

УДК 517.91, 534.222

DOI: 10.46960/1816-210X_2020_3_42

В.Е. Назаров¹, А.Б. Колпаков²

ГИСТЕРЕЗИСНЫЕ ЭФФЕКТЫ АМПЛИТУДНО-ЗАВИСИМОГО ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ В АКУСТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ ИЗ КВАРЦИТА

Институт прикладной физики РАН¹
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского²

Представлены результаты экспериментального исследования и аналитического описания нелинейных акустических эффектов (амплитудно-зависимых потерь и сдвига резонансных частот, а также генерации высших гармоник) в резонаторе из природного минерала – кварцита. В качестве резонатора использовался тонкий стержень с жесткой и мягкой границами. Для адекватного описания результатов проводимых измерений применялись феноменологические гистерезисные уравнения состояния. На основе анализа и сравнения установленных экспериментальных и теоретических амплитудно-частотных зависимостей наблюдаемых эффектов в резонаторе определены параметры гистерезисной нелинейности образца исследуемого материала.

Ключевые слова: нелинейные акустические эффекты, резонатор, уравнение состояния, кварцит, упругий и неупругий гистерезис.

Введение

К актуальным вопросам современной нелинейной акустики относится комплекс задач, связанных с:

- 1) экспериментальным изучением нелинейных акустических эффектов в микронеоднородных [1] (или в мезоскопических [2]) твердых телах, обладающих сильной и, как правило, неаналитической нелинейностью;
- 2) определением амплитудных и частотных зависимостей наблюдаемых волновых процессов;
- 3) выявлением механизмов акустической нелинейности и нелинейных уравнений состояния исследуемых сред;
- 4) получением решений нелинейных волновых уравнений и описанием нелинейных волновых процессов в исследованных материалах в режиме бегущих и стоячих волн;
- 5) определением параметров нелинейности таких сред.

Интерес к этим задачам связан с тем, что «классическая» пятиконстантная теория упругости [3], призванная для описания деформирования однородных упругих твердых тел, обладающих слабой квадратичной (аналитической) нелинейностью, не описывает нелинейные волновые процессы в микронеоднородных средах, а микроскопической теории, которая могла бы адекватно описывать нелинейные волновые процессы в таких средах, не существует. К микронеоднородным сильно-нелинейным средам относятся многие поликристаллические металлы и горные породы (медь, цинк, свинец, гранит, известняк, мрамор, песчаник, магнезит и т. д.), зернистые среды (речной песок) и некоторые конструкционные материалы (бетон, цементный камень). Их высокая нелинейность обусловлена их различными микродефектами: трещинами, зернами, дислокациями, полостями и т.д.) При этом в низкочастотном диапазоне эти среды, как правило, проявляют гистерезисную нелинейность. Наиболее заметное проявление нелинейных свойств имеет место при относительно высоких амплитудах волн, что легко реализуется в высокодобротных резонаторах вблизи их резонансных частот [1, 2, 4, 5]. При гармоническом возбуждении резонаторов в них наблюдаются различные не-

линейные акустические эффекты (амплитудно-зависимые потери и сдвиг резонансных частот, а также генерация высших гармоник).

В разных микронеоднородных средах одни и те же нелинейные эффекты часто проявляются по-разному. Поэтому при проведении исследований нелинейных волновых процессов в таких средах одной из основных задач является установление амплитудных и частотных зависимостей нелинейных эффектов. Фундаментальная цель этих исследований связывается с выявлением механизмов акустической нелинейности и определением параметров нелинейности различных сред. Прикладной же направленностью подобных работ является создание нелинейных акустических методов диагностики микронеоднородных сред и материалов.

В настоящей статье представлены результаты экспериментального исследования и теоретического описания нелинейных волновых процессов, протекающие при гармоническом возбуждении продольных упругих волн в стержневом резонаторе из природного минерала – поликристаллического серого кварцита. При аналитическом описании наблюдаемых эффектов будем использовать феноменологические уравнения состояния содержащие гистерезисную нелинейность.

Гистерезисные уравнения состояния и амплитудно-зависимое внутреннее трение поликристаллов

При теоретическом описании нелинейных акустических волн в микронеоднородных твердых телах применяются гистерезисные уравнения состояния, т.е. зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ гистерезисного типа (σ и ε – напряжение и деформация) [2, 4, 6-14]. В связи с этим в последнее время интенсивно развивается направление, в котором гистерезисные свойства твердых тел связываются с гипотетическими гистерезисными элементами среды – гистеронами [15, 16]. Природа гистеронов не связывается с какими-либо дефектами среды. В соответствующих работах предполагается, что среда состоит только из гистеронов, имеющих некоторое распределение по их параметрам, и на этой основе выводится ее микроскопическое уравнение состояния. Вполне естественно, что оно получается гистерезисным. Ранее магнитные гистероны были предложены для объяснения магнитных гистерезисов магнитных материалов [17, 18]. Однако физика магнитных и механических гистерезисов (для магнитных и упругих материалов) различна. Соответственно, аналогия, связанная с перенесением гистерезисных магнитных свойств магнитных материалов на гистерезисные механические (акустические) свойства упругих (немагнитных) материалов путем привлечения гипотетических механических гистеронов, представляется в своей основе, по меньшей мере, сомнительной. Поведение механического гистерона также представляется проблематичным: при сколь угодно малом превышении упругого напряжения некоторой конечной величины деформация гистерона стремится к бесконечности. Таким образом, полученное (на основе несуществующих механических гистеронов) гистерезисное уравнение состояния оказывается непригодным для адекватного описания деформирования реальных гистерезисных сред.

