

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Р.Е.АЛЕКСЕЕВА**

Кафедра ФТОС /Физика и техника оптической связи/

**ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА НА ОДИНАРНОЙ И ДВОЙНОЙ ЩЕЛИ.
ФАЗОВАЯ ДИФРАКЦИОННАЯ РЕШЕТКА**



Нижний Новгород 2011

Составители: А.С. Мигунов, Т.О Прончатова-Рубцова, А. Б. Федотов.
УДК 535.4

Дифракция Фраунгофера на одинарной и двойной щели. Фазовая дифракционная решетка: лабораторные работы по дисциплине «Основы физической и квантовой оптики» для магистров по направлению 210700.68 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи». Форма обучения очная.
Н.Новгород, 2011. – 15с

Ответственный редактор С.Б.Раевский

Редактор Э.Б.Абросимова

© Мигунов А.С. 2011
© Прончатова-Рубцова Т.О. 2011
© Федотов А.Б. 2011
© НГТУ 2011

Подп. . Формат 60×84 1/16. Бумага газетная. Печать офсетная.
Печ.л. . Уч.-изд.л . Тираж 500 экз. Заказ .
Нижегородский государственный технический университет
Типография НГТУ, 603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Дифракцией света называют отклонения от законов геометрической оптики, наблюдаемые при распространении волн в неоднородной среде. Пусть плоская световая волна падает на экран с диафрагмой диаметром D , выделяющей узкий световой пучок (рис.1). Условие применимости для этого пучка законов геометрической оптики состоит в том, что угол дифракции θ (половина угла расходимости пучка, рис.1) пренебрежимо мал по сравнению с угловым размером диафрагмы: $\theta \ll D/r$.

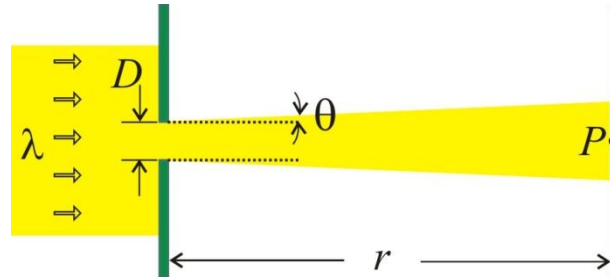


Рис.1

Ниже будет показано, что угол дифракции определяется отношением $\sin \theta \sim \lambda/D$, где λ – длина световой волны. Таким образом, условие справедливости законов геометрической оптики можно сформулировать в виде

$$\frac{\lambda}{D} \ll \frac{D}{r}, \text{ или } \frac{D^2}{\lambda r} \gg 1. \quad (1)$$

Если параметры системы таковы, что данное неравенство не выполняется, необходимо учитывать дифракцию света.

Для строгого решения дифракционных задач необходимо найти решения уравнений Максвелла, удовлетворяющие граничным условиям для компонентов электромагнитного поля на поверхности препятствий. В оптике широко используют приближенные методы, основанные на **принципе Гюйгенса-Френеля**. Приведем обоснование этого принципа, данное Кирхгофом.

Условимся под величиной светового поля $E(\vec{r})$ понимать проекцию вектора напряженности электрического поля \vec{E} электромагнитной волны на одну из декартовых осей координат. Если световое поле монохроматично, оно удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta E + k^2 E = 0, \quad (2)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. Найдем значение $E = E_p$ в произвольной точке пространства P (рис.2). Для этого окружим всю совокупность источников света F_1, \dots, F_N произвольной замкнутой поверхностью S (в дальнейшем – **поверхность Френеля**), а точку P – сферической поверхностью S_1 , радиусом R_1 . На-

конец, сферой S_2 радиусом R_2 охватим обе замкнутые поверхности¹. Введем функцию $\chi(\vec{r}) = e^{-ikr}/r$, где r – длина отрезка PA , точка

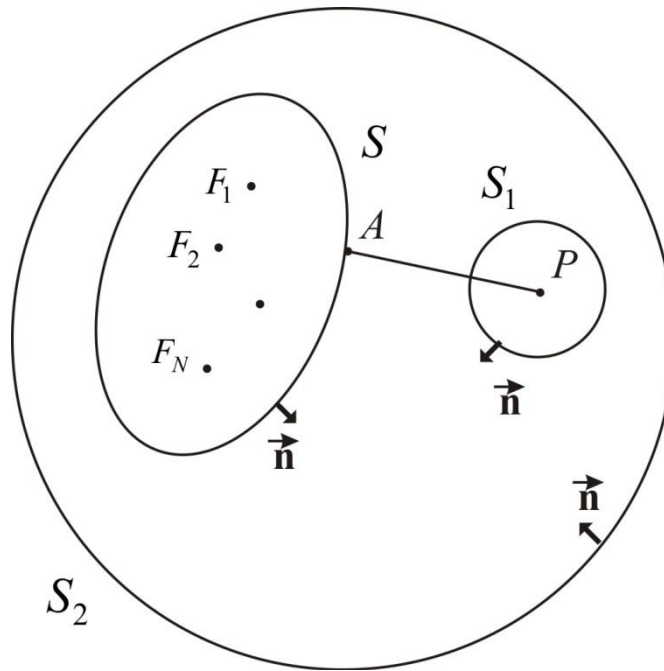


Рис.2

A – произвольная точка, принадлежащая тройной поверхности $S + S_1 + S_2$. С помощью подстановки можно убедиться, что эта функция так же, как и $E(r)$, удовлетворяет уравнению (2). Во всем пространстве, ограниченном изнутри поверхностями S и S_1 , а снаружи S_2 , функции $E(\vec{r})$ и $\chi(\vec{r})$, а также их производные, конечны и непрерывны. К ним можно применить формулу Грина

$$\iiint_V (E\Delta\chi - \chi\Delta E) dV = - \iint_{S+S_1+S_2} \left(E \frac{\partial\chi}{\partial n} - \chi \frac{\partial E}{\partial n} \right) dS, \quad (3)$$

где \vec{n} – внутренняя нормаль точек тройной поверхности по отношению к указанному пространству, а V – его объем. Левая часть (3) равна нулю, поскольку функции $E(\vec{r})$ и $\chi(\vec{r})$ являются решениями уравнения (2). Поэтому

$$\iint_{S_1+S_2} \left(E \frac{\partial\chi}{\partial n} - \chi \frac{\partial E}{\partial n} \right) dS = - \iint_S \left(E \frac{\partial\chi}{\partial n} - \chi \frac{\partial E}{\partial n} \right) dS.$$

Устремив R_1 (и S_1) к нулю, а R_2 (и S_2) – к бесконечности и учитывая, что $E \sim 1/r$ и $\chi \sim 1/r$, можно показать ([1]), что поле в т. P определяется величинами полей и их градиентов в точках произвольной поверхности S :

$$E_P = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[E \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial E}{\partial n} \right] dS. \quad (4)$$

¹ Радиусы сфер на рисунке не показаны.

