Н.В. Ершов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть III

Комплекс учебно-методических материалов
для студентов всех форм обучения

Нижегородский государственный
технический университет

Нижний Новгород 2008

531(075)
Е80

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Р.Е. Алексеева

Н.В. Ершов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть III

ПРАКТИКУМ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ ПО РАЗДЕЛАМ КУРСА

КОМПЛЕКС УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Рекомендовано Ученым советом Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева в качестве учебно-методического пособия для студентов машиностроительных специальностей всех форм обучения

БИБЛИОТЕКА НГТУ

НТБ НГТУ
1205679

Нижний Новгород 2008

УДК 531.43 (075.5)

Ершов Н.В. Теоретическая механика. Часть III. Практикум выполнения расчетно-графических работ по разделам курса: комплекс учебно-методических материалов / Н.В. Ершов; Нижегород. гос. техн. ун-т. – Нижний Новгород, 2008. 52 с.

Учебно-методическое пособие состоит из расчетно-графических работ (РГР), позволяющих студентам подготовиться к выполнению расчетно-графических работ по разделам курса «Теоретическая механика». Даются рекомендации для самостоятельного выполнения расчетно-графических работ с целью закрепления теоретического материала и приобретения навыков исследования, необходимых для глубокого понимания физических явлений, происходящих с конструкцией или механизмом при изменении исходных параметров. Расчетно-графические работы выполняются по индивидуально заданным вариантам с использованием современных ПЭВМ.

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре «Теоретическая и прикладная механика» Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева и предназначено для очного, заочного и дистанционного обучения студентов.

Рецензент доктор технических наук, профессор Н.Ф. Ершов

Редактор Э.Б. Абросимова

Подписано в печать 30.12.2008. Формат 60 x 84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 6,0. Тираж 500 экз. Заказ 43.

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева.
Типография НГТУ. 603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

© Нижегородский государственный технический университет, 2008

© Ершов Н.В., 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 4
Общие методические указания 5
РГР С-1. Определение опор плоской конструкции 6
РГР С-2. Определение опор составных конструкций. Система двух тел 10
РГР С-3. Определение опор твердого тела. Пространственная задача 13
РГР К-1. Кинематика точки 16
РГР К-2. Плоское движение твердого тела 20
РГР К-3. Сложное движение точки 23
РГР Д-1. Исследование относительного движения точки 25
РГР Д-2. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы 30
РГР Д-3. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы 35
РГР Д-4. Применение принципа Даламбера к определению статических и динамических составляющих реакций связей 40
РГР Д-5. Применение уравнения Лагранжа второго рода к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы 43
Список литературы 48
Приложение 49

Введение

Теоретическая механика относится к физико-математическим наукам, позволяющим изучать общеинженерные дисциплины, такие как теория механизмов и машин, сопротивление материалов, детали машин, гидравлика, основы проектирования технологического оборудования, станков с программным управлением и др. На основе теорем и принципов теоретической механики решаются многие инженерно-технические задачи и осуществляется проектирование машин, конструкций и сооружений.

Глубокое усвоение курса теоретической механики требует не только хорошего понимания теории, но и приобретения надежных навыков в самостоятельном решении исследовательских задач с принятием рациональных решений, отвечающих современным требованиям.

Расчетно-графические работы (РГР) и тренировочные задания, помещенные в учебно-методическом пособии, выполняются студентами по предлагаемым методикам и индивидуальным вариантам для разделов теоретической механики. Результаты предварительных расчетов проверяются на ПЭВМ, дальнейшие исследования заключаются в получении данных при изменении исходных параметров. Это служит основой для организации учебно-исследовательской работы студентов по теоретической механике.

Учебно-методическое пособие может быть использовано инженерно-техническими работниками в практической деятельности.

Общие методические указания

Решение практических задач по разделам статика, кинематика и динамика, позволит окончательно закрепить полученные теоретические знания. Соединение теории и практики обеспечивает высокий уровень профессиональных знаний в теоретической механике и создает прочный фундамент для освоения курсов: «Теория механизмов и машин», «Сопротивление материалов», «Детали машин».

Организация рабочего места для самостоятельного решения практических задач теоретической механики предусматривает:

- наличие теоретического материала (учебники и учебные пособия);
- список необходимых формул и пояснений к ним (справочник терминов, обозначений и понятий);
- методические рекомендации по решению типовых задач (учебно-методическое пособие);
- наличие чертежных принадлежностей, бумаги, цветных карандашей (фломастеров) и т.п.;
- вычислительную технику (калькулятор, ноутбук);
- справочник по высшей математике и физике;
- другие материалы и предметы, которые вы сочтете полезными для себя на рабочем месте.

Методика решения практических задач предусматривает строгую последовательность действий, поэтому необходимо:

- внимательно изучить и, главное, понять пример решения типовой тренировочной задачи;
- выбрать варианты для самостоятельного решения;
- записать условие и дать пояснение для всех величин, входящих в задачу. Размерности (при необходимости) привести к системе СИ;
- изобразить исходную схему, отображающую условие задачи;
- составить (начертить) и пояснить расчетную схему, отражающую физическую сущность задачи (или работу механизма, представленного в виде схемы);
- ход решения необходимо сопровождать кратким пояснением.

ВНИМАНИЕ! *Пользуйтесь цветным изображением схем конструкции (действующих сил, кинематических характеристик и прочее). Решение задач оформляйте в рабочей тетради или записывайте на дискете, которую необходимо представить преподавателю для контроля.*

Расчетно-графическая работа С-1
Определение опор плоской конструкции

Номер варианта задается по пятизначному шифру в буквах и цифрах. Запишите свой шифр в буквах, а затем переведите его в цифры.

1	2	3	4	5

Таблица 1

Цифра/ буква шифра	Размеры, нагрузка, опоры	А, Л, Х, Я	Б, М, Ч, Й	В, Н, Ц	Г, О, Ш	Д, П, Щ	Е, Р, Ы	Ж, С, Ь	З, Т, Ъ	И, У, Э	К, Ф, Ю
1-я буква	AC, м	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0
	BC, м	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
	BE, м	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
2-я буква	α, град	30	45	60	45	30	60	30	60	45	30
3-я буква	β, град	45	60	90	30	45	60	90	30	60	45
4-я буква	$F = P$, кН	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5
	m_1, кНм	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0
	m_2, кНм	7.0	6.5	6.0	5.5	5.0	4.5	4.0	3.5	3.0	2.5
	$q(s)$, Н/м	s^2	$2s^3$	$5s^{1/3}$	$2s^{1/5}$	$\frac{1}{6}s^4$	$4s^5$	$4s^{1/2}$	$3s^{1/4}$	$4s^3$	$5s^{1/4}$
5-я буква	№ опоры в точке A, (рис. 1,*г*)	5	2	1	4	2	1	3	5	2	4
	№ опоры в точке A, (рис. 1,*д*)	4	5	5	3	1	2	4	1	3	2

Здесь F - величина силы, приложенной к конструкции; P - вес конструкции (балки или пластины); m_1, m_2 - величины моментов пар сил, приложенных к конструкции; q - интенсивность распределенной нагрузки вдоль участка AC (только в схемах 1*а* и 1*б*).

Опоры для схем 1*а*, 1*б* (рис. 1,*г*)
1 – шарнирно – подвижная;
2 – шарнирно – неподвижная;
3 – жесткая заделка;
4 – гладкая поверхность;
5 – нить.

Опоры для схемы 1*в* (рис. 1,*д*)
1 – шаровой шарнир;
2 – жесткая заделка;
3 – подшипник;
4 – подпятник;
5 – невесомый стержень.

Примечания к схемам: **В схемах 1*а* и 1*б*** распределенную нагрузку заменить сосредоточенной силой при помощи теоремы Вариньона, $BC = 2BK$, **в схеме 1*в*** сила $\vec{F}$ лежит в плоскости yOz, пара сил с моментом m_1 действует в плоскости пластины, вектор – момент пары $\vec{m}_2$ лежит в плоскости xOz. ***Схемы строить в масштабе, размеры и углы не искажать.***

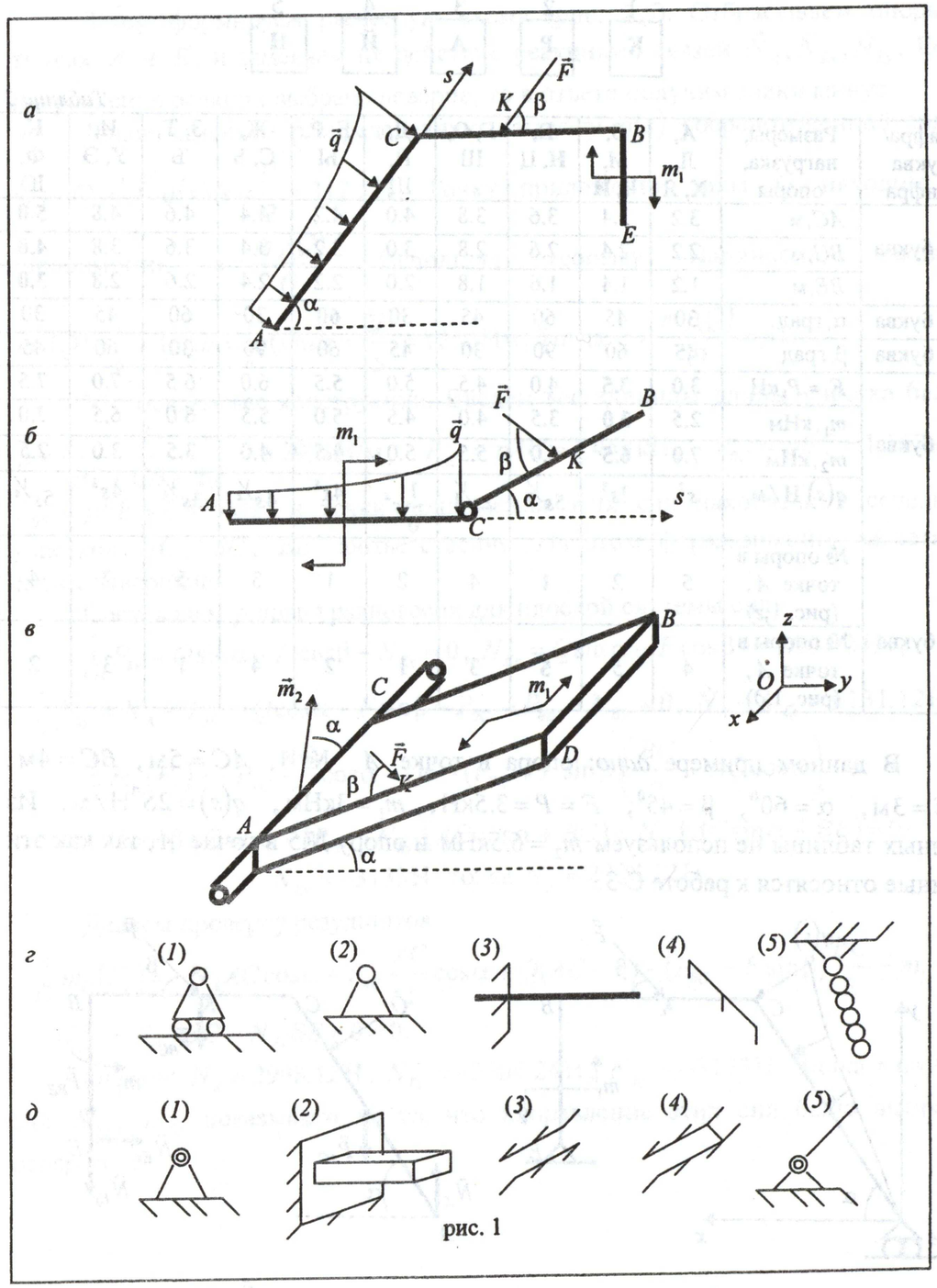


рис. 1

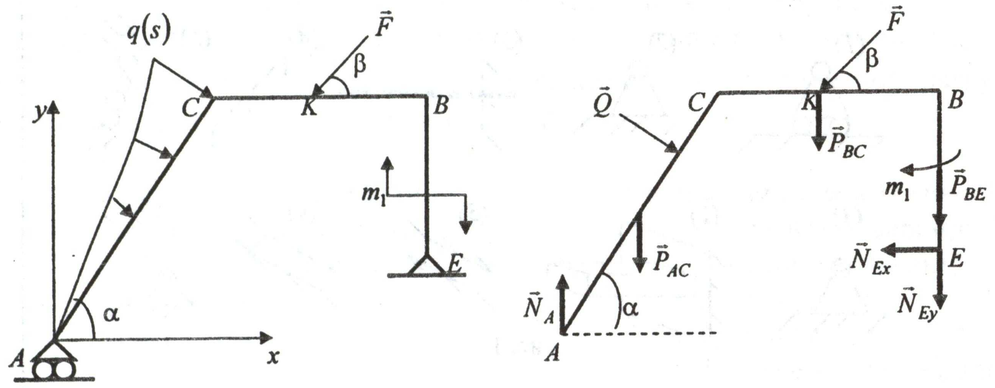
Номер варианта задается по пятизначному шифру в буквах и цифрах. Записываем свой шифр в буквах, а затем переводим его в цифры (например, фамилия КРАЙНОВ). **Требуется определить реакции опор.**

1	2	3	4	5
К	Р	А	Й	Н

Таблица 2

Цифра/ буква шифра	Размеры, нагрузка, опоры	А, Л, Х, Я	Б, М, Ч, Й	В, Н, Ц	Г, О, Ш	Д, П, Щ	Е, Ё, Р, Ы	Ж, С, Ь	З, Т, Ъ	И, У, Э	К, Ф, Ю
1-я буква	AC, м	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	**5.0**
	BC, м	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	**4.0**
	BE, м	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	**3.0**
2-я буква	α, град	30	45	60	45	30	**60**	30	60	45	30
3-я буква	β, град	**45**	60	90	30	45	60	90	30	60	45
4-я буква	$F = P$, кН	3.0	**3.5**	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5
	m_1, кНм	2.5	**3.0**	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0
	m_2, кНм	7.0	**6.5**	6.0	5.5	5.0	4.5	4.0	3.5	3.0	2.5
	$q(s)$, Н/м	s^2	$2s^3$	$5s^{1/3}$	$2s^{1/5}$	$\frac{1}{6}s^4$	$4s^5$	$4s^{1/2}$	$3s^{1/4}$	$4s^3$	$5s^{1/4}$
5-я буква	№ опоры в точке A, (рис. 1,*г*)	5	2	**1**	4	2	1	3	5	2	4
	№ опоры в точке A, (рис. 1,*д*)	4	5	**5**	3	1	2	4	1	3	2

В данном примере *дано*: опора в точке A № 1, $AC = 5$м, $BC = 4$м, $BE = 3$м, $\alpha = 60^0$, $\beta = 45^0$, $F = P = 3.5$кН, $m_1 = 3$кНм, $q(s) = 2S^3$Н/м. Из данных таблицы не используем $m_2 = 6.5$кНм и опору №5 в точке A, так как эти данные относятся к работе С-3.



а *б*

Рис. 2

Решение. Схема должна быть закреплена и статически определима. Закрепляем схему, добавляя шарнирно-неподвижную опору в точке E (рис.2,*а*).

Затем формируем расчетную схему (рис. 2,*б*). Отбрасываем опоры в точках A и E, и заменяем их действие реакциями связей $\vec{N}_A, \vec{N}_{Ex}, \vec{N}_{Ey}$. Если направление реакций выбрано неверно, то в ответе получим знаки минус.

Далее заменяем распределенную нагрузку $q(s)$ сосредоточенной силой Q: $Q = \int_0^{l=AC} q(s)ds = \frac{l^4}{2} = 312.5$ Н. Точку приложения силы Q находим по зависимости $h = \frac{m_A(Q)}{Q}$. Используя теорему Вариньона, находим $m_A(Q) = \int_0^l m_A(q)ds = \int_0^l q(s)sds = \frac{2l^5}{5} = 1250$Нм. Тогда $h = \frac{m_A(Q)}{Q} = 4$м.

Учитываем вес конструкции. Введем вес единицы длины участка балки $p = \frac{P}{AC + CB + BE} = 0.292$кН/м, $P_{AC} = pAC = 1.458$кН, $P_{BC} = pBC = 1.167$кН, $P_{BE} = pBE = 0.875$кН, и точки приложения этих сил находятся в середине участков AC, BC, BE соответственно. На этом формирование расчетной схемы завершено.

Составляем условия равновесия для плоской системы сил:

$$\sum_{k=1}^{3} F_{kx} = Q\sin\alpha - F\cos\beta - N_{Ex} = 0,\ N_{Ex} = Q\sin\alpha - F\cos\beta = -2204.24\text{Н},$$

$$\sum_{k=1}^{7} F_{ky} = N_A - P_{AC} - Q\cos\alpha - F\sin\beta - P_{BC} - P_{BE} - N_{Ey} = 0,\ N_A - N_{Ey} = 6131.12\text{Н},$$

$$\sum_{k=1}^{9} m_A(F_k) = -P_{AC}\frac{AC}{2}\cos\alpha - Qh - (P_{BC} + F\sin\beta)\left(\frac{BC}{2} + AC\cos\alpha\right) - m_1 +$$

$$+ F\cos\beta AC\sin\alpha - (P_{BE} + N_{Ey})(AC\cos\alpha + BC) + N_{Ex}(AC\sin\alpha - BE) = 0$$

$N_{Ey} = -3133$Н, тогда $N_A = 2998.12$Н.