Для аналитического описания результатов экспериментальных исследований нелинейных волновых процессов в конкретном материале необходимо знание его феноменологического уравнения состояния, которое можно получить на основе анализа закономерностей этих процессов. Зная феноменологическое уравнение состояния конкретного материала, можно строить и его реологическую модель, и его микроскопическое уравнение, совпадающее по форме с феноменологическим.

Уравнение состояния нелинейной среды (с учетом ее линейной диссипации [4]) может быть представлено в виде (1):

$$\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - f(\varepsilon)] + \alpha \rho \dot{\varepsilon}, \quad (1)$$

где $f(\varepsilon)$ – нелинейная функция, $|f'_\varepsilon(\varepsilon)| \ll 1$, α – коэффициент линейной диссипации, ρ – плотность. Слагаемое $\alpha \rho \dot{\varepsilon}$ учитывает линейную диссипацию, характерную для одно-

родных сред [3] и оно определяет квадратичную зависимость линейного коэффициента поглощения волны (или линейную зависимость логарифмического декремента затухания $d = \pi/Q = \pi\alpha\Omega/C_0^2$ волны) от ее частоты Ω , где Q – добротность среды [19]. Для микронеоднородных сред, линейное диссипативное слагаемое может быть другим и, соответственно, эти зависимости также могут быть другими (часто, например, $d \sim Q^{-1} \approx \text{const}$ [19]) Однако, на результаты проведенных ниже аналитических расчетов нелинейных эффектов это обстоятельство не влияет, поскольку входящие в выражения для нелинейных эффектов значения коэффициентов α_p , для каждой резонансной частоты Ω_p резонатора, определяются экспериментально, по измерениям его добротности Q_p : $\alpha_p(\Omega_p) = C_0^2/\Omega_p Q_p$. Отметим также, что все параметры уравнения состояния (3) для конкретного материала определяются экспериментально: линейные параметры (модуль упругости E и коэффициент диссипации α) – по скорости распространения слабой волны и ее затуханию, а вид нелинейной функции $f(\varepsilon)$ и ее параметры – по нелинейным акустическим эффектам, возникающим при возбуждении интенсивной гармонической волны.

В нелинейной акустике имеют место два основных вида гистерезиса: неупругий и упругий [2, 4, 20]. Оба гистерезиса одинаково адекватно описывают амплитудно-зависимые потери и дефект модуля упругости. Тем не менее, они существенно отличаются друг от друга.

Для неупругого квадратичного гистерезиса (вообще говоря, несимметричного) функция $f(\varepsilon)$ в уравнении (1) имеет вид [20] (2):

$$f(\varepsilon) = \beta \varepsilon_m \varepsilon + \frac{1}{2} \begin{cases} \beta_1 \varepsilon^2 - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \varepsilon_m^2, & \dot{\varepsilon} > 0; \\ -\beta_2 \varepsilon^2 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \varepsilon_m^2, & \dot{\varepsilon} < 0, \end{cases} \quad (2)$$

где ε_m – амплитуда деформации, $|\beta| \varepsilon_m \ll 1$, $|\beta_{1,2}| \varepsilon_m \ll 1$, $\beta_1 + \beta_2 \geq 0$, $|\beta_{1,2}| \gg 1$.

Здесь, первое слагаемое, отвечает за амплитудно-зависимый дефект модуля упругости, а второе – за амплитудно-зависимые потери и генерацию высших гармоник.

Для упругого гистерезиса функция $f(\varepsilon)$ имеет вид [9] (3):

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{n} \begin{cases} \gamma_1 \varepsilon^n, & \varepsilon \geq 0, \dot{\varepsilon} > 0; \\ (\gamma_1 + \gamma_2) \varepsilon_m^{n-1} \varepsilon - \gamma_2 \varepsilon^n, & \varepsilon \geq 0, \dot{\varepsilon} < 0; \\ -\gamma_3 \varepsilon^n, & \varepsilon \leq 0, \dot{\varepsilon} < 0; \\ (-1)^n (\gamma_3 + \gamma_4) \varepsilon_m^{n-1} \varepsilon + \gamma_4 \varepsilon^n, & \varepsilon \leq 0, \dot{\varepsilon} > 0, \end{cases} \quad (3)$$

где n – целое число, $n > 1$, γ_{1-4} – параметры нелинейности, $\gamma_{1,3} + \gamma_{2,4} \geq 0$.

Отметим, что уравнения (1)-(3) адекватно описывают деформирование гистерезисных сред в области достаточно низких частот. С ростом частоты деформирования, гистерезисная нелинейность микронеоднородных сред уменьшаются из-за релаксации их дефектов [4, 21]. Причины проявления гистерезисных нелинейностей связываются с движением дислокаций и микропластичностью поликристаллов. При этом, механизмы упругого и неупругого гистерезисов, по-видимому, различны. Из-за их отличий, амплитудно-частотные зависимости нелинейных эффектов в средах с упругим и неупругим гистерезисами также различаются [20, 22]. Эти отличия можно выявить при экспериментальном исследовании эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения и генерации высших гармоник в акустическом резонаторе из гистерезисного материала [20, 22].

Схема экспериментальной установки

Исследование амплитудно-частотных зависимостей нелинейных эффектов проводилось в акустическом стержневом резонаторе из природной горной породы – серого поликристаллического кварцита. Длина стержня $L = 39.4 \times 10^{-2}$ м, его поперечное сечение представляло собой квадрат со стороной 1.4×10^{-2} м.