Формула (4) является математическим обоснованием *принципа Гюйгенса - Френеля*. С целью конкретизации этого принципа рассмотрим частный случай, когда световое поле создается одним точечным источником F .

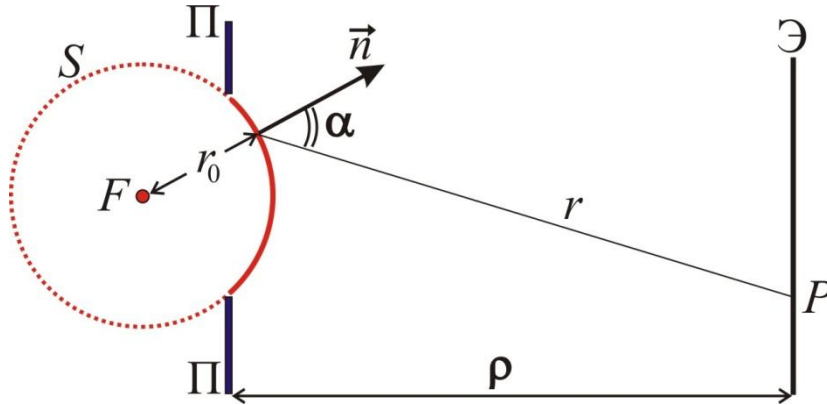


Рис.3

В качестве поверхности Френеля S выберем сферу радиуса r_0 с центром в источнике (рис.3). Поскольку точечный источник создает сферическую волну, поле на поверхности S можно представить выражением $E = \frac{a}{r_0} e^{i(\omega t - kr_0)}$, где па-

раметр a – положительная постоянная. Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r_0}$, и

$\frac{\partial}{\partial n} = -\cos \alpha \frac{\partial}{\partial r}$, получим $\frac{\partial E_0}{\partial n} = \left(ik + \frac{1}{r_0} \right) E_0$, $\frac{\partial \chi}{\partial n} = \left(ik + \frac{1}{r} \right) \chi \cos \alpha$. Тогда для про-

извольной точки наблюдения P из формулы (4) при $r \gg \lambda$ и $r_0 \gg \lambda$ следует:

$$E_p = \iint_S K(\alpha) E_0 \frac{e^{-ik(r_0+r)}}{r} dS, \quad (5)$$

где $K(\alpha) = \frac{ik}{4\pi} (1 + \cos \alpha) = \frac{(1 + \cos \alpha)}{2\lambda} e^{i\pi/2}$, $E_0 = \frac{a}{r_0}$.

Выражение (5) дает формальное основание рассматривать каждый элемент dS поверхности S в качестве источника сферической волны с амплитудой $|K(\alpha)| \frac{E_0}{r} dS$ и фазой $(-kr_0 - kr + \pi/2)$.

Множитель $K(\alpha)$ характеризует вклад каждого источника в зависимости от угла α между нормалью \vec{n} к площади элемента dS и направлением на точку наблюдения P (рис.3). В интервале $\alpha \in [0, \pi]$ это монотонно убывающая функция α ; в частности, $K(0) = i/\lambda$, $K(\pi) = 0$.

Таким образом, поле в точке P вычисляется как результат интерференции полей, создаваемых *абстрактными вторичными* источниками, расположенными на произвольной поверхности S , охватывающей все реальные источники. При наличии непрозрачного препятствия основной вклад в E_p дает передняя

открытая часть поверхности Френеля (сплошная дуга на рис.3). Амплитуда поля вторичных источников в точках P экрана \mathcal{E} пропорциональна $\frac{E_0}{r} dS$; их фаза опережает фазу колебаний световой волны на $\pi/2$. Подчеркнем, что формула (5) справедлива только при условии $r \gg \lambda$. В противном случае, как следует из(4), множитель K зависит не только от α , но и от r .

Метод **Гюйгенса-Френеля** для расчета дифракционного поля при наличии непрозрачного препятствия обоснован выражениями (4,5) и состоит в следующем: пусть между источником F и точкой наблюдения P расположено препятствие в виде непрозрачного или частично прозрачного экрана П-П (рис.3). Тогда величина поля E_p вычисляется интегрированием (4) или (5) по той части поверхности Френеля S , которая открыта для точки P . **При этом предполагается, что наличие препятствия не оказывает существенного влияния на величину и фазу светового поля на поверхности Френеля.** Это приближение справедливо, если размеры поверхности Френеля во много раз больше длины волны λ падающего света, а потому взаимодействие света с материалом препятствия существенно лишь на малой части этой поверхности.

Обычно в качестве поверхности Френеля выбирают открытую часть волновой поверхности (как на рис.3). В этом случае вторичные источники синфазны, а фаза колебаний в точке P зависит лишь от r . Однако в некоторых дифракционных задачах целесообразен иной выбор. Пусть поверхность интегрирования не совпадает с волновой поверхностью. Тогда вместо (5) используется выражение

$$E_p = \iint_S K(\alpha) E_0 \frac{e^{-ik(r_0+r)+i\varphi'(\vec{r}')}}{r} dS, \quad (6)$$

где $\varphi'(\vec{r}')$ – фаза вторичных источников в зависимости от их координат \vec{r}' на поверхности Френеля.

Представим, что расстояния r_0 и ρ от препятствия до источника F и до экрана « \mathcal{E} » (рис.3) неограниченно увеличиваются. В пределе при $r_0 \rightarrow \infty$ открытая часть сферической волновой поверхности на рис.3 вырождается в плоскую поверхность, а при $\rho \rightarrow \infty$ отношение $r/\rho \rightarrow 1$. Из последнего предельного соотношения следует, что угол α и множитель $K(\alpha)$ практически постоянны для всех вторичных волн, сходящихся в произвольной точке P на экране.

Соответствующий класс дифракционных задач называется **дифракцией Фраунгофера** или дифракцией в параллельных лучах. В случае дифракции Фраунгофера подинтегральное выражение в (4÷6) вырождается в плоскую волну с постоянной амплитудой $q dS = |K(\alpha)| \frac{E_0}{\rho} dS$. Путем надлежащего выбора системы координат для величины светового поля E_p имеем:

$$E_p = \iint_S q e^{i\vec{k}\vec{r} + i\varphi'(\vec{r}')} dS \quad (7)$$

Количественным критерием для наблюдения дифракции Фраунгофера являются неравенства $r_0 \gg 4D^2/\lambda$, $\rho \gg 4D^2/\lambda$ [1].

