

УДК 535.8+621.373.826

С.В. Иванов, А.В. Назаров, Е.А. Попов

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КРУГЛОГО ОТКРЫТОГО ФЕРРИТОВОГО ВОЛНОВОДА СО СПИРАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Рассмотрен круглый открытый продольно намагниченный ферритовый волновод со спиральнопроводящей поверхностью. Приведена постановка краевой задачи, описана процедура составления дисперсионного уравнения, представлены дисперсионные характеристики нескольких азимутально-симметричных и азимутально-несимметричных волн структуры.

Ключевые слова: феррит, волновод, спирально проводящая поверхность, краевая задача, дисперсия.

Рассмотрим круглый открытый продольно намагниченный ферритовый волновод (ФВ) со спирально проводящей поверхностью (рис. 1), представляющий собой ферритовый стержень радиусом a (область I), находящийся в неограниченной изотропной среде (область II), на поверхность которого намотана идеально проводящая спираль с шагом d . Стержень намагничен до насыщения постоянным магнитным полем \vec{H}_0 , направленным вдоль оси Oz . Угол ψ определяет плотность намотки проводника на ферритовый стержень. Вектор \vec{s} направлен вдоль витков спирали. В направлении этого вектора протекает ток, связанный с распространением электромагнитной волны. Вектор \vec{n} перпендикулярен плоскостям витков спирали и касается ее поверхности. В направлении \vec{n} ток отсутствует.

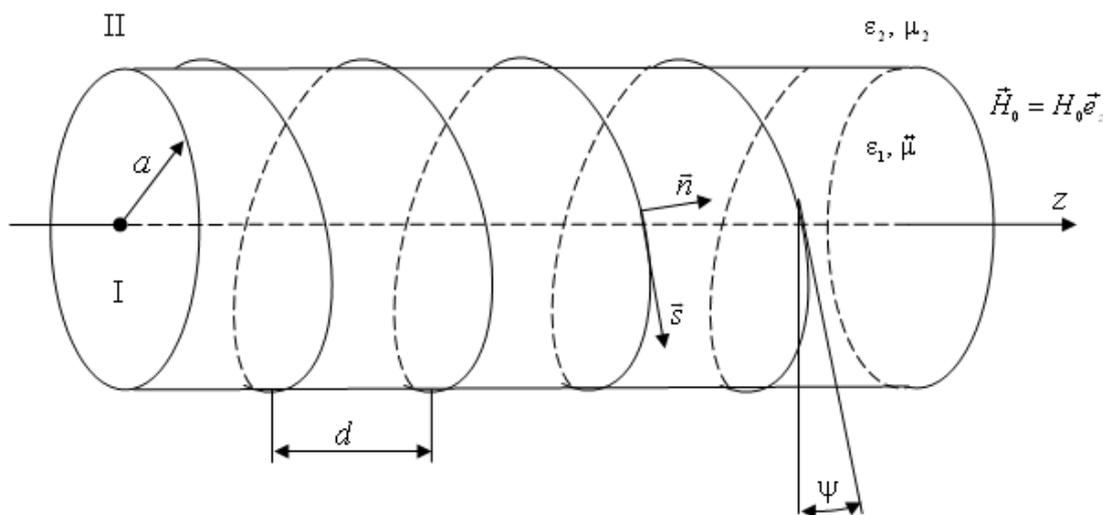


Рис. 1

Диэлектрическую проницаемость феррита считаем постоянной скалярной величиной: $\epsilon_1 = \text{const}$; магнитная проницаемость феррита описывается тензором [1]

$$\vec{\mu} = \begin{vmatrix} \mu & -ik & 0 \\ ik & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Элементы μ и k тензора (1) зависят от частоты электромагнитной волны ω и при отсутствии потерь в феррите определяются по формулам:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 - \frac{\zeta A}{1 - \zeta^2}, \quad \frac{k}{\mu_0} = \frac{A}{1 - \zeta^2},$$

где $\zeta = \frac{\omega_0}{\omega}$; $A = \frac{\omega_M}{\omega}$; $\omega_0 = \mu_0 \gamma H_0$ – частота свободной прецессии спиновых магнитных моментов электронов; $\omega_M = \mu_0 \gamma M_s$; $\gamma = \frac{|e|}{m_e} = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг – спиновое гиромагнитное отношение для электрона; H_0 – величина напряженности поля подмагничивания [А/м]; M_s – намагниченность насыщения феррита [А/м].

