

УДК 535.8+621.373.826

А.А. Денисенко¹, А.В. Назаров², Е.А. Попов³**БЫСТРЫЕ ВОЛНЫ КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА С ДВУМЯ СЕКТОРИАЛЬНЫМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ВСТАВКАМИ**

Горьковский региональный центр связи нижегородской дирекции связи ОАО «РЖД»¹,
 Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева²,
 ООО «Теком»³

Рассмотрен круглый волновод с двумя симметрично расположенными диэлектрическими вставками в виде частично заполненных секторов. Приведена постановка краевой задачи на основе модифицированного метода Галёркина, описана процедура составления дисперсионного уравнения, представлены дисперсионные и энергетические характеристики нескольких быстрых волн структуры.

Ключевые слова: быстрая волна, метод Галёркина, уравнения Максвелла, дисперсионная характеристика, ряд Фурье.

Рассмотрим круглый волновод радиусом a с двумя симметрично расположенными диэлектрическими вставками в виде частично заполненных секторов (рис. 1). Диэлектрическая проницаемость заполнения волновода при этом будет являться функцией радиальной и азимутальной координат цилиндрической системы: $\varepsilon = \varepsilon(r, \varphi)$.

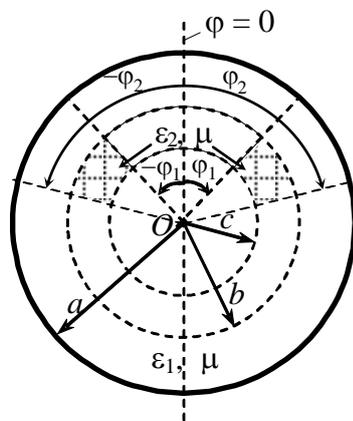


Рис. 1. Круглый волновод с двумя симметрично расположенными диэлектрическими вставками в виде частично заполненных секторов

Диэлектрическая проницаемость среды, находящейся за пределами вставок, равна ε_1 . Магнитная проницаемость всюду одинакова: $\mu = \mu_0$. Внутренний и внешний радиусы диэлектрических вставок с проницаемостью ε_2 равны c и b соответственно. Расстоянию между секторами соответствует угол $2\varphi_1$. Каждому сектору соответствует угол, равный $(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Представим функцию $\varepsilon = \varepsilon(r, \varphi)$ в виде

$$\varepsilon(r, \varphi) = \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)P(r)\Phi(\varphi),$$

$$\text{где } P(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < r < c \text{ и } b < r < a; \\ 1 & \text{при } c < r < b, \end{cases}$$

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < \varphi < \varphi_1, \varphi_2 < \varphi < (2\pi - \varphi_2) \text{ и } (2\pi - \varphi_1) < \varphi < 2\pi; \\ 1 & \text{при } \varphi_1 < \varphi < \varphi_2 \text{ и } (2\pi - \varphi_2) < \varphi < (2\pi - \varphi_1). \end{cases}$$

Графики функций $P(r)$ и $\Phi(\varphi)$ приведены на рис. 2 и рис. 3 соответственно.