Серый кварцит – это природный минерал светло-серого цвета с характерным серебристым блеском. Он на 70-80 % состоит из кварца (SiO_2) и содержит примеси силикатов и алюмосиликатов, в виде полевого шпата, слюды и талька. Плотность кварцита – 2.68×10^3 кг/м³, его прочность на сжатие – 100-450 МПа. На рис.1 приведена фотография микроструктуры исследуемого образца. Видно, что материал обладает зернистой структурой, что свидетельствует о наличии в нем дефектов, в частности, дислокаций [23].

Схема экспериментальной установки показана на рис.2. К нижнему торцу стержня 1 приклеивался пьезокерамический излучатель накачки 2 – для возбуждения продольной низкочастотной стоячей гармонической волны. Другая сторона излучателя 2 приклеивалась к массивной металлической нагрузке 3. Для приема колебаний, к свободному (верхнему) торцу экспериментального образца приклеивался акселерометр 4. Таким образом, стержень 1 (вместе с излучателем 2 и нагрузкой 3) представлял собой акустический резонатор с почти жесткой (нижней) и мягкой (верхней) границами. Для первых продольных мод такого резонатора, его собственные частоты $F_p = \Omega_p / 2\pi$ определялись простым выражением $F_p \cong (2p - 1)C_0 / 4L$ (p – номер моды, $p = 1, 2, \dots$; C_0 – фазовая скорость продольной низкочастотной волны, которая, для первой моды составляла $C_0 \cong 4.8 \times 10^3$ м/с). Для такого резонатора, локальная амплитуда $\epsilon_m = \epsilon_m(x)$ деформации стоячей низкочастотной волны зависит от координаты x и определялась выражением: $\epsilon_m(x) \cong \epsilon_m |\cos K_p x|$, где $\epsilon_m = K_p U_1$ – амплитуда деформации в резонаторе; U_1 – амплитуда смещения волны на частоте накачки F_p , $K_p L = (2p - 1)\pi / 2$.

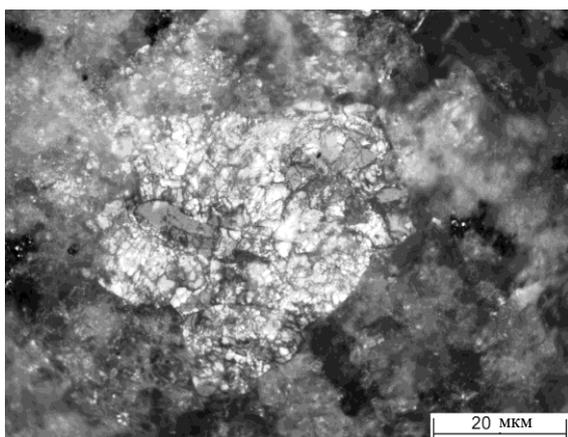


Рис. 1. Фотография микроструктуры кварцита

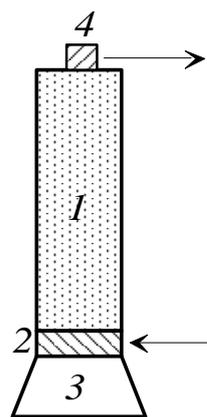


Рис. 2. Схема экспериментальной установки:
 1 – стержневой резонатор,
 2 – излучатель накачки,
 3 – массивная металлическая нагрузка,
 4 – пьезокерамический акселерометр

Значения резонансных частот F_p и добротностей Q_p для рассматриваемых продольных мод экспериментального образца составляли, соответственно: $F_1 \cong 3060$ Гц, $F_2 \cong 8964$

Гц и $Q_1 \cong 236$, $Q_2 \cong 256$. Они определялись по максимуму амплитуды линейных колебаний резонатора и ширине $\Delta F_{0.71}$ его резонансной кривой на уровне $1/\sqrt{2} \cong 0.71$: $Q_p \cong F_p / \Delta F_{0.71}$. По резонансной частоте $F_1 \cong 3060$ для первой моды было определено, что $C_0 \cong 4.8 \times 10^3$ м/с.

Измерения проводились при комнатной температуре на прямом ходе, т.е., при увеличении амплитуды возбуждения рассматриваемой колебательной системы. Погрешности измерения амплитуд и частот колебаний и составляли, соответственно ± 0.05 дБ и ± 0.5 Гц.

Результаты измерений

В стержне 1, при помощи излучателя накачки 2 (рис. 2), возбуждались низкочастотные акустические колебания на частоте F , близкой к частоте F_p одной из первых двух его продольных мод ($p = 1; 2$). Определялись амплитудные зависимости нелинейных сдвигов резонансных частот $\Delta F_{nl} = F - F_p < 0$ и коэффициентов затухания μ_{nl} . Полученные зависимости представлены на рис. 3.

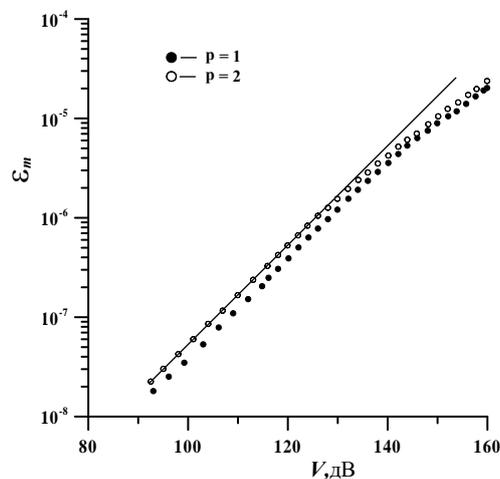


Рис. 3. Зависимости амплитуды ε_m (при резонансном возбуждении резонатора) от амплитуды электрического напряжения V на излучателе накачки (в дБ относительно 1 мкВ)
(прямая линия соответствует линейной зависимости ε_m от V)

Из рис. 3 видно, что при малых амплитудах V возбуждения ($\varepsilon_m < 10^{-6}$), зависимости $\varepsilon_m = \varepsilon_m(V)$ линейны, т.е. $\varepsilon_m \propto V$. Далее, при $\varepsilon_m > 10^{-6}$ они становятся нелинейными, что свидетельствует о проявлении амплитудно-зависимых потерь.