Диэлектрическая и магнитная проницаемости внешней неограниченной изотропной среды равны соответственно ϵ_2 и μ_2 .

Пусть в структуре, изображенной на рис.1, в положительном направлении оси Oz распространяется монохроматическая электромагнитная волна частоты ω , напряженности электрического и магнитного полей которой имеют зависимость от времени t и координаты z вида $\exp[i(\omega t - \beta z)]$, где β – продольное волновое число.

Для решения задачи о распространении электромагнитных волн вдоль рассматриваемой структуры используем модель спирально проводящего цилиндра. Сущность этой модели [2, 3] состоит в том, что реальная спираль при достаточно малом ($d \ll \lambda$, где λ – длина волны) шаге заменяется системой проводящих колец того же радиуса. Эти кольца плотно прилегают друг к другу, однако гальванического контакта не имеют. При бесконечном увеличении числа таких колец на единицу длины линии (при соответствующем уменьшении до нуля диаметра провода, образующего спираль) в пределе получается сплошной цилиндр с анизотропной поверхностной проводимостью. По такому цилиндру ток протекает вдоль витков спирали (в направлении вектора \vec{s}) и не может протекать в направлении, перпендикулярном их плоскости (в направлении вектора \vec{n}).

Электромагнитное поле в ферритовом стержне (рис. 1, область I) описывается функцией Ψ , являющейся линейной комбинацией продольных компонент векторов напряженностей E_z электрического и H_z магнитного полей и удовлетворяющей уравнению Гельмгольца [4],

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \vartheta^2 \Psi = 0, \quad (2)$$

где $\vartheta^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu - \omega^2 k^2 \frac{\epsilon_1}{\mu} - \beta^2 + \omega \beta \xi k \frac{\epsilon_1}{\mu}$; ξ – решение квадратного уравнения

$$\tilde{a} \xi^2 - \tilde{b} \xi - \tilde{c} = 0 \quad (3)$$

с коэффициентами:

$$\tilde{a} = \omega \beta \epsilon_1 \frac{k}{\mu}; \quad \tilde{b} = \omega^2 \left(\epsilon_1 \mu_0 + k^2 \frac{\epsilon_1}{\mu} - \epsilon_1 \mu \right) + \beta^2 \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu} \right); \quad \tilde{c} = \omega \beta \mu_0 \frac{k}{\mu}.$$

Уравнение (3) имеет два решения (ξ_1 и ξ_2), которым соответствуют два значения ϑ_1^2 и ϑ_2^2 . Поэтому решениями уравнения (2) будут функции:

$$\Psi_1(r, \varphi) = A_1 J_n(\vartheta_1 r) e^{\mp i n \varphi}; \quad \Psi_2(r, \varphi) = B_1 J_n(\vartheta_2 r) e^{\mp i n \varphi},$$

где A_1 и B_1 – неизвестные амплитудные коэффициенты; $J_n(\vartheta r)$ – функция Бесселя.

Значениям $\pm n$ в выражениях для функций $\Psi_1(r, \varphi)$ и $\Psi_2(r, \varphi)$ соответствуют два независимых решения краевой задачи, описывающих гибридные волны с левой и правой круговой поляризацией.

Продольные компоненты поля в области I выражаются через функции Ψ_1 и Ψ_2 :

$$E_{z1} = \frac{\xi_2 \Psi_1 - \xi_1 \Psi_2}{\xi_2 - \xi_1} e^{-i\beta z}; \quad H_{z1} = i \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{\xi_2 - \xi_1} e^{-i\beta z}, \quad (4)$$

поперечные компоненты – через продольные по формулам, приведенным в [5].

Подставляя решения уравнения (2) в формулы (4), получим выражения для продольных компонент поля в области I:

$$E_{z1} = [\xi_2 A_1 J_n(\vartheta_1 r) - \xi_1 B_1 J_n(\vartheta_2 r)] \frac{e^{-i(\pm n\varphi + \beta z)}}{\xi_2 - \xi_1}; \quad (5)$$

$$H_{z1} = i [A_1 J_n(\vartheta_1 r) - B_1 J_n(\vartheta_2 r)] \frac{e^{-i(\pm n\varphi + \beta z)}}{\xi_2 - \xi_1}.$$

