

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им Р.Е.Алексеева

**Кафедра «Аэро-гидродинамика, прочность машин и сопротивление
материалов»**

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

Определение собственных частот колебаний консольной балки

Нижний Новгород
2015

Содержание

	Стр.
1 Общие теоретические положения	3
2 Описание лабораторной установки	7
3 Порядок выполнения работы	9
4 Выводы и анализ полученных результатов	10

1 Общие теоретические положения

Уравнения свободных упругих колебаний балки (рис.1) и граничные условия записываются в виде:

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\text{при } x=0: \quad w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\text{при } x=l: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (2)$$

где: EJ – жесткость балки, m – погонная масса балки.

Рассмотрим свободные колебания балки в воздухе по одной из форм $f(x)$ с собственной частотой λ :

$$w(x,t) = f(x) \cos(\lambda t - \alpha) \quad (3)$$

Подстановка (3) в (1) после сокращения на $\cos(\lambda t - \alpha)$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно собственной формы колебаний:

$$EJf^{IV}(x) - \lambda^2 mf(x) = 0 \quad (4)$$

В случае свободных колебаний балки (рис. 1):

$$w(x, t) = f(x) \cos(\lambda t - \alpha) = f(x) \varphi(t)$$

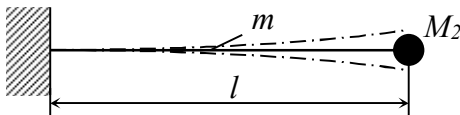


Рисунок 1- Расчетная схема балки

Кинетическая и потенциальная энергия балки:

$$K = \frac{1}{2} \int_l m \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_l mf^2(x) dx \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} M_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \quad (5)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l EJ (w'')^2 dx = \frac{1}{2} \int_l EJ f'' dx \cdot \varphi^2 = \frac{1}{2} N \varphi^2 \quad (6)$$

где $M_1 = \int_l mf^2 dx$ - обобщенная масса, (7)

$N = \int_l EJ f'' dx$ - обобщенная жесткость. (8)

При наличии на балке сосредоточенной массы выражение для кинетической энергии балки с сосредоточенной массой M_2 запишется в виде:

$$K = \frac{1}{2} \int_l m \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} M_2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2_{x=l} = \frac{1}{2} \int_l mf^2(x) dx \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} M_2 f^2_{x=l} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2. \quad (5a)$$

Значение обобщенной массы при этом будет определяться выражением

$$M = \int_l m f^2 dx + M_2 f^2_{x=l_1} = M_1 + M_2^*, \quad (7a)$$

где $f=l$ при $x=l$ и $M_2^* = M_2 \cdot f^2_{x=l_1}$.

Используя уравнение Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial K}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)} \right] = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}$$

получим уравнение колебания системы с одной степенью свободы

$$M \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + N \varphi = 0.$$

$$\text{Величина } \lambda^2 = \frac{N}{M} \quad (9)$$

– есть квадрат собственной частоты колебания балки по одной из собственных форм $f(x)$. Если принять функцию формы колебаний в виде

$$f = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{x}{l} \right) \frac{x^2}{l^2} \text{ то получим } M_1 = \frac{33}{140} ml, \quad M_2^* = M_2 \cdot \frac{1}{4} \left(9 \frac{l_1^4}{l^4} - 6 \frac{l_1^5}{l^5} + \frac{l_1^6}{l^6} \right). \quad (10)$$

2 Описание лабораторной установки

Лабораторная установка (рис. 2) состоит из прозрачного бака (1) и консольно закрепленной балки (3) к одной из его стенок с помощью зажима (4). В балке, за счет начального отклонения ее свободного конца w_0 (5), возбуждаются собственные колебания, форма которых близка к форме первого тона свободных колебаний. На свободном конце закреплен кронштейн (6) малой массы. На кронштейне закреплен индуктивный преобразователь ускорения типа ДУ-5С (7), входящий в комплект виброизмерительной аппаратуры ВИ-6-6ТН. Кронштейн, в месте соединения с балкой, имеет конструктивный упругий шарнир (8). Для устранения побочных колебаний кронштейна в горизонтальной плоскости натянута нить (9), соединенная с кронштейном (6) и двумя противоположными стенками бака (1). Измерительная схема для регистрации параметров колебательного процесса приведена на рис. 3.