Графики для относительных амплитудно-зависимых сдвигов резонансных частот $|\Delta F_{nl} / F_p|$ и коэффициентов затухания μ_{nl} / μ_p (где $\mu_p = (\Omega_p Q_p)^{-1}$) представлены на рис. 4. Значения μ_{nl} / μ_p определялись по отклонению функции $\varepsilon_m = \varepsilon_m(V)$ от линейной зависимости $\varepsilon_m \propto V$ (рис. 3), проведенной через точки (V_1, ε_{m1}) , соответствующие малым амплитудам возбуждения экспериментального образца [4, 9] (4):

$$\frac{\mu_{nl}}{\mu_p} = \frac{\varepsilon_{m1}}{\varepsilon_m} \cdot \frac{V}{V_1} - 1. \quad (4)$$

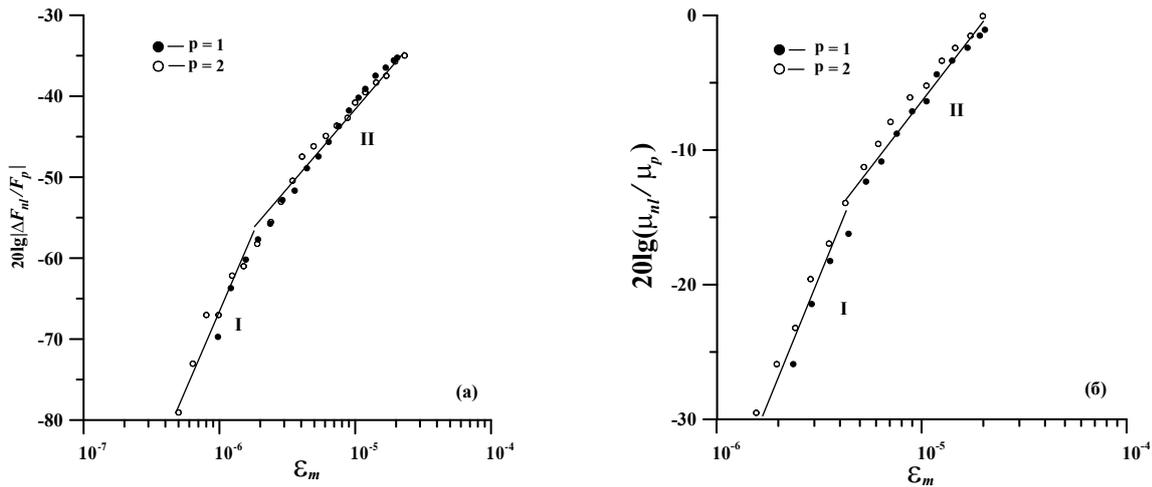


Рис. 4. Зависимости $|\Delta F_{nl}/F_p|$ (а) и μ_{nl}/μ_p (б) от амплитуды ε_m (в резонансе)

(прямые линии соответствуют зависимостям:

$$I - \Delta F_{nl}/F_p \propto \varepsilon_m^2, \mu_{nl}/\mu_p \propto \varepsilon_m^2; II - \Delta F_{nl}/F_p \propto \varepsilon_m, \mu_{nl}/\mu_p \propto \varepsilon_m)$$

Из рис. 4 видно, что в амплитудных зависимостях $|\Delta F_{nl}/F_p|$ и μ_{nl}/μ_p от ε_m отчетливо выделяются два характерных диапазона: первый (I) диапазон – $\varepsilon_m < \varepsilon^* \cong (2 \div 4) \cdot 10^{-6}$, в котором $\Delta F_{nl}/F_p \propto \varepsilon_m^2$, $\mu_{nl}/\mu_p \propto \varepsilon_m^2$, и второй (II) – $\varepsilon_m > \varepsilon^*$, где $\Delta F_{nl}/F_p \propto \varepsilon_m$, $\mu_{nl}/\mu_p \propto \varepsilon_m$. Тот факт, что в каждом диапазоне имеют место одинаковые амплитудные зависимости $|\Delta F_{nl}/F_p|$ и μ_{nl}/μ_p , свидетельствует о проявлении в материале гистерезисной степенной нелинейности с показателем степени n (при этом для первого $n = 3$, а для второго – $n = 2$). Из рис. 4 также видно, что амплитудные зависимости $|\Delta F_{nl}/F_p|$ и μ_{nl}/μ_p от ε_m для $p = 1; 2$ близки и не зависят от номера моды p , т.е., от частоты F_p возбуждения резонатора. Отметим, что независимые от частоты F_p зависимости $|\Delta F_{nl}/F_p|$ от ε_m наблюдались также для первых семи продольных мод в резонаторе из Berea sandstone [24]. В общем же случае, т.е., для более высоких мод резонатора (или частот) нелинейность микронеоднородных сред, в том числе, горных пород, зависит от частоты деформирования: с ростом частоты нелинейность микронеоднородных сред уменьшается из-за релаксации дефектов [4].