Во внешней области II (рис. 1), где среда является изотропной, компоненты электромагнитного поля выражаются через продольные компоненты Π_{z2}^e электрического и Π_{z2}^m магнитного векторов Герца, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца и имеющих вид

$$\Pi_{z2}^e = A_2 H_n^{(2)}(\alpha r) e^{-i(\pm n\varphi + \beta z)}; \quad \Pi_{z2}^m = B_2 H_n^{(2)}(\alpha r) e^{-i(\pm n\varphi + \beta z)}, \quad (6)$$

где A_2 и B_2 – неизвестные амплитудные коэффициенты; $\alpha^2 = \varepsilon_2 \mu_2 \omega^2 - \beta^2$; α – поперечное волновое число в области II; $H_n^{(2)}(\alpha r)$ – функция Ханкеля второго рода, по формулам:

$$\vec{E}_2 = \text{grad div } \vec{\Pi}_2^e + \varepsilon_2 \mu_2 \omega^2 \vec{\Pi}_2^e - i\omega \mu_2 \text{rot } \vec{\Pi}_2^m,$$

$$\vec{H}_2 = \text{grad div } \vec{\Pi}_2^m + \varepsilon_2 \mu_2 \omega^2 \vec{\Pi}_2^m + i\omega \varepsilon_2 \text{rot } \vec{\Pi}_2^e.$$

Здесь $\vec{\Pi}_2^{e(m)} = \Pi_{z2}^{e(m)} \vec{e}_z$; \vec{e}_z – единичный вектор оси Oz .

Представление векторов Герца в виде (6) позволяет при $\text{Im}(\alpha) < 0$ описывать экспоненциально убывающие по радиальной координате поля, соответствующие собственным волнам направляющей структуры.

Так как ток по спирально проводящей поверхности рассматриваемой направляющей структуры может протекать лишь в направлении \vec{s} , то на этой поверхности (в силу идеальной проводимости провода, образующего спираль) компонента электрического поля $E_s = E_z \sin \psi + E_\varphi \cos \psi$ будет обращать в нуль, в то время как компоненты E_z и E_φ будут непрерывны. Непрерывной также будет компонента магнитного поля $H_s = H_z \sin \psi + H_\varphi \cos \psi$. Поэтому граничные условия примут вид:

$$E_{z1}(r=a) = E_{z2}(r=a),$$

$$E_{\varphi 1}(r=a) = E_{\varphi 2}(r=a),$$

$$E_{s1}(r=a) = E_{s2}(r=a) = 0,$$

$$H_{s1}(r=a) = H_{s2}(r=a).$$

Реализация граничных условий приводит к системе линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитудных коэффициентов A_1, A_2, B_1, B_2 , из условия нетривиальности решений которой (условия равенства нулю ее главного определителя) получается дисперсионное уравнение (ДУ) волн ФВ со спирально проводящей поверхностью

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & 0 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
\text{где } u_{11} &= \frac{\xi_2}{\xi_2 - \xi_1} J_n(\vartheta_1 a), \quad u_{12} = -\frac{\xi_1}{\xi_2 - \xi_1} J_n(\vartheta_2 a), \quad u_{13} = -\alpha^2 H_n^{(2)}(\alpha a), \\
u_{21} &= \frac{\Phi_{1n}(\vartheta_1 a)}{(\xi_2 - \xi_1)(q^2 \omega^4 - p^2)}, \quad u_{22} = -\frac{\Phi_{2n}(\vartheta_2 a)}{(\xi_2 - \xi_1)(q^2 \omega^4 - p^2)}, \quad u_{23} = \beta \frac{n}{a} H_n^{(2)}(\alpha a), \\
u_{24} &= -i\omega\mu_2 \alpha H_n^{(2)'}(\alpha a), \quad u_{33} = \alpha^2 H_n^{(2)}(\alpha a) \sin \psi - \beta \frac{n}{a} H_n^{(2)}(\alpha a) \cos \psi, \\
u_{34} &= i\omega\mu_2 \alpha H_n^{(2)'}(\alpha a) \cos \psi, \quad u_{41} = \frac{Q_{1n}(\vartheta_1 a) \cos \psi}{(\xi_2 - \xi_1)(q^2 \omega^4 - p^2)} + \frac{J_n(\vartheta_1 a) \sin \psi}{\xi_2 - \xi_1}, \\
u_{42} &= -\frac{Q_{2n}(\vartheta_2 a) \cos \psi}{(\xi_2 - \xi_1)(q^2 \omega^4 - p^2)} - \frac{J_n(\vartheta_2 a) \sin \psi}{\xi_2 - \xi_1}, \quad u_{43} = \omega \varepsilon_2 \alpha H_n^{(2)'}(\alpha a) \cos \psi, \\
u_{44} &= i\alpha^2 H_n^{(2)}(\alpha a) \sin \psi - i\beta \frac{n}{a} H_n^{(2)}(\alpha a) \cos \psi.
\end{aligned}$$