Важной характеристикой экрана является его *пропускаемость* $\eta = E_{\text{вх}}/E_{\text{вых}}$, где $E_{\text{вх}}$ и $E_{\text{вых}}$ – амплитуды падающего на экран и прошедшего через него световых полей. Параметр η может принимать значения от нуля (непрозрачный экран) до единицы. Два экрана называются *дополнительными*, если для любой точки поверхности Френеля их пропускаемости связаны соотношением $\eta_1 + \eta_2 = 1$.

Согласно формуле (6) световые поля в точке P при использовании дополнительных экранов

$$E_p^{(1)} = \iint_S \eta_1 K(\alpha) E_0 \frac{e^{-i\varphi}}{r} dS, \quad (8)$$

$$E_p^{(2)} = \iint_S \eta_2 K(\alpha) E_0 \frac{e^{-i\varphi}}{r} dS,$$

где $\varphi = k(r_0 + r) + \varphi(\vec{r}')$. Сложив выражения (8) и, учитывая, что $\eta_1 + \eta_2 = 1$, получим

$$E_p^{(1)} + E_p^{(2)} = \iint_S K(\alpha) E_0 \frac{e^{-i\varphi}}{r} dS = E_p. \quad (9)$$

Выражение (9) является математической формулировкой *теоремы Бабине*: сумма световых полей от дополнительных экранов равна световому полю в точке наблюдения при отсутствии экранов.

В случае дифракции Фраунгофера, когда падающая волна по определению плоская, эта сумма равна нулю для всех направлений за исключением направления нормали к её фронту: $E_p^{(1)} + E_p^{(2)} = 0$ при $\theta \neq 0$. Из этого следует, что

$$E_p^{(1)} = -E_p^{(2)} \text{ и } |E_p^{(1)}|^2 = |E_p^{(2)}|^2 \text{ при } \theta \neq 0.$$

Таким образом, в случае дифракции Фраунгофера дифракционная картина от дополнительных экранов одинакова повсюду за исключением направления $\theta \neq 0$.

2. ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА НА ЩЕЛИ

Пусть на препятствие, представляющее собой длинную прямую щель шириной b , нормально в направлении оси (Oz) падает плоская монохроматическая световая волна с длиной волны λ (рис.4). Для наблюдения дифракции Фраунгофера точку P нужно брать либо на бесконечно большом расстоянии от щели, либо, как это показано на рисунке, в фокальной плоскости собирающей линзы «Л». Выберем оси координат (x, z), как показано на рисунке. В качестве поверхности Френеля выберем волновую поверхность $z = 0$ и разобьем эту поверхность на элементарные полоски шириной dx . Рассматривая эти полоски, как вторичные источники, вычислим E_p для произвольного угла дифракции θ . Оп-

тическая разность хода между волнами от соседних полосок равна $\sin \theta dx$; соответствующая разность фаз $d\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta dx$.

Таким образом, фаза вторичных волн линейно зависит от x :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta. \quad (10)$$

Из (7), для $\varphi'(\vec{r}') = 0$ и (10) следует, что величина светового поля, излу-

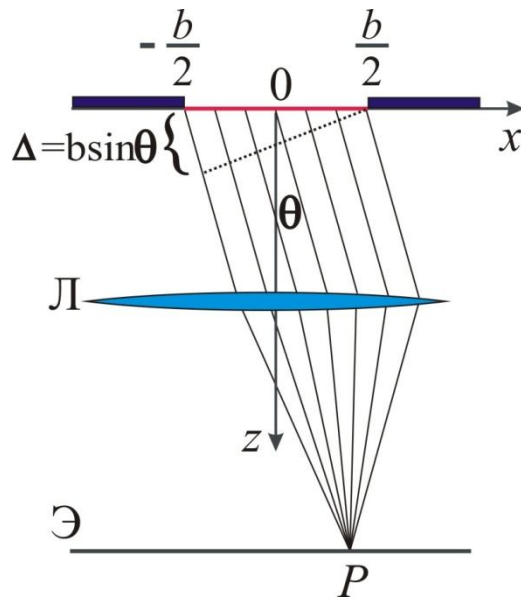


Рис.4

чаемого вторичными источниками в направлении θ

$$E_p = E(\theta) = \int_{-b/2}^{+b/2} q l e^{ikx \sin \theta} dx = bql \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta}, \text{ где } l \text{ — длина щели (не показанная на рис.4), } l dx = dS.$$

Тогда, по определению, интенсивность монохроматического света, как функция угла дифракции θ , имеет вид

$$I(\theta) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E(\theta) E^*(\theta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta\right)^2}, \quad (11)$$

где $I_0 = 0,5 \varepsilon_0 c (qbl)^2$ — интенсивность света в направлении $\theta = 0$.

График углового распределения интенсивности дифрагированного света $I(\theta)$, построенный по формуле (11), изображен на рис.5. Видим, что излучение отсутствует в направлениях, удовлетворяющих условиям $\frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta = m\pi$, или

$$b \sin \theta = m\lambda, \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (12)$$

Заметим, что именно в этих направлениях разность хода Δ между крайними вторичными волнами равна целому числу длин волн (рис.4).

Выражение (12) называется *условием минимума* для дифракции Фраунгофера на щели, а целые числа m – *порядком минимума*. Анализ формулы (11) показывает, что интенсивность излучения в направлениях *боковых максимумов*, расположенных примерно посередине между минимумами,

$$I_m = \frac{4I_0}{(2m+1)^2 \pi^2} \ll I_0. \quad (13)$$

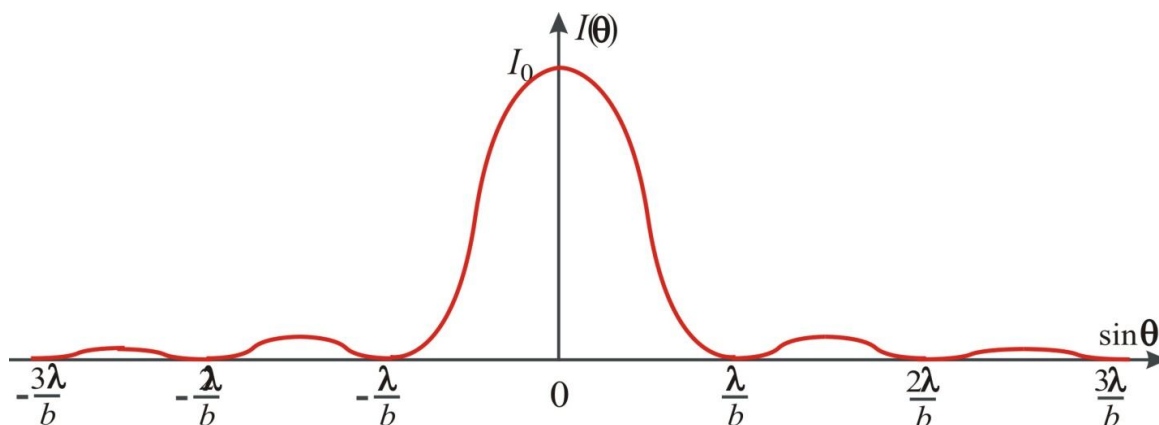


Рис.5

Из этого следует, что основная часть потока энергии сосредоточена в пределах *угла расходимости* $\Delta\theta$, определяемого из условия $-\frac{\lambda}{b} < \sin \theta < \frac{\lambda}{b}$ (см.рис.1, условие применимости геометрической оптики). Отсюда, в свою очередь, следует, что в случае $\lambda \ll b$ угол расходимости центрального светового пучка

