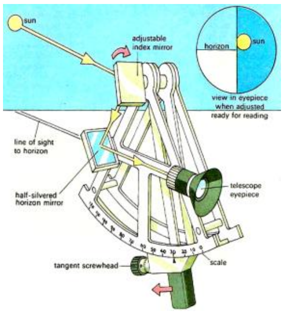
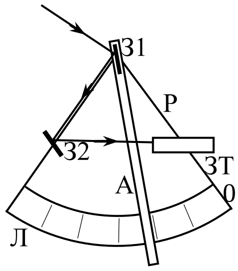
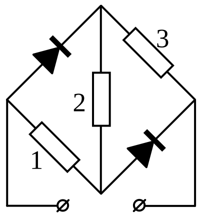
Задание заключительного тура Инженерной олимпиады школьников
2015-2016 учебного года, 9-10 класс

Задания

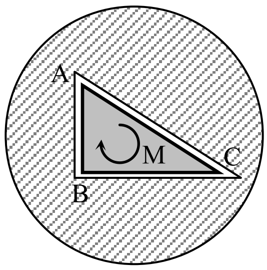




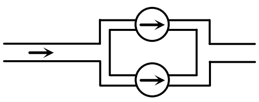
1. (2 балла) Для измерения угла склонения звезды или планеты над горизонтом используется секстант, идею которого предложил И.Ньютон. Измерения угла склонения с помощью секстанта можно провести и на палубе корабля в сильный шторм. Секстант состоит из неподвижной рамы Р с лимбом Л и нанесенной на нем угловой шкалой (образующей 1/6 полного угла – отсюда название прибора), подвижной радиальной планки (алидады) - А, имеющей шарнирное крепление в центре рамы, жестко связанного с алидадой в центре секстанта зеркала З1, полупрозрачного неподвижного зеркала З2, параллельного нулевому отсчету шкалы лимба - 0, зрительной трубы ЗТ. Посмотрите на рисунки и опишите, как с помощью секстанта можно измерить угол склонения планеты над горизонтом. Что нужно измерять, чтобы найти угол склонения планеты? Почему шторм «не мешает» проводить измерения с помощью секстанта?



2. (1 балл) Цепочку из трех резисторов $r_1 = R$, $r_2 = R$, $r_3 = 2R$ и двух идеальных диодов подключили к источнику переменного напряжения с амплитудой U_0 (см. рисунок). Найти среднюю тепловую мощность, которая будет выделяться на каждом резисторе за большое время. Идеальный диод проводит электрический ток в одном направлении – в направлении стрелочки в обозначении диода. Провода сопротивления не имеют.



3. (2 балла) В ряде случаев шлицы (углубления или пазы в головках крепежных изделий - винтов, болтов и т.д.) должны иметь нестандартную форму. Рассмотрите шлиц в виде прямоугольного треугольника с катетами a (AB) и $3a/2$ (BC). В шлиц вставлен ключ, зазоры между сторонами которого и сторонами шлица малы. К ручке ключа приложены две силы (пара сил), создающие момент M. Определить силы, с которыми ключ действует на грани шлица. Трением пренебречь.



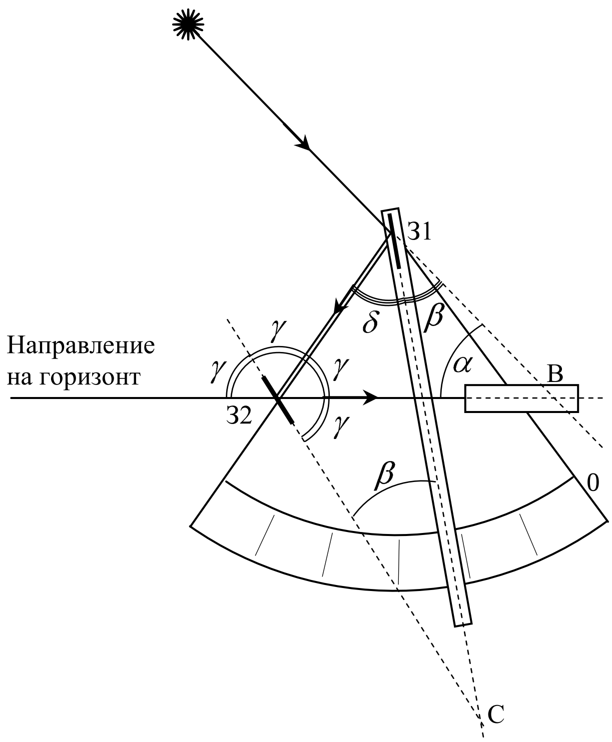
4. (2 балла) Важным параметром жидкостного насоса является его напорно-расходная характеристика, которая показывает, какой перепад давлений Δp (напор) может обеспечить насос в зависимости от количества жидкости μ, которое он может прокачать в единицу времени (расход). Эта зависимость, как правило, является убывающей функцией: при большом расходе насос может обеспечить только маленький напор и наоборот. Два насоса с напорно-расходными характеристиками $\Delta p_1 = p_0 - \alpha\mu^2$ и $\Delta p_2 = p_0 - \beta\mu$, где p_0, α и β - известные числа с соответствующими размерностями, включили в трубопровод так, как показано на рисунке (параллельно). Каким будет расход в системе насосов при напоре $\Delta p = p_0/2$? Какой напор обеспечит система насосов при расходе μ_0? ( - схематическое обозначение насоса).