При $\varepsilon_m > 2 \cdot 10^{-6}$, т.е., при более сильном возбуждении резонатора, наблюдалась также генерация высших гармоник волны накачки, в частности, второй и третьей. Зависимости амплитуды смещения $U_2(L)$ свободного торца резонатора на частоте $2F$ и амплитуды деформации ε_3 резонатора на частоте $3F$ от ε_m на первой и второй модах приведены на рис. 5. Видно, что $U_2(L), \varepsilon_3 \propto \varepsilon_m^2$. Также видно, что здесь показатель степени $n = 2$ на единицу больше показателя в зависимостях $|\Delta F_{nl}/F_p|$ и μ_{nl}/μ_p от ε_m (рис. 4) в том же (втором) диапазоне. Отметим, что для амплитудно-зависимых потерь, дефекта модуля упругости, а также амплитуд $U_2(L)$ и ε_3 , именно такие зависимости и должны наблюдаться для нелинейных эффектов в средах с гистерезисной квадратичной нелинейностью [4, 7-9].

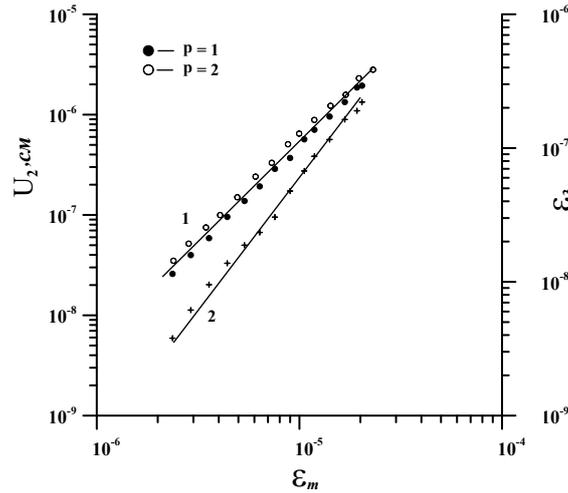


Рис. 5. Зависимости $U_2(L)$ на частоте $2F$ второй и ε_3 на частоте $3F$ от ε_m (в резонансе) (прямые линии (1) и (2) соответствуют зависимостям: $U_2(L), \varepsilon_3 \propto \varepsilon_m^2$)

Здесь различие показателей степеней в зависимостях μ_{nl}/μ_p и $|\Delta F_{nl}/F_p|$ от ε_m , в первом и во втором диапазонах, не связаны с проявлением нестационарности эффектов гистерезисного внутреннего трения [24] (или их «медленной динамики» [25]). Временная зависимость внутреннего трения поликристаллов обусловлена диффузионным движением примесных атомов вдоль дислокаций под действием упругой волны [23]. В экспериментах с кварцитом временная зависимость эффектов внутреннего трения была достаточно малой. При этом, реакция в характере изменения $|\Delta F_{nl}/F_p|$ от ε_m была безынерционной: изменение ε_m мгновенно приводило к изменению $|\Delta F_{nl}/F_p|$. В случае максимального возбуждения резонатора ($\varepsilon_m \cong 2 \cdot 10^{-5}$), изменение $|\Delta F_{nl}/F_p|$ в течение 45 мин не превышало $7 \cdot 10^{-4}$, при этом, во время проведения одного эксперимента около 20 мин – $\Delta F_{nl}/F_{1,2} \cong 1.8 \cdot 10^{-2}$. Таким образом, максимальная относительная погрешность измерения $\Delta F_{nl}/F_p$, обусловленная нестационарностью (или временной зависимостью) амплитудно-зависимого внутреннего трения, не превышала 4%. Отсюда следует, что нестационарные эффекты «медленной динамики» внутреннего трения были значительно слабее эффектов безынерционной нелинейной динамики. Далее методом возмущений проводилось поэтапное теоретическое описание и анализ нелинейных эффектов и их амплитудных зависимостей в рамках гистерезисного уравнения состояния (3).

Уравнение продольных колебаний стержневого резонатора с гистерезисной нелинейностью

С целью проведения аналитического описания нелинейных эффектов в резонаторе, получим волновое уравнение для его продольных смещений $U(x, t)$ в результате подставки уравнения состояния (1) в уравнение движения $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ [3] (с учетом геометрической дисперсии фазовой скорости) (5):

$$U_{tt} - C_0^2 U_{xx} = -C_0^2 [f(\varepsilon)]_x + \alpha U_{xxt} + \nu^2 r_0^2 [U_{tt} - C_t^2 U_{xx}]_{xx}. \quad (5)$$

Здесь использованы обозначения: $\varepsilon(x, t) = \partial U(x, t) / \partial x$, $r_0 = R_0 / \sqrt{2}$, ν – коэффициент Пуассона, C_t – скорость сдвиговой волны в безграничной среде, $\alpha = C_0^2 / \Omega_p Q_p$.

Согласно условиям эксперимента, стержень рассматривался как резонатор с граничными условиями в виде акустически жесткой ($x=0$) и акустически мягкой ($x=L$) границы, которые имеют вид (6):

$$U(x=0,t) = A_0 \sin \Omega t, \quad U_x(x=L,t) = 0, \quad (6)$$

где L – длина стержня, A_0 и Ω – амплитуда и частота возбуждения стержня.