$$\Delta\theta \approx \frac{2\lambda}{b} \quad (14)$$

Этот результат с достаточной степенью точности пригоден для оценки угла расходимости света на препятствиях произвольной формы. При этом параметр b в (14) трактуется как поперечный размер препятствия D .

Для узких щелей ($b \leq \lambda$) метод Френеля неприменим, однако угловое положение минимумов и в этом случае определяется формулой (12). Из неё следует, что при $b < \lambda$ дифракционные минимумы отсутствуют.

3. АМПЛИТУДНАЯ ДИФРАКЦИОННАЯ РЕШЕТКА

Дифракционная решетка – прибор, предназначенный для анализа спектра и измерения длин волн, излучаемых источниками света в оптическом, инфракрасном (ИК) и ультрафиолетовом (УФ) диапазонах. Конструктивно, решетка представляет собой плоское препятствие для света с пропускаемостью η , периодически зависящей от координат.

Рассмотрим решетку, состоящую из N одинаковых равноотстоящих параллельных щелей в непрозрачном экране (рис.6). Это вариант **амплитудной** дифракционной решетки, работающей в проходящем свете. Обозначим ширину непрозрачной полосы a , а ширину щели – b . Величина $d = a + b$ называется периодом решетки.

Пусть на решетку в направлении координатной оси z падает плоская монохроматическая световая волна с длиной волны λ . По аналогии с пунктом 2, выберем в качестве поверхности Френеля открытую часть волновой поверхности $z = 0$, состоящую из N параллельных полосок шириной b . Для произвольного направления θ дифракции Фраунгофера разность хода между вторичными волнами, исходящими от соседних полосок, равна $d \sin \theta$, а разность фаз $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$.

Световое поле, излучаемое каждой из щелей $E_j = E(\theta)e^{-i\delta(j-1)}$, где $j \in [1, 2, \dots, N-1]$ – порядковый номер щели, а $E(\theta)$ определяется формулой (10).

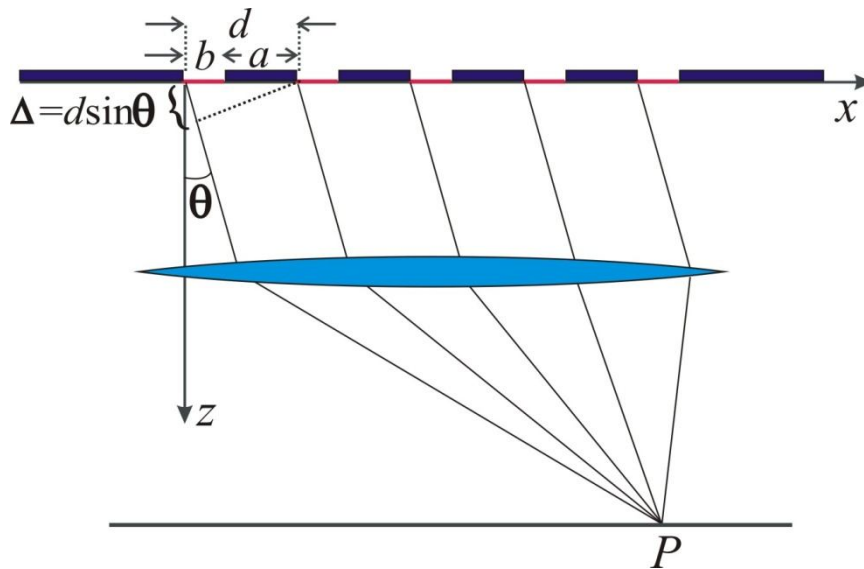


Рис.6

Общее поле, излучаемое в направлении θ , вычисляется как сумма членов геометрической прогрессии:

$$\sum_{j=1}^N E_j = E(N, \theta) = E(\theta) \left(1 + e^{-i\delta} + \dots + e^{-i\delta(N-1)} \right) = E(\theta) \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} e^{-i \frac{(N-1)\delta}{2}}. \quad (15)$$

Следовательно, угловое распределение интенсивности света, дифрагированного решеткой

$$I(N, \theta) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E(N, \theta) E^*(N, \theta) = I(\theta) \frac{\sin^2 \left(\frac{N\delta}{2} \right)}{\left(\sin \frac{\delta}{2} \right)^2}, \quad (16)$$

где $I(\theta)$ – интенсивность света, дифрагированного одной щелью (11).

Угловое распределение интенсивности поля дифракции $I(N, \theta)$ изображено на рис.7 для решетки с параметрами $N = 5$, $d = 3b$. Максимальная интенсивность дифрагированного света наблюдается в направлениях, удовлетворяющих условию синфазности соседних вторичных волн. Это условие соблюдается, когда оптическая разность хода $\Delta = d \sin \theta$ равна целому числу длин волн:

$$d \sin \theta_m = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (17)$$

Формула (17) определяет направления **главных максимумов** интенсивности дифрагированного света (m – **порядок главного максимума**). В направлениях главных максимумов формула (16) принимает вид $I(N, \theta) = N^2 I(\theta)$, где $I(\theta)$ – угловое распределение света, даваемое одинарной щелью (11). Эта функция на рис.7 изображена пунктирной кривой. Главный максимум отсутствует, если его направление совпадает с направлением минимума для одинарной щели (12).

В случае решетки с периодом $d = 3b$ исчезают максимумы порядков $m = \pm 3, \pm 6, \dots$ (рис.7).

Из (16) следует, что распределение $I(N, \theta)$ принимает нулевые значения в направлениях, удовлетворяющих условию $\frac{N\delta}{2} = \pm j\pi$ или

$$d \sin \theta_{\min} = \frac{j\lambda}{N} \quad (18)$$

где j – целое положительное число, **не равное** произведению mN .