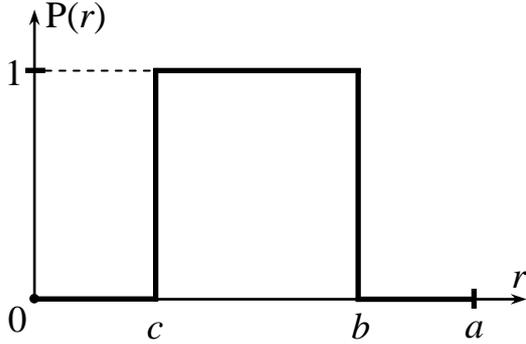


Рис. 2. Вид функции $P(r)$

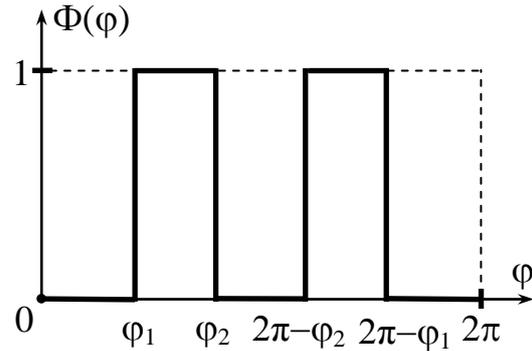


Рис. 3. Вид функции $\Phi(\varphi)$

Электродинамический анализ рассматриваемой направляющей структуры проведем, заменив ее круглым волноводом с градиентным диэлектрическим заполнением, для которого функция $\varepsilon = \varepsilon(r, \varphi)$ является непрерывной. Для этого разложим функции $P(r)$ и $\Phi(\varphi)$ в ряды Фурье:

$$P(r) = \frac{b-c}{a} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\pi j} \left[\sin\left(\pi j \frac{b}{a}\right) - \sin\left(\pi j \frac{c}{a}\right) \right] \cos\left(\pi j \frac{r}{a}\right); \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) = & \frac{\pi - \varphi_1}{\pi} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\pi j} \left[\sin\left(j \frac{2\pi - \varphi_1}{2}\right) - \sin\left(j \frac{\varphi_1}{2}\right) \right] \cos\left(j \frac{\varphi}{2}\right) - \\ & - \frac{\pi - \varphi_2}{\pi} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\pi j} \left[\sin\left(j \frac{2\pi - \varphi_2}{2}\right) - \sin\left(j \frac{\varphi_2}{2}\right) \right] \cos\left(j \frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$

Задачу о распространении электромагнитных волн вдоль круглого волновода с градиентным диэлектрическим заполнением решим модифицированным методом Галёркина (ММГ) [1].

Пусть в структуре, изображенной на рис. 1, в положительном направлении оси Oz распространяется монохроматическая электромагнитная волна частоты ω , напряженности электрического и магнитного полей которой имеют зависимость от времени t и координаты z вида $\exp[i(\omega t - \beta z)]$, где β – продольное волновое число. Тогда из уравнений Максвелла, обобщающих закон электромагнитной индукции и опытные факты происхождения вихревого магнитного поля, получаем следующие соотношения, связывающие поперечные составляющие напряженностей электрического и магнитного полей с их продольными составляющими:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{i\beta}{\varepsilon\mu\omega^2 - \beta^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{i\omega\mu}{\varepsilon\mu\omega^2 - \beta^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}; \\ E_\varphi &= -\frac{i\beta}{\varepsilon\mu\omega^2 - \beta^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + \frac{i\omega\mu}{\varepsilon\mu\omega^2 - \beta^2} \frac{\partial H_z}{\partial r}; \\ H_r &= \frac{i\omega\varepsilon}{\varepsilon\mu\omega^2 - \beta^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{i\beta}{\varepsilon\mu\omega^2 - \beta^2} \frac{\partial H_z}{\partial r}; \\ H_\varphi &= -\frac{i\omega\varepsilon}{\varepsilon\mu\omega^2 - \beta^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{i\beta}{\varepsilon\mu\omega^2 - \beta^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (2)$$

Полагая, что в плоскости $\varphi = 0$ находится магнитная стенка (рассматриваемая структу-

ра симметрична относительно плоскости $\varphi = 0$), продольные составляющие электрического и магнитного полей представляем в виде:

$$E_z = \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M A_{nm} J_n(\alpha_{nm} r) \cos(n\varphi) e^{-i\beta z}; \quad (3)$$

$$H_z = \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^K B_{nk} J_n(\kappa_{nk} r) \sin(n\varphi) e^{-i\beta z}, \quad (4)$$

где A_{nm} и B_{nk} – неизвестные амплитудные коэффициенты, α_{nm} и κ_{nk} находятся из уравнений $J_n(\alpha_{nm} a) = 0$ и $J'_n(\kappa_{nk} a) = 0$ соответственно.