Дисперсия акустических волн, так же, как и затухание, ограничивает интенсивность колебаний нелинейного резонатора на частотах высших гармоник, которые возникают в процессе гармонического возбуждения. Полагая в линеаризованном уравнении (5) $U(x,t) \propto \exp\{i[\Omega t - K(\Omega)x]\}$, определим дисперсионное соотношение. Далее, из граничных условий (6), определим собственные волновые числа K_p и резонансные частоты Ω_p резонатора в низкочастотном приближении (при условии что $\Omega/W \ll 1$) (7):

$$K(\Omega) = \frac{\Omega}{C_0} \left[1 + \left(\frac{\Omega}{W} \right)^2 \right], \quad K_p = \frac{(2p-1)\pi}{2L} = (2p-1)K_1, \quad \Omega_p = \frac{\pi C_0 (2p-1)}{2L} (1 - m_p), \quad (7)$$

где $W = \frac{2C_0}{v r_0} \sqrt{\frac{1+\nu}{1+2\nu}}$, $m_p = \left(\frac{\pi v r_0 (2p-1)}{4L} \right)^2 \frac{1+2\nu}{1+\nu} \ll 1$, p – номер моды, $p = 1, 2, 3, \dots$

Согласно проведенного анализа выражений (7): $2\Omega_p \neq \Omega_{2p}$, а $3\Omega_p \cong \Omega_{3p-1}$. Таким образом, в процессе возбуждения резонатора с жесткой и мягкой границами на частоте $\Omega \cong \Omega_p$, колебания на частоте $2\Omega \cong 2\Omega_p$ будут нерезонансными. При этом колебания на частоте $3\Omega \cong 3\Omega_p$, из-за слабой геометрической дисперсии, будут близкими к резонансным.

Анализ эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения

Выражение для резонансной кривой исследуемого образца имеет вид [4] (8):

$$\varepsilon_m = \frac{A_0(\Omega_p/L)}{[(\delta - \delta_{nl})^2 + (\mu_p + \mu_{nl})^2 \Omega_p^4 / 4]^{1/2}}, \quad (8)$$

где $\delta_{nl} = 2\pi \Delta F_{nl}$ – нелинейный сдвиг резонансной частоты, μ_{nl} – нелинейные потери. Отметим, что как δ_{nl} , так и μ_{nl} зависят от параметров γ_i (3), которые в различных диапазонах деформации имеют разные значения: $n=3$ – при $\varepsilon_m < \varepsilon^*$, и $n=2$ – при $\varepsilon_m > \varepsilon^*$; $|\delta| \ll \Omega_p/p$; $\delta = \Omega - \Omega_p$.

Из выражения (8) получаем формулу для резонансной амплитуды ε_m (при $\delta - \delta_{nl} = 0$) (9):

$$\varepsilon_m = \frac{2A_0}{L} \frac{Q_p}{1 + \mu_{nl}/\mu_p}, \quad (9)$$

позволяющую вычислить относительный коэффициент нелинейного затухания μ_{nl}/μ_p .

При малых деформациях ($\varepsilon_m < \varepsilon^*$) нелинейный сдвиг резонансной частоты $\Delta F_{nl}/F_p$ и нелинейные потери μ_{nl}/μ_p определяются выражениями (10):

$$\Delta F_{nl}/F_p = -a_1 \varepsilon_m^2, \quad \mu_{nl}/\mu_p = b_1 Q_p \varepsilon_m^2, \quad (10)$$

здесь $a_1 = \frac{1}{32} \left[(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4) + \frac{3}{4} (\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4) \right]$, $b_1 = \frac{1}{16\pi} (\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4) > 0$.

Далее, сравнивая результаты измерений, представленные на рис. 4 с выражениями (10), определяем коэффициенты a_1 , b_1 и параметры $\gamma_1 - \gamma_3$, $\gamma_2 - \gamma_4$: $a_1 \cong 4.5 \cdot 10^8$, $b_1 \cong 4 \cdot 10^7$, $\gamma_1 - \gamma_3 \cong 9.3 \cdot 10^9$, $\gamma_2 - \gamma_4 \cong -7.3 \cdot 10^9$.

При более высоких значениях деформаций ($\varepsilon_m > \varepsilon^*$), выражения для $\Delta F_{nl}/F_p$ и μ_{nl}/μ_p , а также для амплитуд $U_2(L)$ и ε_3 колебаний на частотах второй и третьей гармоник имеют вид (11-13):

$$\Delta F_{nl}/F_p = -a_1 \varepsilon_m, \quad \mu_{nl}/\mu_p = b_1 Q_p \varepsilon_m, \quad (11)$$

$$U_2(x) = \frac{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{\pi(2p-1)} \varepsilon_m^2 L [\sin 2K_p x - 2K_p x \cos 2K_p x], \quad U_2(L) = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \varepsilon_m^2 L, \quad (12)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{4\sqrt{a_3^2 + b_3^2} \Omega_p \varepsilon_m^2}{15\pi \{(\Omega_p/Q_{3p-1})^2 + 4[(1-q)\delta_{nl}(\varepsilon_m) + \Delta\Omega_{3p}/3]^2\}^{1/2}}, \quad (13)$$

