

УДК 519.6

Л.Ю. Катаева, И.Е. Белоцерковская

## ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НИЗОВОГО ПОЖАРА С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ УГЛА НАКЛОНА ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Целью данной работы является получение аналитического и численного решения математической модели низового пожара с учетом влияния угла наклона подстилающей поверхности. Результаты, полученные для ровной поверхности, согласуются с результатами, полученными А.М. Гришиным, при этом результаты с равномерно наклоненной поверхностью согласуются как с известными теоретическими [2], так и с известными экспериментальными [3] данными.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, лесные пожары.

Физически задача ставится следующим образом: известны скорость ветра и температура окружающей среды, геометрические, структурные и реакционные свойства полога леса, температура и размеры очага воспламенения, требуется определить зависимость скорости распространения лесного пожара от угла наклона. Для простоты анализа делаются следующие допущения:

1. Среда является серой и пятифазной, включающей в себя сухое органическое вещество, воду в жидко-капельном состоянии, коксик, золу и газовую фазу.
2. Газовая фаза состоит из кислорода, горючих компонентов продуктов пиролиза, инертных компонентов воздуха, а также водяного пара и инертных продуктов горения.
3. Градиент температуры поперек полога леса мал по сравнению с градиентом температуры в продольном направлении.

Математически эта задача с учетом представленных ранее допущений сводится к решению следующей системы дифференциальных уравнений, подробно изложенных в работе [1]. Используя систему обыкновенных дифференциальных уравнений [1], повернем ось  $Ox$

на угол  $\beta$ :  $\cos \beta = \frac{x}{x^1} \Rightarrow x = x^1 \cos \beta$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial (x^1 \cos \beta)} = \frac{1}{\cos \beta} \frac{\partial}{\partial x^1}$  и введем следующие обозначения:

$$u_{\infty}^1 = \frac{u}{\cos \beta}; \quad D_T^1 = \frac{D_T}{\cos^2 \beta}; \quad \lambda_T^1 = \frac{\lambda_T}{\cos^2 \beta}. \quad (1)$$

Переходя к декартовой координате в подвижной системе отсчета, связанной с положением максимального профиля температуры  $\xi = x^1 - \omega t$ , предположим, что весь фронт движется с одной и той же скоростью  $\omega$ , получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \rho_1 \omega \frac{d\varphi_1}{d\xi} &= R_1; \quad R_1 = k_{01} \rho_1 \varphi_1 e^{-\frac{E_1}{RT}}; \quad \rho_2 \omega \frac{d\varphi_2}{d\xi} = R_2; \quad R_2 = k_{02} \rho_2 \varphi_2 e^{-\frac{E_2}{RT}}; \\ \rho_3 \omega \frac{d\varphi_3}{d\xi} &= -\alpha_c R_1 + \frac{M_c}{M_1} R_3; \quad R_3 = k_{03} s_{\sigma} \rho_5 c_1 \varphi_3 e^{-\frac{E_3}{RT}}; \quad \frac{d\varphi_4}{d\xi} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( \rho_5 D_T^1 \frac{\partial c_{\alpha}}{\partial \xi} \right) - \rho_5 (u_{\infty}^1 - \omega) \frac{dc_{\alpha}}{d\xi} + R_{5\alpha} - c_{\alpha} Q = \frac{\alpha}{c_{p\alpha}} (c_{\alpha} - c_{\alpha\infty}), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left( \lambda'_T \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) - [\rho_5 (u'_\infty - \omega) c_{p5} - \omega \sum_{i=1}^4 \rho_i \varphi_i c_{pi}] \frac{dT}{d\xi} - \frac{\alpha}{h} (T - T_\infty) + \\ & + q_3 R_3 - q_2 R_2 + q_5 R_5 = 0; \\ & R_{51} = -R_3 - \frac{M_1}{2M_2} R_5; \quad R_{52} = (1 - \alpha_c) v_T R_1 - R_5; \quad R_{53} = 0; \\ & R_5 = M_2 k_{05} \left( \frac{c_1 M}{M_1} \right)^{0,25} \left( \frac{c_2 M}{M_2} \right) T^{-2,25} e^{-\frac{E_5}{RT}}; \\ & \rho_5 = \frac{P_\infty}{RT_\infty \sum_{i=1}^4 \frac{c_\alpha}{M_\alpha}}; \quad \sum_{i=1}^4 c_\alpha = 1; \quad Q = (1 - \alpha_c) R_1 + R_2 + \frac{M_c}{M_1} R_3. \end{aligned} \quad (4)$$