Делаем проверку результатов:

$$\sum_{k=1}^{9} m_C(F_k) = -N_A AC\cos\alpha + P_{AC}\frac{AC}{2}\cos\alpha + Q(AC - h) - (P_{BC} + F\sin\beta)\frac{BC}{2} - m_1 -$$

$$-(P_{BE} + N_{Ey})BC - N_{Ex}BE = 0 = 0.$$

Ответ: $N_A = 2998.12$Н, $N_{Ex} = -2204.24$Н, $N_{Ey} = -3133$Н. Знаки минус у сил N_{Ex}, N_{Ey} показывают на то, что направление этих сил было выбрано неверно.

Расчетно-графическая работа С-2
Определение опор составной конструкции. Система двух тел

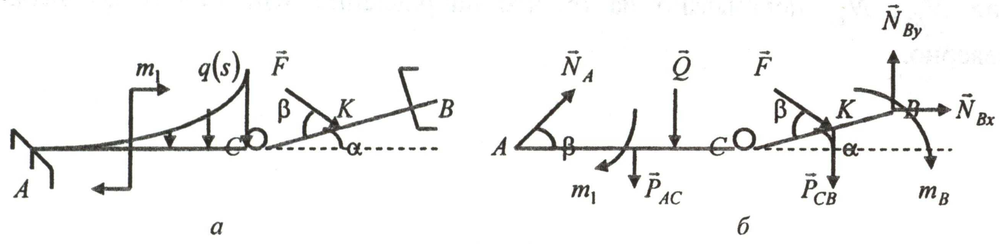
Номер варианта задается по пятизначному шифру в буквах и цифрах. Записываем свой шифр в буквах, а затем переводим его в цифры (например, фамилия ЖАРКОВ).

1	2	3	4	5
Ж	А	Р	К	О

Таблица 3

Цифра/ буква шифра	Размеры, нагрузка, опоры	А, Л, Х, Я	Б, М, Ч, Й	В, Н, Ц	Г, О, Ш	Д, П, Щ	Е, Р, Ы	Ж, С, Ь	З, Т, Ъ	И, У, Э	К, Ф, Ю
1-я буква	AC, м	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	**4.4**	4.6	4.8	5.0
	BC, м	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	**3.4**	3.6	3.8	4.0
	BE, м	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	**2.4**	2.6	2.8	3.0
2-я буква	α, град	**30**	45	60	45	30	60	30	60	45	30
3-я буква	β, град	45	60	90	30	45	**60**	90	30	60	45
4-я буква	$F = P$, кН	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	**7.5**
	m_1, кНм	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	**7.0**
	m_2, кНм	7.0	6.5	6.0	5.5	5.0	4.5	4.0	3.5	3.0	**2.5**
	$q(s)$, Н/м	s^2	$2s^3$	$5s^{1/3}$	$2s^{1/5}$	$\frac{1}{6}s^4$	$4s^5$	$4s^{1/2}$	$3s^{1/4}$	$4s^3$	$5s^{1/4}$
5-я буква	№ опоры в точке A, (рис. 1,*г*)	5	2	1	**4**	2	1	3	5	2	4
	№ опоры в точке A, (рис. 1,*д*)	4	5	5	**3**	1	2	4	1	3	2

В данном примере *дано*: опора в точке A № 4, $AC = 4.4$м, $BC = 3.4$м, $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$, $F = P = 7.5$кН, $m_1 = 7$кНм, $q(s) = 5S^{1/4}$Н/м. Из данных таблицы не используем $BE = 2.4$м, $m_2 = 6.5$кНм и опору №3 в точке A, так как эти данные относятся к работам С-1,3. **Требуется определить реакции опор.**



а *б*

Рис. 3

Решение. Схема должна быть закреплена и один раз статически неопределима. Закрепляем схему, добавляя жесткую заделку в точке B

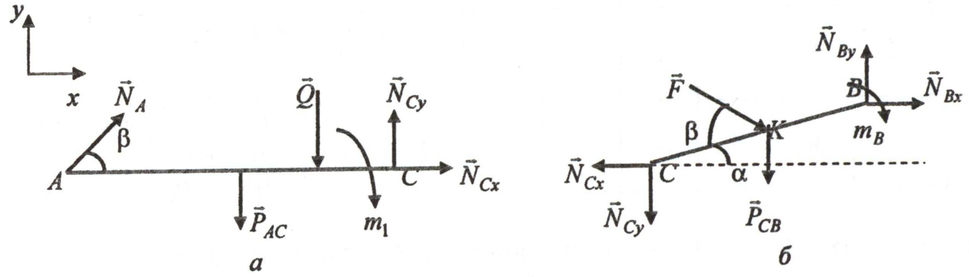
(рис. 3, *а*).

Затем формируем расчетную схему (рис. 3, *б*). Отбрасываем опоры в точках A и B и заменяем их действие реакциями связей $\vec{N}_A, \vec{N}_{Bx}, \vec{N}_{By}, m_B$. Если направление реакций выбрано неверно, то в ответе получим знаки минус.

Далее заменяем распределенную нагрузку $q(s)$ сосредоточенной силой Q: $Q = \int_0^{l=AC} q(s)ds = 4l^{5/4} = 25.49$ Н: Точку приложения силы Q находим по зависимости $h = \frac{m_A(Q)}{Q}$. Используя теорему Вариньона, находим $m_A(Q) = \int_0^l m_A(q)ds = \int_0^l q(s)sds = \frac{20}{9}l^{9/4} = 62.3$Нм. Тогда $h = \frac{m_A(Q)}{Q} = 2.444$м.

Учитываем вес конструкции. Введем вес единицы длины участка балки $p = \frac{P}{AC + CB} = 0.961$кН/м. Тогда $P_{AC} = pAC = 4.23$кН, $P_{BC} = pBC = 3.27$кН, и точки приложения этих сил находятся в середине участков AC, BC соответственно. На этом формирование расчетной схемы завершено.

На схеме (рис. 3, *б*) показаны четыре неизвестных составляющих реакции: $\vec{N}_A$, $\vec{N}_{Bx}$, $\vec{N}_{By}$, m_B. Следовательно, задача один раз статически неопределима. Раскрываем неопределимость путем разрезания конструкции в промежуточном шарнире C. В результате получаем две балки: AC и BC (рис.4).



а *б*

Рис. 4

Составляем условия равновесия для балки AC (рис. 4, *а*):

$$\sum_{k=1}^{2} F_{kx} = N_A\cos\beta + N_{Cx} = 0,\ N_{Cx} = -N_A\cos\beta,$$

$$\sum_{k=1}^{4} F_{ky} = N_A\sin\beta - P_{AC} - Q + N_{Cy} = 0,\ N_A = 4913.8 - \frac{N_{Cy}}{\sin\beta},$$

$$\sum_{k=1}^{4} m_A(F_k) = -P_{AC}\frac{AC}{2} - Qh - m_1 + N_{Cy}AC = 0,\ N_{Cy} = 3720\text{Н},$$

тогда $N_A = 618.23$Н, $N_{Cx} = -309.11$Н.

Составляем условия равновесия для балки BC (рис. 4, *б*):

$$\sum_{k=1}^{3} F_{kx} = -N_{Cx} + F\cos(\beta-\alpha) + N_{Bx} = 0,\ N_{Bx} = -6804.3\text{Н},$$

$$\sum_{k=1}^{4} F_{ky} = -N_{Cy} - P_{BC} - F\sin(\beta-\alpha) + N_{By} = 0,\ N_{By} = 10740\text{Н},$$

$$\sum_{k=1}^{5} m_C(F_k) = -P_{BC}\frac{BC}{2}\cos\alpha - F\sin\beta\frac{BC}{2} - m_B - N_{Bx}BC\sin\alpha + N_{By}BC\cos\alpha = 0,$$

$$m_B = 27335\text{Нм}.$$

Делаем проверку результатов (рис. 3, *б*):

$$\sum_{k=1}^{8} m_B(F_k) = N_A\cos\beta BC\sin\alpha - N_A\sin\beta(AC + BC\cos\alpha) + P_{AC}\left(\frac{AC}{2} + BC\cos\alpha\right) - m_1 +$$

$$+ Q(AC - h + BC\cos\alpha) + F\sin\beta\frac{BC}{2} + P_{BC}\frac{BC}{2}\cos\alpha - m_B = 0 = 0.$$

Ответ: $N_A = 618.23\text{Н}$, $N_{Cx} = -309.11\text{Н}$, $N_{Cy} = 3720\text{Н}$, $N_{Bx} = -6804.3\text{Н}$, $N_{By} = 10740\text{Н}$, $m_B = 27335\text{Нм}$. Знаки минус у сил N_{Cx}, N_{Bx} показывают на то, что направление этих сил было выбрано неверно.

Расчетно-графическая работа С-3
Определение опор твердого тела. Пространственная задача

Номер варианта задается по пятизначному шифру в буквах и цифрах. Записываем свой шифр в буквах, а затем переводим его в цифры (например, фамилия КАРАСЕВА). **Требуется определить реакции опор, а также главный вектор и момент системы сил, относительно точки A.**

1	2	3	4	5
К	А	Р	А	С

Таблица 4

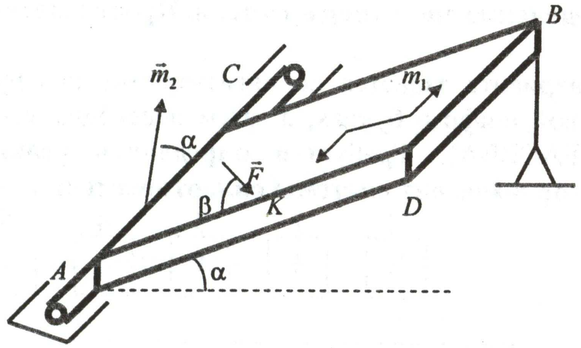
Цифра/ буква шифра	Размеры, нагрузка, опоры	А, Л, Х, Я	Б, М, Ч, Й	В, Н, Ц	Г, О, Ш	Д, П, Щ	Е, Р, Ы	Ж, С, Ь	З, Т, Ъ	И, У, Э	**К, Ф, Ю**
1-я буква	AC, м	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	**5.0**
	BC, м	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	**4.0**
	BE, м	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	**3.0**
2-я буква	α, град	**30**	45	60	45	30	60	30	60	45	30
3-я буква	β, град	45	60	90	30	45	**60**	90	30	60	45
4-я буква	$F = P$, кН	**3.0**	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5
	m_1, кНм	**2.5**	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0
	m_2, кНм	**7.0**	6.5	6.0	5.5	5.0	4.5	4.0	3.5	3.0	2.5
	$q(s)$, Н/м	s^2	$2s^3$	$5s^{1/3}$	$2s^{1/5}$	$\frac{1}{6}s^4$	$4s^5$	$4s^{1/2}$	$3s^{1/4}$	$4s^3$	$5s^{1/4}$
5-я буква	№ опоры в точке A, (рис. 1,*г*)	5	2	1	4	2	1	**3**	5	2	4
	№ опоры в точке A, (рис. 1,*д*)	4	5	5	3	1	2	**4**	1	3	2

В данном примере *дано*: опора в точке A № 4, $AC = 5\text{м}$, $BC = 4\text{м}$, $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$, $F = P = 3\text{кН}$, $m_1 = 2.5\text{кНм}$, $m_2 = 7\text{кНм}$. Из данных таблицы не используем $BE = 3\text{м}$, $q(s) = S^2\text{Н/м}$ и опору №3 в точке A, так как эти данные относятся к работам С-1,2.

Решение. Схема должна быть закреплена и статически определима. Закрепляем схему, добавляя подшипник в точке C и невесомый стержень в точке B (рис. 5, *а*).

Затем формируем расчетную схему (рис. 5, *б*). Отбрасываем опоры в точках A, B, C, и заменяем их действие реакциями связей $\vec{N}_{Ax}, \vec{N}_{Ay}, \vec{N}_{Az}, \vec{N}_{Cy}, \vec{N}_{Cz}, \vec{S}_B$. Если направление реакций выбрано неверно, то в ответе получим знаки минус.

а



б

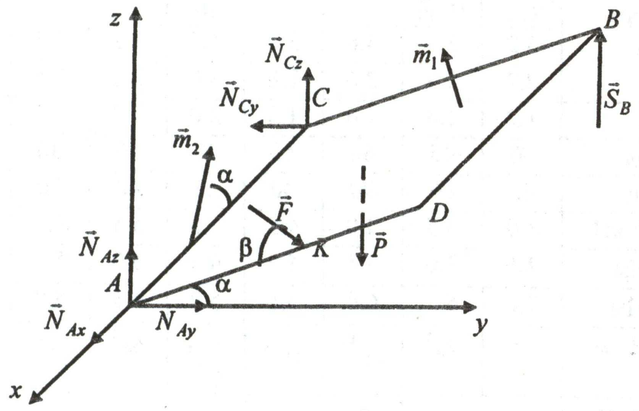


рис. 5

$$\sum_{k=1}^{3} F_{ky} = N_{Ay} + F\cos(\beta-\alpha) - N_{Cy} = 0,\ N_{Ay} = -2598 + N_{Cy},$$

$$\sum_{k=1}^{5} F_{kz} = N_{Az} - F\sin(\beta-\alpha) + N_{Cz} - P + S_B = 0,\ N_{Az} + N_{Cz} + S_B = 4500\text{H},$$

$$\sum_{k=1}^{4} m_{Ax}(F_k) = -P\frac{AD}{2}\cos\alpha - F\sin\beta AK - m_2\cos\alpha + S_B AD\cos\alpha = 0,\ S_B = 3250\text{H},$$

$$\sum_{k=1}^{4} m_{Ay}(F_k) = -P\frac{AC}{2} + N_{Cz}AC - m_1\sin\alpha + S_B AC = 0,\ N_{Cz} = -1500\text{H},$$

$$\sum_{k=1}^{3} m_{Az}(F_k) = N_{Cy}AC + m_2\sin\alpha + m_1\cos\alpha = 0,\ N_{Cy} = -1133\text{H},$$

тогда $N_{Ay} = -3731\text{H}$, $N_{Az} = 2750\text{H}$.

Определяем главный вектор $\vec{R}$ и главный момент $\vec{M}_A$ системы сил, относительно точки A. В записанных ранее шести условиях равновесиях оставляем только те составляющие, которые не относятся к реакциям со стороны отброшенных связей. Тогда получаем проекции векторов $\vec{R}$ и $\vec{M}_A$ на оси декартовой системы координат.

$$R_x = 0,\ R_y = F\cos(\beta-\alpha) = 2598\text{H},\ R_z = -F\sin(\beta-\alpha) - P = 4500\text{H},$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 5196.11\text{H}.$$

$$\cos(R,x) = \frac{R_x}{R} = 0,\ \angle(R,x) = 0^0,\ \cos(R,y) = \frac{R_y}{R} = 0.5,\ \angle(R,y) = 60^0,$$

$$\cos(R,z) = \frac{R_z}{R} = 0.866,\ \angle(R,z) = 30^0.$$

$$M_{Ax} = -P\frac{AD}{2}\cos\alpha - F\sin\beta AK - m_2\cos\alpha = -11258.33\text{Нм},$$

$$M_{Ay} = -P\frac{AC}{2} - m_1\sin\alpha = -8750\text{Нм},\ M_{Az} = m_2\sin\alpha + m_1\cos\alpha = 5665\text{Нм}.$$

$$M_A = \sqrt{M_{Ax}^2 + M_{Ay}^2 + M_{Az}^2} = 15342.9\text{Нм}.$$

$$\cos(M_A,x) = \frac{M_{Ax}}{M_A} = -0.7338,\ \angle(M_A,x) = 137^0,\ \cos(M_A,y) = \frac{M_{Ay}}{M_A} = -0.57,$$

$$\angle(M_A,y) = 125^0,\ \cos(M_A,z) = \frac{M_{Az}}{M_A} = 0.369,\ \angle(M_A,z) = 68^0.$$

Ответ: $N_{Ax} = 0$, $N_{Ay} = -3731\text{H}$, $N_{Az} = 2750\text{H}$, $N_{Cy} = -1133\text{H}$, $N_{Cz} = -1500\text{H}$, $S_B = 3250\text{H}$. Знаки минус у сил N_{Ay}, N_{Cy}, N_{Cz} показывают на то, что направление этих сил было выбрано неверно. Главный вектор системы по модулю равен $R = 5196.11\text{H}$ и лежит в плоскости, перпендикулярной оси x. Главный момент системы относительно точки A по модулю равен $M_A = 15342.9\text{Нм}$ и расположен в пространстве, составляя с осями декартовой системы координат углы $\angle(M_A,x) = 137^0$, $\angle(M_A,y) = 125^0$, $\angle(M_A,z) = 68^0$.

Расчетно-графическая работа К-1
Кинематика точки

Номер варианта задается по пятизначному шифру в буквах и цифрах. Запишите свой шифр в буквах, а затем переведите его в цифры.