Таким образом между соседними главными максимумами располагается $N - 1$ минимум и, соответственно, $N - 2$ добавочных максимума, интенсивность которых сравнительно невелика (рис.7).

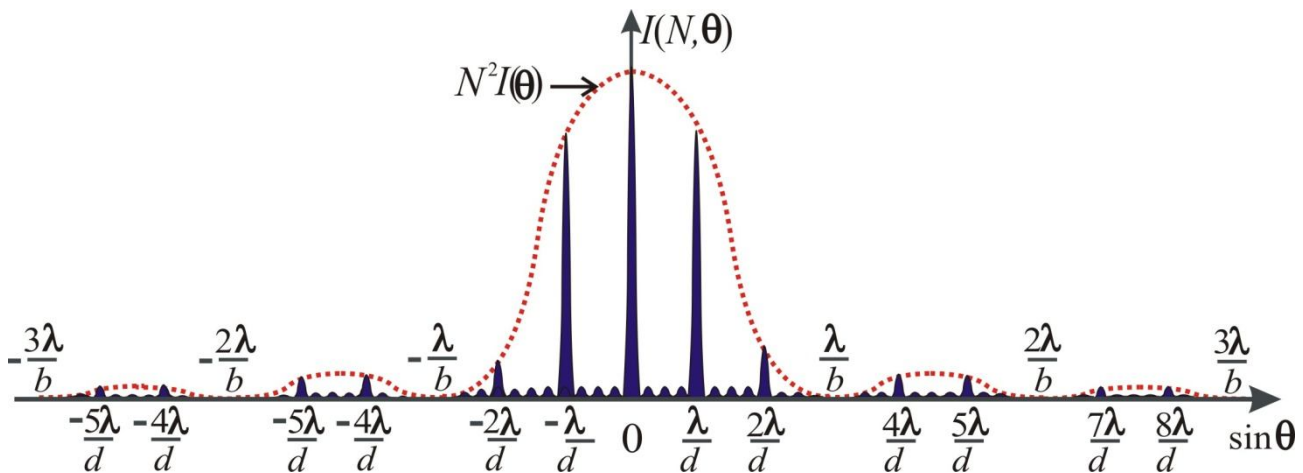


Рис.7

Угловая ширина главных максимумов $\Delta\theta$ определяется угловым расстоянием между соседними минимумами и зависит от числа щелей N . В случае $\lambda \ll d$ из (18) получаем

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{Nd}. \quad (19)$$

Именно наличие угловой зависимости положения главных максимумов от длины падающей световой волны позволяет использовать решетку в качестве спектрального прибора. Длины волн исследуемого света вычисляются с помощью формулы (17) на основе измерения углов θ_m .

Рассмотрим основные спектральные характеристики дифракционной решетки.

Угловая дисперсия $\beta = \frac{d\theta_m}{d\lambda}$. Этот параметр показывает, насколько сильно величина

углового расстояния $\delta\theta$ между главными максимумами спектральных линий зависит от разности длин волн $\delta\lambda$. Дифференцируя формулу (17) по λ , находим

$$\beta = \frac{m}{d \cos \theta} = \frac{d \sin \theta}{\lambda d \cos \theta} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\lambda}. \quad (20)$$

Из (20) следует, что угловая дисперсия **не зависит** от параметров решетки; она определяется только длиной волны и углом дифракции.

Дисперсионная область $\Delta\lambda$.

Ширина исследуемого спектра не может превышать углового расстояния между соседними главными максимумами. В противном случае происходит перекрытие спектров соседних порядков. Допустим, длины волн света, падающего на решетку, лежат в интервале $[\lambda, \lambda + \Delta\lambda]$. Каждой длине волны соответствует своя последовательность главных максимумов, определяемых формулой (17). Максимальная ширина спектрального интервала $\Delta\lambda$, при которой нет перекрытия между спектрами соседних порядков, называется дисперсионной областью. Для нахождения $\Delta\lambda$ совместим правый край спектра порядка m для длины волны $\lambda + \Delta\lambda$ с левым краем спектра порядка $m + 1$ для длины волны λ :

$$d \sin \theta = m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda, \text{ следовательно,}$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \quad (21)$$

В решетках используются спектры низких порядков ($m \leq 3$). Поэтому дифракционные решетки характеризуются широкими областями дисперсии по сравнению с многолучевыми интерферометрами и пригодны для исследования широких участков спектра.

Разрешающая способность

Наличие высокой дисперсии спектрального аппарата само по себе не обеспечивает разрешение им двух близких спектральных линий с длинами волн λ и

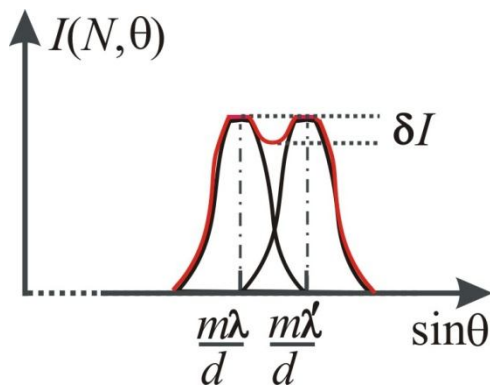


Рис.8

$\lambda' = \lambda + \delta\lambda$. Если ширина спектральных линий (19) не мала по сравнению с $\delta\lambda$, эти

линии могут восприниматься человеческим глазом как одна. Минимальная разность длин волн $\delta\lambda_{\min}$, разрешаемая спектральным прибором, называется спектральным разрешенным расстоянием, а величина $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}}$ – разрешающей способностью прибора.

Для дифракционной решетки справедливо утверждение: *две линии с близкими длинами волн не сливаются в одну, если главный максимум для одной из них совпадает по своему положению с первым минимумом в том же порядке для другой* (критерий Рэлея). Пусть угол θ является углом главного максимума для линии $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$ и в то же время углом ближайшего соседнего минимума для линии λ (рис.8). Тогда из (17) и (18) следует: $d \sin \theta = m(\lambda + \delta\lambda)$ и $d \sin \theta = \frac{Nm + 1}{N} \lambda$. Приравнивая правые части, после сокращений получаем: $m\delta\lambda = \lambda/N$, откуда следует:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}} = mN. \quad (22)$$

Разрешающая способность современных решеток достигает весьма высоких значений ~ 400000 , что, тем не менее, на порядок меньше, чем разрешающая способность многолучевых интерферометров.

Существенным недостатком амплитудной дифракционной решетки является слабая **светосила** рабочих максимумов. Это связано с тем, что основная часть световой энергии приходится на центральный ($m = 0$) максимум, который бесполезен при исследовании спектра.