$$\text{Здесь } \Phi_{1n}(\vartheta_1 a) = \omega \vartheta_1 (p\mu - q\omega^2 k + q\omega\beta\xi_2) J_n'(\vartheta_1 a) - \frac{n}{a} (p\omega k - p\beta\xi_2 - q\omega^3 \mu) J_n(\vartheta_1 a);$$

$$\Phi_{2n}(\vartheta_2 a) = \omega \vartheta_2 (p\mu - q\omega^2 k + q\omega\beta\xi_1) J_n'(\vartheta_2 a) - \frac{n}{a} (p\omega k - p\beta\xi_1 - q\omega^3 \mu) J_n(\vartheta_2 a);$$

$$Q_{1n}(\vartheta_1 a) = \frac{n}{a} (q\omega^3 \varepsilon_1 \xi_2 + p\beta) J_n(\vartheta_1 a) + \omega \vartheta_1 (q\omega\beta + p\varepsilon_1 \xi_2) J_n'(\vartheta_1 a);$$

$$Q_{2n}(\vartheta_2 a) = \frac{n}{a} (q\omega^3 \varepsilon_1 \xi_1 + p\beta) J_n(\vartheta_2 a) + \omega \vartheta_2 (q\omega\beta + p\varepsilon_1 \xi_1) J_n'(\vartheta_2 a); \quad p = \varepsilon_1 \mu \omega^2 - \beta^2; \quad q = \varepsilon_1 k;$$

штрих означает производную цилиндрической функции по всему аргументу.

Следует отметить, что рассматриваемая краевая задача является несамосопряженной даже при отсутствии потерь в образующих направляющую структуру средах, поскольку число граничных условий прямой и сопряженной задач различно [6]. Так как собственные значения несамосопряженной краевой задачи в общем случае комплексные, наиболее общими решениями ДУ (7) будут комплексные волновые числа, соответствующие при отсутствии потерь спектру комплексных волн.

Корректность работы программы поиска корней ДУ (7), реализованной в среде программирования Borland C++, была проверена путем выполнения предельного перехода от круглого открытого ФВ со спирально-проводящей поверхностью к спиральному волноводу с воздушным заполнением [2, 3].

В табл.1 приведены значения коэффициента замедления β/k_0 (k_0 – волновое число плоской волны в свободном пространстве) азимутально-симметричных волн ($n=0$) спирального волновода с воздушным заполнением при $|\alpha a| > 0,5$, полученные с использованием асимптотической формулы [2, 3]

$$\frac{\beta}{k_0} \approx \frac{1}{\sin \psi} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \psi}{2(k_0 a)^2}}, \quad (8)$$

а также в результате решения ДУ (7). При этом рассматривался ФВ со спиральнопроводящей поверхностью без потерь с пренебрежимо малой намагниченностью ($M \rightarrow 0$) в отсутствие внешнего поля подмагничивания ($H_0 = 0$) со следующими параметрами: $a = 20$ мм, $\psi = 0,1$ рад, $\varepsilon_1/\varepsilon_0 = \varepsilon_2/\varepsilon_0 = 1$, $\mu/\mu_0 = 1$, $k/\mu_0 \rightarrow 0$ ($k/\mu_0 = 10^{-6}$), $\mu_2/\mu_0 = 1$. Как видно из табл.1, относительное расхождение результатов не превышает 0,1%, что позволяет сделать вывод о

корректной работе созданной программы и возможности ее использования для проведения дальнейших расчетов дисперсионных характеристик волн круглого открытого продольно намагниченного ФВ со спирально проводящей поверхностью.