1	2	3	4	5

Таблица 5

Цифра/ буква шифра	Данные	А, Л, Х, Я	Б, М, Ч, Й	В, Н, Ц	Г, О, Ш	Д, П, Щ	Е, Р, Ы	Ж, С, Ь	З, Т, Ъ	И, У, Э	К, Ф, Ю
1-я буква	Номер схемы	1	3	5	7	2	4	6	8	5	2
2-я буква	b,м	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	1.8	1.6	1.4	1.2	2.0
3-я буква	AM/AB	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.6
4-я буква	k, $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$	0.6	0.9	0.7	0.8	1.0	0.9	0.7	0.8	0.6	1.0
5-я буква	t_1,с	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9

Уравнения движения точки:

Для схем 1,3,4: $x(t)=b(kt-\sin kt)$, $y(t)=b(1-\cos kt)$ **Для схем 2, 5, 6, 7, 8:** $x(t)=b\cos kt$, $y(t)=b\sin kt$

Размеры механизма A (рис. 6):

Для схемы 2: $OA=2R=b$, $\angle OAB=90^0$; **Для схем 1,3,4:** $AC=b$, $AB=4b$;

Для схем 5,6: $OA=b$, $AB=4b$; **Для схем 7, 8:** $OA=b$, $AB=4b$, $BC=2b$.

Задание к работе № 4. По заданным уравнениям движения, для момента времени t_1 определить положение, скорость и ускорение точки A. Построить траекторию движения точки и показать точку на траектории в момент t_1.

Определить проекции скорости и ускорения точки на декартовые и естественные оси, а также радиус кривизны траектории для момента t_1.

Задание к работе № 5. В соответствии с заданным вариантом показать в масштабе плоский механизм (рис. 6) для момента времени t_1. Из задания К-1 берем скорость и ускорение точки A. Определяем скорость точки B и находим положение мгновенного центра скоростей для звена AB. Определяем угловые скорости всех звеньев механизма и находим скорость точек B и M. Вычисляем ускорение точек B и M, а также угловое ускорение звена AB.

Задание к работе № 6. Рассматриваем сложное движение точки M. Считаем, что скорость и ускорение точки M в относительном движении вдоль звена AB равны по модулю скорости и ускорению в переносном движении. За переносные параметры принимаем значения скорости и ускорения точки M,

полученные в задаче К-2. Определяем ускорение Кориолиса, а затем абсолютные скорость и ускорение точки M.

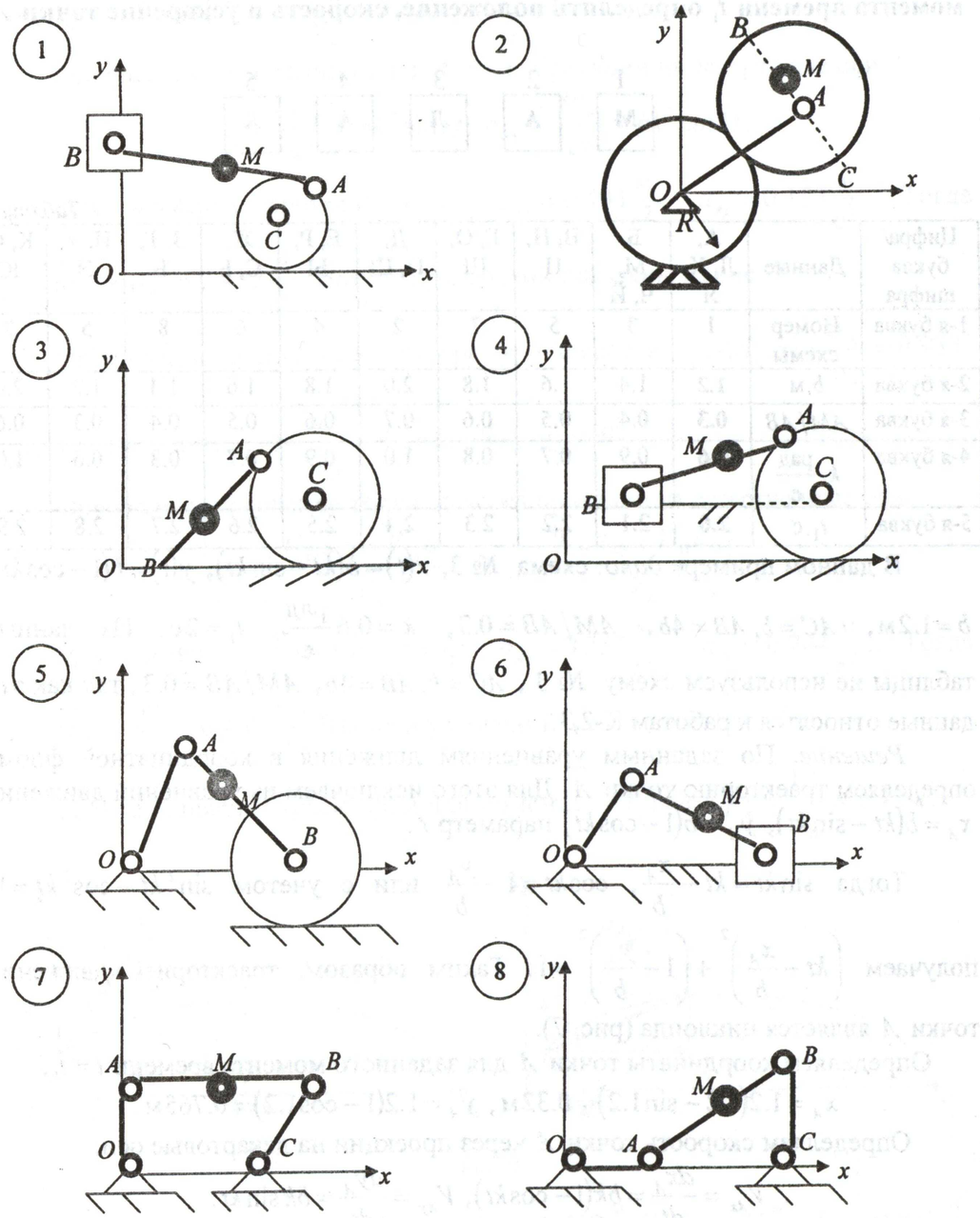


Рис. 6

Примечание. *При выполнении работ, механизмы и их звенья показывать в масштабе и углы не искажать. То же требование относится и к векторам скоростей и ускорений.*

1205679

БИБЛИОТЕКА НГТУ

Номер варианта задается по пятизначному шифру в буквах и цифрах. Записываем свой шифр в буквах, а затем переводим его в цифры (например, фамилия МАЛАХОВ). **Требуется по заданным уравнениям движения для момента времени t_1 определить положение, скорость и ускорение точки A.**

1	2	3	4	5
М	А	Л	А	Х

Таблица 6

Цифра/ буква шифра	Данные	А, Л, Х, Я	Б, М, Ч, Й	В, Н, Ц	Г, О, Ш	Д, П, Щ	Е, Р, Ы	Ж, С, Ь	З, Т, Ъ	И, У, Э	К, Ф, Ю
1-я буква	Номер схемы	1	**3**	5	7	2	4	6	8	5	2
2-я буква	b,м	**1.2**	1.4	1.6	1.8	2.0	1.8	1.6	1.4	1.2	2.0
3-я буква	AM/AB	**0.3**	0.4	0.5	0.6	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.6
4-я буква	k, $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$	**0.6**	0.9	0.7	0.8	1.0	0.9	0.7	0.8	0.6	1.0
5-я буква	t_1,с	**2.0**	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9

В данном примере *дано*: схема № 3, $x(t)=b(kt-\sin kt)$, $y(t)=b(1-\cos kt)$, $b=1.2\text{м}$, $AC=b, AB=4b$, $AM/AB=0.3$, $k=0.6\frac{\text{рад}}{\text{с}}$, $t_1=2\text{с}$. Из данных таблицы не используем схему № 3, $AC=b, AB=4b$, $AM/AB=0.3$, так как эти данные относятся к работам К-2,3.

Решение. По заданным уравнениям движения в координатной форме определяем траекторию точки A. Для этого исключаем из уравнений движения $x_A=b(kt-\sin kt)$, $y_A=b(1-\cos kt)$ параметр t.

Тогда $\sin kt=kt-\frac{x_A}{b}$, $\cos kt=1-\frac{y_A}{b}$ или с учетом $\sin^2 kt+\cos^2 kt=1$, получаем $\left(kt-\frac{x_A}{b}\right)^2+\left(1-\frac{y_A}{b}\right)^2=1$. Таким образом, траекторией движения точки A является циклоида (рис. 7).

Определяем координаты точки A для заданного момента времени $t=t_1$:

$$x_A=1.2(1.2-\sin 1.2)=0.32\text{м},\ y_A=1.2(1-\cos 1.2)=0.765\text{м}.$$

Определяем скорость точки A через проекции на декартовые оси:

$$V_{Ax}=\frac{dx_A}{dt}=bk(1-\cos kt),\ V_{Ay}=\frac{dy_A}{dt}=bk\sin kt.$$

Для момента времени $t=t_1$: $V_{Ax}=0.459\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $V_{Ay}=0.671\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Тогда $V_A=\sqrt{V_{Ax}^2+V_{Ay}^2}=0.813\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Вектора скоростей показаны на рис. 7, *а*.

Определяем положение вектора в плоскости: $\cos(V_A,x)=\frac{V_{Ax}}{V_A}=0.565$, $\angle(V_A,x)=56^0$, $\cos(V_A,y)=\frac{V_{Ay}}{V_A}=0.825$, $\angle(V_A,y)=34^0$.

Определяем ускорение точки A через проекции на декартовые оси:

$$a_{Ax}=\frac{dV_{Ax}}{dt}=bk^2\sin kt,\ a_{Ay}=\frac{dV_{Ay}}{dt}=bk^2\cos kt.$$

Для момента времени $t=t_1$: $a_{Ax}=0.403\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $a_{Ay}=0.157\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Тогда $a_A=\sqrt{a_{Ax}^2+a_{Ay}^2}=0.432\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Вектора ускорений показаны на рис. 7, *б*.

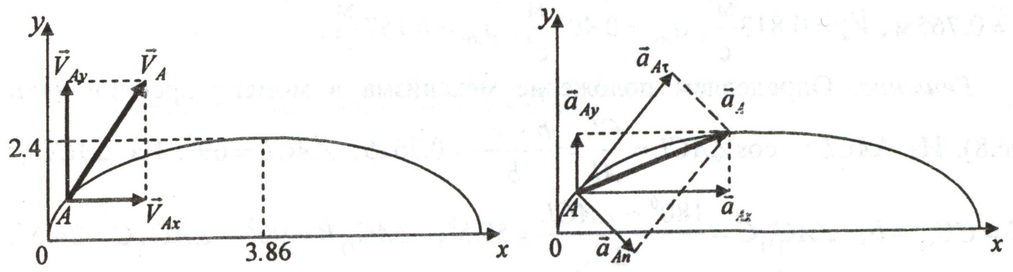
Определяем положение вектора в плоскости: $\cos(a_A,x)=\frac{a_{Ax}}{a_A}=0.933$, $\angle(a_A,x)=21^0$, $\cos(a_A,y)=\frac{a_{Ay}}{a_A}=0.363$, $\angle(a_A,y)=69^0$.

Определяем ускорение точки A через проекции на естественные оси:

$$a_{A\tau}=\frac{V_{Ax}a_{Ax}+V_{Ay}a_{Ay}}{V_A},\ a_{An}=\frac{\left|V_{Ax}a_{Ay}-V_{Ay}a_{Ax}\right|}{V_A}.$$

Для момента времени $t=t_1$: $a_{A\tau}=0.357\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $a_{An}=0.244\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Тогда $a_A=\sqrt{a_{A\tau}^2+a_{An}^2}=0.432\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Вектора ускорений показаны на рис. 7, *б*.

Радиус кривизны траектории для момента $t=t_1$ равен $\rho_A=\frac{V_A^2}{a_{An}}=2.71\text{м}$.



а *б*

Рис. 7

Ответ: $x_A=0.32\text{м}$, $y_A=0.765\text{м}$, $V_{Ax}=0.459\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $V_{Ay}=0.671\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $V_A=0.813\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $a_{Ax}=0.403\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $a_{Ay}=0.157\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $a_A=0.432\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $a_{A\tau}=0.357\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $a_{An}=0.244\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $\rho_A=2.71\text{м}$.

Расчетно-графическая работа К-2
Плоское движение твердого тела

Номер варианта задается по пятизначному шифру в буквах и цифрах. Записываем свой шифр в буквах, а затем переводим его в цифры (например, фамилия МАЛАХОВ). **Требуется определить положение механизма, скорости и ускорения точек B и M, используя данные работы К-1.**

1	2	3	4	5
М	А	Л	А	Х

Таблица 7

Цифра/ буква шифра	Данные	А, Л, Х, Я	Б, М, Ч, Й	В, Н, Ц	Г, О, Ш	Д, П, Щ	Е, Р, Ы	Ж, С, Ь	З, Т, Ъ	И, У, Э	К, Ф, Ю
1-я буква	Номер схемы	1	**3**	5	7	2	4	6	8	5	2
2-я буква	b,м	**1.2**	1.4	1.6	1.8	2.0	1.8	1.6	1.4	1.2	2.0
3-я буква	AM/AB	**0.3**	0.4	0.5	0.6	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.6
4-я буква	k, $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$	**0.6**	0.9	0.7	0.8	1.0	0.9	0.7	0.8	0.6	1.0
5-я буква	t_1,с	**2.0**	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9

В данном примере *дано*: схема №3, $b=1.2$м, $AM/AB=0.3$, $AC=b$, $AB=4b$. Из данных таблицы не используем: $k=0.6\frac{\text{рад}}{\text{с}}$, $t_1=2$с, $x(t)=b(kt-\sin kt)$, $y(t)=b(1-\cos kt)$, так как эти данные относятся к работе К-1. Кроме того, добавляем данные, полученные в работе К-1: $x_A=0.32$м, $y_A=0.765$м, $V_A=0.813\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $a_{Ax}=0.403\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $a_{Ay}=0.157\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Решение. Определяем положение механизма в момент времени $t=t_1$ (рис.8). Из ΔACL: $\cos\angle ACL=\frac{CL}{AL}=\frac{b-y_A}{b}=0.3625$, $\angle ACL=69^0$. Из ΔACC_{V_1}: $AC=CC_{V_1}=b$, $\angle AC_{V_1}C=\frac{180^0-\angle ACL}{2}=55.5^0$, $\angle AC_{V_1}B=90^0-\angle AC_{V_1}C=34.5^0$.

Из $\Delta BC_{V_1}C_{V_2}$: $\angle\beta=90^0-\angle AC_{V_1}B=55.5^0$. Из ΔAKB: $\sin\alpha=\frac{AK}{AB}=\frac{y_A}{4b}=0.159$, $\alpha=9^0$. Из ΔABC_{V_2} по теореме синусов $\frac{AB}{\sin\beta}=\frac{BC_{V_2}}{\sin\angle BAC_{V_2}}=\frac{AC_{V_2}}{\sin\angle ABC_{V_2}}$.

Отсюда находим $AC_{V_2}=5.75$м, $BC_{V_2}=4$м.

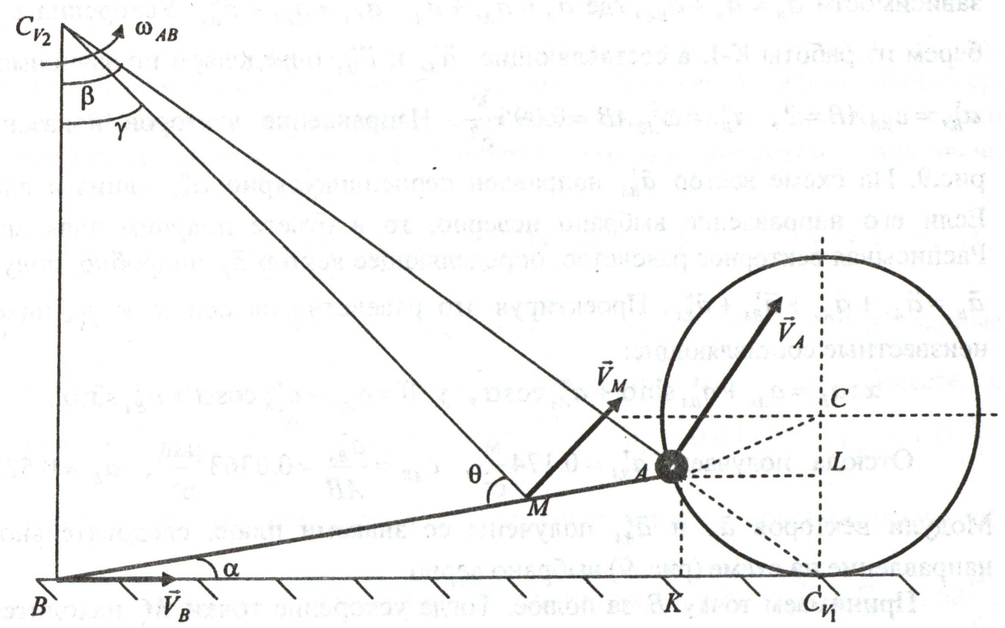


Рис. 8

Из плана скоростей $\omega_{AB}=\frac{V_A}{AC_{V_2}}=\frac{V_B}{BC_{V_2}}=\frac{V_M}{MC_{V_2}}=0.1414\frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Тогда $V_B=0.567\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Из ΔMBC_{V_2} по теореме косинусов

$$MC_{V_2}=\sqrt{(BM)^2+(BC_{V_2})^2-2(BM)(MC_{V_2})\cos\angle MBC_{V_2}}=4.81\text{м}.$$

Тогда $V_M=0.68\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Из ΔMBC_{V_2} по теореме синусов $\frac{BC_{V_2}}{\sin\theta}=\frac{MC_{V_2}}{\sin\angle MBC_{V_2}}$, $\theta=55^0$.