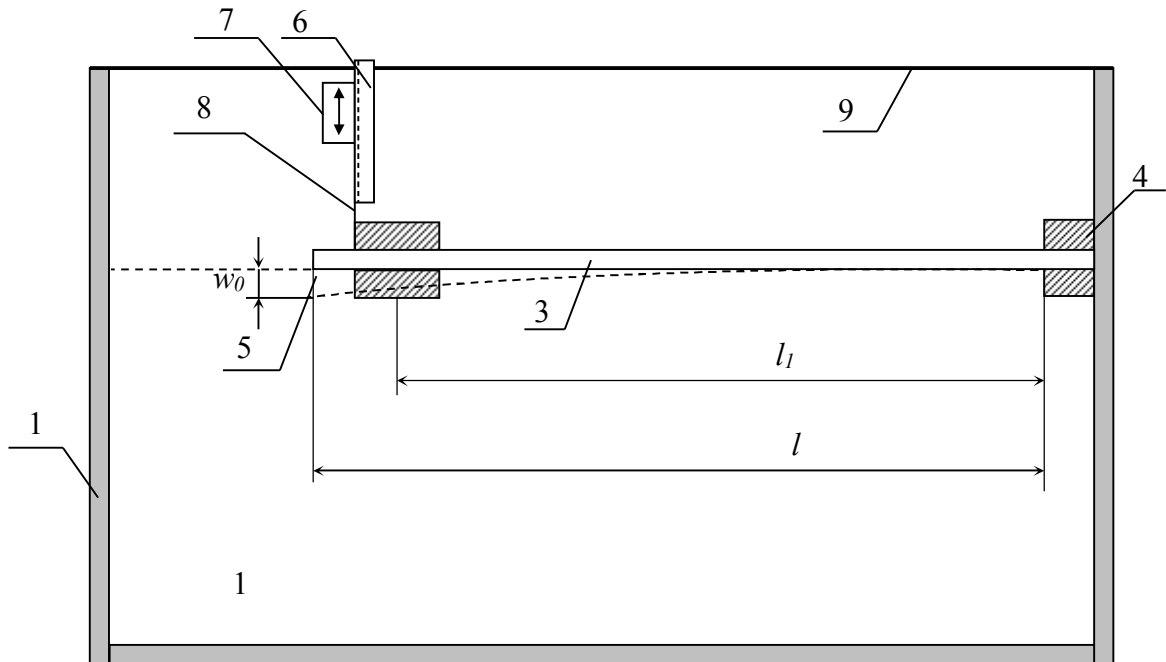
При колебаниях балки-пластинки, в месте установки преобразователя ДУ-5С, возникают ускорения, и преобразователь (1) преобразует текущее ускорение в пропорциональный электрический сигнал, который в свою очередь, после его усиления в усилительно-преобразовательном блоке (2), поступает на плату аналого-цифрового преобразователя (АЦП) (4).

Усилительно-преобразовательный блок (2) питается постоянным напряжением 27 В от источника постоянного тока (3). Плата АЦП установлена в корпусе системного блока (6). Плата управляется с помощью программного обеспечения «Power Graph» (5). ПО (5) позволяет хранить, преобразовывать и обрабатывать полученные сигналы с преобразователей, а также представлять результаты на экране монитора (7).

Регистрируемый при колебаниях балки-пластинки сигнал носит затухающий характер и позволяет определить частоту свободных колебаний балки из соотношения:

$$\lambda = 2\pi \frac{n}{\Delta t} \quad (11)$$

где n – число колебаний за время Δt . Частоту собственных колебаний можно также определить из спектрограммы, полученной путем быстрого преобразования Фурье из осциллограммы колебательного процесса пластинки, используя программное обеспечение «POWER GRAPH».



1 – Бак, заполняемый водой; 2 – вода; 3 – пластина (балка); 4 – зажим для крепления пластины; 5 – начальное отклонение пластины от положения статического равновесия; 6 – кронштейн для крепления преобразователя (датчика) ускорений; 7 – преобразователь ускорения ДУ-5С; 8 – упругий шарнир кронштейна; 9 – нить для фиксации положения кронштейна в горизонтальной плоскости