Для поперечных составляющих полей получаем:

$$\begin{aligned} E_r &= -i \left\{ \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M A_{nm} \frac{\beta}{\varepsilon(r, \varphi) \mu \omega^2 - \beta^2} \alpha_{nm} J'_n(\alpha_{nm} r) \cos(n\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^K B_{nk} \frac{\omega \mu}{\varepsilon(r, \varphi) \mu \omega^2 - \beta^2} \frac{n}{r} J_n(\kappa_{nk} r) \cos(n\varphi) \right\} e^{-i\beta z}; \\ E_\varphi &= i \left\{ \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M A_{nm} \frac{\beta}{\varepsilon(r, \varphi) \mu \omega^2 - \beta^2} \frac{n}{r} J_n(\alpha_{nm} r) \sin(n\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^K B_{nk} \frac{\omega \mu}{\varepsilon(r, \varphi) \mu \omega^2 - \beta^2} \kappa_{nk} J'_n(\kappa_{nk} r) \sin(n\varphi) \right\} e^{-i\beta z}; \\ H_r &= -i \left\{ \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M A_{nm} \frac{\omega \varepsilon(r, \varphi)}{\varepsilon(r, \varphi) \mu \omega^2 - \beta^2} \frac{n}{r} J_n(\alpha_{nm} r) \sin(n\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^K B_{nk} \frac{\beta}{\varepsilon(r, \varphi) \mu \omega^2 - \beta^2} \kappa_{nk} J'_n(\kappa_{nk} r) \sin(n\varphi) \right\} e^{-i\beta z}; \\ H_\varphi &= -i \left\{ \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M A_{nm} \frac{\omega \varepsilon(r, \varphi)}{\varepsilon(r, \varphi) \mu \omega^2 - \beta^2} \alpha_{nm} J'_n(\alpha_{nm} r) \cos(n\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^K B_{nk} \frac{\beta}{\varepsilon(r, \varphi) \mu \omega^2 - \beta^2} \frac{n}{r} J_n(\kappa_{nk} r) \cos(n\varphi) \right\} e^{-i\beta z}, \end{aligned}$$

где штрих означает производную функции Бесселя по всему аргументу.

Подставив выражения для составляющих электрического и магнитного полей в неиспользованные ранее соотношения, следующие из уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} &= -i \omega \mu H_z; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} &= i \omega \varepsilon E_z, \end{aligned}$$

приходим к системе функциональных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M A_{nm} f_{nm}^{(1)}(r, \varphi) + \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^K B_{nk} f_{nk}^{(2)}(r, \varphi) = 0; \\ \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M A_{nm} f_{nm}^{(3)}(r, \varphi) + \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^K B_{nk} f_{nk}^{(4)}(r, \varphi) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{где } f_{nm}^{(1)}(r, \varphi) = - \frac{\beta \mu \omega^2}{[\varepsilon(r, \varphi) \mu \omega^2 - \beta^2]^2} \left\{ \frac{n}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} J_n(\alpha_{nm} r) \sin(n\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \alpha_{nm} J'_n(\alpha_{nm} r) \cos(n\varphi) \right\},$$

