  $\phi$  – к  $\Pi_2$  проецируются на фронтальную плоскость проекций без искажения.



**Профильно-проецирующая плоскость**  $\sigma(\sigma_3) \perp \Pi_3$  – плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций  $\Pi_3$ , задается профильным следом плоскости  $\sigma_3$  (рис. 5.5).



**Рис. 5.5. Профильно-проецирующая плоскость  $\sigma(\sigma_3)$ :**

*a* – наглядное изображение;

*б* – комплексный чертеж

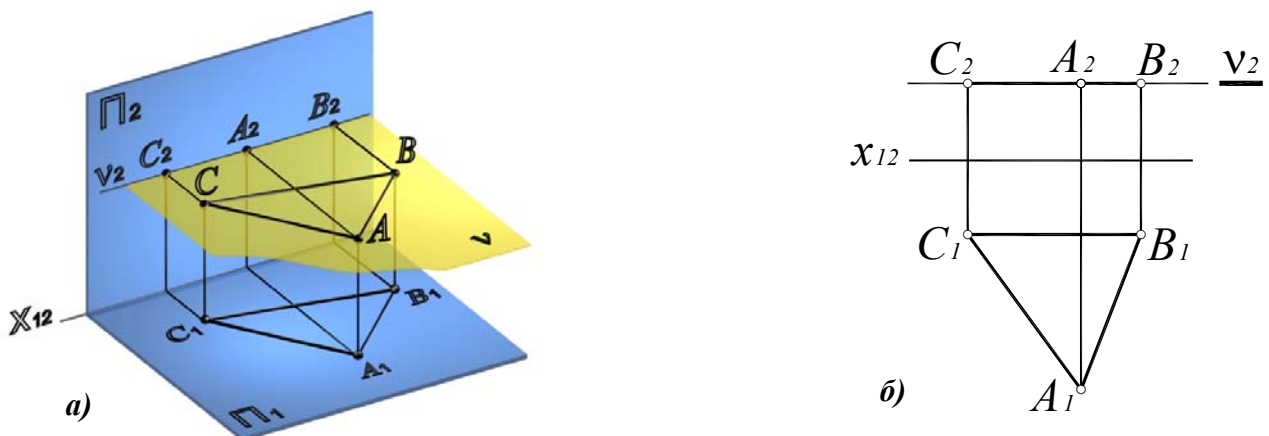
Углы наклона профильно-проецирующей плоскости к  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  проецируются на профильную плоскость проекций без искажения.

### 5.2.2. Плоскости уровня

Плоскости, параллельные одной из плоскостей проекций, называются *плоскостями уровня*. Как и проецирующие плоскости, плоскости уровня задаются следами. Все объекты, лежащие в плоскости уровня, проецируются на параллельную плоскость проекций в натуральную величину.

**Горизонтальная плоскость уровня**  $v \parallel \Pi_1$  – плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций.

Треугольник  $ABC$ , лежащий в горизонтальной плоскости уровня  $v(v_2)$ , проецируется на  $\Pi_1$  в натуральную величину (рис. 5.6).

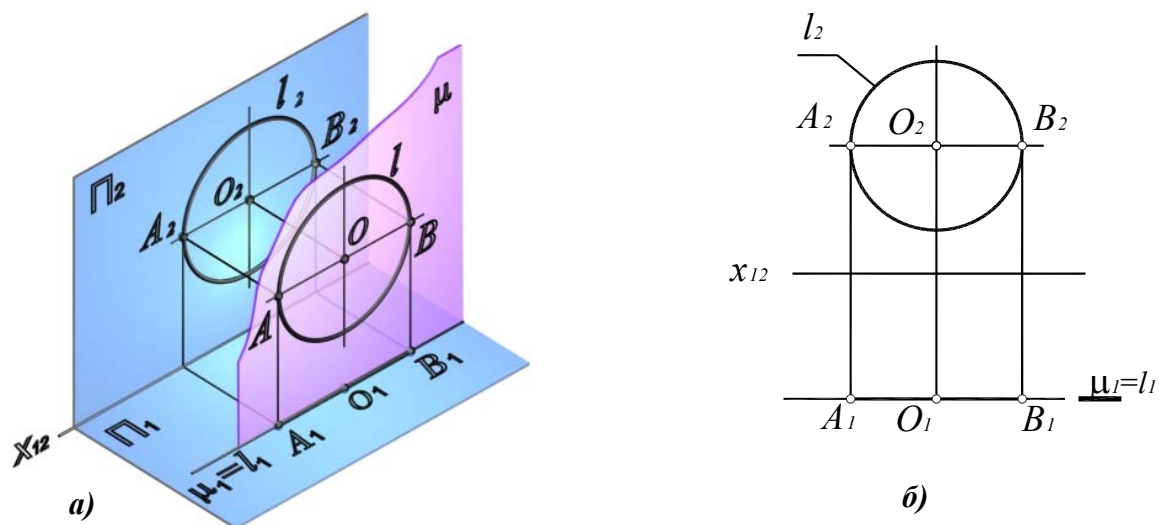


**Рис. 5.6. Горизонтальная плоскость уровня  $v(ABC)$ :**

*a* – наглядное изображение;

*б* – комплексный чертеж

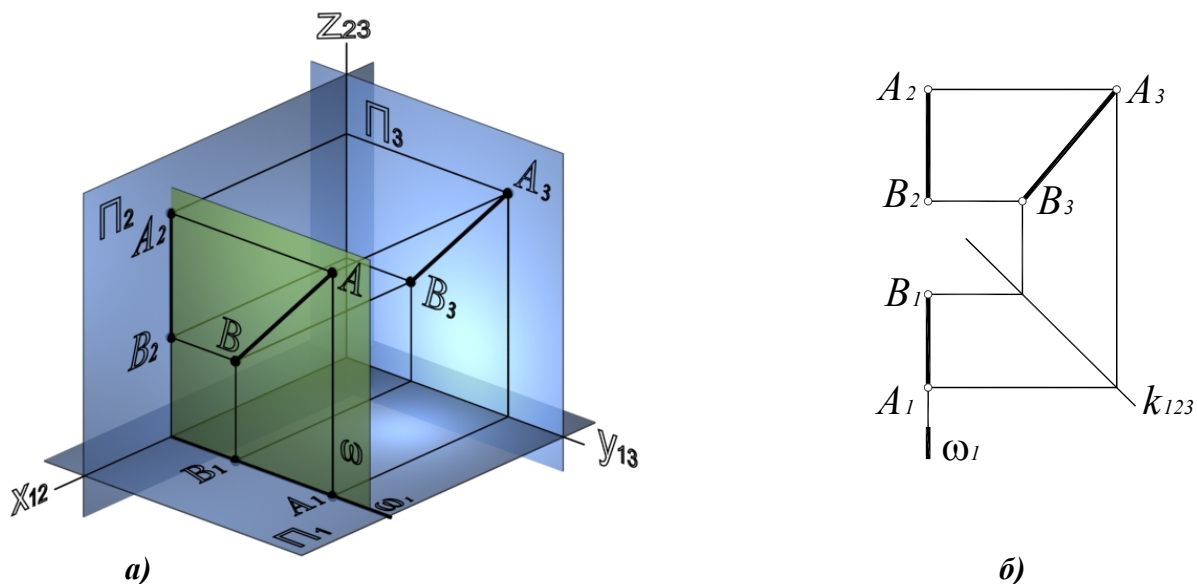
**Фронтальная плоскость уровня**  $\mu(\mu_1) \parallel \Pi_2$  – плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций. На рис. 5.7 показана окружность  $l$  с центром в точке  $O$  и диаметром  $AB$ , лежащая во фронтальной плоскости уровня  $\mu(\mu_1)$ . Эта окружность проецируется на  $\Pi_2$  без искажения.



**Рис. 5.7. Фронтальная плоскость уровня  $\mu(\mu_1)$ :**

*a* – наглядное изображение;  
*б* – комплексный чертеж

**Профильная плоскость уровня**  $\omega \parallel \Pi_3$  – плоскость, параллельная профильной плоскости проекций. Отрезок  $[AB]$ , лежащий в профильной плоскости уровня  $\omega(\omega_1)$ , проецируется на плоскость  $\Pi_3$  в натуральную величину (рис. 5.8).



**Рис. 5.8. Профильная плоскость уровня  $\omega(\omega_1)$ :**

*a* – наглядное изображение;  
*б* – комплексный чертеж

### 5.3. Относительное положение двух плоскостей

Две плоскости в пространстве могут совпадать, пересекаться или быть параллельными.

Плоскости параллельны (рис. 5.9), если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

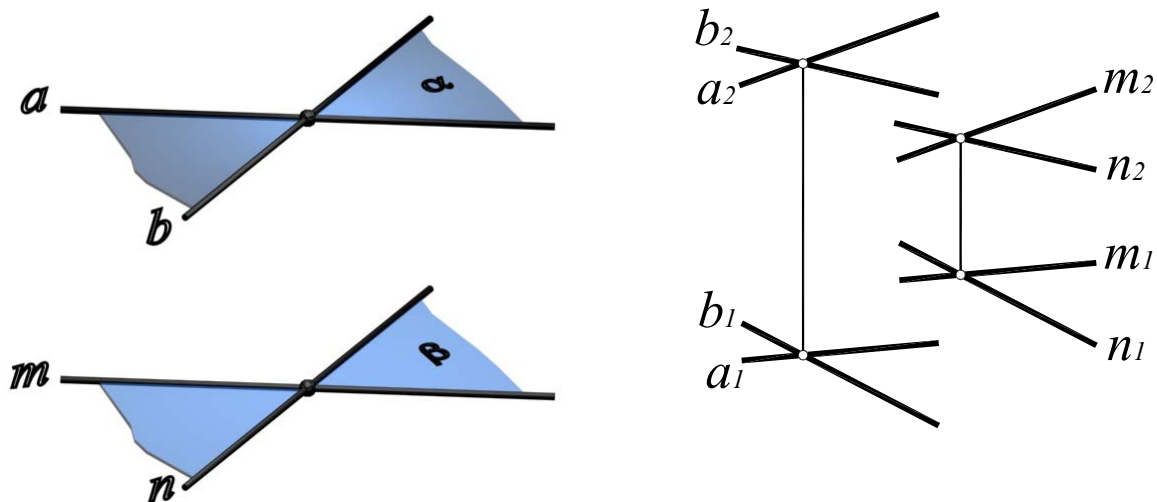


Рис. 5.9. Параллельные плоскости общего положения:

$$\alpha(a \times b),$$

$$\beta(m \times n),$$

$$\alpha \parallel \beta, \Leftrightarrow \begin{cases} a \parallel m (a_1 \parallel m_1, a_2 \parallel m_2); \\ b \parallel n (b_1 \parallel n_1, b_2 \parallel n_2) \end{cases}$$

## 6. ПОВЕРХНОСТЬ

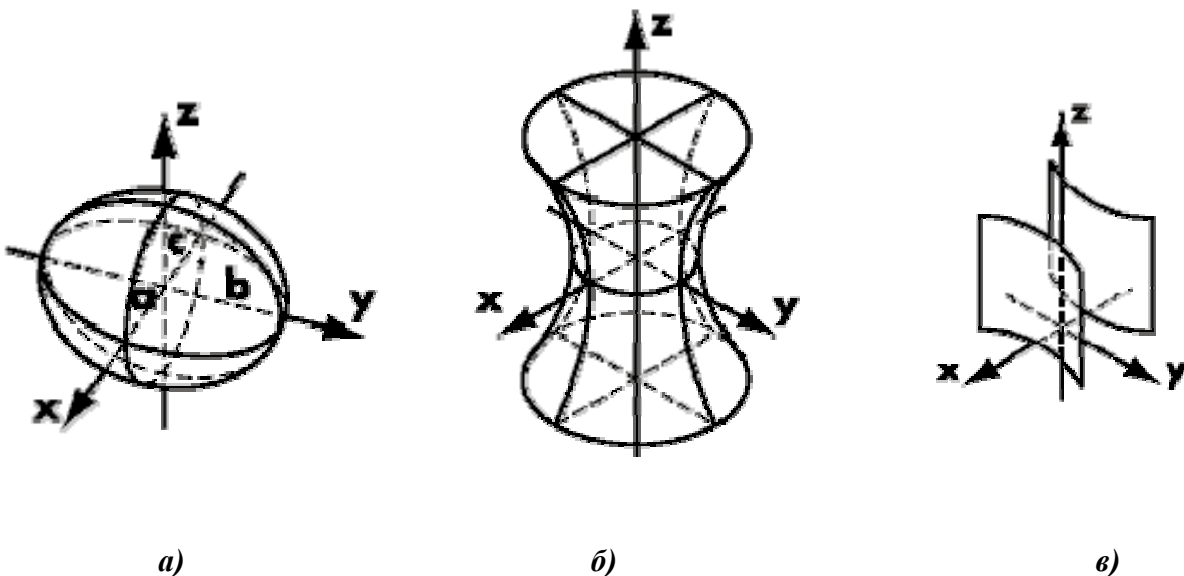
*Поверхность* – это наружная сторона предмета, или граница, отделяющая геометрическое тело от внутреннего пространства или другого тела (толковый словарь русского языка под редакцией Д.Н. Ушакова).

Поверхность можно рассматривать как непрерывную совокупность последовательных положений линий, перемещающихся в пространстве по определенному закону. Движущуюся линию в этом случае называют образующей поверхности, а линии (а иногда и точки), определяющие закон ее перемещения, – направляющими.

### 6.1. Способы задания поверхностей

#### *Аналитический*

Поверхность рассматривается как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют некоторому заданному уравнению вида  $F(x, y, z) = 0$  (рис. 6.1). Порядок уравнения соответствует порядку поверхности. Порядок поверхности можно определить и геометрически, как порядок кривой, по которой плоскость пересекает поверхность, или как число точек пересечения прямой с поверхностью.



**Рис. 6.1. Аналитические поверхности:**

$a$  – эллипсоид  
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

$б$  – гиперboloид однополостный     $в$  – гиперболический цилиндр  
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

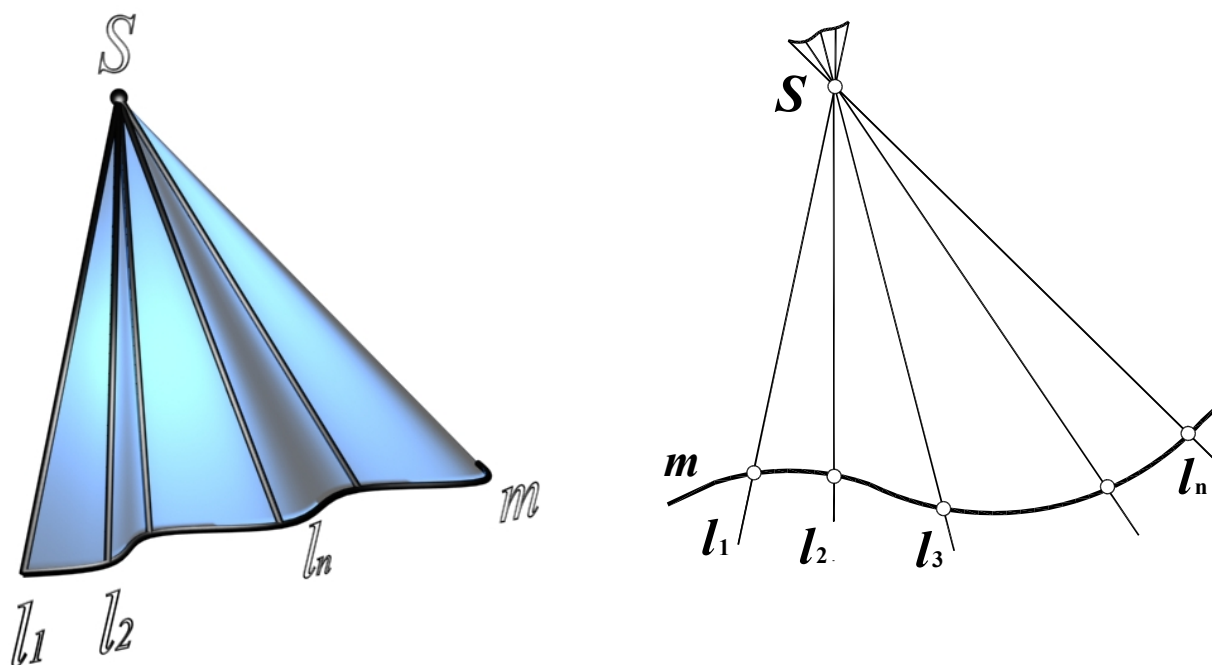
Аналитический способ задания поверхности находит широкое применение в практике, особенно если требуется исследовать свойства поверхности.

## Кинематический

Кинематическую поверхность можно рассматривать как непрерывную совокупность последовательных положений линии, перемещающейся в пространстве по некоторым неподвижным линиям. Таким образом, на любой кинематической поверхности можно выделить два семейства линий: семейство *образующих* и семейство *направляющих*. Направляющие и образующие обладают следующим свойством: никакие две линии одного семейства не пересекаются между собой, но каждая линия одного семейства пересекает все линии другого.

Рассмотрим формирование конической поверхности (рис. 6.2). Такая поверхность образована движением прямой образующей  $l$ , постоянно проходящей через точку  $S$  и во всех своих положениях пересекающей некоторую направляющую кривую  $m$ . Если направляющая  $m$  – окружность, каждая точка которой равноудалена от вершины  $S$ , образуется прямой круговой конус.

Совокупность точек, линий и различных условий, определяющих закон перемещения образующей, называют также определителем поверхности. Например, определителем конуса вращения могут быть ось и образующая или вершина и направляющая линия. Определителем цилиндра вращения может быть ось и образующая (прямая или кривая) или ось и направляющая (окружность). Окружность может быть и направляющей линией цилиндра и его образующей. В начертательной геометрии все поверхности рассматриваются как кинематические, то есть образованные непрерывным перемещением в пространстве какой – либо линии или поверхности.



**Рис. 6.2. Образование конической поверхности:**

$S$  – вершина конической поверхности;

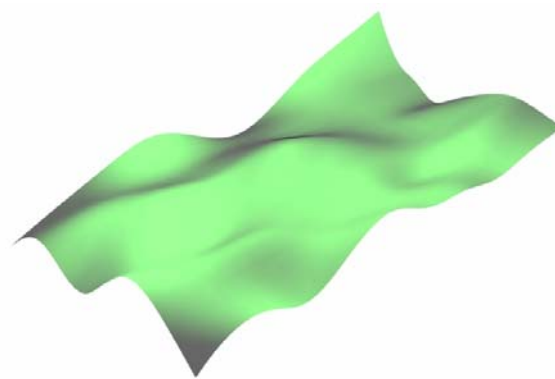
$m$  – направляющая;

$l_1, l_2 \dots l_n$  – последовательные положения образующей

### ***Каркасный***

Поверхности, к которым нельзя применить математические закономерности или поверхности с произвольными образующими называются скульптурными или поверхностями произвольных форм (рис. 6.3). Такие поверхности обычно задают достаточно плотной сетью линий и точек, принадлежащих этим поверхностям. Совокупность таких линий называется каркасом поверхности. При этом точки, лежащие между линиями каркаса, определяются приближенно.

Одним из наиболее распространенных в промышленности методов конструирования поверхностей является метод конструирования с помощью непрерывного каркаса. Метод каркасного конструирования используется при изготовлении кузовов автомобилей, самолетов и в судостроении, для выполнения штампов при изготовлении поверхностей из листового материала, в топографии, горном и дорожном деле.



**Рис. 6.3. Скульптурная поверхность**

## **6.2. Классификация поверхностей**

### **1. По способу задания:**

- аналитические;
- кинематические;
- скульптурные (поверхности произвольных форм).

### **2. По закону движения образующей:**

- с поступательным движением образующей;
- с вращательным движением образующей;
- с винтовым движением образующей.

### **3. По виду образующей:**

- поверхности с прямолинейной образующей или линейчатые поверхности;
- поверхности с криволинейной образующей.

### **4. По закону изменения формы образующей:**

- поверхности с образующей постоянного вида;
- поверхности с образующей переменного вида.

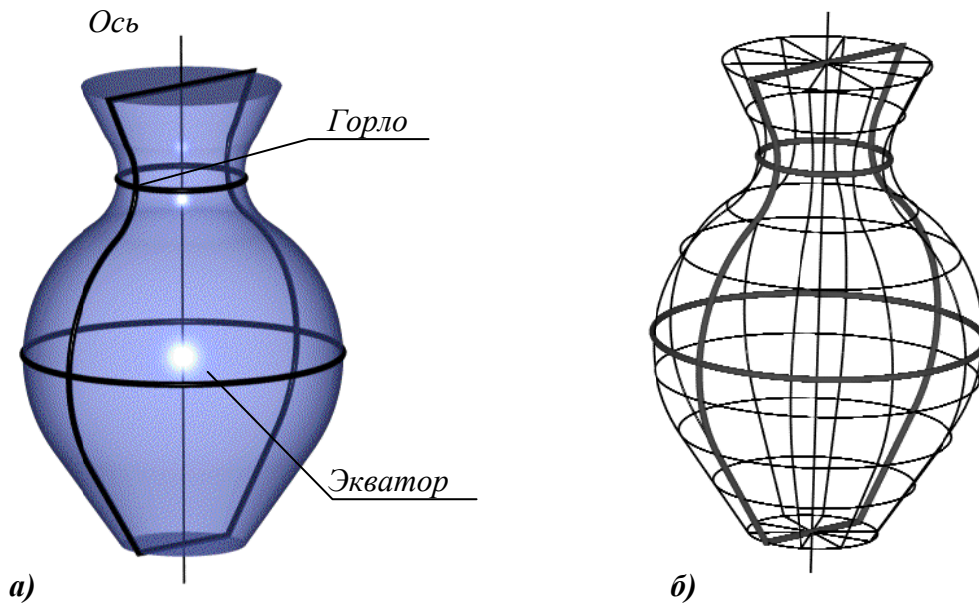
### **5. По признаку развертывания:**

- развертывающиеся поверхности – можно совместить с плоскостью без разрывов и складок. Сюда относятся поверхности всех многогранников, цилиндрические, конические, торсовые.
- неразвертывающиеся – нельзя совместить с плоскостью без разрывов и складок. Сюда относятся все остальные поверхности.

Наибольшее распространение в технике получили поверхности вращения, сдвига и винтовые.

### 6.2.1. Поверхности вращения

Поверхности *вращения* – поверхности, образованные вращением произвольной образующей вокруг неподвижной оси (рис. 6.4,*а*). Направляющей поверхности вращения является окружность постоянного (цилиндр) или переменного радиуса (конус, сфера). Нормальное – перпендикулярное оси вращения сечение любой поверхности вращения, представляет собой окружность с центром на ее оси.



**Рис. 6.4. Поверхность вращения:**

*а* – основные линии на поверхности вращения;

*б* – представление поверхности вращения в виде сети

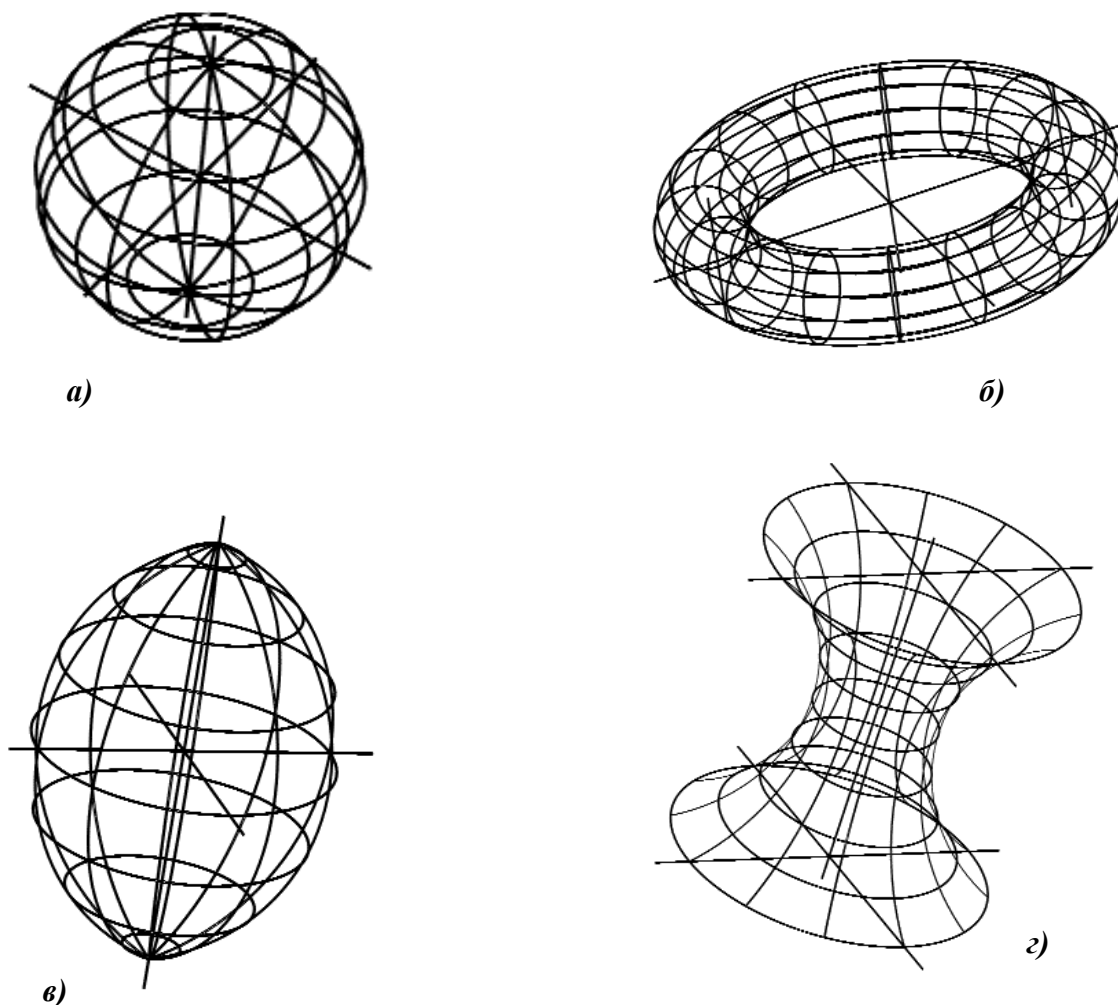
Направляющие называют также параллелями поверхности вращения. Плоскости параллелей перпендикулярны к оси поверхности. Наибольшую из параллелей называют экватором поверхности, наименьшую – горлом. Плоскости, проходящие через ось поверхности вращения, называют меридиональными, а линии, по которым они пересекают поверхность – меридианами. Поверхность вращения можно представить параллелями или меридианами поверхности, а также сетью, состоящей из параллелей и меридианов (рис. 6.4,*б*).

Поверхность вращения называют закрытой, если меридиональное сечение поверхности является замкнутой кривой линией, пересекающей ось поверхности в двух точках.

При вращении вокруг оси плоской или пространственной алгебраической кривой  $n$ -го порядка образуется алгебраическая поверхность вращения, в общем случае,  $2n$ -го порядка. Если кривая второго порядка вращается вокруг своей оси, то она образует поверхность второго порядка.

В зависимости от вида образующей различают:

**Торовые поверхности** – поверхности, образованные вращением окружности или дуги окружности:



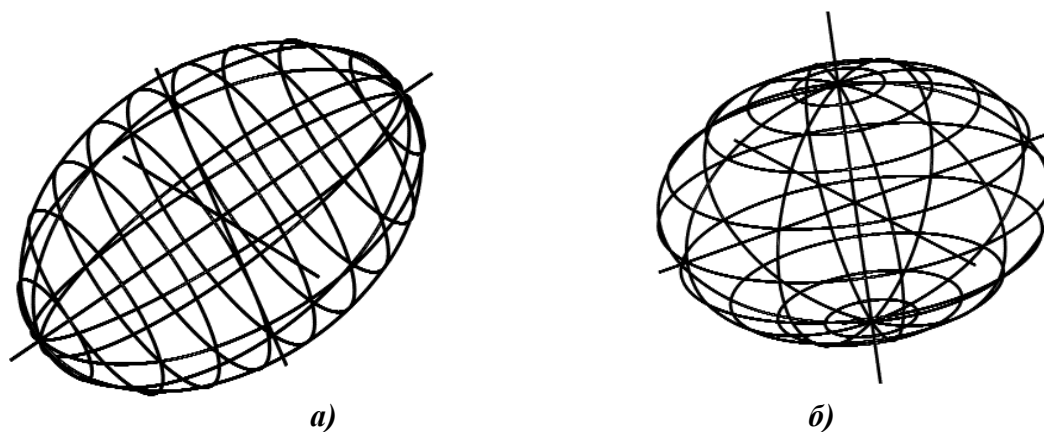
**Рис. 6.5. Торовые поверхности:**

*a* – сфера; *б* – открытый тор (кольцо); *в* – закрытый тор; *г* – глобоид

- **Сфера** образуется вращением окружности вокруг оси, проходящей через ее центр (рис. 6.5,*a*).
- **Тор** образуется вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности и не проходящей через ее центр (тор является поверхностью четвертого порядка). Различают **открытый тор**, образованный вращением окружности вокруг оси, которая не пересекает образующую (рис. 6.5, *б*) и **закрытый тор**, образованный вращением окружности вокруг оси, которая пересекает образующую окружность или касается ее (рис. 6.5,*в*).
- **Глобоид** образуется вращением окружности достаточно большого радиуса вокруг оси, которая не пересекает образующую (рис. 6.5,*г*).

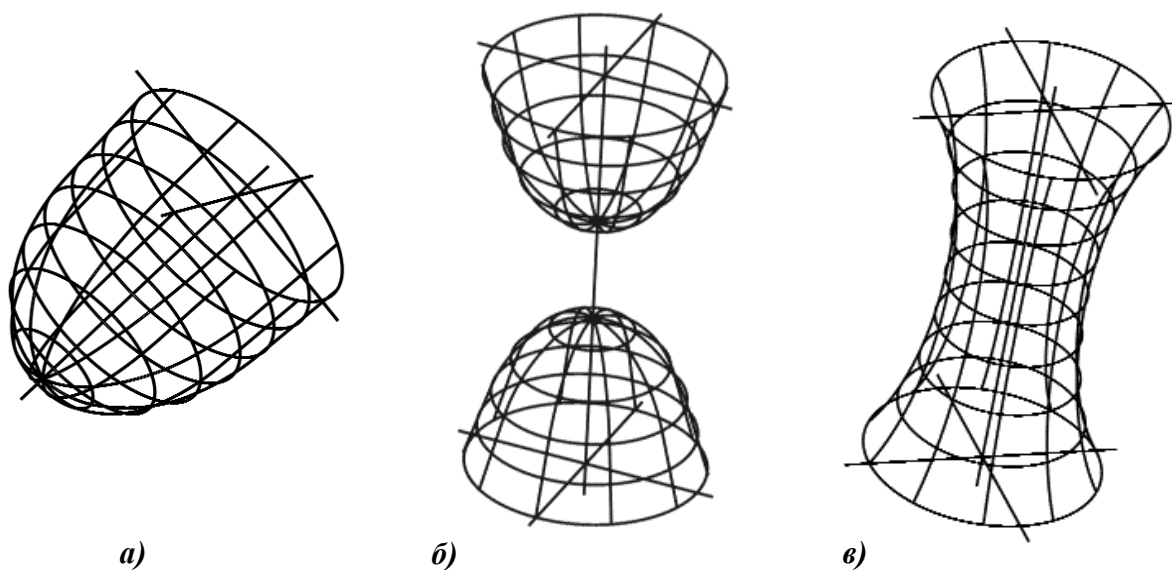
**Эллипсоид вращения** образуется вращением эллипса вокруг его оси. Если за ось вращения принята большая ось эллипса, эллипсоид вращения называют вытянутым (рис. 6.6. *a*), если малая – сжатым или сфероидом (рис. 6.6,*б*). Земной шар, например, по форме близок к сфероиду.





**Рис. 6.6. Поверхности вращения с эллиптической образующей:**  
*a* – вытянутый эллипсоид; *б* – сфероид

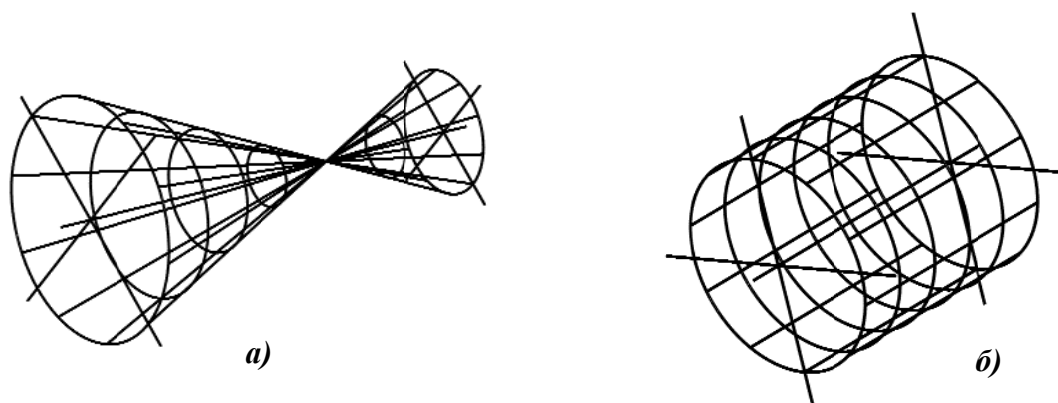
**Параболоид вращения** образуется вращением параболы вокруг ее оси (рис. 6.7, *a*). Параболоиды вращения используются в качестве отражающей поверхности в прожекторах и фарах автомобилей для получения параллельного светового пучка.



**Рис. 6.7. Поверхности вращения:**  
*a* – параболоид;  
*б* – однополостной гиперboloид;  
*в* – двуполостной гиперboloид;

**Гиперboloид вращения** образуется вращением гиперболы. Различают **однополостный гиперboloид** (рис. 6.7, *б*), образованный вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси, и **двуполостный гиперboloид** (рис. 6.7, *в*), образованный вращением гиперболы вокруг ее действительной оси.

**Конус вращения** (прямой круговой конус) образуется вращением вокруг оси кривой 2-го порядка, распадающейся на две пересекающиеся прямые (рис. 6.8,*а*).

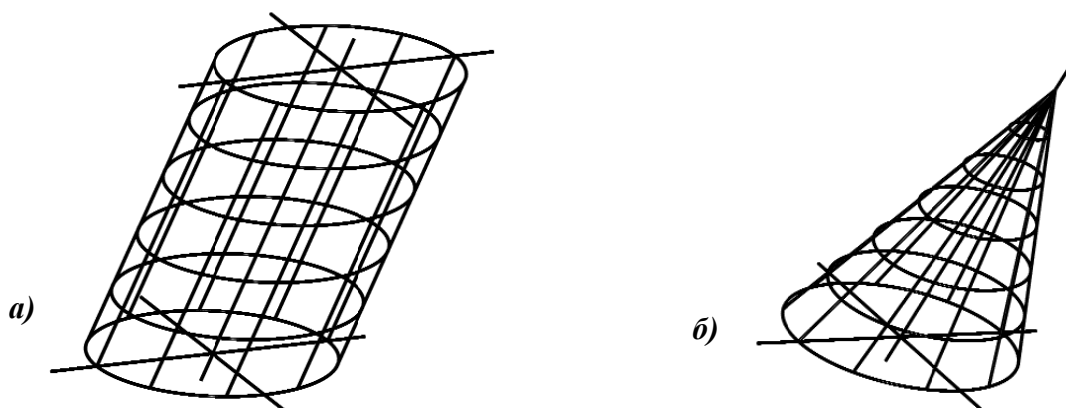


**Рис. 6.8. Поверхности вращения:**  
*а* – конус; *б* – цилиндр

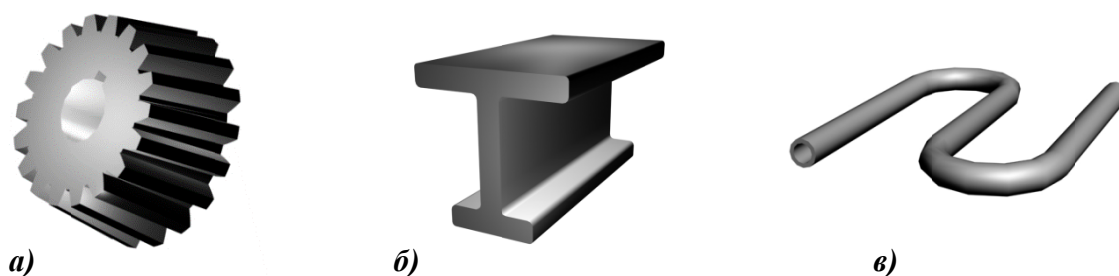
**Цилиндр вращения** (прямой круговой цилиндр) образуется вращением вокруг оси кривой 2-го порядка, распадающейся на две параллельные прямые (рис. 6.8,*б*).

### 6.2.2. Поверхности сдвига

Поверхности *сдвига* или так называемые поверхности *экструдий* – поверхности, образованные смещением произвольной образующей вдоль произвольной направляющей (рис. 6.9, 6.10). Образующие и направляющие поверхности сдвига могут быть как постоянного, так и переменного вида.



**Рис. 6.9. Поверхности сдвига:**  
*а* – наклонный цилиндр; *б* – наклонный конус



**Рис. 6.10. Поверхности сдвига, применяемые в технике:**  
*а* – коническое зубчатое колесо; *б* – швеллер; *в* – змеевик

### 6.2.3. Винтовые поверхности

Винтовые поверхности – поверхности, образованные вращением произвольной образующей вокруг неподвижной оси с одновременным смещением в осевом (поверхность цилиндрической резьбы, рис. 6.11,*а*) или осевом и радиальном направлении (коническая пружина, рис. 6.11,*б*). Направляющей винтовой поверхности является винтовая линия.



Рис. 6.11. Винтовые поверхности:

- а* – поверхность трапециидальной резьбы;
- б* – поверхность конической пружины

### 6.3. Изображение поверхностей на комплексном чертеже

На комплексном чертеже изображается *очерк* поверхности, а также наиболее важные линии и точки на поверхности.

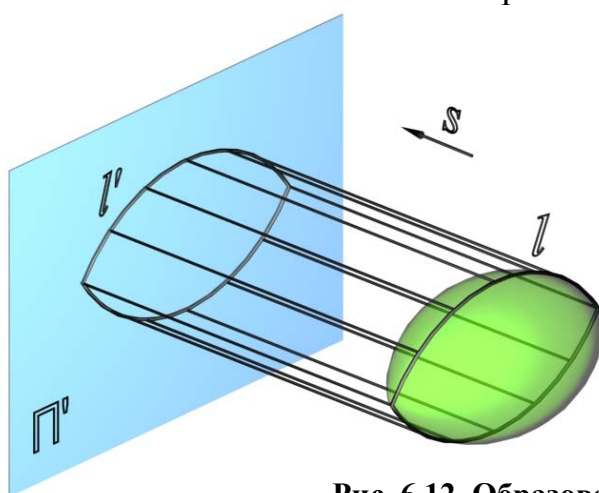
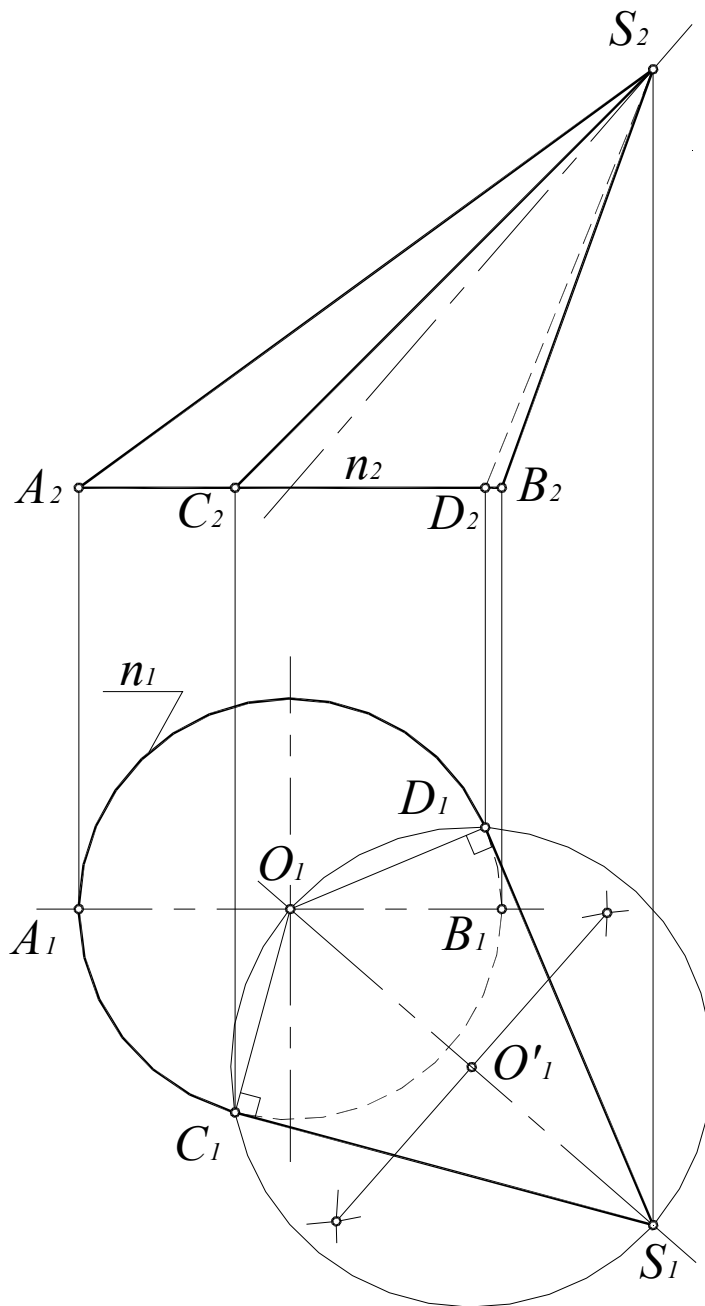


Рис. 6.12. Образование очерка поверхности

Очерк поверхности – линия, которая ограничивает проекцию поверхности. Для получения очерка поверхности проводят множество проецирующих лучей в направлении проецирования  $s$ , касательных к данной поверхности. Точки касания поверхности и проецирующих лучей образуют линию  $l$ , называемую контурной линией. Совокупность проецирующих лучей образует проецирующую цилиндрическую поверхность, проекция которой и представляет собой очерк  $l'$  данной поверхности на соответствующей плоскости проекций  $\Pi'$  (рис. 6.12). Очерк поверхности можно определить и как проекцию контурной линии на заданную плоскость проекций. Очерк поверхности является границей видимости поверхности.

### 6.3.1. Построение очерков конических поверхностей

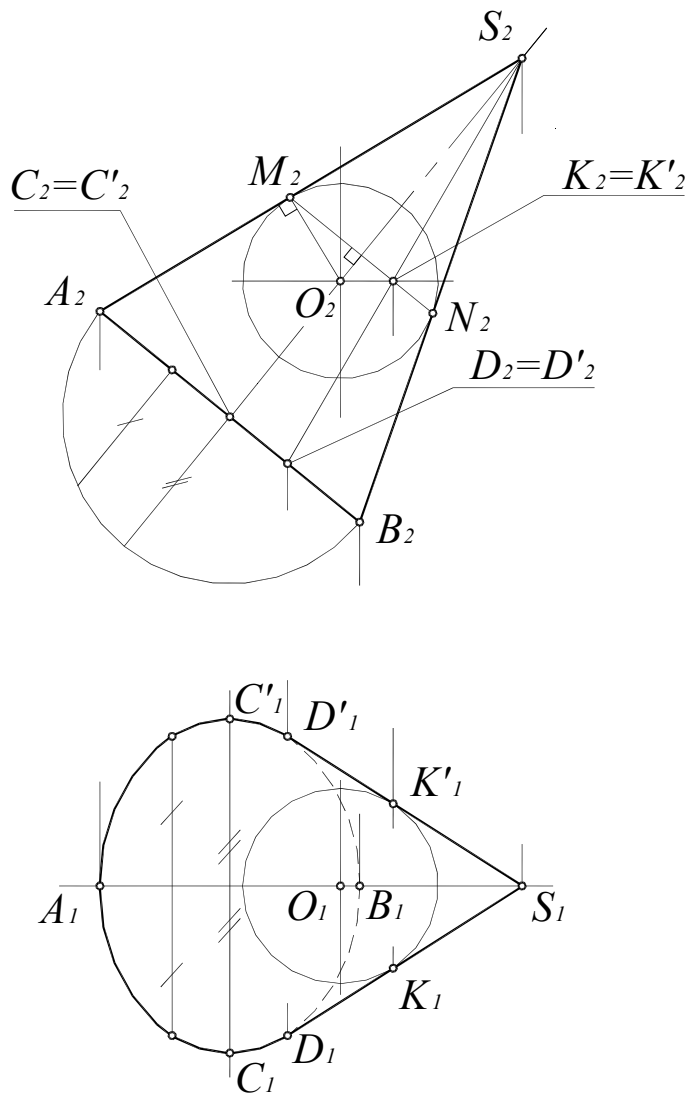
Фронтальный очерк поверхности наклонного конуса представляет собой равнобедренный треугольник  $A_2B_2S_2$ . Горизонтальный очерк поверхности наклонного конуса с круговым основанием состоит из дуги окружности основания и касательных, проведенных из проекции вершины конуса (рис. 6.13).



**Рис. 6.13. Построение очерка поверхности наклонного конуса с круговым основанием**

Для построения касательных на  $\Pi_1$  вершину конуса  $S$  нужно соединить с центром окружности основания  $O_1$ . Затем отрезок делится пополам и строится вспомогательная окружность радиусом  $O'_1S_1$ . Точки  $C_1$  и  $D_1$  пересечения вспомогательной окружности и окружности основания и являются точками касания. Угол  $O_1D_1S_1$  – прямой.

Фронтальный очерк поверхности прямого кругового конуса, ось которого является фронталью, представляет собой равнобедренный треугольник  $A_2B_2S_2$  (см. рис. 6.14). Горизонтальный очерк состоит из части эллипса и двух касательных к нему прямых. Эллипс можно построить по двум осям малой  $A_1B_1$  и большой  $C_1C_1'$ , равной диаметру окружности основания конуса (см. пп. 12.4.1, рис. 12.11).



**Рис. 6.14. Построение очерка поверхности прямого кругового конуса**

Для определения прямых  $(SD)$  и  $(SD')$ , касательных к эллипсу, используется произвольная вспомогательная сфера с центром  $O(O_1O_2)$  на оси конуса, касательная к его поверхности. Из произвольной точки  $O(O_1O_2)$  на оси конуса восстанавливаются перпендикуляры  $(O_2M_2)$  и  $(O_2N_2)$  на образующие  $(S_2A_2)$  и  $(S_2B_2)$ . Линия  $(M_2N_2)$ —проекция линии касания конуса и вспомогательной сферы. Затем определяются фронтальные проекции случайных точек искомых касательных  $K_2$  и  $K'_2$  как точки пересечения полученной линии  $(MN)$  и экватора вспомогательной сферы. Далее определяются горизонтальные проекции  $K_1$  и  $K'_1$  на горизонтальной проекции экватора вспомогательной сферы. Прямые  $(S_1K_1)$  и  $(S_1K'_1)$  касаются эллипса в точках  $D_1$  и  $D'_1$ .

### 6.3.2. Построение очерков цилиндрических поверхностей

Для построения фронтального очерка поверхности наклонного цилиндра с круговым основанием (рис. 6.15) строятся проекции верхнего и нижнего оснований –  $(A_2B_2)$  и  $(A'_2B'_2)$  и очерковые образующие  $(A_2A'_2)$  и  $(B_2B'_2)$ .

Для построения горизонтального очерка строят окружности верхнего и нижнего оснований, затем через центры окружностей проводятся перпендикуляры  $(C_1D_1)$  и  $(C'_1D'_1)$  к оси цилиндра.

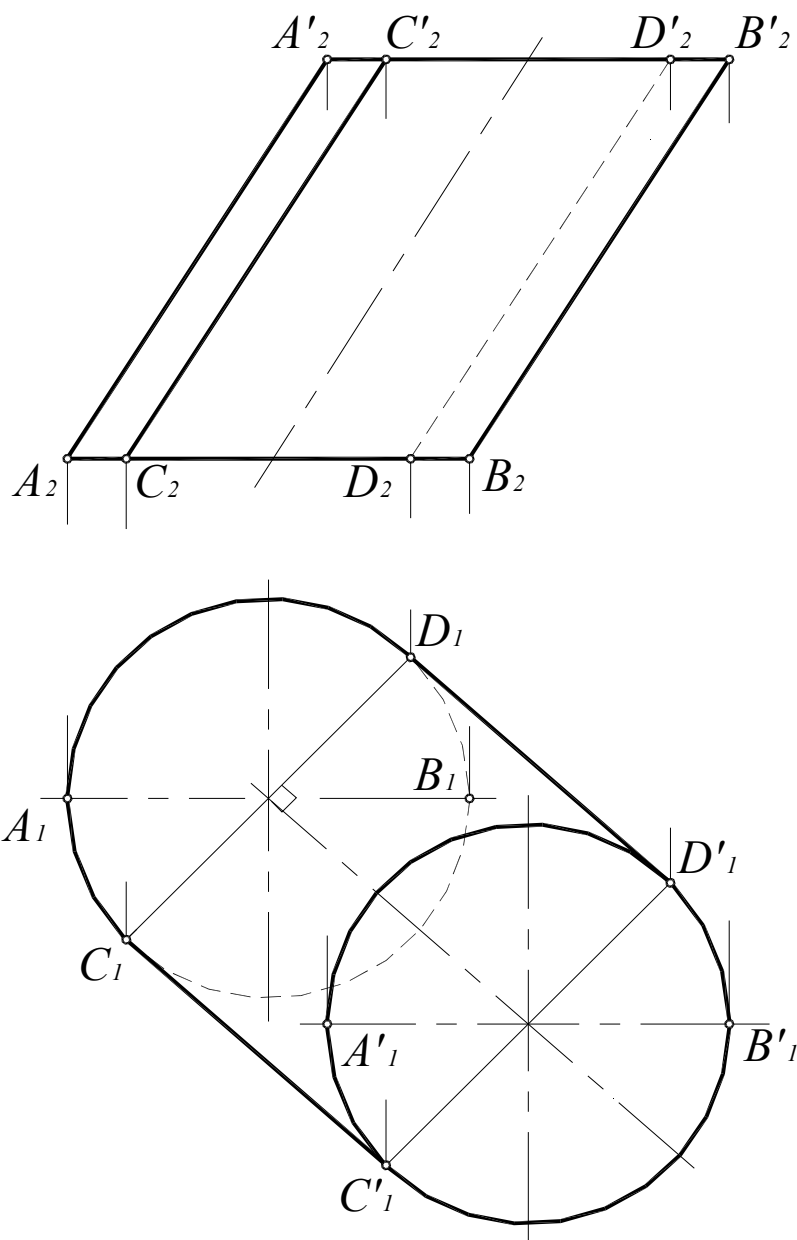
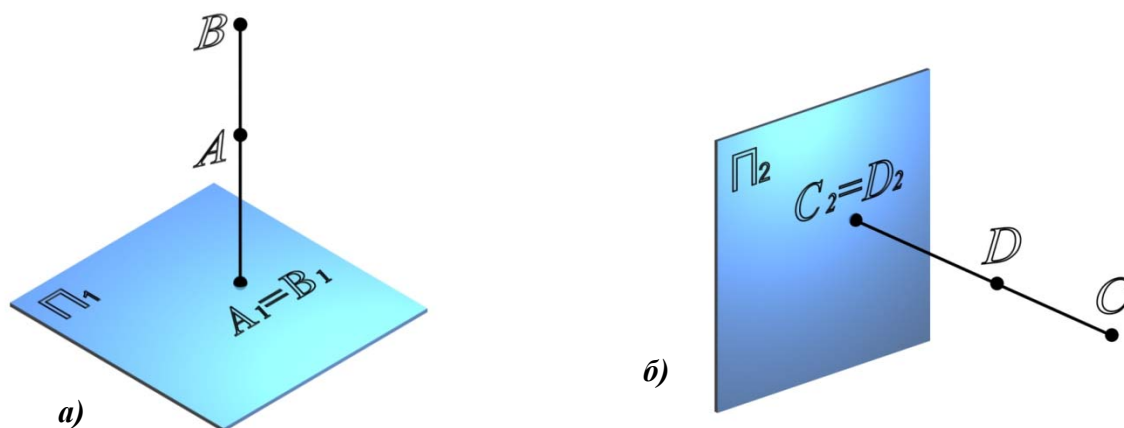


Рис. 6.15. Построение очерка наклонного цилиндра с круговым основанием

## 7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДИМОСТИ. МЕТОД КОНКУРИРУЮЩИХ ТОЧЕК

Точки, расположенные на одной проецирующей прямой, называются *конкурирующими*.

Точки, расположенные на одной горизонтально-проецирующей прямой, называются конкурирующими относительно горизонтальной плоскости проекций. Из двух точек  $A$  и  $B$  (рис. 7.1,а), конкурирующих на горизонтальной плоскости проекций, видима та, высота которой больше ( $B$ –видима,  $A$ –невидима).

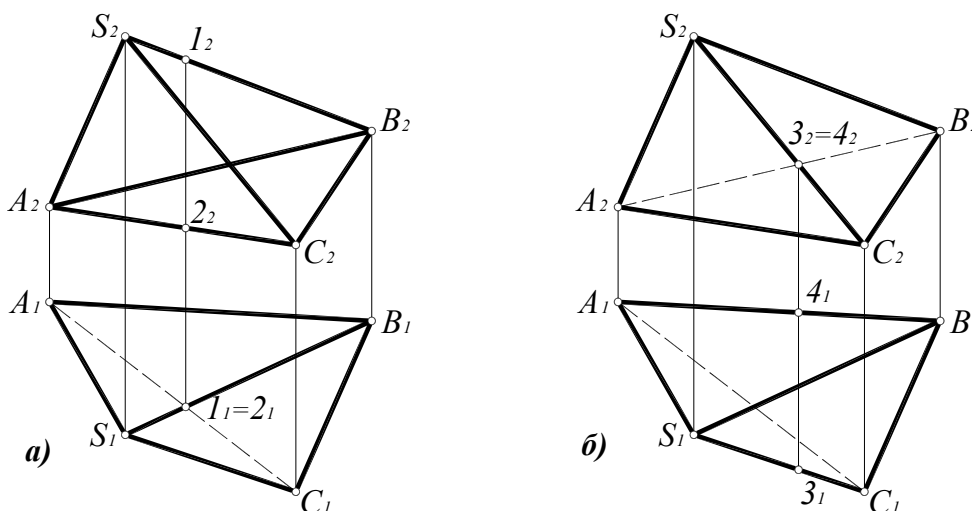


**Рис. 7.1. Конкурирующие точки:**

- а – относительно горизонтальной плоскости проекций;
- б – относительно фронтальной плоскости проекций

Точки, расположенные на одной фронтально-проецирующей прямой, называются конкурирующими относительно фронтальной плоскости проекций. Из двух точек  $C$  и  $D$  (рис. 7.1,б), конкурирующих относительно фронтальной плоскости проекций, видима та точка, у которой больше глубина ( $C$ – видима,  $D$  – невидима).

Рассмотрим определение видимости на комплексном чертеже на примере тетраэдра (рис. 7.2).



**Рис. 6.17. Определение видимости ребер тетраэдра на комплексном чертеже:**

- а – относительно горизонтальной плоскости проекций;
- б – относительно фронтальной плоскости проекций

Для определения видимости на горизонтальной плоскости проекций нужно найти точки, конкурирующие относительно  $\Pi_1$  (рис. 7.2,а). Ребра  $SA$ ,  $SC$ ,  $AB$  и  $BC$  являются очерковыми, следовательно, видимыми. Остается выяснить видимость ребер  $AC$  и  $SB$ . Точки  $1 \in SB$  и  $2 \in AC$  являются конкурирующими на  $\Pi_1$ , поскольку находятся на горизонтально-проецирующем луче. Фронтальная проекция точки  $1$  лежит выше (высота точки  $1$  больше), поэтому она видима на  $\Pi_1$ , следовательно, видимо и ребро  $SB$ , а ребро  $AC$  невидимо. Если хотя бы одно ребро грани невидимо, вся грань  $ABC$  невидима на  $\Pi_1$ .

Видимость на фронтальной проекции (рис. 7.2,б) определяется с помощью конкурирующих точек  $3 \in SC$  и  $4 \in AB$ . Горизонтальная проекция точки  $3$  лежит ниже (глубина точки  $3$  больше), следовательно, точка  $3$  и ребро  $SC$  на фронтальной плоскости проекции видимы, а точка  $4$ , ребро  $AB$  и грань  $ASB$  невидимы на  $\Pi_2$ .

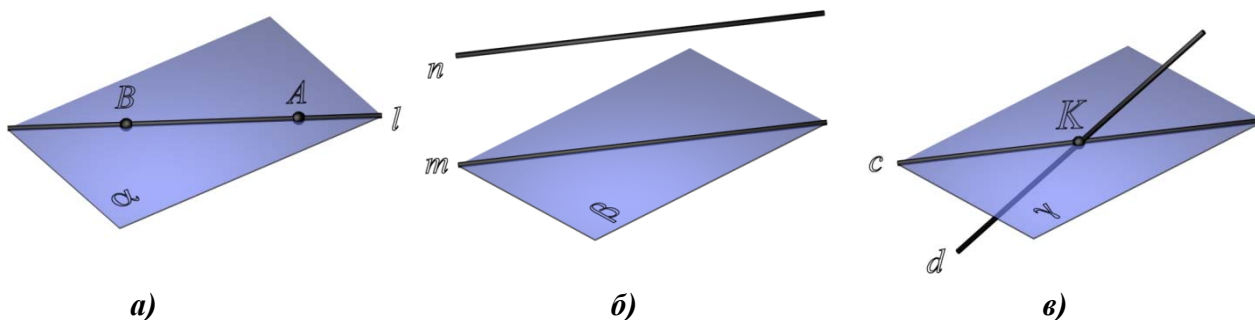


## 8. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

### 8.1. Относительное положение прямой и плоскости

Прямая по отношению к плоскости может занимать три различных положения:

- прямая  $l$  лежит в плоскости (рис. 8.1,а);
- прямая  $n$  параллельна плоскости (рис. 8.1, б);
- прямая  $d$  пересекается с плоскостью (рис. 8.1,в).

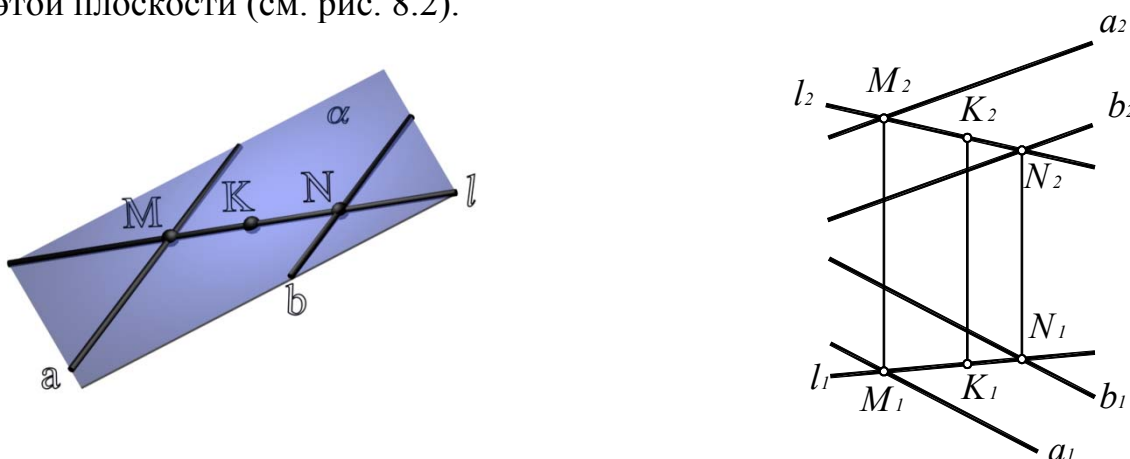


**Рис. 8.1. Относительное положение прямой и плоскости:**  
 $a - l \subset \alpha$  ;  $б - n \parallel \beta$  ;  $в - d \times \gamma$

### 8.2. Принадлежность точки и прямой линии плоскости

Прямая линия принадлежит плоскости, если две точки этой прямой принадлежат плоскости (рис. 8.2).

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости (см. рис. 8.2).



**Рис. 8.2. Принадлежность точки и прямой линии плоскости:**

$$\left. \begin{array}{l} M \in \alpha(a \parallel b) \\ N \in \alpha(a \parallel b) \end{array} \right\} \Rightarrow l(MN) \subset \alpha(a \parallel b);$$

$$K \in l(MN) \Rightarrow K \in \alpha(a \parallel b)$$

### 8.3. Параллельность прямой и плоскости

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости (рис. 8.3).

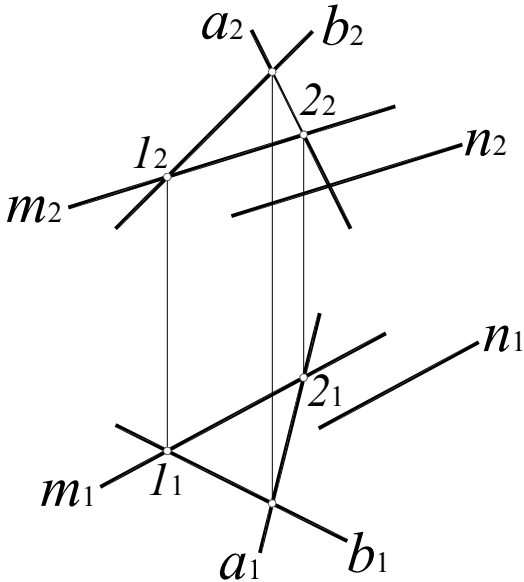


Рис. 8.3. Параллельность прямой и плоскости:

$$\alpha(a \times b);$$

$$m \in \alpha(a \times b) \begin{cases} 1 \in b \Rightarrow 1 \in \alpha(a \times b) \\ 2 \in a \Rightarrow 2 \in \alpha(a \times b) \end{cases};$$

$$n \parallel m \begin{cases} n_1 \parallel m_1 \\ n_2 \parallel m_2 \end{cases} \Rightarrow n \parallel \alpha(a \times b)$$

### 8.4. Линии уровня плоскости

Прямые, лежащие в данной плоскости и параллельные одной из плоскостей проекций, называются *линиями уровня плоскости*.

Прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$ , называется *горизонталью* плоскости (рис. 8.4). Все горизонтали плоскости параллельны между собой, поскольку каждая из них может быть получена как линия пересечения данной плоскости общего положения и горизонтальной плоскости уровня.

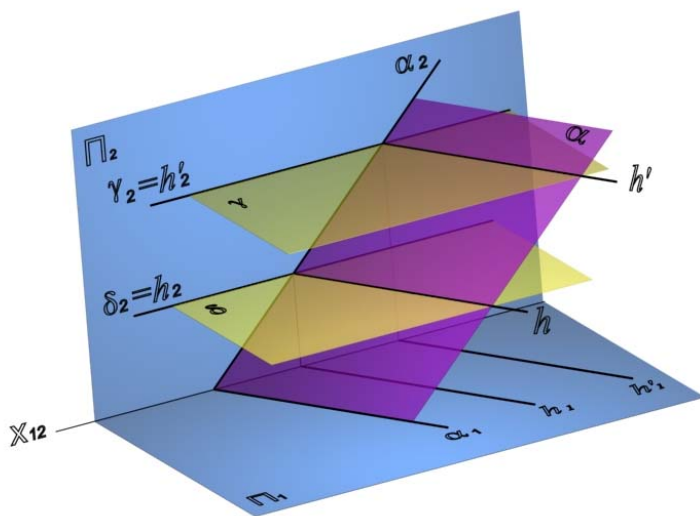


Рис. 8.4. Горизонтали плоскости:

$$\alpha(\alpha_1, \alpha_2);$$

$$\delta(\delta_2) \parallel \Pi_1;$$

$$\gamma(\gamma_2) \parallel \Pi_2;$$

$$\delta(\delta_2) \cap \alpha = h;$$

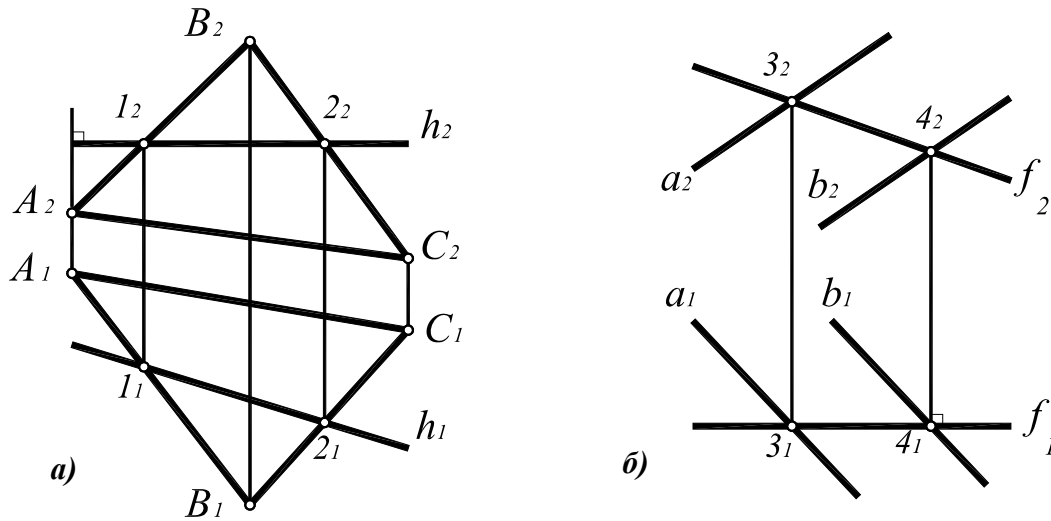
$$h \parallel \Pi_1;$$

$$\gamma(\gamma_2) \cap \alpha = h';$$

$$h' \parallel \Pi_2;$$

$$h' \parallel h_1$$

Рассмотрим построение горизонтали плоскости общего положения  $\alpha(ABC)$  (рис. 8.5,а).



**Рис. 8.5. Линии уровня плоскости:**

$a$  – горизонталь плоскости  $\alpha(ABC)$ :

$$\begin{aligned} h_2 \perp (A_1A_2); \quad h_2 \times (A_2B_2) = I_2; \quad h_2 \times (B_2C_2) = 2_2; \\ (I_2 - I_1) \times A_1B_1 = I_1; \quad (2_2 - 2_1) \times B_1C_1 = 2_1; \\ h_1 = (I_1 - 2_1); \end{aligned}$$

$b$  – фронталь плоскости  $\beta(a||b)$ :

$$\begin{aligned} f_1 \perp (3_1 - 4_2); \quad f_1 \times a_1 = 3_1; \quad f_1 \times b_1 = 4_1; \\ (3_1 - 3_2) \times a_2 = 3_2; \quad (4_1 - 4_2) \times b_2 = 4_2; \\ f_2 = (3_2 - 4_2) \end{aligned}$$

Фронтальная проекция любой горизонтали всегда перпендикулярна линиям связи, поэтому построение горизонтали начинается с построения ее фронтальной проекции  $h_2 \perp (A_1A_2)$ . Поскольку горизонталь лежит в плоскости, она пересекается с прямой  $(AB)$  в точке  $I$ , а с прямой  $(BC)$  – в точке  $2$ . Горизонтальные проекции точек  $I$  и  $2$  однозначно определяют положение горизонтальной проекции горизонтали  $h_1(I_1 - 2_1)$ .

Фронталь плоскости  $\beta(a||b)$  строится аналогично, но построение фронтали начинается с построения ее горизонтальной проекции (рис. 8.5,б). Все фронталь плоскости также параллельны между собой, поскольку каждая из них может быть получена как линия пересечения данной плоскости общего положения и фронтальной плоскости уровня.

Таким образом, любую плоскость общего положения можно представить как совокупность параллельных линий уровня – горизонталей, фронталей или профильных прямых. Иными словами, плоскость общего положения, заданную любым способом, можно также задать параллельными линиями уровня или пересекающимися горизонталью и фронталью. Такой способ задания плоскостей наиболее удобен для решения ряда метрических задач.

### 8.5. Пересечение прямой общего положения и плоскости частного положения

Рассмотрим построение точки пересечения  $K$  фронтально-проецирующей плоскости  $\gamma(\gamma_2) \perp \Pi_2$  и прямой  $a(a_1, a_2)$  общего положения (рис. 8.6).

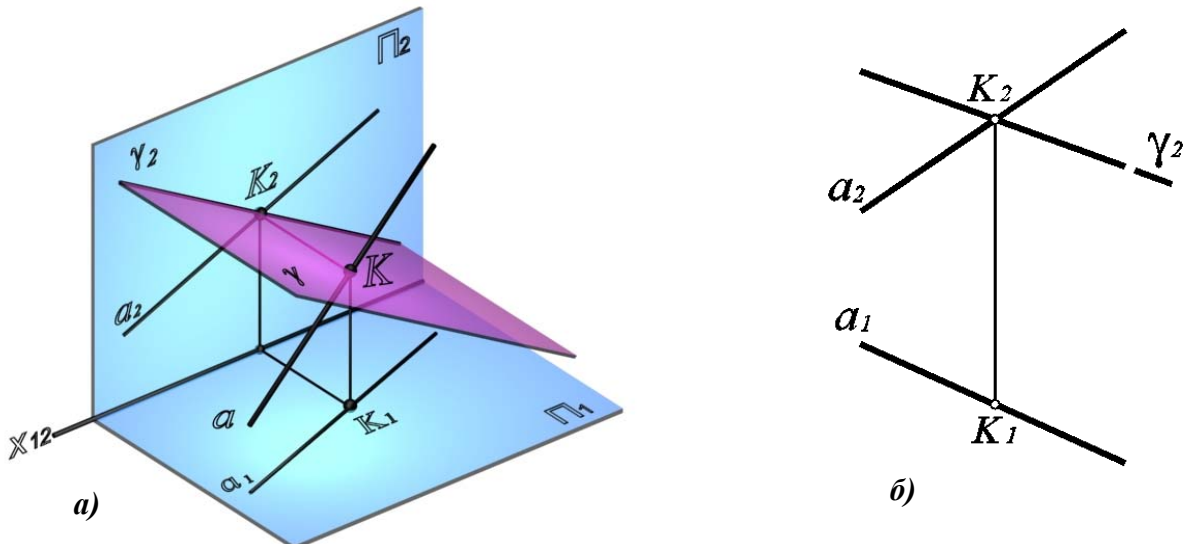


Рис. 8.6. Пересечение прямой общего положения и плоскости частного положения:  
*a* – наглядное изображение;  
*b* – комплексный чертеж

Поскольку  $K \subset \gamma(\gamma_2)$ ,  $K_2 \subset \gamma_2$ , но одновременно  $K \subset a$ , следовательно,  $K_2 = \gamma_2 \times a_2$ , а  $K_1 = (K_2 K_1) \times a_1$ .

### 8.6. Пересечение двух плоскостей частного положения

Линией пересечения двух фронтально-проецирующих плоскостей  $\delta(\delta_2)$  и  $\sigma(\sigma_2)$  является фронтально-проецирующая прямая  $l$  (рис. 8.7).

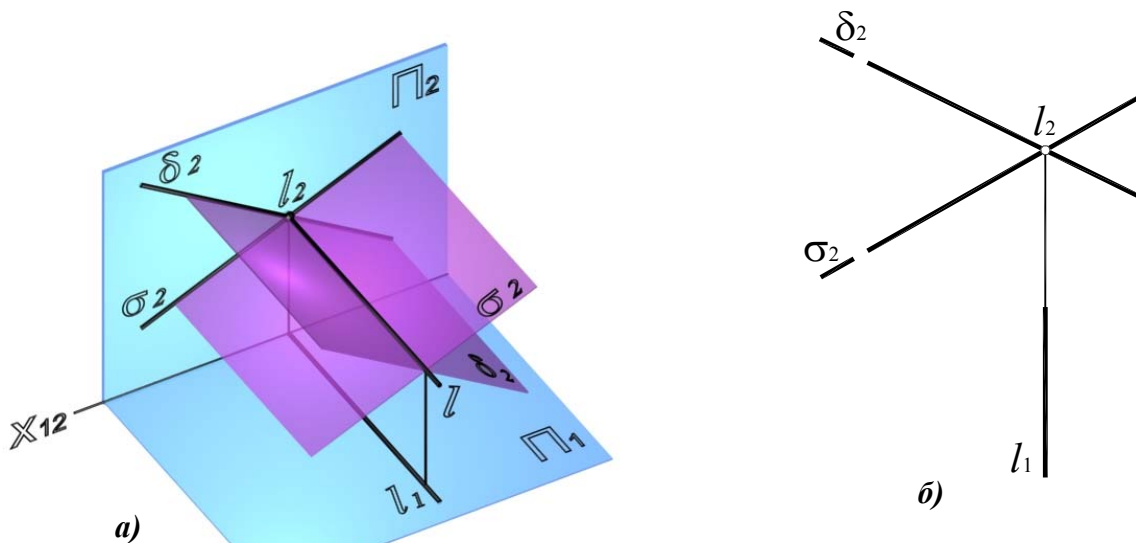


Рис. 8.7. Пересечение плоскостей частного положения:  
*a* – наглядное изображение; *b* – комплексный чертеж

линии пересечения двух фронтально-проецирующих плоскостей  $\delta(\delta_2)$  и  $\sigma(\sigma_2)$  определяется как точка пересечения фронтальных следов плоскостей  $\delta_2$  и  $\sigma_2$ :  $l_2 = \delta_2 \times \sigma_2$ , а горизонтальная проекция строится по линии связи, перпендикулярно направлению оси  $x_{12}$ .

### 8.7. Пересечение плоскости общего положения и плоскости частного положения

Линией пересечения двух плоскостей (рис. 8.8) является прямая, для построения которой достаточно определить две точки, принадлежащие обеим плоскостям одновременно.

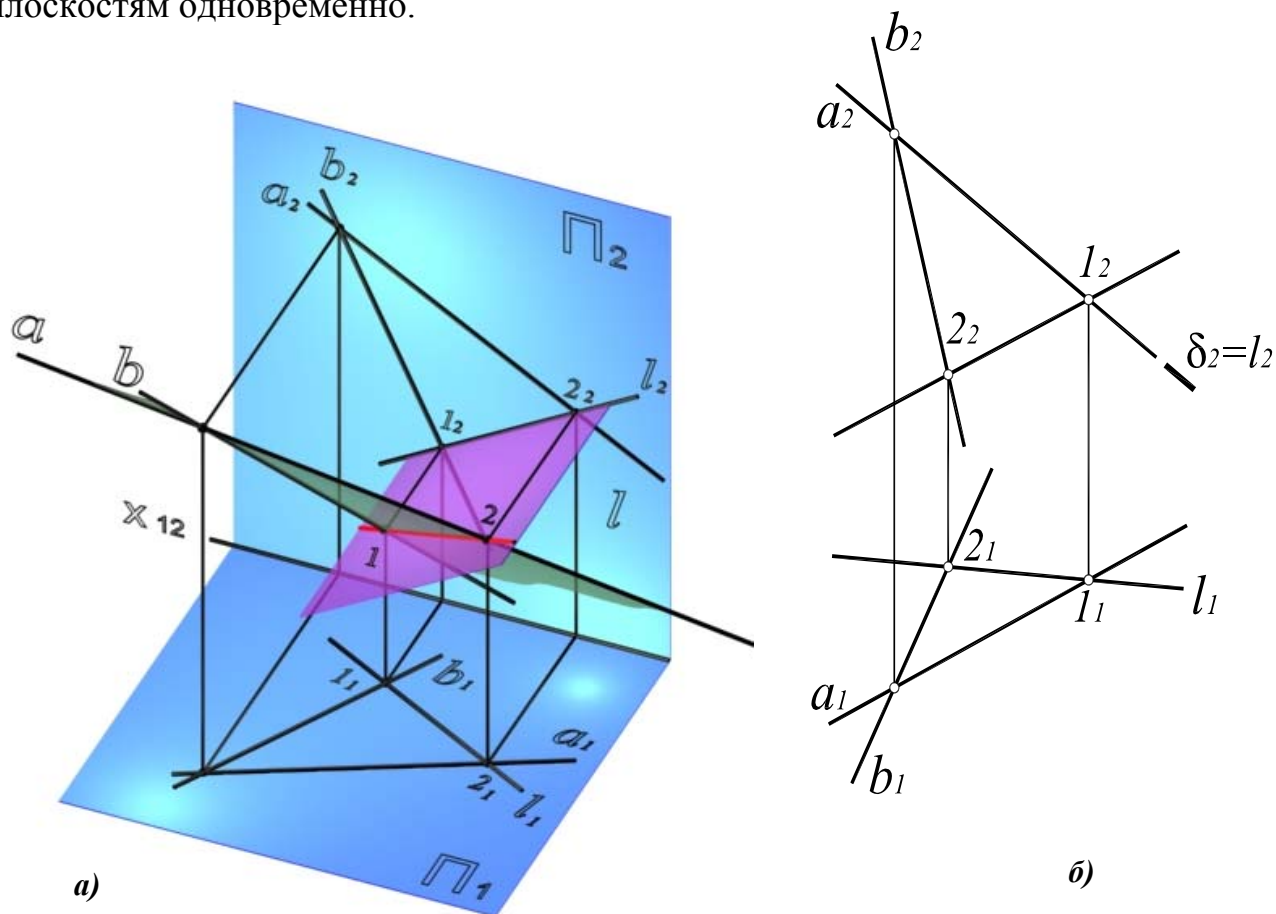


Рис. 8.8. Пересечение плоскости общего положения с проецирующей плоскостью  
*a* – наглядное изображение; *б* – комплексный чертеж

$$\begin{aligned} l_1 &= a_2 \times \delta_2; l_1 \in a_1; \\ 2_2 &= b_2 \times \delta_2; 2_2 \in b_1; \\ l_1 &(l_1 - 2_1); \\ l_2 &= \delta_2 \end{aligned}$$

Рассмотрим построение линии пересечения  $l$  плоскости общего положения  $a(a \times b)$  и фронтально-проецирующей плоскости  $\delta(\delta_2)$  (рис. 8.8, б). Линия, по которой пересекаются две плоскости, принадлежит обеим плоскостям одновременно, следовательно, для ее построения достаточно определить две

точки, общие для пересекающихся плоскостей, или одну точку и направление линии пересечения.

В данном случае, достаточно определить точки пересечения прямых  $a$  и  $b$  с плоскостью  $\delta(\delta_2)$ . Они однозначно определяют линию пересечения  $l$ .

### 8.8. Пересечение прямой общего положения и плоскости общего положения. Первая позиционная задача

Задача об определении точки пересечения прямой общего положения с плоскостью общего положения называется *первой позиционной задачей*. На рис. 8.9 представлено наглядное изображение решения первой позиционной задачи.

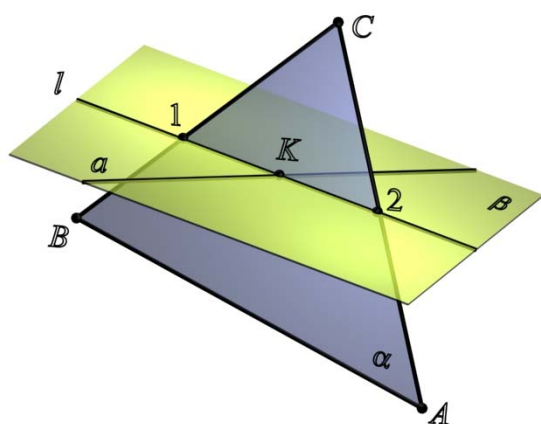


Рис. 8.9. Пересечение прямой общего положения и плоскости общего положения

**Дано:**  $\alpha(ABC)$  – плоскость общего положения;  
 $a(a_1, a_2)$  – прямая общего положения.

**Определить:**  $K = a \times \alpha(ABC)$ .

**Решение:**

1. Прямую заключить во вспомогательную плоскость частного положения:  $a \in \beta$ .

2. Определить линию  $l$  как линию пересечения вспомогательной и заданной плоскостей  $l = \alpha(ABC) \cap \beta$ .

3. Определить взаимное положение заданной прямой  $a$  и полученной прямой  $l$ . Поскольку прямые  $a$  и  $l$  лежат в одной плоскости, они могут пересекаться или быть параллельными. Точка пересечения  $K = a \times l$  и является искомой точкой пересечения прямой  $a$  с плоскостью  $\alpha(ABC)$ . Если прямые  $a$  и  $l$  параллельны, то прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha(ABC)$ .

**Определение точки пересечения прямой  $a(a_1, a_2)$  и плоскости  $\alpha(ABC)$  на комплексном чертеже:**

1. Заключить прямую  $a(a_1, a_2)$  во вспомогательную проецирующую плоскость  $\beta(\beta_2)$  (рис. 8.10).

2. Определить линию пересечения  $l(l_1-2)$  вспомогательной плоскости  $\beta(\beta_2)$  и заданной плоскости  $\alpha(ABC)$ :

$$l = \alpha(ABC) \cap \beta(\beta_2); l_2 = \beta_2; l_1 = (l_1-2_2).$$

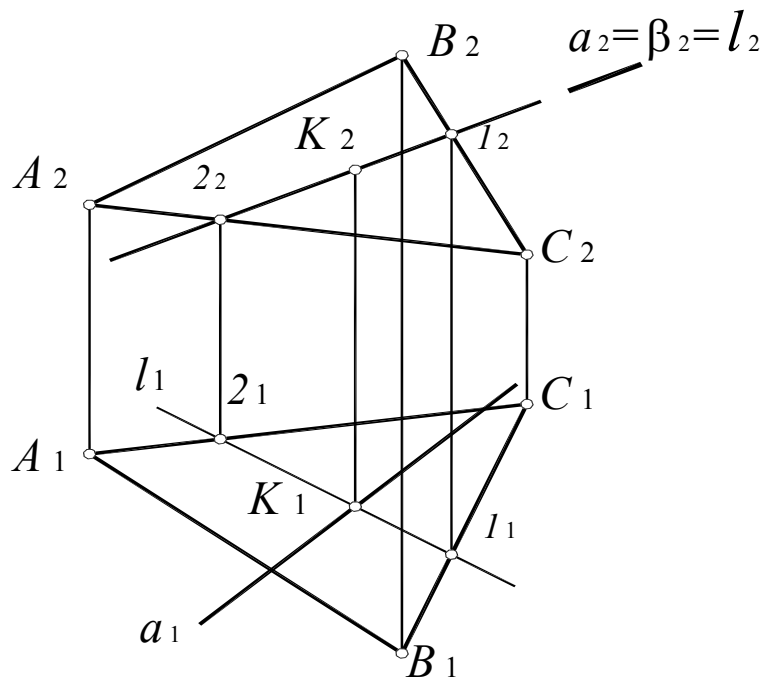


Рис. 8.10. Пересечение прямой  $a(a_1, a_2)$  и плоскости  $\alpha(ABC)$

3. Определить взаимное положение заданной прямой  $a$  и полученной прямой  $l$ . В данном случае, прямые  $a$  и  $l$  пересекаются в точке  $K$ , которая и является искомой точкой пересечения прямой  $a(a_1, a_2)$  и плоскости  $\alpha(ABC)$ :

$$l_1 \times a_1 = K_1; K_2 \in a_2; K = a(a_1, a_2) \times \alpha(ABC).$$

4. Считая плоскость непрозрачной, определить видимость прямой  $a(a_1, a_2)$  относительно плоскости  $\alpha(ABC)$ .

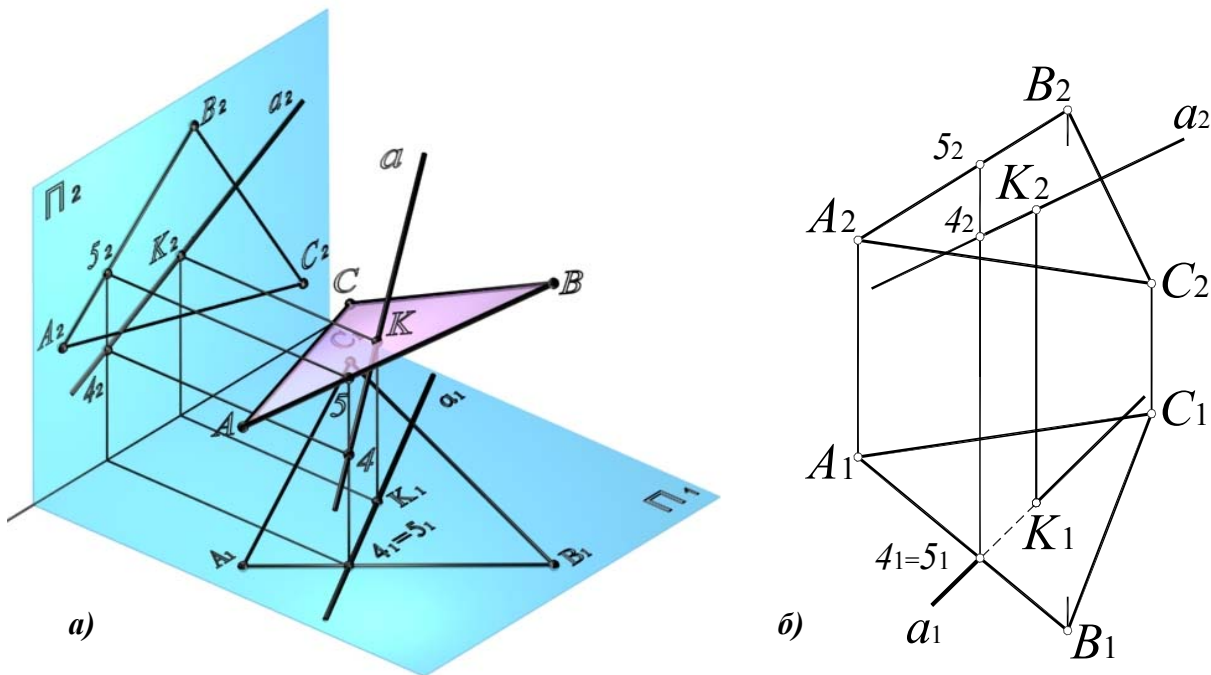


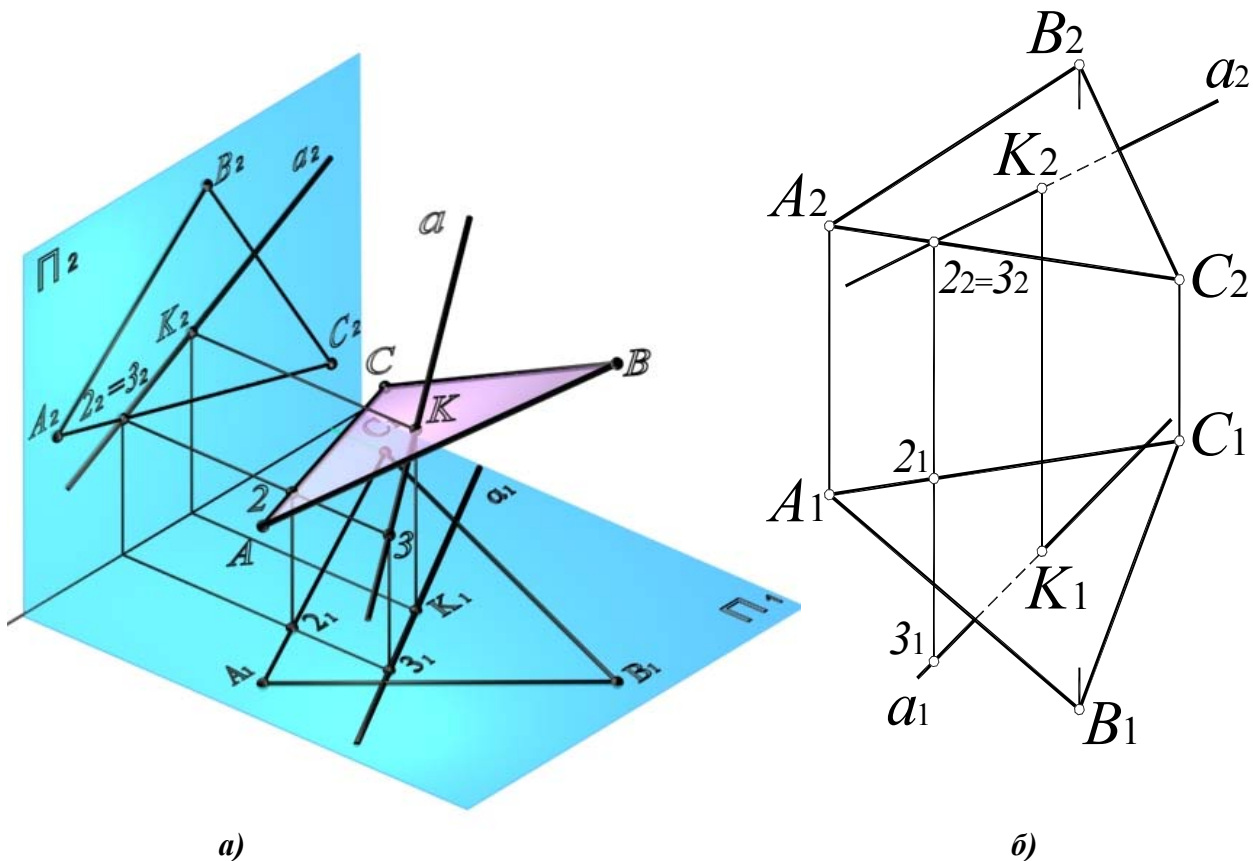
Рис. 8.11. Определение видимости относительно горизонтальной плоскости проекций:

$a$  – наглядное изображение;

$b$  – комплексный чертеж

Для определения видимости относительно горизонтальной плоскости проекций необходимо найти конкурирующие точки – точки, горизонтальные проекции которых совпадают.

Прямые  $a$  и  $(AB)$  в пространстве являются скрещивающимися (точки пересечения проекций не лежат на одной линии связи), поэтому для определения видимости прямой относительно плоскости достаточно определить видимость прямой  $a$  относительно прямой  $(AB)$  (8.11). Для этого рассмотрим две конкурирующие точки:  $4$  – на прямой  $a$  и  $5$  – на прямой  $(AB)$ . Высота точки  $5$  больше, следовательно, на  $\Pi_1$  видима прямая  $(AB)$ , то есть плоскость, а прямая  $a$  – невидима.



**Рис. 8.12. Определение видимости относительно фронтальной плоскости проекций:**  
 $a$  – наглядное изображение;  $b$  – комплексный чертеж

Видимость прямой  $a$  по отношению к плоскости  $\alpha(ABC)$  на фронтальной плоскости проекций (рис. 8.12) определяется с помощью конкурирующих точек  $2$ – на прямой  $(AC)$  и  $3$ –на прямой  $a$ . Глубина точки  $3$  больше, следовательно, видима будет прямая  $a$ .



## 8.9. Пересечение двух плоскостей общего положения. Вторая основная позиционная задача

Вторая позиционная задача – это задача об определении линии пересечения двух плоскостей. Наглядное изображение решения второй позиционной задачи показано на рис. 8.13.

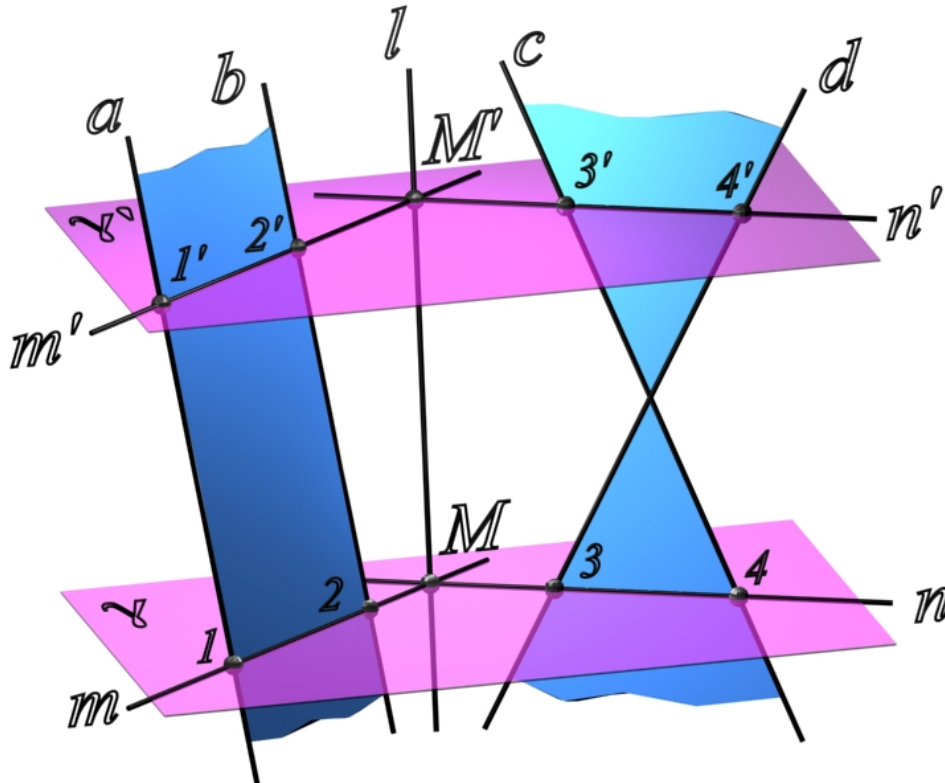


Рис. 8.13. Пересечение двух плоскостей общего положения

Алгоритм решения второй позиционной задачи состоит в следующем:

1. Заданные плоскости  $\alpha(a||b)$  и  $\beta(c \times d)$  пересечь вспомогательной плоскостью частного положения  $\gamma$ .

2. Определить линии пересечения  $m$  и  $n$  вспомогательной плоскости с каждой из заданных плоскостей:

$$\begin{aligned}\gamma \cap \alpha(a||b) &= m; \\ \gamma \cap \beta(c \times d) &= n.\end{aligned}$$

3. Определить точку  $M$  пересечения линий  $m$  и  $n$ . Точка  $M$  принадлежит прямой  $m$ , а, следовательно, и плоскости  $\alpha(a||b)$ . Точка  $M$  принадлежит прямой  $n$ , следовательно, и плоскости  $\beta(c \times d)$ . Таким образом, точка  $M$  принадлежит обеим плоскостям, то есть является одной из точек линии пересечения.

4. Вторую точку линии пересечения определяют аналогично, рассекая плоскости  $\alpha(a||b)$  и  $\beta(c \times d)$  вспомогательной плоскостью частного положения  $\gamma'$ .

**Определение линии пересечения двух плоскостей общего положения  $\alpha(a\parallel b)$   
и  $\beta(c\times d)$  на комплексном чертеже:**

1. Пересечь данные плоскости вспомогательной фронтально-проецирующей плоскостью  $\gamma(\gamma_2)\perp\Pi_2$  (рис. 8.14).

2. Определить линии пересечения вспомогательной плоскости с каждой из заданных плоскостей:

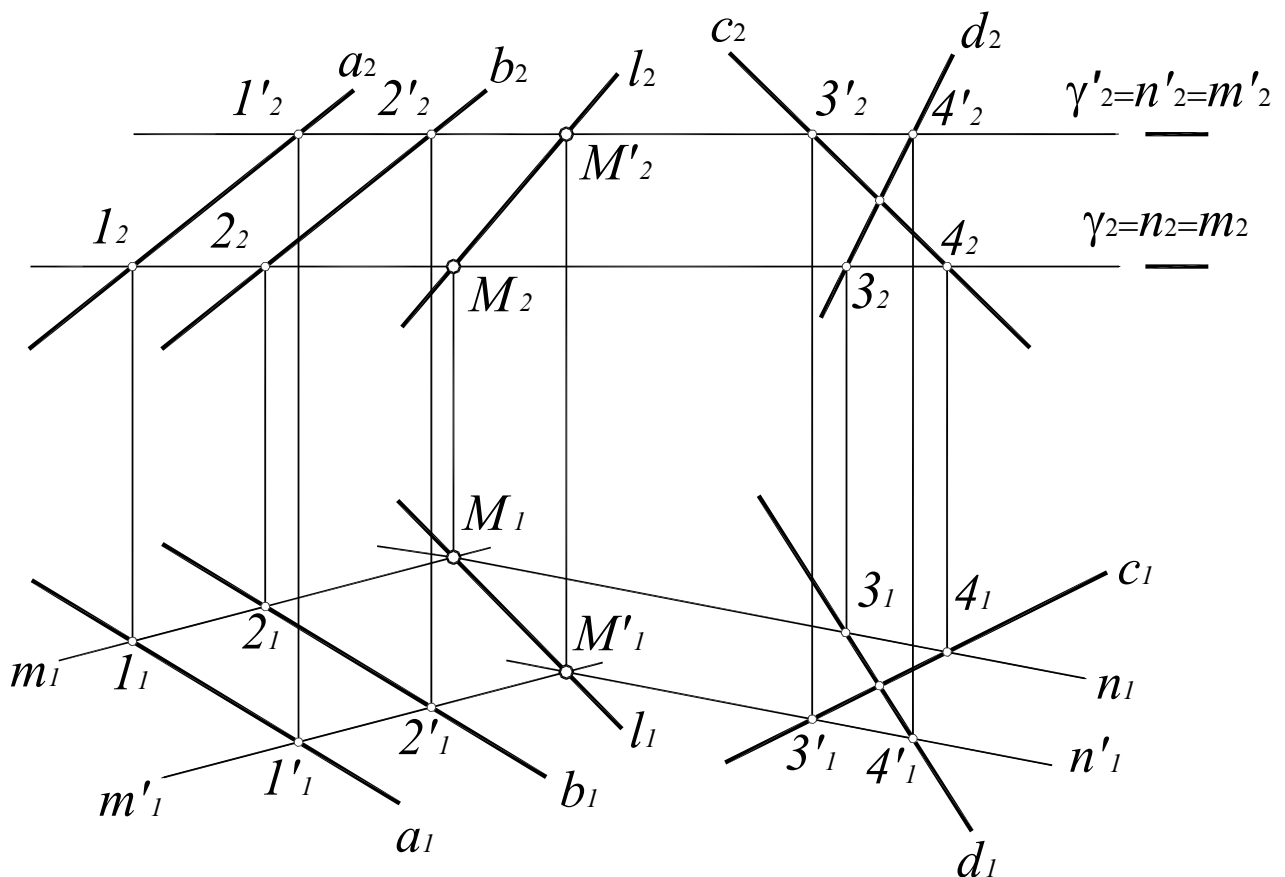
$$m=\gamma(\gamma_2)\cap\alpha(a\parallel b); m_2=\gamma_2;$$

$$n=\gamma(\gamma_2)\cap\beta(c\times d); n_2=\gamma_2;$$

3. Определить точку пересечения прямых  $n$  и  $m$ :  $M=n\times m$ .

4. Точка  $M\subset m\Rightarrow M\subset\alpha(a\parallel b)$ ;  $M\subset n\Rightarrow M\subset\beta(c\times d)$  таким образом, точка  $M$  является одной из точек искомой линии пересечения плоскостей.

5. Точка  $M'$  определяется аналогично, с помощью второй вспомогательной плоскости  $\gamma'(\gamma'_2)$ .



**Рис. 8.14. Вторая позиционная задача**

6. Через полученные точки  $M$  и  $M'$  провести прямую  $l$ . Прямая  $l$  – искомая линия пересечения плоскостей  $\alpha(a\parallel b)$  и  $\beta(c\times d)$ .

## 8.10. Сечение поверхности плоскостью

В сечении поверхности плоскостью получается *плоская кривая линия*, которую строят по отдельным точкам. Сначала строят опорные точки – точки смены видимости и экстремальные (крайние). Точки смены видимости принадлежат очерковым образующим поверхности. Экстремальными точками являются: самая близкая и самая удаленная, высшая и низшая и т. д. относительно плоскостей проекций.

Если проекция линии пересечения этими точками не определяется полностью, то строят дополнительные, промежуточные между опорными, точки. При построении сечений секущая плоскость обычно считается прозрачной и определяется только видимостью поверхности и линии сечения.

## 8.11. Точка на поверхности

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-либо линии на этой поверхности. Для построения точек на поверхности или определения недостающих проекций строится сечение поверхности вспомогательной плоскостью. Вспомогательная плоскость выбирается таким образом, чтобы в сечении получались простые линии – прямые или окружности. Кроме того, окружность в сечении должна проецироваться на одну из плоскостей проекций без искажения.

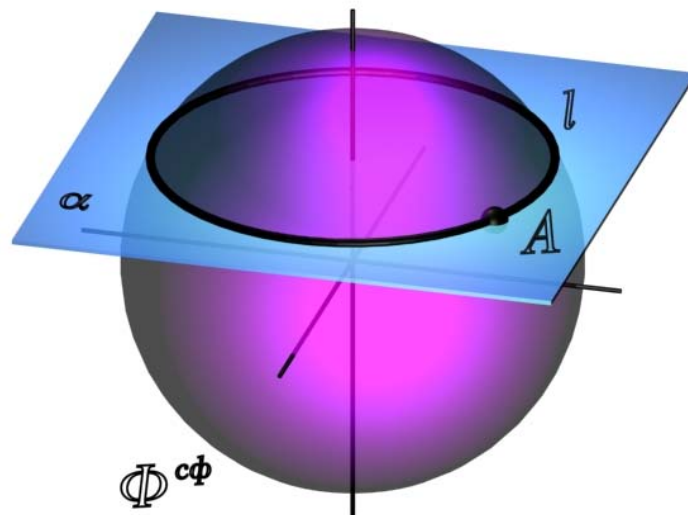


Рис. 8.15. Точка на поверхности сферы:

$$l \in \Phi_{сф};$$
$$A \in l \Rightarrow A \in \Phi_{сф}$$

Любая плоскость пересекает поверхность сферы по окружности (рис. 8.15), но без искажения на соответствующую плоскость проекций проецируются только окружности, лежащие в плоскостях уровня. Таким образом, для построения точки на поверхности сферы в качестве вспомогательных плоскостей используются только плоскости уровня.

На поверхности конуса можно получить как окружности, так и прямые линии.

Для построения горизонтальной проекции точки  $A$  на поверхности конуса (рис. 8.16, 8.17), конус пересекается горизонтальной плоскостью уровня  $\alpha(\alpha_2)$ , проходящей через точку  $A$ .

В сечении конуса получается окружность радиуса  $r$ , которая проецируется на  $\Pi_1$  без искажения – как окружность  $l_1$  с центром в точке  $O_1$  радиусом  $r_1=r$ . Фронтальная проекция окружности –  $l_2$  представляет собой отрезок  $[1_2 2_1]$ .

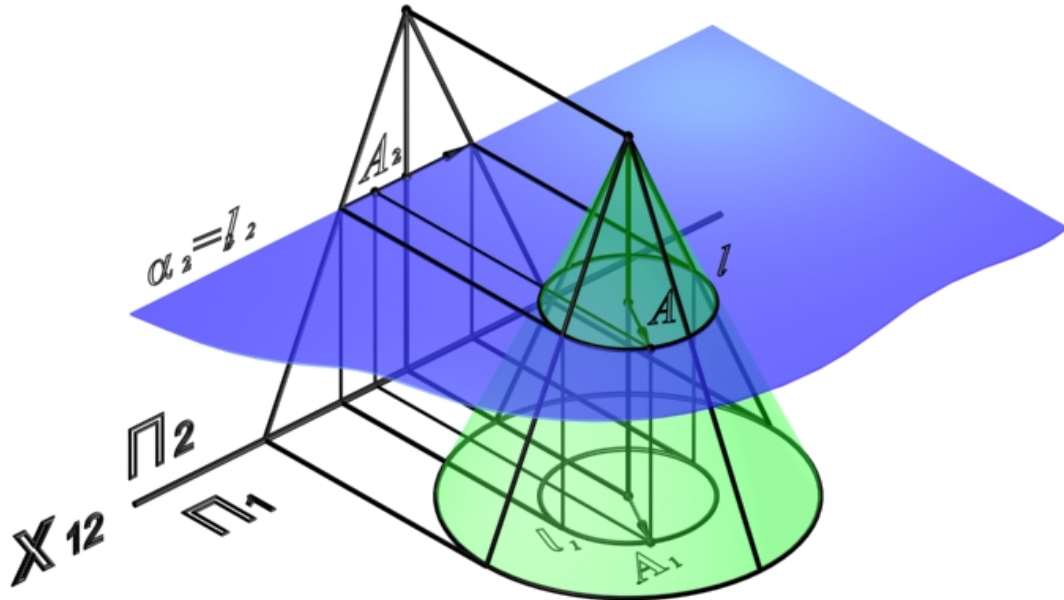


Рис. 8.16. Точка на поверхности конуса

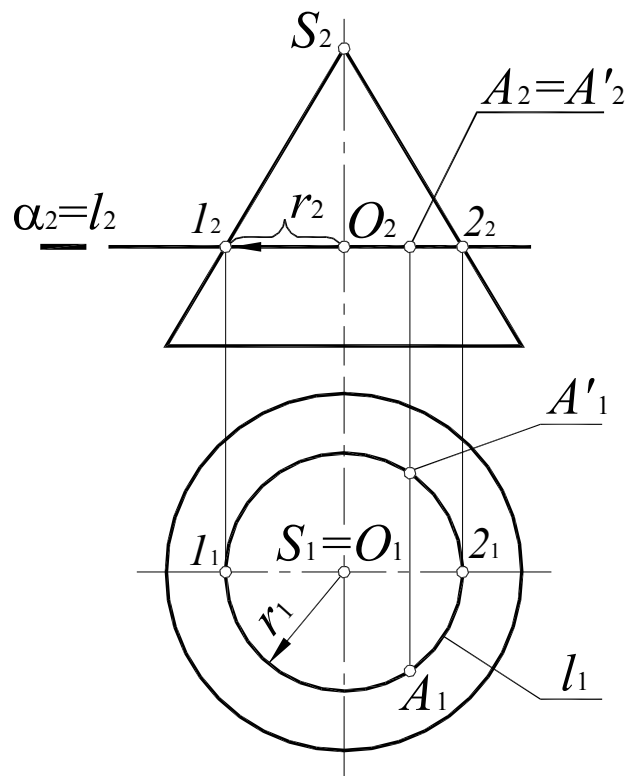
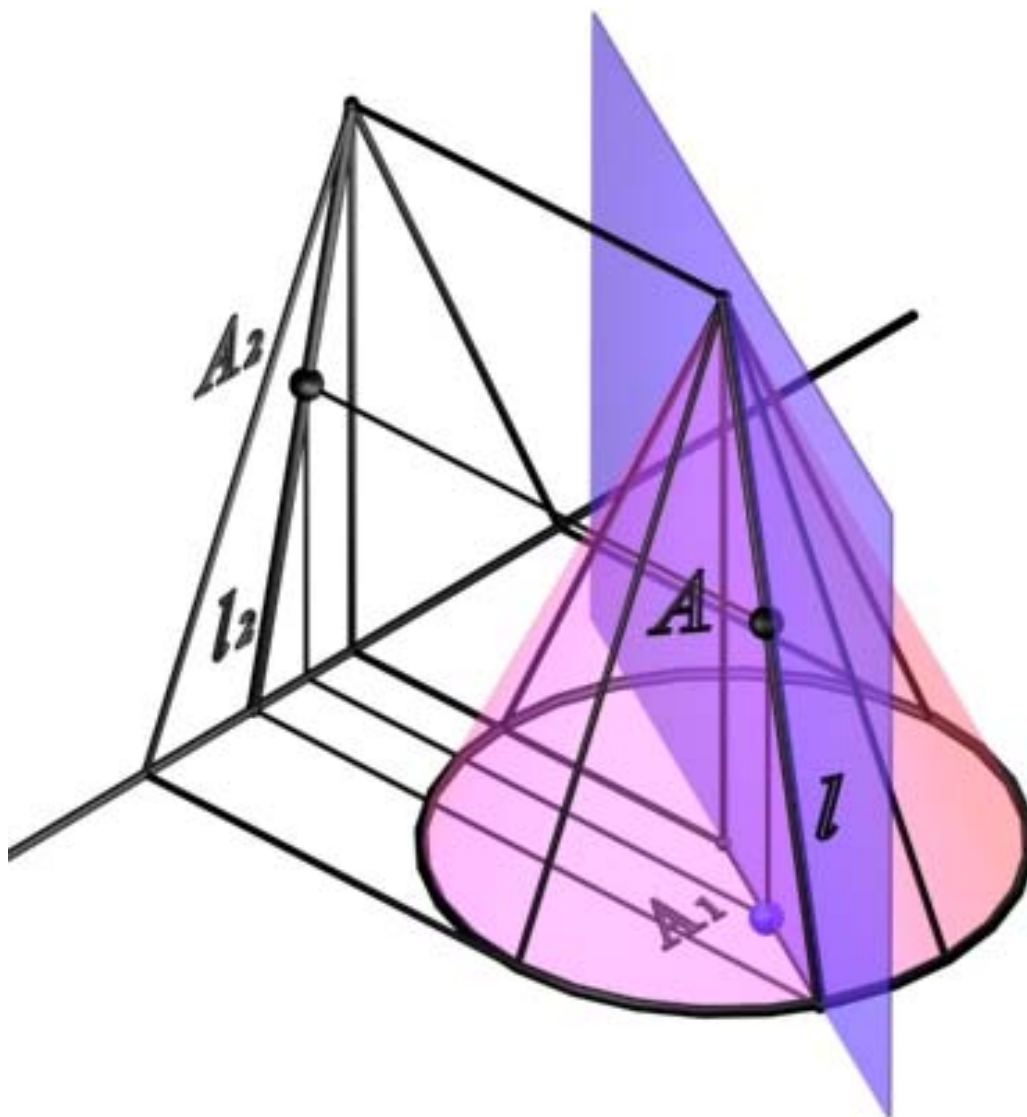


Рис. 8.17. Построение точки на поверхности конуса

Горизонтальная проекция точки  $A$  строится на пересечении вертикальной линии связи ( $A_2A_1$ ) и окружности  $l_1$ . При этом фронтальной проекции  $A_2$  могут соответствовать две точки –  $A$  и  $A'$ .

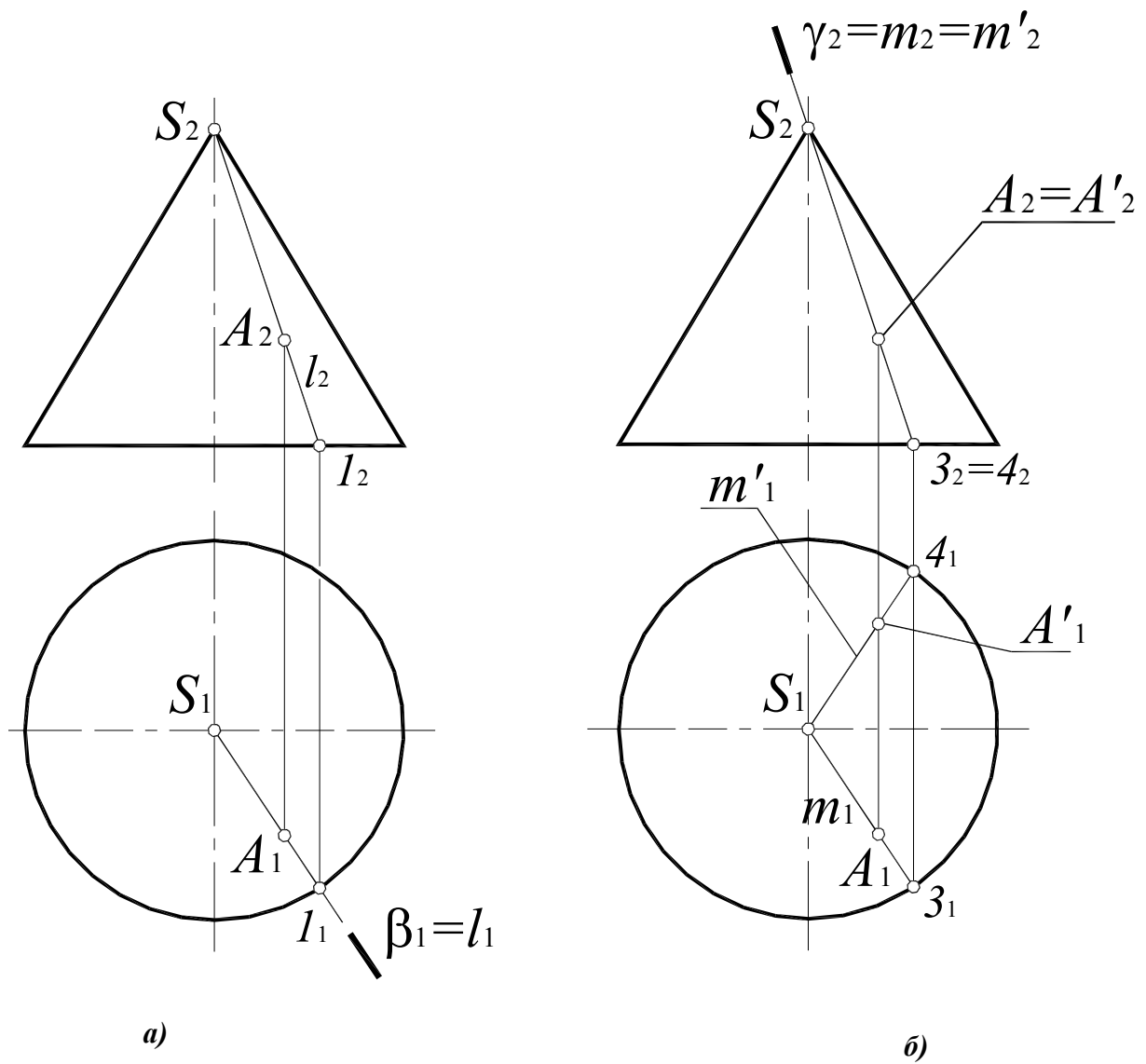
Поскольку любая плоскость, проходящая через вершину конуса, пересекает его по двум пересекающимся прямым, вспомогательную плоскость можно задать точкой  $A$  и осью вращения конуса (рис. 8.18).



**Рис. 8.18. Точка на поверхности конуса**

Если необходимо определить фронтальную проекцию точки  $A$ , принадлежащей поверхности конуса (рис. 8.19,*a*), конус пересекается вспомогательной горизонтально-проецирующей плоскостью  $\beta(A, i)$ , проходящей через ось вращения конуса и искомую точку. Плоскость  $\beta(A, i)$  пересекает основание конуса в точке  $I$ . Вершина конуса  $S$  и точка  $I$  определяют образующую конуса  $l$ , проходящую через точку  $A$ :

$$l_1 = \beta_1, l_2 = (S, I_2); A_2 \in l_2.$$



**Рис. 8.19. Построение точки на поверхности конуса:**

*a* – определение фронтальной проекции;

*б* – определение горизонтальной проекции

Если необходимо определить горизонтальную проекцию точки  $A$ , принадлежащей поверхности конуса (рис. 8.19,б), конус пересекается вспомогательной фронтально-проецирующей плоскостью  $\gamma(\gamma_2) \in S$ . Плоскость  $\gamma(\gamma_2)$  пересекает основание конуса в точках  $3$  и  $4$ . Вершина конуса  $S$  и точка  $3$  определяют образующую конуса  $m$ , проходящую через точку  $A$ :

$$m_2 = \gamma_2, m_1 = (S_1, 3_1); A_1 \in m_1;$$

$$m'_2 = \gamma_2, m'_1 = (S_1, 3_1); A'_1 \in m'_1.$$

Таким образом, данной фронтальной проекции точки  $A_2$  могут соответствовать две точки –  $A$  и  $A'$ .

### 8.14. Сечение поверхности вращения плоскостью частного положения

Рассмотрим построение линии пересечения поверхности закрытого тора с фронтально-проецирующей плоскостью  $\mu(\mu_2)$  (рис. 8.20). Сначала определяются опорные точки: 1 и 2 – точки пересечения плоскости  $\mu(\mu_2)$  с плоскостью основания тора, точка 3 – точка пересечения плоскости  $\mu(\mu_2)$  с очерковой образующей тора.

Промежуточные точки 4 и 5 строятся при помощи вспомогательной плоскости уровня  $\gamma(\gamma_2)$ , которая пересекает поверхность тора по линии:

$$l = \Phi^m \cap \gamma(\gamma_2), l_2 = \gamma_2; l - \text{окружность радиуса } r,$$

а плоскость  $\mu(\mu_2)$  – по фронтально-проецирующей прямой:

$$p = \mu(\mu_2) \cap \gamma(\gamma_2); p \perp \Pi_2; l \times p = 4, 5.$$

Точки 4 и 5 пересечения полученных линий принадлежат секущей плоскости  $\mu(\mu_2)$  и линии  $l$  поверхности тора, то есть принадлежат плоскости и поверхности одновременно, а следовательно, являются точками искомой линии пересечения  $m$ .

Точки 6, 7, 8 и 9 определяются аналогично. Полученные точки соединяют плавной лекальной кривой и определяют видимость линии пересечения  $m$  относительно поверхности.

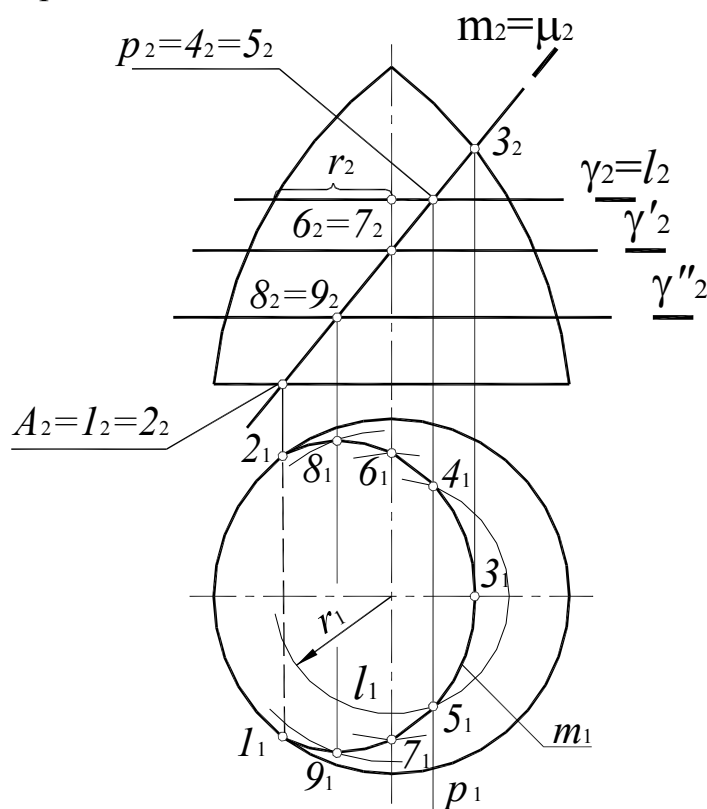


Рис. 8.20. Сечение поверхности вращения плоскостью частного положения

При построении сечений поверхности плоскостью общего положения выполняют такое преобразование комплексного чертежа, при котором плоскость займет частное положение.

### 8.15. Цилиндрические сечения

В сечении цилиндрической поверхности вращения плоскостью могут быть получены следующие линии:

**Окружность**, если секущая плоскость  $\delta(\delta_2)$  перпендикулярна оси вращения цилиндра (рис. 8.21);

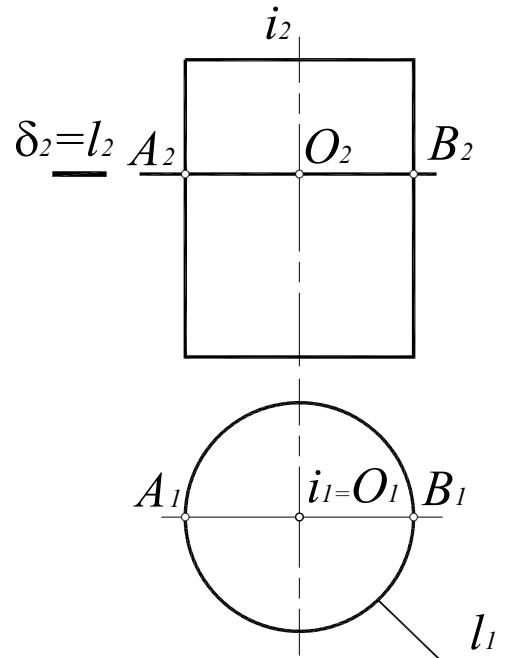
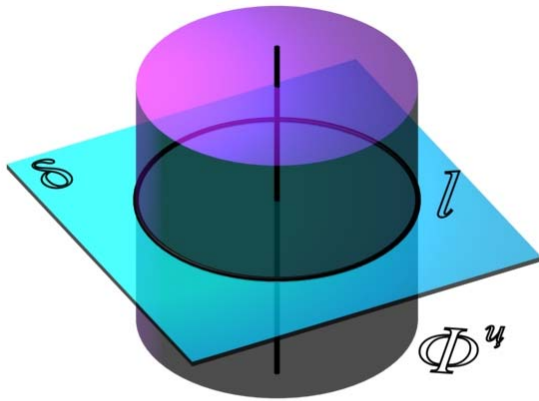


Рис. 8.21. Окружность

**Эллипс**, если секущая плоскость  $\alpha(\alpha_2)$  наклонена под произвольным углом к оси цилиндра (рис. 8.22);

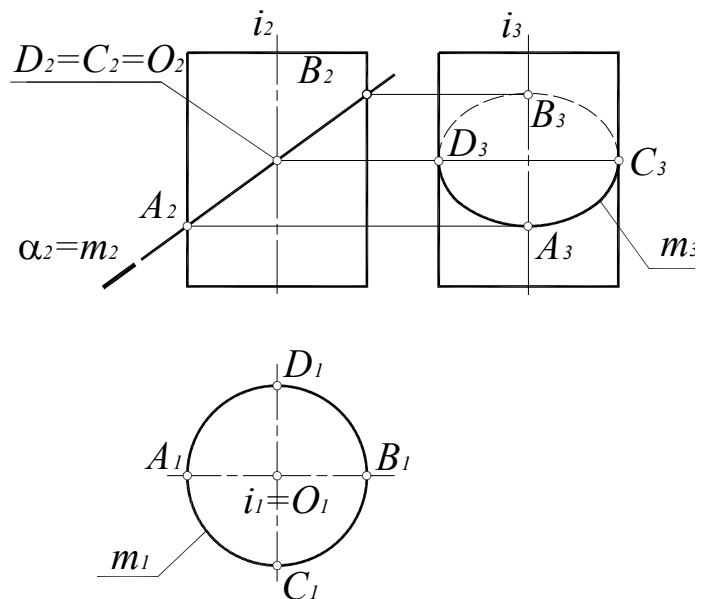
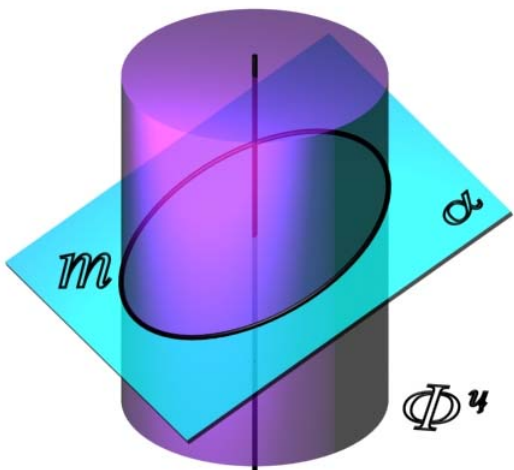


Рис. 8.22. Эллипс



Две параллельные прямые (образующие), если секущая плоскость  $v(v_2)$  параллельна оси цилиндра (рис. 8.23).

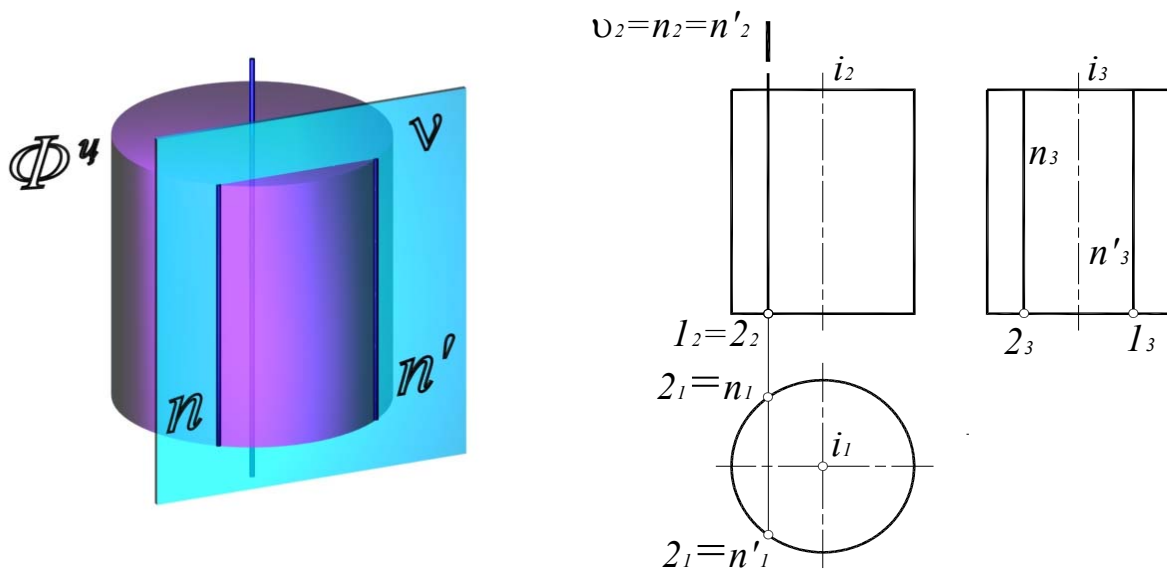


Рис. 8.23. Параллельные прямые

На плоскость, перпендикулярную оси вращения поверхности, окружность и эллипс на поверхности цилиндра проецируются в окружность, совпадающую с проекцией всей поверхности.

### 8.16. Конические сечения

Кривые линии, которые получаются в сечении прямого кругового конуса плоскостью, называются коническими сечениями. В зависимости от положения секущей плоскости по отношению к конической поверхности образуются следующие линии:

**Окружность**, если секущая плоскость  $\eta(\eta_2)$  перпендикулярна оси вращения конуса  $i$  (рис. 8.24).

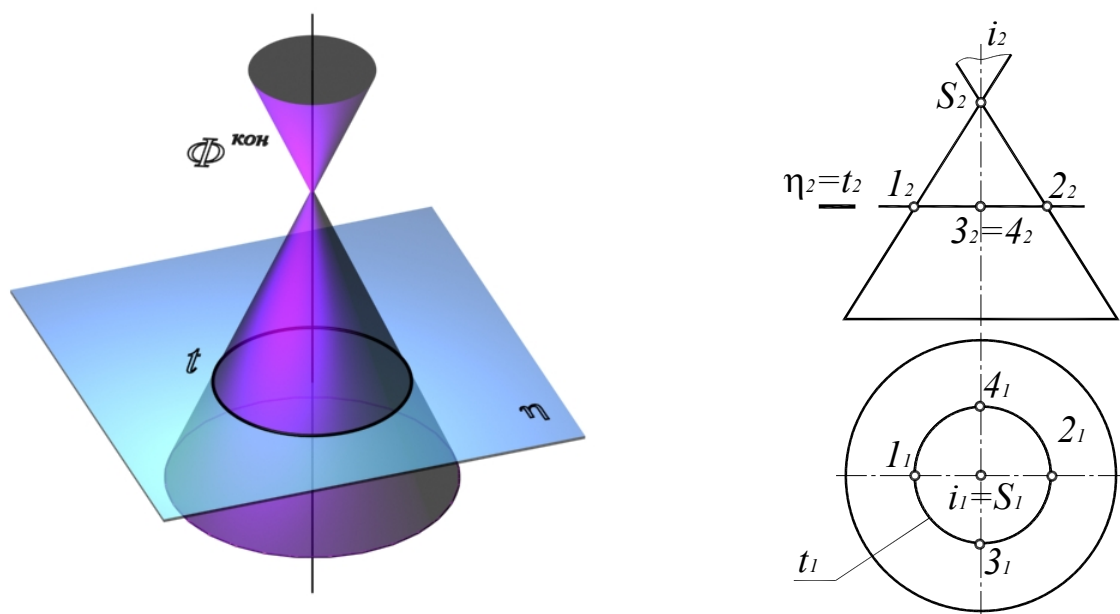
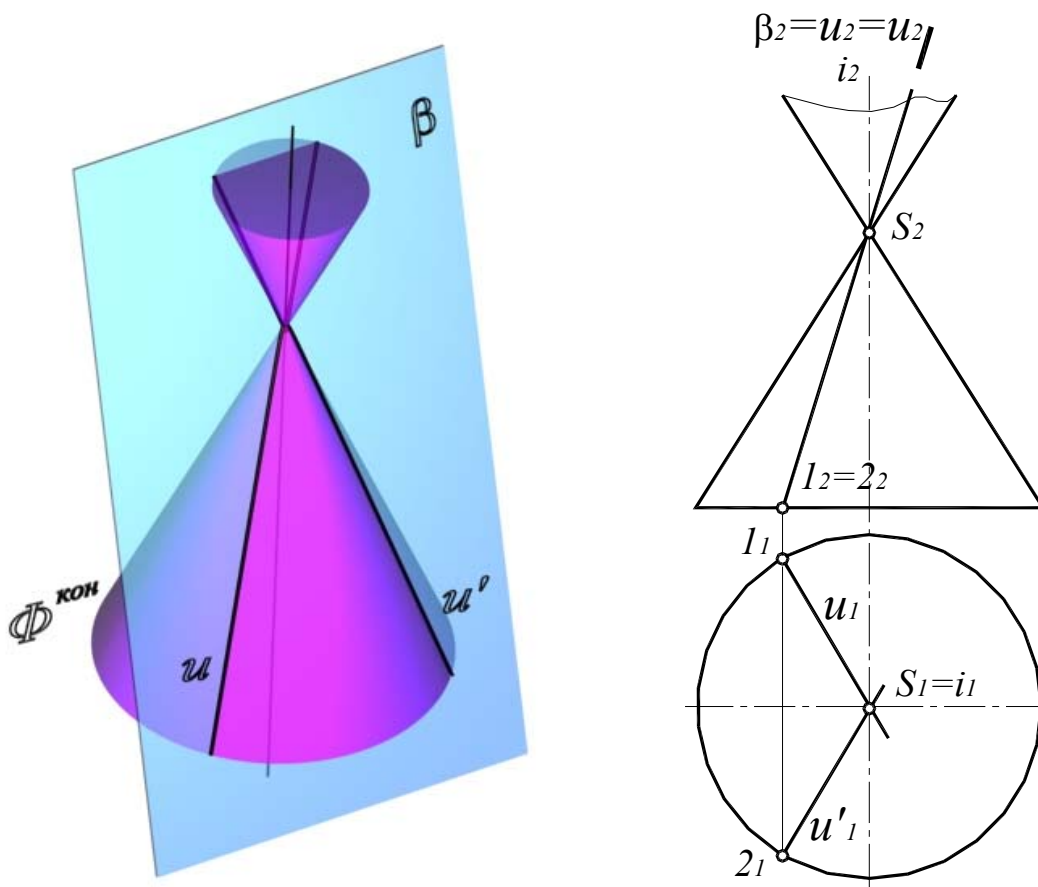


Рис. 8.24. Окружность

**Две пересекающиеся прямые**, если секущая плоскость  $\beta(\beta_2)$  проходит через вершину поверхности конуса (рис. 8.25).



**Рис. 8.25. Пересекающиеся прямые**

**Эллипс** (рис. 8.26), если секущая плоскость  $\mu(\mu_2)$  пересекает все образующие, расположенные по одну сторону от вершины конуса.

Точки  $A$  и  $B$  являются опорными и не требуют дополнительных построений (см. рис. 95.). Отрезок  $[AB]$  определяет большую ось эллипса. Для определения малой оси отрезок  $[A_2B_2]$  делят пополам. Так получается центр эллипса – точка  $O$ . Затем через точку  $O$  проводят вспомогательную плоскость  $\sigma(\sigma_2)$ , которая пересекает поверхность конуса по окружности:

$$\begin{aligned} \sigma(\sigma_2) \cap \Phi^k &= l; l_2 = \sigma_2; l_1 - \text{окружность}; \\ \sigma(\sigma_2) \cap \mu(\mu_2) &= m; m \perp \text{П}\sigma_2; \\ m_1 \times l_1 &= C_1D_1; [C_1D_1] - \text{малая ось эллипса.} \end{aligned}$$

Для построения фокуса проводят биссектрису угла  $\angle S_2B_2A_2$ , между образующей конуса и следом секущей плоскости  $\mu_2$  до пересечения с осью конуса. Из полученной точки опускают перпендикуляр на след плоскости  $\mu_2$ . Эта точка  $F$  и является фокусом. Из точки  $A_2$  откладывают расстояние  $AF' = FB$ .

Свойство эллипса: *сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов есть величина постоянная и равна большой оси эллипса  $AB = FP + F'P$ .*

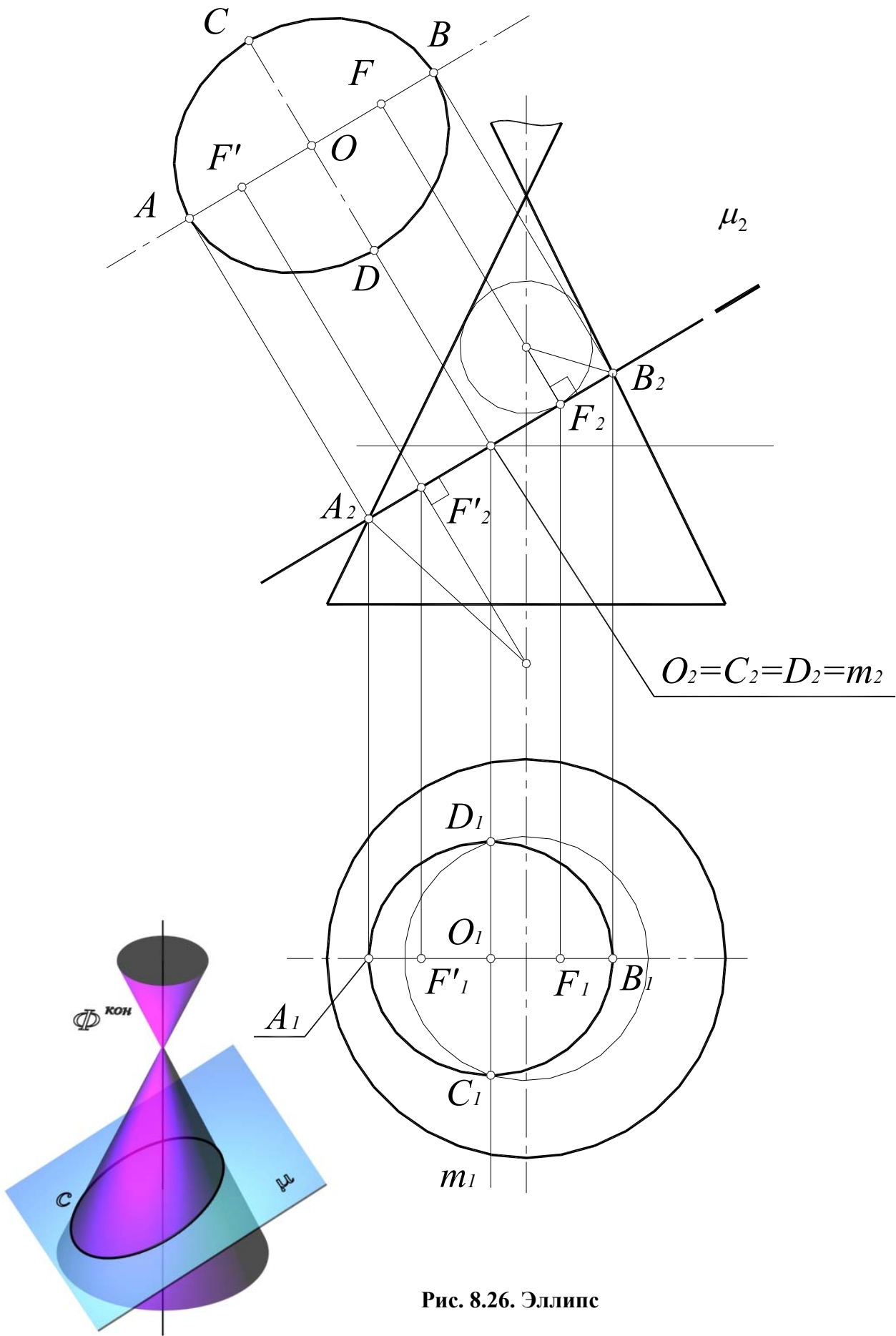
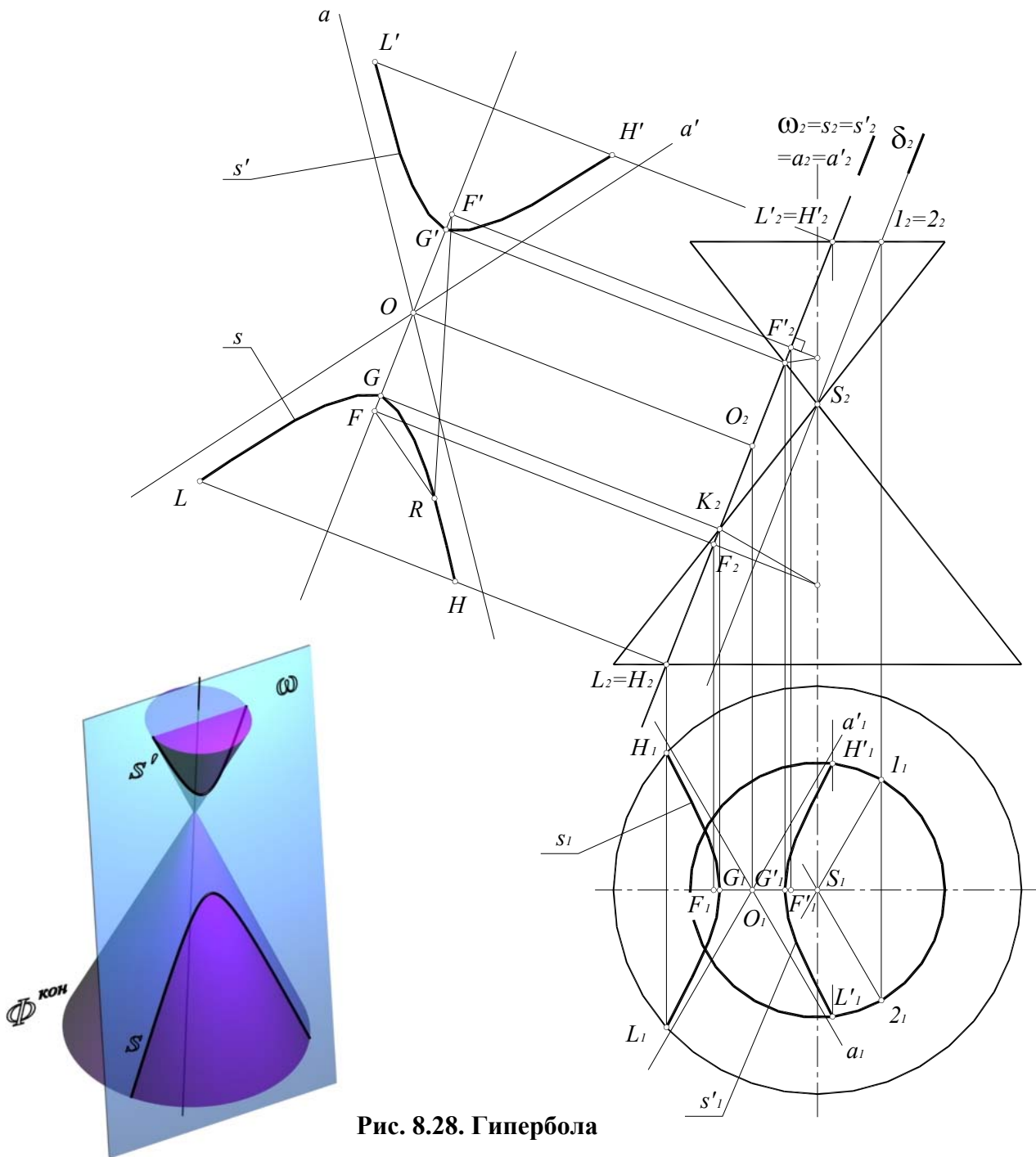


Рис. 8.26. Эллипс



**Гипербола** (рис. 8.28), если секущая плоскость  $\omega(\omega_2)$  пересекает обе половины поверхности конуса.



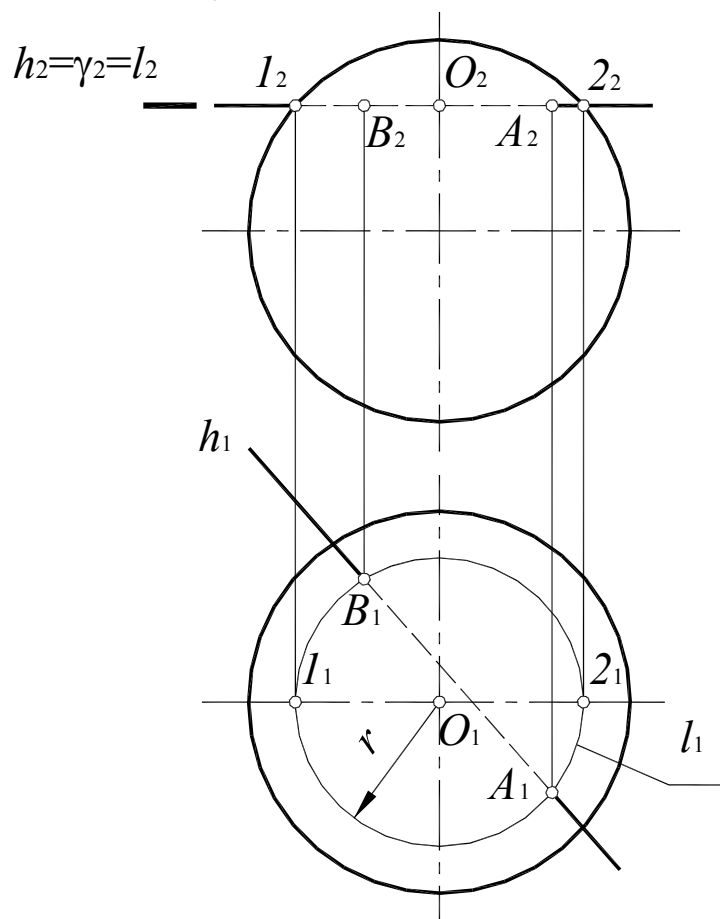
**Рис. 8.28. Гипербола**

При пересечении конуса образуются две части гиперболы  $s$  и  $s'$ .  $G$  и  $G'$  – вершины гиперболы,  $F(F_1, F_2)$  и  $F'(F'_1, F'_2)$  – фокусы гиперболы,  $O(O_1, O_2)$  – центр гиперболы,  $a$  и  $a'$  – асимптоты гиперболы, получающиеся как прямые, параллельные образующим конуса  $S1$  и  $S2$ , полученным при рассечении его плоскостью  $\delta(\delta_2)$ , параллельной плоскости  $\omega(\omega_2)$ .

Свойство гиперболы: *разность расстояний от любой точки гиперболы до ее фокусов есть величина постоянная, равная расстоянию между вершинами гиперболы  $RF - RF' = GG'$ .*



Далее следует определить видимость прямой: между точками  $A$  и  $B$  прямая невидима на обеих проекциях, поскольку находится внутри сферы, фронтальная проекция горизонтали находится выше фронтальной проекции очерковой образующей сферы, поэтому горизонталь на  $\Pi_1$  видима; точка  $A$  имеет большую глубину, чем очерковая образующая сферы, поэтому на фронтальной проекции горизонталь видима до точки  $A$ , а за точкой  $B$  – невидима.



**Рис. 8.30. Пересечение прямой с поверхностью сферы**

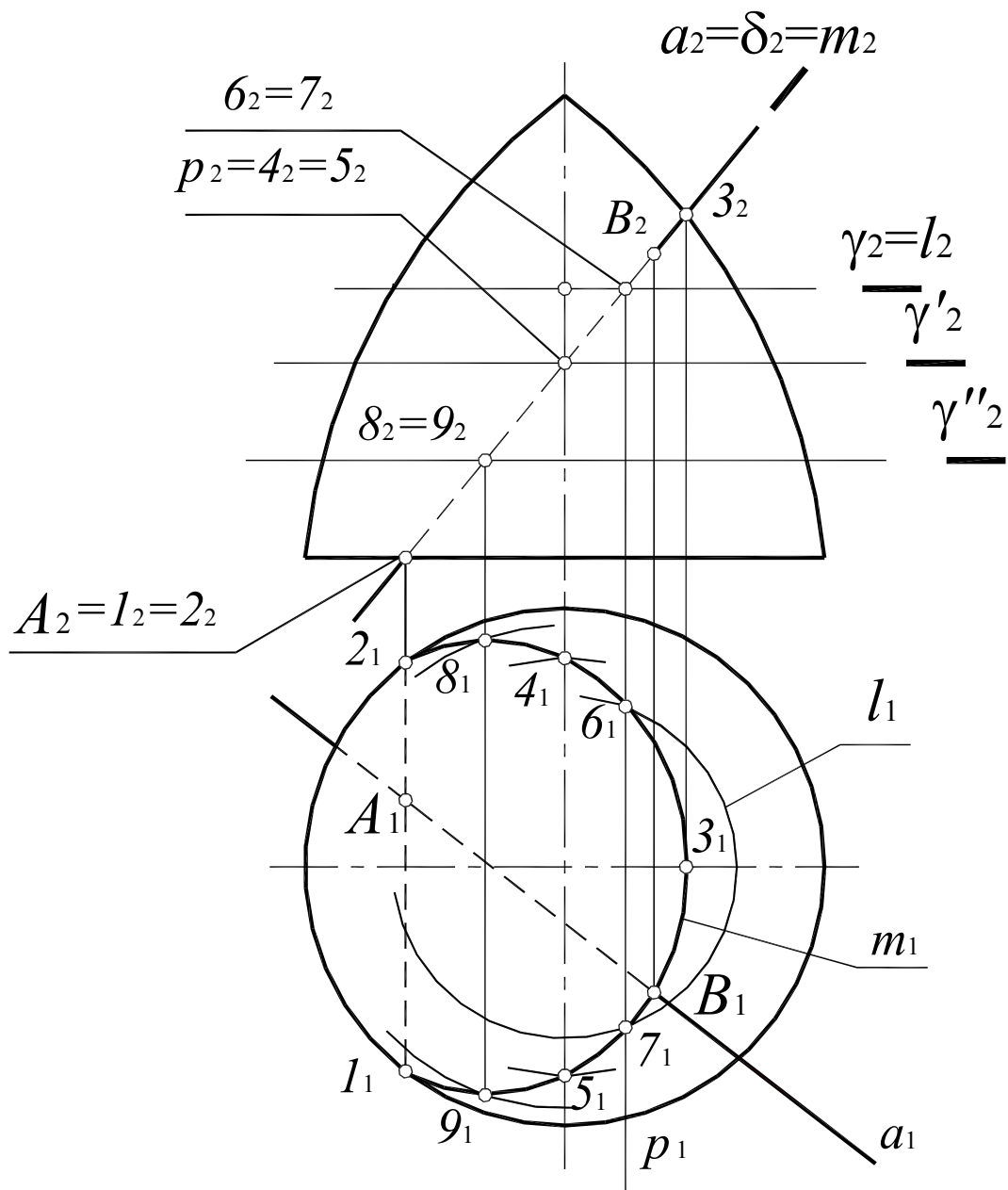
Для построения точки пересечения поверхности закрытого тора с прямой общего положения (рис. 8.31), прямую заключают во вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость  $\delta(\delta_2)$ . Далее строится сечение тора плоскостью  $\delta(\delta_2)$ :

Точки  $1$  и  $2$  – точки пересечения с основанием и точка  $3$  – опорные точки на очерковой образующей определяют без дополнительных построений;

Точки  $4$  и  $5$  также опорные (лежат на образующих, проекции которых совпадают с осью тора). Точки  $4$  и  $5$  определяют как точки на поверхности тора с помощью вспомогательной плоскости  $\gamma'$ .

Промежуточные точки  $6, 7, 8, 9$  определяют аналогично.

Полученные точки соединяются плавной лекальной кривой  $m$ . Линия  $m$  – сечение тора плоскостью  $\delta(\delta_2)$ . Затем определяют точки  $A$  и  $B$  пересечения полученной линии  $m$  с прямой  $a$  и определяют видимость. Точки  $A$  и  $B$  – искомые точки пересечения прямой с поверхностью тора.



**Рис. 8.31. Пересечение прямой общего положения с поверхностью тора**

1.  $a(a_1, a_2) \in \delta(\delta_2)$ ;
2.  $m = \delta(\delta_2) \cap \Phi^m$ ;  
 $\gamma(\gamma_2)$  – вспомогательная плоскость;  
 $\gamma(\gamma_2) \cap \Phi^m = l$ ;  $l_2 = \gamma_2$ ,  $l_1$  – окружность;  
 $\gamma(\gamma_2) \cap \delta(\delta_2) = p$ ;  $p \perp \Pi_2$ ;  
 $l \times p = 6, 7$  – промежуточные точки сечения  $m$ ;  
 $m \times a = A, B$  – искомые точки пересечения прямой с поверхностью тора;
3. Определить видимость прямой относительно поверхности тора.



## 9. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Алгоритм решения задач по определению *линии пересечения поверхностей*  $\Phi'$  и  $\Phi''$  (рис. 9.1) в целом аналогичен решению второй позиционной задачи и состоит в следующем:

1. Обе заданные поверхности  $\Phi'$  и  $\Phi''$  пересекают третьей, вспомогательной плоскостью или поверхностью  $P$ .
2. Определяют линии пересечения каждой заданной поверхности со вспомогательной:  $\Phi' \times P = l'$ ,  $\Phi'' \times P = l''$ .
3. Определяют точки пересечения полученных линий  $l' \times l'' = A$  и  $A'$ . Точки  $A$  и  $A'$  принадлежат обеим поверхностям.
4. Проведя несколько вспомогательных поверхностей, находят достаточное количество точек и соединяют их плавной лекальной кривой, которая и является искомой линией пересечения поверхностей.
5. Определяют видимость поверхностей и линии их пересечения.

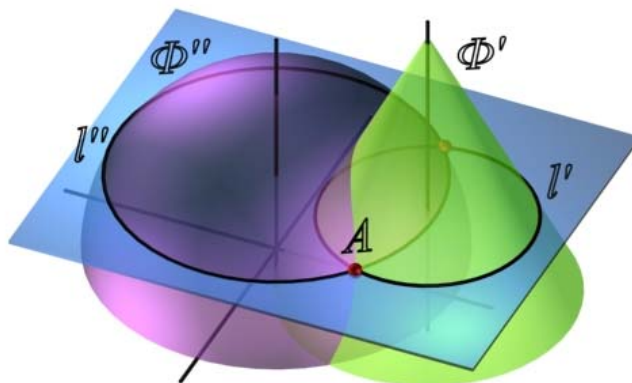


Рис. 9.1. Пересечение поверхностей

В качестве вспомогательных поверхностей  $P$  следует выбирать поверхности – плоскости или сферы, которые пересекают обе заданные поверхности по наиболее простым для построения линиям – прямым или окружностям. Кроме того, если в сечении поверхности получаются окружности, они должны проецироваться на одну из плоскостей проекций без искажения.

Определение точек линии пересечения поверхностей начинают с построения так называемых опорных точек. К ним относятся:

- точки пересечения очерковых образующих, если образующие лежат в одной плоскости,
- точки, лежащие на очерковых образующих поверхностей,
- точки, лежащие в общей плоскости симметрии,
- экстремальные (верхние – нижние, правые – левые) по отношению к плоскостям проекций, к центру концентрических сфер.

При соединении точек следует иметь в виду, что проекции линии пересечения не могут выходить за пределы общей площади – площади наложения – проекций пересекающихся поверхностей. Видимыми будут те участки линии пересечения, которые принадлежат видимым частям обеих поверхностей.

## 9.1. Способ вспомогательных параллельных плоскостей

Этот способ заключается в том, что обе поверхности пересекаются параллельными плоскостями уровня. Этот способ применяют лишь в тех случаях, когда *вспомогательные плоскости* пересекают поверхности по простым линиям – прямым или окружностям, которые проецируются на соответствующую плоскость проекций без искажения.

Рассмотрим построение линии пересечения прямого кругового конуса и сферы (рис. 9.2).

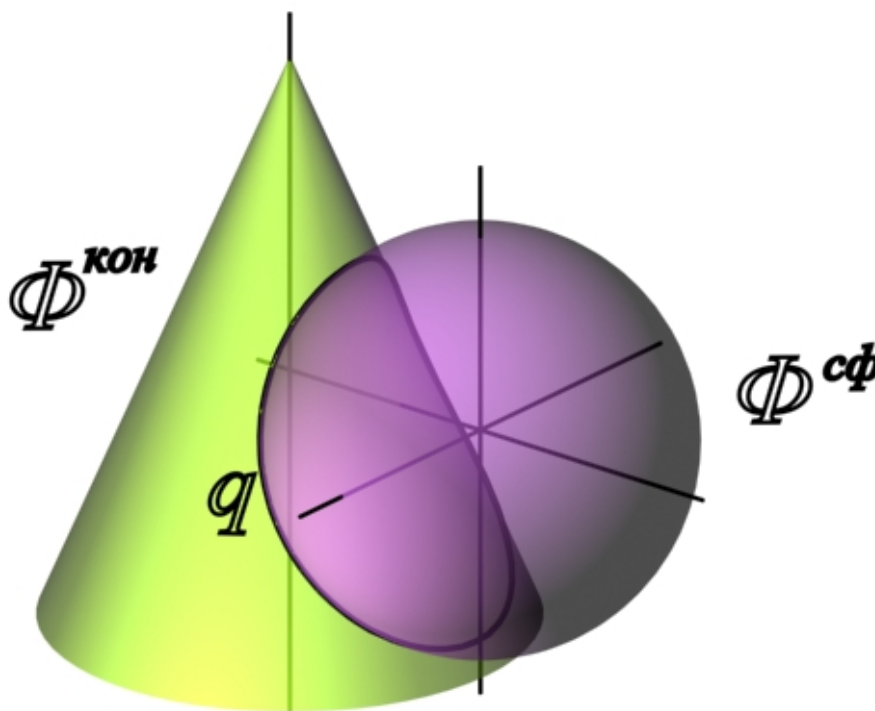


Рис. 9.2. Линия пересечения поверхностей прямого кругового конуса и сферы

Фронтальные плоскости уровня пересекают поверхность конуса по гиперболам, следовательно, для решения данной задачи нужно применить горизонтальные плоскости уровня, которые пересекают обе данные поверхности по окружностям.

Решение задачи начинают с построения опорных точек. Конус и сфера имеют общую плоскость симметрии  $\gamma(\gamma_1)$ , параллельную плоскости  $\Pi_2$ . Поэтому высшая точка  $A$  и низшая точка  $F$  линии пересечения получаются как результат пересечения очерковых образующих конуса и сферы (рис. 9.3).

Остальные точки определяются с помощью горизонтальных плоскостей уровня. Более подробно разберем построение точек  $E$  и  $E'$  (рис. 9.4).

1. Пересечь обе поверхности вспомогательной горизонтальной плоскостью уровня  $\alpha(\alpha_2)$ . Плоскость  $\alpha(\alpha_2)$  пересекает сферу по окружности  $m(m_1, m_2)$ , а конус – по окружности  $q(q_1, q_2)$ :

$$m(m_1, m_2) = \Phi^{сф} \cap \alpha(\alpha_2);$$

$$q(q_1, q_2) = \Phi^к \cap \alpha(\alpha_2).$$

2. Построив горизонтальные проекции окружностей  $m$  и  $q$ , определить точки их пересечения  $E$  и  $E'$ :

$$E_1 = m_1 \times q_1; \quad E_2 = E_1 E_2 \cap \alpha_2;$$

$$E'_1 = m_1 \times q_1; \quad E'_2 = E_1 E_2 \cap \alpha_2.$$

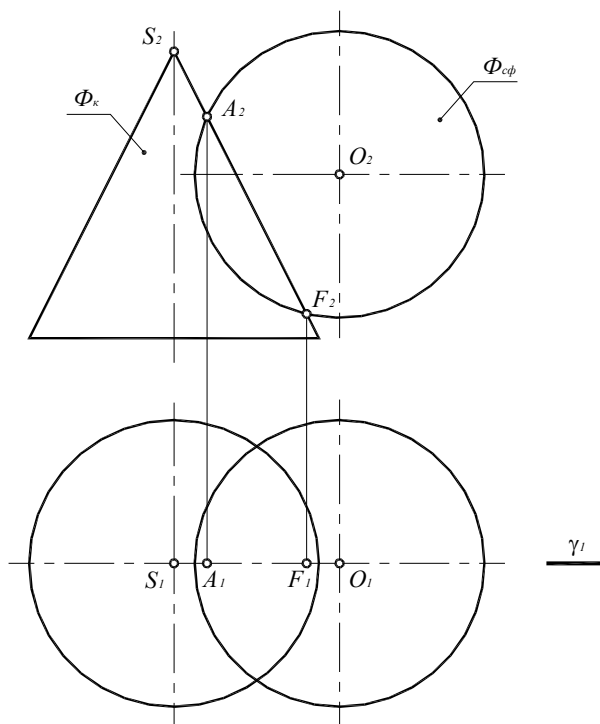


Рис. 9.3. Определение опорных точек линии пересечения поверхностей

3. Аналогичным образом определяются остальные точки, формирующие линию пересечения (рис. 9.5,а). Они получены с помощью горизонтальных плоскостей уровня  $\beta(\beta_2)$ ,  $\delta(\delta_2)$  и  $\mu(\mu_2)$ . Пределы этих плоскостей по высоте определяют высшая и низшая опорные точки линии пересечения поверхностей. Плоскость  $\mu(\mu_2)$  пересекает поверхность сферы по очерковой образующей  $b(b_2, b_2)$ , поэтому полученные точки  $B$  и  $B'$  являются опорными, ограничивающими линию пересечения поверхностей по ширине.

4. Последовательно соединить одноименные проекции полученных точек плавной лекальной кривой. Полученная линия не должна выходить за пределы области перекрытия проекций данных поверхностей.

5. Определить видимость линии пересечения поверхностей и их очерковых образующих.

Поверхность конуса на горизонтальной плоскости проекций полностью видима, следовательно, видимость линии пересечения определяется по поверхности сферы. Видима будет та часть сферы, которая на  $\Pi_2$  лежит выше очерковой образующей  $b_2$ . Точки  $B$  и  $B'$  на очерковой образующей сферы являются точками смены видимости линии пересечения на плоскости проекций  $\Pi_1$ .

Искомая линия пересечения поверхностей конуса и сферы  $d(d_1, d_2)$  (кривая второго порядка), полученная способом вспомогательных секущих плоскостей, приведена на рис 9.5,б.

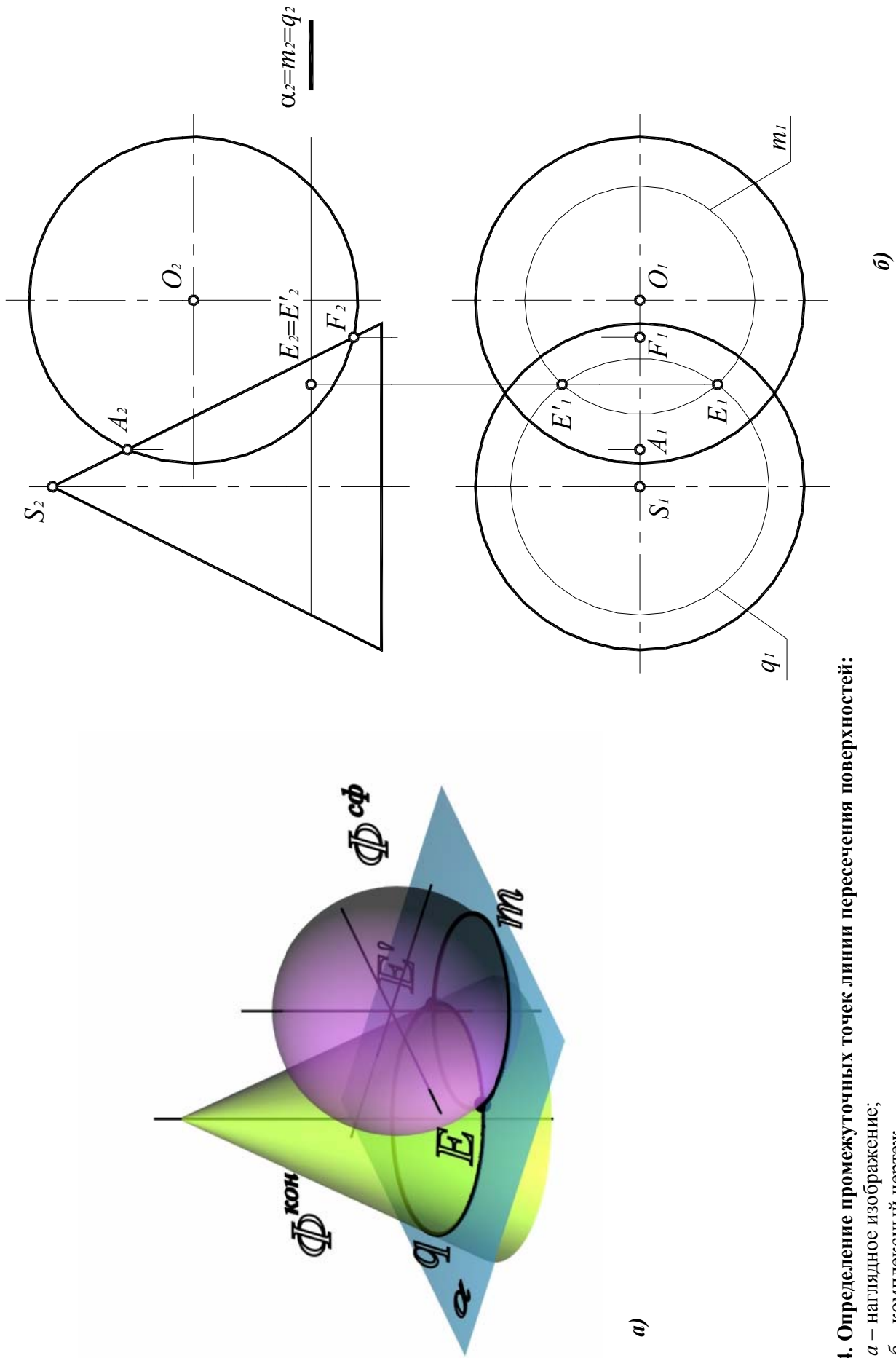


Рис. 9.4. Определение промежуточных точек линии пересечения поверхностей:

*a* – наглядное изображение;

*б* – комплексный чертеж

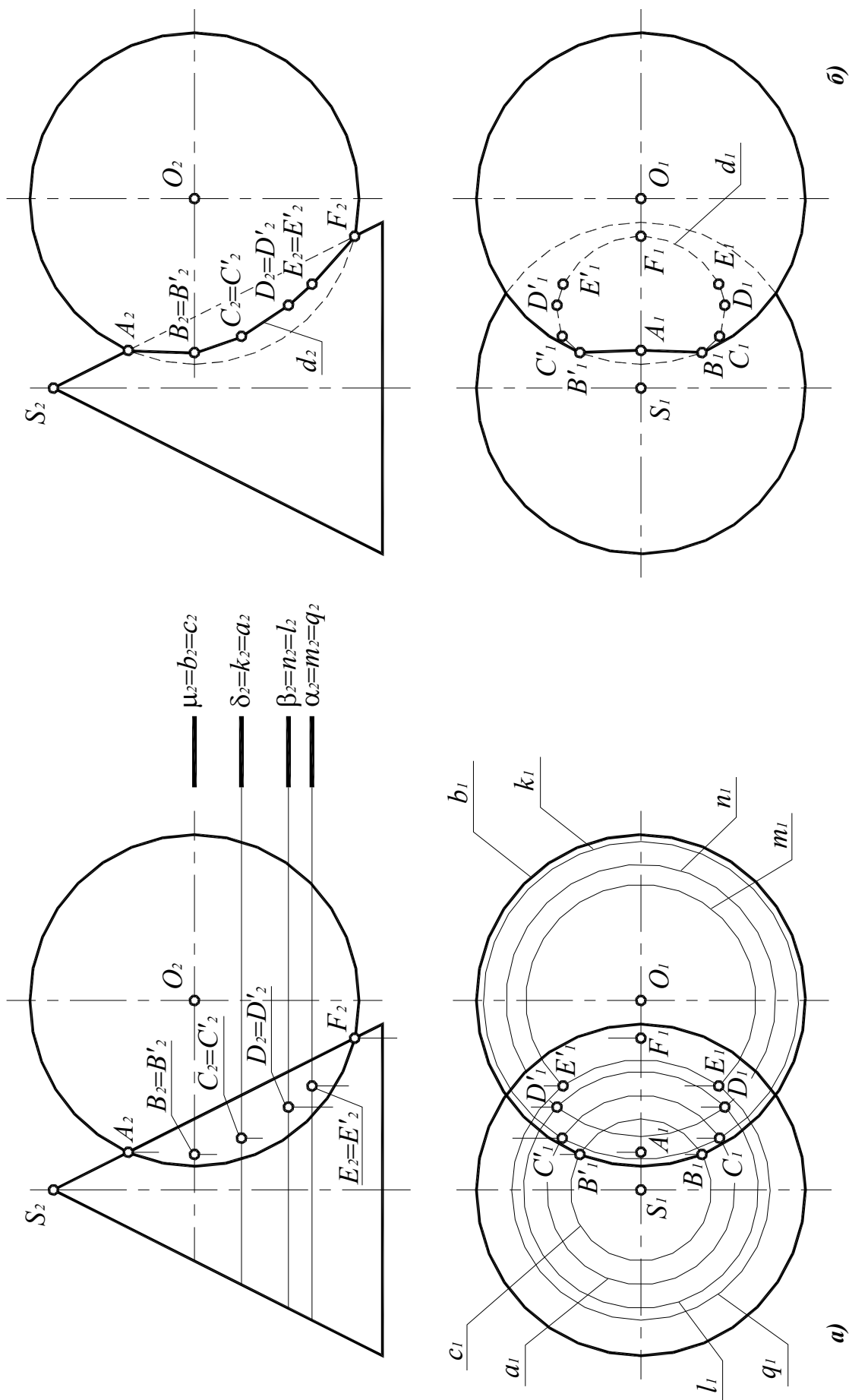


Рис. 9.5. Определение линии пересечения поверхностей способом вспомогательных параллельных плоскостей:

*a* – определение промежуточных точек;

*б* – искомая линия пересечения

## 9.2. Способ вспомогательных сфер

При построении линии пересечения двух поверхностей способом вспомогательных сфер возможны два случая. В одном из них используются сферы, проведенные из одного, общего центра (концентрические), а в другом – сферы, проведенные из разных центров (эксцентрические).

### Способ концентрических сфер

Этот способ применяется для построения линии пересечения поверхностей вращения произвольного вида, при условии, что оси этих поверхностей пересекаются.

В основу способа концентрических сфер положено свойство сферы с центром на оси какой-либо поверхности.

Если центр сферы находится на оси любой поверхности вращения, то сфера соосна с поверхностью вращения и в их пересечении получатся окружности (рис. 9.6).

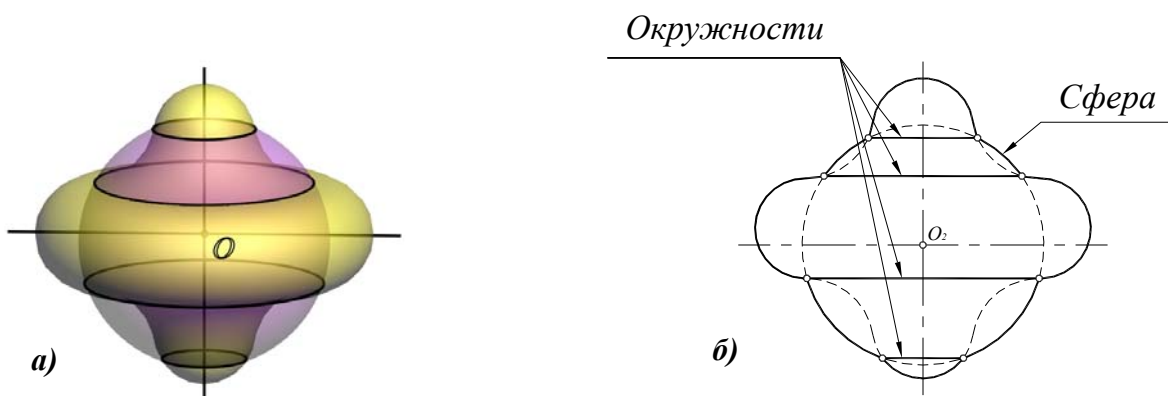


Рис. 9.6. Соосные поверхности вращения:

*a* – наглядное изображение;

*б* – на комплексном чертеже

Рассмотрим способ концентрических сфер на примере построения линии пересечения цилиндра и конуса вращения, оси которых  $i(i_1, i_2)$  и  $q(q_1, q_2)$  пересекаются и точка пересечения осей обозначена через  $O(O_1, O_2)$  (рис. 9.7).

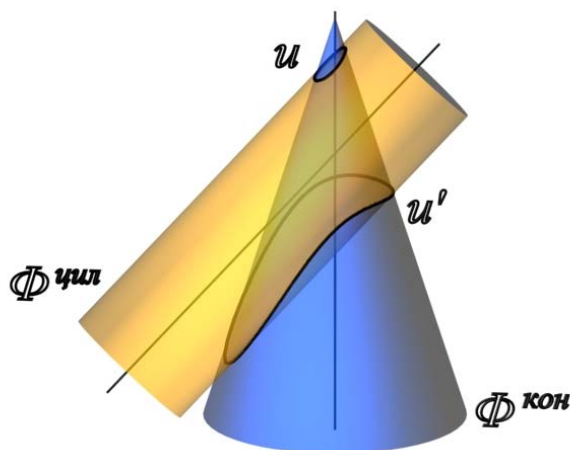


Рис. 9.7. Линия пересечения поверхностей цилиндра и прямого кругового конуса

Точка пересечения осей поверхностей принимается за центр вспомогательных концентрических сфер.

Алгоритм решения задачи об определении линии пересечения поверхностей состоит в следующем:

1. Определить опорные точки (рис. 9.8). Так как обе данные поверхности имеют общую плоскость симметрии  $\delta(\delta_1)$ , параллельную плоскости проекций  $\Pi_2$ , то их очерковые образующие, по отношению к плоскости  $\Pi_2$ , пересекаются. Точки  $A(A_1, A_2)$ ,  $B(B_1, B_2)$ ,  $C(C_1, C_2)$  и  $D(D_1, D_2)$  пересечения этих образующих являются точками видимости линии пересечения поверхностей.

2. Определить радиусы максимальной и минимальной сфер, необходимых для определения точек линии пересечения.

Радиус максимальной сферы  $R_{\max}$  равен расстоянию от центра вспомогательных сфер до наиболее удаленной точки пересечения очерковых образующих, в данном случае  $R_{\max} = O_2A_2$  (рис. 9.9).

Чтобы определить радиус минимальной сферы  $R_{\min}$ , необходимо провести через точку  $O_2$  нормали к очерковым образующим данных поверхностей. Тогда больший из отрезков этих нормалей и будет  $R_{\min}$ . В этом случае сфера минимального радиуса будет касаться одной из данных поверхностей, а со второй – пересекаться.

В данном случае сферой минимального радиуса является сфера, касающаяся цилиндрической поверхности (см. рис. 9.9).

Сфера радиусом  $R_{\min}$  касается цилиндрической поверхности по окружности  $m$ , которая на фронтальной проекции изображается в виде прямой  $m_2$ , перпендикулярной  $q_2(m_2 \perp q_2)$ . Эта же сфера пересекает коническую поверхность по двум окружностям. Но, в данном случае, нам интересна только окружность  $n$ , так как только она дает решение. Эта окружность  $n$  изображается на фронтальной проекции в виде прямой  $n_2$ , перпендикулярной  $i_2(n_2 \perp i_2)$ . Точки  $E$  и  $F$  пересечения этих окружностей будут принадлежать обеим поверхностям:

$$m_2 \times n_2 = E_2, F_2.$$

Чтобы построить горизонтальные проекции точек  $E$  и  $F$  следует воспользоваться окружностью  $n$ , содержащей данные точки, так как она не искажается на плоскости проекций  $\Pi_1$ :

$$E_1, F_1 \in n_1.$$





3. Для построения промежуточных точек линии пересечения проводят несколько concentric spheres with center in point  $O$ , причем радиус  $R$  этих сфер должен изменяться в пределах  $R_{\min} < R < R_{\max}$ .

Рассмотрим определение точек линии пересечения на примере сферы радиусом  $R_1$  ( $R_{\min} < R_1 < R_{\max}$ ) (рис. 9.10, 9.11).

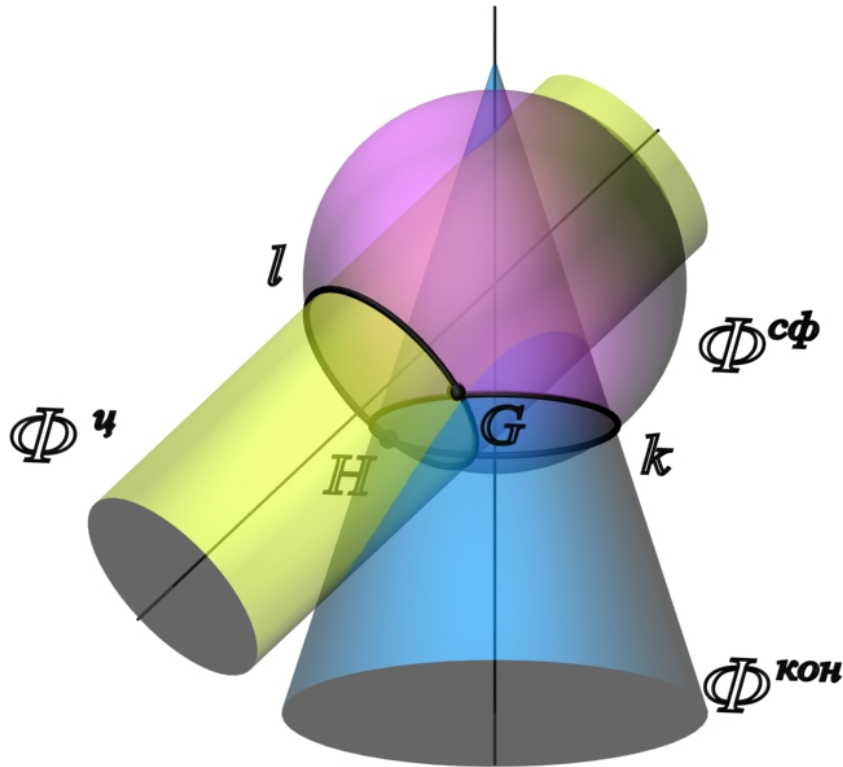


Рис. 9.10. Определение промежуточных точек линии пересечения поверхностей

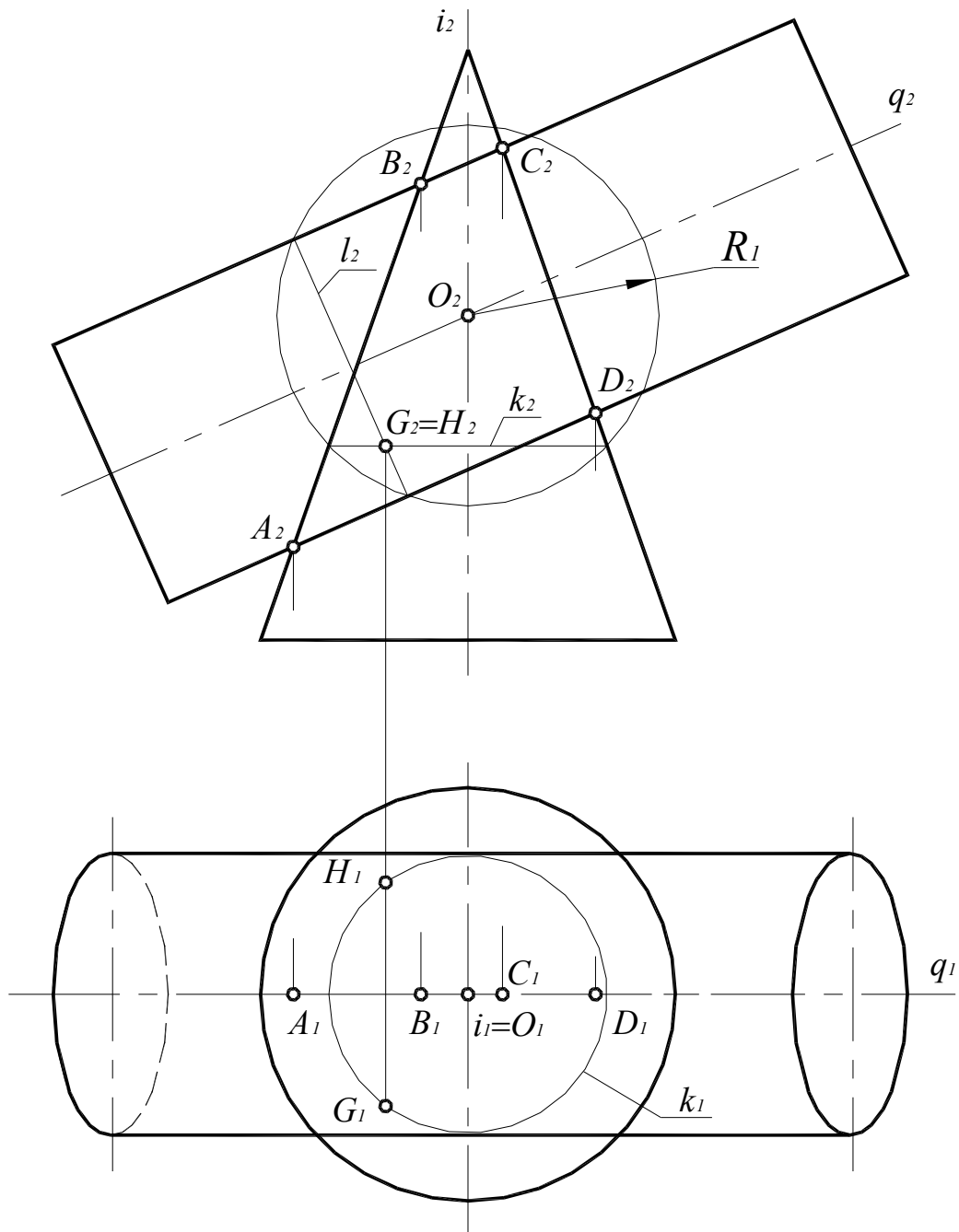
Сфера радиусом  $R_1$  пересекает цилиндрическую поверхность по окружности  $l$ , которая на фронтальной проекции изображается в виде прямой  $l_2$ , перпендикулярной  $q_2$  ( $l_2 \perp q_2$ ). Эта же сфера пересекает коническую поверхность по окружности  $k$ , которая изображается на фронтальной проекции в виде прямой  $k_2$ , перпендикулярной  $i_2$  ( $k_2 \perp i_2$ ). Точки  $G$  и  $H$  пересечения этих окружностей будут точками искомой линии пересечения:

$$l_2 \times k_2 = G_2, H_2.$$

Чтобы построить горизонтальные проекции точек  $G$  и  $H$ , следует воспользоваться окружностью  $k$ , содержащей данные точки, так как она не искажается на плоскости проекций  $\Pi_1$ :  $G_1 \in k_1$ .

4. Аналогичным образом определить все остальные точки искомой линии пересечения. Последовательно соединить полученные точки плавной лекальной кривой. В данном случае линия пересечения поверхностей цилиндра и конуса представляет собой две кривые второго порядка  $u(u_1, u_2)$  и  $u'(u'_1, u'_2)$  (рис. 9.12).

Горизонтальная проекция линии пересечения поверхностей симметрична относительно плоскости  $\delta(\delta_1)$  – общей плоскости симметрии данных поверхностей. Эта плоскость была указана ранее (см. рис. 9.8).



**Рис. 9.11. Определение промежуточных точек линии пересечения поверхностей**

5. Определить видимость линии пересечения поверхностей и их очерковых образующих. На фронтальной плоскости проекций видимы будут те точки линии пересечения, которые лежат перед горизонтальной проекцией очерковых образующих, проекции которых совпадают с плоскостью симметрии  $\delta(\delta_1)$ , – точки  $A, M, G, E, D$  и  $B, K, P, C$ . На горизонтальной плоскости проекций линия  $u(u_1, u_2)$  видима, так как все ее точки лежат выше фронтальной проекции оси вращения цилиндра  $q(q_2)$ , а линия  $u'(u'_1, u'_2)$  будет невидима, поскольку все ее точки лежат ниже фронтальной проекции образующих, совпадающих с проекцией оси вращения цилиндра  $q(q_2)$ .

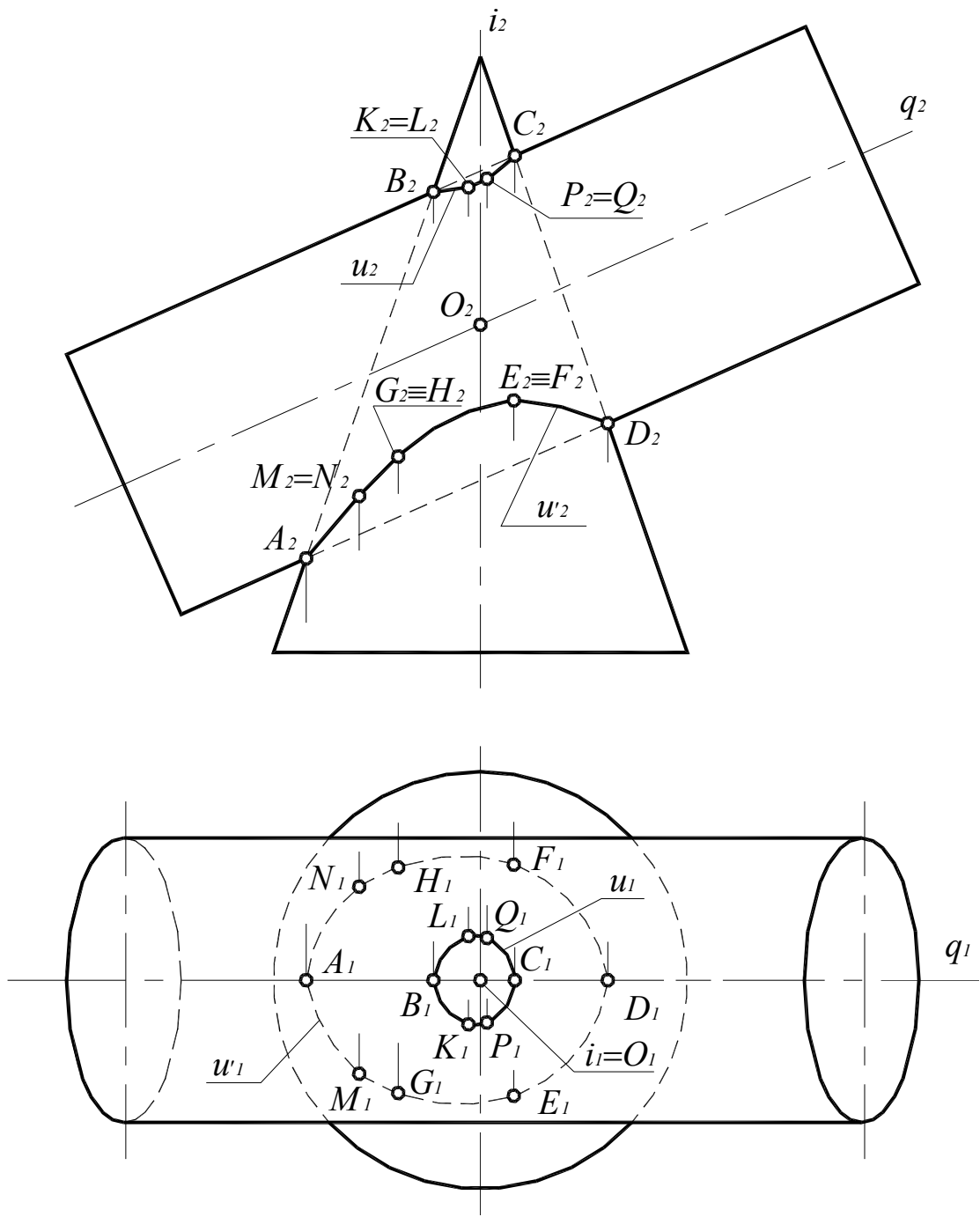


Рис. 9.12. Линия пересечения поверхностей цилиндра и конуса

## 10. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Задачи, в которых определяются различные геометрические величины – расстояния между объектами, длины отрезков, углы, площади и т.д. называются *метрическими*. Решение многих метрических задач, например задач на определение кратчайших расстояний, требует построения перпендикулярных прямых и плоскостей.

Перпендикулярность является частным случаем пересечения прямых, прямой и плоскости или двух плоскостей. Необходимо установить соотношения, по которым строятся проекции перпендикулярных прямых и плоскостей.

### 10.1. Теорема о проекциях прямого угла

*Прямой угол проецируется на плоскость без искажения, если одна из его сторон параллельна этой плоскости (рис. 10.1).*

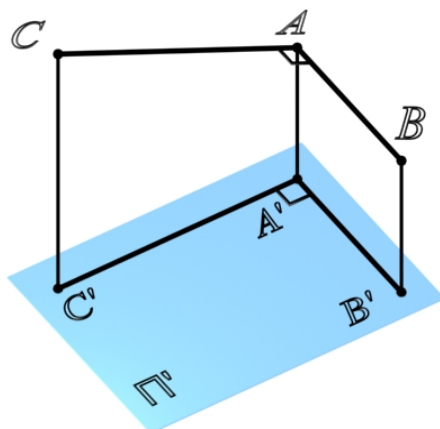


Рис. 10.1. Теорема о проекциях прямого угла

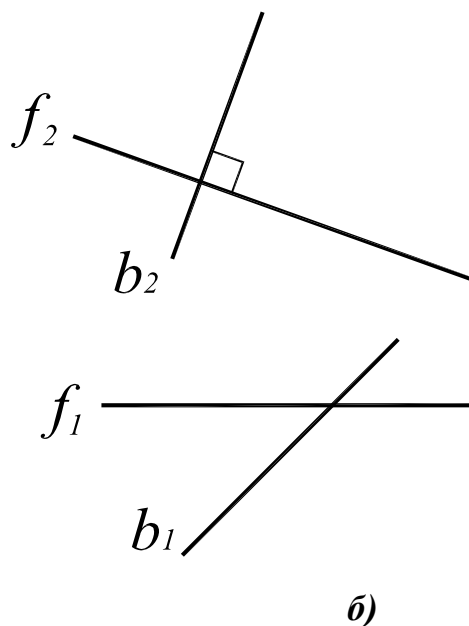
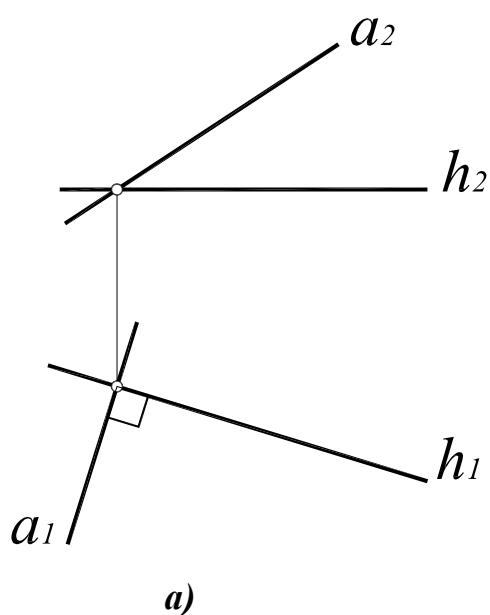
**Дано:**  $\angle BAC = 90^\circ$ ;  $AB \parallel \Pi'$

**Доказать,** что  $C'A' \perp A'B'$

**Доказательство:** если  $AB \parallel \Pi'$ , то  $A'B' \parallel AB$ , но  $AA' \perp \Pi' \Rightarrow AA' \perp A'B'$  значит  $AB \perp AA' \Rightarrow AB \perp$  плоскости  $CAA'C'$ , тогда и  $A'B' \perp CAA'C'$ . Следовательно,  $C'A' \perp A'B'$ .

На основании этой теоремы две взаимно перпендикулярные прямые (пересекающиеся или скрещивающиеся) проецируются на  $\Pi_1$  в виде взаимно перпендикулярных прямых, если одна из них горизонталь, на  $\Pi_2$  – если одна из них фронталь (рис. 10.2,а).

Условие перпендикулярности скрещивающихся прямых (рис. 10.2,б) сводятся к условиям перпендикулярности пересекающихся прямых, проведенных через произвольную точку и соответственно параллельных скрещивающимся прямым. Таким образом, понятие перпендикулярности можно отнести как к пересекающимся, так и к скрещивающимся прямым.



**Рис. 10.2. Перпендикулярные прямые:**

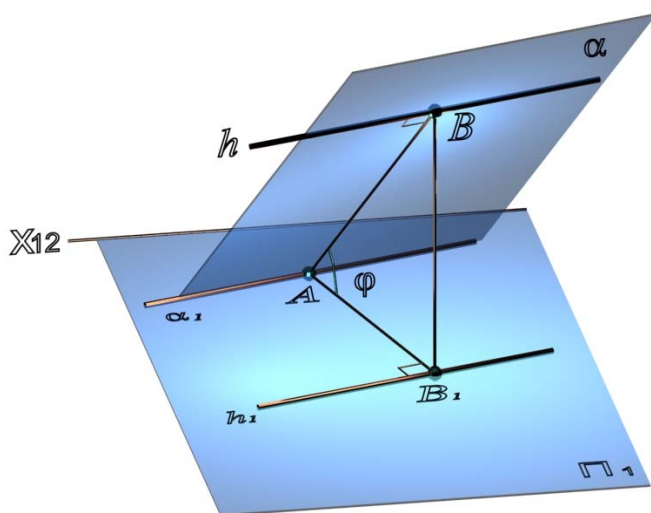
$a$  – пересекающиеся  $a_1 \perp h_1 \Rightarrow a \perp h$ ;

$b$  – скрещивающиеся  $b_2 \perp f_2 \Rightarrow b \perp f$

## 10.2. Линии наибольшего наклона плоскости

Прямые, лежащие в плоскости и перпендикулярные линиям уровня этой плоскости, называются *линиями наибольшего наклона* к соответствующей плоскости проекций (рис. 10.3). Так, прямая, лежащая в плоскости и перпендикулярная горизонтали плоскости, называется линией наибольшего наклона к горизонтальной плоскости проекций, а прямая, перпендикулярная фронтالي – линией наибольшего наклона к фронтальной плоскости проекций.

Угол между линией наибольшего наклона и ее проекцией на соответствующую плоскость равен углу наклона плоскости к плоскости проекций (см. рис. 9.15).



**Рис. 10.3. Линия наибольшего наклона плоскости  $\alpha$  к  $\Pi_1$ :**

$\alpha$  – плоскость общего положения;

$h \in \alpha$  – горизонталь плоскости  $\alpha$ ;

$AB \perp h$  – линия наибольшего наклона;

$\varphi = \angle AB, AB_1$  – угол наклона плоскости  $\alpha$  к  $\Pi_1$

### 10.3. Перпендикулярность прямой и плоскости

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости. На основании теоремы о проекциях прямого угла можно получить условие перпендикулярности прямой общего положения и плоскости общего положения:

Если прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $\alpha(ABC)$ , то ее горизонтальная проекция перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция – фронтальной проекции фронтали плоскости.

Например, при построении прямой  $a$ , перпендикулярной плоскости  $\alpha(ABC)$  (рис. 10.4,а), в плоскости строятся линии уровня – горизонталь и фронталь, затем через произвольную точку в плоскости, в данном случае точку  $K(h \times f)$ , строится прямая, горизонтальная проекция которой перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали плоскости  $\alpha(ABC)$ , а фронтальная проекция – фронтальной проекции фронтали плоскости.

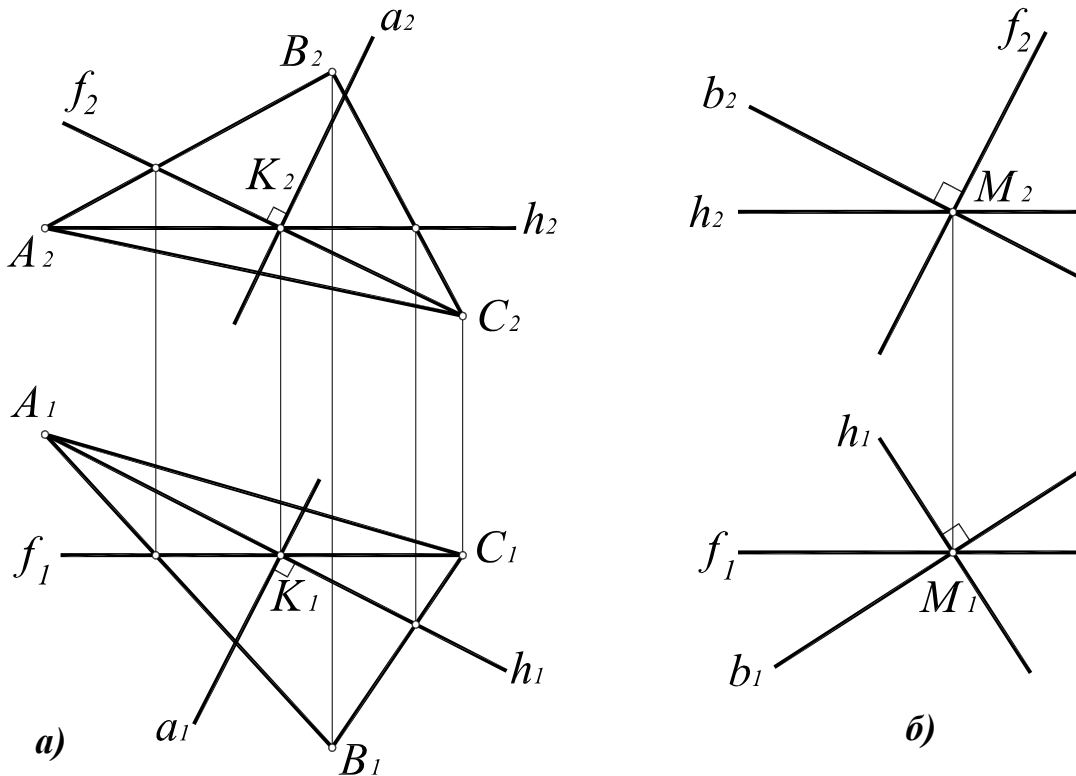


Рис. 10.4. Перпендикулярность прямой и плоскости:

а – построение прямой, перпендикулярной плоскости:

$$\begin{aligned} &\alpha(ABC); \\ &K(h \times f); K \in a; \\ &a \perp \alpha(ABC) \Leftrightarrow a_1 \perp h_1, a_2 \perp f_2; \end{aligned}$$

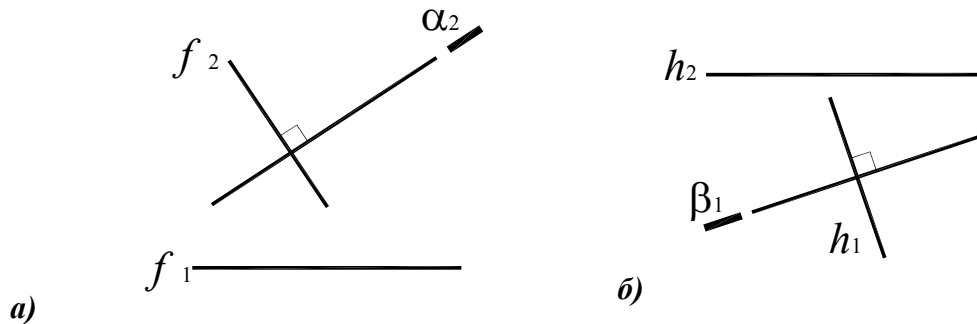
б – построение плоскости, перпендикулярной прямой:

$$\begin{aligned} &b(b_1 \times b_2); M \in b; \\ &h_1 \perp b_1; f_2 \perp b_2; \\ &\delta(f \times h) \end{aligned}$$

Аналогично решается задача о построении плоскости, перпендикулярной прямой общего положения (рис. 10.4,б)

Если плоскость проецирующая, проекции линий уровня совпадают со следом плоскости, перпендикулярность устанавливается по отношению к следу плоскости. Горизонтальная проекция перпендикуляра к горизонтально-проецирующей плоскости строится перпендикулярно горизонтальному следу плоскости (рис. 10.5,а). Прямая, перпендикулярная горизонтально-проецирующей плоскости, занимает положение горизонтальной линии уровня.

Аналогично, фронтальная проекция перпендикуляра к фронтально-проецирующей плоскости строится перпендикулярно фронтальному следу плоскости (рис. 10.5,б). Прямая, перпендикулярная фронтально-проецирующей плоскости, занимает положение фронтали.



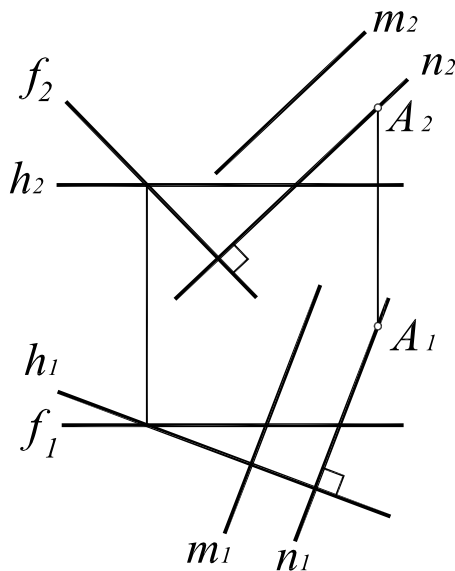
**Рис. 10.5. Перпендикулярность прямой и проецирующей плоскости:**

а – построение прямой, перпендикулярной плоскости;

б – построение плоскости, перпендикулярной прямой

#### 10.4. Взаимная перпендикулярность плоскостей

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой. Таким образом, построение взаимно перпендикулярных плоскостей сводится к построению перпендикулярных прямой и плоскости. Например, чтобы через произвольную точку  $A$  провести плоскость, перпендикулярную плоскости  $\alpha(f \times h)$  (рис. 10.6), достаточно построить прямую  $n$ , перпендикулярную плоскости  $\alpha(f \times h)$ :  $n_1 \perp h_1$ ;  $n_2 \perp f_2$ . Вторая прямая  $m$ , определяющая искомую плоскость, может быть задана произвольно – как пересекающая прямую  $n$  или параллельная ей.



Дано:  $\alpha(h \times f)$ ;  $A(A_1, A_2)$ .

Построить:  $A \in \beta \perp \alpha$ .

Решение:

$A \in n$ ;

$$n \perp \alpha(h \times f) \Leftrightarrow \begin{cases} n_1 \perp h_1 \\ n_2 \perp f_2 \end{cases}$$

$$m_1 \parallel n_1; m_2 \parallel n_2;$$

$$\beta(n \times m) \perp \alpha(f \times h).$$

**Рис. 10.6. Перпендикулярность двух плоскостей**

## 11. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

Способы преобразования комплексного чертежа позволяют переходить от произвольных положений пространственных объектов к частным по отношению к плоскостям проекций, что упрощает решение ряда позиционных и метрических задач.

### 11.1. Способ замены плоскостей проекций

Способ *замены плоскостей проекций* состоит в том, что проецируемый объект остается неподвижным, а одна из плоскостей проекций  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  или  $\Pi_3$  заменяется новой, расположенной так, чтобы проецируемый объект по отношению к новой плоскости занял частное положение. При этом каждая новая плоскость проекций должна быть перпендикулярна незаменяемой плоскости проекций. Кроме того, на новые плоскости проекций объект проецируется ортогонально. Таким образом, при решении задач способом замены плоскостей проекций необходимо выполнять следующие условия:

- каждая новая система должна представлять собой систему двух взаимно перпендикулярных плоскостей;
- на новые плоскости объект проецируется ортогонально;
- расстояние от точки до незаменяемой плоскости сохраняется.

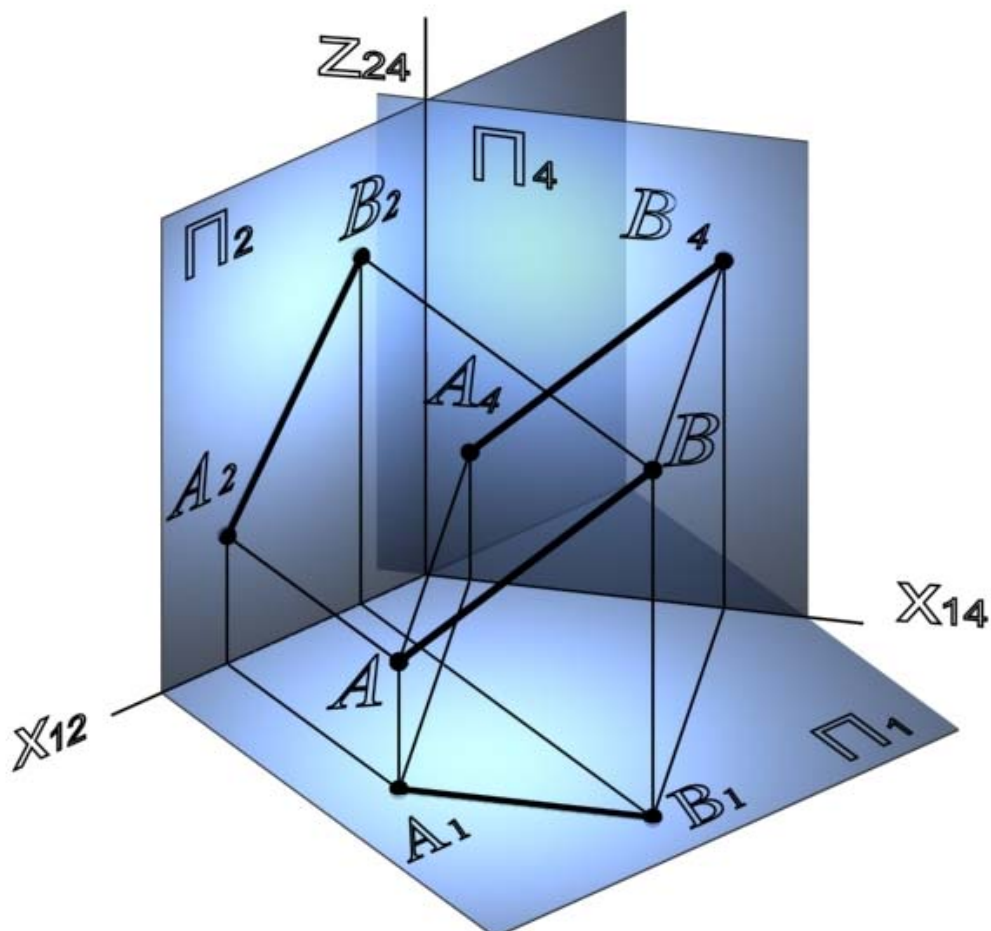


Рис. 11.1. Замена плоскостей проекций

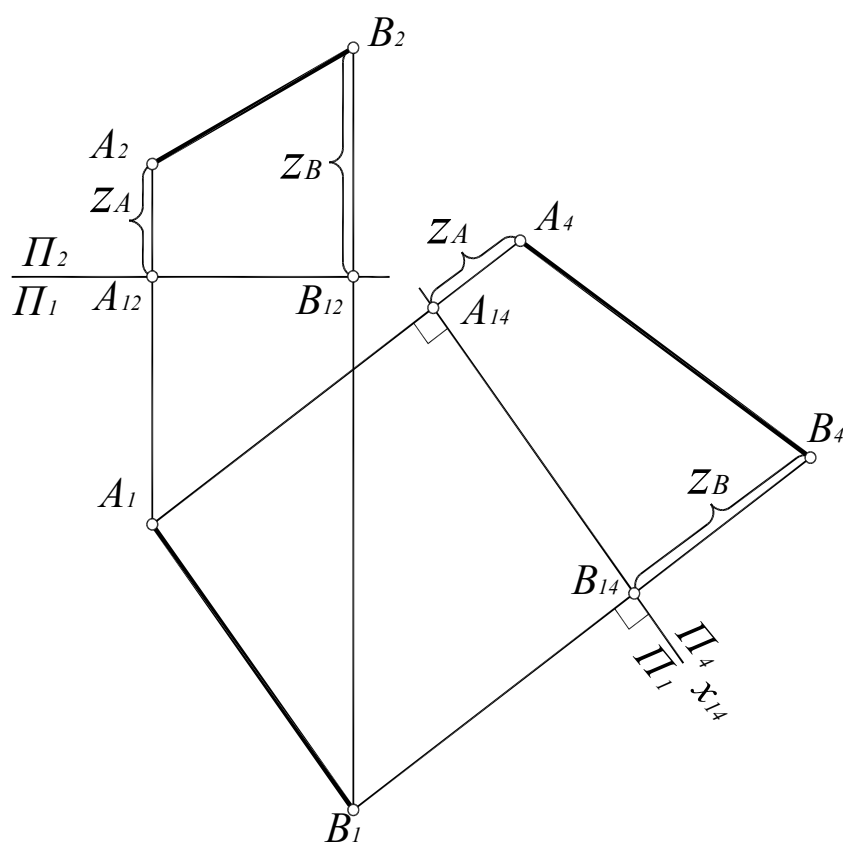


Чтобы определить натуральную величину отрезка  $[AB]$  способом замены плоскостей проекций (рис. 11.1, 11.2), необходимо выбрать новую плоскость проекций таким образом, чтобы в новой системе плоскостей проекций отрезок занял положение линии уровня:

1. Зафиксировать положение системы плоскостей  $\Pi_1/\Pi_2$  с помощью оси  $x_{12} \perp A_1A_2$ .

2. Определить положение плоскости  $\Pi_4$  с помощью оси  $x_{14}$ . Чтобы отрезок в системе плоскостей  $\Pi_1/\Pi_4$  занял положение линии уровня, ось  $x_{14}$  проводится параллельно горизонтальной проекции отрезка  $[A_1B_1]$ .

3. Ортогонально спроецировать отрезок  $[AB]$  на плоскость  $\Pi_4$ . Для этого линии связи проводят перпендикулярно оси  $x_{14}$ , затем от оси  $x_{14}$  откладывают расстояние до незаменяемой плоскости – координаты  $z$  точек  $A$  и  $B$ .



1.  $x_{12} \perp (A_1A_2)$ ;
2.  $x_{14} \parallel [A_1B_1]$ ;
3.  $(A_1A_4) \perp x_{14}$ ;  
 $(B_1B_4) \perp x_{14}$ ;
4.  $(A_2A_{12}) = z_A = (A_{14}A_4)$ ;  
 $(B_2B_{12}) = z_B = (B_{14}B_4)$ ;
5.  $[A_4B_4] = |AB|$

Рис. 11.2. Определение натуральной величины отрезка способом замены плоскостей проекций

Чтобы преобразовать плоскость общего положения в проецирующую, новую плоскость проекций строят перпендикулярно линии уровня этой плоскости.

Рассмотрим преобразование плоскости общего положения  $\alpha(ABC)$  во фронтально-проецирующую плоскость (рис. 11.3). Для решения этой задачи способом замены плоскостей проекций необходимо выполнить замену плоскости  $\Pi_2$  на  $\Pi_4$ :

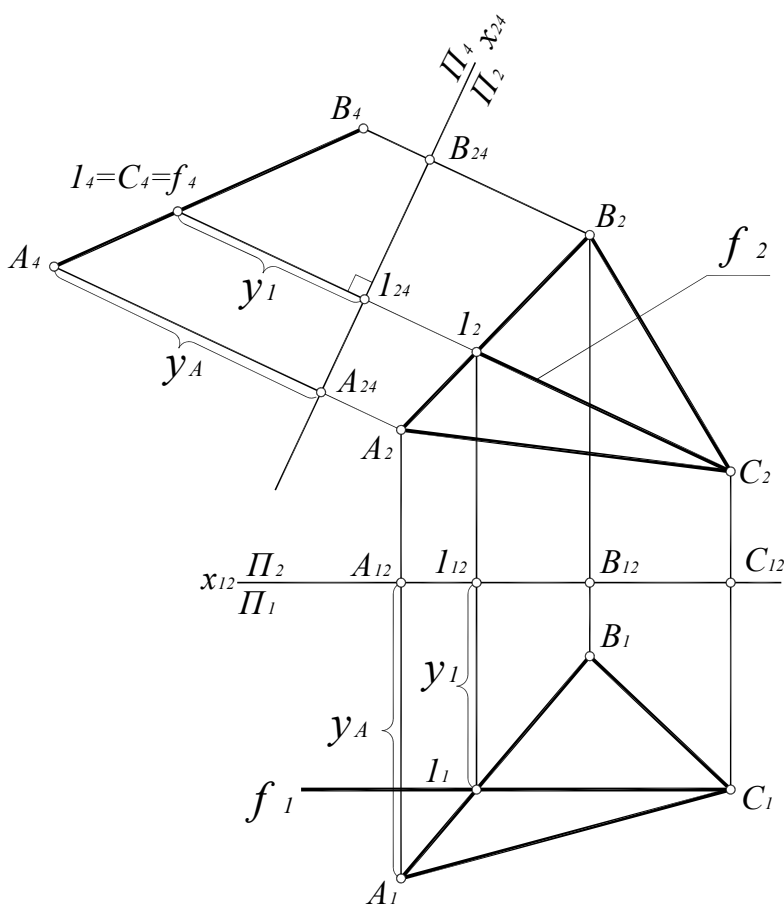
1. Зафиксировать положение системы плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_2$  с помощью оси  $x_{12} \perp A_1A_2$ ;

2. Построить в плоскости  $\alpha(ABC)$  фронталь;

3. В соответствии с теоремой о проекциях прямого угла, построить новую ось  $x_{24} \perp f_1(C_2 I_2)$ ;

4. Ортогонально спроецировать фронталь на плоскость  $\Pi_4$ . Для этого провести линию связи  $(I_2, I_4)$  перпендикулярно  $x_{24}$  и отложить от оси  $x_{24}$  расстояние до незаменяемой плоскости – координату  $y$  точек  $I$  и  $C$ . Поскольку  $y_I = y_C$ , фронталь в системе плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_4$  займет положение горизонтально-проецирующей прямой.

5. Проекция плоскости  $\alpha(ABC)$  на  $\Pi_4$  определится фронталью и точкой  $A$ . В системе плоскостей проекций  $\Pi_2/\Pi_4$  плоскость  $\alpha(ABC)$  займет горизонтально-проецирующее положение. Проекцию точки  $B$  можно построить по координате  $y_B$  или на пересечении следа плоскости  $\alpha(ABC)$  на  $\Pi_4$  с линией связи  $(B_2, B_4)$ .



1.  $x_{12} \perp (A_1A_2)$ ;
2.  $f \in \alpha(ABC)$
3.  $x_{24} \perp f_2$ ;
4.  $(I_2 I_4) \perp x_{24}$ ;  
 $(A_2 A_4) \perp x_{24}$ ;
5.  $(I_1 I_{12}) = y_I = (I_{24} I_4)$ ;  
 $(A_1 A_{12}) = y_A = (A_{24} A_4)$ ;
6.  $\alpha(ABC) \perp \Pi_4$

Рис. 11.3. Преобразование плоскости  $\alpha(ABC)$  в проецирующее положение

При решении некоторых задач необходимо определить натуральную величину плоских объектов. Любой плоский объект проецируется без искажения на параллельную ему плоскость.

Чтобы определить натуральную величину грани призмы способом замены плоскостей проекций, необходимо (рис. 11.4):

1. Зафиксировать положение системы плоскостей  $\Pi_1/\Pi_2$  с помощью оси

$$x_{12}=A_2D_2K_2;$$

2. Плоскость грани  $ABCD$  занимает горизонтально-проецирующее положение, поэтому выполняется замена плоскости  $\Pi_2$  на плоскость  $\Pi_4$ , параллельную грани  $ABCD$ . Новую ось  $x_{14}$  проводят параллельно  $A_1B_1C_1D_1$ .

3. Ортогонально спроецировать все вершины призмы на плоскость  $\Pi_4$ . Для этого проводят линии связи перпендикулярно оси  $x_{14}$ , затем от оси  $x_{14}$  откладывают расстояние до незаменяемой плоскости – координаты  $z$  вершин призмы. Координаты  $z$  вершин нижнего основания  $A, D$  и  $K$  равны нулю, следовательно, точки  $A_4, D_4,$  и  $K_4$  лежат на оси  $x_{14}$ . Координаты  $z$  вершин верхнего основания равны  $(A_2B_2)$ .

4. В системе плоскостей  $\Pi_1/\Pi_4$  грань  $ABCD$  занимает положение фронтальной плоскости уровня, следовательно, проецируется на  $\Pi_4$  в натуральную величину.

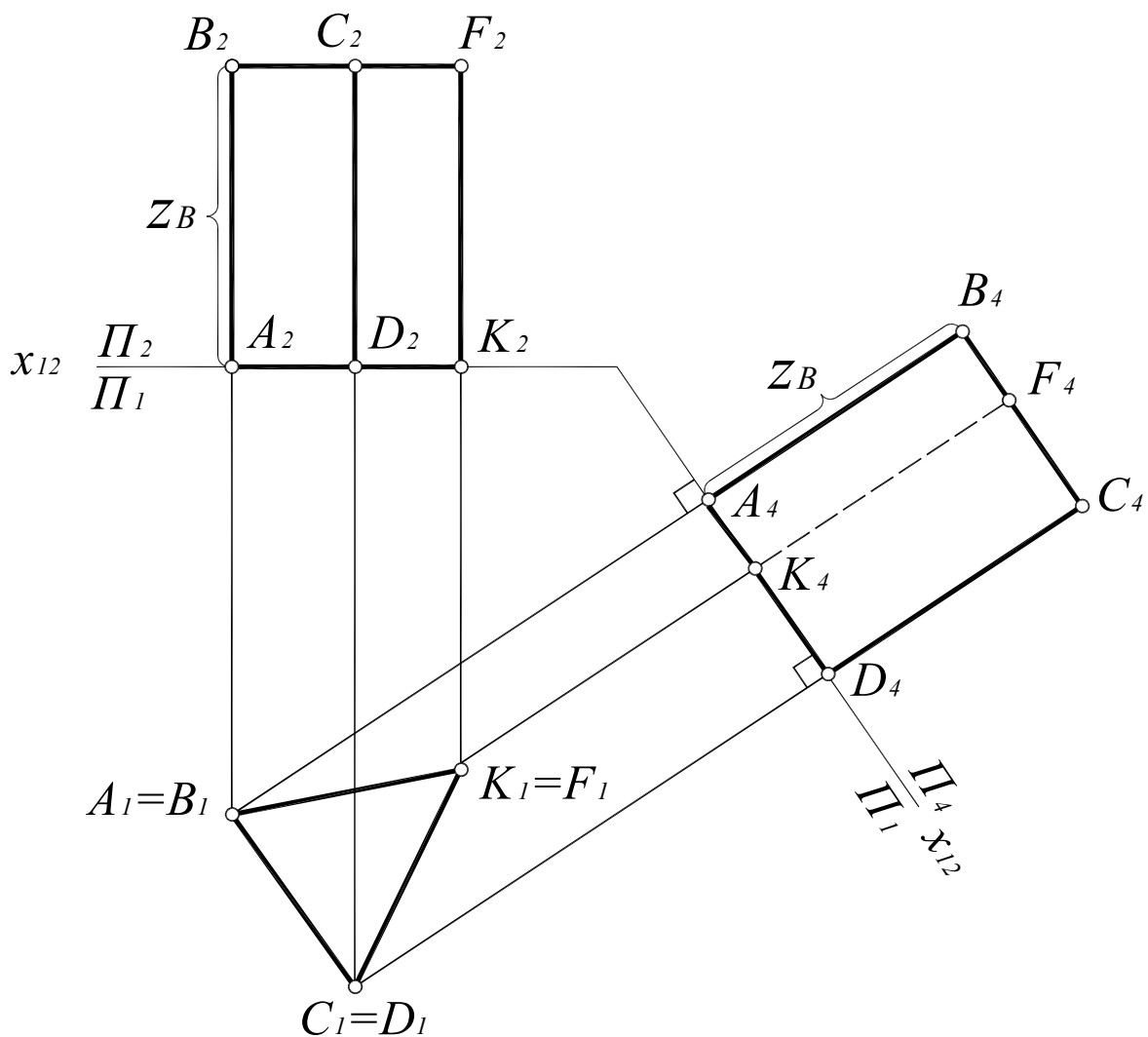


Рис. 11.4. Преобразование грани  $ABCD$  в положение плоскости уровня

## 11.2. Способ плоскопараллельного движения

В отличие от способа замены плоскостей проекций, когда данный объект оставался неподвижным, а плоскости проекций изменялись, можно добиться того же результата обратным путем. Оставив плоскости проекций неподвижными, можно перемещать объект в пространстве как неразрывную систему до желаемого положения.

Такое перемещение объекта в пространстве можно выполнить с помощью *плоскопараллельного движения*.

Плоскопараллельным движением объекта в пространстве называется такое его перемещение, при котором все точки объекта перемещаются в плоскостях, параллельных между собой.

При этом совершенно безразличен вид траектории перемещения точек объекта от исходного до частного положения. Простым примером плоскопараллельного движения является вращение объекта вокруг проецирующей оси. При этом точки описывают окружности в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения и, следовательно, параллельных между собой.

При решении задач чаще всего применяют плоскопараллельное движение относительно одной из плоскостей проекций. При этом все точки объекта перемещаются в плоскостях уровня, то есть в плоскостях, параллельных плоскостям проекций. Отсюда следует, что при плоскопараллельном движении относительно плоскости проекций  $\Pi_1$  все точки объекта перемещаются в горизонтальных плоскостях уровня, а при плоскопараллельном движении относительно  $\Pi_2$  – во фронтальных плоскостях уровня (рис. 11.5).

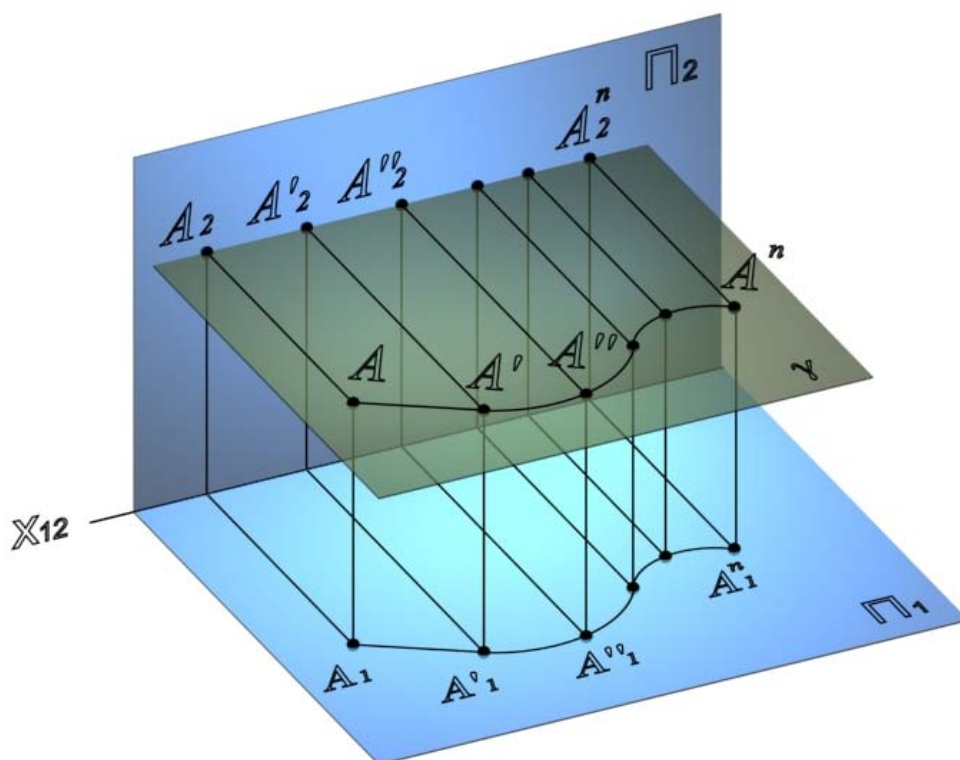


Рис. 11.5. Плоскопараллельное движение точки  $A$  относительно горизонтальной плоскости проекций

**Теорема.** Если объект совершает плоскопараллельное движение относительно плоскости проекций  $\Pi_1$ , то фронтальные проекции его точек будут двигаться по прямым, перпендикулярным к линиям связи; при этом горизонтальная проекция объекта движется по плоскости проекций, оставаясь равной самой себе.

Применяя плоскопараллельное перемещение относительно плоскости проекций  $\Pi_1$  как способ преобразования комплексного чертежа, на основании этой теоремы поступают следующим образом:

1. Горизонтальную проекцию данного геометрического объекта вычерчивают без изменения, располагая ее на чертеже так, как требуется для решения задачи.

2. Фронтальную проекцию определяют по линиям связи на основании новой горизонтальной проекции.

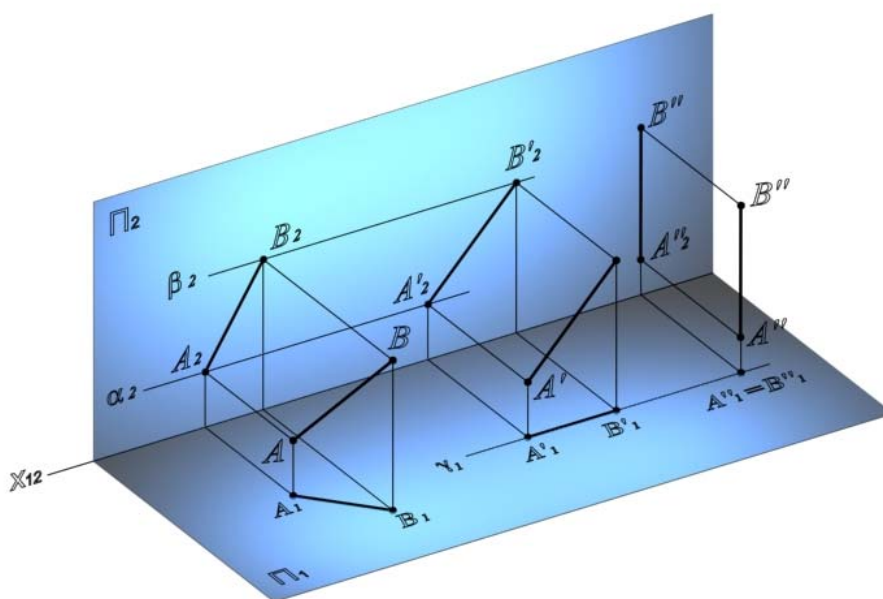
В случае плоскопараллельного перемещения объекта относительно плоскости проекций  $\Pi_2$  горизонтальные проекции точек двигаются по прямым, перпендикулярным к линиям связи, а фронтальная проекция перемещается по плоскости проекций, оставаясь равной самой себе.

Применяя плоскопараллельное перемещение относительно плоскости проекций  $\Pi_2$  как способ преобразования комплексного чертежа, поступают следующим образом:

1. Фронтальную проекцию данного геометрического объекта вычерчивают без изменения, располагая ее на чертеже желательным образом, так, как требуется для решения задачи.

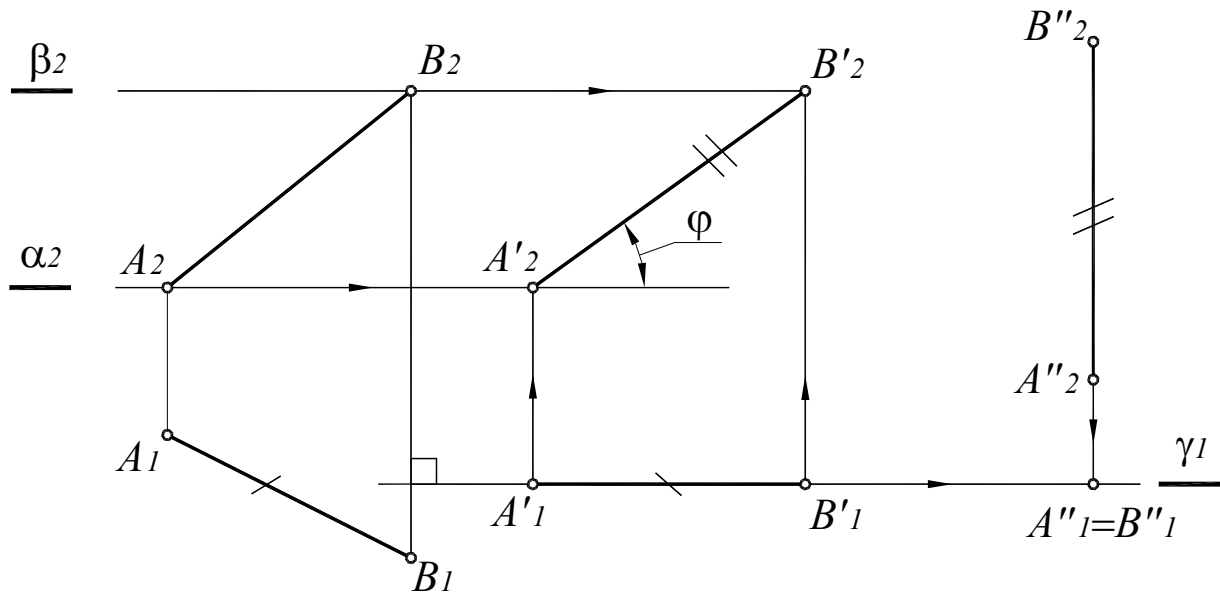
2. Горизонтальную проекцию определяют по линиям связи на основании новой фронтальной проекции.

Рассмотрим преобразование отрезка  $[AB]$  общего положения в положение фронтальной линии уровня, а затем в положение горизонтально–проецирующей прямой способом плоскопараллельного движения (рис. 11.6, 11.7).



**Рис. 11.6.** Плоскопараллельное движение отрезка  $AB$  общего положения

Сначала производится плоскопараллельное движение отрезка  $[AB]$  относительно плоскости проекций  $\Pi_1$ . Для этого новую горизонтальную проекцию отрезка  $[A_1'B_1']=[A_1B_1]$  нужно разместить так, как требуется для решения задачи, а именно  $[A_1'B_1'] \perp (B_1B_2)$ .



**Рис. 11.7. Преобразование отрезка  $AB$  общего положения в положение проецирующей прямой способом плоскопараллельного движения на комплексном чертеже**

Фронтальные проекции точек  $A_2$  и  $B_2$  перемещаются по прямым – следам плоскостей движения точек  $\alpha_2$  и  $\beta_2$ :

$$\alpha_2 \parallel \beta_2 \parallel \Pi_1,$$

и определяются по линиям связи на основании новой горизонтальной проекции отрезка  $[A_1'B_1']$ .

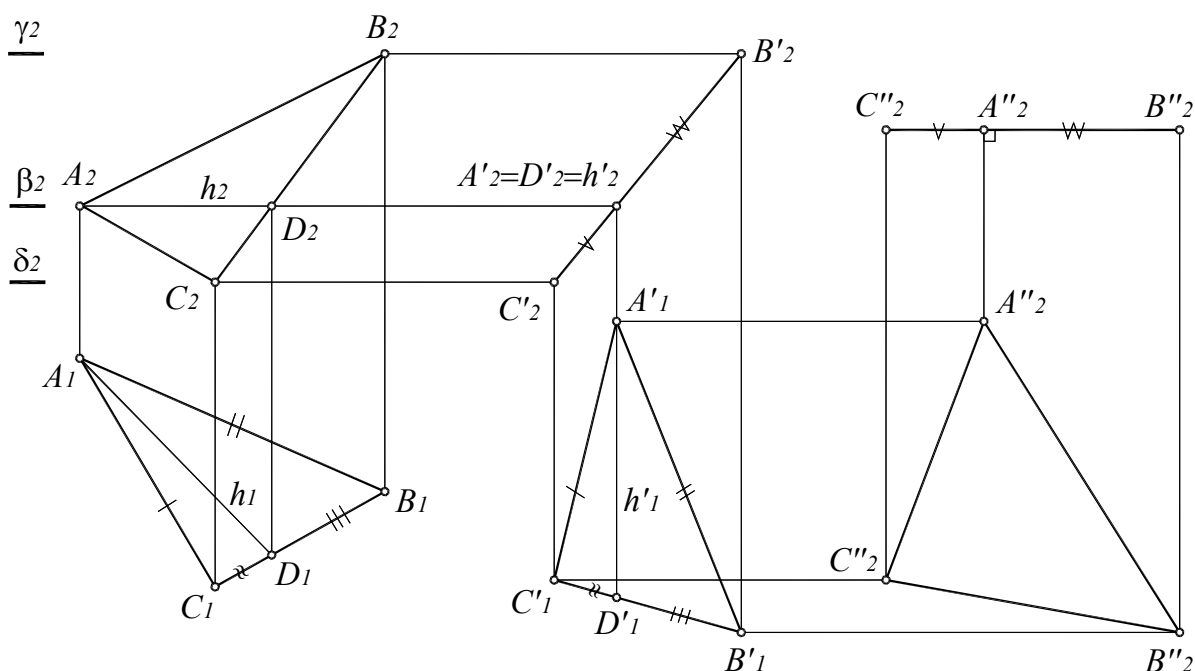
В результате отрезок  $[AB]$  переведен в положение фронтальной линии уровня и определены его натуральная величина  $[A_2'B_2']=|AB|$  и угол наклона  $\varphi$  к горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$ .

Далее производится плоскопараллельное движение отрезка  $AB$  относительно плоскости проекций  $\Pi_2$ . В этом случае фронтальная проекция отрезка располагается так, как требуется для решения задачи, а именно:

$$[A_2''B_2'']=(A_1A_2); [A_2''B_2'']=[A_2'B_2'].$$

Горизонтальная проекция перемещается в плоскости  $\gamma(\gamma_1)$ ,  $\gamma \parallel \Pi_2$  и определяется по линиям связи в соответствии с новой фронтальной проекцией  $[A_2''B_2'']$ . Тогда горизонтальной проекцией отрезка будет точка  $A''_1=B''_1$ , а сам отрезок займет горизонтально-проецирующее положение, что и требовалось в данной задаче.

Рассмотрим определение натуральной величины треугольника  $ABC$  способом плоскопараллельного движения (рис. 11.8).



**Рис. 11.8. Преобразование плоскости  $\alpha(ABC)$  общего положения в плоскость уровня способом плоскопараллельного движения**

Данная задача решается в два этапа: сначала плоскость переводится из общего положения в проецирующее, а затем – в положение плоскости уровня.

Сначала производится плоскопараллельное движение плоскости  $\alpha(ABC)$  относительно плоскости проекций  $\Pi_1$ . Для этого в плоскости  $\alpha(ABC)$  проводится горизонталь  $h(h_1, h_2)$  и строится новая горизонтальная проекция плоскости  $\alpha'(A'B'C')$ , конгруэнтная проекции  $\alpha(ABC)$ , так, чтобы горизонталь  $h'(h'_1, h'_2)$  стала проецирующей прямой, то есть  $h'_1 \perp (A_1A_2)$ . Тогда фронтальные проекции точек  $A_2, B_2, C_2$  будут перемещаться по прямым – следам плоскостей движения точек  $\delta_2, \beta_2$  и  $\gamma_2$ :

$$\delta_2 \parallel \beta_2 \parallel \gamma_2; \quad \beta_2 \perp B_1B_2;$$

и определяются по линиям связи на основании новой горизонтальной проекции плоскости  $\alpha'(A'_1B'_1C'_1)$ . Новая фронтальная проекция плоскости  $\alpha'_2(A'_2B'_2C'_2)$  представляет собой отрезок прямой.

Вторым плоскопараллельным движением, но уже относительно плоскости проекций  $\Pi_2$ , плоскость  $\alpha(ABC)$  преобразуется в горизонтальную плоскость уровня. Для этого строится новая фронтальная проекция плоскости  $\alpha''_2(A''_2B''_2C''_2)$  в виде горизонтального отрезка, для которого  $[C''_2A''_2] = [C'_2A'_2]$  и  $[A''_2B''_2] = [A'_2B'_2]$ . Новая горизонтальная проекция плоскости  $\alpha''_1(A''_1B''_1C''_1)$  определяется по линиям связи на основании новой фронтальной проекции плоскости  $\alpha''_2(A''_2B''_2C''_2)$ .

Полученная горизонтальная проекция плоскости  $\alpha''_1(A''_1B''_1C''_1)$  определяет ее натуральную величину:  $\Delta A''_1B''_1C''_1 = |\Delta ABC|$ .

### 11.3. Вращение

*Вращение* – это движение по окружности вокруг некоторой оси. При преобразовании комплексного чертежа способом вращения плоскости проекций остаются неизменными, а проецируемый объект перемещается таким образом, чтобы он занял какое-либо частное положение.

**Элементы вращения:**

- **Ось вращения** – прямая, вокруг которой осуществляется вращение.
- **Плоскость вращения** – плоскость, проходящая через вращаемую точку и перпендикулярная оси вращения (плоскость окружности, которую описывает точка при вращении).
- **Центр вращения** – точка пересечения оси вращения и плоскости вращения.
- **Радиус вращения** – кратчайшее расстояние от вращаемой точки до центра (оси) вращения. Радиус всегда перпендикулярен оси вращения.
- **Угол поворота** – угол между начальным и конечным положением радиуса вращения.

При вращении системы точек вокруг одной оси все точки вращаются в плоскостях, параллельных между собой, поворачиваются на один и тот же угол в одном и том же направлении, поэтому вращение является частным случаем плоскопараллельного перемещения. Точки, находящиеся на оси вращения остаются неподвижными.

#### ***Вращение вокруг проецирующей прямой***

При вращении точки вокруг оси, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций, ее фронтальная проекция перемещается перпендикулярно линиям связи, а горизонтальная – по окружности, центром которой является горизонтальная проекция оси вращения.

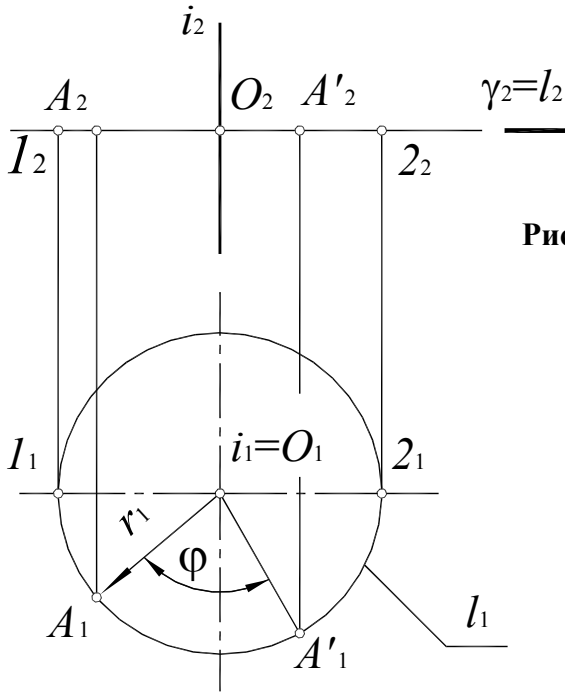
При вращении точки вокруг оси, перпендикулярной фронтальной плоскости проекций, ее горизонтальная проекция перемещается перпендикулярно линиям связи, а фронтальная – по окружности, центром которой является фронтальная проекция оси вращения (рис. 11.9).

Рассмотрим вращение точки  $A(A_1, A_2)$  вокруг горизонтально-проецирующей прямой  $i(i_1, i_1)$ .

При вращении точка описывает окружность, плоскость которой  $\gamma(\gamma_2)$  перпендикулярна оси  $i(i_1, i_1)$ . Поскольку  $i \perp \Pi_1$  а  $\gamma(\gamma_2) \perp i$ ,  $\gamma(\gamma_2) \parallel \Pi_1$  и угол поворота  $\varphi$  проецируется на  $\Pi_1$  в натуральную величину.

Таким образом, при вращении вокруг горизонтально-проецирующей прямой  $i(i_1, i_2) A_1$  перемещается по окружности  $l_1$  с центром в точке  $O_1$  и радиусом  $r=r_1=|O_1A_1|$ ,  $A_2$  перемещается по фронтальному следу плоскости  $\gamma_2$  в пределах отрезка  $[l_2, 2_2]$ .

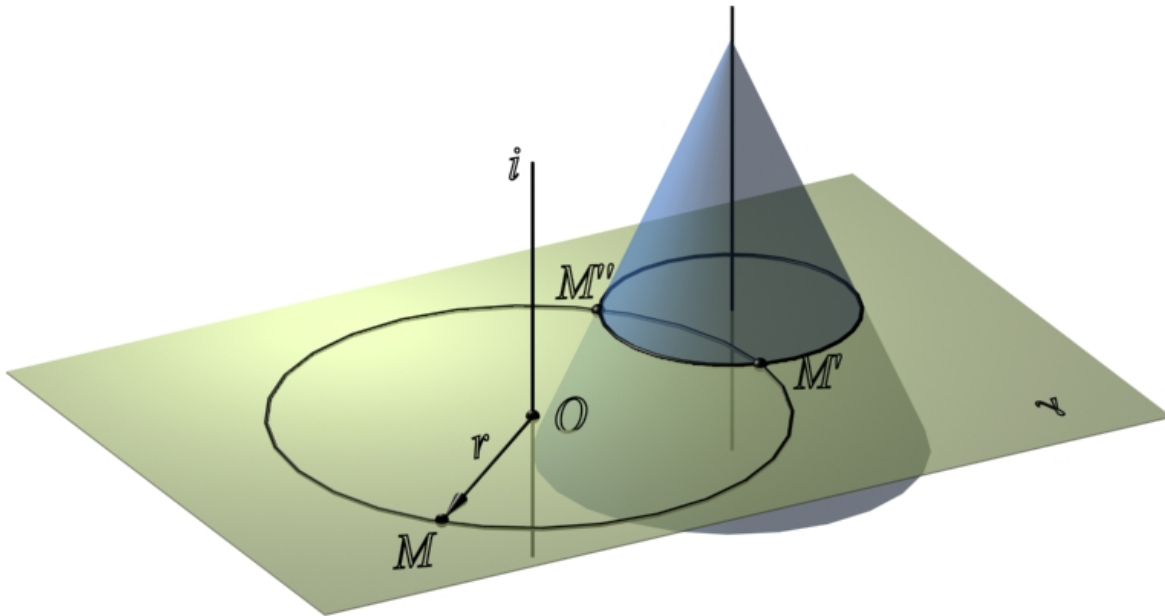




**Рис. 11.9. Вращение точки вокруг горизонтально-проецирующей прямой:**

- $i(i_1i_2) \perp \Pi_1$  – ось вращения;
- $\gamma(\gamma_2) \perp i(i_1i_2)$  – плоскость вращения;
- $O = \gamma(\gamma_2) \times i(i_1i_2)$  – центр вращения;
- $r = r_1 = |O_1A_1|$  – радиус вращения;
- $l$  – траектория перемещения точки  $A$ ;
- $\varphi$  – угол поворота точки  $A$

Способом вращения вокруг проецирующей прямой можно совместить точку с плоскостью или поверхностью. Рассмотрим совмещение точки  $M$  с поверхностью прямого кругового конуса, поставленного основанием на плоскость  $\Pi_1$  (рис. 11.10).



**Рис. 11.10. Совмещение точки с поверхностью конуса**

Точка  $M$ , вращаясь вокруг горизонтально-проецирующей оси  $i(i_1i_2)$ , описывает окружность  $l$ , лежащую в горизонтальной плоскости уровня  $\gamma(\gamma_2)$  (рис. 11.11). Точка  $M$  должна также принадлежать поверхности конуса, следовательно, необходимо определить линию пересечения  $n$  поверхности конуса с плоскостью вращения  $\gamma(\gamma_2)$ .

Затем определяются точки пересечения полученной линии  $n$  и окружности  $l$  – траектории перемещения точки  $M$ . Полученные точки  $M'$  и  $M''$  являются точками совмещения точки  $M$  с поверхностью конуса.

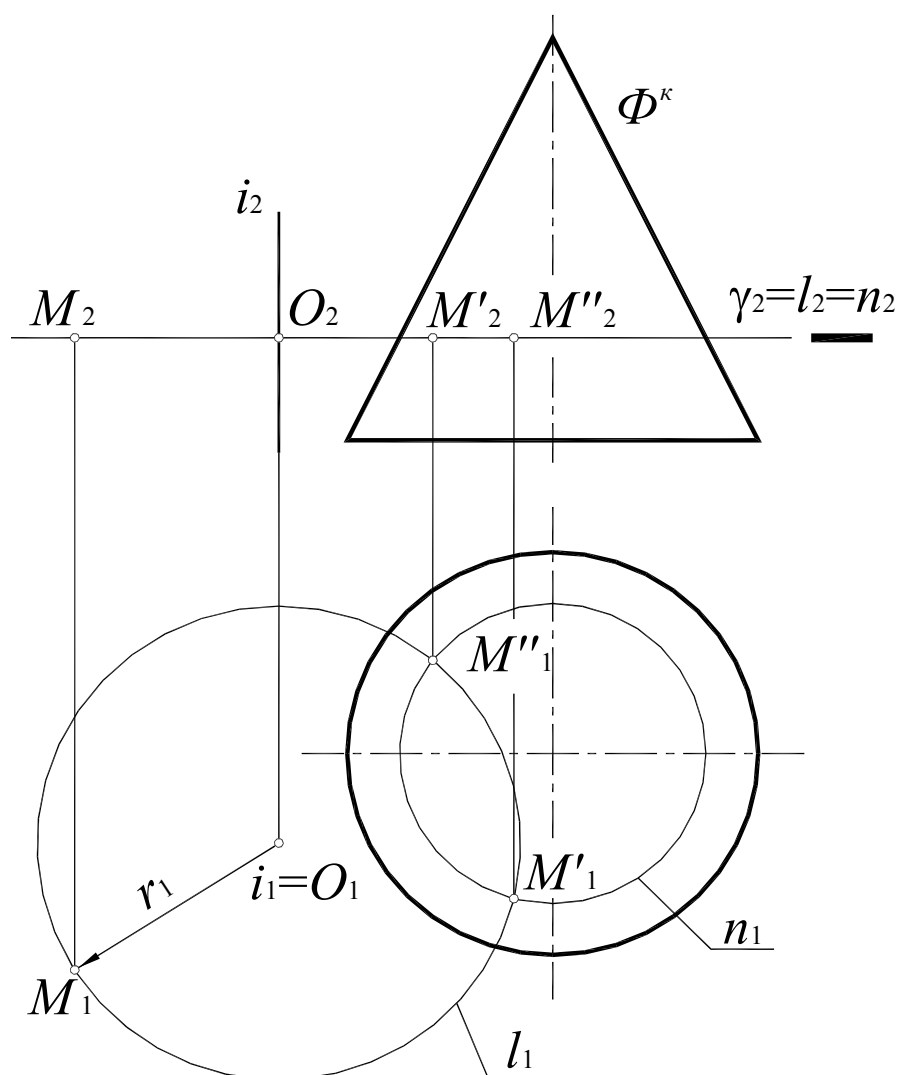


Рис. 11.11. Совмещение точки с поверхностью конуса на комплексном чертеже

**Дано:**  $\Phi^{\kappa}$  – поверхность конуса,

$M(M_1M_2)$ ,

$i(i_1i_2) \perp \Pi_1$ .

**Совместить**  $M(M_1M_2)$  с  $\Phi^{\kappa}$ .

**Решение:**

1.  $M(M_1M_2) \in \gamma(\gamma_2) \perp i(i_1i_2)$ ;

$O_2 = \gamma_2 \times i_2$ ;  $O_1 = i_1$ ;  $r = |O_1M_1|$ ;  $l_1$  – окружность радиуса  $r_1$ ;  $l_2 = \gamma_2$ ;

2.  $n = \Phi^{\kappa} \cap \gamma(\gamma_2)$ ;

3.  $l \times n = M', M''$  – точки совмещения  $M(M_1, M_2)$  с поверхностью конуса

$\Phi^{\kappa}$ .

## 12. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

При выполнении технических чертежей наряду с изображением предметов в прямоугольных проекциях часто строят и их аксонометрические изображения. Аксонометрия – греческое слово, составленное из двух слов: *аксон* – ось и *метрео* – измеряю, что означает измерение по осям.

При построении прямоугольных проекций проецируемый предмет располагают относительно плоскостей проекций так, чтобы направления основных его измерений (длины, высоты и ширины) были параллельны осям проекций. В результате на каждой плоскости проекций изображаются в натуральную величину два измерения, а третье вырождается в точку. Полученные изображения удобны для нанесения на чертеже размеров, но мало наглядны.

Если предмет расположить в пространстве так, чтобы ни одно из его измерений не было параллельно какой-либо оси проекций, то при параллельном проецировании на некоторую плоскость все три измерения предмета спроецируются на нее с некоторым искажением. Полученное изображение будет не слишком удобным для нанесения размеров, но весьма наглядным.

Сущность рассматриваемого метода аксонометрического проецирования и заключается в том, что предмет жестко связанный с осями прямоугольных координат параллельно проецируется на некоторую плоскость – плоскость аксонометрических проекций (рис. 12.1).

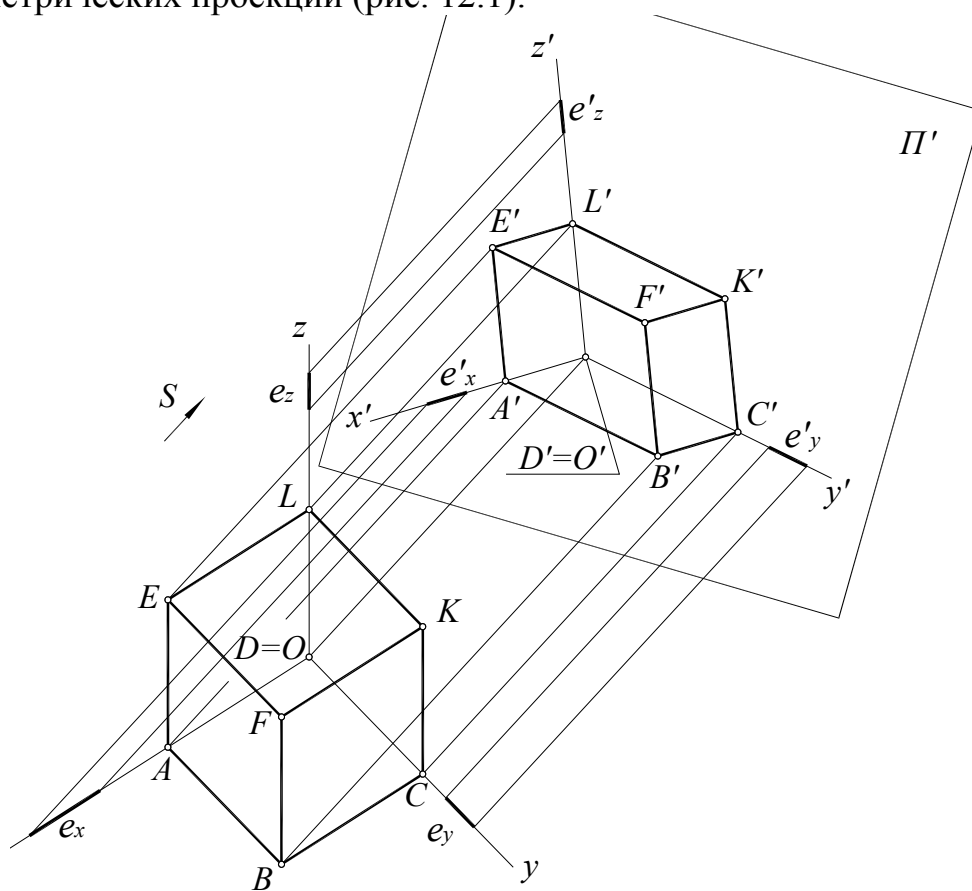


Рис. 12.1. Проецирование предмета и связанных с ним осей координат на плоскость  $\Pi'$

Направление проецирования не должно совпадать ни с одной из координатных осей.

Различным положениям натуральной системы координат по отношению к аксонометрической плоскости проекций и различным направлениям проецирования соответствуют различные положения аксонометрических осей.

Параллелепипед (см. рис. 12.1) связан с прямоугольной системой координат  $OXYZ$  и спроецирован вместе с ней и натуральными масштабными отрезками по направлению  $S$  на плоскость  $\Pi'$ .

$S$  – направление проецирования;

$\Pi'$  – плоскость аксонометрических проекций;

$x, y, z$  – натуральные оси ( $x \perp y \perp z$ );

$ex, ey, ez$  – натуральные масштабные отрезки (единица измерения общая для всех трех координатных осей  $ex=ey=ez$ );

$x', y', z'$  – аксонометрические оси;

$ex', ey', ez'$  – аксонометрические масштабы.

$A'$  – аксонометрическая проекция точки  $A$ ,  $A'B'$  – прямой  $AB$ .

Натуральным масштабным отрезкам  $ex, ey, ez$  соответствуют аксонометрические масштабные отрезки  $ex', ey', ez'$ .

В общем случае прямоугольная система координат  $Oxyz$  наклонена под произвольным углом к аксонометрической плоскости проекций. При этом натуральные масштабные отрезки спроецируются на картинную плоскость с различными искажениями.

Показателем искажения называют отношение аксонометрического масштаба к соответствующему натуральному:

по оси  $x$ :  $u=ex'/ex$ ;

по оси  $y$ :  $v=ey'/ey$ ;

по оси  $z$ :  $w=ez'/ez$ .

### 13.1. Виды аксонометрических проекций

В зависимости от соотношения показателей искажения различают три вида аксонометрических проекций:

1. Изометрия - все три показателя искажения равны между собой:

$$u=v=w;$$

2. Диметрия - два показателя искажения одинаковы:

$$u=w \neq v;$$

3. Триметрия - все три показателя искажения различны:

$$u \neq w \neq v.$$

В зависимости от направления проецирования аксонометрические проекции разделяются на прямоугольные и косоугольные.

Если направление проецирования  $S$  перпендикулярно  $\Pi'$ , то такая проекция называется прямоугольной или ортогональной аксонометрической проекцией, в остальных случаях – косоугольной аксонометрической проекцией.

## 12.2. Прямоугольные (ортогональные) аксонометрические проекции

Наибольшее распространение в технической практике получили именно ортогональные аксонометрические проекции.

Треугольник  $X'Y'Z'$ , по которому плоскость аксонометрических проекций пересекает координатные плоскости натуральной системы координат, называется треугольником следов (рис. 12.2).

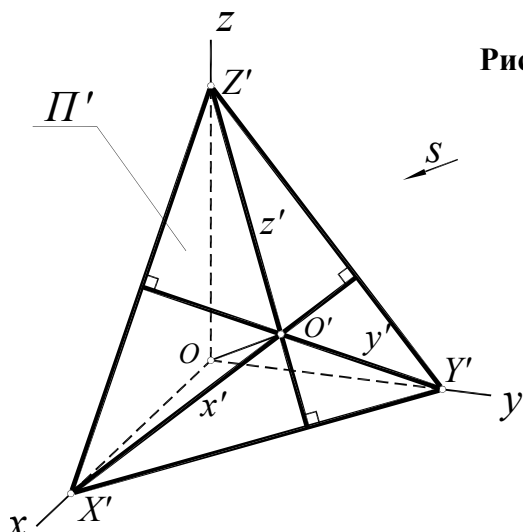


Рис. 12.2. Треугольник следов:

$\Pi'$  – аксонометрическая плоскость проекций;  
 $Ox, Oy, Oz$  – натуральные координатные оси;  
 $S \perp \Pi'$  – направление проецирования,  $OO' \parallel S$ ;  
 $X'Y'Z'$  – треугольник следов;  
 $O'x', O'y', O'z'$  – аксонометрические оси

В ортогональной аксонометрии треугольник следов всегда остроугольный, а аксонометрические оси являются его высотами.

Показатели искажения в ортогональной аксонометрии связаны соотношением:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2.$$

Показатели искажения в прямоугольной аксонометрии равны косинусам углов наклона натуральных осей к аксонометрической плоскости проекций:

по оси  $x$ :  $u = O'X' / OX' = \cos \alpha$ , где  $\alpha$  – угол наклона оси  $x$  к плоскости  $\Pi'$ ;

по оси  $y$ :  $v = O'Y' / OY' = \cos \beta$ , где  $\beta$  – угол наклона оси  $y$  к плоскости  $\Pi'$ ;

по оси  $z$ :  $w = O'Z' / OZ' = \cos \gamma$ , где  $\gamma$  – угол наклона оси  $z$  к плоскости  $\Pi'$ .

Таким образом, в прямоугольной аксонометрии значения всех трех показателей искажения ограничены крайними значениями от 0 до 1.

## 12.3. Прямоугольная изометрическая и диметрическая проекции

Поскольку в изометрии все три показателя искажения одинаковы, то из соотношения  $u^2 + v^2 + w^2 = 2$  получается, что  $u = v = w = 0.82$ . Треугольник следов в этом случае равносторонний, поэтому аксонометрические оси как высоты равностороннего треугольника образуют углы  $120^\circ$ .

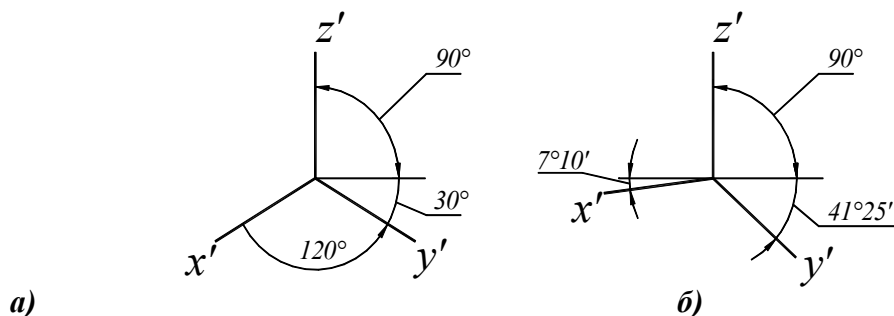
На практике пользуются приведенными показателями: т.е. принимают  $U=V=W=1$ . Построение приведенной изометрии значительно проще, нежели построение точной, так как аксонометрические координаты равны соответствующим натуральным. При использовании приведенных показателей

искажения изображения получаются увеличенными в  $\frac{1}{0,82} = 1,22$  раза.

В прямоугольной диметрии два показателя искажения равны  $u = w$ , а третий принимают равным  $u / 2$ , тогда из соотношения  $u^2 + v^2 + w^2 = 2$  следует, что  $u = w \approx 0,94$ , а  $v \approx 0,47$ . Треугольник следов в этом случае равнобедренный. Если аксонометрическую ось  $O'z'$  расположить на чертеже вертикально, то аксонометрическая ось  $O'x'$  образует с горизонтальной линией угол  $7^\circ 10'$ , а ось  $O'y'$  - угол  $41^\circ 25'$ , тангенсы этих углов равны  $1/8$  и  $1/7$  соответственно.

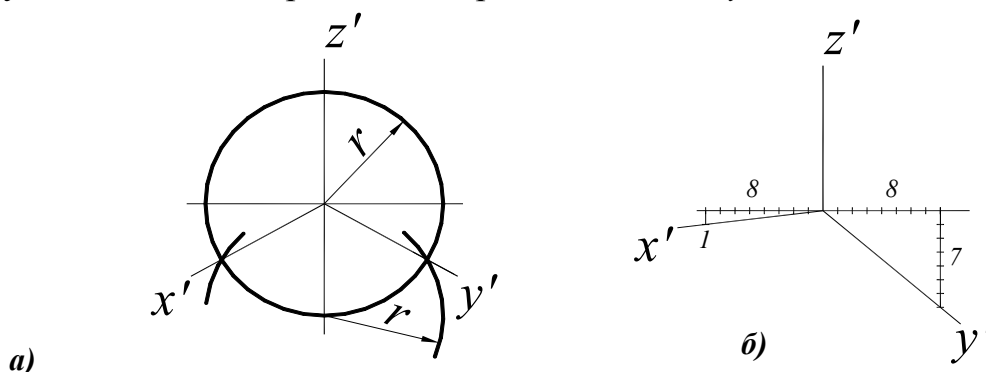
Показатели искажения по аксонометрическим осям  $O'x'$  и  $O'z'$  равны  $U=V=1$ , а  $V=0,5$ . Изображения в этом случае увеличиваются в  $\frac{1}{0,94} = 1,06$ .

На рис. 12.3. углы между аксонометрическими осями показаны на примере треугольников осей в соответствии с ГОСТ 2.317-68. На чертеже аксонометрические оси наносят штрихпунктирной линией в соответствии с ГОСТ 2.303-68. Треугольники осей всегда изображают рядом с соответствующей аксонометрической проекцией.



**Рис. 12.3. Углы между аксонометрическими осями в прямоугольной:**  
*a* – изометрии; *б* – диметрии

Для построения осей прямоугольной изометрии (рис. 12.4,*a*) строят окружность произвольного радиуса  $r$ , затем из нижней точки пересечения ее с вертикальной осью строят дугу того же радиуса. Через центр окружности и полученные точки пересечения проводят оси  $x$  и  $y$ .

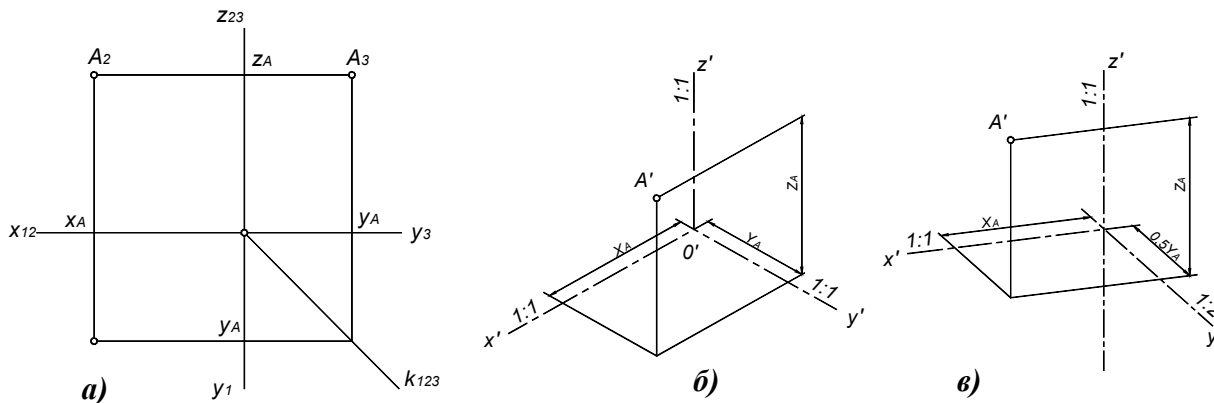


**Рис. 12.4. Построение осей графически:**  
*a* – прямоугольной изометрии; *б* – прямоугольной диметрии

Углы между аксонометрическими осями в прямоугольной диметрии можно построить следующим образом (рис.12.4, *б*): для построения оси  $O'x'$  откладывают от начала координат  $O'$  по линии горизонта восемь отрезков и

на конце последнего отрезка перпендикулярно к нему – один такой отрезок. Для проведения оси  $O'y'$  – по линии горизонта восемь равных отрезков и от конца последнего отрезка перпендикулярно ему семь таких отрезков.

Для построения приведенной аксонометрической проекции точки  $A(X_A, Y_A, Z_A)$  следует отложить координаты  $X_A$ ,  $Y_A$ , и  $Z_A$  в направлении соответствующих аксонометрических осей (рис. 12.5). При построении приведенной диметрии координата  $Y$  делится пополам.



**Рис. 12.5. Построение аксонометрической проекции точки:**

- a* – трехкартинный комплексный чертеж;
- б* – прямоугольная изометрия;
- в* – прямоугольная диметрия

### **Пример построения приведенной прямоугольной изометрической и диметрической проекций пирамиды и точек на ее поверхности**

Данная пирамида связывается с натуральной прямоугольной системой координат  $Oxyz$ , для чего на комплексном чертеже наносятся проекции координатных осей (рис. 12.6).

#### **Построение приведенной прямоугольной изометрии пирамиды:**

1. Построить изометрические оси.

2. Построить изометрические проекции вершин пирамиды: Точка  $A$  лежит на оси  $Ox$ , поэтому для построения ее проекции достаточно отложить натуральную координату  $x_A = O_2A_2 = O_1A_1$  в положительном направлении изометрической оси  $x$ . Для точки  $C$  сначала строят вспомогательную точку  $I$  на оси  $x$ , причем расстояние  $O_1I_1 = O'I'$  откладывается в отрицательном направлении оси  $x$ , затем в положительном направлении оси  $y$  откладывают натуральную координату  $y_C = I_1C_1$ . Остальные вершины строятся аналогично.

3. Соединить построенные вершины и определить видимость ребер пирамиды.

4. Точка  $M$  лежит в грани  $ASB$ , следовательно, принадлежит прямой  $l$ , проходящей через вершину  $S$  и пересекающей ребро основания  $BC$  в точке 2. Для получения изометрической проекции точки  $M$  достаточно построить проекцию прямой  $l'$  и по координате  $z_M$  построить  $M' \in l'$ .

5. Прямоугольная приведенная диметрия строится аналогично, с учетом коэффициента искажения по оси  $y$  0,5.

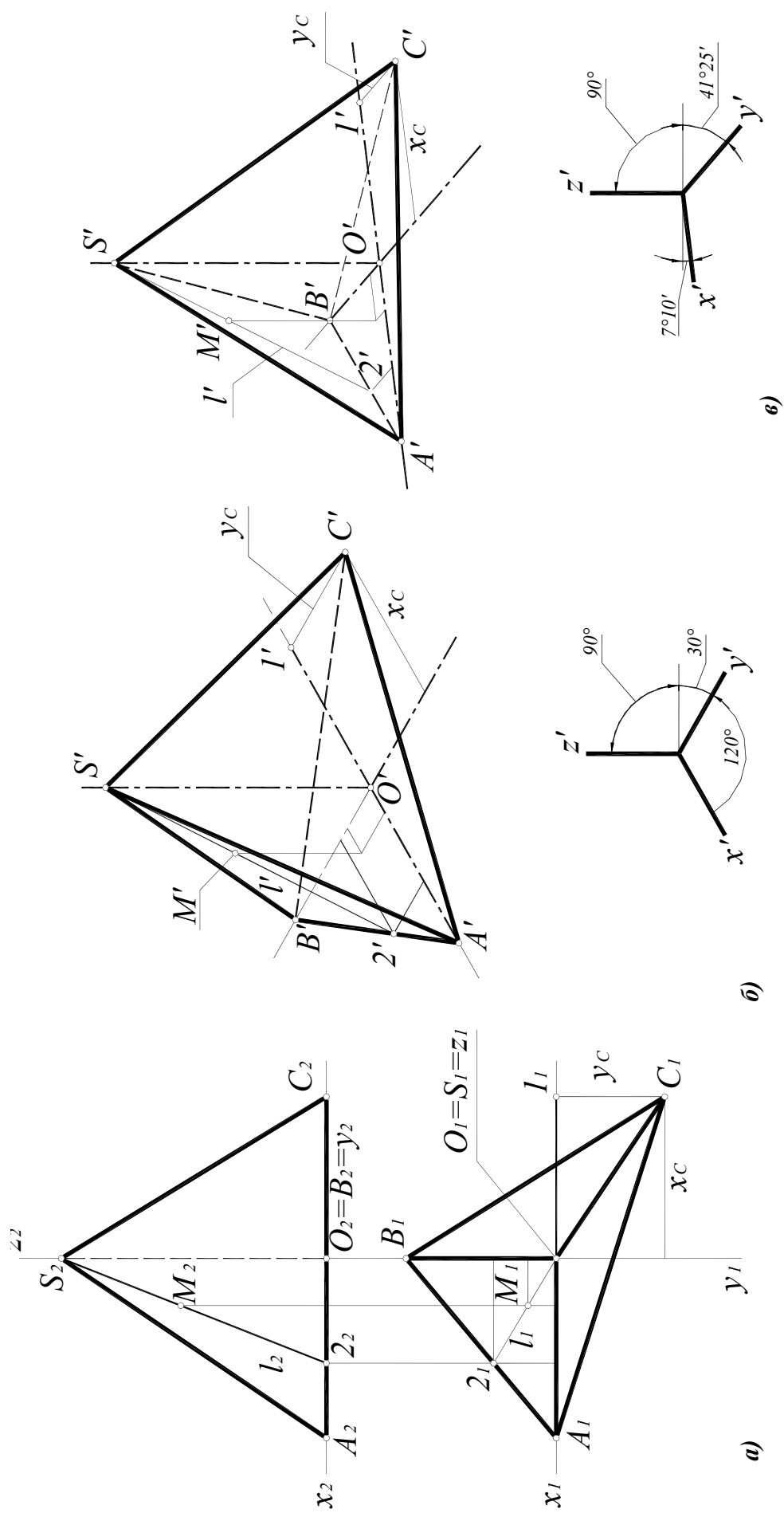


Рис. 12.6. Аксонометрические проекции пирамиды:

а – ортогональный чертеж;

б – прямоугольная изометрия;

в – прямоугольная диметрия

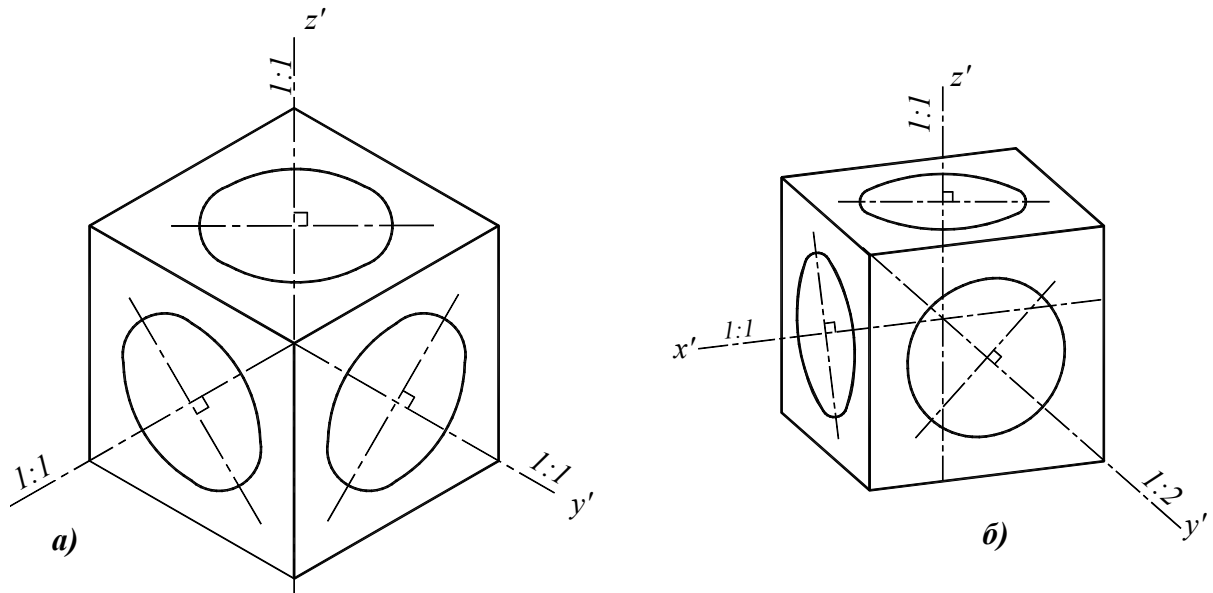


## 12.4. Аксонометрические проекции окружности

В общем случае окружность проецируется на аксонометрическую плоскость проекций в виде эллипса, большая ось (БОЭ) которого, в точной аксонометрии, равна диаметру окружности  $d$ , а малая (МОЭ) –  $d \cos \alpha$ , где  $\alpha$  – угол наклона плоскости окружности к аксонометрической плоскости проекций.

Если окружность лежит в координатной плоскости или параллельна ей, то на аксонометрическом чертеже большая ось эллипса, изображающего окружность, располагается перпендикулярно той аксонометрической оси, которая отсутствует в наименовании плоскости окружности (рис. 12.7).

Например, если окружность расположена в плоскости  $\Pi_1(xOy)$ , в аксонометрии большая ось эллипса перпендикулярна оси  $z$ .



**Рис. 12.7. Схема расположения осей эллипсов:**  
*a* – прямоугольная изометрия;  
*б* – прямоугольная диметрия

Размеры осей эллипсов в прямоугольных приведенных изометрии и диметрии даны в табл.1 ( $d$  – диаметр окружности).

**Таблица 1**

### *Размеры осей эллипсов*

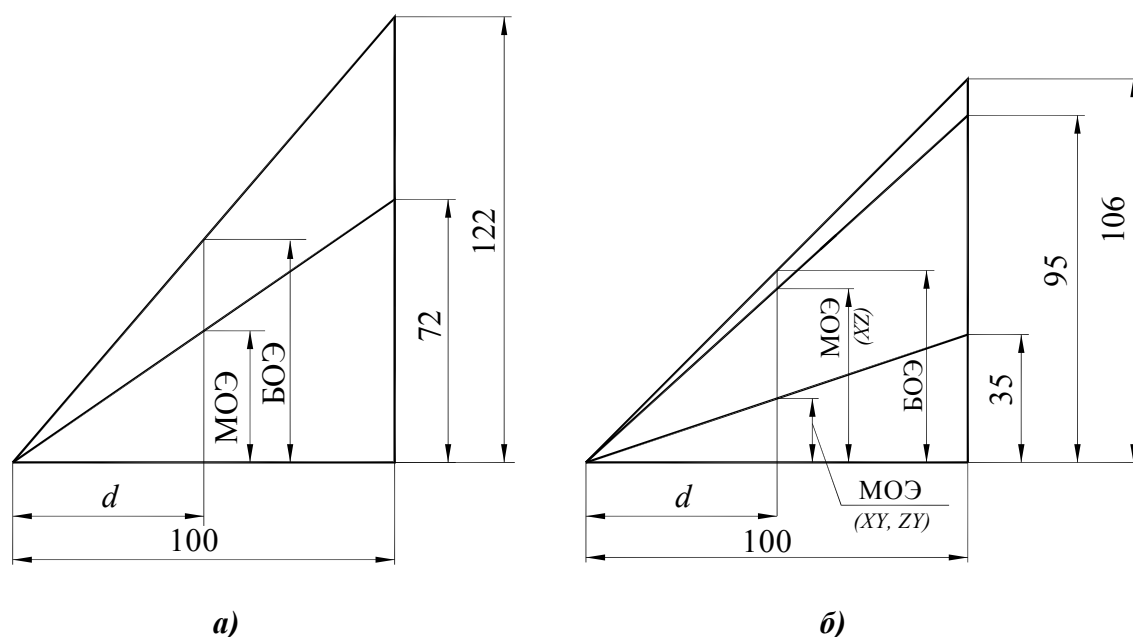
Изометрия		Диметрия			
во всех плоскостях		в плоскостях $xy(\Pi_1)$ и $zy(\Pi_3)$		в плоскости $zx(\Pi_2)$	
БОЭ	МОЭ	БОЭ	МОЭ	БОЭ	МОЭ
$1.22d$	$0.72d$	$1.06d$	$0.35d$	$1.06d$	$0.95d$

Определить размеры осей эллипса можно графически, пользуясь следующими треугольниками:

**Изометрия:** Строятся два прямоугольных треугольника с общим катетом 100мм и катетами 72мм и 122мм (рис. 12.8,*а*). На большем (горизонтальном) катете треугольника откладывается значение диаметра (радиуса) окружности и строится подобный треугольник.

Меньший катет треугольника со сторонами 100 на 122 определяет большую ось эллипса.

Меньший катет треугольника со сторонами 100 на 72 определяет малую ось эллипса.



**Рис. 12.8. Треугольники для определения размеров осей эллипсов:**

*а* – прямоугольная изометрия;

*б* – прямоугольная диметрия

**Диметрия:** Строятся три прямоугольных треугольника с общим катетом 100мм, на котором откладывается значение диаметра (радиуса) окружности (рис. 12.8,*б*).

Меньший катет треугольника со сторонами 100 на 106 определяет большую ось эллипса для всех аксонометрических плоскостей.

Меньший катет треугольника со сторонами 100 на 94 определяет малую ось эллипса для плоскости  $\Pi_2(xOz)$ .

Меньший катет треугольника со сторонами 100 на 35 определяет малую ось эллипса для плоскости  $\Pi_1(xOy)$  и  $\Pi_3(zOy)$ .

### 12.4.1. Построение эллипсов по восьми точкам

Построение эллипса как аксонометрической проекции окружности начинается с определения положения центра и направления большой и малой осей эллипса. Размеры большой и малой осей рассчитывают или определяют графически и откладывают на чертеже  $A'B'$  – большая ось,  $C'D'$  – малая. Затем через центр эллипса проводят вспомогательные прямые в направлении аксонометрических осей. В изометрии в направлении осей откладывается натуральный диаметр окружности  $1-2$  и  $3-4$ . Полученные восемь точек соединяют плавной лекальной кривой. Построение изометрического эллипса по восьми точкам показано на рис. 12.9.

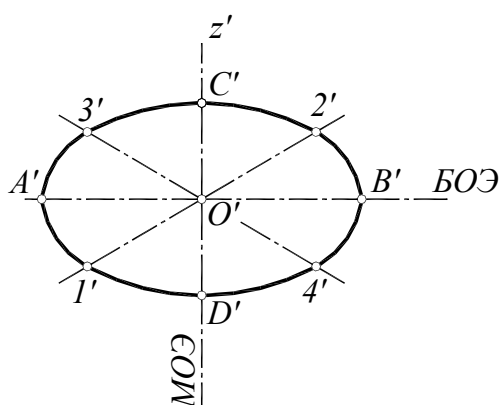


Рис. 12.9. Построение изометрического эллипса по восьми точкам:

- $A'B' = 1,22d$  – большая ось эллипса;
- $C'D' = 0,7d$  – малая ось эллипса;
- $1'-2'$  – размер по оси  $x$ , равный диаметру окружности  $d$ ;
- $3'-4'$  – размер по оси  $y$ , равный диаметру окружности  $d$

При построении диметрических эллипсов учитывается коэффициент искажения 0,5 в направлении оси  $y$ . Построение диметрических эллипсов по восьми точкам показано на рис. 12.10.

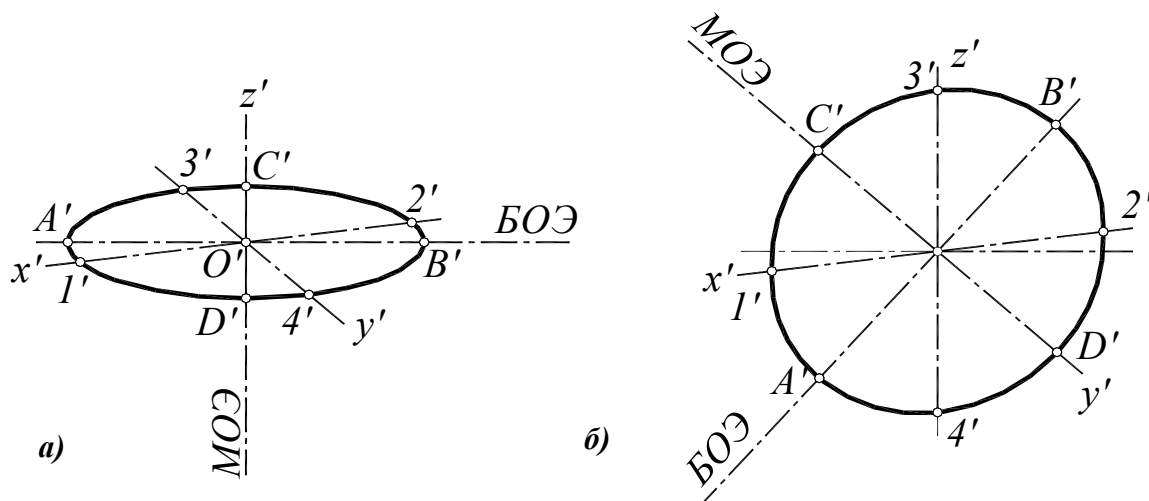
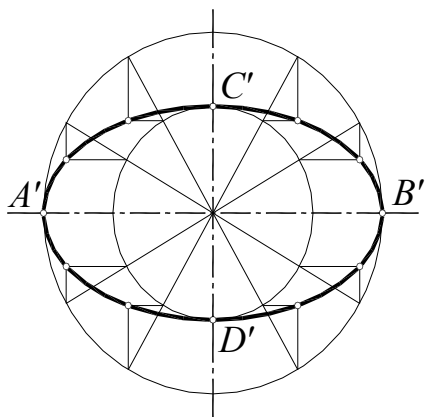


Рис. 12.10. Построение диметрического эллипса по восьми точкам:

- a* – для окружностей в плоскостях  $\Pi_1(xOy)$  и  $\Pi_3(zOy)$ :
- $БОЭ = 1,06d$  – большая ось эллипса;
  - $МОЭ = 0,35d$  – малая ось эллипса;
  - $1'-2' = d$  – размер по оси  $x$ ;
  - $3'-4' = 0,5d$  – размер по оси  $y$ ;

- б* – для окружностей в плоскости  $\Pi_2(xOz)$ :
- $БОЭ = 1,06d$  – большая ось эллипса;
  - $МОЭ = 0,94d$  – малая ось эллипса;
  - $1'-2' = d$  – размер по оси  $x$ ;
  - $3'-4' = d$  – размер по оси  $z$

Если восьми точек недостаточно, эллипс можно построить по двум осям (рис. 12.11). Этот способ можно применять и для построения эллипсов с произвольными размерами осей, например, для построения проекций окружности, лежащей в проецирующей плоскости.



**Рис. 12.11. Построение эллипса по двум осям:**  
 $A'B'$  – большая ось эллипса;  
 $C'D'$  – малая ось эллипса

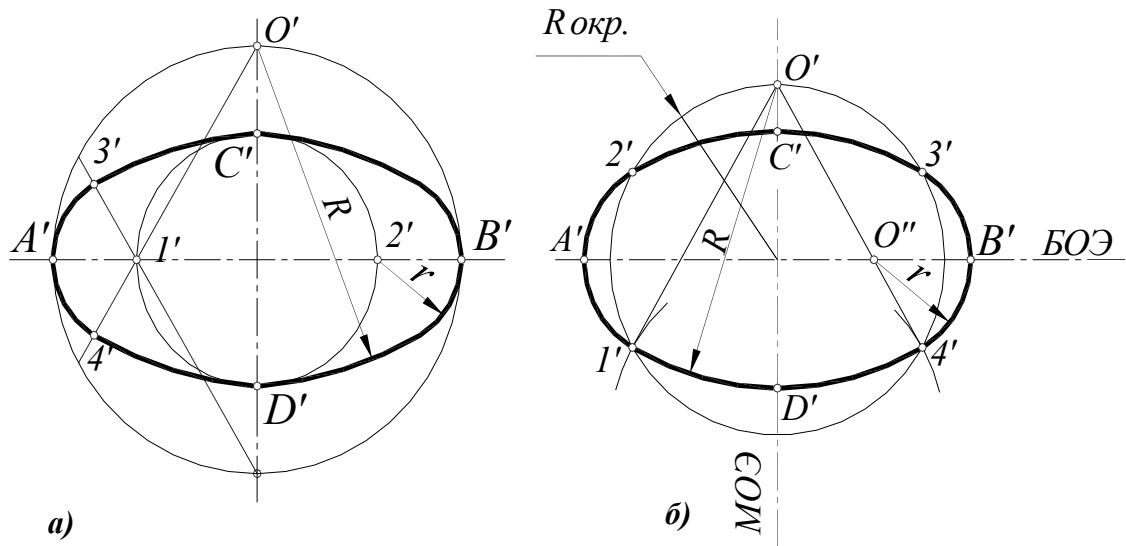
Строят две окружности с диаметрами, равными большой и малой оси эллипса, и делят их радиальными отрезками на  $n$  частей. Затем из каждой точки пересечения большой окружности проводят вертикальные отрезки в сторону большой оси, а из точек пересечения с малой окружностью – горизонтальные отрезки в сторону от малой оси. Точки пересечения отрезков и являются точками эллипса. Полученные точки соединяют плавной лекальной кривой.

#### 12.4.2. Построение овалов

Построение эллипсов требует применения лекал. На практике обычно вместо эллипсов вычерчивают четырехцентровые овалы.

Существует два способа построения четырехцентровых изометрических овалов. Для построения четырехцентрового овала по двум осям (рис. 12.12,а) из центра овала строят две окружности диаметрами равным и большой и малой осям эллипса. Точка пересечения большой окружности с направлением малой оси – центр большой дуги  $O'$ , радиус большой дуги  $R=O'D'$ . Точка  $I'$  – центр малой дуги, радиус малой дуги –  $r=I'A'$ . Точки  $3'4'$  – точки сопряжения. Затем строят дуги радиусов  $R$  и  $r$  между точками сопряжения.

Можно построить четырехцентровой овал используя только диаметр проецируемой окружности (рис. 12.12,б). Из центра овала строят направления большой и малой осей и окружность диаметром, равным диаметру проецируемой окружности. Из точки  $O'$  пересечения окружности с направлением малой оси делят окружность на шесть частей.  $O'$  – центр большой дуги овала. Отрезок  $O'I'=O'4'=R$  – радиус большой дуги, Точка  $O''$  пересечения отрезка  $O'4'$  с направлением большой оси – центр малой дуги, отрезок  $O''4'=r$  – радиус малой дуги. Точки  $1'2'3'4'$  точки сопряжения. Затем строят дуги соответствующих радиусов между точками сопряжения.



**Рис. 12.12. Построение четырехцентровых овалов в изометрии:**

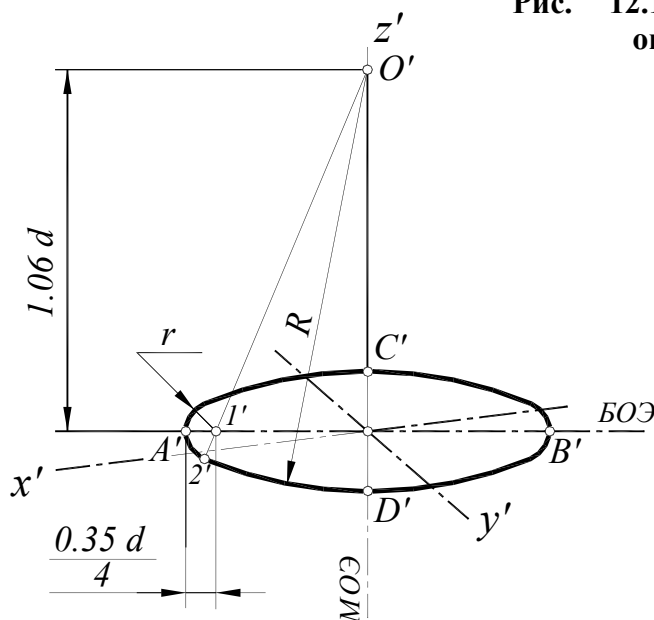
*a* – по двум осям:

$A'B'$  – большая ось эллипса;  
 $C'D'$  – малая ось эллипса;  
 $O'$  – центр большой дуги;  
 $O''$  – центр малой дуги

*б* – по диаметру окружности:

$A'B'$  – большая ось эллипса;  
 $C'D'$  – малая ось эллипса;  
 $O'$  – центр большой дуги;  
 $I'$  – центр малой дуги;

Диметрические эллипсы также можно заменить четырехцентровыми овалами. Построение диметрических овалов для окружностей в плоскостях, параллельных  $xOy$  и  $zOy$  показано на рис. 12.13.



**Рис. 12.13. Построение диметрического овала в плоскости  $xOy$ :**

$A'B'$  – большая ось эллипса;  
 $C'D'$  – малая ось эллипса;  
 $O'$  – центр большой дуги;  
 $I'$  – центр малой дуги;  
 $R=O'D'$  – радиус большой дуги;  
 $r=I'A'$  – радиус малой дуги;  
 $2'$  – точка сопряжения



## РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

### 13. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

#### Комплексный чертеж точки

1. Построить трехкартинные комплексные чертежи точек:  
 $A(5,10,15)$ ,  $B(20,0,25)$ ,  $C(0,20,15)$ ,  $D(20,15,0)$ .
2. На чертеже без указания осей построить недостающую проекцию точки, если даны две ее проекции и постоянная прямая комплексного чертежа (рис. 13.1).

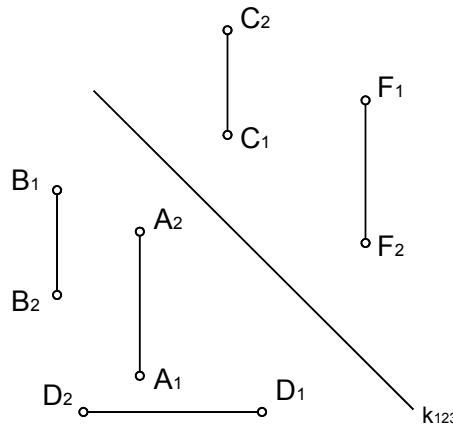


Рис. 13.1

3. На чертеже без указания осей построить недостающую проекцию точки, если даны две ее проекции и три проекции точки  $A$  (рис. 13.2).

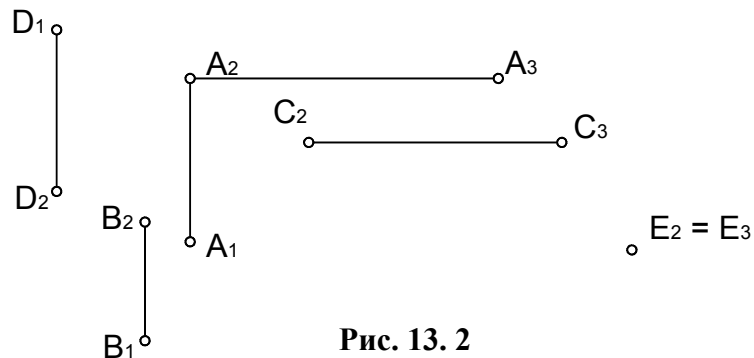


Рис. 13.2

4. Построить недостающие проекции точек  $E$ ,  $F$ ,  $K$ ,  $T$ , если известно, что точка  $E$  расположена перед точкой  $A$ , точка  $F$  – за ней; точка  $K$  расположена над точкой  $A$ , а точка  $T$  – под ней (рис. 13.3).

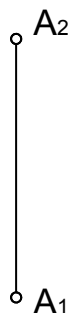


Рис. 13.3

**Прямая линия. Относительное положение точки и прямой**

5. Концы отрезков  $AB, CD, EF, KL, MN, QR$  заданы координатами:

$A(30,15,10)$	$B(10,20,25);$
$C(30,20,10)$	$D(5,20,25);$
$E(30,15,5)$	$F(5,15,20);$
$K(20,10,25)$	$L(20,10,5);$
$M(25,10,25)$	$N(25,20,10);$
$Q(50,20,20)$	$R(10,30,30).$

- Построить три проекции каждого отрезка.
  - Определить, как каждый отрезок расположен по отношению к плоскостям проекций.
  - Указать, какие отрезки проецируются в натуральную величину на одну из плоскостей проекций.
  - Определить углы наклона линий уровня к плоскостям проекций.
6. Построить двухкартинный комплексный чертеж прямой  $a$  общего положения. Построить проекции точек:

$A$  – на прямой,  $B$  – над прямой,  $C$  – за прямой.

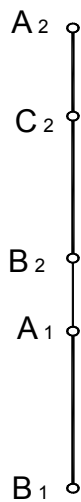


Рис. 13.4

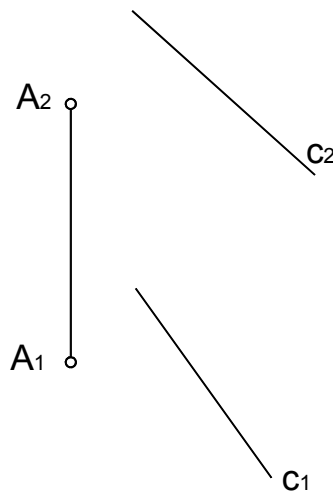


Рис. 13.5

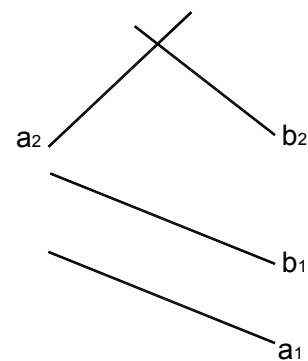


Рис. 13.6

7. Зная, что точка  $C$  принадлежит отрезку  $AB$ , построить недостающую проекцию точки  $C$  (рис. 13.4).
8. Построить произвольную горизонталь. Построить проекции отрезка  $MN$  длиной 35 мм, принадлежащего горизонтали.
9. Через произвольную точку  $A$  провести горизонталь под углом  $30^\circ$  к  $\Pi_2$ . Сколько решений имеет задача?
10. Через точку  $A$  провести горизонталь и фронталь, пересекающие прямую  $c$  общего положения (рис. 13.5).
11. Прямые  $a$  и  $b$  пересечь горизонталью (рис. 13.6).



12. Скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$  пересечь фронтально-проецирующей прямой  $i$  (рис. 13.7), а прямые  $c$  и  $d$  пересечь горизонтально-проецирующей прямой  $g$  (рис. 13.8).

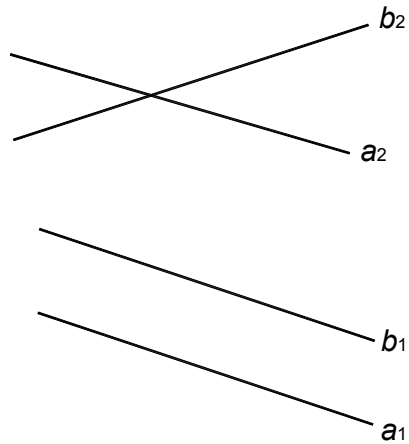


Рис. 13.7

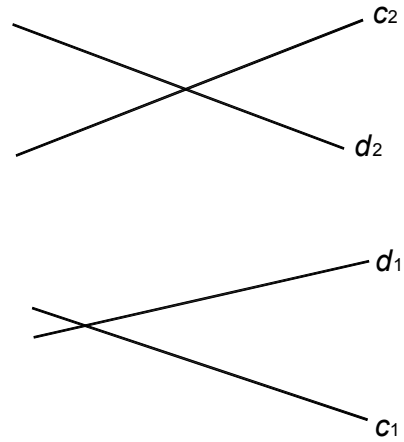


Рис. 13.8

13. Через произвольную точку  $A$  провести прямую, параллельную заданной:
- прямой  $a$  общего положения (рис. 13.9);
  - горизонтали  $h$  (рис. 13.10);

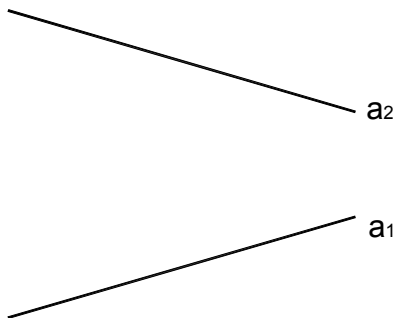


Рис. 13.9

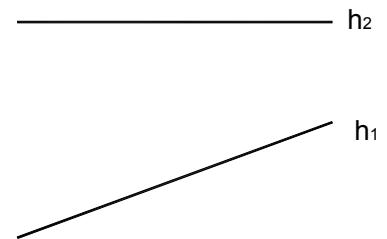


Рис. 13.10

### *Плоскость и поверхность на комплексном чертеже*

14. Плоскость задана точкой  $A$  и прямой  $a$ . Эту же плоскость задать: параллельными прямыми; пересекающимися прямыми; фронталью и горизонталью.

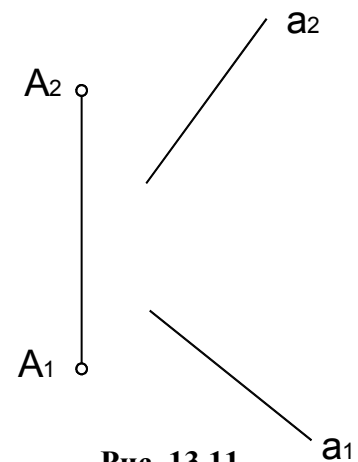


Рис. 13.11

15. В плоскости  $\alpha(\triangle ABC)$  провести горизонталь (рис.13.12), а в плоскости  $\beta(a//b)$  – фронталь (рис.13.13).

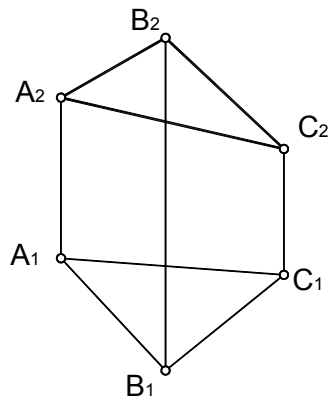


Рис. 13.12

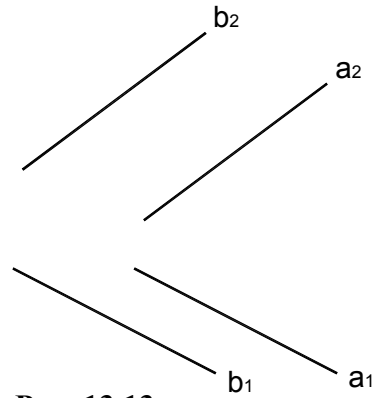


Рис. 13.13

16. Достроить фронтальную проекцию плоского пятиугольника  $ABCDE$ (рис.13.14).

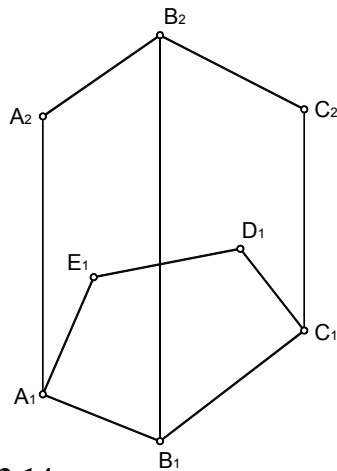


Рис. 13.14

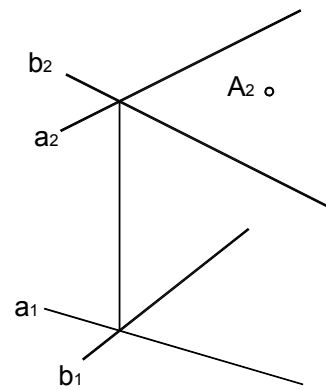


Рис. 13.15

17. Построить недостающую проекцию точки  $A$ , зная, что она принадлежит плоскости  $\alpha(a \times b)$ (рис.13.15).

18. Построить недостающую проекцию отрезка  $AB$ , принадлежащего плоскости  $\alpha(f \times h)$ (рис.13.16).

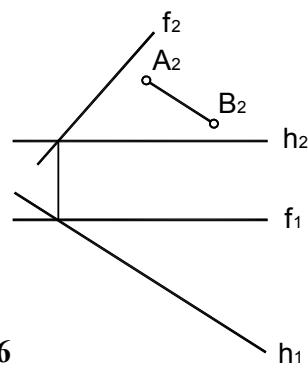


Рис. 13.16

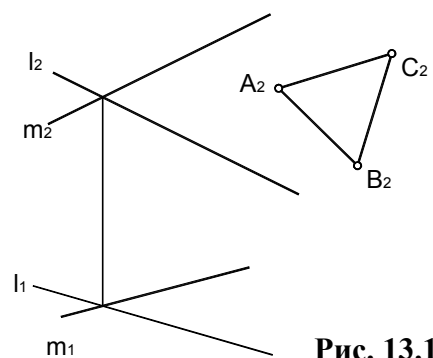


Рис. 13.17

19. Построить недостающую проекцию треугольника  $ABC$ , лежащего в плоскости  $\alpha(l \times m)$ (рис. 13.17).

20. Через точку  $M$  провести прямую, параллельную плоскости  $\psi$  ( $m \times n$ ) (рис. 13.18).

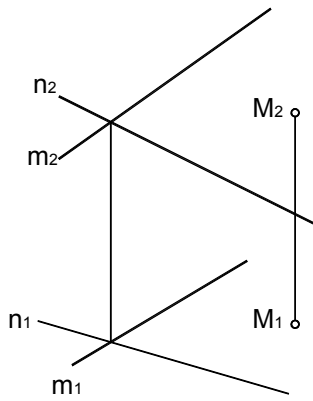


Рис. 13.18

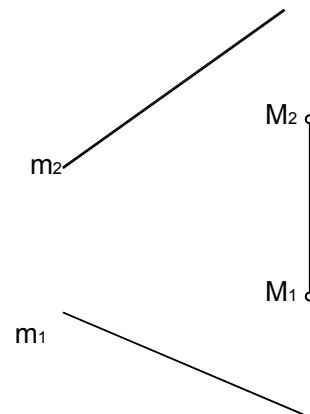


Рис. 13.19

21. Построить плоскость общего положения  $\sigma$ , проходящую через точку  $M$  и параллельную прямой  $m$  общего положения (рис. 13.19).

### Точка на поверхности

22. Дана пирамида  $SABC$  (рис. 13.20). Построить фронтальную проекцию точки  $E$ , лежащей в грани  $SBC$ . Через точку  $D$ , лежащую в грани  $SAB$ , провести в этой грани горизонталь.

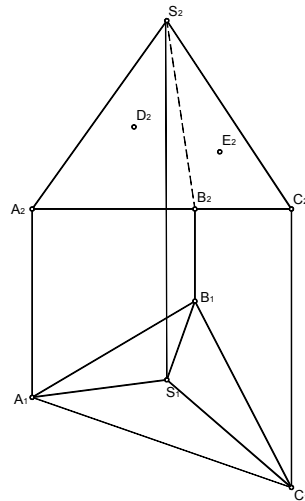


Рис. 13.20

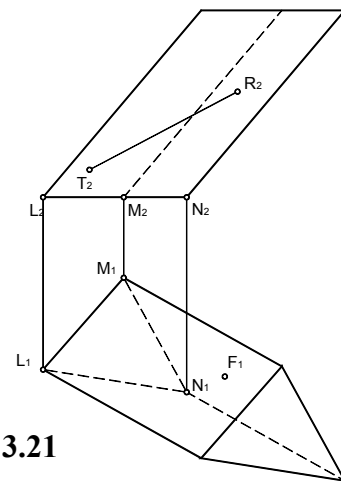


Рис. 13.21

23. Дана призма  $LMN$  (рис. 13.21). Построить фронтальную проекцию точки  $E$ , лежащей в грани  $MN$ . Построить горизонтальную проекцию отрезка  $TR$ , лежащего в грани  $LN$ .
24. Построить недостающие проекции точек  $A, B, C, D$ , лежащих на поверхности сферы (рис. 13.22).
25. Построить недостающие проекции точек  $E, F, K$  – на боковой поверхности цилиндра (рис. 13.23).
26. Построить недостающие проекции точек  $L, M, N$  – на поверхности закрытого тора (рис. 13.24).
27. Построить недостающие проекции точек  $P, R, T, Q$  – на поверхности открытого тора (рис. 13.25).

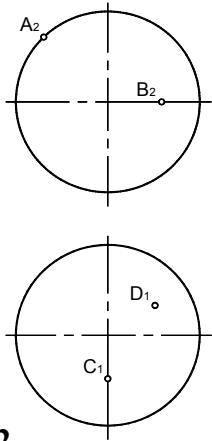


Рис. 13.22

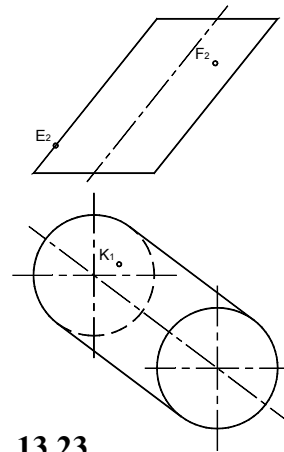


Рис. 13.23

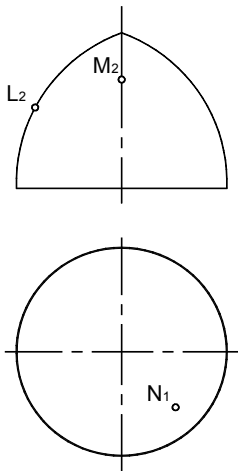


Рис. 13.24

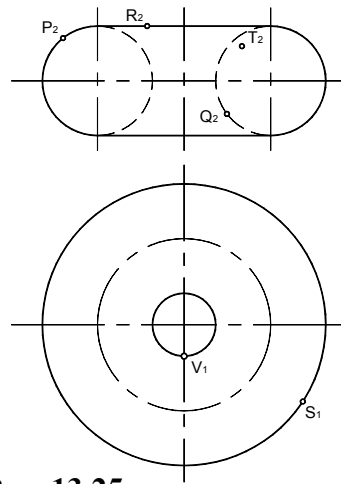


Рис. 13.25

### Сечение поверхности плоскостью

28. Построить проекции сечения призмы проецирующей плоскостью  $\delta$  ( $\delta_2$ ) (рис. 13.26).
29. Построить три проекции сечения пирамиды проецирующей плоскостью  $\gamma$  ( $\gamma_1$ ) (рис. 13.27).

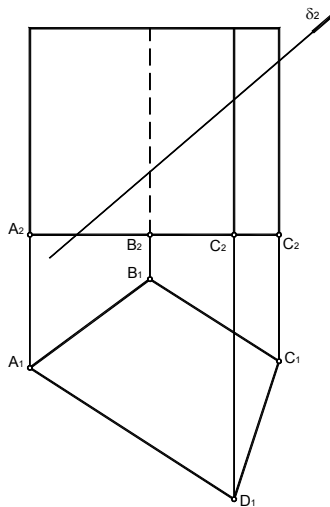


Рис. 13.26

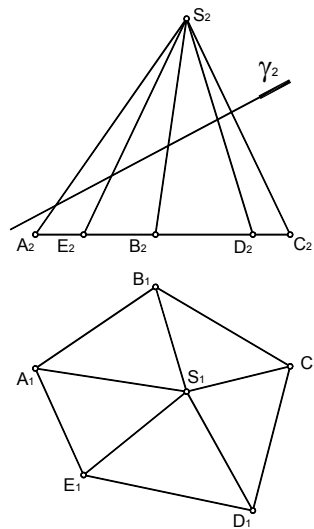


Рис. 13.27

30. Построить проекции сечения сферы плоскостью  $\delta(\delta_2)$ (рис. 13.28).

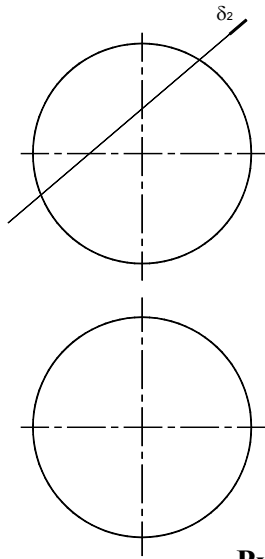


Рис. 13.28

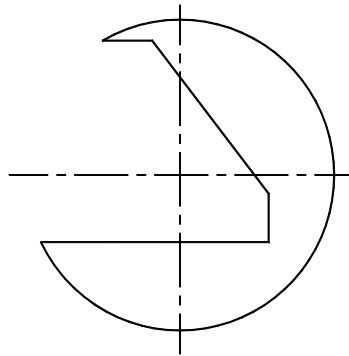


Рис. 13.29

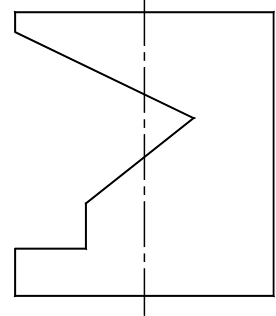


Рис. 13.30

31. Построить три проекции сферы с вырезом (рис. 13.29).

32. Построить три проекции цилиндра с вырезом (рис. 13.30).

33. Построить конус вращения, поставленный основанием на плоскость  $\Pi_1$ . Построить фронтально-проецирующие плоскости, рассекающие конус по окружности, пересекающимся прямым, эллипсу, параболе и гиперболе. Построить проекции сечений.

34. Построить недостающие проекции линии  $MN$ , принадлежащей поверхности конуса(рис. 13.31).

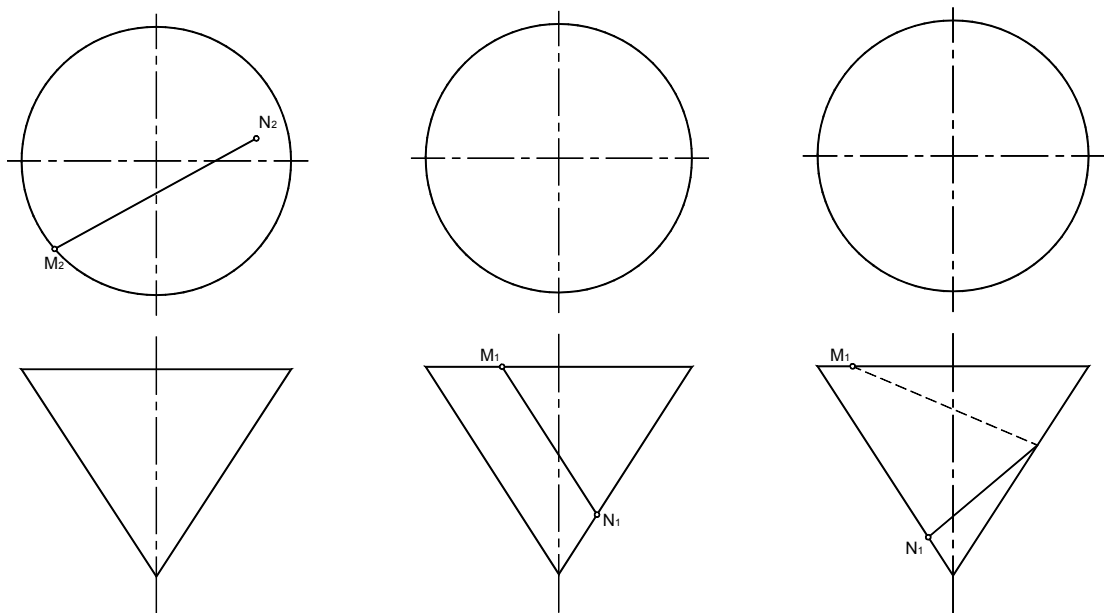


Рис. 13.31

### Позиционные задачи

35. Построить линию пересечения плоскости  $\alpha (A, a)$  с плоскостью  $\delta(\delta_2)$ (рис. 13.32).

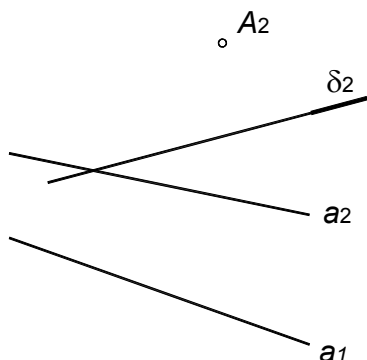


Рис. 13.32

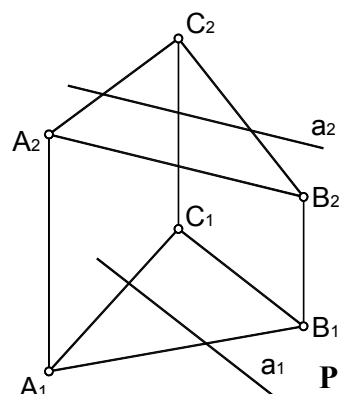


Рис. 13.33

36. Построить точку пересечения  $K$  прямой  $a$  с треугольником  $ABC$  и определить видимость прямой(рис. 13.33).

37. Построить точки пересечения прямой  $d$  с гранями многогранника и определить видимость прямой(рис. 13.34, 13.35).

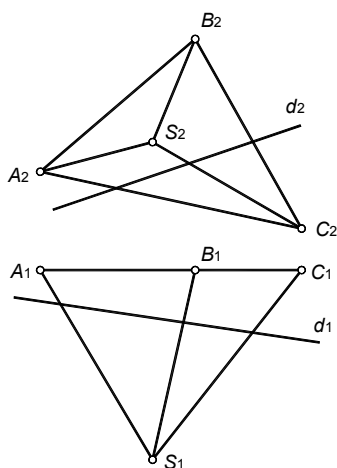


Рис. 13.34

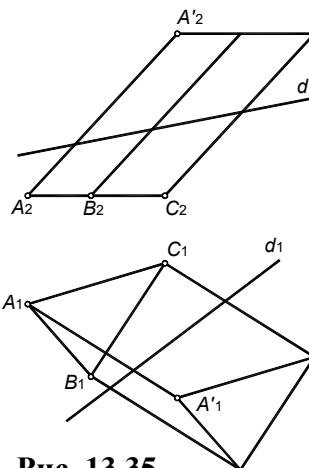


Рис. 13.35

38. Построить точки пересечения поверхности с прямой и определить видимость прямой(рис. 13.36 – 13.39).

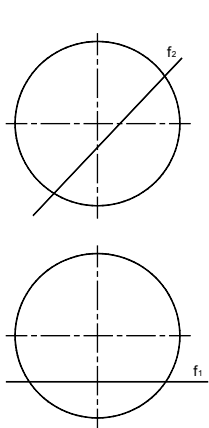


Рис. 13.36

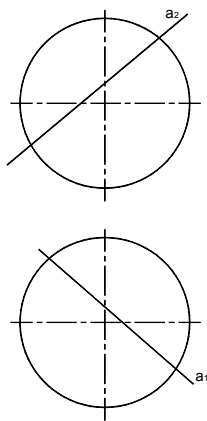


Рис. 13.37

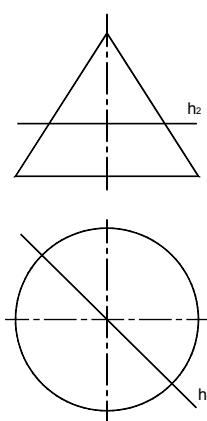


Рис. 13.38

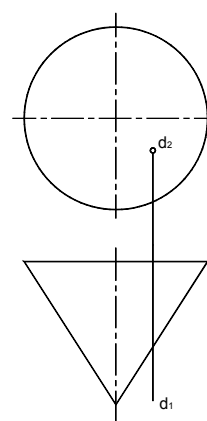


Рис. 13.39

39. Построить линию пересечения двух плоскостей  $\alpha(c \times d)$  и  $\beta(a // b)$  (рис. 13.40).

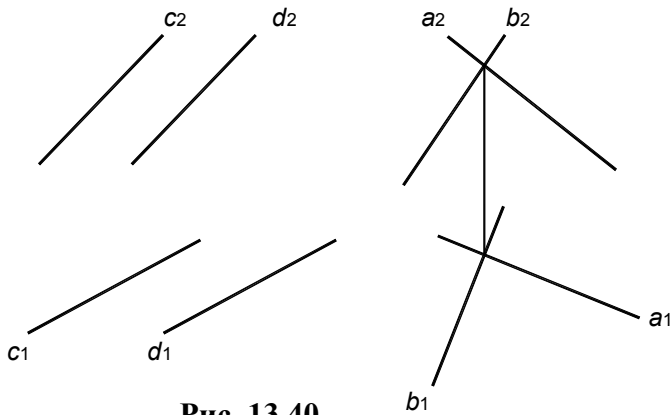


Рис. 13.40

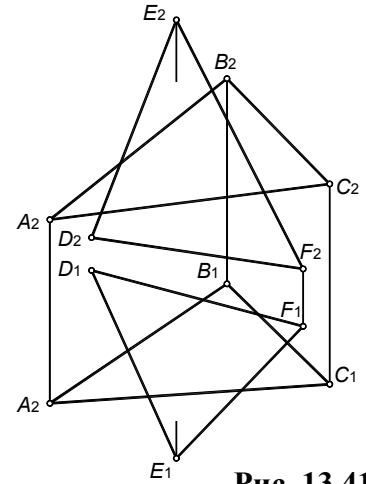


Рис. 13.41

40. Построить линию пересечения двух треугольных непрозрачных пластин и определить их видимость (рис. 13.41).

41. Построить линию пересечения поверхностей, используя способ вспомогательных плоскостей уровня (рис. 13.42, 13.43).

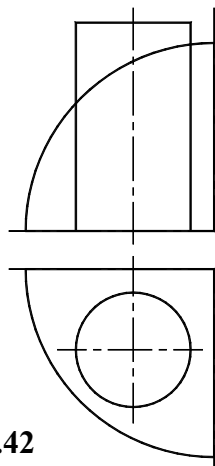


Рис. 13.42

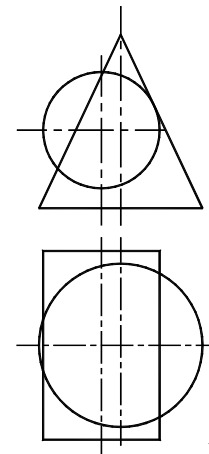


Рис. 13.43

42. Построить линию пересечения поверхностей, используя метод концентрических сфер (рис. 13.44, 13.45).

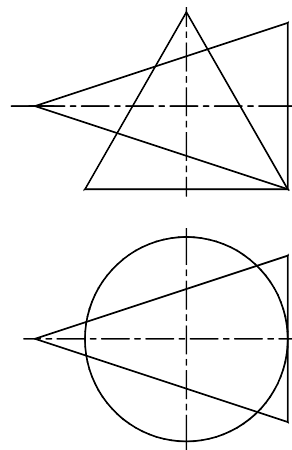


Рис. 13.44

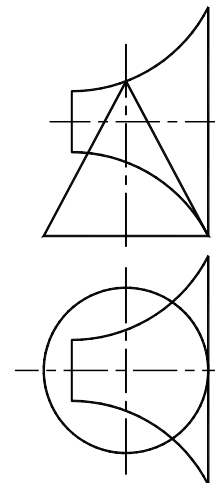


Рис. 13.45

### Перпендикулярность прямых и плоскостей

43. Из точки  $A$  провести перпендикуляр к прямой  $a$  (рис. 13.46, 13.47).

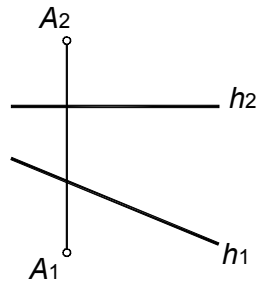


Рис. 13.46

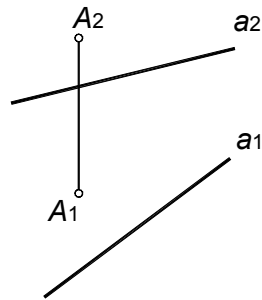


Рис. 13.47

44. Из точки  $A(A_1A_2)$  провести перпендикуляр на плоскость  $\alpha(f \times h)$  и  $\beta(\triangle LMN)$  (рис. 13.48, 13.49).

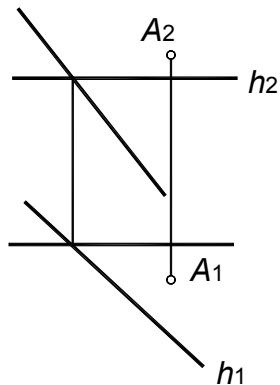


Рис. 13.48

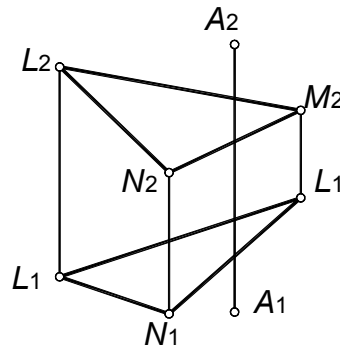


Рис. 13.49

### Преобразования комплексного чертежа

45. На прямой  $a$  отложить от точки  $A$  в направлении, указанном стрелкой, отрезок  $AB$ , длиной 25мм (рис. 13.50).

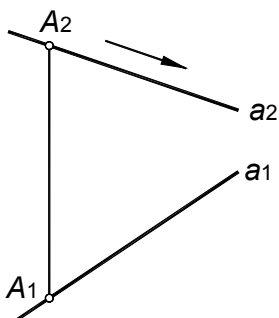


Рис. 13.50

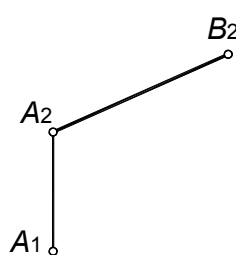


Рис. 13.51

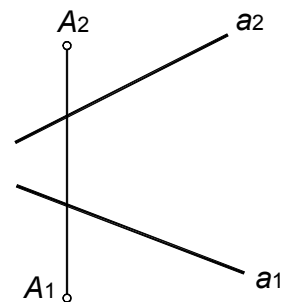


Рис. 13.52

46. Построить горизонтальную проекцию отрезка  $AB$ , если дана его фронтальная проекция, а угол наклона к  $\Pi_2$  равен  $30^\circ$  (рис. 13.51).

47. Определить натуральную величину и проекции перпендикуляра, измеряющего расстояние от точки  $A$  до прямой  $a$  (рис. 13.52).



49. Определить угол наклона плоскости треугольника  $ABC$  к горизонтальной (рис. 13.53), а треугольника  $DEF$  – к фронтальной плоскости проекций (рис. 13.54).

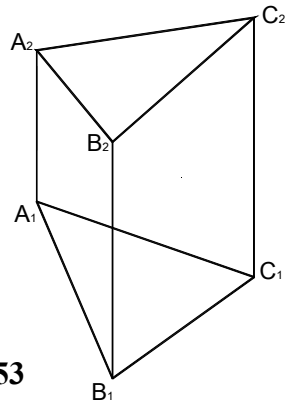


Рис. 13.53

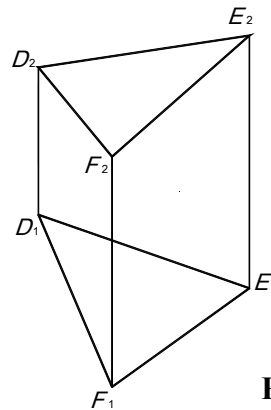


Рис. 13.54

50. Определить натуральную величину и проекции перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  на плоскости  $\alpha(f \times h)$  (рис. 13.55) и  $\beta(a \parallel b)$  (рис. 13.56).

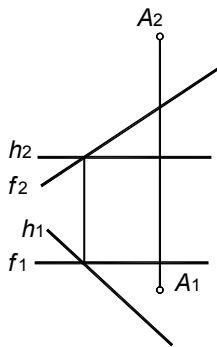


Рис. 13.55

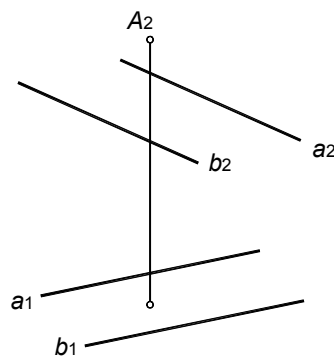


Рис. 13.56

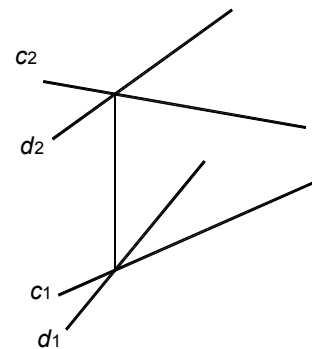


Рис. 13.57

51. Построить перпендикуляр к плоскости  $\gamma(c \times d)$  длиной 20 мм (рис. 47).  
 52. Определить расстояние между прямой  $n$  и параллельной ей плоскостью  $\alpha(M, m)$  причем,  $n \parallel m$  (рис. 13.58).

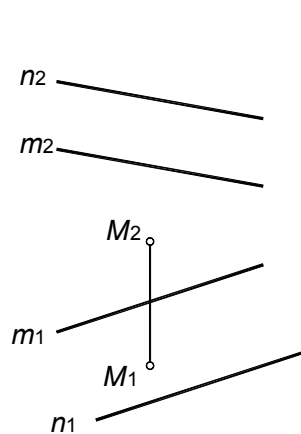


Рис. 13.58

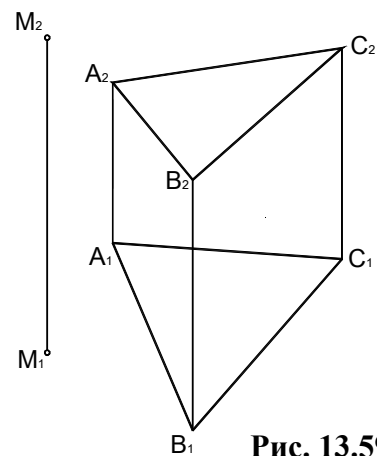


Рис. 13.59

53. Построить точку, симметричную данной точке  $M$  относительно плоскости  $\alpha(ABC)$  (рис. 13.59).

54. Определить расстояние между двумя параллельными прямыми  $a$  и  $b$  (рис. 13.60).

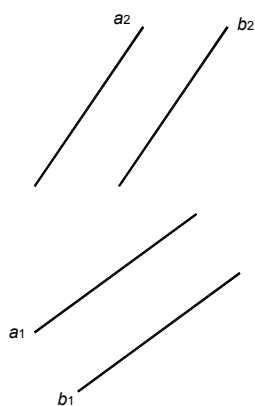


Рис. 13.60

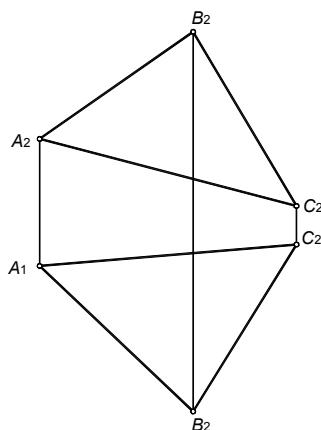


Рис. 13.61

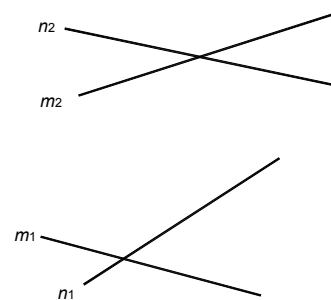


Рис. 13.62

55. Определить натуральную величину треугольника  $ABC$  (рис. 13.61):

- способом замены плоскостей проекций;
- способом плоскопараллельного перемещения;
- способом вращения вокруг подходящим образом выбранной проецирующей прямой.

56. Определить расстояние между двумя скрещивающимися прямыми  $m$  и  $n$  (рис. 13.62).

57. Определить натуральную величину угла между гранями  $ABC$  и  $ABD$  (рис. 13.63).

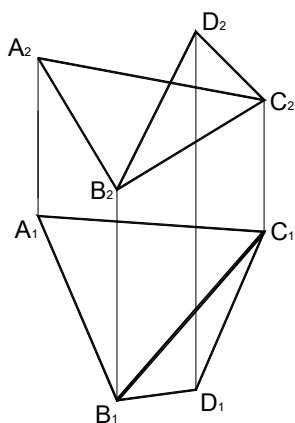


Рис. 13.63

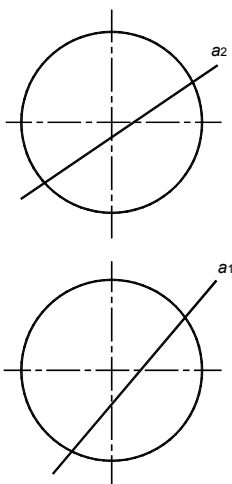


Рис. 13.64

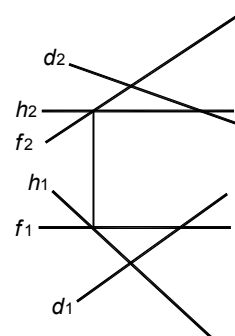


Рис. 13.65

58. Определить точки пересечения поверхности сферы с прямой  $m(m_1m_2)$  (рис. 13.64).

59. На прямой  $d$  найти точки, удаленные от заданной плоскости  $\gamma(f \times h)$  на расстояние 15 мм (рис. 13.65).

60. Определить угол между гранями  $ABC$  и  $BCD$  (рис. 13.66).

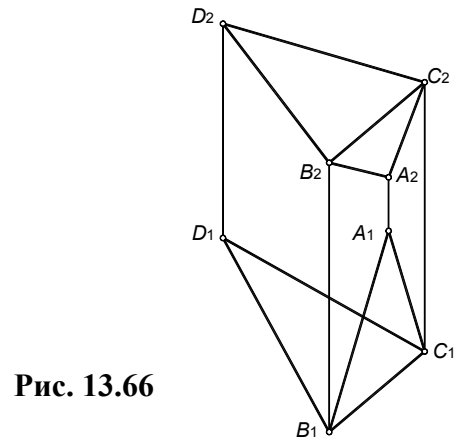


Рис. 13.66

61. Точку  $T$  вращением вокруг заданной прямой  $i$  совместить:

- с поверхностью многогранника (рис. 13.67);
- с поверхностью наклонного конуса (рис. 13.68).

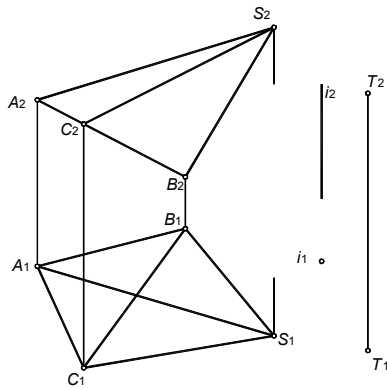


Рис. 13.67

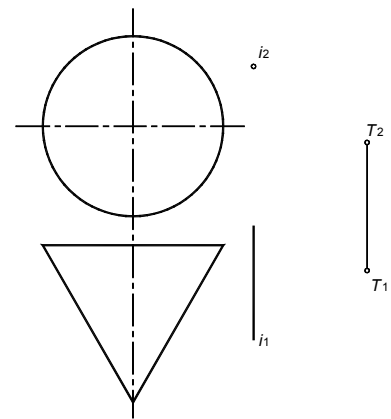


Рис. 13.68

62. По заданному ортогональному чертежу построить приведенную изометрию и диметрию детали (рис. 13.69, 13.70).

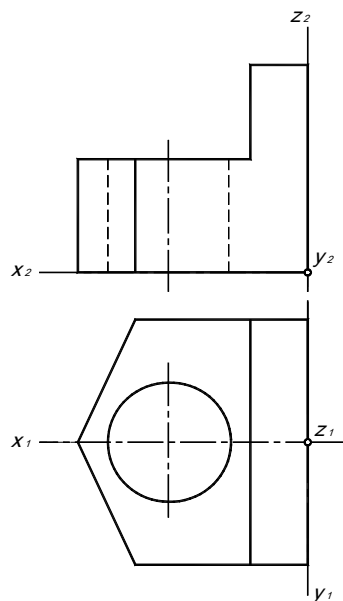


Рис. 13.69

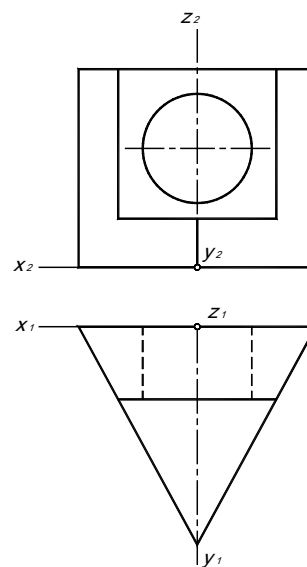


Рис. 13.70

## РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

### 14. ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

Прежде чем приступить к выполнению графической работы, необходимо изучить или повторить теоретическую часть курса.

Студент выполняет тот вариант задания, номер которого соответствует сумме двух последних цифр номера зачетной книжки. Например, если номер зачетной книжки студента 788133, то он во всех контрольных работах выполняет шестой вариант задания.

Каждая контрольная работа представляется на рецензию в полном объеме (необходимое число чертежей с пояснительными записками к ним). На каждую контрольную работу преподаватель кафедры составляет рецензию, в которой кратко отмечает достоинства и недостатки работы. Контрольную работу вместе с рецензией возвращают студенту, и она хранится у него до экзамена. Пометки преподавателя должны быть приняты студентом к исполнению. Если работа не зачтена, преподаватель в рецензии указывает, какую часть контрольной работы надо переделать, или выполнить всю контрольную работу вновь. На повторную рецензию следует высылать всю контрольную работу полностью. К выполнению следующей контрольной работы можно приступать, не ожидая ответа на предыдущую. Контрольные работы представляются на рецензию строго в сроки, указанные в учебном графике или определенные преподавателем.

Графические работы выполняются на листах чертежной бумаги формата А3 или А4 (ГОСТ 2.301-68, см. табл. П1, рис. П1). Первая страница должна быть оформлена по образцу (см. рис. П2).

При графическом решении задач точность ответа зависит не только от выбора правильного пути ее решения, но и от точности выполнения геометрических построений, поэтому при выполнении графических работ необходимо пользоваться чертежными инструментами. Все основные и вспомогательные построения должны быть сохранены, все точки и линии на чертеже – обозначены, при этом обозначения следует делать в процессе решения.

Все надписи, буквенные и цифровые обозначения выполняются шрифтом чертежным в соответствии с ГОСТ 2.304-68 (см. рис. П4, П5). Линии видимого контура обводят сплошной толстой основной линией толщиной  $s=0,8-1\text{мм}$ , линии построений – сплошной тонкой линией толщиной от  $s/3$  до  $s/2$ , осевые и центровые линии – штрихпунктирной линией, линии невидимого контура – штриховой в соответствии с ГОСТ 2.303-68 (см. табл. П2). Точки на чертеже вычерчиваются в виде окружностей диаметром 1,5...2мм.

Листы выполненной контрольной работы складывают до формата А4 (см. рис. П3), и вы寄ают в конверте и на рецензию.

## 14.1. Графическая работа 1

### «Построение линии пересечения треугольных пластин»

**Задание:** Построить линию пересечения треугольных пластин  $ABC$  и  $DEK$ . Определить натуральную величину треугольника  $ABC$ . Данные по вариантам приведены в табл. 14.1. Графическую работу выполнить на листе чертежной бумаги формата А3.

#### Порядок выполнения работы:

1. Построить в тонких линиях двухкартинный комплексный чертеж треугольных пластин по заданным координатам вершин (рис. 14.1, а).

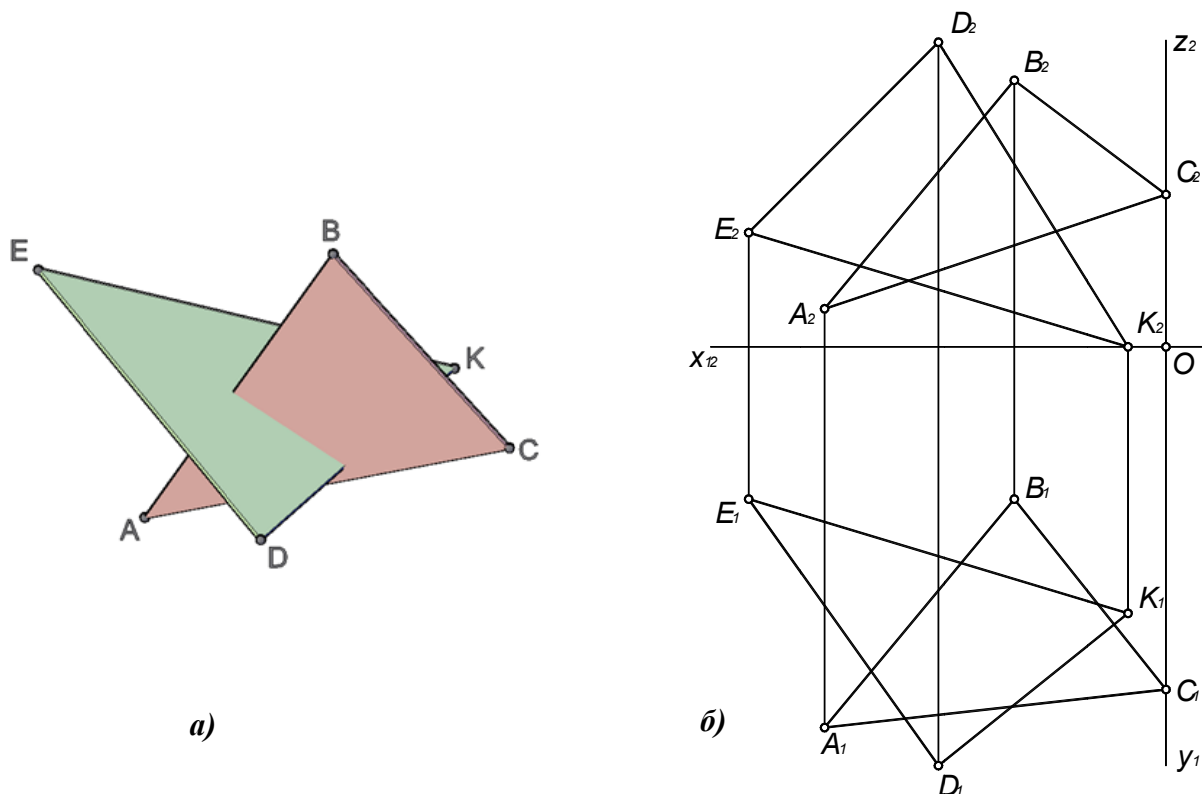


Рис. 14.1. Двухкартинный комплексный чертеж пластин:

а – наглядное изображение; б – комплексный чертеж

2. Пластины представляют собой ограниченные участки плоскостей общего положения  $\alpha(ABC)$  и  $\beta(DEK)$  (рис. 14.1, б), следовательно, задача сводится к определению линии их пересечения. Линией пересечения плоскостей является прямая, для однозначного определения которой достаточно двух точек.

Первая точка – точка  $N$  (рис. 14.2), определяется как точка пересечения стороны  $DK$  треугольника  $DEK$  с плоскостью  $\alpha(ABC)$  (первая позиционная задача, см. пп. 8.8):

- прямую  $DK$  заключить во вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость  $\gamma(\gamma_2)$  (см. рис. 14.2);

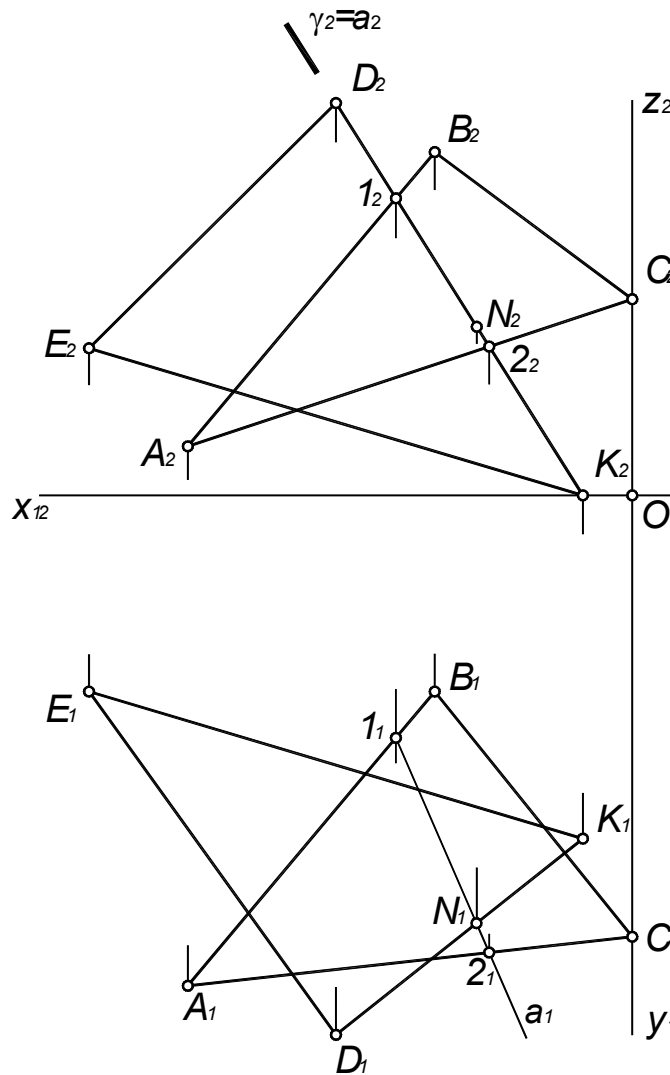


Рис. 14.2. Построение первой точки линии пересечения

- определить линию пересечения  $a$  вспомогательной плоскости  $\gamma(\gamma_2)$  и плоскости  $\alpha(ABC)$ . Линия  $a$  строится по двум точкам:  
 точка  $1 = \gamma(\gamma_2) \times AB$ ;  
 точка  $2 = \gamma(\gamma_2) \times AC$ .
- определить точку пересечения прямых  $a$  ( $a_1, a_2$ ) и  $DK$ :

$$N_1 = D_1 K_1 \times a_1;$$

$$N_2 = N_1 N_2 \times D_2 K_2.$$

Вторую точку линии пересечения – точку  $M$  определить аналогично (рис. 14.3). При необходимости полученную линию нужно ограничить в области перекрытия проекций. Соединив полученные точки  $M$  и  $N$ , получить линию пересечения двух треугольных пластин.

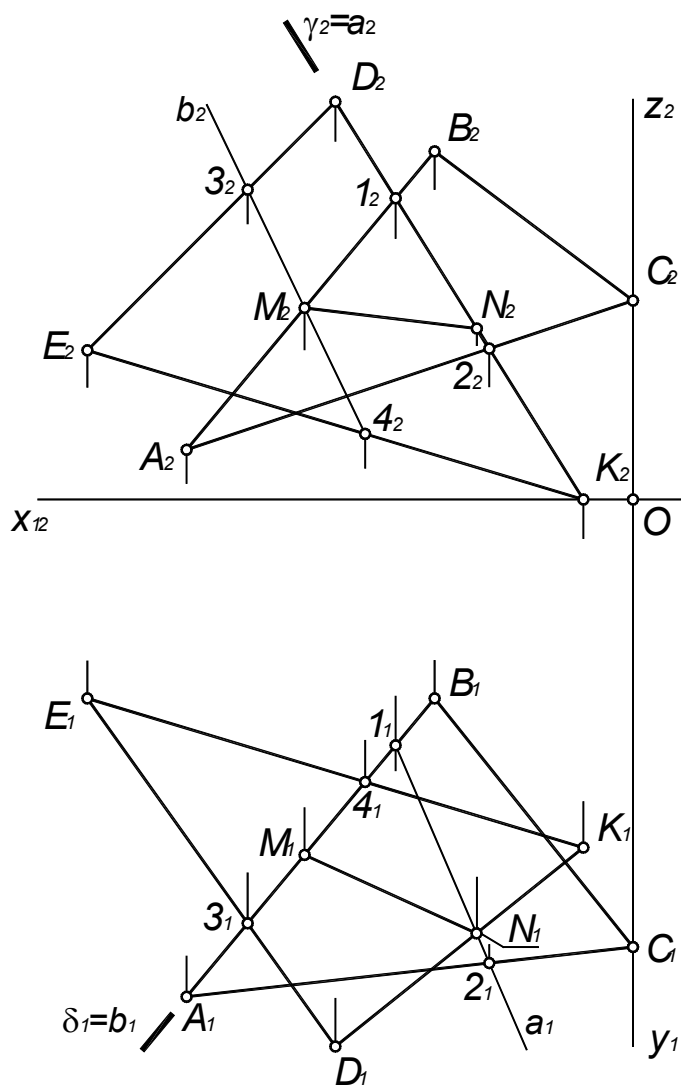


Рис. 14.3. Построение второй точки линии пересечения

3. Определить видимость сторон методом конкурирующих точек (см. п. 7), считая пластины непрозрачными (рис. 14.4).

На горизонтальной плоскости конкурирующие точки находятся в точке наложения проекций сторон  $A_1C_1$  и  $D_1E_1$ . При этом точка 5 принадлежит стороне  $AC$ , а точка 6 – стороне  $DE$ . Фронтальная проекция точки 6 лежит выше (ее высота больше, чем высота точки 5). Сторона  $DE$  видима полностью, а сторона  $AC$  невидима между точками, конкурирующими со сторонами  $DK$  и  $DE$ . Аналогично определить видимость остальных сторон. Сторона  $EK$  невидима между точками, конкурирующими со сторонами  $AB$  и  $BC$ . Сторона  $DK$  невидима от точки  $N$  до точки, конкурирующей со стороной  $BC$ . Сторона  $BC$  видима полностью, а сторона  $AB$  невидима от точки  $M$  до точки, конкурирующей со стороной  $DE$ .

На фронтальной плоскости конкурирующие точки находятся в точке наложения проекций прямых  $A_2B_2$  и  $D_2K_2$ . При этом точка 1 принадлежит прямой  $AB$ , а точка 7 – прямой  $DK$ . Горизонтальная проекция точки 7 лежит ниже (ее глубина больше, чем глубина точки 1), следовательно, на  $\Pi_2$  видима

сторона  $DK$  до точки  $N$  и за пределами общего объема пластин. Сторона  $AB$  невидима между точками  $M$  и  $I$ .

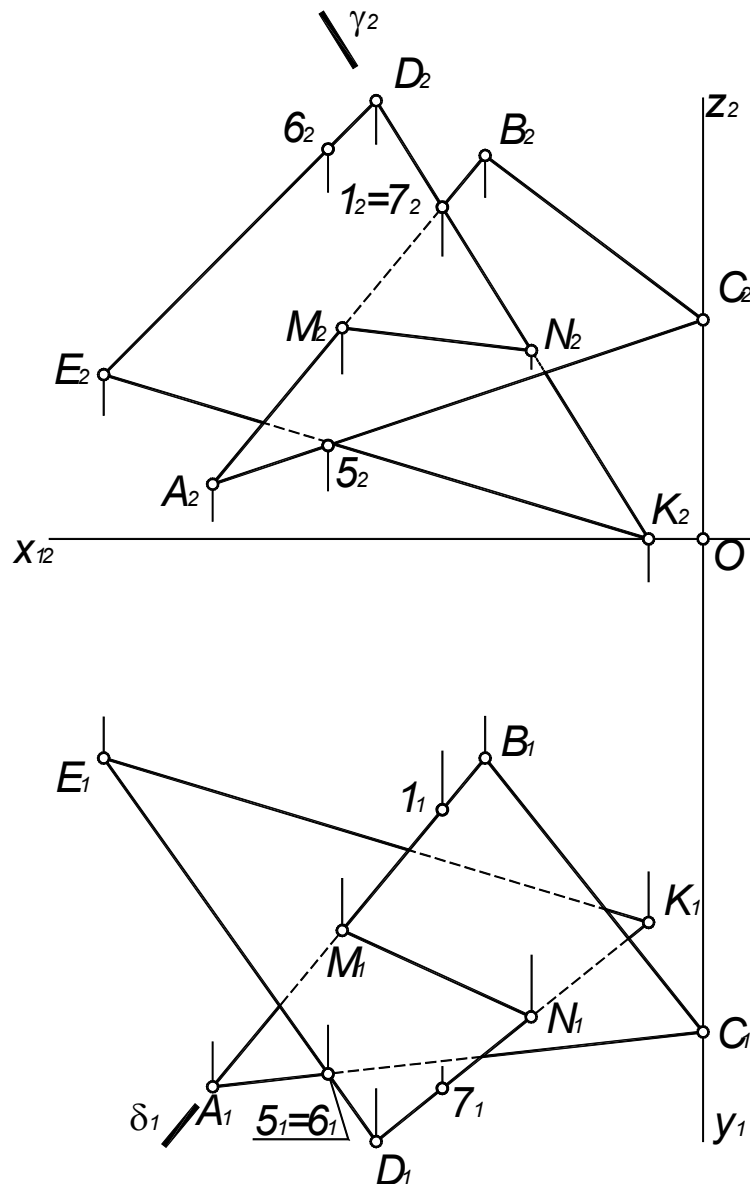


Рис. 14.4. Определение видимости

Аналогично определить видимость остальных сторон. Стороны  $DE$ ,  $AB$  и  $BC$  видимы полностью. Сторона  $EK$  невидима между точками, конкурирующими со сторонами  $AB$  и  $BC$ .

4. Определить натуральную величину плоскости  $ABC$  и показать линию  $MN$  – линию его пересечения с плоскостью  $DEK$ .

Натуральную величину плоскости  $ABC$  определить способом плоскопараллельного движения (см. пп. 11.2). Данная задача решается в два этапа: сначала плоскость переводится из общего положения в проецирующее, а затем – в положение плоскости уровня.

Сначала выполняется плоскопараллельное движение плоскости  $\alpha(ABC)$  относительно плоскости проекций  $\Pi_1$  (рис. 14.5):



- продлить линию  $MN$  до пересечения со стороной  $AC$  и получить линию  $ML$ ;
- через точку  $S$  провести горизонталь  $h(h_1, h_2)$  в плоскости  $ABC$ ;
- горизонтальную проекцию  $h'_1$  вычертить без изменения на свободном поле чертежа, расположив ее так, как требуется для решения задачи, а именно чтобы она стала проецирующей прямой:

$$h'_1(C'_1F'_1) \perp x_{12}, [C'_1F'_1] = [C_1F_1];$$

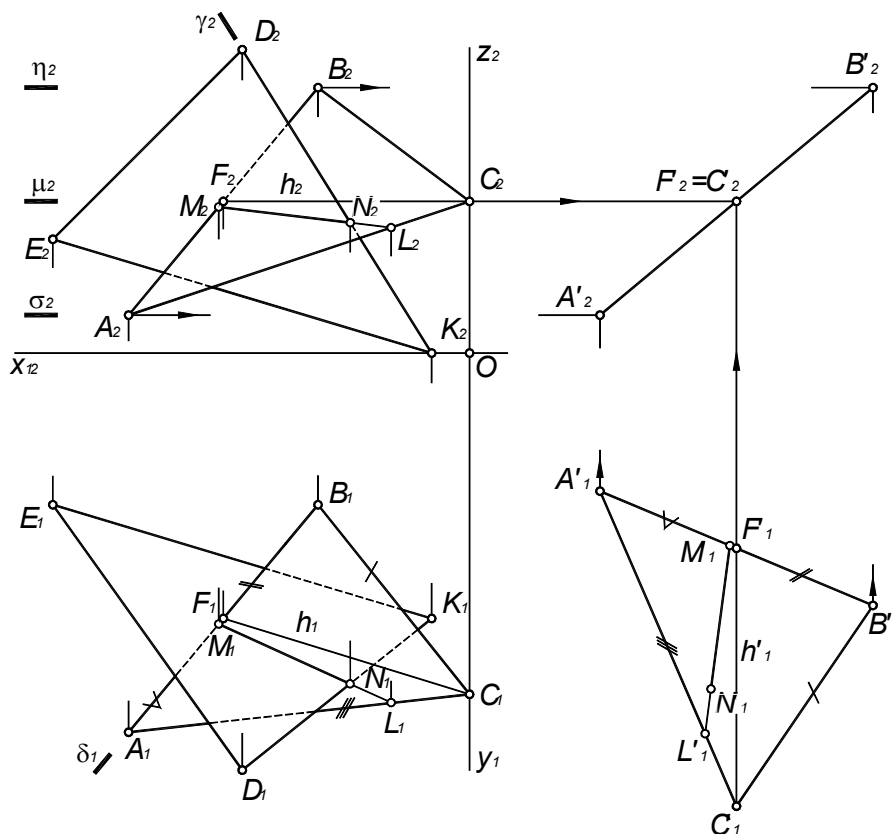


Рис. 14.5. Преобразование плоскости  $\alpha(ABC)$  общего положения в положение проецирующей плоскости

- построить новую горизонтальную проекцию плоскости  $\alpha'_1(A'_1B'_1C'_1)$ , конгруэнтную горизонтальной проекции  $\alpha_1(A_1B_1C_1)$ , показав на ней линию пересечения  $MN$ :

$$\begin{aligned} |A'_1B'_1| &= |A_1B_1|; & |A'_1C'_1| &= |A_1C_1|; & |B'_1C'_1| &= |B_1C_1|; \\ \angle A'_1B'_1C'_1 &= \angle A_1B_1C_1; & \angle B'_1A'_1C'_1 &= \angle B_1A_1C_1; & \angle A'_1C'_1B'_1 &= \angle A_1C_1B_1; \\ |A'_1F'_1| &= |A_1F_1|; & |F'_1B'_1| &= |F_1B_1|; \\ |A'_1M'_1| &= |A_1M_1|; & |M'_1B'_1| &= |M_1B_1|; \\ |A'_1L'_1| &= |A_1L_1|; & |L'_1C'_1| &= |L_1C_1|; \\ |L'_1N'_1| &= |L_1N_1|; & |N'_1M'_1| &= |N_1M_1|; \end{aligned}$$

- фронтальные проекции точек  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  перемещаются по прямым – следам плоскостей движения точек  $\sigma_2$ ,  $\eta_2$  и  $\mu_2$ :

$$\sigma_2 \parallel \eta_2 \parallel \mu_2; \quad \sigma_2 \perp A_1A_2;$$

- определить новую фронтальную проекцию плоскости  $\alpha'_2(A'_2B'_2C'_2)$  по линиям связи на основании новой горизонтальной проекции плоскости  $\alpha'_1(A'_1B'_1C'_1)$ ;

Вторым плоскопараллельным движением, но уже относительно плоскости проекций  $\Pi_2$ , плоскость  $\alpha(ABC)$  преобразуется в горизонтальную плоскость уровня (рис. 14.6):

- построить новую фронтальную проекцию плоскости  $\alpha''_2(A''_2B''_2C''_2)$  в виде горизонтального отрезка на свободном поле чертежа, для которого  $|C''_2A''_2| = |C'_2A'_2|$  и  $|A''_2B''_2| = |A'_2B'_2|$ ;

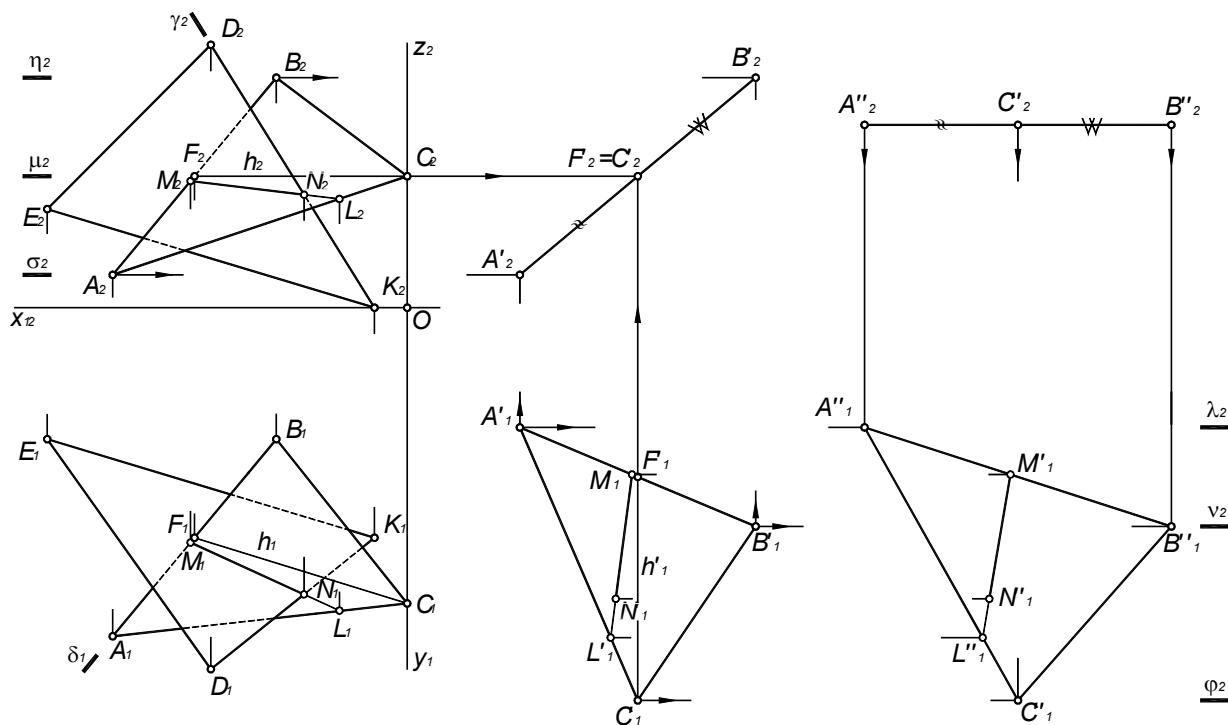


Рис. 14.6. Преобразование плоскости  $\alpha(ABC)$  общего положения в положение плоскости уровня

- горизонтальные проекции точек  $A'_1, B'_1, C'_1$  перемещаются по прямым – следам плоскостей движения точек  $\lambda_1, \nu_1$  и  $\varphi_1$ :

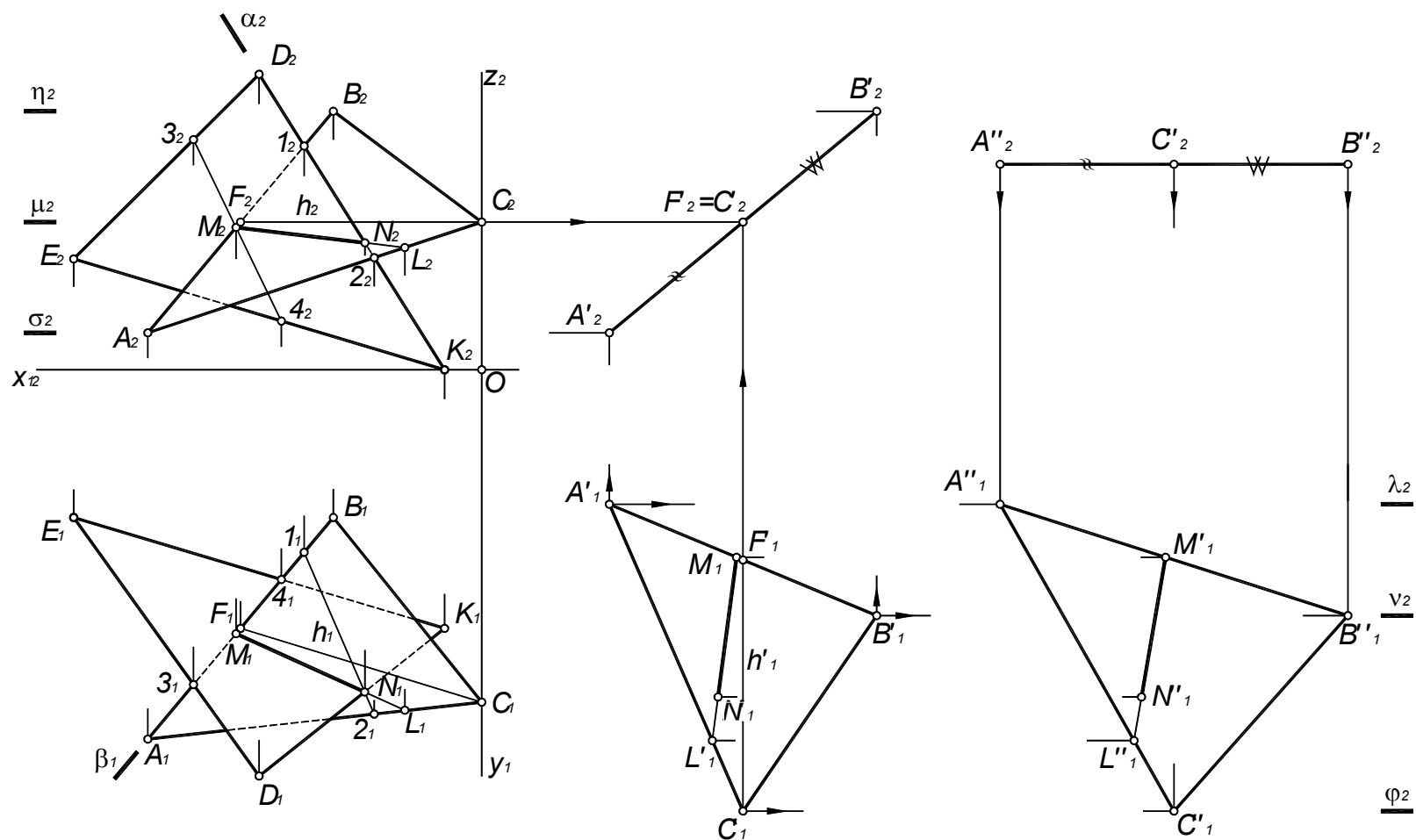
$$\lambda_1 \parallel \nu_1 \parallel \varphi_1; \quad \lambda_1 \perp A''_1A''_2;$$

- определить новую горизонтальную проекцию плоскости  $\alpha''_1(A''_1B''_1C''_1)$  по линиям связи на основании новой фронтальной проекции плоскости  $\alpha''_2(A''_2B''_2C''_2)$ .

Полученная горизонтальная проекция плоскости  $\alpha''_1(A''_1B''_1C''_1)$  определяет ее натуральную величину:  $\Delta A''_1B''_1C''_1 = |\Delta ABC|$ .

5. Обвести в соответствии с типами линий, оформить работу. Пример выполнения графической работы приведен на рис. 14.7.

Построение линии пересечения треугольных пластин



1/7	1.10.13	140413	Николаев А.В.		
-----	---------	--------	---------------	--	--

Рис. 14.7. Пример выполнения графической работы 1

## Задания для графической работы 1 (координаты и размеры, мм)

№ вар.	$x_A$	$y_A$	$z_A$	$x_B$	$y_B$	$z_B$	$x_C$	$y_C$	$z_C$	$x_D$	$y_D$	$z_D$	$x_E$	$y_E$	$z_E$	$x_K$	$y_K$	$z_K$
1	117	90	9	52	25	79	0	83	48	68	110	85	135	19	36	14	52	0
2	120	90	10	50	25	80	0	85	50	70	110	85	135	20	35	15	50	0
3	115	90	10	52	25	80	0	80	45	64	105	80	130	18	35	12	50	0
4	120	92	10	50	20	75	0	80	46	70	115	85	135	20	32	10	50	0
5	117	9	90	52	79	25	0	48	83	68	85	110	135	36	19	14	0	52
6	115	7	85	50	80	25	0	50	85	70	85	110	135	20	20	15	0	50
7	120	10	90	48	82	20	0	52	82	65	80	110	130	38	20	15	0	52
8	116	8	88	50	78	25	0	46	80	70	85	108	135	36	20	15	0	52
9	115	10	92	50	80	25	0	50	85	70	85	110	135	35	20	15	0	50
10	18	10	90	83	79	25	135	48	82	67	85	110	0	36	19	121	0	52
11	20	12	92	85	89	25	135	50	85	70	85	110	0	35	20	120	0	52
12	15	10	85	80	80	20	130	50	80	70	80	108	0	35	20	120	0	50
13	16	12	88	85	80	25	130	50	80	75	85	110	0	30	15	120	0	50
14	18	12	85	85	80	25	135	50	80	70	85	110	0	35	20	120	0	50
15	18	90	10	83	25	79	135	83	48	67	110	85	0	19	36	121	52	0
16	18	40	75	83	117	6	135	47	38	67	20	0	0	111	48	121	78	86
17	18	75	40	83	6	107	135	38	47	67	0	20	0	48	111	121	86	78
18	117	75	40	52	6	107	0	38	47	135	0	20	86	48	111	15	68	78

## 14.2. Графическая работа 2 «Проекции пирамиды»

**Задание:** Построить проекции пирамиды, основанием которой является треугольник  $ABC$ , а ребро  $SA$  определяет высоту  $H$  пирамиды. Данные по вариантам приведены в табл. 14.2.

**Порядок выполнения работы:**

6. Построить оси координат. По координатам вершин построить основание пирамиды  $ABC$  в тонких линиях (рис. 14.8).

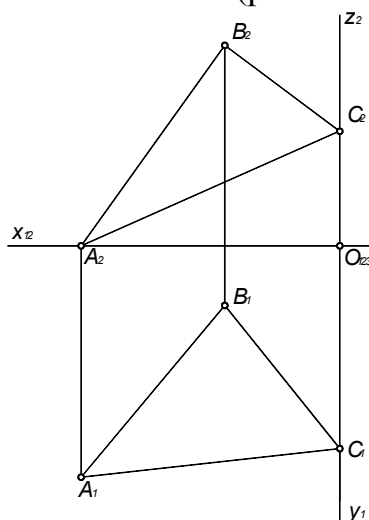


Рис. 14.8. Построение основания пирамиды

7. В плоскости основания построить горизонталь  $h(h_1h_2)$  и фронталь  $f(f_1f_2)$  (рис. 14.9).

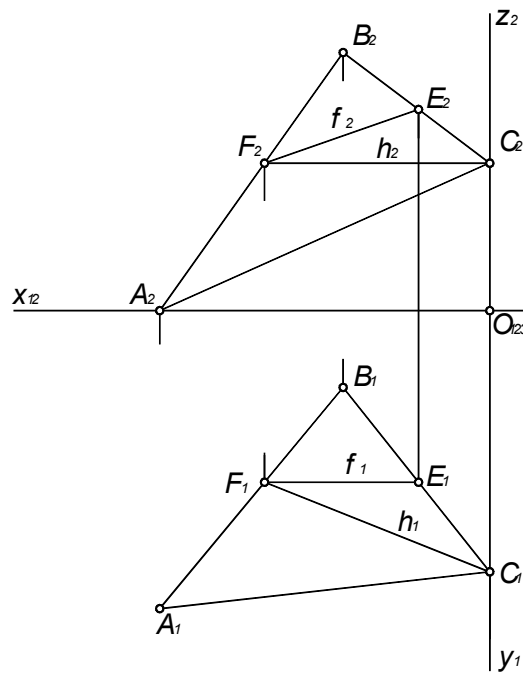


Рис. 14.9. Построение фронтали и горизонтали в плоскости основания

8. Высота пирамиды является перпендикуляром, проведенным из точки  $A$  к основанию пирамиды (см. пп. 10.3). Горизонтальную проекцию высоты пирамиды провести из точки  $A_1$  перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали плоскости  $h_1$ , а фронтальную проекцию – из точки  $A_2$  перпендикулярно фронтальной проекции фронтали плоскости  $f_2$  (рис. 14.10).

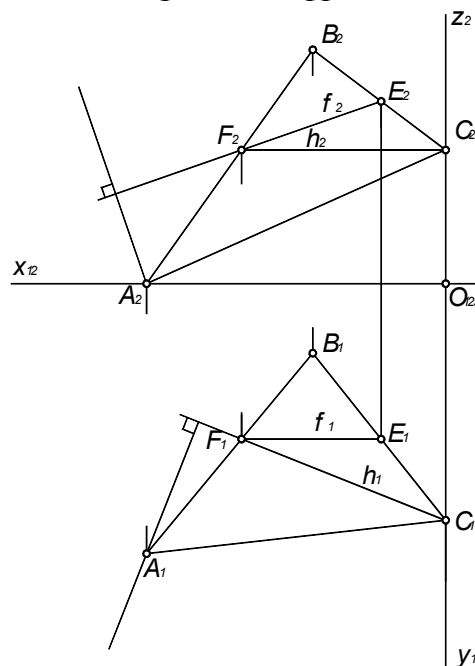


Рис. 14.10 Построение высоты пирамиды

9. Определить натуральную величину высоты пирамиды (рис. 14.11).

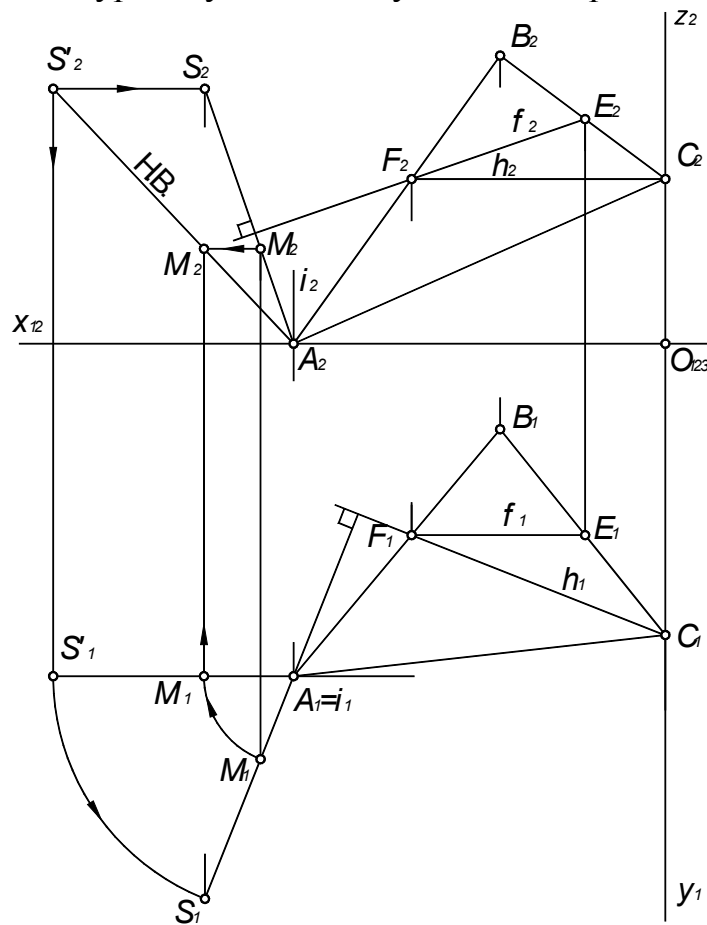


Рис. 14.11. Определение натуральной величины высоты пирамиды

Поскольку высота пирамиды является прямой общего положения, то способом вращения вокруг проецирующей прямой поворачиваем ее до положения линии уровня. Для этого на проекции перпендикуляра взять произвольную точку  $M$ . Прямую  $AM$  повернуть вокруг горизонтально-проецирующей прямой  $i$  до положения фронтали:

$$A_1M_1' \parallel x_{12}; M_2M_2' \perp M_1M_2.$$

На прямой  $A_2M_2'$  отложить натуральную величину высоту пирамиды:  $|A_2S_2| = 85 \text{ мм}$ . Выполнить обратные преобразования и получить вершину пирамиды точку  $S$ .

10. Построить ребра пирамиды и определить видимость способом конкурирующих точек (рис. 14.12).

На  $\Pi_1$  в качестве конкурирующих точек выбраны точки 1 и 2:  $1 \in (AC)$ ,  $2 \in (SB)$ . Фронтальная проекция точки 2 расположена выше ( $z_2 > z_1$ ), поэтому ребро  $SB$  будет видимо, а ребро  $AC$  невидимо. Ребра  $SA$ ,  $AB$  и  $BC$  будут также видимы.

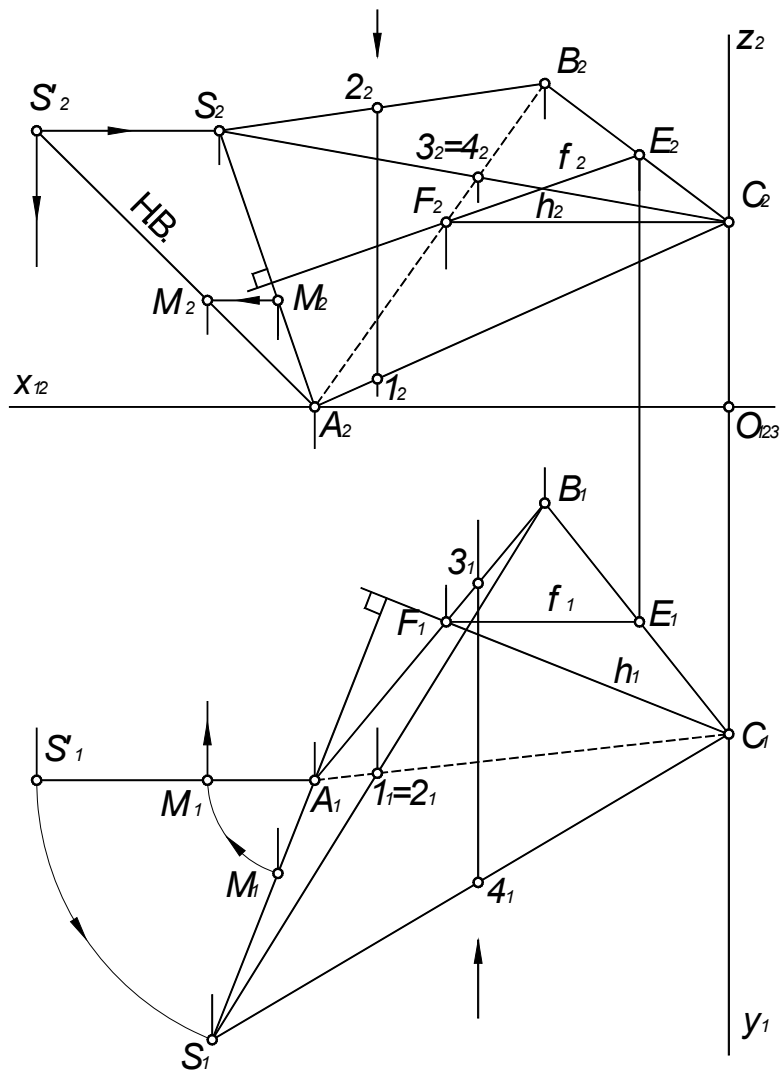


Рис. 14.12. Определение видимости

На  $\Pi_2$  в качестве конкурирующих точек выбраны точки  $3$  и  $4$ :  $3 \in (AB)$ ,  $4 \in (SC)$ . Горизонтальная проекция точки  $4$  расположена ниже ( $y_4 > y_3$ ), поэтому ребро  $SC$  будет видимо, а ребро  $AB$  невидимо. Ребра  $SA$ ,  $SB$  и  $BC$  будут также видимы.

11. Обвести в соответствии с типами линий, оформить работу. Пример выполнения графической работы приведен на рис. 14.13.

### Проекции пирамиды

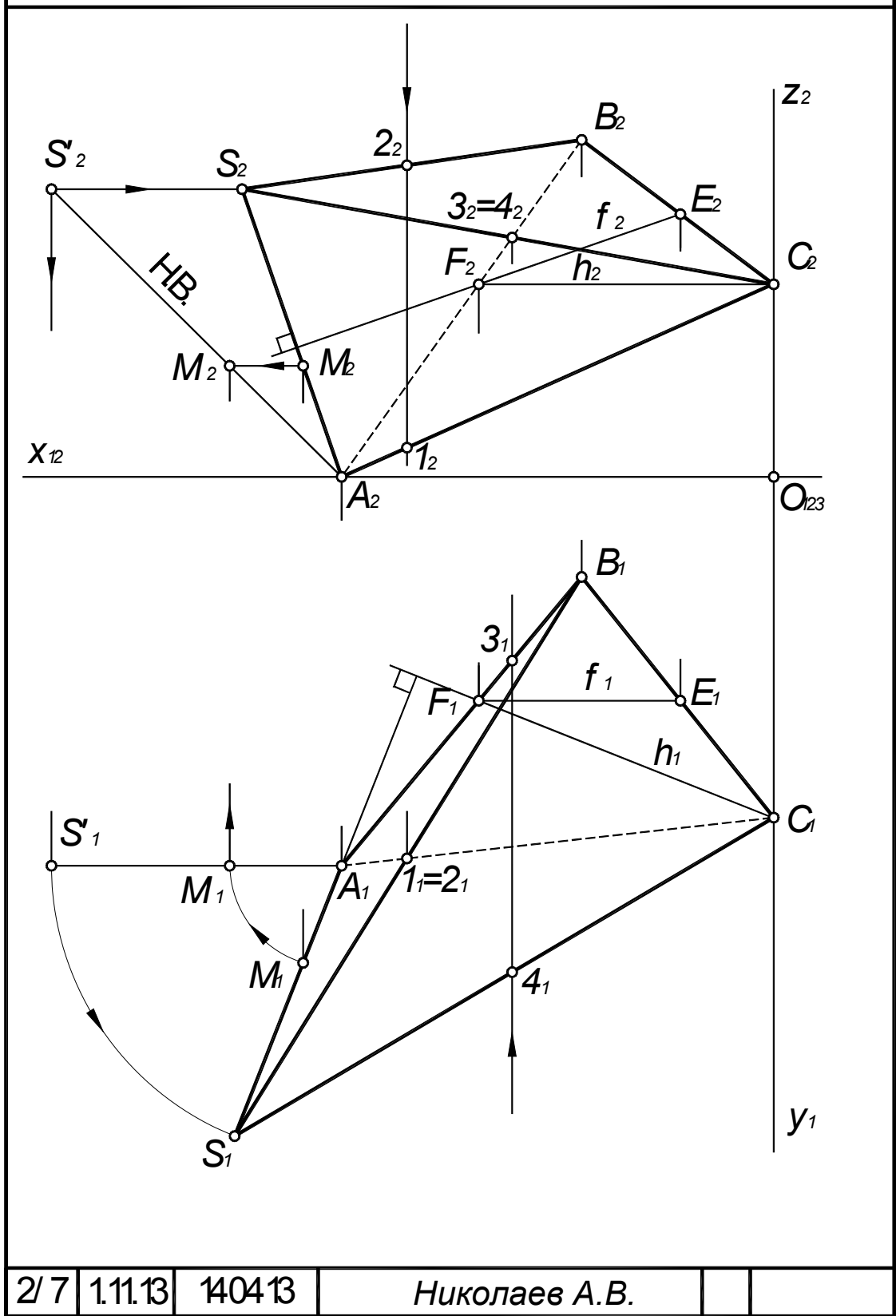


Рис. 14.13. Пример выполнения графической работы 2



Таблица 14.2

## Задания для графической работы 2 (координаты и размеры, мм)

№ варианта	$x_A$	$y_A$	$z_A$	$x_B$	$y_B$	$z_B$	$x_C$	$y_C$	$z_C$	$H$
1	117	90	9	52	25	79	0	83	48	85
2	120	90	10	50	25	80	0	85	50	85
3	115	90	10	52	25	80	0	80	45	85
4	120	92	10	50	20	75	0	80	46	85
5	117	9	90	52	79	25	0	48	83	85
6	115	7	85	50	80	25	0	50	85	85
7	120	10	90	48	82	20	0	52	82	85
8	116	8	88	50	78	25	0	46	80	85
9	115	10	92	50	80	25	0	50	85	85
10	18	10	90	83	79	25	135	48	83	85
11	20	12	92	85	80	25	135	50	85	85
12	15	10	85	80	80	20	130	50	80	85
13	16	12	88	85	80	25	130	50	80	80
14	18	12	85	85	80	25	135	50	80	80
15	18	90	10	83	25	79	135	83	48	80
16	18	40	75	83	117	6	135	47	38	80
17	18	75	40	83	6	107	135	38	47	80
18	117	75	40	52	6	107	0	38	47	80

## 14.3. Графическая работа 3 «Проекция сферы с отверстием»

**Задание:** Построить три проекции поверхности сферы со сквозным отверстием. Графическая работа выполняется на листе чертежной бумаги формата А3 (см. рис. П1).

Отверстие в поверхности сферы (рис. 14.14) выполнено четырьмя проецирующими плоскостями. Фронтальная проекция отверстия задана, необходимо построить горизонтальную и профильную проекции.

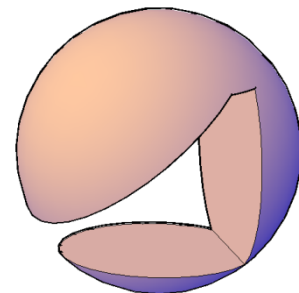


Рис. 14.14. Сфера с отверстием



- Сечение поверхности сферы плоскостью  $\alpha(\alpha_2)$  представляет собой окружность, которая проецируется на фронтальную и профильную плоскости проекций в виде отрезков, а на горизонтальную – в виде окружности  $l(l_1, l_2)$  с центром в точке  $O(O_1, O_2)$  радиусом  $r$ . Граница отверстия определится дугой  $DD'$ (рис. 14.16).
- Сечение поверхности сферы плоскостью  $\beta(\beta_2)$  представляет собой окружность, которая проецируется на фронтальную и горизонтальную плоскости проекций в виде отрезков, а на профильную – в виде окружности  $m(m_1, m_2)$  с центром в точке  $O(O_1, O_2)$  радиусом  $r'$ . Граница отверстия определится дугами  $CD$  и  $C'D'$ (см. рис. 14.16).
- Построение сечения поверхности сферы плоскостью  $\gamma(\gamma_2)$  аналогично сечению плоскостью  $\alpha(\alpha_2)$ . Граница отверстия определится дугами  $BC$  и  $B'C'$ (см. рис. 14.16).
- Сечение поверхности сферы плоскостью  $\delta(\delta_2)$  представляет собой окружность, которая проецируется на фронтальную плоскость проекций в виде отрезка, а на профильную и горизонтальную – в виде эллипсов. Граница отверстия определится дугами эллипсов  $CD$  и  $C'D'$ (рис. 14.17).

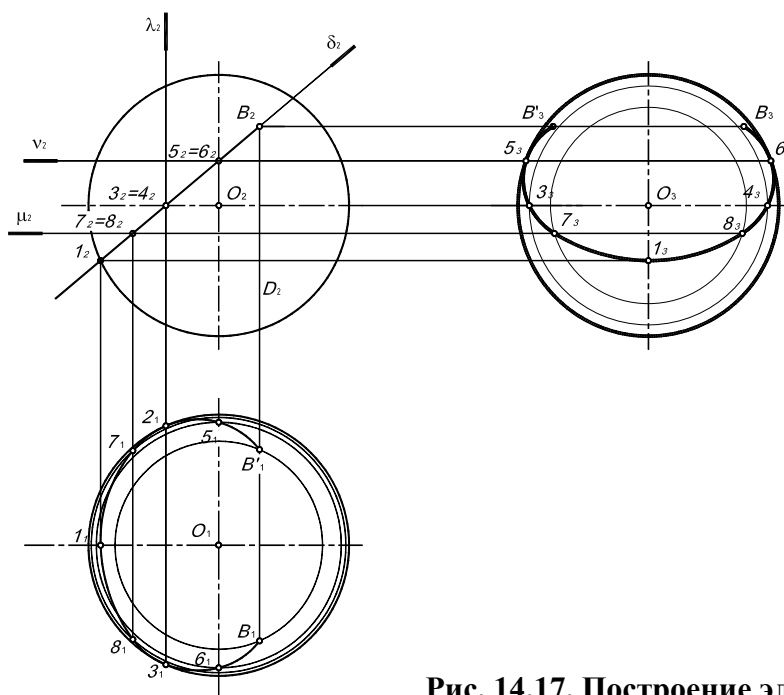


Рис. 14.17. Построение эллипса

4. Определить видимость (рис. 14.18). На фронтальной проекции видны все границы отверстия. На горизонтальной проекции видна часть границы отверстия, расположенная выше точек 3 и 4. На профильной – правее точек 5 и 6.

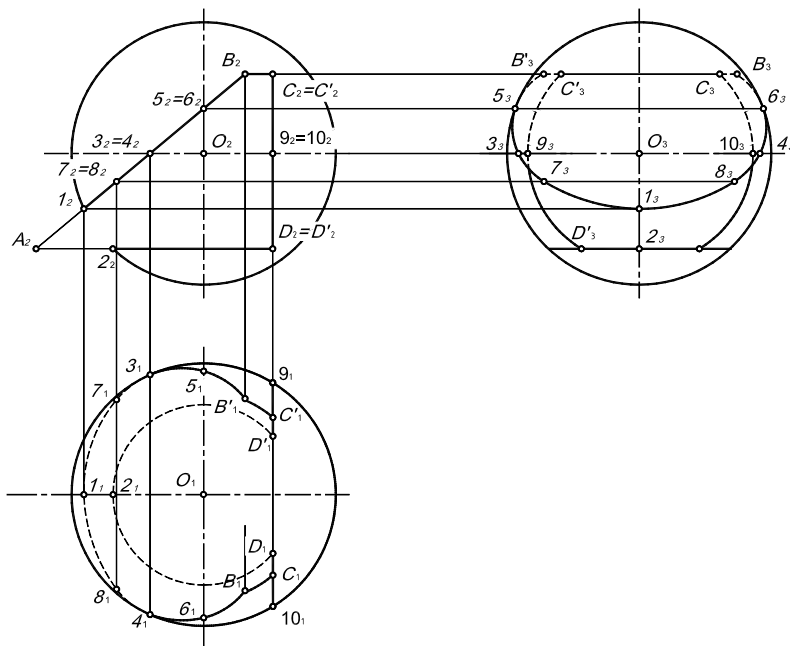


Рис. 14.18. Определение вимости

5. Выполнить обводку. Образец выполнения графической работы представлен на рис. 14.19.