5. (2 балла) В небольшое блюдце налили $M = 20$ г воды. Оцените, за какое время вода полностью испарится. Температура воды и воздуха $t = 20°$ С, давление насыщенных паров воды при этой температуре - $p = 2,4 \cdot 10^3$ Па, площадь блюдца $S = 100$ см^2, относительная влажность воздуха 70 %. Считать, что влажность воздуха одинакова во всем объеме помещения (в том числе и около поверхности) и не меняется в процессе испарения.

6. (3 балла) Через помещение, в котором поддерживается постоянная температура $t = 15°$ С проходит труба с горячей водой. Температура трубы в том месте, где она входит в помещение равна $t_1 = 75°$ С, в том месте, где выходит - $t_3 = 30°$ С. Чему равна температура посередине трубы? Считать, что теплообмен между тем или иным участком трубы и помещением пропорционален разности температур этого участка трубы и помещения.

Решения

1. (2 балла) Секстант работает следующим образом. Необходимо в зрительную трубу видеть линию горизонта (через полупрозрачное зеркало З2) и вращая алидаду добиться такого положение, что изображение звезды, угол склонения которой над горизонтом надо измерить (угол α на рисунке), в двух зеркалах попадает точно на линию горизонта. Схема отражения лучей зеркалами секстанта в этом случае показана на рисунке. Докажем, что угол между алидадой и нулевым отсчетом шкалы лимба (угол СЗ10 на рисунке, или, что то же самое, З2СЗ1 из-за параллельности зеркала З2 нулевому отсчету шкалы лимба) равен половине угла α. Действительно, чтобы через полупрозрачное зеркало З2 можно было видеть линию горизонта (при горизонтальном расположении зрительной трубы и при том, что угол раствора секстанта равен $60°$), оно должно быть установлено так, чтобы все углы, отмеченные двумя дугами равнялись бы друг другу и равнялись $\gamma = 60°$. Далее, из закона отражения заключаем, что пара углов - между зеркалом З1 и отраженным от него лучом, и между зеркалом З1 и продолжением падающего луча, равны друг другу (отмеченных тремя дугами на рисунке и обозначены как δ). Из треугольника З1З2С имеем



$$120° + \beta + \delta = 180° \qquad \Rightarrow \qquad \beta + \delta = 60° \tag{1}$$

С другой стороны, из треугольника З1З2В имеем

$$60° + 2\delta + \alpha = 180°, \qquad \Rightarrow \qquad 2\delta + \alpha = 120° \tag{2}$$

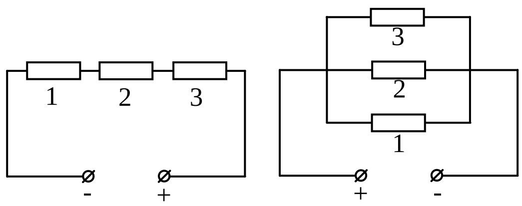
Из (1), (2) получаем, что

$$\alpha = 2\beta$$

Таким образом, измеряя по шкале лимба угол между алидадой и нулевым отсчетом шкалы и умножая его на 2, получаем угол склонения звезды над горизонтом.