здесь $q = \frac{36}{35\pi} \frac{a_0}{a_1}$, $a_0 = \frac{1}{2\pi} (\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4) + \frac{1}{8} (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)$,

$$a_1 = \frac{4}{9\pi^2} (\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4) + \frac{1}{6\pi} (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4), \quad b_1 = \frac{2}{9\pi^2} (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) > 0,$$

$$a_2 = \frac{1}{64} (\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4) + \frac{1}{24\pi} (\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4), \quad b_2 = \frac{1}{48\pi} (\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4),$$

$$a_3 = \frac{2}{15\pi} (\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4), \quad b_3 = \frac{1}{30\pi} (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4),$$

$$\Delta\Omega_{3p} = 3\Omega_p - \Omega_{3p-1}.$$

Сопоставляя полученные экспериментальные результаты (см. рис. 4) и выражения (11)–(13) определяем коэффициенты a_1 , b_1 , $\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$, соответствующие им параметры $\gamma_1 + \gamma_3$, $\gamma_2 + \gamma_4$ и значения a_0 , q , $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$: $a_1 \cong 8.4 \cdot 10^2$, $b_1 \cong 2 \cdot 10^2$, $\gamma_1 + \gamma_3 \cong 8.6 \cdot 10^3$, $\gamma_2 + \gamma_4 \cong 3.5 \cdot 10^2$, $\sqrt{a_2^2 + b_2^2} \cong 1.1 \cdot 10^2$, $a_0 = 2.4 \cdot 10^3$, $q = 0.94$, $\sqrt{a_3^2 + b_3^2} \cong 3.6 \cdot 10^2$.

Из выражения (12) можно также определить эффективный параметр Γ_2 квадратичной упругой нелинейности кварцита (для диапазона деформаций $\varepsilon_m > \varepsilon^*$).

Принимая в уравнении (3): $n = 2$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 = 0$ и $\gamma_1 = -\gamma_3 = \Gamma_2$, получим выражение для гистерезисной функции, содержащей упругую квадратичную нелинейность: $f(\varepsilon) = \Gamma_2 \varepsilon^2 / 2$. Входящий в это выражение параметр Γ_2 имеет значение $\Gamma_2 = 16\sqrt{a_2^2 + b_2^2} \cong 1.7 \cdot 10^3$, что почти в 2 раза больше, чем для гранита [9]. При этом, параметр Γ_2 почти в 500 раз превышает значения аналогичного параметра определенного для однородных твердых тел [26].

Значение коэффициента $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$ можно определить и другим способом, используя амплитуду третьей гармоники (13): $\sqrt{a_3^2 + b_3^2} \cong 3.55 \cdot 10^2$. Близость значений коэффициента $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$, определенного с использованием различных подходов, свидетельствует о том, что уравнение состояния исследованного образца кварцита соответствует упругому гистерезису (3). Отметим, что при проведении аналогичного анализа в рамках неупругого гистерезиса (2), между этими коэффициентами, определенными разными способами, наблюдалось количественное несоответствие. Величина коэффициента $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$ определенная с использованием

амплитуды ε_3 составляла: $\sqrt{c_3^2 + d_3^2} \cong 3.3 \cdot 10^2$. Она заметно превышала величину $\sqrt{c_3^2 + d_3^2} \cong 1.9 \cdot 10^2$, определенную с помощью нелинейных потерь и сдвига резонансной частоты. Следовательно, для описания нелинейных акустических эффектов в кварците в рамках использованного подхода, неупругий гистерезис (2) оказывается непригодным. Если же при проведении аналогичного исследования использовать только вторую гармонику, то в кварците, как и во многих других твердых физических телах с поликристаллической структурой, для изучения нелинейных акустических эффектов вполне могут быть использованы оба гистерезиса.

Заключение

В результате проведенного анализа экспериментально установленных амплитудных и частотных зависимостей наблюдаемых нелинейных акустических эффектов было установлено, что для кварцита характерна акустическая нелинейность гистерезисного типа. Последняя определяется неаналитической степенной функцией деформации:

- показатель степени $n = 3$ при малых амплитудах деформации ($\varepsilon_m < \varepsilon^* \cong 3 \cdot 10^{-6}$);
- показатель степени $n = 2$ при амплитудах ($3 \cdot 10^{-6} < \varepsilon_m < 2 \cdot 10^{-5}$).

Таким образом, акустическая нелинейность кварцита оказалась гистерезисной, т.е. «неклассической», неаналитической и аномально высокой. Отметим, что аналогичными исключительно высокими нелинейными свойствами (качественно подобными, но с другими параметрами нелинейности) обладают многие твердые тела. Последнее обстоятельство создает возможность использования гистерезисных эффектов с целью осуществления для этих тел нелинейной акустической диагностики.

Работа выполнена в рамках госзадания ИПФ РАН по теме №0035-2019-0009 и поддержана РФФИ (грант N20-02-00215А).

Библиографический список

1. **Исакович, М.А.** Общая акустика / М.А. Исакович. – М.: Наука, 1973. – 496 с.
2. **Guyet, R.A.** Nonlinear Mesoscopic Elasticity / R.A. Guyet, P.A. Johnson, Wiley-VCH, New York, 2009.
3. **Ландау, Л.Д.** Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1965. – 204 с.
4. **Назаров, В.Е.** Нелинейные волновые процессы в упругих микронеоднородных средах / В.Е. Назаров, А.В. Радостин. – Н. Новгород: Институт прикладной физики РАН, 2007. – 255 с.
5. **Riviere, J.** Pump and probe waves in dynamic acousto-elasticity: Comprehensive description and comparison with nonlinear elastic theory / J. Riviere, G. Renaud, R.A. Guyet, P.A. Johnson // Journal of Applied Physics. – 2013. – V. 114, – P. 054905-1-054905-5.
6. **Granato A., Lucke K.** Theory of mechanical damping due to dislocations / A. Granato, K. Lucke // Journal of Applied Physics. – 1956. – V. 27. – P. 583-593.
7. **Warren P. Mason** Application to quantum and solid state physics, in Physical Acoustics and Methods / P. Mason Warren, Academ. Press, New York, London, 1966.
8. **Назаров, В.Е.** Генерация гармоник при распространении упругих волн в твердых нелинейных средах / В.Е. Назаров, А.М. Сутин // Акустический журнал. – 1989. – Т. 35. – № 4. – С. 711-716.
9. **Зименков, С.В.** Нелинейные акустические эффекты в образцах горных пород / С.В. Зименков, В.Е. Назаров // Физика Земли. – 1993. – № 1. – С. 13-18.
10. **Назаров, В.Е.** Амплитудно-зависимое внутреннее трение свинца / В.Е. Назаров // ФММ. – 1999. – Т. 88. – № 4. – С. 82-90.
11. **Назаров, В.Е.** Об амплитудной зависимости внутреннего трения цинка / В.Е. Назаров // Акустический журнал. – 2000. – Т.46. – № 2. – С. 542-546.
12. **McCall, K.R.** Equation of state and wave propagation in hysteretic nonlinear elastic materials / K.R. McCall, R.A. Guyet // Journal of Geophysical Research. – 1994. – V. 99. – P. 23887-23897.