Определяем ускорения точек (рис. 9).

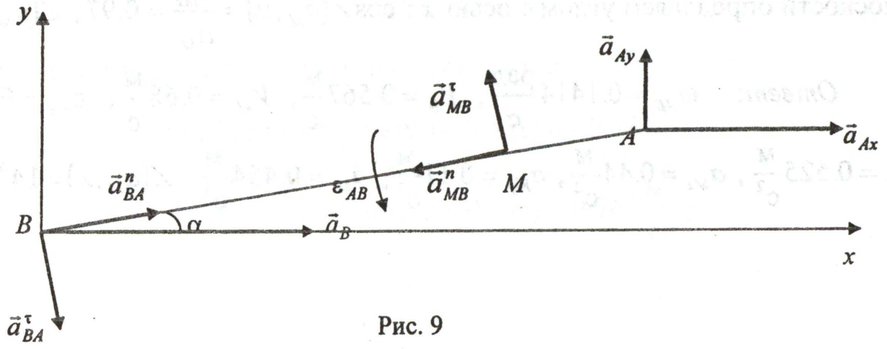


Рис. 9

Принимаем точку A за полюс. Тогда ускорение точки B находится по зависимости $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$, где $\vec{a}_A = \vec{a}_{Ax} + \vec{a}_{Ay}$, $\vec{a}_{BA} = \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$. Ускорения $\vec{a}_{Ax}, \vec{a}_{Ay}$ берем из работы К-1, а составляющие $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ и $\vec{a}^{n}_{BA}$ определяем по зависимостям $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_{AB} AB = ?$, $a^{n}_{BA} = \omega^2_{AB} AB = 0.096 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Направление векторов показано на рис.9. На схеме вектор $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ направлен перпендикулярно $\vec{a}^{n}_{BA}$ «вниз и влево». Если его направление выбрано неверно, то в ответе получим знак минус. Расписывая векторное равенство, определяющее вектор $\vec{a}_B$ подробно, получаем $\vec{a}_B = \vec{a}_{Ax} + \vec{a}_{Ay} + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$. Проектируя это равенство на оси x и y, находим неизвестные составляющие:

$$x: a_B = a_{Ax} + a^{\tau}_{BA} \sin\alpha + a^{n}_{BA} \cos\alpha, \quad y: 0 = a_{Ay} - a^{\tau}_{BA} \cos\alpha + a^{n}_{BA} \sin\alpha.$$

Отсюда получаем $a^{\tau}_{BA} = 0.174 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $\varepsilon_{AB} = \frac{a^{\tau}_{BA}}{AB} = 0.0363 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$, $a_B = 0.525 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Модули векторов $\vec{a}_B$ и $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ получены со знаками плюс, следовательно, их направление на схеме (рис. 9) выбрано верно.

Принимаем точку B за полюс. Тогда ускорение точки M находится по зависимости $\vec{a}_M = \vec{a}_B + \vec{a}_{MB}$, где $\vec{a}_{MB} = \vec{a}^{\tau}_{MB} + \vec{a}^{n}_{MB}$. Составляющие $\vec{a}^{\tau}_{MB}$ и $\vec{a}^{n}_{MB}$ определяем по зависимостям $a^{\tau}_{MB} = \varepsilon_{AB} BM = 0.122 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $a^{n}_{MB} = \omega^2_{AB} BM = 0.067 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Направление векторов показано на рис.9. Расписывая векторное равенство, определяющее вектор $\vec{a}_M$ подробно, получаем $\vec{a}_M = \vec{a}_B + \vec{a}^{\tau}_{MB} + \vec{a}^{n}_{MB}$. Проектируя это равенство на оси x и y, находим неизвестные составляющие:

$$x: a_{Mx} = a_B - a^{\tau}_{MB} \sin\alpha - a^{n}_{MB} \cos\alpha = 0.44 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$y: a_{My} = a^{\tau}_{BA} \cos\alpha - a^{n}_{BA} \sin\alpha = 0.11 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Отсюда получаем $a_M = \sqrt{a^2_{Mx} + a^2_{My}} = 0.454 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Положение вектора в плоскости определяем углом с осью x: $\cos\angle(a_M, x) = \frac{a_{Mx}}{a_M} = 0.97$, $\angle(a_M, x) = 14^0$.

Ответ: $\omega_{AB} = 0.1414 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, $V_B = 0.567 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $V_M = 0.68 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $\varepsilon_{AB} = 0.0363 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$, $a_B = 0.525 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $a_{Mx} = 0.44 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $a_{My} = 0.11 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $a_M = 0.454 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $\angle(a_M, x) = 14^0$.

Расчетно-графическая работа К-3
Сложное движение точки

Номер варианта задается по пятизначному шифру в буквах и цифрах. Записываем свой шифр в буквах, а затем переводим его в цифры (например, фамилия МАЛАХОВ). **Требуется определить скорость и ускорение точки M, используя данные работы К-2, считая, что она движется вдоль звена AB.**

В данном примере *дано*: схема № 3. Из работы К-2 $V_M = 0.68 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $\theta = 55^0$, $\omega_{AB} = 0.1414 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, $a_{Mx} = 0.44 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $a_{My} = 0.11 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $a_M = 0.454 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Эти данные принимаем за переносные параметры движения точки M (вместе с механизмом) $V_e = 0.68 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $\omega_e = 0.1414 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, $a_{ex} = 0.44 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $a_{ey} = 0.11 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $a_e = 0.454 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. По заданию параметры относительного движения равны по модулю параметрам переносного движения, т.е. $V_r = V_e = 0.68 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $a_r = a_e = 0.454 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Решение. Определяем абсолютную скорость точки M по теореме о сложении скоростей в сложном движении $\vec{V}_a = \vec{V}_M = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ (рис. 10).

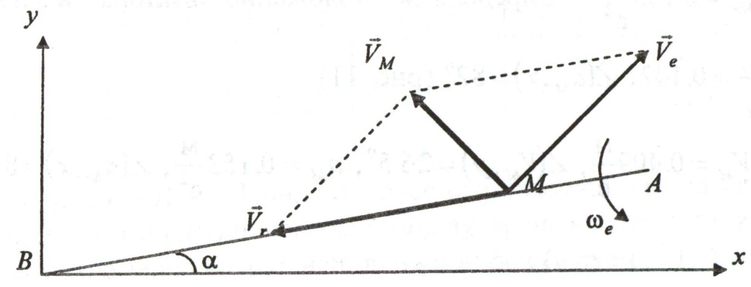


Рис. 10

Проектируем векторное равенство на оси x и y:

$$x: V_{Mx} = -V_r \cos\alpha + V_e \cos(90 - \theta + \alpha) = -0.182 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$y: V_{My} = -V_r \sin\alpha + V_e \sin(90 - \theta + \alpha) = 0.366 \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2} = 0.409\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Определяем положение вектора в плоскости:

$\cos(V_M, y) = \frac{V_{My}}{V_M} = 0.895$, $\angle(V_M, y) = 26.5^0$.

Определяем абсолютное ускорение точки M по теореме о сложении ускорений в сложном движении: $\vec{a}_a = \vec{a}_M = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{\text{cor}}$ (рис. 11).

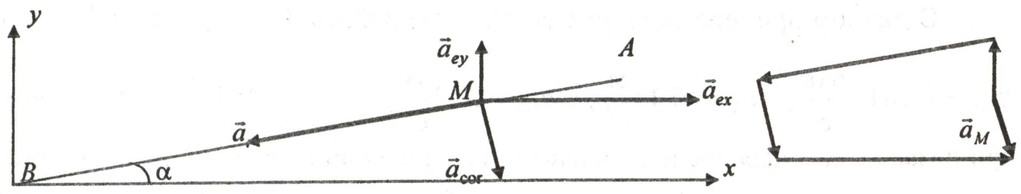


Рис. 11

Определяем ускорение Кориолиса: $a_{\text{cor}} = 2\omega_e V_r \sin 90^0 = 0.192\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Проектируем векторное равенство на оси x и y:

$$x: a_{Mx} = -a_r \cos\alpha + a_{ex} + a_{\text{cor}} \sin\alpha = 0.0217\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$y: a_{My} = -a_r \sin\alpha + a_{ey} - a_{\text{cor}} \cos\alpha = -0.151\frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = 0.153\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Определяем положение вектора в плоскости:

$\cos(a_M, x) = \frac{a_{Mx}}{a_M} = 0.142$, $\angle(a_M, x) = 82^0$ (рис. 11).

Ответ: $V_M = 0.409\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $\angle(V_M, y) = 26.5^0$, $a_M = 0.153\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $\angle(a_M, x) = 82^0$.

Расчетно-графическая работа Д-1
Исследование относительного движения точки

Номер варианта задается по пятизначному шифру в буквах и цифрах. Запишите свой шифр в буквах, а затем переведите его в цифры.

1	2	3	4	5

Таблица 8

Цифра/ буква шифра	Исходные данные	А Л Х Я	Б М Ч Й	В Н Ц	Г О Ш	Д П Щ	Е Р Ы	Ж С Ь	З Т Ъ	И У Э	К Ф Ю
1-я буква	m, кг	0.15	0.2	0.3	0.3	0.2	0.2	0.25	0.3	0.2	0.1
2-я буква	$\omega = \text{const}$, $\frac{\text{рад}}{c}$	π	3π	5π	$\frac{\pi}{2}$	4π	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π	π
	τ, с	0.1	0.2	0.1	0.2	0.16	0.1	0.15	0.2	0.18	0.12
3-я буква	$OK = h$, м	0.2	0.3	0.1	0.2	0.3	0.2	0.3	0.1	0.2	0.1
	α, градусы	30	60	45	30	60	45	30	60	60	30
	c, $\frac{\text{Н}}{\text{м}}$	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.5	1.6	1.5	1.1	1
	l_0, м	0.1	0.2	0.1	0.2	0.1	0.2	0.1	0.2	0.1	0.2
4-я буква	Номер схемы (рис.12)	1	3	2	4	5	7	6	8	2	3
5-я буква	x_0, м	0.1	0.5	0.4	0.3	0.2	0.3	0.1	0.4	0.6	0.5
	$\dot{x}_0$, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$	0.5	-1	0.8	-0.1	0.4	-0.5	0.9	-0.2	2	-0.3

Задание к работе Д-1. Шарик M, рассматриваемый как материальная точка, перемещается по цилиндрическому каналу вращающегося тела (рис. 1). Тело вращается равномерно вокруг неподвижной оси (в схемах 1, 4 ось вращения x_1 горизонтальна, в схемах 2, 3, 5, 6, 7, 8 ось вращения z_1 вертикальна).

Найти уравнение относительного движения шарика $OM = x(t)$, ***приняв за начало отсчета точку*** O. ***Для заданного момента времени*** $t = \tau$ ***определить координату*** x ***и давление*** N ***шарика на стенку канала.***

В табл. 1 приняты следующие обозначения: m – масса шарика M, $\omega = \text{const}$ – постоянная угловая скорость тела, c – коэффициент жесткости пружины, к которой прикреплен шарик M, l_0 – длина недеформированной пружины, x_0, $\dot{x}_0$ – положение и скорость шарика M (начальные).

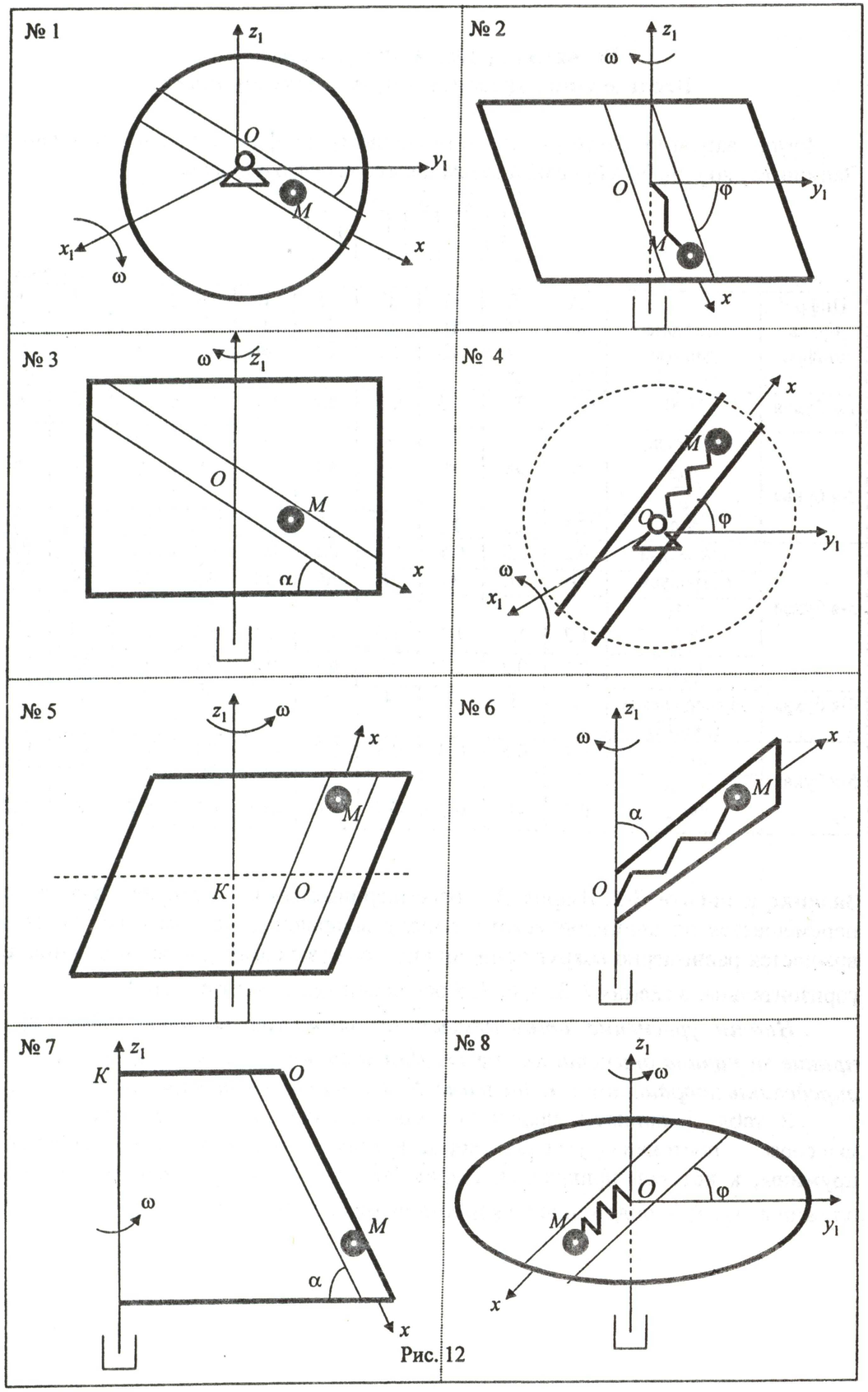


Рис. 12

Номер варианта задается по пятизначному шифру в буквах и цифрах. Записываем свой шифр в буквах, а затем переводим его в цифры (например, фамилия ПЕТРОВ).

1	2	3	4	5
П	**Е**	**Т**	**Р**	**О**

Таблица 9

Цифра/ буква шифра	Исходные данные	А Л Х Я	Б М Ч Й	В Н Ц	Г **О** Ш	Д **П** Щ	**Е** **Р** Ы	Ж С Ь	З **Т** Ъ	И У Э	К Ф Ю
1-я буква	m, кг	0.15	0.2	0.3	0.3	**0.2**	0.2	0.25	0.3	0.2	0.1
2-я буква	$\omega = \text{const}$, $\frac{\text{рад}}{c}$	π	3π	5π	$\frac{\pi}{2}$	4π	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π	π
	τ, с	0.1	0.2	0.1	0.2	0.16	**0.1**	0.15	0.2	0.18	0.12
3-я буква	$OK = h$, м	0.2	0.3	0.1	0.2	0.3	0.2	0.3	**0.1**	0.2	0.1
	α, градусы	30	60	45	30	60	45	30	**60**	60	30
	c, $\frac{\text{Н}}{\text{м}}$	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.5	1.6	**1.5**	1.1	1
	l_0, м	0.1	0.2	0.1	0.2	0.1	0.2	0.1	**0.2**	0.1	0.2
4-я буква	Номер схемы (рис.12)	1	3	2	4	5	7	6	8	2	3
5-я буква	x_0, м	0.1	0.5	0.4	**0.3**	0.2	0.3	0.1	0.4	0.6	0.5
	$\dot{x}_0$, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$	0.5	-1	0.8	**-0.1**	0.4	-0.5	0.9	-0.2	2	-0.3

В данном примере *дано*: схема 7, $m = 0.2$кг, $\omega = \text{const} = \frac{\pi}{4}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, $\tau = 0.1$ с, $OK = h = 0.1$ м, $\alpha = 60^0$, $c = 1.5\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, $l_0 = 0.2$ м, $x_0 = 0.3$ м, $\dot{x}_0 = -0.1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Так как на схеме 7, отсутствует пружина, мы из данных не используем жесткость (c) и длину недеформированной пружины (l_0).