В сильный шторм (подразумевается, конечно, при качке; в грозу или дождь на небе облака, и никаких звезд не видно) секстант работает так. При качке корабля зрительную трубу трудно навести на горизонт, и мы в ней видим все время меняющуюся картину – то выше, то ниже горизонта. Но во время качки в трубе в какие-то моменты видно линию горизонта. Медленно вращая алидаду, добиваемся, чтобы именно в те моменты, когда труба проходит через линию горизонта, отражение звезды в двух зеркалах попадало точно на эту линию. В этом положении измеряем угол между алидадой и нулевым отсчетом шкалы лимба и умножаем на 2.

2. (1 балл) В зависимости от полярности приложенного напряжения данная цепь имеет вид, показанный на рисунке. Поэтому в течение половины времени, отвечающей левому рисунку на резисторах будет выделяться следующая мощность



$$P_{1,1} = \frac{U^2 r_1}{2\left(r_1 + r_2 + r_3\right)^2} = \frac{U^2}{32R}, \quad P_{2,1} = \frac{U^2 r_2}{2\left(r_1 + r_2 + r_3\right)^2} = \frac{U^2}{32R},$$

$$P_{3,1} = \frac{U^2 r_3}{2\left(r_1 + r_2 + r_3\right)^2} = \frac{U^2}{16R}$$

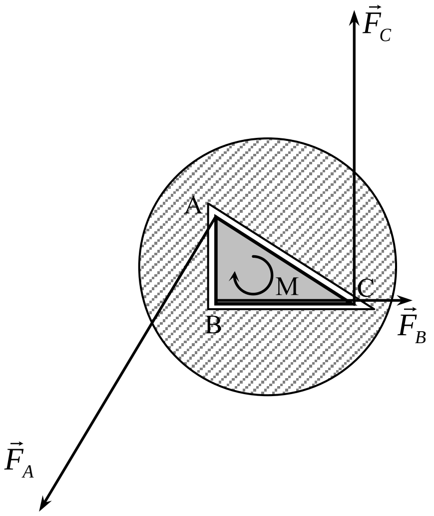
(2 в знаменателе – из-за необходимости использовать действующее значение напряжения). В течение второй половины времени (правый рисунок) на резисторах выделяется

$$P_{1,2} = \frac{U^2}{2R}, \quad P_{2,2} = \frac{U^2}{2R}, \quad P_{3,2} = \frac{U^2}{4R}$$

Поэтому за большое время на резисторах выделяется следующие средние мощности

$$P_{1,cp} = \frac{P_{1,1}+P_{1,2}}{2} = \frac{17U^2}{64R},\ P_{2,cp} = \frac{P_{2,1}+P_{2,2}}{2} = \frac{17U^2}{64R},\ P_{3,cp} = \frac{P_{3,1}+P_{3,2}}{2} = \frac{9U^2}{64R}$$

3. (2 балла) Силы, с которыми стенки полости действуют на грани ключа, и точки их приложения показаны на рисунке. Из-за малых зазоров между гранями ключа и гранями шлица, а также из-за отсутствия трения эти силы перпендикулярны граням шлица и ключа. Поскольку сумма сил, действующих на ключ, равна нулю, а сумма двух сил, создающих момент M, также равна нулю (пара сил), должна быть равна нулю сумма $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C$. Это значит, что эти силы образуют треугольник, причем из-за перпендикулярности сил граням ключа, подобный сечению ключа. Из соотношений подобия заключаем, что



$$\frac{F_B}{F_C} = \frac{a}{b}$$

где a и $b = 3a/2$ - катеты сечения ключа. С другой стороны, условие моментов относительно вершины А дает

$$F_B a + F_C b = M$$

Из этих двух уравнений находим

$$F_B = \frac{Mb}{a^2+b^2} = \frac{6M}{13a},\ F_C = \frac{Ma}{a^2+b^2} = \frac{4M}{13a}$$

а затем по теореме Пифагора F_A

$$F_A = \frac{M}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2M}{\sqrt{13}a}.$$

4. (2 балла) Очевидно, при параллельном соединении насосов каждый из них работает при одинаковом напоре Δp (разность давлений жидкости после и до насоса). А вот расходы, которые обеспечивают насосы, складываются. Используя напорно-расходные характеристики первого и второго насоса, найдем расход при напоре $\Delta p = p_0/2$:

$$\mu\ \ p_0/2\ \ = \sqrt{\frac{p_0}{2\alpha}} + \frac{p_0}{2\beta}$$

При заданном расходе μ_0 системы насосов расход жидкости через насосы распределяется так, чтобы напор первого и второго насосов был одинаковым:

$$\mu_0 = \mu_1 + \mu_2$$
$$p_0 - \alpha\mu_1^2 = p_0 - \beta\mu_2$$

Отсюда

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_0} - \beta}{2\alpha}$$

Подставляя теперь это значение в напорно-расходную характеристику, получим

$$\Delta p = p_0 - \alpha\left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_0} - \beta}{2\alpha}\right)^2$$

5. (2 балла) Если бы пар был насыщенным, то скорости испарения и конденсации совпадали бы. Другими словами, количество молекул покидающих жидкость, равнялось бы числу молекул, попадающих в жидкость из пара. Последнюю величину можно вычислить так же, как вычисляют число столкновений молекул идеального газа со стенкой сосуда. Число молекул, сталкивающихся с площадкой площади ΔS за время Δt, равно

$$\Delta N = \frac{1}{6} nv\Delta S\Delta t$$

где n - концентрация молекул газа, v - средняя скорость (1/6 поскольку одна треть молекул движутся вдоль заданной оси, причем половина из них в положительном, половина в отрицательном направлениях). Умножая эту формулу на массу одной молекулы, находим массу воды, конденсирующейся на площадку за время Δt

$$\Delta M = \frac{1}{6}\rho v \Delta S \Delta t$$

где ρ - плотность пара. Произведение ρv выразим через давление и температуру пара. Поскольку

$$p = nkT = \frac{1}{3}nmv^2 = \frac{1}{3}\rho v^2,$$

то

$$v = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$$

Отсюда

$$\Delta M = \frac{1}{6}\sqrt{3p\rho}\,\Delta S \Delta t$$

Используя далее закон Клапейрона-Менделеева

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}$$

где $\mu = 18$ г/моль – молярная масса воды, R - универсальная газовая постоянная, найдем скорость конденсации пара на единицу площади

$$v_M = \frac{1}{6}p\sqrt{\frac{3\mu}{RT}}$$

Если бы пар был насыщенным, то ровно столько воды и испарялось бы. Поэтому скорость испарения воды при температуре T определяется этой формулой с p равным давлению насыщенного пара при данной температуре. Учитывая, что наш пар имеет относительную влажность 70 %, семьдесят процентов испарившейся воды конденсируется назад, поэтому результирующая скорость испарения равна

$$v_M = \frac{0,3}{6}p\sqrt{\frac{3\mu}{RT}}$$

Подставляя данные значения, получим

$$v_M = 0,6\,\frac{кг}{м^2 \cdot с}$$

Отсюда находим время испарения

$$t = \frac{M}{Sv_M} = \frac{2\cdot 10^{-2}}{1\cdot 10^{-2}\cdot 0,6} = 3 \text{ с}$$

Полученный результат парадоксален – время испарения воды из блюдца, как мы знаем, должно составить порядка суток. Однако его легко объяснить, если вспомнить, что мы можем сильно увеличить скорость испарения воды «сдувая» пар, образовавшийся над водой в результате испарения. Это значит, что вблизи поверхности пар является почти насыщенным независимо от того, какова его относительная влажность во всем помещении. Поэтому наша оценка, основанная на предположении об одинаковости относительной влажности во всем помещении является очень неточной.

6. (3 балла) Пусть в единицу времени через сечение трубы протекает масса воды Δm. Обозначим температуру воды посередине трубы t_2. Тогда первая половина трубы теряет в единицу времени количество теплоты - $c\Delta m\ t_1 - t_2$. Это количество теплоты уходит в помещение через боковые стенки трубы. Поток тепла через боковую поверхность первой половины трубы пропорционален разности температур любой фиксированной точки первой половины трубы и помещения $\eta\ t_1 - t$, где η - коэффициент пропорциональности, одинаковый для теплообмена первой и второй половин трубы и помещением (в качестве такой точки можно взять любую точку барабана; коэффициент η, естественно, зависит от выбора этой точки). Возьмем в качестве такой точки начало первой и второй половин трубы. Тогда

$$c\Delta m\ t_1 - t_2\ = \eta\ t_1 - t$$

Аналогично для теплообмена второй половины трубы помещения имеем

$$c\Delta m \;\; t_2 - t_3 \;\; = \eta \;\; t_2 - t$$

Деля уравнения друг на друга, получим

$$t_2^2 - 2tt_2 + t_3 t_1 - t_1 t - t_3 t = 0$$

Из квадратного уравнения найдем искомую температуру t_2

$$t_2 = t + \sqrt{\; t - t_3 \quad t - t_1 \;} = 45^\circ \text{ C}$$