Таблица 1

$k_0 a$	β / k_0	
	Асимптотическая формула (8)	Корни ДУ (7)
0,5	9,916	9,908
0,6	9,947	9,944
0,7	9,966	9,964
0,8	9,978	9,977

Дисперсионные характеристики первых трех поверхностных волн с азимутальным индексом $n = 0$ круглого открытого продольно намагниченного до насыщения ФВ со спирально проводящей поверхностью без потерь с параметрами: $a = 20$ мм, $\psi = 0,1$ рад, $f_0 = 1,76$ ГГц – частота ферромагнитного резонанса, $M_s = 103,5$ кА/м – намагниченность насыщения феррита, $\varepsilon_1/\varepsilon_0 = 14,8$, $\varepsilon_2/\varepsilon_0 = 1$ представлены на рис. 2.

Так как волны ФВ со спирально проводящей поверхностью даже при отсутствии угловой зависимости у электромагнитного поля являются гибридными, будем условно классифицировать их как HE_{nm} , где первый индекс n означает число вариаций поля по азимутальной координате φ , а второй индекс m – номер волны по порядку следования критических частот.

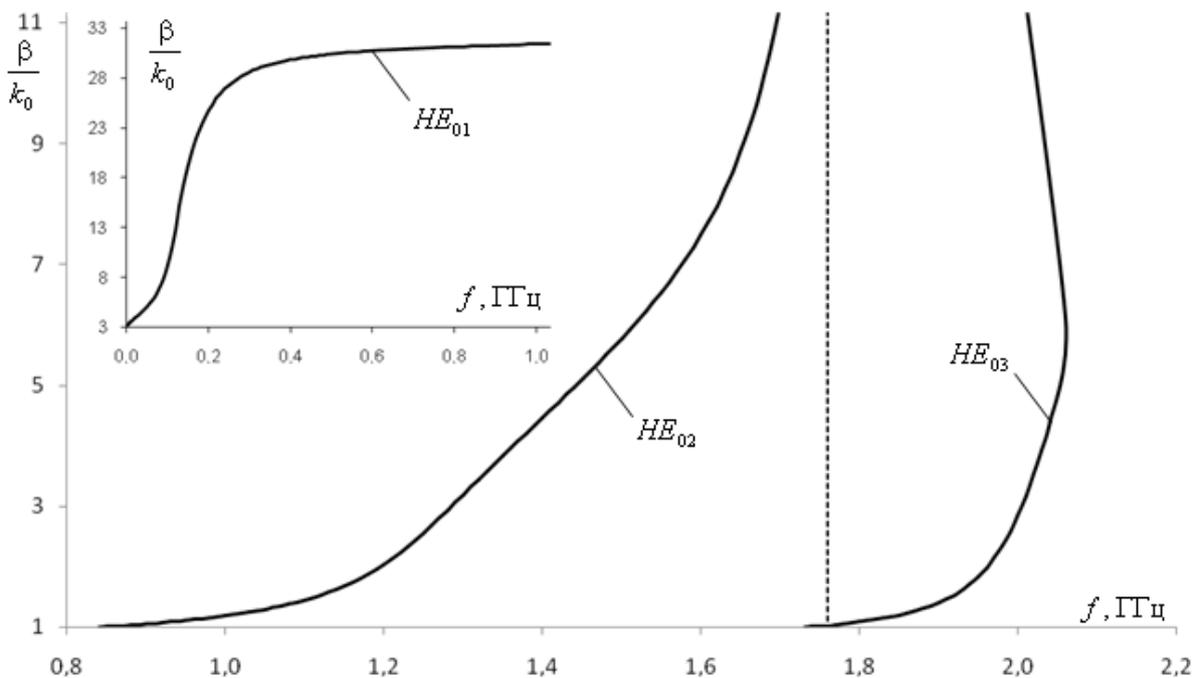


Рис. 2

Как видно из рис.2, волна HE_{01} круглого открытого ФВ со спирально проводящей поверхностью не имеет критической частоты. При этом в дорезонансной области ($f < f_0$) на

частотах $f > 0,35$ ГГц ($k_0 a > 0,15$) величина коэффициента замедления β/k_0 этой волны определяется геометрическим замедлением спирали, то есть величиной угла намотки ψ . Волна HE_{02} обладает нормальной дисперсией, и на частоте ферромагнитного резонанса её дисперсионная характеристика терпит разрыв, наличие которого связано с тем, что на частоте ферромагнитного резонанса терпят разрыв компоненты μ и k тензора магнитной проницаемости (1) феррита без потерь. В зарезонансной области частот ($f > f_0$) дисперсионная характеристика волны HE_{03} имеет участок с сильной аномальной дисперсией, ее коэффициент замедления стремится к бесконечности при стремлении частоты f к частоте ферромагнитного резонанса f_0 справа.