К системе (2)-(4) граничные условия:

$$\xi = \pm\infty: \quad T = T_\infty, \quad c_\alpha = c_{\alpha\infty}, \quad \varphi_i = \varphi_{i\infty}, \quad \left. \frac{dc_\alpha}{d\xi} \right|_{\xi \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad \left. \frac{dT}{d\xi} \right|_{\xi \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad \left. \frac{d\varphi_i}{d\xi} \right|_{\xi = \pm\infty} = 0. \quad (5)$$

Здесь  $t$  – время;  $\beta$  – угол наклона;  $x'$  – декартова координата в системе координат, связанной поворотом оси  $Ox$  на угол  $\beta$  (ось  $x$  направлена в сторону невозмущенной скорости ветра, параллельной горизонтальной подстилающей поверхности);  $u = 0.2$  – равновесная скорость ветра,  $u'_\infty$  – компонента скорости в выбранной системе координат (вычисляется по формуле (1));  $\varphi_1 = \frac{\rho}{\rho_1}$  – объемная доля газовой фазы ( $\rho = 0.3$  – плотность слоя,  $\rho_1 = 360$  – плотность древесины);  $\varphi_2 = \frac{\rho(1-\zeta)W}{\rho_2}$  – объемная доля горючим компонентам продуктов пиролиза ( $\rho_2 = 1000$  – плотность древесины;  $\zeta = 0.3$  – процентное содержание золы в лесных горючих материалах (ЛГМ),  $W = 0.35$  – влагосодержание ЛГМ);  $\varphi_3 = 0.01$  – объемная доля инертных компонентов воздуха;  $\varphi_4 = 0$  – объемная доля водяного пара и инертных продуктов реакции окисления, пиролиза и горения кокса;  $c_1 = 0.23$  – массовая концентрация газовой компоненты кислорода в окружающей среде;  $c_2 = 0$  – массовая концентрация газовой компоненты горючих продуктов пиролиза в окружающей среде;  $c_3 = 0.769$  – массовая концентрация инертных компонентов воздуха в окружающей среде;  $\rho_3 = 200$  – плотность конденсированных продуктов пиролиза;  $\rho_4 = 200$  – плотность минеральной части;  $\rho_5$  – плотность газовой фазы (вычисляется по формуле (5),  $p_\infty = 1.01 * 10^5$  – давление,  $T_\infty = 300$  – температура окружающей среды вдали от фронта пожара);  $Q$  – массовая скорость образования газовой фазы;  $R_{5\alpha}$  – массовые скорости образования компонентов газовой фазы;  $R_1, R_2, R_3, R_5$  – массовые скорости реакции пиролиза сухого органического вещества ЛГМ, испарения воды из ЛГМ, горения коксового остатка и газообразных горючих продуктов пиролиза соответственно;  $M_1 = 32$  – молекулярная масса газовой компоненты кислорода,  $M_2 = 28$  – молекулярная масса газовой компоненты горючих компонентов пиролиза,  $M_3 = 28$  – молекулярная масса газовой компоненты инертных компонентов воздуха;  $M_c = 12$ ,  $M$  – молекулярные массы углерода и всей смеси газов соответственно;  $\lambda'_T$  – коэффициент турбулентной теплопроводности (вычисляется по формуле (1),  $\lambda_T = \mu_T c_{p5}$  ( $\mu_T = 1$  – коэффициент динамической вязкости,

$c_{\rho 5} = 1229.45$  – теплоемкость газовой фазы),  $D_T$  – коэффициент диффузии (вычисляется по формуле (1));  $c_{\rho 1} = 700$  – теплоемкость фазы сухого органического вещества;  $c_{\rho 2} = 4180$  – теплоемкость фазы связанной воды;  $c_{\rho 3} = 900$  – теплоемкость фазы конденсированных продуктов пиролиза угля;  $c_{\rho 4} = 1000$  – теплоемкость фазы минеральной части золы;  $T$  – температура газовой фазы;  $\alpha_T = 1250$  – коэффициент внутреннего теплообмена;  $R = 8.314$  – универсальная газовая постоянная;  $q_2 = 3 \cdot 10^6$ ,  $q_3 = 12 \cdot 10^6$  и  $q_5 = 1 \cdot 10^7$  – тепловые эффекты процессов испарения, горения конденсированного горючего и газообразного горючего продукта пиролиза соответственно;  $k_{01}$ ,  $k_{02}$ ,  $k_{03}$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  – предэкспоненты реакций пиролиза, процессов испарения и горения конденсированного продукта пиролиза (кокшика);  $s_\sigma$  – удельная поверхность конденсированного продукта пиролиза;  $\alpha_c = 0.3$ ,  $v_T = 0.8$  – коксовое число ЛГМ и доля горючего газа в газообразных продуктах пиролиза соответственно;  $h = 0.2$  – высота слоя горючих материалов; индексы  $\infty$ ,  $-$  и  $+$  относятся к параметрам невозмущенного потока, параметрам на верхней и нижней границах полога леса.