4.ПРОЗРАЧНАЯ ФАЗОВАЯ РЕШЕТКА

Рассмотрим прозрачную пластинку, одна из сторон которой профилирована, как показано на рис.9. Это **фазовая** дифракционная решетка, работающая в проходящем свете. Период d , ширину b щелей (пологих прозрачных участков профиля), угол скоса γ и коэффициент преломления материала пластины n будем считать заданными параметрами.

Пусть на нерабочую поверхность пластины нормально к ней падает плоская световая волна. Очевидно, в этом случае, в отличие от амплитудной решетки, рассмотренной выше в пункте 3, поверхность $z=0$ не является волновой поверхностью! Оптическая длина пути, а вместе с ней и фаза световой волны φ' (см. выражения 6 и 7) на этой поверхности является функцией координаты x .

Поскольку эта функция периодическая с периодом d , условие главных максимумов (17) остается в силе. Формулы (20-22) для угловой дисперсии, дисперсионной области и разрешающей способности также остаются справедливыми. Распределение интенсивности света по углам дифракции, наоборот, претерпевает существенные изменения.

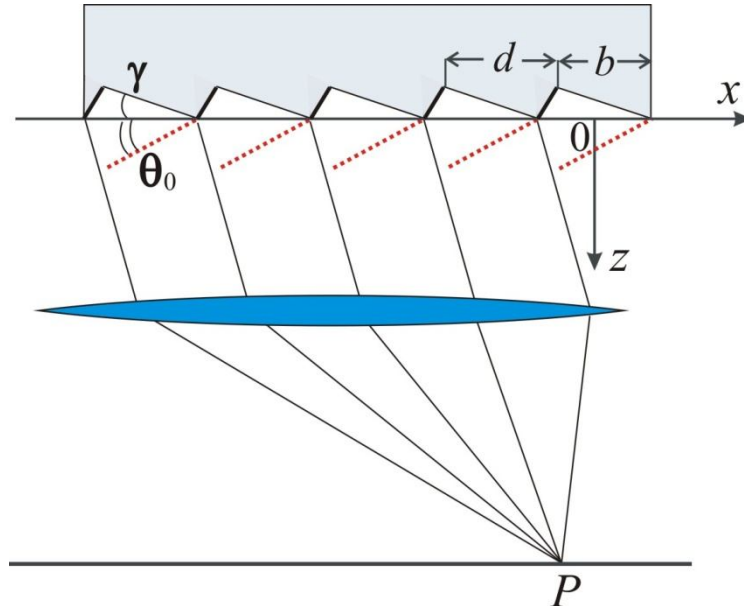


Рис.9

Прерывистая пунктирная линия изображает профиль волновой поверхности фазовой решетки

Поместив начало координат в середину любой из щелей шириной b (рис.9), получим выражение для добавочной фазы вторичных источников из (7) в виде $\varphi'(\vec{r}') = \frac{2\pi}{\lambda} x(n-1)\text{tg}\gamma$ для $x \in [-b/2, b/2]$. Таким образом, в пределах одной щели выражение (10) для зависимость фазы вторичных волн от x преобразуется к виду

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} x\{\sin\theta - (n-1)\text{tg}\gamma\}, \quad (23)$$

а интегрирование (7) с учетом (23) дает для угловой зависимости дифрагированного щелью светового поля выражение

$$E(\theta) = \int_{-b/2}^{+b/2} ql e^{i\varphi(x)} dx = bql \frac{\sin\left\{\frac{\pi}{\lambda} b[\sin\theta - (n-1)\text{tg}\gamma]\right\}}{\left\{\frac{\pi}{\lambda} b[\sin\theta - (n-1)\text{tg}\gamma]\right\}}. \text{ Вместе с } E(\theta) \text{ модифициру-$$

ется и угловое распределение интенсивности $I(\theta)$:

$$I(\theta) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E(\theta) E^*(\theta) = I_0 \frac{\left\{\frac{\pi}{\lambda} b[\sin\theta - (n-1)\text{tg}\gamma]\right\}}{\left\{\frac{\pi}{\lambda} b[\sin\theta - (n-1)\text{tg}\gamma]\right\}^2}. \quad (24)$$

Сравнение выражений (11) и (24) показывает, что наличие скоса приводит к смещению центрального максимума и всей функции распределения $I(\theta)$ на *угол блеска* θ_0 , определяемый соотношением

$$\sin\theta_0 = (n-1)\text{tg}\gamma. \quad (25)$$

В соответствии с изменением $I(\theta)$ изменяются и интенсивности главных максимумов дифракционной решетки. Путем подбора параметров n и γ можно добиться, чтобы угол блеска совпадал с положением одного из главных максимумов, определяемых условием (17) при $m \neq 0$. Число m , соответствующее этому максимуму, называется **рабочим порядком** фазовой дифракционной решетки.

Примерное распределение интенсивности по углам дифракции для решетки с рабочим порядком $m = 2$ приведено на рис.10.

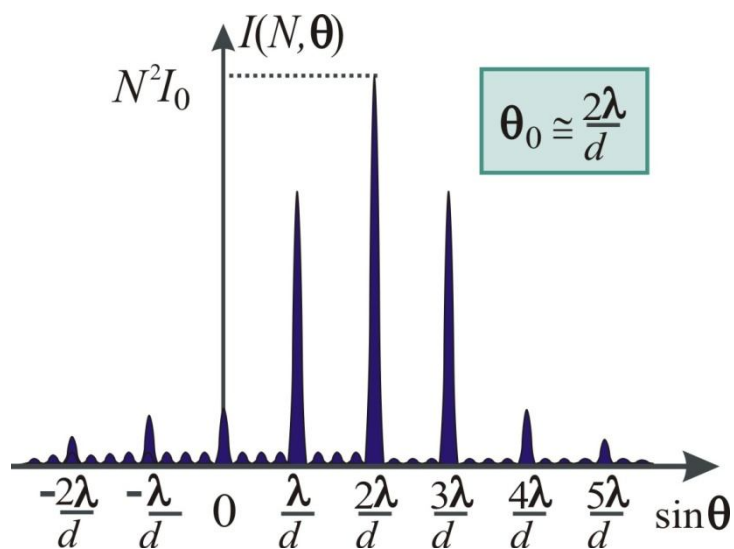


Рис.10

Таким образом, главным преимуществом фазовой дифракционной решетки является сравнительно более высокая светосила рабочих максимумов. С помощью фазовой решетки можно анализировать спектры маломощных источников света, спектральные линии которых не могут быть обнаружены в спектре амплитудной решетки.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Лабораторная работа №5-2

Дифракция Фраунгофера на одинарной и двойной щели.