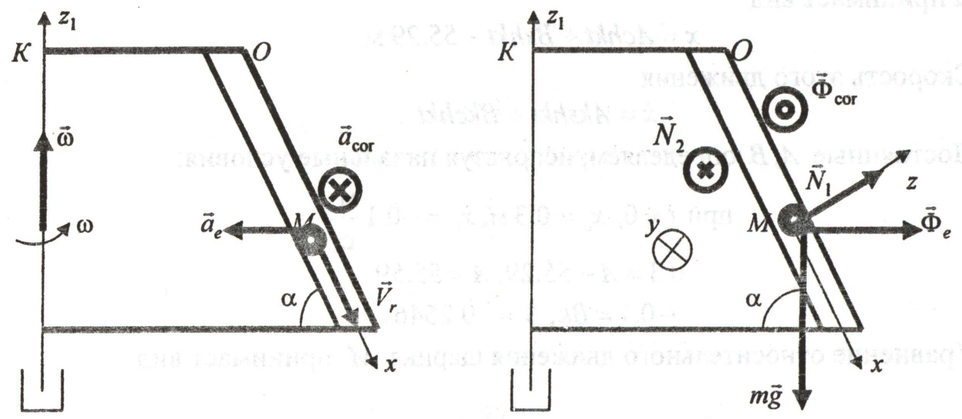


Рис. 13

Решение. Рассмотрим движения шарика M. Его движение вдоль выреза (вдоль оси x) является *относительным*, а вращение вместе с пластинкой – *переносным*. Записываем уравнение относительного движения шарика:

$$m\vec{a}_r = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{N}_k + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_{cor}.$$

Для определения сил инерций определяем и расставляем вектора ускорений (рис. 13, *а*).

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n},\ a_e^{\tau} = \varepsilon_e r_e = 0,\ r_e = OK + OM\cos\alpha = h + x\cos\alpha,\ \varepsilon_e = \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

так как $\omega = \omega_e = \text{const}$, $a_e^n = \omega_e^2 r_e = \omega^2(h + x\cos\alpha) = a_e$.

$$a_{cor} = 2\omega_e V_r \sin(180 - \alpha) = 2\omega\dot{x}\sin\alpha,$$

$\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e$, модуль силы $\Phi_e = ma_e = m\omega^2(h + x\cos\alpha)$,

$\vec{\Phi}_{cor} = -m\vec{a}_{cor}$, модуль силы $\Phi_{cor} = ma_{cor} = 2m\omega\dot{x}\sin\alpha$.

Вектора активных сил, реакций связей и сил инерции показаны на рис. 13, *б*. Составим дифференциальное уравнение относительного движения шарика вдоль оси x:

$$x:\ ma_r = mg\sin\alpha + \Phi_e\cos\alpha,$$

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha + m\omega^2 h\cos\alpha + m\omega^2 x\cos^2\alpha,$$

$$\ddot{x} - x\omega^2\cos^2\alpha = g\sin\alpha + \omega^2 h\cos\alpha.$$

Общее решение полученного дифференциального уравнения имеет вид:

$$x = x_1 + x_2,$$

где x_1 – общее решение однородного уравнения; x_2 – частное решение.

$$\ddot{x}_1 - x_1\omega^2\cos^2\alpha = \ddot{x}_1 - k^2 x_1 = 0,\ x_1 = Achkt + Bshkt,$$

где $k^2 = \omega^2\cos^2\alpha$, $k = 0.3927\frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

$$-x_2\omega^2\cos^2\alpha = g\sin\alpha + \omega^2 h\cos\alpha,$$

$$x_2 = -\frac{g\sin\alpha + \omega^2 h\cos\alpha}{\omega^2\cos^2\alpha} = -55.29\ \text{м}.$$

Решение дифференциального уравнения относительного движения шарика принимает вид

$$x = Achkt + Bshkt - 55.29\ \text{м}.$$

Скорость этого движения

$$\dot{x} = Akshkt + Bkchkt\ .$$

Постоянные A, B определяем, используя начальные условия:

$$\text{при } t = 0,\ x_0 = 0.3\ \text{м},\ \dot{x}_0 = -0.1\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$0.3 = A - 55.29,\ A = 55.59$$

$$-0.1 = Bk,\ B = -0.2546.$$

Уравнение относительного движения шарика M принимает вид

$$x = 55.59ch0.3927t - 0.2546sh0.3927t - 55.29\ (\text{м}).$$

Скорость относительного движения шарика

$$V_r = \dot{x} = 21.83sh0.3927t - 0.01ch0.3927t\ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

Для момента времени $t = \tau = 0.1$ с

$$x(t = \tau) = 0.322\ \text{м},\ V_r(t = \tau) = 0.71\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Для определения составляющих реакции трубки $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ проектируем уравнение относительного движения на оси z и y:

$$z:\ 0 = -mg\cos\alpha + N_1 + \Phi_e\sin\alpha,\ N_1 = mg\cos\alpha - \Phi_e\sin\alpha = 0.953\ \text{Н}.$$

$$y:\ 0 = N_2 - \Phi_{cor},\ N_2 = \Phi_{cor} = 0.193\ \text{Н}.$$

Реакция стенки трубки $N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = 0.972$ Н.

Искомое давление шарика M на стенки трубки по величине равно найденной реакции N и направлено в противоположную сторону.

Ответ. $x = 55.59ch0.3927t - 0.2546sh0.3927t - 55.29\ (\text{м})$, $N = 0.972$ Н.

Расчетно-графическая работа Д-2
Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Номер варианта задается по пятизначному шифру в буквах и цифрах. Запишите свой шифр в буквах, а затем переведите его в цифры.

1	2	3	4	5

Таблица 10

Цифра/ буква шифра	Исходные данные	А Л Х Я	Б М Ч Й	В Н Ц	Г О Ш	Д П Щ	Е Р Ы	Ж С Ь	З Т Ъ	И У Э	К Ф Ю
5-я буква	m_1, кг	26	40	36	32	24	28	40	42	38	34
4-я буква	r_2, м	0.2	0.4	0.6	0.3	0.5	0.1	0.6	0.4	0.3	0.2
	R_2/r_2	2	1.5	3	2.5	2	1.5	3	2.5	2	1.5
	r_3, м	0.3	0.2	0.5	0.4	0.1	0.5	0.3	0.4	0.1	0.2
	R_3/r_3	1.5	2.5	3	2	2	1.5	3	2	2.5	1.5
3-я буква	f	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.3	0.2
	$f_к \cdot 10^{-3}$, м	1	2	3	2.6	1.5	1.8	2.2	2.4	1.4	1.6
2-я буква	Номер схемы (рис.14)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-я буква	α, градусы	60	30	60	45	30	60	45	30	60	30

Задание к работе Д-2. Система, состоящая из груза *1*, неподвижного шкива *2* и подвижного катка *3*, приводится в движение из состояния покоя под действием силы тяжести груза *1* (рис.3). Проскальзывание между катком *3* и плоскостью отсутствует. Здесь m_1, m_2, m_3 – массы тел системы; R и r – радиусы шкива *2* или катка *3*; f – коэффициент трения скольжения тел по плоскости; $f_к$ – коэффициент трения качения тел системы; s_1 – расстояние, пройденное грузом *1*. Участки невесомых нерастяжимых нитей параллельны соответствующим плоскостям. Массы тел *2* и *3* не должны в сумме превышать массу тела *1*. Массы составных тел пропорциональны их радиусам (если тела *2* и *3* сплошные, то их можно считать однородными цилиндрами). Используя теорему об изменении кинетической энергии механической системы, в интегральной форме ***получить зависимость скорости центра масс первого тела как функцию перемещения его центра масс*** $V_1 = f(s_1)$ ***и построить график этой зависимости.***

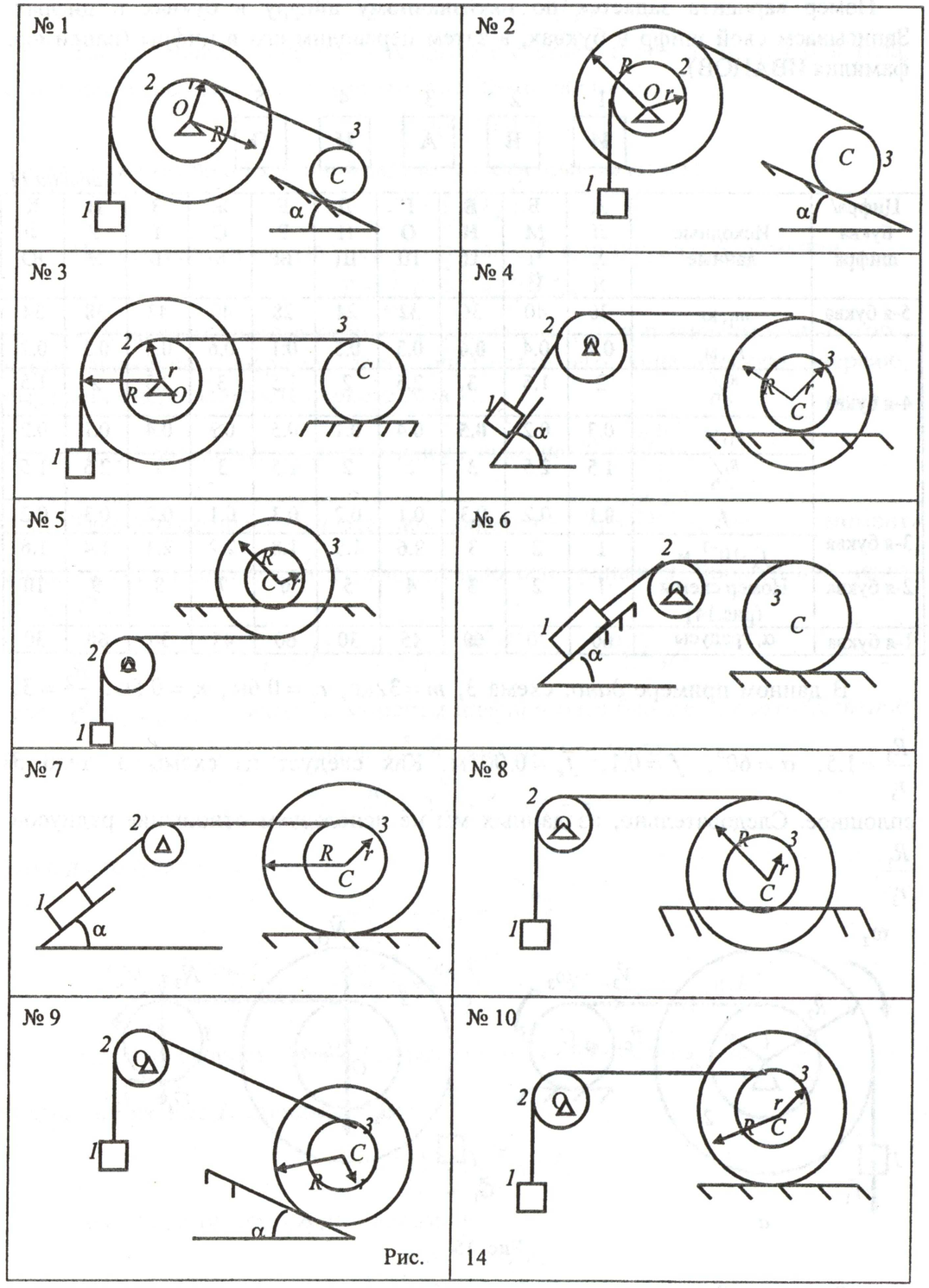


Рис. 14

Номер варианта задается по пятизначному шифру в буквах и цифрах. Записываем свой шифр в буквах, а затем переводим его в цифры (например, фамилия ИВАНОВ).

1	2	3	4	5
И	**В**	**А**	**Н**	**О**

Таблица 11

Цифра/ буква шифра	Исходные данные	А Л Х Я	Б М Ч Й	В Н Ц	Г О Ш	Д П Щ	Е Р Ы	Ж С Ь	З Т Ъ	И У Э	К Ф Ю
5-я буква	m_1, кг	26	40	36	**32**	24	28	40	42	38	34
4-я буква	r_2, м	0.2	0.4	**0.6**	0.3	0.5	0.1	0.6	0.4	0.3	0.2
	R_2/r_2	2	1.5	**3**	2.5	2	1.5	3	2.5	2	1.5
	r_3, м	0.3	0.2	**0.5**	0.4	0.1	0.5	0.3	0.4	0.1	0.2
	R_3/r_3	1.5	2.5	**3**	2	2	1.5	3	2	2.5	1.5
3-я буква	f	**0.1**	0.2	0.3	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.3	0.2
	$f_к \cdot 10^{-3}$, м	**1**	2	3	2.6	1.5	1.8	2.2	2.4	1.4	1.6
2-я буква	Номер схемы (рис.14)	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	10
1-я буква	α, градусы	60	30	60	45	30	60	45	30	**60**	30

В данном примере *дано*: схема 3, $m = 32$кг, $r_2 = 0.6$м, $r_3 = 0.5$м, $\frac{R_2}{r_2} = 3$, $\frac{R_3}{r_3} = 1.5$, $\alpha = 60^0$, $f = 0.1$, $f_k = 0.001$м. Как следует из схемы 3, тело *3* сплошное. Следовательно, из данных мы не используем отношение радиусов $\frac{R_3}{r_3}$.

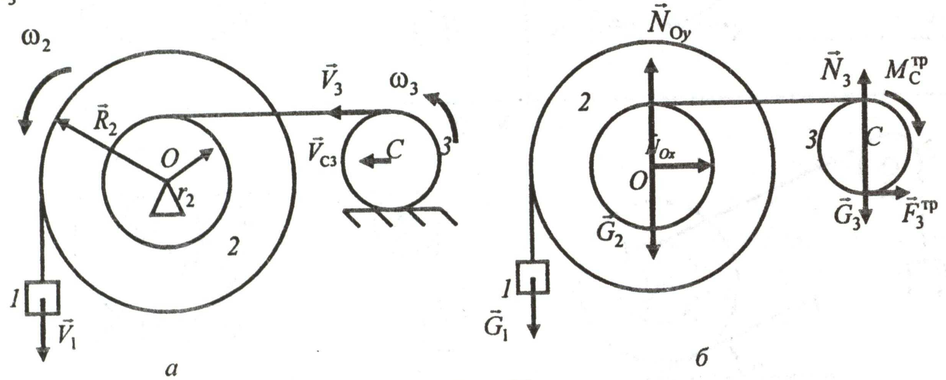


Рис. 15

Решение. Записываем теорему об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A\left(F_k^e\right) + \sum_{k=1}^{n} A\left(F_k^i\right).$$

Так как вначале система находится в состоянии покоя, то $T_0 = 0$ и тела, входящие в систему, абсолютно твердые. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n} A\left(F_k^i\right) = 0.$$

Тогда применительно к данной задаче теорема принимает вид

$$T = \sum_{k=1}^{n} A\left(F_k^e\right).$$

Найдем кинетическую энергию системы T в ее текущем положении:

$$T = \sum_{k=1}^{3} T_k = T_1 + T_2 + T_3.$$

Расставляем вектора скоростей тел (рис. 15, *а*) и в зависимости от того, какое движение совершает тело, определяем его кинетическую энергию, выразив ее через скорость первого тела V_1.

Тело 1 совершает поступательное движение $T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}$.

Тело 2 совершает вращательное движение $T_2 = \frac{J_O \omega_2^2}{2}$, где J_O – момент инерции составного блока 2 относительно оси вращения, проходящей через опору *O*.

$$J_O = J_O^R + J_O^r,\ J_O^R = \frac{m_2^R R_2^2}{2},\ J_O^r = \frac{m_2^r r_2^2}{2},$$

где $m_2^R, m_2^r, J_O^R, J_O^r$ – массы и моменты инерции масс блоков *2*, соответственно радиусов R_2 и r_2. Массы блоков m_2^R, m_2^r находим из условий:

$$\frac{m_2^R}{m_2^r} = \frac{R_2}{r_2} = 3 \text{ и } m_2^R + m_2^r = m_2.$$

Отсюда получаем

$$m_2^R = \frac{3}{4} m_2,\ m_2^r = \frac{m_2}{4},$$

$$J_O^R = \frac{3 m_2 R_2^2}{8},\ J_O^r = \frac{m_2 r_2^2}{8} = \frac{m_2 R_2^2}{72},\ J_O = J_O^R + J_O^r = \frac{7}{18} m_2 R_2^2.$$

Угловую скорость блока *2* выразим через скорость тела *1* $\omega_2 = \frac{V_1}{R_2}$.