Как было указано выше, в случае несимметричных волн ($n \neq 0$) рассматриваемая краевая задача имеет два независимых решения, описывающих гибридные волны с левым $HE_{nm}^{(+)}$ и правым $HE_{nm}^{(-)}$ вращением плоскости поляризации. Дисперсионные характеристики поверхностных волн с азимутальным индексом $n=1$ круглого открытого продольно намагниченного ФВ со спирально проводящей поверхностью без потерь с теми же параметрами, что и ранее, представлены на рис. 3, где сплошными линиями изображены характеристики волн с левым вращением плоскости поляризации, пунктирными линиями – с правым вращением.

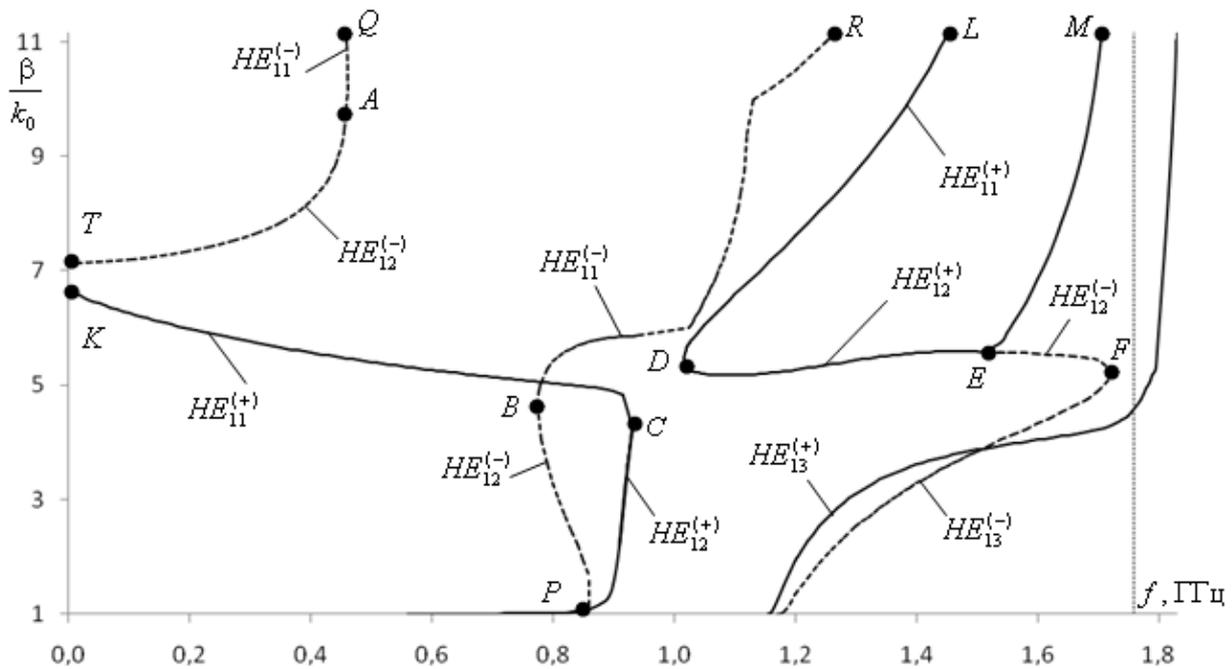


Рис. 3

Сложное поведение дисперсионных характеристик не позволяет использовать в данном случае описанный выше подход к классификации волн. Поэтому будем условно классифицировать волны как HE_{1m} , где второй индекс m означает номер корня ДУ (7) (нумерация корней осуществляется в направлении убывания их значений). На рис. 3 буквами A, B, C, D, F обозначены точки жордановой кратности волновых чисел, в которых происходит слияние дисперсионных характеристик волн $HE_{11}^{(-)}$ и $HE_{12}^{(-)}$ (точки A и B), $HE_{11}^{(+)}$ и $HE_{12}^{(+)}$ (точки C и D), $HE_{12}^{(-)}$ и $HE_{13}^{(-)}$ (точка F).

Из рис. 3 видно, что поверхностная волна $HE_{11}^{(+)}$ на участке KC обладает аномальной, а на участке DL сильной нормальной дисперсией, и её дисперсионная характеристика терпит разрыв на частоте ферромагнитного резонанса.

На дисперсионной характеристике поверхностной волны $HE_{12}^{(+)}$ можно выделить три участка PC , DE и EM . На участке PC волна $HE_{12}^{(+)}$ имеет сильную нормальную дисперсию, на участке DE волна $HE_{12}^{(+)}$ – слабую нормальную дисперсию. В районе точки D , где происходит слияние дисперсионных характеристик волн $HE_{11}^{(+)}$ и $HE_{12}^{(+)}$, волна $HE_{12}^{(+)}$ имеет аномальную дисперсию. На участке EM волна $HE_{12}^{(+)}$ обладает сильной нормальной дисперсией, ее коэффициент замедления стремится к бесконечности при стремлении частоты f к частоте ферромагнитного резонанса f_0 слева.

Дисперсионная характеристика поверхностной волны $HE_{13}^{(+)}$ переходит через частоту ферромагнитного резонанса и имеет в зарезонансной области участок с сильной нормальной дисперсией. Поверхностная волна $HE_{11}^{(-)}$ на участке QA обладает сильной аномальной дисперсией. На участке BR эта волна имеет нормальную дисперсию, её дисперсионная характеристика терпит разрыв на частоте ферромагнитного резонанса. На дисперсионной характеристике поверхностной волны $HE_{12}^{(-)}$ можно выделить участки с аномальной дисперсией PB и EF и участок с нормальной дисперсией TA . Поверхностная волна $HE_{13}^{(-)}$ в дорезонансной области частот обладает нормальной дисперсией.

Заметим, что поскольку, как следует из рис. 3, постоянные распространения волн с левой и правой круговой поляризацией различны, то при распространении в ФВ со спирально проводящей поверхностью изначально определенным образом линейно поляризованной азимутально-несимметричной волны, образованной суперпозицией циркулярно-поляризованных волн с правым и левым вращением, будет происходить поворот плоскости поляризации относительно ее первоначального положения, то есть будет наблюдаться эффект Фарадея.

Таким образом, при отсутствии потерь в феррите дисперсионные характеристики как азимутально-симметричных, так и азимутально-несимметричных волн круглого открытого ФВ со спирально проводящей поверхностью терпят разрыв на частоте ферромагнитного резонанса. На дисперсионных характеристиках волн имеются неоднозначные участки, свидетельствующие о возможности существования в рассматриваемой структуре комплексных волн. Существуют частотные диапазоны, в которых в круглом открытом ФВ со спирально проводящей поверхностью могут распространяться только поверхностные азимутально-несимметричные волны с одной из двух возможных круговых поляризаций. Основной волной структуры является азимутально-симметричная волна HE_{01} , величина коэффициента замедления которой при $k_0 a > 0,15$ определяется геометрическим замедлением спирали.

Библиографический список

1. **Микаэлян, А.Л.** Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах / А.Л. Микаэлян. – М.: Госэнергоиздат, 1963.
2. **Силин, Р.А.** Замедляющие системы / Р.А. Силин, В.П. Сазонов. – М.: Сов. радио, 1966.
3. **Неганов, В.А.** Линейная макроскопическая электродинамика / В.А. Неганов, С.Б. Раевский, В.А. Яровой. – М.: Радио и связь, 2001. Т. 2.
4. **Сулл, Г.** Вопросы волноводного распространения электромагнитных волн в гиротропных средах / Г. Сулл, Л. Уокер. – М.: Иностранная литература, 1955.

5. **Виприцкий Д.Д., Назаров А.В.** // Антенны. 2004. Вып. 1 (80). С. 36.
6. **Раевский, А.С.** Неоднородные направляющие структуры, описываемые несамосопряженными операторами / А.С. Раевский, С.Б. Раевский. – М.: Радиотехника, 2004.

*Дата поступления
в редакцию 02.02.20210*

S.V. Ivanov, A.V. Nazarov, E.A. Popov

**BOUNDARY PROBLEM FOR AN CIRCULAR OPEN FERRITE WAVEGUIDE WITH
THE SPIRAL-CONDUCTING SURFACE**

An circular open longitudinally magnetized ferrite waveguide with the spiral-conducting surface is considered. The statement of the boundary problem is given, the procedure of the dispersion equation formation is described, the dispersion characteristics of some azimuthally symmetric and azimuthally asymmetric waves of the structure are presented.

Key words: ferrite, waveguide, spiral-conducting surface, boundary problem, dispersion.