$$\begin{aligned}
 f_{nk}^{(2)}(r, \varphi) &= -\frac{\omega\mu}{\varepsilon(r, \varphi)\mu\omega^2 - \beta^2} \left[\kappa_{nk}^2 J_n(\kappa_{nk}r) + \frac{\mu\omega^2}{\varepsilon(r, \varphi)\mu\omega^2 - \beta^2} \frac{\partial\varepsilon}{\partial r} \kappa_{nk} J_n'(\kappa_{nk}r) \right] \sin(n\varphi) + \\
 &+ \omega\mu J_n(\kappa_{nk}r) \sin(n\varphi) - \frac{\mu^2\omega^3}{[\varepsilon(r, \varphi)\mu\omega^2 - \beta^2]^2} \frac{n}{r^2} \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi} J_n(\kappa_{nk}r) \cos(n\varphi); \\
 f_{nm}^{(3)}(r, \varphi) &= -\frac{\omega}{\varepsilon(r, \varphi)\mu\omega^2 - \beta^2} \left[\varepsilon(r, \varphi)\alpha_{nm}^2 J_n(\alpha_{nm}r) + \frac{\beta^2}{\varepsilon(r, \varphi)\mu\omega^2 - \beta^2} \frac{\partial\varepsilon}{\partial r} \alpha_{nm} J_n'(\alpha_{nm}r) \right] \cos(n\varphi) + \\
 &+ \omega\varepsilon(r, \varphi) J_n(\alpha_{nm}r) \cos(n\varphi) + \frac{\omega\beta^2}{[\varepsilon(r, \varphi)\mu\omega^2 - \beta^2]^2} \frac{n}{r^2} \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi} J_n(\alpha_{nm}r) \sin(n\varphi); \\
 f_{nk}^{(4)}(r, \varphi) &= \frac{\beta\mu\omega^2}{[\varepsilon(r, \varphi)\mu\omega^2 - \beta^2]^2} \left\{ -\frac{n}{r} \frac{\partial\varepsilon}{\partial r} J_n(\kappa_{nk}r) \cos(n\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi} \kappa_{nk} J_n'(\kappa_{nk}r) \sin(n\varphi) \right\}; \\
 \frac{\partial\varepsilon}{\partial r} &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\Phi(\varphi) \frac{dP}{dr}; \\
 \frac{dP}{dr} &= -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{a} \left[\sin\left(\pi j \frac{b}{a}\right) - \sin\left(\pi j \frac{c}{a}\right) \right] \cos\left(\pi j \frac{r}{a}\right); \\
 \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi} &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)P(r) \frac{d\Phi}{d\varphi}; \\
 \frac{d\Phi}{d\varphi} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[\sin\left(j \frac{2\pi - \varphi_2}{2}\right) - \sin\left(j \frac{\varphi_2}{2}\right) \right] \sin\left(j \frac{\varphi}{2}\right) - \\
 &- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[\sin\left(j \frac{2\pi - \varphi_1}{2}\right) - \sin\left(j \frac{\varphi_1}{2}\right) \right] \sin\left(j \frac{\varphi}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Умножаем первое уравнение системы (5) на $rJ_{\bar{n}}(\kappa_{\bar{n}\bar{k}}r)\sin(\bar{n}\varphi)$, второе уравнение – на $rJ_{\bar{n}}(\alpha_{\bar{n}\bar{m}}r)\cos(\bar{n}\varphi)$, где $\kappa_{\bar{n}\bar{k}}$ и $\alpha_{\bar{n}\bar{m}}$ находятся из уравнений $J_{\bar{n}}'(\kappa_{\bar{n}\bar{k}}a) = 0$ и $J_{\bar{n}}(\alpha_{\bar{n}\bar{m}}a) = 0$ соответственно; $\bar{n} = 0, 1, 2, \dots, N$; $\bar{k} = 1, 2, 3, \dots, K$; $\bar{m} = 1, 2, 3, \dots, M$, и интегрируем полученные соотношения по $r \in [0; a]$ и $\varphi \in [0; 2\pi]$. В результате получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных амплитудных коэффициентов A_{nm} и B_{nk} :

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M a_{nm}^{\bar{n}\bar{k}} A_{nm} + \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^K b_{nk}^{\bar{n}\bar{k}} B_{nk} = 0; \\ \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M c_{nm}^{\bar{n}\bar{m}} A_{nm} + \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^K d_{nk}^{\bar{n}\bar{m}} B_{nk} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где $a_{nm}^{\bar{n}\bar{k}} = \int_0^a \int_0^{2\pi} r f_{nm}^{(1)}(r, \varphi) J_{\bar{n}}(\kappa_{\bar{n}\bar{k}}r) \sin(\bar{n}\varphi) dr d\varphi$, $b_{nk}^{\bar{n}\bar{k}} = \int_0^a \int_0^{2\pi} r f_{nk}^{(2)}(r, \varphi) J_{\bar{n}}(\kappa_{\bar{n}\bar{k}}r) \sin(\bar{n}\varphi) dr d\varphi$;