Тогда выражение T_2 принимает вид

$$T_2 = \frac{J_O \omega_2^2}{2} = \frac{7}{36} m_2 V_1^2.$$

Тело *3* совершает плоское движение:

$$T_3 = \frac{m_3 V_{C3}^2}{2} + \frac{J_C \omega_3^2}{2},$$

где V_{C3} – скорость центра масс тела *3*; J_C – момент инерции тела *3* относительно оси вращения, проходящей через точку *C*.

$$J_C = \frac{m_3 r_3^2}{2},\ V_3 = \omega_2 r_2 = \frac{V_1}{3}.$$

Так как тело *3* катится без проскальзывания, то в точке контакта тела с поверхностью находится мгновенный центр скоростей. Тогда

$$\omega_3 = \frac{V_3}{2r_3} = \frac{V_{C3}}{r_3} = \frac{V_1}{6r_3},\ V_{C3} = \frac{V_1}{6}.$$

Выражение T_3 принимает вид

$$T_3 = \frac{m_3 V_1^2}{72} + \frac{m_3 V_1^2}{144} = \frac{1}{48} m_3 V_1^2.$$

Находим массы тел *2* и *3* из условий:

$$m_1 = 32\ \text{кг} \geq m_2 + m_3 = 30\ \text{кг},\ m_2 = 4m_2^r,$$

$$\frac{m_3}{m_2^r} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{5}{6}, m_3 = \frac{5}{6} m_2^r, m_2 = 4m_2^r = 24.8\ \text{кг}.\ \text{Тогда}\ m_2 = 4m_2^r = 24.8\ \text{кг},$$

$$m_3 = \frac{5}{6} m_2^r = 5.2\ \text{кг}.$$

Получаем значение кинетической энергии системы, выраженное через скорость первого тела:

$$T = \sum_{k=1}^{3} T = T_1 + T_2 + T_3 = 20.93 V_1^2.$$

Найдем сумму работ всех сил, приложенных к системе, на перемещении тела *1*. Расставляем вектора сил (пар сил), действующих на тела системы (рис. 15, *б*):

$$\sum_{k=1}^{8} A\left(F_k^e\right) = A\left(G_1\right) + A\left(G_2\right) + A\left(N_{Ox}\right) + A\left(N_{Oy}\right) + A\left(G_3\right) + A\left(N_3\right) + A\left(F_3^{\text{тр}}\right) + A\left(M_C^{\text{тр}}\right).$$

Работы сил $\vec{G}_2, \vec{N}_{Ox}, \vec{N}_{Oy}, \vec{F}_3^{\text{тр}}$ будут равны нулю, так как эти силы приложены в неподвижных точках. Работы сил $\vec{G}_3, \vec{N}_3$ также будут равны нулю, так как перемещения точек приложения этих сил перпендикулярны самим силам. Работа силы $\vec{G}_1$:

$$A\left(G_1\right) = G_1 h = G_1 s_1.$$

Работа пары сил сопротивления качению:

$$A\left(M_C^{\text{тр}}\right) = \int_{\varphi_{03}=0}^{\varphi_3} M_C^{\text{тр}} d\varphi \cos\left(M_C^{\text{тр}}, \omega_3\right).$$

$$M_C^{\text{тр}} = f_k N_3 = f_k G_3,\ \angle\left(M_C^{\text{тр}}, \omega_3\right) = 180^0,\ \cos\left(M_C^{\text{тр}}, \omega_3\right) = -1,$$

где φ_3 – угловое перемещение тела *3*. Выразим этот угол поворота через перемещение тела *1*. Так как линейные (угловые) перемещения находятся в такой же зависимости, как соответствующие линейные (угловые) скорости, то $\varphi_3 = \frac{s_1}{6r_3}$. Тогда $A\left(M_C^{\text{тр}}\right) = -f_k G_3 \varphi_3 = -\frac{f_k m_3 g}{6r_3} s_1$.

$$\sum_{k=1}^{2} A\left(F_k^e\right) = A\left(G_1\right) + A\left(M_C^{\text{тр}}\right) = \left(m_1 - \frac{f_k m_3}{6r_3}\right) g s_1 = 313.9 s_1$$

Приравниваем значения T и $\sum_{k=1}^{n} A\left(F_k^e\right)$: $20.93 V_1^2 = 313.9 s_1$,

отсюда $V_1 = 3.872\sqrt{s_1}$.

Ответ. $V_1 = 3.872\sqrt{s_1}$.

Расчетно-графическая работа Д-3
Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы

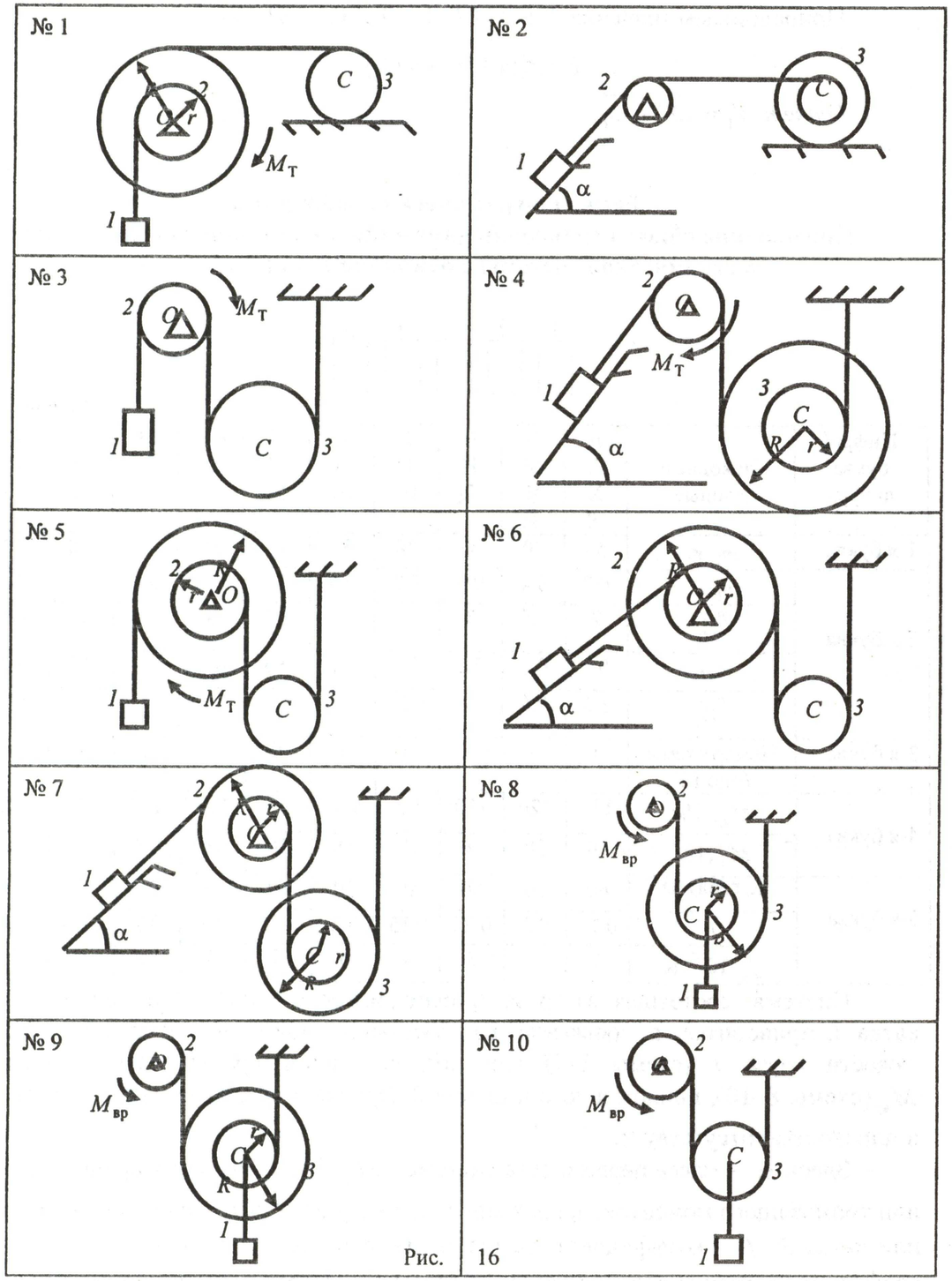
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

Таблица 12

Цифра/ буква шифра	Исходные данные	А Л Х Я	Б М Ч Й	В Н Ц	Г О Ш	Д П Щ	Е Р Ы	Ж С Ь	З Т Ъ	И У Э	К Ф Ю
1-я буква	m_1, кг	50	40	42	38	55	45	30	42	38	40
2-я буква	r_2, м	0.2	0.4	0.6	0.3	0.5	0.1	0.6	0.4	0.3	0.2
	R_2/r_2	2	1.5	3	2.5	2	1.5	3	2.5	2	1.5
	r_3, м	0.3	0.2	0.5	0.4	0.1	0.5	0.3	0.4	0.1	0.2
	R_3/r_3	1.5	2.5	3	2	2	1.5	3	2	2.5	1.5
3-я буква	Номер схемы (рис.16)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4-я буква	$M_{вр}$, Нм	130	120	110	90	140	86	126	118	114	122
	$M_т$, Нм	10	20	16	12	18	16	14	18	12	14
5-я буква	α, градусы	60	30	60	45	30	60	45	30	60	30
	f	0.15	0.2	0.25	0.15	0.2	0.25	0.1	0.2	0.25	0.2
	$f_к \cdot 10^{-3}$, м	1	2	3	4	5	6	8	6	4	2

Система, состоящая из груза *1*, неподвижного шкива *2* и подвижного катка *3*, приводится в движение из состояния покоя под действием силы тяжести груза *1* (схемы 1–7) или под действием вращающего момента $M_{вр}$ (схемы 8–10), приложенного к шкиву *2*. Проскальзывание между катком *3* и плоскостью отсутствует.

Здесь m_1 – масса первого тела системы; $M_{вр}, M_т$ – значения вращающего или тормозящего моментов, приложенных к шкиву *2*; R и r – радиусы шкива *2* или катка *3*; f – коэффициент трения скольжения тела *1* по плоскости; f_k – коэффициент трения качения катка *3*. Массы составных тел пропорциональны их радиусам (если тела *2* и *3* сплошные, то их считать однородными цилиндрами). Участки невесомых нерастяжимых нитей параллельны соответствующим плоскостям. **Определить ускорение груза *1*.**



Номер варианта задается по пятизначному шифру в буквах и цифрах. Записываем свой шифр в буквах, а затем переводим его в цифры (например, фамилия СИДОРОВ).

1	2	3	4	5
С	**И**	**Д**	**О**	**Р**

Таблица 13

Цифра/ буква шифра	Исходные данные	А Л Х Я	Б М Ч Й	В Н Ц	Г **О** Ш	Д П Щ	Е **Р** Ы	Ж **С** Ь	З Т Ъ	**И** У Э	К Ф Ю
1-я буква	m_1, кг	50	40	42	38	55	45	**30**	42	38	40
2-я буква	r_2, м	0.2	0.4	0.6	0.3	0.5	0.1	0.6	0.4	**0.3**	0.2
	R_2/r_2	2	1.5	3	2.5	2	1.5	3	2.5	**2**	1.5
	r_3, м	0.3	0.2	0.5	0.4	0.1	0.5	0.3	0.4	**0.1**	0.2
	R_3/r_3	1.5	2.5	3	2	2	1.5	3	2	**2.5**	1.5
3-я буква	Номер схемы (рис.16)	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	10
4-я буква	$M_{вр}$, Нм	130	120	110	**90**	140	86	126	118	114	122
	M_T, Нм	10	20	16	**12**	18	16	14	18	12	14
5-я буква	α, градусы	60	30	60	45	30	**60**	45	30	60	30
	f	0.15	0.2	0.25	0.15	0.2	**0.25**	0.1	0.2	0.25	0.2
	$f_к \cdot 10^{-3}$, м	1	2	3	4	5	**6**	8	6	4	2

В данном примере *дано*: схема 5, $m_1 = 30$ кг, $r_2 = 0.2$м, $r_3 = 0.1$м, $\frac{R_2}{r_2} = 2$, $\frac{R_3}{r_3} = 2.5$, $M_{вр} = 90$Нм, $M_T = 12$Нм, $\alpha = 60^0$, $f = 0.25$, $f_k = 0.006$м.

Из схемы 5 следует, что система движется за счет груза *1* и что тело *3* сплошное. Следовательно, из данных мы не используем вращающий момент $M_{вр}$, отношение радиусов $\frac{R_3}{r_3}, f, f_k$.

Решение. Записываем общее уравнение динамики:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A(F_k) + \sum_{k=1}^{n} \delta A(\Phi_k) = 0.$$

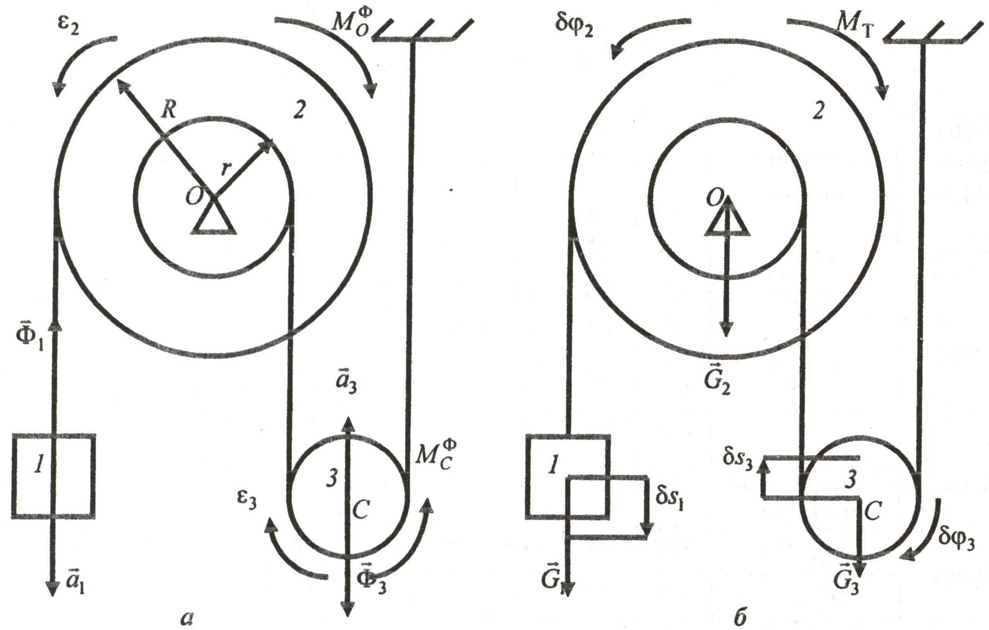
На схемах (рис.6) расставляем силы, ускорения и отдельно формируем выражения для элементарных работ внешних сил и сил инерций.

Сумма элементарных работ сил инерций (рис. 17, *а*):

$$\sum_{k=1}^{4} \delta A(\Phi_k) = \delta A(\Phi_1) + \delta A(M_O^{\Phi}) + \delta A(\Phi_3) + \delta A(M_C^{\Phi}).$$

Здесь $\vec{\Phi}_1 = -m_1\vec{a}_1$ – сила инерции груза *1*, движущегося поступательно;

- силы инерции вращающегося блока *2* приводятся к паре сил с моментом $\vec{M}_O^{\Phi} = -J_O\vec{\varepsilon}_2$;
- силы инерции катка *3*, совершающего плоское движение, приводятся к вектору $\vec{\Phi}_3 = -m_3\vec{a}_3$ и к паре с моментом $\vec{M}_C^{\Phi} = -J_C\vec{\varepsilon}_3$.



а *б*

Рис. 17

$$J_C = \frac{m_3 r_3^2}{2},\ J_O = J_O^R + J_O^r,\ J_O^R = \frac{m_2^R R^2}{2},\ J_O^r = \frac{m_2^r r^2}{2},$$

где $m_2^R, m_2^r, J_O^R, J_O^r$ – массы и моменты инерции масс блоков *2*, соответственно радиусов R и r. Находим массы тел *2* и *3* из условия $m_1 = 30\text{кг} \geq m_2 + m_3 = 30\text{кг}$. Массы составного блока m_2^R, m_2^r находим из условий $\frac{m_2^R}{m_2^r} = \frac{R_2}{r_2} = 2$ и $m_2^R + m_2^r = m_2$.