Для выполнения условий (5) при

$$T_\infty < T < T_* : R_i = 0; R_{5\alpha} = 0; R_5 = 0; \alpha = 1, 2; i = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Проанализируем поведения решений уравнений для температуры  $T$  и концентрации компонентов  $c_\alpha$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . Будем искать решение в виде:

$$T = T_\infty + T', \quad c_\alpha = c_{\alpha\infty} + c'_\alpha, \quad \varphi_i = \varphi_{i\infty} + \varphi'_i, \quad (7)$$

где знаком “штрих” обозначена малая величина возмущения, характеризуемая отклонением параметров от равновесных значений. Подставляя (7) в (3), (4) и отбрасывая малые более высокого порядка, получаем:

$$\rho_{5\infty} D_T^1 \frac{d^2 c_\alpha^1}{d\xi^2} - \rho_{5\infty} (u^1 - \omega) \frac{dc_\alpha^1}{d\xi} - \frac{\alpha}{c_{p\alpha}} c_\alpha^1 = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (8)$$

$$\lambda_T^1 \frac{d^2 T^1}{d\xi^2} - [\rho_{5\infty} (u_\infty^1 - \omega) c_{p5} - \omega \sum_{i=1}^4 \rho_i \varphi_i c_{\rho i}] \frac{dT^1}{d\xi} - \frac{\alpha}{h} T^1 = 0. \quad (9)$$

Решением уравнения (9), (8) при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  будет:

$$T^1 = a_{1,2} e^{\lambda_{1,2}\xi}, \quad c_\alpha^1 = b_{1,2\alpha} e^{\mu_{1,2\alpha}\xi}, \quad (10)$$

где  $\lambda_{1,2}$ ,  $\mu_{1,2\alpha}$  – корни соответствующих характеристических уравнений;  $a_{1,2}$ ,  $b_{1,2\alpha}$  – произвольные постоянные.

Для диффузного режима горения с хорошей степенью точности можно полагать

$$T(0) = T_0, c_1|_{\xi=0} = c_2|_{\xi=0} = 0, \left. \frac{dc_1}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{dc_2}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0, \varphi_1(0) = 0, \varphi_2(0) = 0, \quad (11)$$

где  $T_0$  – максимальная температура во фронте лесного пожара;  $T_\infty$  – температура удаленная от фронта пожара.

Пусть  $\rho_5(u_\infty^1 - \omega) = \rho_{5\infty}(u_\infty^1 - \omega) = \text{const}$  – приближенно выражает закон сохранения массы при лесном пожаре. При  $0 < \xi < \infty$  профиль температуры определяется формулами (7), (10), где  $a_1 = T_0 - T_\infty$  – постоянная, она определяется из условий (11).

Интегрируя уравнение (4) по  $0 < \xi < \infty$  и используя уравнения (2) и (3) для вычисления интегралов, введя обозначения

$$\bar{q} = \left\{ - \left[ \frac{q_3 M_1 \alpha_c}{M_c} + q_5 (1 - \alpha_c) v_T \right] c_1 \varphi_{1H} + q_2 \rho_2 \varphi_{2H} \right\} (\rho_5 c_{p5} T_\infty)^{-1}; \quad \Theta_0 = \frac{T_\infty}{T_0},$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{u_\infty}, \quad \pi = \frac{\sum_{i=1}^4 \rho_i \Phi_i c_{\rho i}}{\rho_{5\infty} c_{\rho 5}},$$

получим

$$\bar{q}\bar{\omega} + [1 - \bar{\omega}(1 + \pi)](\Theta_0 - 1) = \frac{2e(\Theta_0 - 1)}{\sqrt{[1 - \bar{\omega}(1 + \pi)]^2 + 4e - 1 + \bar{\omega}(1 + \pi)}}. \quad (12)$$

Решая (12) относительно  $\bar{\omega}$ , получаем

$$\omega(\beta) = \frac{u_\infty \left( \bar{q} + \sqrt{\bar{q}^2 - 4e(\Theta_0 - 1) \left( \bar{q}(1 + \pi) - \frac{\bar{q}^2}{(\Theta_0 - 1)} \right)} \right)}{2 \cos(\beta) \left( \bar{q}(1 + \pi) - \frac{\bar{q}^2}{(\Theta_0 - 1)} \right)} \quad (13)$$

На рис. 1 представлена зависимость скорости распространения пожара ( $\omega(\beta)$  измеряется в м/с) от угла наклона ( $\beta$  измеряется в радианах), видно, что с ростом угла наклона скорость распространения пожара также возрастает.

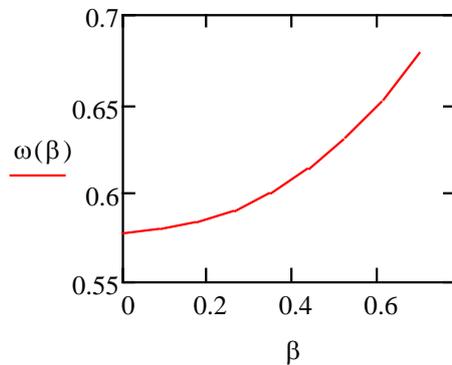


Рис. 1. Зависимость скорости распространения пожара от угла наклона

Как следует из анализа рис. 2 и рис. 3, численное ( $v$ -скорость распространения пожара) и аналитическое ( $\omega(\beta)$ -скорость распространения пожара) решения хорошо согласуется при различных значениях  $\Theta_0$ , равное 0,6 и 0,9 соответственно. Здесь под численным решением подразумевается решение задачи (1)–(5).

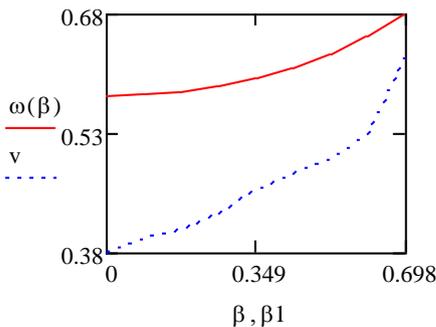


Рис. 2. Численное и аналитическое решения зависимости скорости распространения пожара от угла наклона

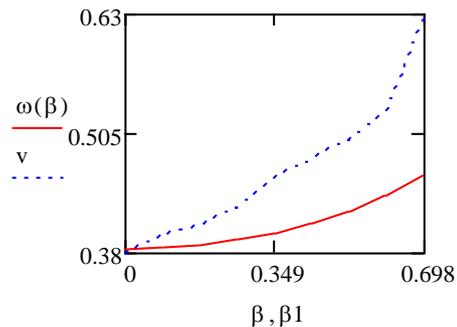


Рис. 3. Численное и аналитическое решения зависимости скорости распространения пожара от угла наклона

В ходе выполнения поставленной задачи была разработана схема для учета влияния угла наклона подстилающей поверхности (рельеф местности). Численное и аналитическое решения хорошо согласуются. Результаты, полученные для ровной поверхности, согласуются с результатами, полученными А.М. Гришиным. А результаты с равномерно наклоненной поверхностью согласуются как с известными теоретическими [2] так и с известными экспериментальными [3]. На основе результатов, полученных для равномерно наклоненной поверхности, производились исследования по учету влияния рельефа местности на скорость распространения лесного низового пожара и определены возможные сценарии изменения скорости распространения пожара в зависимости от угла наклона. Из рисунков видно, что при различных значениях параметров аналитическое решение может давать как оценку сверху, так и оценку снизу.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых – докторов наук (МД-99.2010.5) и гранта РФФИ 10-05-00199-а

#### Библиографический список

1. **Гришин, А.М.** Математическое моделирование лесных пожаров и новые способы борьбы с ними / А.М. Гришин. – Новосибирск: Наука, 1992.
2. **Бурасов, Д.М.** Математическое моделирование низовых лесных и степных пожаров / Д.М. Бурасов, А.М. Гришин. – Кемерово: Практика, 2006.
3. **Butler, B.W.** Influence of Slope on Fire Spread Rate/ B.W. Butler, W. R. Anderson, E. A. Catchpole. The Fire Environment—Innovations, Management and Policy. P.75-85.

*Дата поступления  
в редакцию 02.04.2010*

**L. Kataeva, I. Belotserkovskaya**

#### **THE NUMERICAL AND ANALYTICAL DECISION MATHEMATICAL MODEL FOR GROUND FIRE INCLUDING SLOPE ANGLE INFLUENCE.**

This article deals with analytical and numeric solution of mathematical model for ground forest fire including slope angle influence. The results for flat surface conforming with Grishin's model, and for monotonic surface conforming with known theoretical [2] and experimental [3] data.

*Key words:* mathematical modelling, forest fires