Рисунок 2 – Схема лабораторной установки

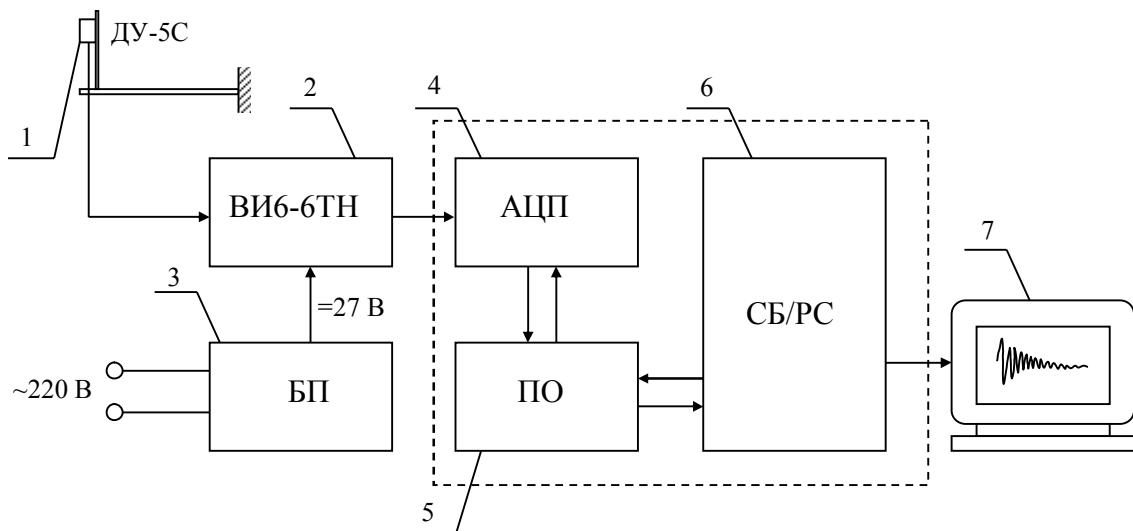


Рисунок 3 – Электрическая измерительная блок-схема

3 Порядок выполнения работы

1 Преподавателем задается величина сосредоточенной массы M_2 . Указанная сосредоточенная масса устанавливается на балку.

2 Производится возбуждение свободных колебаний балки путем отклонения ее свободного конца на w_0 .

3 Выполняется запись колебательного ускорения во времени для балки в воздухе.

4 Указанная процедура выполняется не менее 3-х раз.

Из анализа осциллограммы сигнала по зависимости (24) или спектральным методом определяется частота свободных колебаний $\lambda = 2\pi f$. Результаты заносятся в таблицу 1.

Экспериментальное значение частоты свободных колебаний λ в воздухе без сосредоточенной массы определяется зависимостью:

$$\lambda = \left(\frac{1,875}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad (12)$$

где EJ – жесткость балки, m – погонная масса балки.

Для балки с сосредоточенной массой, расположенной на расстоянии l_1 от заделки, значение частоты свободных колебаний 1 тона λ в воздухе определяются зависимостью (9). Значение обобщенной массы определяется по формуле (7а), где приведенная масса балки равна

$$M_1 = \frac{33}{140} ml = \frac{33}{140} \cdot 0,734 \cdot 0,335 = 0,058 \text{ кг},$$

где $m = A\rho = 2,67 \cdot 10^{-4} \cdot 2750 = 0,734 \text{ кг/м}$; $A = bs = 0,0693 \cdot 0,00385 = 2,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

Сосредоточенная масса M_2 складывается из двух составляющих: постоянной массы M_n и съемной массы M_c и равна:

$$M_2 = M_n + M_c,$$

где $M_n = 0,060 \text{ кг}$, а M_c задается преподавателем.

Обобщенная жесткость вычисляется по формуле

$$N = \frac{3EI}{l^3} = \frac{3 \cdot 0,726 \cdot 10^{11} \cdot 0,03296 \cdot 10^{-8}}{0,335^3} = 1910 \text{ м/Н},$$

где $I = \frac{bs^3}{12} = \frac{0,0693 \cdot 0,00385^3}{12} = 0,03296 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ - момент инерции поперечного

сечения пластинки при $b=69,3 \text{ мм}$ и $s=3,85 \text{ мм}$, $E=0,726 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $l=0,335 \text{ м}$.

Откуда получаем выражение для теоретической частоты колебаний 1 тона

$$\lambda = \sqrt{\frac{N}{M}}. \quad (13)$$

Экспериментальное значение круговой частоты $\lambda = 2\pi f$ 1/с, где f – полученная в эксперименте частота в Гц.

Вычисление M и N производится для приближенной формы колебаний первого тона, задаваемой или в виде тригонометрической функции, или в виде функции, описывающей упругую ось консольной балки от действия статических нагрузок.

Частоты колебаний $\lambda_i = 2\pi f_i$ получают из эксперимента. Результаты измерений заносятся в таблицу 1.

Полученная экспериментально частота сравнивается с теоретическим значением частоты.

Таблица 1 – Результаты измерений и обработка данных

№№ опытов	Число колебаний	Время , с	Частота f_3 , Гц	Круговая частота	Частота f_3 , Гц по спектру	Теоретическое значение частоты f_m	Расхождение δ , %
	n	Δt ,	$f = \Delta t/n$	$\lambda_3 = 2\pi f / c$			
Опыт 1							
Опыт 2							
Опыт 3							
...							
...							
Средние значения							

4 Выводы и анализ полученных результатов

Расхождение теоретических и экспериментальных значений вычисляется по формуле:

$$\delta = \left| \frac{f_m - f_3}{f_3} \right| \cdot 100\%$$

Методические указания подготовили:

Доцент, к.т.н Вешуткин В.Д.
Ст. преп. Жуков А.Е.