Отсюда получаем

$$m_2^R = \frac{2}{3}m_2,\ m_2^r = \frac{m_2}{3},\ \frac{m_2^r}{m_3} = \frac{r_2}{r_3} = 2,\ m_3 = \frac{m_2^r}{2},\ 3m_2^r + \frac{m_2^r}{2} = 30,$$

$$m_2^r = 8.57\text{ кг}, m_2^r = 17.14\text{ кг}, m_2 = 25.71\text{ кг}, m_3 = 4.285\text{ кг},\ J_O^R = \frac{m_2 R^2}{3},$$

$$J_O^r = \frac{m_2 r^2}{6} = \frac{m_2 R^2}{24},\ J_O = J_O^R + J_O^r = \frac{3}{8}m_2 R^2.$$

Используя зависимости кинематики, выражаем линейные и угловые ускорения через ускорение тела *1*:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R},\ \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_2 r}{2r_3} = \frac{a_1}{4r_3},\ a_3 = \varepsilon_3 r_3 = \frac{a_1}{4}.$$

Сообщаем системе возможное перемещение (рис. 17, *б*) и выражаем перемещения тел системы через перемещение тела *1*:

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_1}{R},\ \delta\varphi_3 = \frac{\delta s_1}{4r_3},\ \delta s_3 = \frac{\delta s_1}{4}.$$

Выражения для сил и пар сил инерций принимают вид

$$\Phi_1 = m_1 a_1,\ M_O^\Phi = J_O\varepsilon_2 = \frac{3}{8}m_2 R a_1,\ \Phi_3 = m_3 a_3 = \frac{m_3 a_1}{4},\ M_C^\Phi = J_C\varepsilon_3 = \frac{1}{8}m_3 r_3 a_1.$$

Получаем выражения для элементарных работ сил инерций:

$$\delta A(\Phi_1) = \Phi_1 \delta S_1 \cos 180^0 = -m_1 a_1 \delta s_1;$$

$$\delta A(M_O^\Phi) = M_O^\Phi \delta\varphi_2 \cos 180^0 = -\frac{3}{8}m_2 a_1 \delta s_1;$$

$$\delta A(\Phi_3) = \Phi_3 \delta S_3 \cos 180^0 = -\frac{1}{16}m_3 a_1 \delta s_1;$$

$$\delta A(M_C^\Phi) = M_C^\Phi \delta\varphi_3 \cos 180^0 = -\frac{1}{32}m_3 a_1 \delta s_1.$$

$$\sum_{k=1}^{4} \delta A(\Phi_k) = -\left(m_1 + \frac{3}{8}m_2 + \frac{3}{32}m_3\right)a_1 \delta s_1 = -40 a_1 \delta s_1.$$

Сумма элементарных работ внешних сил (рис. 17, *б*):

$$\sum_{k=1}^{4} \delta A(F_k) = \delta A(G_1) + \delta A(M_T) + \delta A(G_2) + \delta A(G_3), \text{ где}$$

$$\delta A(G_1) = G_1 \delta s_1 \cos 0^0 = m_1 g \delta s_1;$$

$$\delta A(M_T) = M_T \delta\varphi_2 \cos 180^0 = -\frac{M_T}{R_2}\delta s_1;$$

$\delta A(G_2) = 0$, так как сила $\vec{G}_2$ приложена в неподвижной точке (опора *O*);

$$\delta A(G_3) = G_3 \delta s_3 \cos 180^0 = -\frac{1}{4}m_3 g \delta s_1.$$

$$\sum_{k=1}^{4} \delta A(F_k) = \left(m_1 g - \frac{M_T}{R_2} - \frac{m_3 g}{4}\right)\delta s_1 = 253.79\,\delta s_1.$$

Подставляя эти выражения для элементарных работ в общее уравнение динамики, находим ускорение первого тела:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A(F_k) + \sum_{k=1}^{n} \delta A(\Phi_k) = 253.79\,\delta s_1 - 40 a_1 \delta s_1 = 0,\quad a_1 = 6.345\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ. $a_1 = 6.345\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Расчетно-графическая работа Д-4
Применение принципа Даламбера к определению статических и динамических составляющих реакций связей

1	2	3	4	5

Таблица 13

Цифра/ буква шифра	Исходные данные	А Л Х Я	Б М Ч Й	В Н Ц	Г О Ш	Д П Щ	Е Р Ы	Ж С Ь	З Т Ъ	И У Э	К Ф Ю
1-я буква	m_1, кг	50	40	42	38	55	45	30	42	38	40
2-я буква	r_2, м	0.2	0.4	0.6	0.3	0.5	0.1	0.6	0.4	0.3	0.2
	R_2/r_2	2	1.5	3	2.5	2	1.5	3	2.5	2	1.5
	r_3, м	0.3	0.2	0.5	0.4	0.1	0.5	0.3	0.4	0.1	0.2
	R_3/r_3	1.5	2.5	3	2	2	1.5	3	2	2.5	1.5
3-я буква	Номер схемы (рис.16)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4-я буква	$M_{вр}$, Нм	130	120	110	90	140	86	126	118	114	122
	M_T, Нм	10	20	16	12	18	16	14	18	12	14
5-я буква	α, градусы	60	30	60	45	30	60	45	30	60	30
	f	0.15	0.2	0.25	0.15	0.2	0.25	0.1	0.2	0.25	0.2
	$f_к \cdot 10^{-3}$, м	1	2	3	4	5	6	8	6	4	2

Исходными данными для работы являются данные по шифру из работы Д-3 и ускорение тела *1*. Выделить в рассмотрение тела, входящие в систему. Показать заданные силы, реакции опор и нитей, силы и моменты сил инерции.

Для каждого из тел системы составить уравнения на основе принципа Даламбера. ***Найти реакции ветвей нитей. Для тела 2 найти вертикальную и горизонтальную составляющие реакции. Из них выделить статические и динамические реакции.***

Номер варианта задается по пятизначному шифру в буквах и цифрах. Записываем свой шифр в буквах, а затем переводим его в цифры (например, фамилия СИДОРОВ).

1	2	3	4	5
С	**И**	**Д**	**О**	**Р**

Таблица 14

Цифра/ буква шифра	Исходные данные	А Л Х Я	Б М Ч Й	В Н Ц	Г **О** Ш	Д П Щ	Е **Р** Ы	Ж **С** Ь	З Т Ъ	**И** У Э	К Ф Ю
1-я буква	m_1, кг	50	40	42	38	55	45	**30**	42	38	40
2-я буква	r_2, м	0.2	0.4	0.6	0.3	0.5	0.1	0.6	0.4	**0.3**	0.2
	R_2/r_2	2	1.5	3	2.5	2	1.5	3	2.5	**2**	1.5
	r_3, м	0.3	0.2	0.5	0.4	0.1	0.5	0.3	0.4	**0.1**	0.2
	R_3/r_3	1.5	2.5	3	2	2	1.5	3	2	**2.5**	1.5
3-я буква	Номер схемы (рис.16)	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	10
4-я буква	$M_{вр}$, Нм	130	120	110	**90**	140	86	126	118	114	122
	M_T, Нм	10	20	16	**12**	18	16	14	18	12	14
5-я буква	α, градусы	60	30	60	45	30	**60**	45	30	60	30
	f	0.15	0.2	0.25	0.15	0.2	**0.25**	0.1	0.2	0.25	0.2
	$f_к \cdot 10^{-3}$, м	1	2	3	4	5	**6**	8	6	4	2

Дано. Из работы Д-3 схема 5, $m_1 = 30$ кг, $m_2 = 25.71$ кг, $m_3 = 4.285$ кг, $r_2 = 0.2$м, $r_3 = 0.1$м, $\frac{R_2}{r_2} = 2$, $M_T = 12$ Нм, $\alpha = 60^0$, $a_1 = 6.345 \frac{м}{с^2}$, $\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R_2} = 15.86 \frac{рад}{с}$, $\varepsilon_3 = \frac{a_1}{4r_3} = 15.86 \frac{рад}{с}$, $M_O^{\Phi} = J_O\varepsilon_2 = \frac{3}{8}m_2R_2a_1 = 24.47$ Нм, $\Phi_1 = m_1a_1 = 190.35$ Н, $a_3 = \frac{a_1}{4} = 1.586 \frac{м}{с^2}$.

Решение. Вырезаем из системы тела *1* и *2*. Прикладываем к ним заданные силы, реакции со стороны отброшенных связей и силы инерции (рис. 18).

Тело *1* совершает поступательное движение (рис. 18, *а*) вдоль оси y. Тогда для него принцип Даламбера имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} + \sum_{k=1}^{n} \Phi_{ky} = 0,\ G_1 - T_1 - \Phi_1 = 0,\ T_1 = G_1 - \Phi_1 = m_1(g - a_1) = 103.95\ \text{Н}.$$

Тело *2* совершает вращательное движение (рис. 18, *б*), относительно точки O. Тогда для него принцип Даламбера имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} + \sum_{k=1}^{n} \Phi_{kx} = 0,\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} + \sum_{k=1}^{n} \Phi_{ky} = 0,\quad \sum_{k=1}^{n} M_O + \sum_{k=1}^{n} M_O^{\Phi} = 0.$$

$$\sum_{k=1}^{1} F_{kx} + \sum_{k=0}^{0} \Phi_{kx} = -N_{Ox} = 0,\ N_{Ox} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{3} M_O + \sum_{k=1}^{1} M_O^{\Phi} = T_1 R_2 - T_2 r_2 - M_T - M_O^{\Phi} = 0,\ T_2 = \frac{T_1 R_2}{r_2} - \frac{M_T}{r_2} - \frac{M_O^{\Phi}}{r_2} = 25.55\,\text{Н},$$

$$\sum_{k=1}^{4} F_{ky} + \sum_{k=0}^{0} \Phi_{ky} = N_{Oy} - G_2 - T_1 - T_2 = 0,\ N_{Oy} = G_2 + T_1 + T_2 = 381.72\,\text{Н}.$$

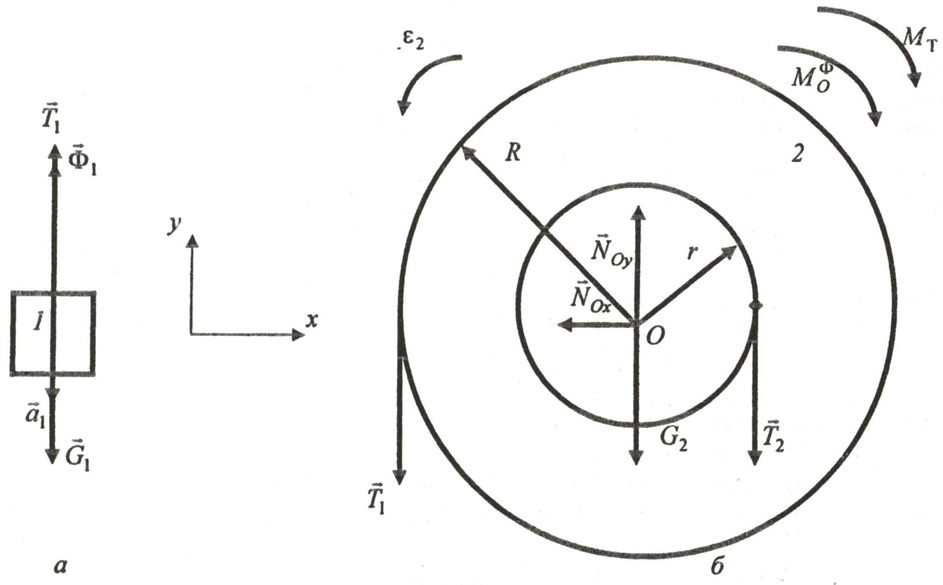


Рис.18

Для определения статических и динамических составляющих реакции опоры O представим ее в виде суммы $N_{Oy} = N_{Oy}^{\text{ст}} + N_{Oy}^{\text{дин}}$, где $N_{Oy}^{\text{ст}}$ – статическая составляющая реакции, обусловленная действием заданных сил; $N_{Oy}^{\text{дин}}$ – динамическая составляющая реакции, обусловленная движением тел системы.

$$N_{Oy} = G_2 + T_1 + T_2 = G_2 + G_1 - \Phi_1 + G_1\frac{R_2}{r_2} - \Phi_1\frac{R_2}{r_2} - \frac{M_T}{r_2} - \frac{M_O^{\Phi}}{r_2},$$

$$N_{Oy} = G_1\left(1 + \frac{R_2}{r_2}\right) + G_2 - \frac{M_T}{r_2} - \Phi_1\left(1 + \frac{R_2}{r_2}\right) - \frac{M_O^{\Phi}}{r_2}.$$

В полученном выражении $N_{Oy}^{\text{ст}} = G_1\left(1 + \frac{R_2}{r_2}\right) + G_2 - \frac{M_T}{r_2} = 1075.12\,\text{Н},$

$$N_{Oy}^{\text{дин}} = -\Phi_1\left(1 + \frac{R_2}{r_2}\right) - \frac{M_O^{\Phi}}{r_2} = -693.4\,\text{Н}.$$

Ответ. $T_1 = 103.95\,\text{Н}$, $T_2 = 25.55\,\text{Н}$, $N_{Ox} = 0$, $N_{Oy} = 381.72\,\text{Н}$, $N_{Oy}^{\text{ст}} = 1075.12\,\text{Н}$, $N_{Oy}^{\text{дин}} = -693.4\,\text{Н}$.

Расчетно-графическая работа Д-5
Применение уравнения Лагранжа второго рода к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы

1 2 3 4 5

Таблица 15

Цифра/ буква шифра	Исходные данные	А Л Х Я	Б М Ч Й	В Н Ц	Г О Ш	Д П Щ	Е Р Ы	Ж С Ь	З Т Ъ	И У Э	К Ф Ю
1-я буква	m_1, кг	50	40	42	38	55	45	30	42	38	40
2-я буква	r_2, м	0.2	0.4	0.6	0.3	0.5	0.1	0.6	0.4	0.3	0.2
	R_2/r_2	2	1.5	3	2.5	2	1.5	3	2.5	2	1.5
	r_3, м	0.3	0.2	0.5	0.4	0.1	0.5	0.3	0.4	0.1	0.2
	R_3/r_3	1.5	2.5	3	2	2	1.5	3	2	2.5	1.5
3-я буква	Номер схемы (рис.16)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4-я буква	$M_{вр}$, Нм	130	120	110	90	140	86	126	118	114	122
	M_T, Нм	10	20	16	12	18	16	14	18	12	14
5-я буква	α, градусы	60	30	60	45	30	60	45	30	60	30
	f	0.15	0.2	0.25	0.15	0.2	0.25	0.1	0.2	0.25	0.2
	$f_к \cdot 10^{-3}$, м	1	2	3	4	5	6	8	6	4	2

Система, состоящая из груза *1*, неподвижного шкива *2* и подвижного катка *3*, приводится в движение из состояния покоя под действием силы тяжести груза *1* или под действием вращающего момента $M_{вр}$, приложенного к шкиву *2*. Проскальзывание между катком *3* и плоскостью отсутствует.

Здесь m_1 – масса первого тела системы; $M_{вр}, M_т$ – значения вращающего или тормозящего моментов, приложенных к шкиву *2*; R и r - радиусы шкива *2* или катка *3*; f – коэффициент трения скольжения тела *1* по плоскости; f_k – коэффициент трения качения катка *3*. Массы составных тел пропорциональны их радиусам (если тела *2* и *3* сплошные, то их считать однородными цилиндрами). Участки невесомых нерастяжимых нитей параллельны соответствующим плоскостям. **Определить ускорение груза *1*.**

Номер варианта задается по пятизначному шифру в буквах и цифрах. Записываем свой шифр в буквах, а затем переводим его в цифры (например, фамилия БОЧАРОВ).

1	2	3	4	5
Б	**О**	**Ч**	**А**	**Р**

Таблица 16

Цифра/ буква шифра	Исходные данные	**А** Л Х Я	**Б** М **Ч** Й	В Н Ц	Г **О** Ш	Д П Щ	Е **Р** Ы	Ж С Ь	З Т Ъ	И У Э	К Ф Ю
1-я буква	m_1, кг	50	**40**	42	38	55	45	30	42	38	40
2-я буква	r_2, м	0.2	0.4	0.6	**0.3**	0.5	0.1	0.6	0.4	0.3	0.2
	R_2/r_2	2	1.5	3	**2.5**	2	1.5	3	2.5	2	1.5
	r_3, м	0.3	0.2	0.5	**0.4**	0.1	0.5	0.3	0.4	0.1	0.2
	R_3/r_3	1.5	2.5	3	**2**	2	1.5	3	2	2.5	1.5
3-я буква	Номер схемы (рис.16)	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10
4-я буква	$M_{вр}$, Нм	**130**	120	110	90	140	86	126	118	114	122
	M_T, Нм	**10**	20	16	12	18	16	14	18	12	14
5-я буква	α, градусы	60	30	60	45	30	**60**	45	30	60	30
	f	0.15	0.2	0.25	0.15	0.2	**0.25**	0.1	0.2	0.25	0.2
	$f_к \cdot 10^{-3}$, м	1	2	3	4	5	**6**	8	6	4	2

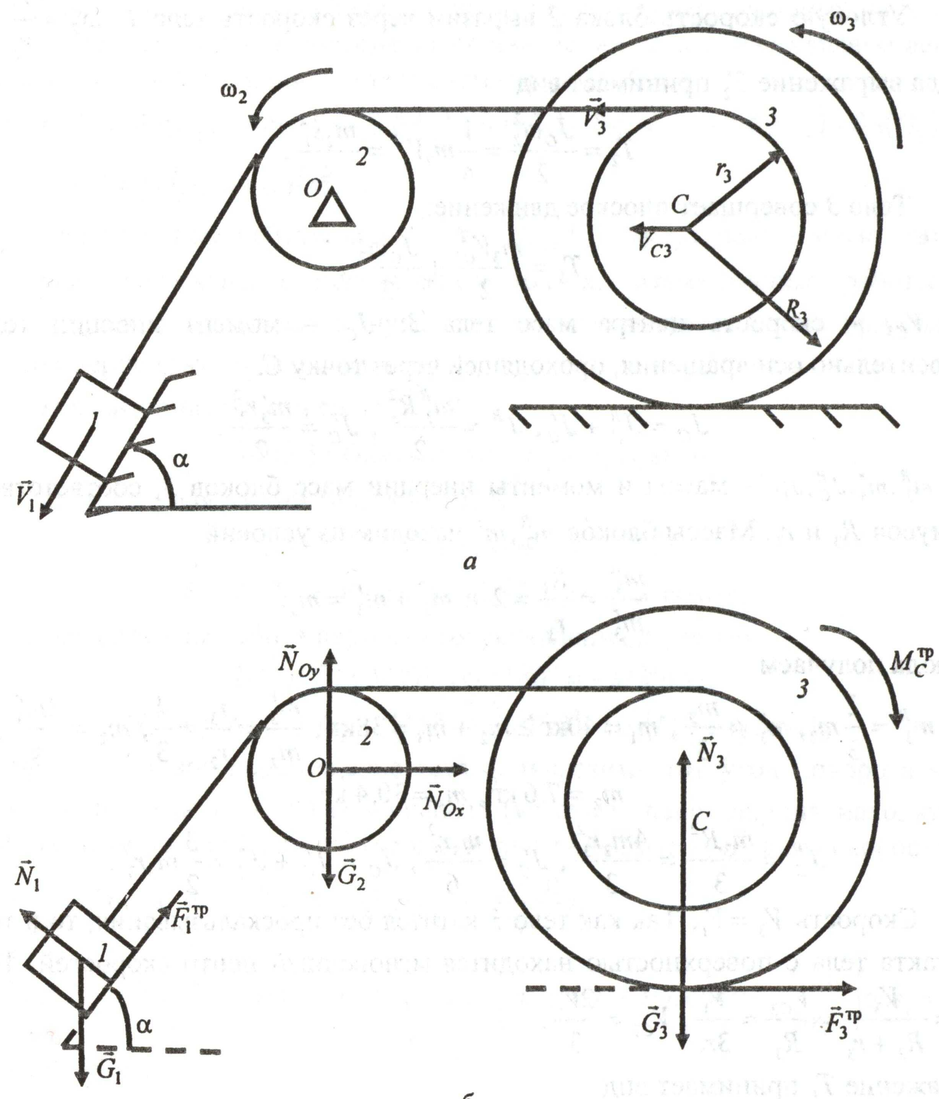
В данном примере *дано*: схема 2, $m_1 = 40$ кг, $r_2 = 0.3$м, $r_3 = 0.4$м, $\frac{R_2}{r_2} = 2.5$, $\frac{R_3}{r_3} = 2$, $M_{вр} = 130$Нм, $M_T = 10$Нм, $\alpha = 60^0$, $f = 0.25$, $f_k = 0.006$м. Из схемы *2* следует, что система движется за счет груза *1* и тело *2* сплошное. Следовательно, из данных мы не используем моменты $M_{вр}$, M_T и отношение радиусов $\frac{R_2}{r_2}$.