13. **Van Den, Abeele K.** Resonant bar simulations in media with localized damage / Abeele K Van Den., F. Schubert, V. Aleshin, F. Windels, J. Carmeliet // *Ultrasonics*. – 2004. – V. 42. – P. 1017-1024.
14. **Gusev, V.** Nonlinear bulk and surface shear acoustic waves in materials with hysteretic and endpoint memory / V. Gusev, C. Glorieux, W. Lauriks, J. Thoen // *Physical Letters A*. – 1997. – V. 232. – P. 77-86.
15. **McCall, K.R.** Equation of state and wave propagation in hysteretic nonlinear elastic materials / K.R. McCall, R.A. Guyer // *J. Geophys. Res.* – 1994. – V. 99. – P. 23887-23897.
16. **McCall, K.R.** A new theoretical paradigm to describe hysteretic, discrete memory and nonlinear elastic wave propagation in rock / K.R. McCall, R.A. Guyer // *Nonlinear Processes in Geophysics*. – 1996. – V. 3. – P. 89-101.
17. **Preisach, F.** Über die magnetische Nachwirkung / F. Preisach // *Z. Phys.* – 1935. – V. 94. – P. 277-302.
18. **Krasnoselskii, M.A.** Systems with hysteresis / M.A. Krasnoselskii, A.V. Pokrovskii, Springer, Berlin, 1989.
19. **Назаров В.Е., Радостин А.В.** Экспериментальное исследование эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения в резонаторе из песчаника / В.Е. Назаров, А.В. Радостин // *Акустический журнал*. – 2004. – Т. 50. – С. 524-532.
20. **Назаров, В.Е.** Упругие волны в средах с гистерезисной нелинейностью. Ч. 1 / В.Е. Назаров, А.В. Радостин, Л.А. Островский, И.А. Соустова // *Акустический журнал*. – 2003. – Т. 49. – С. 405-415.
21. **Назаров, В.Е.** Волновые процессы в микронеоднородных упругих средах с гистерезисной нелинейностью и релаксацией / В.Е. Назаров, А.В. Радостин // *Акустический журнал*. – 2005. – Т. 51. – С. 280-285.
22. **Назаров, В.Е.** Упругие волны в средах с гистерезисной нелинейностью. Ч. 2 / В.Е. Назаров, А.В. Радостин, Л.А. Островский, И.А. Соустова // *Акустический журнал*. – 2003. – Т. 49. – С. 529-534.
23. **Read, T.A.** The internal friction on single metal crystals / T.A. Read // *Physical Review*, 1940, V. 58.
24. **Takahashi, S.** Internal friction and critical stress of copper alloys / S. Takahashi // *Journal of the Physical Society of Japan*. – 1956. – V. 11. – P. 1253-1261.
25. **Johnson, P.** Slow dynamic and anomalous nonlinear fast dynamic in diverse solids / P. Johnson, A. Sutin // *The Journal of the Acoustical Society of America*. – 2005. – V. 117. – P. 124-130.
26. **Zarembo, L.K.** Nonlinear phenomena in the elastic wave propagation in solids / L.K. Zarembo, V.A. Krasilnikov // *Sov. Phys. Usp.* – 1970. – V. 13. – P. 778-797.

*Дата поступления
в редакцию: 06.07.2020*

V.E. Nazarov¹, A.B. Kolpakov²

HYSTERETIC PHENOMENA OF AMPLITUDE-DEPENDENT INTERNAL FRICTION IN A QARTZITE ACOUSTIC RESONATOR

Institute of applied physics of the Russian academy of sciences¹
Lobachevsky state university of Nizhni Novgorod²

Purpose: Establishing a relationship between the macroscopic characteristics of solid-state materials and their's microstructures.

Design/methodology/approach: Experimental and theoretical studies of nonlinear acoustic effects (such as low-frequency amplitude-dependent losses, resonant frequency shifts, and generation of second and third harmonics) in a rod resonator made of a crystalline rock – quartzite.

Results: An analytical description of the observed phenomena has performed within the frameworks of the phenomenological equations of state that contain hysteretic nonlinearity. Comparison of experimental and analytical amplitude dependencies of the nonlinear phenomena allowed us to determine values of quartzite acoustic nonlinearities parameter.

Area of applicability: The obtained results may be useful for development of diagnostic methods.

Key words: amplitude-dependent internal friction, resonator, equation of state, quartzite, elastic and inelastic hysteresis.