В работе используется установка, принципиальная схема которой изображена на рис.11. Свет гелий-неонвого лазера 1 (длина волны $\lambda = 632$ нм), дифрагированный на препятствии 2, попадает на экран 3, на котором смонтирована линейка со шкалой. Вдоль линейки может перемещаться фотодиод 4, включенный к цепи микроамперметра 5, блока питания 6 и резистора 7.

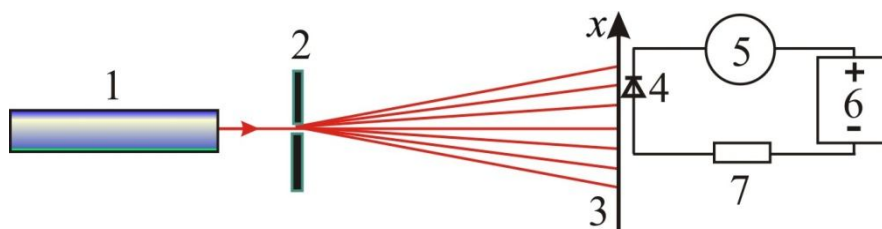


Рис.11

Задание 1. Определение ширины щели.

Это задание, так же как и задание №2, рекомендуется выполнять в затемненном помещении.

- 1 Включить лазер и установить его таким образом, чтобы в отсутствии препятствия его луч попадал в точку экрана с координатой $x = 0$. Линейка экрана должна быть установлена строго горизонтально. Установить на оптической скамье щель на расстоянии $\rho = 1$ м от экрана. Необходимо добиться, чтобы дифракционные максимумы располагались горизонтально (на пути следования каретки с фотодиодом).
- 2 Перемещая каретку с фоторезистором с шагом 1 мм, снять зависимость фототока i от координаты x (рис.11). Диапазон чувствительности микроамперметра выбирать так, чтобы стрелка прибора по возможности, находилась в правой половине шкалы. Результаты измерений внести в таблицу 1. В ходе этого задания измерить координаты трех боковых минимумов и двух максимумов (i_1, i_2) с каждой стороны от $x = 0$. Значения фототока в табл.1 должны быть записаны в единицах, равных цене деления для позиции ($\times 1000$) переключателя прибора.
- 3 Построить на миллиметровке график зависимости i от θ . Определить угловые координаты θ , соответствующие минимумам излучения при $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3$.
- 4 Вычислить, используя формулу (12), ширину щели b . Оценить погрешность этого метода измерения величины b .

5 Вычислить, пользуясь данными из табл.1 или графика, отношения $\frac{i_{\pm 1}}{i_0}$ и $\frac{i_{\pm 2}}{i_0}$. Сравнить эти результаты с результатами расчета отношения величин $\frac{I_m}{I_0}$ по формуле (13). Сделать выводы о линейности характеристики фотопреобразователя.

Т а б л и ц а 1

x , мм										...
i , дел										...
$\theta \cong x/\rho$, рад										...

Задание 2. Определение параметров двойной щели

1. Вместо одинарной щели установить на оптической скамье двойную щель и повторить пп. 2 и 3 предыдущего задания.
2. Построить график зависимости фототока i от угла дифракции θ . Сравнить этот график с теоретическими формулами (16) и (18), которые в случае $N = 2$ принимают вид: $I(2, \theta) = 4I(\theta)\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right)$ и $\sin \theta_{\min} = \pm \frac{\lambda}{2d}, \pm \frac{3\lambda}{2d}, \dots$
3. Путем сравнения экспериментальных и теоретических значений θ_{\min} определить расстояние между щелями d . По методике п.4 предыдущего задания определить ширину каждой щели b .
4. Проверить, удовлетворяют ли параметры опыта количественному критерию $\rho \gg 4D^2/\lambda$ для наблюдения дифракции Фраунгофера. Здесь D – поперечный размер препятствия, который во втором задании отождествляется с величиной d .

**Лабораторная работа №5-3
Фазовая дифракционная решетка**

Оптическая схема для исследования дифракции Фраунгофера на фазовой решетке изображена на рис.12. На предметном столике гониометра 3 расположены источник света с коллиматором 1, решетка 2 и зрительная труба с объективом Л. Зрительная труба может перемещаться по периметру предметного столика. Она снабжена оптическим микроскопом, с помощью которого можно измерять углы отклонения лучей, прошедших через исследуемую оптическую систему с точностью до одной угловой секунды (см. Приложение).

Источником света служит ртутная лампа. **Включать её в сеть питания можно только с разрешения и в присутствии преподавателя или лаборанта.**

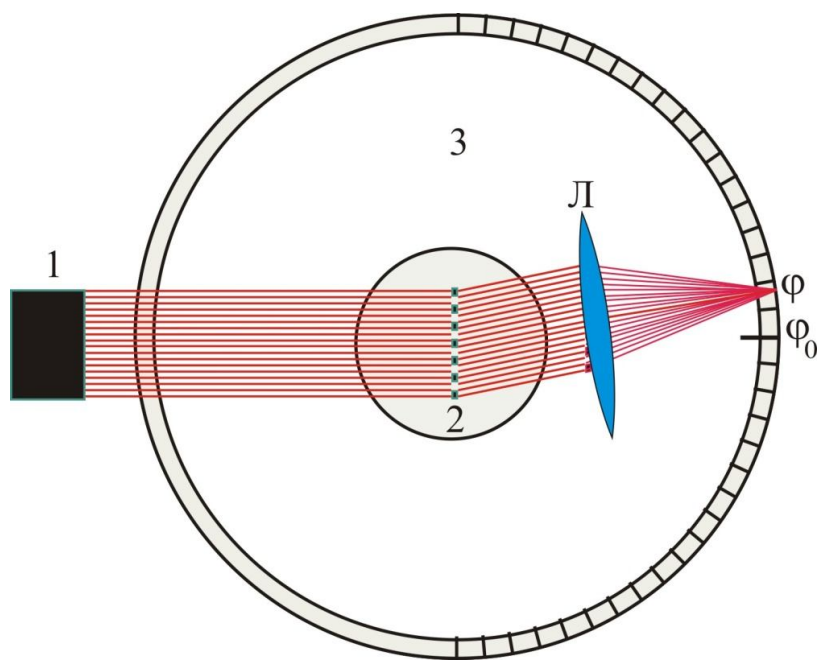


Рис.12

Спектр ртутной лампы состоит из нескольких разноцветных линий, наблюдаемых в окуляре гониометра; среди этих линий есть желтый дублет с близкими длинами волн $\lambda_{\text{ж}}$ и $\lambda'_{\text{ж}}$. Суммарное воздействие всех этих линий на сетчатку человеческого глаза воспринимается как белый цвет. После дифракции на решетке от нее распространяются разноцветные лучи в направлениях, определяемых выражением (17). Центральный максимум остаётся белым, так как в направлении $\theta = 0$ условие главных максимумов (17) выполняется для всех длин волн.