Решение. На схемах (рис. 19) расставляем силы, скорости и отдельно формируем выражения для кинетической энергии системы и элементарных работ внешних сил. В качестве обобщенной координаты принимаем перемещение первого тела: $q = s_1$, $\dot{q} = \dot{s}_1 = V_1$. Тогда уравнение Лагранжа второго рода, применительно к данной задаче, принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial s_1} = Q_{s_1}.$$

Кинетическая энергия системы равна (рис. 19, *а*)

$$T = \sum_{k=1}^{3} T_k = T_1 + T_2 + T_3.$$



а

б

Рис. 19

Расставляем вектора скоростей тел (рис. 19, *а*) и в зависимости от того, какое движение совершает тело, определяем его кинетическую энергию, выразив ее через скорость первого тела V_1.

Тело *1* совершает поступательное движение $T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{m_1 \dot{s}_1^2}{2}$.

Тело *2* совершает вращательное движение $T_2 = \frac{J_O \omega_2^2}{2}$, где $J_O = \frac{m_2 r_2^2}{2}$ – момент инерции блока *2* относительно оси вращения, проходящей через опору *O*.

Угловую скорость блока *2* выразим через скорость тела *1*: $\omega_2 = \frac{V_1}{r_2} = \frac{\dot{s}_1}{r_2}$.

Тогда выражение T_2 принимает вид

$$T_2 = \frac{J_O\omega_2^2}{2} = \frac{1}{4}m_2V_1^2 = \frac{m_2\dot{s}_1^2}{4}.$$

Тело *3* совершает плоское движение:

$$T_3 = \frac{m_3V_{C3}^2}{2} + \frac{J_C\omega_3^2}{2},$$

где V_{C3} – скорость центра масс тела *3*; J_C – момент инерции тела *3* относительно оси вращения, проходящей через точку *C*.

$$J_C = J_C^R + J_C^r,\ J_C^R = \frac{m_3^R R_3^2}{2},\ J_C^r = \frac{m_3^r r_3^2}{2},$$

где $m_3^R, m_3^r, J_C^R, J_C^r$ – массы и моменты инерции масс блоков *3*, соответственно радиусов R_3 и r_3. Массы блоков m_3^R, m_3^r находим из условий

$$\frac{m_3^R}{m_3^r} = \frac{R_3}{r_3} = 2 \text{ и } m_3^R + m_3^r = m_3.$$

Отсюда получаем

$$m_3^R = \frac{2}{3}m_3,\ m_3^r = \frac{m_3}{3},\ m_1 = 40\text{кг} \ge m_2 + m_3 = 38\text{кг},\ \frac{m_3^r}{m_2} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{4}{3},\ m_2 = \frac{3m_3^r}{4},$$

$$m_2 = 7.6\text{ кг},\ m_3 = 30.4\text{ кг}.$$

$$J_C^R = \frac{m_3R^2}{3} = \frac{4m_3r_3^2}{3},\ J_C^r = \frac{m_3r_3^2}{6},\ J_C = J_C^R + J_C^r = \frac{3}{2}m_3r_3^2.$$

Скорость $V_3 = V_1$. Так как тело *3* катится без проскальзывания, то в точке контакта тела с поверхностью находится мгновенный центр скоростей. Тогда

$$\omega_3 = \frac{V_3}{R_3 + r_3} = \frac{V_{C3}}{R_3} = \frac{V_1}{3r_3},\ V_{C3} = \frac{2V_1}{3}.$$

Выражение T_3 принимает вид

$$T_3 = \frac{2m_3V_1^2}{9} + \frac{m_3V_1^2}{3} = \frac{5}{9}m_3\dot{s}_1^2.$$

Получаем значение кинетической энергии системы, выраженное через скорость первого тела:

$$T = \sum_{k=1}^{3} T_k = T_1 + T_2 + T_3 = 38.79\dot{s}_1^2.$$

Формируем левую часть уравнения Лагранжа второго рода:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1}\right) = 77.58\dot{s}_1,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1}\right) = 77.58\ddot{s}_1 = 77.58a_1,\ \frac{\partial T}{\partial s_1} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial s_1} = 77.58a_1.$$

Для определения обобщенной силы, найдем сумму элементарных работ всех сил, приложенных к системе, на перемещении тела *1*. Расставляем вектора сил (пар сил), действующих на тела системы (рис. 19, *б*).

$$\sum_{k=1}^{10}\delta A(F_k) = \delta A(G_1) + \delta A(F_1^{\text{тр}}) + \delta A(N_1) + \delta A(G_2) + \delta A(N_{Ox}) + \delta A(N_{Oy}) + \delta A(G_3) +$$

$$+ \delta A(N_3) + \delta A(F_3^{\text{тр}}) + \delta A(M_C^{\text{тр}}).$$

Элементарные работы сил $\vec{G}_2, \vec{N}_{Ox}, \vec{N}_{Oy}, \vec{F}_3^{\text{тр}}$ будут равны нулю, так как эти силы приложены в неподвижных точках. Элементарные работы сил $\vec{N}_1, \vec{G}_3, \vec{N}_3$ также будут равны нулю, так как перемещения точек приложения этих сил перпендикулярны самим силам.

Элементарная работа силы $\vec{G}_1$:

$$\delta A(G_1) = G_1\delta s_1\cos(90^0 - \alpha) = G_1\delta s_1\sin\alpha.$$

Элементарная работа силы трения $\vec{F}_1^{\text{тр}}$:

$$\delta A(F_1^{\text{тр}}) = F_1^{\text{тр}}\delta s_1\cos 180^0 = -F_1^{\text{тр}}\delta s_1,$$

$$F_1^{\text{тр}} = fN_1 = fG_1\cos\alpha,\ \delta A(F_1^{\text{тр}}) = -fG_1\cos\alpha\delta s_1.$$

Элементарная работа пары сил сопротивления качению:

$$\delta A(M_C^{\text{тр}}) = M_C^{\text{тр}}\delta\varphi_3\cos 180^0 = -M_C^{\text{тр}}\delta\varphi_3,$$

$$M_C^{\text{тр}} = f_kN_3 = f_kG_3,\ \angle(M_C^{\text{тр}}, \omega_3) = 180^0,\ \cos(M_C^{\text{тр}}, \omega_3) = -1,$$

где $\delta\varphi_3$ – угловое перемещение тела *3*. Выразим этот угол поворота через перемещение тела *1*. Так как линейные (угловые) перемещения находятся в такой же зависимости, как соответствующие линейные (угловые) скорости, то $\delta\varphi_3 = \frac{\delta s_1}{3r_3}$. Тогда $\delta A(M_C^{\text{тр}}) = -f_kG_3\delta\varphi_3 = -\frac{f_km_3g}{3r_3}s_1$.

$$\sum_{k=1}^{3}\delta A(F_k) = \delta A(G_1) + \delta A(F_1^{\text{тр}}) + \delta A(M_C^{\text{тр}}) = \left(m_1\sin\alpha - fm_1\cos\alpha - \frac{f_km_3}{3r_3}\right)g\delta s_1 =$$

$$= 289.29\delta s_1.$$

Обобщенная сила

$$Q_{s_1} = \frac{\sum_{k=1}^{3}\delta A_{s_1}(F_k)}{\delta s_1} = 289.29\text{ Н}.$$

Приравниваем левые и правые части в уравнении Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial s_1} = 77.58a_1 = Q_{s_1} = 289.29,\quad a_1 = 3.729\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ. $a_1 = 3.729\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Список литературы

1. Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики: учебник для вузов / Н.Н. Никитин. - 6-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. шк., 2003.
2. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов / С.М. Тарг. - 12-е изд., стер.- М.: Высш. шк., 2001. 416 с.
3. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учеб. пособие / А.А. Яблонский [и др.]; под общ. ред. А.А. Яблонского.-7-е изд., испр. - М.: Интеграл, 2001.
4. Равновесие твердых тел. Рабочая тетрадь №1 по теоретической механике: метод. указ. / НГТУ; сост.: А.Ю. Панов [и др.], Н.Новгород, 2008.
5. Кинематические характеристики плоских механизмов. Рабочая тетрадь №2 по теоретической механике: метод. указ. / НГТУ; сост.: А.Ю. Панов [и др.], Н.Новгород, 2008.
6. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения механической системы. Рабочая тетрадь №3 по теоретической механике: метод. указ. / НГТУ; сост.: А.Ю. Панов [и др.], Н.Новгород, 2007.
7. Метод кинетостатики. Общее уравнение динамики. Уравнения Лагранжа второго рода. Рабочая тетрадь №4 по теоретической механике: метод. указ. / НГТУ; сост.: А.Ю. Панов [и др.], Н.Новгород, 2007.

Приложение

К задачам С-1, С-2

Условия равновесия плоской системы сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,\ \sum_{k=1}^{n} m_A(F_k) = 0,$$

здесь A - произвольная точка в плоскости xOy.

Момент силы F относительно точки A:

$$m_A(F) = \pm Fh,$$

где h - плечо силы – перпендикуляр, проведенный из точки A к линии действия силы F.

Теорема Вариньона:

$$m_A(R) = \sum_{k=1}^{n} m_A(F_k),$$

где R - равнодействующая системы сил.

К задаче С-3

Условия равновесия пространственной системы сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_{Ax}(F_k) = 0,\ \sum_{k=1}^{n} m_{Ay}(F_k) = 0,\ \sum_{k=1}^{n} m_{Az}(F_k) = 0.$$

Главный вектор системы:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

где $R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}$, $R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}$, $R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}$. Направление R определяют направляющие косинусы:

$$\cos(R,x) = \frac{R_x}{R},\ \cos(R,y) = \frac{R_y}{R},\ \cos(R,z) = \frac{R_z}{R}.$$

Главный момент системы относительно центра A:

$$M_A = \sqrt{M_{Ax}^2 + M_{Ay}^2 + M_{Az}^2},$$

где $M_{Ax} = \sum_{k=1}^{n} m_{Ax}(F_k)$, $M_{Ay} = \sum_{k=1}^{n} m_{Ay}(F_k)$, $M_{Az} = \sum_{k=1}^{n} m_{Az}(F_k)$. Направление M_A определяют направляющие косинусы:

$$\cos(M_A,x) = \frac{M_{Ax}}{M_A},\ \cos(M_A,y) = \frac{M_{Ay}}{M_A},\ \cos(M_A,z) = \frac{M_{Az}}{M_A}.$$

К задаче К-1

Скорость точки $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j}$, $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$.

Ускорение точки $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$, $a_x = \ddot{x}$, $V_y = \ddot{y}$, $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Касательное ускорение точки $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{V_x a_x + V_y a_y}{V}$, нормальное ускорение $a_n = \dfrac{V^2}{\rho} = \dfrac{|V_x a_y - V_y a_x|}{V}$, радиус кривизны траектории $\rho = \dfrac{V^2}{a_n} = \dfrac{V^3}{|V_x a_y - V_y a_x|}$.

К задаче К-2

Теорема о сложении скоростей (метод полюса):

точка A - полюс, $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$, $V_{BA} = \omega BA$.

Теорема о проекциях скоростей $(\vec{V}_B)_{AB} = (\vec{V}_A)_{AB}$.

Если за полюс принят мгновенный центр скоростей C_V, тогда $\vec{V}_B = \vec{V}_{BC_V}$, $V_B = V_{BC_V} = \omega BC_V$.

Теорема о сложении ускорений (метод полюса):

точка A - полюс, $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$, $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon AB$, $a^{n}_{BA} = \omega^2 AB$.

К задаче К-3

Абсолютная скорость точки $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$.

Абсолютное ускорение точки $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{\text{cor}}$.

Ускорение Кориолиса $\vec{a}_{\text{cor}} = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$, $a_{\text{cor}} = 2\omega_e V_r \sin(\omega_e, V_r)$.

К задаче Д-1

Уравнение относительного движения точки:

$$m\vec{a}_r = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{N}_k + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_{\text{cor}},$$

$\vec{a}_r$ – ускорение точки в относительном движении;

$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$ – сумма активных сил действующих на точку;

$\sum_{k=1}^{n} \vec{N}_k$ – сумма пассивных сил со стороны отброшенных связей;

$\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e$ – сила инерции в переносном движении;

$\vec{\Phi}_{\text{cor}} = -m\vec{a}_{\text{cor}}$ – сила инерции Кориолиса.

К задаче Д-2

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы в интегральной форме:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e) + \sum_{k=1}^{n} A(F_k^i),$$

T, T_0 – кинетическая энергия системы в текущем (конечном) и начальном положении;

$\sum_{k=1}^{n} A(F_k^e)$, $\sum_{k=1}^{n} A(F_k^i)$ – сумма работ внешних и внутренних сил на конечном перемещении системы.

Кинетическая энергия механической системы $T = \sum_{k=1}^{n} T_k$,

где T_k – кинетическая энергия k – го тела системы, n – число тел системы.

Выражение T_k зависит от движения тела:

при поступательном движении $T_k = \dfrac{m_k V_{Ck}^2}{2}$;

при вращательном движении $T_k = \dfrac{J_{Ck}\omega_k^2}{2}$;

при плоском движении $T_k = \dfrac{m_k V_{Ck}^2}{2} + \dfrac{J_{Ck}\omega_k^2}{2}$,

где V_{Ck}, ω_k – скорость центра масс и угловая скорость тела;

m_k, J_{Ck} – масса и момент инерции массы тела относительно оси, проходящей через центр масс.

Работа: силы $A(F) = \int_{s_0}^{s} F ds \cos(F, V)$;

пары сил $A(M) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M d\varphi \cos(M, \omega)$.

К задаче Д-3

Общее уравнение динамики:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A(F_k) + \sum_{k=1}^{n} \delta A(\Phi_k) = 0,$$

где $\sum_{k=1}^{n} \delta A(\Phi_k)$ – сумма элементарных работ сил инерции на любом возможном перемещении.

Элементарная работа: силы $\delta A(F) = F\delta s \cos(F, V)$; пары сил $\delta A(M) = M\delta\varphi \cos(M, \omega)$.

К задаче Д-4

Принцип Даламбера для системы материальных точек:

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k+\sum_{k=1}^{n}\vec{\Phi}_k=0,\qquad \sum_{k=1}^{n}\vec{M}_O+\sum_{k=1}^{n}\vec{M}_O^{\Phi}=0,$$

где $\sum_{k=1}^{n}\vec{\Phi}_k$ – сумма сил инерций, обусловленные движением каждого тела системы;

$\sum_{k=1}^{n}\vec{M}_O^{\Phi}$ – сумма моментов сил инерций относительно точки O.

Для плоской задачи уравнения равновесия принимают вид

$$\sum_{k=1}^{n}F_{kx}+\sum_{k=1}^{n}\Phi_{kx}=0,\quad \sum_{k=1}^{n}F_{ky}+\sum_{k=1}^{n}\Phi_{ky}=0,\quad \sum_{k=1}^{n}M_O+\sum_{k=1}^{n}M_O^{\Phi}=0.$$

К задаче Д-5

Уравнение Лагранжа второго рода для системы с одной степенью свободы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q_q,$$

где T – кинетическая энергия системы;

q – обобщенная координата;

$Q_q=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\delta A_q(F_k)}{\delta q}$ – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате.