МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ

УДК 533

А.А. Абрашкин[1], Е.М. Громов[2], В.В. Тютин[2]

КОРОТКИЕ ВЕКТОРНЫЕ СОЛИТОНЫ ОГИБАЮЩЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Институт прикладной физики РАН[1],
Государственный университет – Высшая школа экономики (Нижегородский филиал[2])

В рамках пары связанных нелинейных уравнений Шредингера третьего порядка в неоднородных средах с линейным профилем неоднородности найдено точное решение в виде короткого векторного солитона. Описаны траектории движения таких солитонов в зависимости от параметров среды. Полученное решение может быть в частных случаях сведено как к короткому скалярному солитону на линейном профиле неоднородности, так и к хорошо известному протяженному скалярному солитонному решению Чена.

Ключевые слова: дисперсия, нелинейность, неоднородность, солитон, траектория.

Распространение коротких векторных волновых пакетов $\vec{E}=\vec{e}_1 U(x,t)\exp(i\omega_u t-ik_0x)+\vec{e}_2 W(x,t)\exp(i\omega_w t-ik_0x)$, где $U(x,t)$ и $W(x,t)$ - компоненты волнового поля разной поляризации, в нелинейных диспергирующих неоднородных средах с линейной неоднородностью можно описывать системой связанных нелинейных уравнений Шредингера, учитывающих эффекты нелинейной дисперсии третьего порядка (СНУШ - 3):

$$2i\left[\frac{\partial U}{\partial t}+V_g^L\frac{\partial U}{\partial x}+\beta\left(|U|^2+\sigma_\beta|W|^2\right)\frac{\partial U}{\partial x}+\mu U\frac{\partial\left(|U|^2+\sigma_\mu|W|^2\right)}{\partial x}\right]+ \\ +q\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2\alpha\left(|U|^2+\sigma_\alpha|W|^2\right)U+i\gamma\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+pxU=0, \tag{1}$$

$$2i\left[\frac{\partial W}{\partial t}+V_g^L\frac{\partial W}{\partial x}+\beta\left(|W|^2+\sigma_\beta|U|^2\right)\frac{\partial W}{\partial x}+\mu W\frac{\partial\left(|W|^2+\sigma_\mu|U|^2\right)}{\partial x}\right]+ \\ +q\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+2\alpha\left(|W|^2+\sigma_\alpha|U|^2\right)WU+i\gamma\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+pxW=0. \tag{2}$$

Здесь частота ω и волновое число k связаны нелинейным дисперсионным соотношением $\omega = \omega\left(k, |U|^2, |W|^2\right)$; $V_g^L = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial \omega_{U,W}}{\partial k}$ - групповая скорость линейных волн; $q = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} = -\frac{\partial^2 \omega_{U,W}}{\partial k^2}$ и $\gamma = -\frac{1}{3}\frac{\partial^3 \omega}{\partial k^3} = -\frac{1}{3}\frac{\partial^3 \omega_{U,W}}{\partial k^3}$ - параметры линейной дисперсии второго и третьего порядков соответственно; $\alpha = \frac{\partial \omega}{\partial\left(|U|^2\right)} = \frac{\partial \omega}{\partial\left(|W|^2\right)}$ - параметр кубичной нелинейности; $\sigma_{\alpha\,\beta\,\mu}$ - коэффициенты нелинейной связи между компонентами разной поляризации; p - параметр неоднородности.

В отсутствие неоднородности ($p = 0$) система уравнений (1)-(2) получена, в рамках этой системы найдены солитонные решения в [1-2], показана устойчивость найденных солитонов.

Для скалярных коротких волновых пакетов (например, при отсутствии одной из компонент $W(x,t) = 0$ система (1)-(2) переходит к одному уравнению, описывающему динамику только $U(x,t)$ - компоненты) описана динамика солитона на линейной неоднородности [3], а также на параболическом ($p \sim x^2$) и периодическом ($p \sim \sin(\lambda x)$) профиле неоднородности [4].

В данной работе рассматривается движение коротких векторных солитонов огибающей на линейном профиле неоднородности.

Переходя в уравнениях (1)-(2) в движущуюся со скоростью $V(t)$ систему отсчета заменой координат $\xi = x - \int_0^t V(\tilde{t})\,d\tilde{t}$, $t' = t$ и представляя решение в виде фазомодулированных волновых пакетов

$$
\begin{aligned}
U(\xi t) &= u(\xi)\exp\left[i\left(\frac{1}{2}p\,\xi t + \Omega_u t + Q_u(t)\right)\right],\\
W(\xi t) &= w(\xi)\exp\left[i\left(\frac{1}{2}p\,\xi t + \Omega_w t + Q_w(t)\right)\right],
\end{aligned}
\tag{3}
$$

получим

$$
\begin{aligned}
&2i\left(-v_u\frac{d^2u}{d\xi^2} + \beta\left(|u|^2 + \sigma_\beta|w|^2\right)\frac{du}{d\xi} + \mu u\left(\frac{d\left(|u|^2 + \sigma_\mu|w|^2\right)}{d\xi}\right) + \frac{\gamma}{2}\frac{d^3u}{d\xi^3}\right) -\\
&-2\Omega_u u + \alpha u\left(|u|^2 + \sigma_\alpha|w|^2\right) + q\frac{d^2u}{d\xi^2} -\\
&-u\left\{2\frac{dQ_u(t)}{dt} + \left(V_g - V(t) - \delta_u\right)pt + \frac{q}{4}p^2t^2 - p\int_0^t V(\tilde{t})\,d\tilde{t} - \frac{\gamma}{8}p^3t^3\right\} -\\
&-i\frac{du}{d\xi}\left\{2\left(V(t) - V_g - v_u\right) - qpt + \frac{3}{4}\gamma p^2t^2\right\} - pt\left\{\frac{3}{2}\frac{\gamma d^2u}{d\xi^2} + \beta\left(|u|^2 + \sigma_\beta|w|^2\right)u + \delta_u u\right\} = 0,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$2i\left(-v_w\frac{d^2w}{d\xi^2}+\beta\left(|w|^2+\sigma_\beta|u|^2\right)\frac{dw}{d\xi}+\mu w\left(\frac{d\left(|w|^2+\sigma_\mu|u|^2\right)}{d\xi}\right)+\frac{\gamma d^3w}{2\,d\xi^3}\right)-$$

$$-2\Omega_w w+\alpha w\left(|w|^2+\sigma_\alpha|u|^2\right)+q\frac{d^2w}{d\xi^2}-$$

$$-w\left\{2\frac{dQ_w(t)}{dt}+\left(V_g-V(t)-\delta_w\right)pt+\frac{q}{4}p^2t^2-p\int_0^t V(\tilde t)\,d\tilde t-\frac{\gamma}{8}p^3t^3\right\}-$$

$$-i\frac{dw}{d\xi}\left\{2\left(V(t)-V_g-v_w\right)-qpt+\frac{3}{4}\gamma p^2t^2\right\}-pt\left\{\frac{3}{2}\frac{\gamma d^2w}{d\xi^2}+\beta\left(|w|^2+\sigma_\beta|u|^2\right)w+\delta_w w\right\}=0, \tag{5}$$

где $v_{u,w}$, $\delta_{u,w}$ - параметры, которые будут определены далее. Пусть решение удовлетворяет следующим соотношениям (при которых обращаются в ноль выражения в фигурных скобках в (4)-(5), т.е. указанные уравнения станут автономными и опишут стационарные волновые пакеты):

$$2\left(V(t)-V_g-v_{u,w}\right)-qpt+\frac{3}{4}\gamma p^2t^2=0, \tag{6}$$

$$2\frac{dQ_{u,w}(t)}{dt}+\left(V_g-V(t)-\delta_{u,w}\right)pt+\frac{q}{4}p^2t^2-p\int_0^t V(\tilde t)\,d\tilde t-\frac{\gamma}{8}p^3t^3=0, \tag{7}$$

$$\frac{3}{2}\frac{\gamma d^2u}{d\xi^2}+\beta\left(|u|^2+\sigma_\beta|w|^2\right)u+\delta_u u=0, \tag{8}$$

$$\frac{3}{2}\frac{\gamma d^2w}{d\xi^2}+\beta\left(|w|^2+\sigma_\beta|u|^2\right)w+\delta_w w=0. \tag{9}$$

Из (6) имеем уравнение, описывающее траектории движения

$$\frac{d^2V}{dt^2}=-\frac{3}{2}\gamma p^2=const. \tag{10}$$

Из (7) с учетом (6) имеем ранее неопределенную модуляцию фазы

$$Q_{u,w}(t)=\frac{1}{4}\left(V_g+2v_{u,w}+\delta_{u,w}\right)pt^2+\frac{q}{12}p^2t^3-\frac{3\gamma}{64}p^3t^4. \tag{11}$$

Тогда (4)-(5) сводятся к виду

$$2i\left(-v_u\frac{d^2u}{d\xi^2}+\beta\left(|u|^2+\sigma_\beta|w|^2\right)\frac{du}{d\xi}+\mu u\left(\frac{d\left(|u|^2+\sigma_\mu|w|^2\right)}{d\xi}\right)+\frac{\gamma d^3u}{2\,d\xi^3}\right)+$$

$$+\alpha u\left(|u|^2+\sigma_\alpha|w|^2\right)-2\Omega_u u+q\frac{d^2u}{d\xi^2}=0, \tag{12}$$

$$2i\left(-v_w\frac{d^2w}{d\xi^2}+\beta\left(|w|^2+\sigma_\beta|u|^2\right)\frac{dw}{d\xi}+\mu w\left(\frac{d\left(|w|^2+\sigma_\mu|u|^2\right)}{d\xi}\right)+\frac{\gamma}{2}\frac{d^3w}{d\xi^3}\right)+$$
$$+\alpha w\left(|w|^2+\sigma_\alpha|u|^2\right)-2\Omega_w w+q\frac{d^2w}{d\xi^2}=0. \tag{13}$$

Представим решение (12)-(13) и (8)-(9) в виде $u(\xi)=A(\xi)\exp\left[i\varphi_u(\xi)\right]$ и $w(\xi)=B(\xi)\exp\left[i\varphi_w(\xi)\right]$. Разделив (12) на действительную и мнимую части, получим

$$\gamma\frac{d^3A}{d\xi^3}+2(\beta+2\mu)A^2\frac{dA}{d\xi}+2(\beta\sigma_\beta+2\mu\sigma_\mu)B^2\frac{dA}{d\xi}+$$
$$+\left[2q\frac{d\varphi_u}{d\xi}-2v_u-3\gamma\left(\frac{d\varphi_u}{d\xi}\right)^2\right]\frac{dA}{d\xi}+\left(q-3\gamma\frac{d\varphi_u}{d\xi}\right)\frac{d^2\varphi_u}{d\xi^2}A=0, \tag{14}$$

$$\left(q-3\gamma\frac{d\varphi_u}{d\xi}\right)\frac{d^2A}{d\xi^2}+\alpha A\left(A^2+\sigma_\alpha B^2\right)-2\beta\left(A^2+\sigma_\beta B^2\right)\frac{d\varphi_u}{d\xi}-$$
$$-3\gamma\frac{d^2\varphi_u}{d\xi^2}\frac{dA}{d\xi}+\left[\gamma\left(\frac{d\varphi_u}{d\xi}\right)^3-q\left(\frac{d\varphi_u}{d\xi}\right)^2+2V\frac{d\varphi_u}{d\xi}-2\Omega_u-\gamma\frac{d^3\varphi_u}{d\xi^3}\right]A=0. \tag{15}$$

Аналогично, разделив (13) на действительную и мнимую части, получим

$$\gamma\frac{d^3B}{d\xi^3}+2(\beta+2\mu)B^2\frac{dB}{d\xi}+2(\beta\sigma_\beta+2\mu\sigma_\mu)A^2\frac{dB}{d\xi}+$$
$$+\left[2q\frac{d\varphi_w}{d\xi}-2v_w-3\gamma\left(\frac{d\varphi_w}{d\xi}\right)^2\right]\frac{dB}{d\xi}+\left(q-3\gamma\frac{d\varphi_w}{d\xi}\right)\frac{d^2\varphi_w}{d\xi^2}B=0, \tag{16}$$

$$\left(q-3\gamma\frac{d\varphi_w}{d\xi}\right)\frac{d^2B}{d\xi^2}+\alpha B\left(B^2+\sigma_\alpha A^2\right)-2\beta\left(B^2+\sigma_\beta A^2\right)\frac{d\varphi_w}{d\xi}-$$
$$-3\gamma\frac{d^2\varphi_w}{d\xi^2}\frac{dB}{d\xi}+\left[\gamma\left(\frac{d\varphi_w}{d\xi}\right)^3-q\left(\frac{d\varphi_w}{d\xi}\right)^2+2V\frac{d\varphi_w}{d\xi}-2\Omega_w-\gamma\frac{d^3\varphi_w}{d\xi^3}\right]B=0. \tag{17}$$

Действительная и мнимая части (8) примут вид

$$\frac{3\gamma}{2}\frac{d^2A}{d\xi^2}+\beta\left(A^2+\sigma_\beta B^2\right)A+\left[\delta_u-\frac{3\gamma}{2}\left(\frac{d\varphi_u}{d\xi}\right)^2\right]A=0, \tag{18}$$

$$\frac{d^2\varphi_u}{d\xi^2}A+2\frac{d\varphi_u}{d\xi}\frac{dA}{d\xi}=0. \tag{19}$$

Аналогично, действительная и мнимая части (9) примут вид

$$\frac{3\gamma}{2}\frac{d^2B}{d\xi^2}+\beta\; B^2+\sigma_\beta A^2\;\; B+\left[\;\delta_u-\frac{3\gamma}{2}\left(\frac{d\varphi_w}{d\xi}\right)^2\right]B=0, \tag{20}$$

$$\frac{d^2\varphi_w}{d\xi^2}B+2\frac{d\varphi_w}{d\xi}\frac{dB}{d\xi}=0. \tag{21}$$

Уравнения (14)-(21) могут совпадать при условии отсутствия фазовой модуляции $\frac{d\varphi_{u,w}}{d\xi}=0$, когда все слагаемые (21) обращаются в ноль. В этом случае из (14)-(20) получим:

$$\gamma\frac{d^3A}{d\xi^3}+2\;\;\beta+2\mu\;A^2\frac{dA}{d\xi}+2\;\;\beta\sigma_\beta+2\mu\sigma_\mu\;\;B^2\frac{dA}{d\xi}-2\nu_u\frac{dA}{d\xi}=0, \tag{22}$$

$$q\frac{d^2A}{d\xi^2}+\alpha A\;\;A^2+\sigma_\alpha B^2\;\;-2\Omega_u A=0, \tag{23}$$

$$\gamma\frac{d^3B}{d\xi^3}+2\;\;\beta+2\mu\;B^2\frac{dB}{d\xi}+2\;\;\beta\sigma_\beta+2\mu\sigma_\mu\;\;A^2\frac{dB}{d\xi}-2\nu_w\frac{dB}{d\xi}=0, \tag{24}$$

$$q\frac{d^2B}{d\xi^2}+\alpha B\;\;B^2+\sigma_\alpha A^2\;\;-2\Omega_w B=0, \tag{25}$$

$$\frac{3\gamma}{2}\frac{d^2A}{d\xi^2}+\beta\;A^2+\sigma_\beta B^2\;\;A+\;\delta_u A=0, \tag{26}$$

$$\frac{3\gamma}{2}\frac{d^2B}{d\xi^2}+\beta\;B^2+\sigma_\beta A^2\;\;B+\;\delta_w B=0. \tag{27}$$

Будем считать волновые поля разной поляризации пропорциональными ($B=\lambda A$). Тогда, интегрируя (22) и (24) по ξ в пределах $\xi\in\;\;\xi+\infty$ при условиях ограниченности волнового поля $A\;\;\xi\to+\infty\;\;\to 0$ и $A''\;\;\xi\to+\infty\;\;\to 0$, имеем:

$$\frac{d^2A}{d\xi^2}+\frac{2\;\;\beta\;1+\sigma_\beta\;\lambda^2\;\;+2\mu\;1+\sigma_\mu\;\lambda^2}{3\gamma}A^3-\frac{2\nu_u}{\gamma}A=0, \tag{28}$$

$$\frac{d^2A}{d\xi^2}+\frac{\alpha\;1+\sigma_\alpha\;\lambda^2}{q}A^3-\frac{2\Omega_u}{q}A=0, \tag{29}$$

$$\frac{d^2A}{d\xi^2}+\frac{2\beta(1+\sigma_\beta)\bar{\lambda}^2}{3\gamma}A^3+\frac{2\delta_u}{3\gamma}A=0, \tag{30}$$

$$\frac{d^2A}{d\xi^2}+\frac{2\left[\beta(1+\sigma_\beta)\bar{\lambda}^{-2}+2\mu(1+\sigma_\mu)\bar{\lambda}^{-2}\right]}{3\gamma}A^3-\frac{2\nu_w}{\gamma}A=0, \tag{31}$$

$$\frac{d^2A}{d\xi^2}+\frac{\alpha(1+\sigma_\alpha)\bar{\lambda}^{-2}}{q}A^3-\frac{2\Omega_w}{q}A=0, \tag{32}$$

$$\frac{d^2A}{d\xi^2}+\frac{2\beta(1+\sigma_\beta)\bar{\lambda}^{-2}}{3\gamma}A^3+\frac{2\delta_w}{3\gamma}A=0. \tag{33}$$

Для совместности системы уравнений (28)-(33) необходимо выполнение ряда условий:

$$\mu=0,\quad \nu_u=\nu_w=\nu,\quad \Omega_u=\Omega_w,\quad \delta_u=\delta_w=\delta, \tag{34}$$

$$\frac{2\beta(1+\sigma_\beta)\bar{\lambda}^2}{3\gamma}=\frac{2\beta(1+\sigma_\beta)\bar{\lambda}^{-2}}{3\gamma}=\frac{\alpha(1+\sigma_\alpha)\bar{\lambda}^2}{q}=\frac{\alpha(1+\sigma_\alpha)\bar{\lambda}^{-2}}{q}, \tag{35}$$

$$\frac{2\nu}{\gamma}=\frac{2\Omega}{q}=-\frac{2\delta}{3\gamma}. \tag{36}$$

Из (35) следует $\bar{\lambda}^2=1$, причем (35) примет вид:

$$\frac{2\beta(1+\sigma_\beta)}{3\gamma}=\frac{\alpha(1+\sigma_\alpha)}{q}. \tag{37}$$

В итоге определяются ранее неопределенные параметры δ, ν:

$$\nu=\gamma\frac{\Omega}{q},\qquad \delta=-3\gamma\frac{\Omega}{q}. \tag{38}$$

Окончательно система уравнений (28)-(33) с учетом ограничений (34)-(38) имеет точное решение в виде стационарной уединенной волны (солитона):

$$A(\xi,t)=\frac{A_0}{\cosh(\xi/\Delta)}\cdot\exp\left\{i\left[\frac{1}{4}A_0^2\alpha(1+\sigma_\alpha)t+\frac{1}{2}pt+Q(t)\right]\right\}. \tag{39}$$

Координата центра солитона

$$\xi=x-\left(V_g^L+\gamma\frac{A_0^2\,\alpha(1+\sigma_\alpha)}{4q}\right)t-\frac{1}{4}qpt^2-\frac{1}{8}\gamma p^2t^3.$$

Нелинейная фазовая модуляция

$$Q(t)=\frac{1}{4}\left(V_g-\gamma\frac{A_0^2\,\alpha(1+\sigma_\alpha)}{4q}\right)pt^2+\frac{q}{12}p^2t^3-\frac{3\gamma}{64}p^3t^4.$$

Скорость движения короткого векторного солитона в неоднородной среде

$V(t)=\dfrac{d\xi}{dt}=-\left(V_g^L+\gamma\dfrac{\alpha(1+\sigma_\alpha)}{4q}A_0^2\right)-\dfrac{1}{2}qpt-\dfrac{3}{8}\gamma p^2t^2$, или, с учетом (37),

$$V(t)=\frac{d\xi}{dt}=-\left(V_g^L+\beta(1+\sigma_\beta)A_0^2\right)-\frac{1}{2}qpt-\frac{3}{8}\gamma p^2t^2.$$

При использовании замены $\tau=pt$ это выражение принимает вид

$V(\tau)=V(0)-\dfrac{1}{2}q\tau-\dfrac{3}{8}\gamma\tau^2$, где начальная скорость солитона определяется его амплитудой и нелинейными параметрами среды $V(0)=-\left(V_g^L+\beta(1+\sigma_\beta)A_0^2\right)$.

Полученное векторное солитонное решение (39) в частном случае при $\sigma_{\alpha,\beta}=0$ сводится к ранее найденному решению в виде коротких скалярных солитонов [3], которое при отсутствие дисперсии 3-го порядка ($\gamma=0$) сводится к хорошо известному солитонному решению Чена [5].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 10-02-00129).

Библиографический список

1. **Воронцов, Д.Е.** Короткие векторные солитоны огибающей / Д.Е. Воронцов [и др.] // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45. № 7. С. 614–624.
2. Short vector soliton / E.M. Gromov [at al.] // Physics Letters A. 2001. V. 287. issue 3-4. P. 233–239.
3. **Gromov, E.M.** Propagation of short nonlinear wave packets and solitons in smooshly inhomogeneous media // Physics Letters A. 1997. V. 227. P. 67–71.
4. **Gromov, E.M.** Short intense wave packets in smoothly inhomogeneous media / E.M. Gromov, V.V. Tyutin, D.E. Vorontzov // Physics Letters A. 1999. V. 257. P. 182–188.
5. **Chen, H.H.** Nonlinear wave and soliton propagation in media with arbitrary inhomogeneities / H.H. Chen, C.S. Liu // Phys. Fluids. 1978. V.21. P. 377.

Дата поступления
в редакцию 26.01.20210

A.A. Abrashkin, E.M. Gromov, V.V. Tyutin

SHORT VECTOR ENVELOPE SOLITONS IN INHOMOGENEOUS MEDIUM

Propagation of the short vector envelope solitons in a inhomogeneous medium with linear potential in coupled third – order nonlinear Shrodinger equations frame is considered. Explicit vector soliton solution is obtained. The explicit solution for the solitons trajectories is studied. In particular cases this solitons solution can be reduced as to the short scalar soliton solution on linear inhomogeneity profile, as to well – known Chen soliton solution.

Key words: dispersion, nonlinearity, inhomogeneity, soliton, trajectory.