Дифракционная решетка изготовлена из мягкого полимерного материала. Ее период $d = 5$ мкм.

Во избежание повреждения рабочей поверхности решетки, категорически запрещается касаться ее руками!

Задание 1

1. Включить осветитель и, перемещая зрительную трубу, определить рабочий порядок решетки (яркость спектральных линий в этом порядке принимает максимальное значение).
2. Определить минимальный порядок m , в котором желтый дублет виден как две отдельные линии.
3. Измерить угол φ_0 , под которым наблюдается белая линия ($m = 0$), а также углы φ_m для фиолетовой (ф), зеленой (з) и желтых (ж) линий в порядках $m = 1, 2, 3$. Погрешность измерения углов должна составлять одну угловую секунду (в соответствии с паспортом гониометра). Углы дифракции θ_m вычислить как отклонения φ_m от φ_0 : $\theta_m = \varphi_m - \varphi_0$. Данные внести в таблицу 2.

Задание 2. Обработка результатов

1. Полагая, что угол блеска исследуемой решетки (рис.9) равен углу θ_m для зеленой линии в рабочем порядке, вычислить угол скоса γ с помощью формулы (25). Коэффициент преломления материала реплики $n = 1,4$.
2. Вычислить по формуле $R = \frac{\lambda_{ж}}{\lambda'_{ж} - \lambda_{ж}}$ минимальную разрешающую способность, при которой две линии желтого дублета можно наблюдать отдельно. С помощью формулы (22) для порядка m , определенного в п.2 задания 1 оценить число N «рабочих» штрихов решетки.
3. Используя данные, полученные при выполнении п.3 задания 1 и формулу (17), рассчитать длины волн всех спектральных линий. Результаты внести в табл.2.

Т а б л и ц а 2

№ порядка	1			2			3		
	ф	з	ж	ф	з	ж	ф	з	ж
φ_m , град									
θ_m , рад									
λ , нм									

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Принцип Гюйгенса-Френеля.
2. Условия применимости приближений геометрической оптики и дифракции Фраунгофера.
3. Теорема Бабине.
4. Дифракция Фраунгофера на щели.
5. Амплитудная и фазовая дифракционные решетки.
6. Дифракционная решетка как спектральный прибор. Угловая дисперсия, дисперсионная область, разрешающая способность.
7. Устройство и принцип действия экспериментальных установок.

7.ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин Д.В. Курс общей физики. 4.Оптика. М.: Наука, 2002.
2. Калитиевский Н.И. Волновая оптика. М.: Высшая школа, 2007.

8. ПРИЛОЖЕНИЕ

Измерение углов дифракции

Зрительная труба гониометра механически связана с оптическим микрометром, позволяющим измерять углы дифракции с точностью до $1''$.

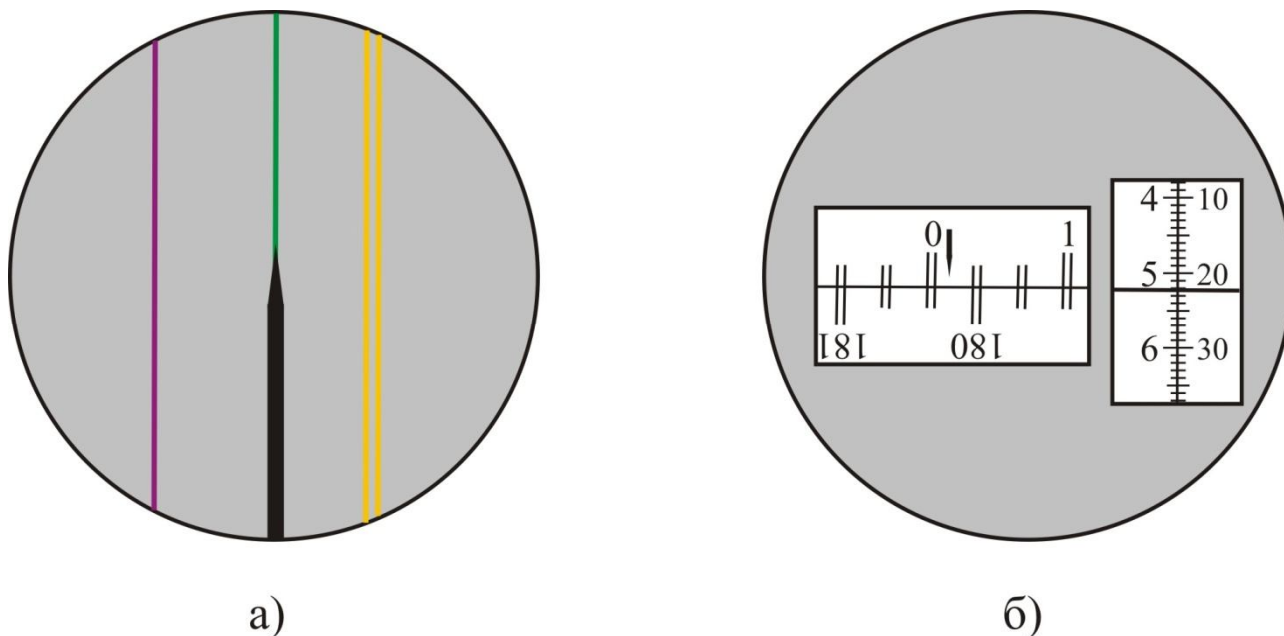


Рис.13

Поле окуляра зрительной трубы изображено на рис.13,а. Вращая зрительную трубу, оператор совмещает черный индекс окуляра с измеряемой линией (зеленая на рис.13,а). Отсчет показаний прибора ведется в поле окуляра оптического микрометра (рис.13,б).

В левом окне наблюдаются изображения диаметрально противоположных участков лимба и вертикальный индекс для отсчета градусов и десятков минут. Чтобы снять отсчет по лимбу, необходимо повернуть маховичок оптического микрометра (расположен на правой боковой панели гониометра) до совмещения верхних и нижних штрихов лимба.

Число градусов равно ближайшей цифре на верхней шкале слева от индекса (на рис.13,б это 0°).

Число десятков минут определяется числом интервалов между штрихом, соответствующим измеренному количеству градусов и нижним оцифрованным штрихом, отличающимся от верхнего на 180° (на рис.13,б читаем: $10'$).

Число единиц минут отсчитывается по шкале микрометра в правом окне по левому ряду чисел, а число секунд – в том же окне по правому ряду чисел.

Положение, показанное на рис.13,б, соответствует отсчету $0^\circ 15' 22''$.