Таблица 14.3

Задания для графической работы 3 (координаты и размеры, мм)

№ вар.	$x_O$	$y_O$	$z_O$	$x_A$	$y_A$	$z_A$	$x_B$	$y_B$	$z_B$	$x_C$	$y_C$	$z_C$	$x_D$	$y_D$	$z_D$	$R$
1	70	58	62	118	—	35	56	—	95	45	—	95	45	—	35	46
2	70	60	60	118	—	35	56	—	95	44	—	95	44	—	35	46
3	70	60	58	120	—	35	58	—	95	44	—	95	44	—	35	18
4	70	60	58	120	—	36	56	—	94	42	—	94	42	—	36	48
5	69	58	60	116	—	36	58	—	94	45	—	94	45	—	36	47
6	72	60	58	116	—	36	60	—	92	42	—	92	42	—	36	47
7	72	58	60	120	—	34	60	—	92	42	—	92	42	—	34	48
8	72	58	58	122	—	34	60	—	90	40	—	90	40	—	34	45
9	74	62	60	122	—	34	55	—	90	40	—	90/	40	—	34	45
10	69	58	60	20	—	36	81	—	94	94	—	94	94	—	36	47
11	74	62	58	20	—	36	80	—	92	94	—	92	94	—	36	47
12	72	62	62	20	—	35	80	—	92	92	—	92	92	—	36	48
13	72	60	62	22	—	35	82	—	90	92	—	90	92	—	35	48
14	70	60	60	18	—	35	82	—	90	90	—	90	90	—	35	48
15	70	60	58	18	—	34	82	—	94	92	—	94	90	—	34	50
16	72	62	58	20	—	34	84	—	94	96	—	94	96	—	34	60
17	70	62	60	18	—	32	84	—	90	96	—	90	96	—	32	50
18	68	60	60	20	—	32	86	—	92	95	—	92	95	—	32	50

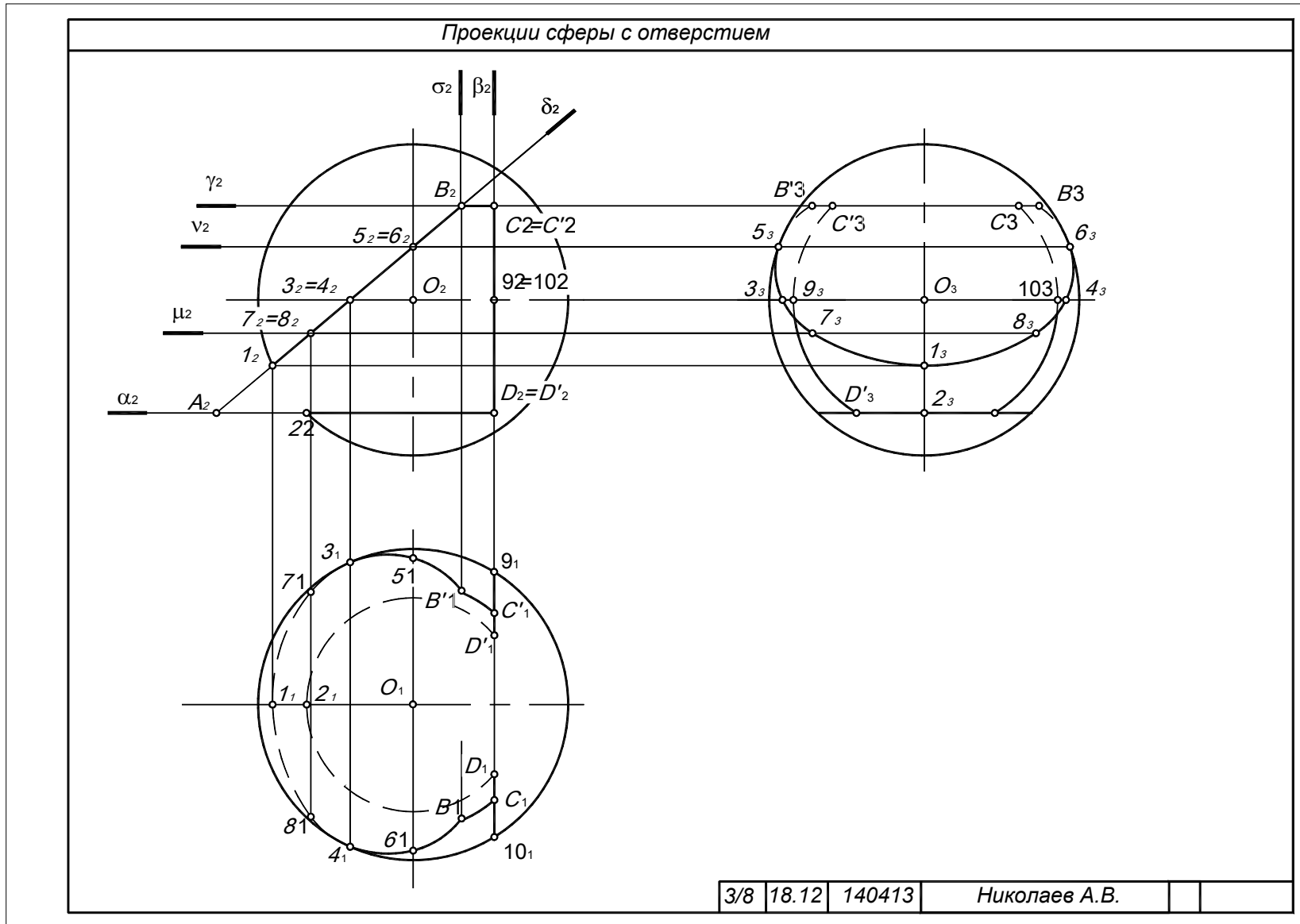


Рис. 14.19. Пример выполнения графической работы 3

#### 14.4. Графическая работа4«Сечение комбинированной поверхности проецирующей плоскостью»

**Задание:** Построить сечение комбинированной поверхности вращения плоскостью фронтально-проецирующей плоскостью  $\alpha(\alpha_2)$ . Графическая работа выполняется на листе чертежной бумаги формата А4 (см. рис. П1).

Комбинированная поверхность состоит из полусферы и конуса (рис. 14.20). В сечении полусферы получается дуга окружности, а в сечении конуса – часть эллипса (см. пп. 8.16).

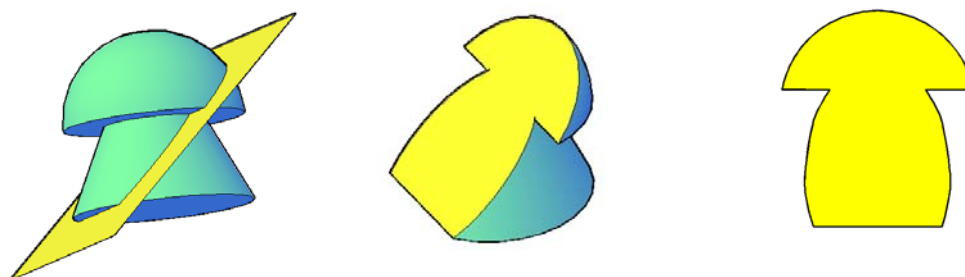


Рис. 14.20. Сечение поверхности плоскостью

#### Порядок выполнения работы:

1. Построить в тонких линиях двухкартинный комплексный чертеж поверхности и след секущей плоскости.
2. Определить опорные точки (рис. 14.21):

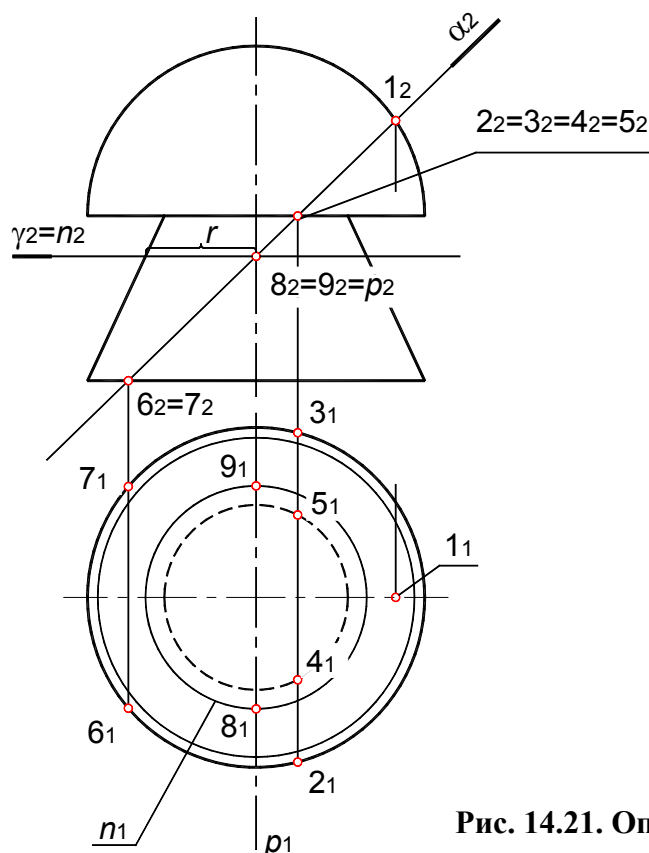
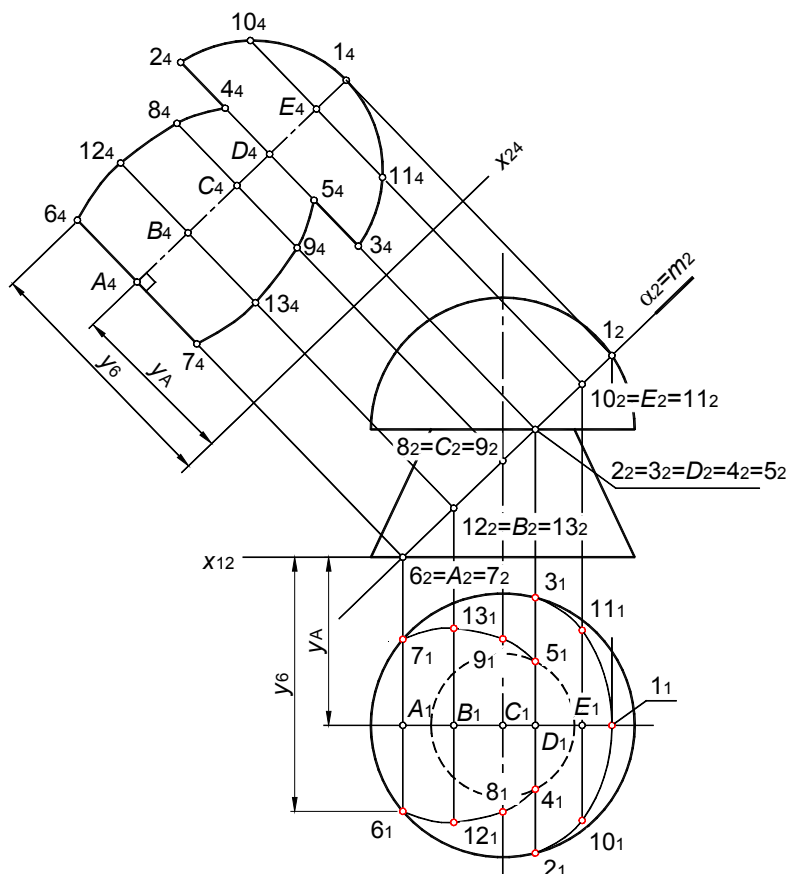


Рис. 14.21. Определение опорных точек

- $1$  – точка пересечения плоскости  $\alpha(\alpha_2)$  с очерковой образующей полусферы;



4. Определить видимость линии пересечения  $s$  относительно поверхности (см. рис. 14.22). В данном случае видимость определяется только на горизонтальной плоскости проекций. Границей видимости является основание полусферы, таким образом, видимы только точки  $1, 2, 3, 10$  и  $11$ , лежащие на поверхности полусферы. Точки  $2$  и  $3$  – точки смены видимости.
5. Определить натуральную величину сечения способом замены плоскостей проекций (см. пп. 11.1).



**Рис. 14.23. Определение натуральной величины сечения**

В данном случае выполняется замена горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$  на плоскость  $\Pi_4$  (рис. 14.23). Плоскость  $\Pi_4$  выбирается так, чтобы в системе плоскостей  $\Pi_1/\Pi_4$  плоскость  $\alpha$  заняла положение плоскости уровня:

- Провести ось  $x_{14}$  параллельно фронтальному следу плоскости;
- Построить вспомогательные точки  $A, B, C, D$  и  $E$  на оси симметрии сечения;
- Провести линию связи  $A_2A_4$  перпендикулярно оси  $x_{14}$  и отложить на ней расстояние  $y_A$  от оси  $x_{14}$ ;
- Точки  $6$  и  $7$  лежат на линии связи  $A_2A_4$ . Для построения точки  $6$  отложить по линии связи  $A_2A_4$  расстояние  $y_6$  от оси  $x_{14}$ ;
- Аналогично построить точки  $1, 12, 8, 4, 2, 10$ ;
- Точки  $7, 13, 9, 5, 4, 11$  строятся симметрично относительно оси сечения;



- Соединить полученные точки плавной лекальной кривой.
6. Нанести штриховку сплошными тонкими линиями под углом  $45^\circ$ . Если какие-либо линии сечения наклонены под углом, близким к  $45^\circ$  допускается наносить штриховку под углом  $30^\circ$  или  $60^\circ$ . Пример выполнения графической работы приведен на рис. 14.24.

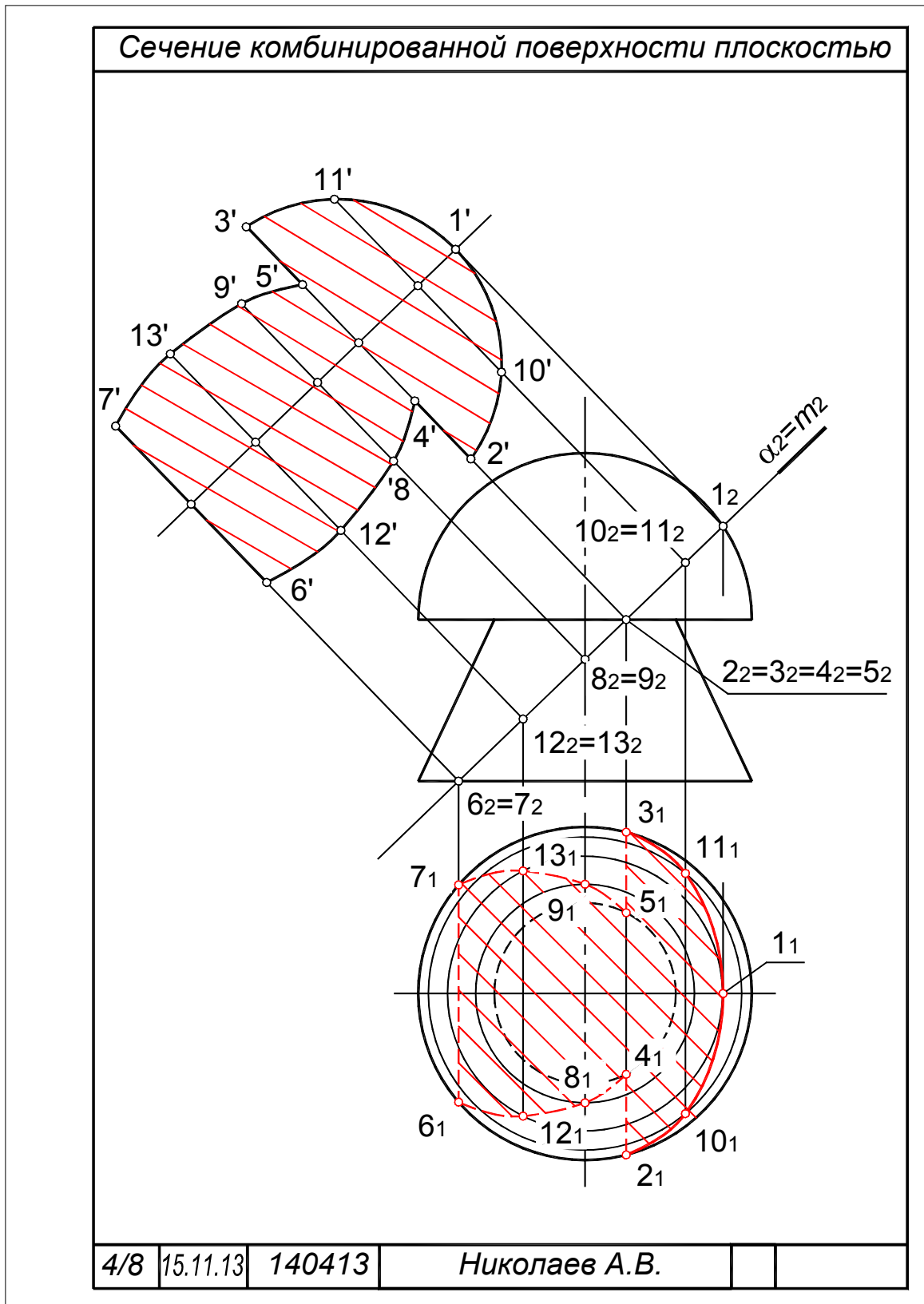
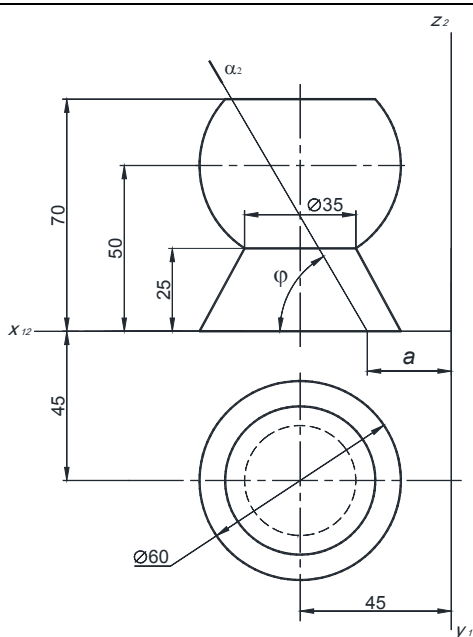


Рис. 14.24. Пример выполнения графической работы 4

Задания для графической работы 4 (координаты и размеры, мм)

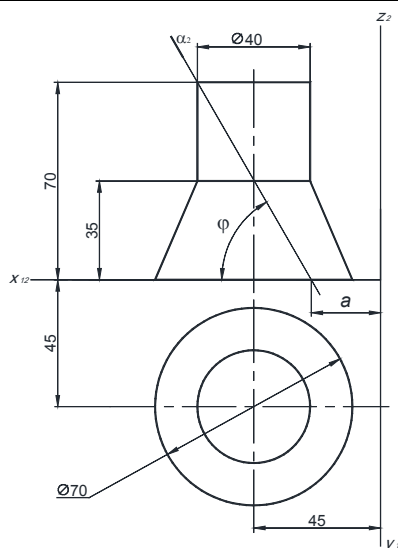
	<p>Вариант 1: <math>\alpha=20</math>; <math>\varphi=60^\circ</math>                  Вариант 2: <math>\alpha=15</math>; <math>\varphi=45^\circ</math>                  Вариант 3: <math>\alpha=35</math>; <math>\varphi=60^\circ</math></p>
	<p>Вариант 4: <math>\alpha=15</math>; <math>\varphi=60^\circ</math>                  Вариант 5: <math>\alpha=5</math>; <math>\varphi=45^\circ</math>                  Вариант 6: <math>\alpha=35</math>; <math>\varphi=60^\circ</math></p>
	<p>Вариант 7: <math>\alpha=20</math>; <math>\varphi=60^\circ</math>                  Вариант 8: <math>\alpha=15</math>; <math>\varphi=45^\circ</math>                  Вариант 9: <math>\alpha=35</math>; <math>\varphi=60^\circ</math></p>



Вариант 10:  $a=25$ ;  $\varphi=60^\circ$

Вариант 11:  $a=30$ ;  $\varphi=75^\circ$

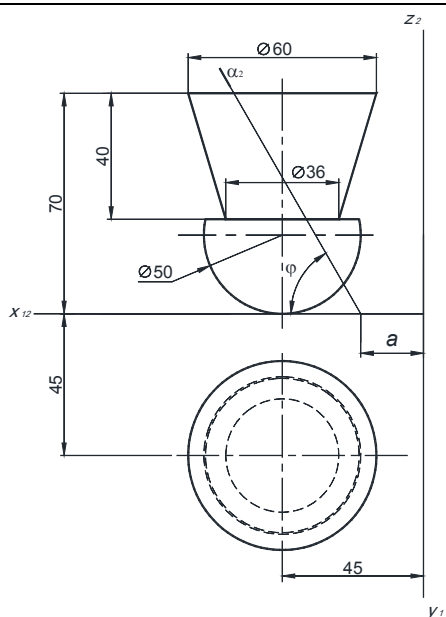
Вариант 12:  $a=15$ ;  $\varphi=45^\circ$



Вариант 13:  $a=25$ ;  $\varphi=60^\circ$

Вариант 14:  $a=10$ ;  $\varphi=60^\circ$

Вариант 15:  $a=5$ ;  $\varphi=45^\circ$



Вариант 16:  $a=20$ ;  $\varphi=60^\circ$

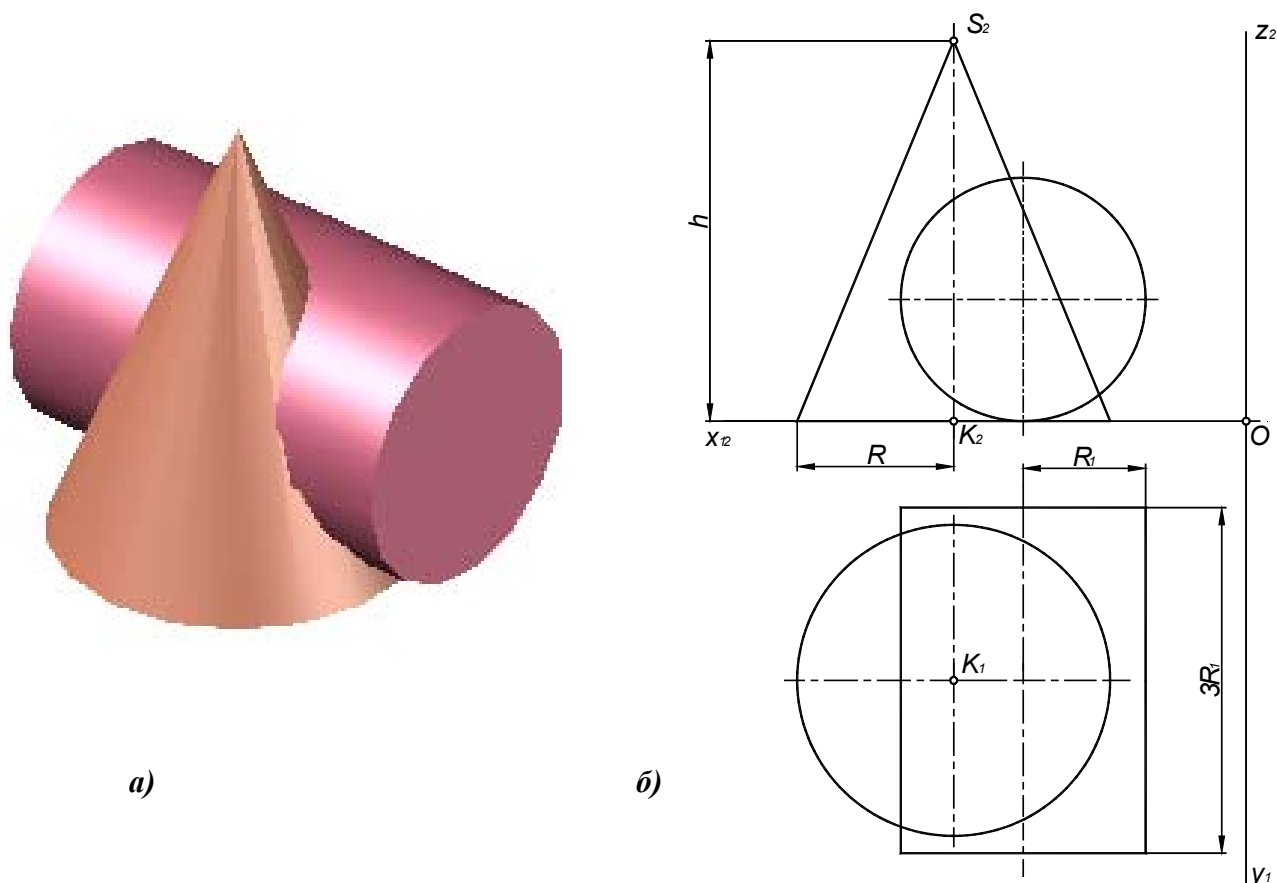
Вариант 17:  $a=15$ ;  $\varphi=45^\circ$

Вариант 18:  $a=20$ ;  $\varphi=45^\circ$

## 14.5. Графическая работа 5 «Пересечение поверхностей»

**Задание:** Построить линию пересечения поверхностей прямого кругового конуса и прямого кругового цилиндра (рис. 14.25). Графическая работа выполняется на листе чертежной бумаги формата А4.

В данном примере линия пересечения поверхностей на плоскости  $\Pi_2$  совпадает с очерком цилиндра, поэтому фактически остается построить линию пересечения на плоскости  $\Pi_1$ .



**Рис. 14.25. Пересечение поверхностей:**

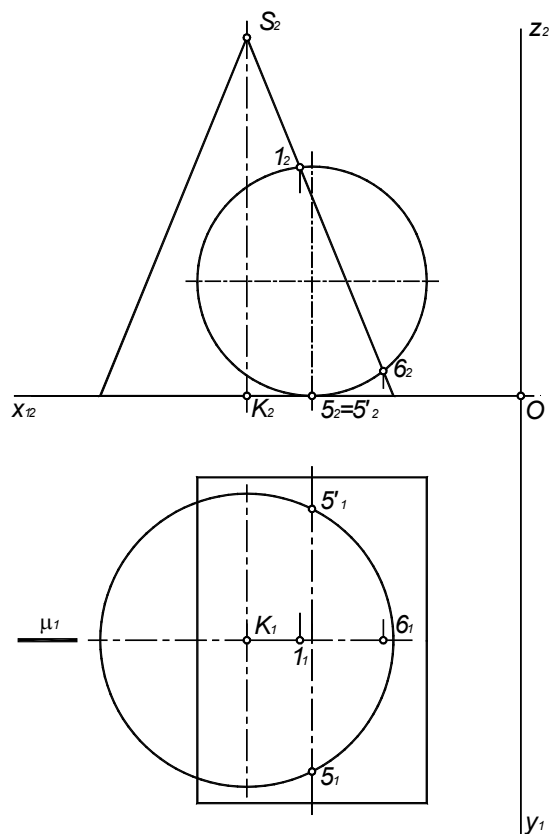
*a* – наглядное изображение; *б* – комплексный чертеж

### Порядок выполнения работы:

1. По заданным размерам построить горизонтальную и фронтальную проекции поверхностей в тонких линиях (см. рис. 14.26, б).

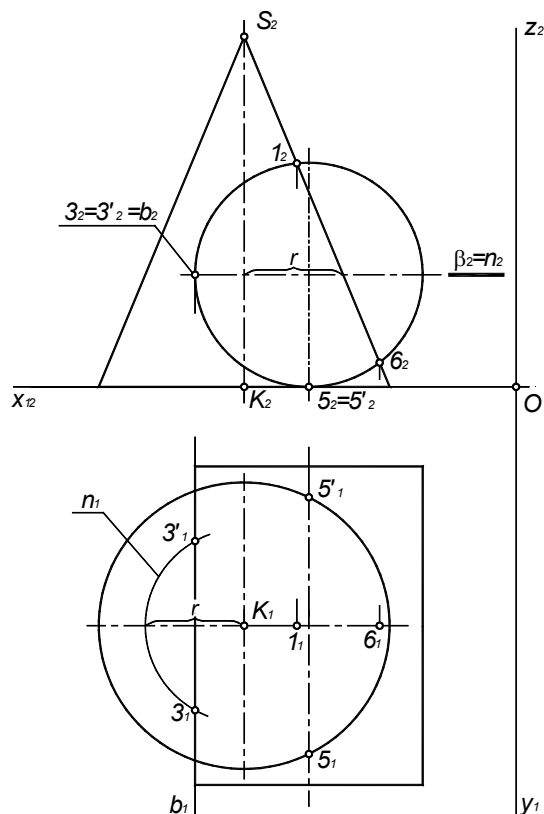
2. Определить опорные точки (рис. 14.26).

Конус и цилиндр имеют общую плоскость симметрии  $\mu(\mu_1)$ , параллельную плоскости  $\Pi_2$ . Поэтому точки **1**, **5,5'** и **6** линии пересечения получаются как результат пересечения очерковых образующих конуса и цилиндра.



**Рис. 14.26. Определение опорных точек линии пересечения поверхностей**

Также к опорным точкам относятся точки **3** и **3'** (рис. 14.27). Они являются точками смены видимости линии пересечения на горизонтальной плоскости проекций.



**Рис. 14.27. Определение точек смены видимости линии пересечения поверхностей**

Для определения этих точек нужно провести горизонтальную плоскость уровня  $\beta(\beta_2)$ . Плоскость  $\beta(\beta_2)$  пересекает цилиндр по образующей – прямой  $b$ , а конус – по окружности  $n$ , радиусом  $r$ :

$$b(b_1, b_2) = \Phi^u \cap \beta(\beta_2); n(n_1, n_2) = \Phi^k \cap \beta(\beta_2).$$

Построив горизонтальные проекции прямой  $b$  и окружности  $n$ , определить точки их пересечения  $3$  и  $3'$ :

$$3_1, 3'_1 = b_1 \times n_1; 3_2, 3'_2 = 3_1 3_2 \cap \beta_2.$$

3. Промежуточные точки линии пересечения также определяют с помощью горизонтальных плоскостей уровня.

Фронтальные плоскости уровня пересекают поверхность прямого кругового конуса по гиперболам, следовательно, для решения данной задачи нужно применить горизонтальные плоскости уровня, которые рассекают обе поверхности по простым линиям: конус – по окружностям, а цилиндр – по прямым линиям.

Более подробно разберем построение точек  $2$  и  $2'$  (рис. 14.28). Для их определения надо пересечь обе поверхности вспомогательной горизонтальной плоскостью уровня  $\alpha(\alpha_2)$ . Плоскость  $\alpha(\alpha_2)$  пересекает конус по окружности  $m$  радиусом  $r'$ , а цилиндр – по прямой  $a$ :

$$m(m_1, m_2) = \Phi^k \cap \alpha(\alpha_2); a(a_1, a_2) = \Phi^u \cap \alpha(\alpha_2).$$

Построив горизонтальные проекции прямой  $a$  и окружности  $m$ , определить точки их пересечения  $C$  и  $C'$ :

$$2_1, 2'_1 = a_1 \times m_1; 2_1, 2'_1 = 2_1 2_2 \cap \alpha_2.$$

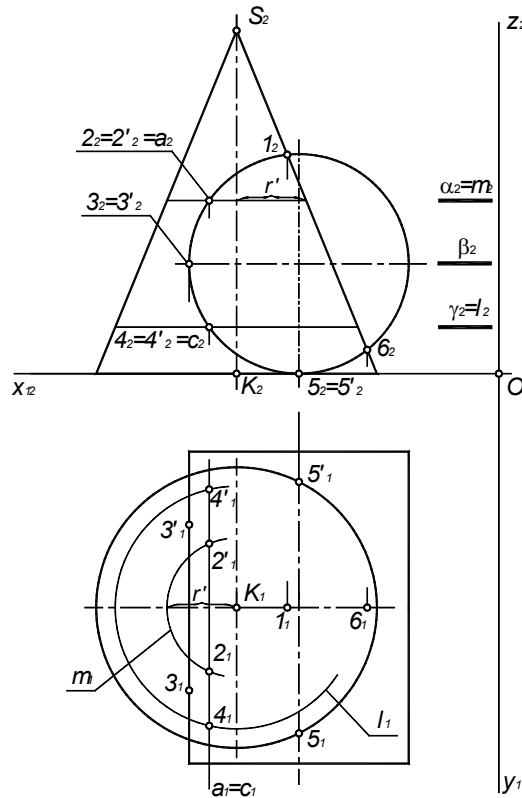
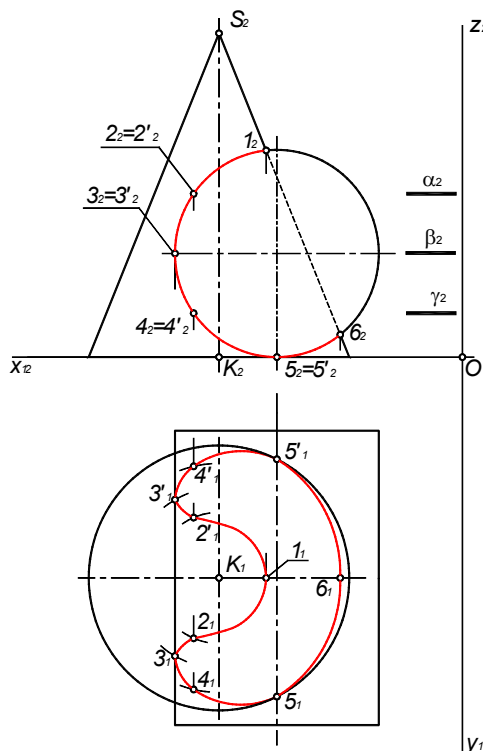


Рис. 14.28. Определение промежуточных точек линии пересечения поверхностей

Аналогичным образом определяют точки **4** и **4'**, формирующие линию пересечения (см. рис. 14.28). Они получены с помощью горизонтальной плоскости уровня  $\gamma(\gamma_2)$ .

Количество вспомогательных плоскостей должно быть достаточным для определения характера линии пересечения. Пределы этих плоскостей по высоте определяют высшая и низшая опорные точки линии пересечения поверхностей.

4. Последовательно соединить одноименные проекции полученных точек тонкой плавной лекальной кривой, причем полученная линия не должна выходить за пределы области перекрытия проекций данных поверхностей (рис. 14.29).



**Рис. 14.29. Получение линии пересечения поверхностей**

5. Определить видимость линии пересечения поверхностей и их очерковых образующих (рис. 14.30).

На горизонтальной плоскости проекций видимость линии пересечения определяется по поверхности цилиндра. Видимы будут те точки линии пересечения, которые на  $\Pi_2$  расположены выше плоскости  $\beta_2$  – точки **1**, **2,2'**, **3** и **3'**. Точки **3** и **3'** являются точками смены видимости линии пересечения на  $\Pi_1$ . Очерковая образующая цилиндра будет невидима между точками **3** и **3'**. Поскольку основание конуса расположено ниже цилиндра, оно будет невидимо под проекцией цилиндра.

На фронтальной плоскости проекций видимы будут те точки линии пересечения, которые лежат перед плоскостью симметрии  $\mu(\mu_1)$  – точки **1,2**, **3,4**, **5** и **6**. Образующая конуса будет невидима между точками **1** и **6**, т.к. она находится внутри цилиндра. Очерковая образующая цилиндра видима полностью.

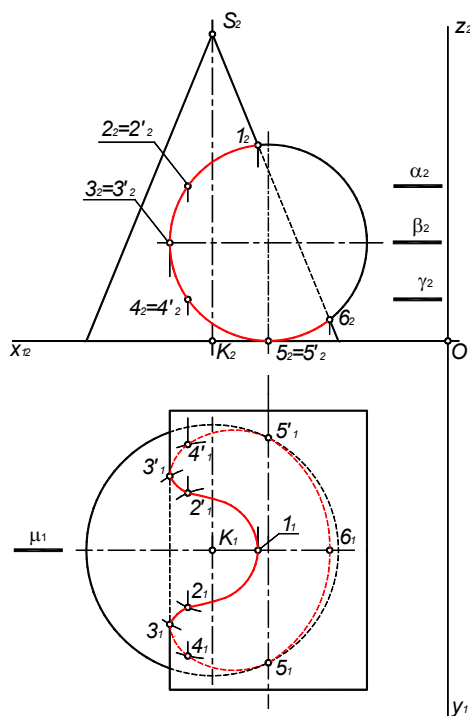


Рис. 14.30. Определение видимости линии пересечения поверхностей

6. Обвести в соответствии с типами линий, оформить работу. Пример выполнения графической работы приведен на рис. 14.31.

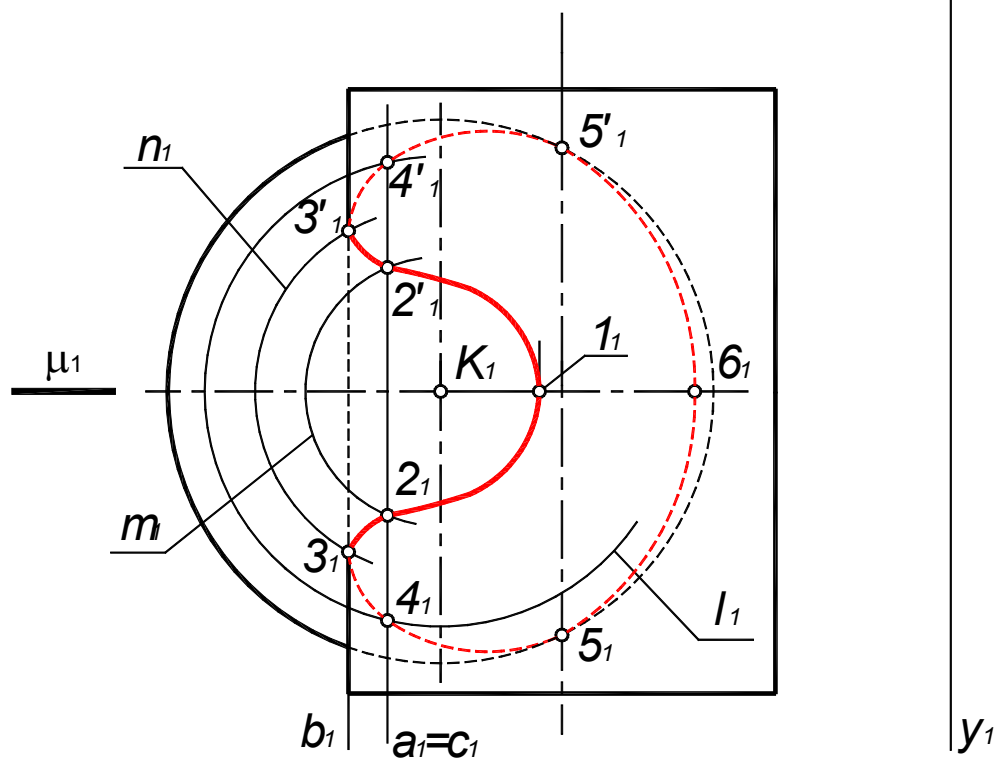
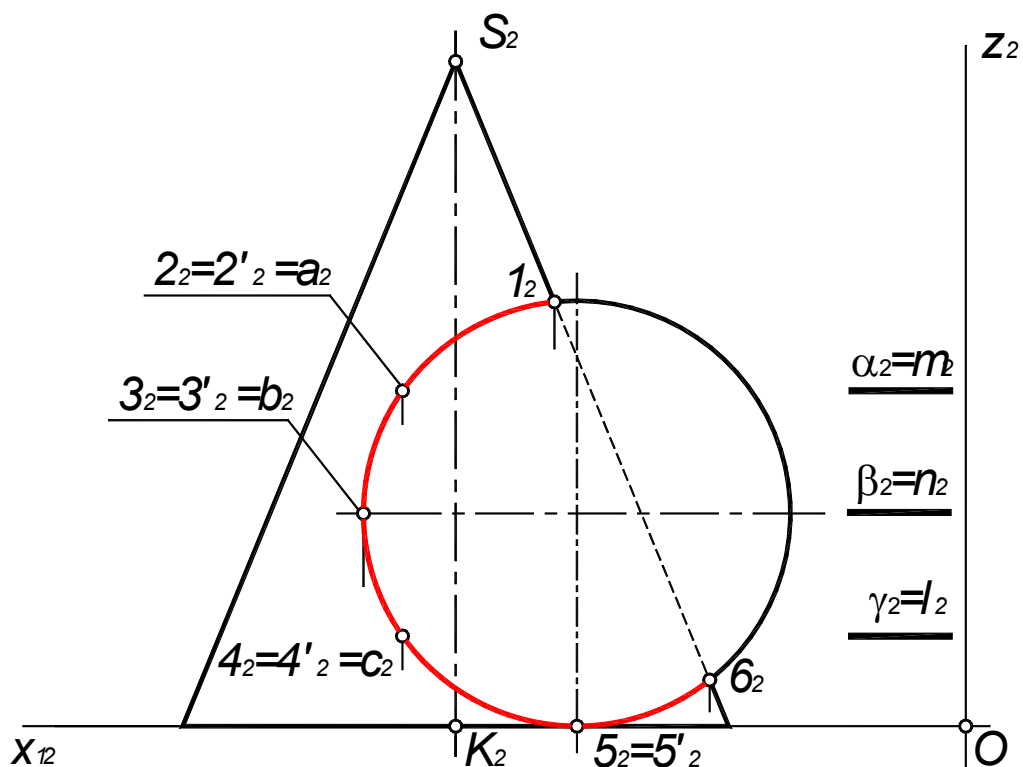
Таблица 14.5

**Задания для графической работы 5 (координаты и размеры, мм)**

№вар.	$x_K$	$y_K$	$z_K$	$R$	$h$	$x_E$	$y_E$	$z_E$	$R_I$
1	80	70	0	45	100	50	70	32	35
2	80	70	0	45	100	50	70	32	30
3	80	72	0	45	100	53	72	32	32
4	80	72	0	45	100	60	72	35	35
5	70	70	0	44	102	50	70	32	32
6	75	70	0	45	98	65	70	35	35
7	75	70	0	45	98	70	70	35	35
8	75	72	0	45	98	75	72	35	35
9	75	72	0	43	98	80	72	35	35
10	75	75	0	44	102	50	75	35	35
11	80	75	0	43	102	85	75	36	36
12	80	75	0	43	102	85	75	40	35
13	80	75	0	42	102	80	75	40	35
14	80	70	0	42	102	80	70	40	32
15	80	70	0	42	100	75	70	40	32
16	70	72	0	43	100	75	72	42	32
17	70	72	0	44	100	70	72	40	32
18	70	74	0	44	100	70	74	36	32



Пересечение поверхностей



5/7 1.12.13 140413

Николаев А.В.

Рис. 14.30. Пример выполнения графической работы 5

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назовите основные задачи начертательной геометрии.
2. Назовите основные методы проецирования геометрических форм на плоскость.
3. Сформулируйте основные свойства параллельного проецирования.
4. Что такое ортогональное проецирование?
5. Что называют обратимостью чертежа?
6. Что такое комплексный чертеж?
7. Сформулируйте основное свойство комплексного чертежа.
8. Постройте проекции точек, расположенных в различных октантах.
9. Перечислите способы задания прямых линий.
10. Укажите частные положения прямых линий.
11. Какие прямые называют линиями уровня?
12. Какие прямые называют проецирующими прямыми?
13. Сформулируйте признак параллельности прямых.
14. Как изображаются на чертеже пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые линии?
15. Могут ли скрещивающиеся прямые линии иметь параллельные проекции?
16. Перечислите способы задания плоскостей.
17. Что такое след плоскости?
18. Какие плоскости называют линиями уровня?
19. Какие плоскости называют проецирующими прямыми?
20. Какие плоскости чаще всего задаются следами?
21. Сформулируйте признак принадлежности прямой линии плоскости.
22. Что такое линии уровня плоскости?
23. Что такое линии наибольшего наклона плоскости?
24. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.
25. Сформулируйте условие параллельности двух плоскостей.
26. Какие задачи называются позиционными?
27. Сформулируйте алгоритм решения первой позиционной задачи.
28. Сформулируйте алгоритм решения второй позиционной задачи.
29. Как определяют видимость элементов геометрических образов относительно плоскостей проекций?
30. Сформулируйте теорему о проекциях прямого угла.
31. Сформулируйте условие перпендикулярности двух прямых общего положения.
32. Сформулируйте условие перпендикулярности прямой общего положения и плоскости общего положения.
33. Сформулируйте условие перпендикулярности двух плоскостей общего положения.
34. Каковы основные способы задания поверхностей?
35. Что называют каркасом поверхности?
36. Что называют определителем поверхности?
37. Укажите основные свойства поверхностей вращения.
38. Какие поверхности называют торовыми?
39. Какие поверхности называют поверхностями сдвига?
40. Какие поверхности называют винтовыми?
41. Сформулируйте алгоритм определения точек линии пересечения поверхности плоскостью.
42. Какие точки линии пересечения поверхности плоскостью называют главными (опорными)?
43. Какие линии получаются в сечении цилиндра плоскостью?
44. Какие линии получаются в сечении конуса плоскостью?
45. Сформулируйте признак принадлежности точки и линии поверхности.

46. Что называют порядком кривой?
47. Сформулируйте алгоритм построения линии пересечения поверхностей.
48. Назовите основные способы построения линий пересечения поверхностей.
49. Какие точки линии пересечения поверхностей называют опорными?
50. В какой последовательности соединяются точки искомой линии пересечения поверхностей и как определяется ее видимость?
51. В чем состоит принцип преобразования чертежа способом замены плоскостей проекций?
52. Что определяет направление новой плоскости проекций при переводе плоскости общего положения в проецирующее?
53. Сформулируйте алгоритм решения задачи по определению углов наклона плоскости к плоскостям проекций способом замены плоскостей проекций?
54. Сформулируйте алгоритм решения задачи по определению натуральной величины плоскости общего положения способом замены плоскостей проекций?
55. В чем состоит принцип преобразования чертежа способом плоско-параллельного перемещения?
56. В чем состоит принцип преобразования чертежа способом вращения вокруг проецирующей прямой?
57. Можно ли считать вращение вокруг проецирующей прямой плоскопараллельным перемещением и почему?
58. Сформулируйте алгоритм решения задачи по определению натуральной величины плоскости общего положения способом плоскопараллельного перемещения.
59. Как определить расстояния от точки до плоскости общего положения?
60. Как определить расстояние от точки до прямой общего положения?
61. Какие проекции называют аксонометрическими?
62. Назовите виды аксонометрических проекций.
63. Что называют коэффициентом (показателем) искажения?
64. Укажите натуральные и приведенные показатели искажения по направлениям осей в прямоугольной изометрии и диметрии.
65. Укажите направления и величины осей эллипсов изометрических и диметрических проекций окружности.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гордон, В.О.** Курс начертательной геометрии: учебное пособие / В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огневский; под ред. Ю.Б. Иванова. – 23-е изд., перераб. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 272с.
2. **Бубенников, А.В.** Начертательная геометрия: учебник для втузов / А.В. Бубенников. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1985. – 288с.
3. **Бубенников, А.В.** Начертательная геометрия: учебник для вузов / А.В. Бубенников, М.Я. Громов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1973. – 416с.
4. **Виницкий, И.Г.** Начертательная геометрия: учебник для вузов / И.Г. Виницкий. – М.: Высшая школа, 1975. – 280с.
5. **Капустина, О.А.** Начертательная геометрия (конспект лекций): учебное пособие / О.А. Капустина, Л.М. Колосунина, С.С. Станков. ГПИ им. А.А. Жданова – Горький, 1970.
6. **Лагерь, А.И.,** Инженерная графика: учебник для инж. техн спецвузов / А.И. Лагерь, Э.А. Колесникова. – М.: Высшая школа, 1985. – 176с.
7. **Локтев, О.В.** Краткий курс начертательной геометрии: учебник для втузов / О.В. Локтев. – 2-е изд., перераб. и доп., – М.: Высшая школа, 1985. – 136с.
8. **Посвянский, А.Д.** Краткий курс начертательной геометрии: учебник для всех специальностей втузов, кроме строит. и архитект / А.Д. Посвянский. – 3-е изд., – М.: Высшая школа, 1970. – 240 с.
9. **Скобелева, И.Ю.** Начертательная геометрия: учебное пособие / И.Ю. Скобелева, И.А. Ширшова, М.Л. Мухина; НГТУ. Нижний Новгород, 2006. – 150 с.
10. **Фролов, С.А.** Начертательная геометрия: учебник для втузов / С.А. Фролов. – 2-е изд., перераб. и доп., – М.: Машиностроение, 1983. – 240с.
11. **Четверухин, Н.Ф.** и др. Курс начертательной геометрии: учебник для всех специальностей технических вузов / Н.Ф. Четверухин и др. – М.: Гос. из-во тех.-теор. лит, 1956. – 436с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

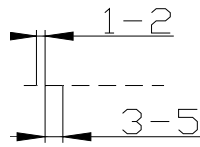
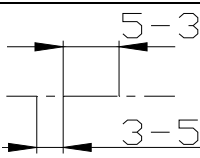
*Таблица П1*

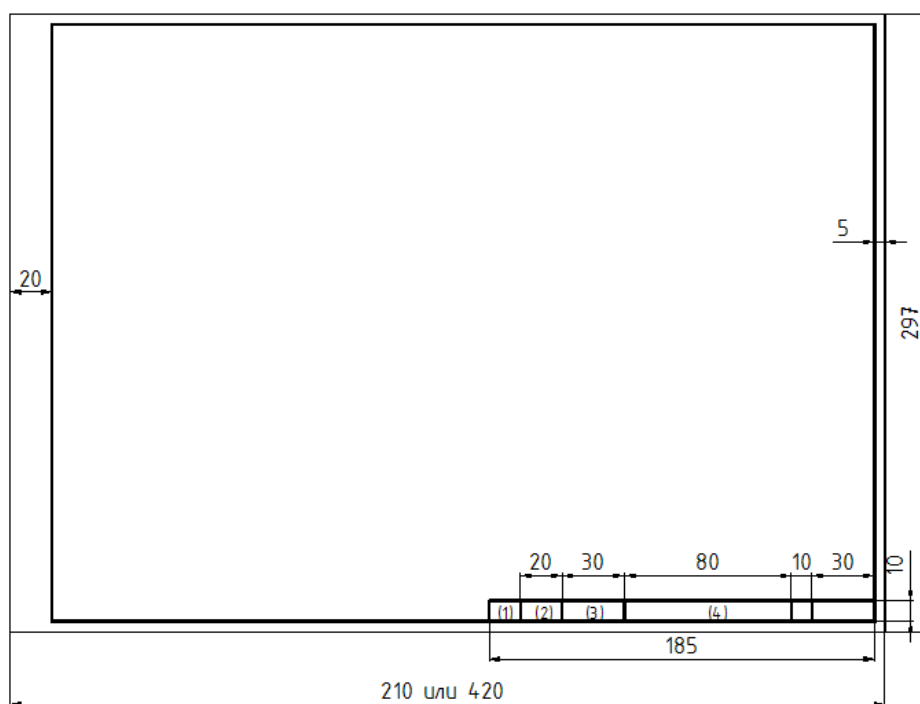
### *Основные форматы*

A0	A1	A2	A3	A4
841×1189	584×841	420×584	420×297	210×297

*Таблица П2*

### *Типы линий*

Название	Начертание	Толщина	Назначение
Сплошная толстая основная	—————	$s = 0,5-1.4$	Линии видимого контура; Линии контура сечений
Сплошная тонкая	—————	$s/3-s/2$	Линии штриховки
Штриховая		$s/3-s/2$	Линии невидимого контура
Штрих-пунктирная		$s/3-s/2$	Осевые и центровые линии
Разомкнутая	- - - -	$s-1.5s$	Линии сечений (следы секущих плоскостей)



**Рис. П1. Пример оформления бланка графической работы**

- графа (1)* – номер работы и номер варианта дробью, например: 1/12;
- графа (2)* – дата выполнения работы;
- графа (3)* – индекс группы;
- графа (4)* – фамилия и инициалы студента

Нижегородский государственный технический  
университет им. Р.Е. Алексеева

Кафедра "Инженерная графика"

**ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ  
ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ**

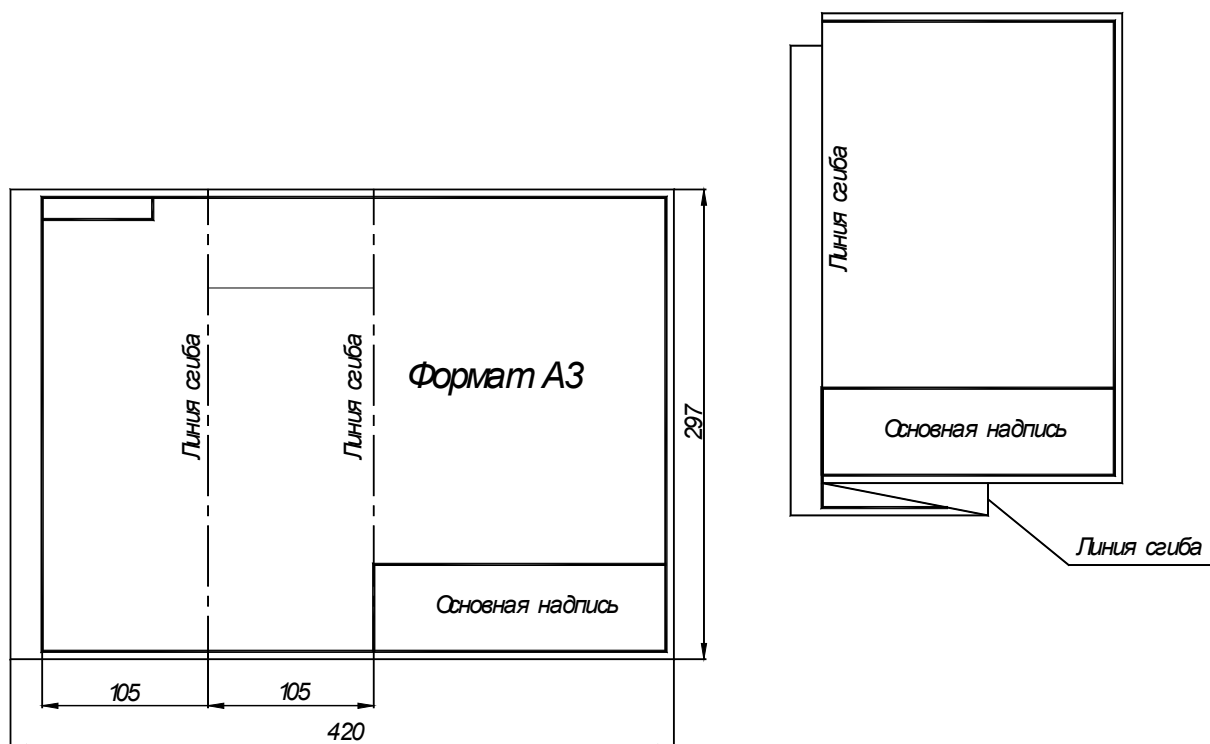
Вариант №

Выполнил: студент гр.  
Николаев А.В.  
Проверил: Ширшова И.А.

Оценка	Подпись	Дата
--------	---------	------

2013

**Рис. П2. Оформление титульного листа**



**Рис. П3. Складывание листа формата А3 по ГОСТ 2.501-68**

### *Шрифты чертежные*

Все надписи на чертежах и схемах выполняются *шрифтом чертежным* в соответствии с ГОСТ 2.304-81 (рис. П4, П5).



Рис. П4. Русский алфавит (шрифт типа Б с наклоном)

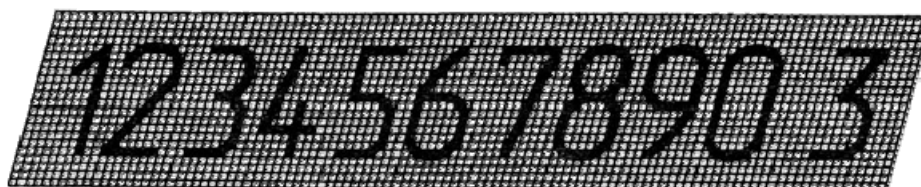


Рис. П5. Арабские цифры

**Скобелева Ирина Юрьевна  
Ширшова Ирина Александровна**

## **НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

**Редактор Е.В. Комарова**  
**Технический редактор Т.П. Новикова**  
**Компьютерная верстка И.Ю. Скобелева**

**Подписано в печать 28.06.2013. Формат 60×84 1/8.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. ?,0.  
Уч. изд. л. ?,0. Тираж 300 экз.. Заказ 980**

---

**Нижегородский государственный технический университет.  
Типография НГТУ.**

**Адрес университета и полиграфического предприятия:  
603950, ГСП-41, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.**