$c_{nm}^{\bar{n}\bar{m}} = \int_0^a \int_0^{2\pi} r f_{nm}^{(3)}(r, \varphi) J_{\bar{n}}(\alpha_{\bar{n}\bar{m}}r) \cos(\bar{n}\varphi) dr d\varphi$, $d_{nk}^{\bar{n}\bar{m}} = \int_0^a \int_0^{2\pi} r f_{nk}^{(4)}(r, \varphi) J_{\bar{n}}(\alpha_{\bar{n}\bar{m}}r) \cos(\bar{n}\varphi) dr d\varphi$.

Условие нетривиальности решений СЛАУ (6) дает дисперсионное уравнение (ДУ) волн круглого волновода с двумя симметрично расположенными диэлектрическими вставками в виде частично заполненных секторов:

$$\det U = 0, \quad (7)$$

где U – матрица СЛАУ (6).

Для проверки корректности работы программы поиска корней ДУ (7) были выполнены предельные переходы от круглого волновода с двумя секториальными диэлектрическими

вставками к круглому однородно заполненному волноводу ($\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $a = 30$ мм) и к круглому волноводу с аксиальной диэлектрической трубкой, внутренний и внешний радиусы которой равны c и b соответственно ($\varphi_1 \rightarrow 0$, $\varphi_2 \rightarrow \pi$, $a = 30$ мм, $b = 6$ мм, $c = 3$ мм, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 2,2\varepsilon_0$).

В табл. 1 приведены результаты исследования предельного перехода к круглому однородно заполненному волноводу (КВ). Как видно из таблицы, относительное отклонение корней ДУ (7) от точных значений [2] коэффициентов замедления $\beta/\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ волн КВ не превышает 1%.

Таблица 1

Значения корней ДУ волн КВ

| | Волна КВ | | |
|----------------|----------|----------|----------|
| | H_{11} | E_{01} | E_{11} |
| $f = 3$ ГГц | | | |
| Точное решение | 0,2396 | | |
| ММГ | 0,2406 | | |
| $f = 4$ ГГц | | | |
| Точное решение | 0,6886 | 0,3091 | |
| ММГ | 0,6891 | 0,3065 | |
| $f = 5$ ГГц | | | |
| Точное решение | 0,8167 | 0,6517 | |
| ММГ | 0,8172 | 0,6491 | |
| $f = 6$ ГГц | | | |
| Точное решение | 0,8785 | 0,7769 | |
| ММГ | 0,8791 | 0,7740 | |
| $f = 7$ ГГц | | | |
| Точное решение | 0,9138 | 0,8434 | 0,5019 |
| ММГ | 0,9144 | 0,8404 | 0,4987 |
| $f = 8$ ГГц | | | |
| Точное решение | 0,9359 | 0,8839 | 0,6554 |
| ММГ | 0,9367 | 0,8809 | 0,6525 |

На рис. 4 представлены дисперсионные характеристики трех быстрых волн круглого волновода с аксиальной диэлектрической трубкой, полученные методом частичных областей (пунктирные линии) и на основе ММГ (сплошные линии). Здесь $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

Как видно из рис. 4, для первой (по порядку следования критических частот) волны структуры имеет место расхождение результатов, полученных методом частичных областей (точные решения) и на основе ММГ, в то время как для двух следующих волн корни ДУ (7), полученные при выполнении предельного перехода, крайне мало отличаются от точных решений. Исследования показали, что расхождение результатов для первой волны можно уменьшить, подобрав соответствующим образом число слагаемых, учитываемых в разложениях (1), (3) и (4). Так, например, в (3) и (4) достаточно взять $N = M = K = 3$, в разложениях (1) функций $P(r)$ и $\Phi(\varphi)$, описывающих зависимость диэлектрической проницаемости заполнения волновода от радиальной и азимутальной координат, следует учитывать $G = 50$ и $S = 100$ слагаемых соответственно.

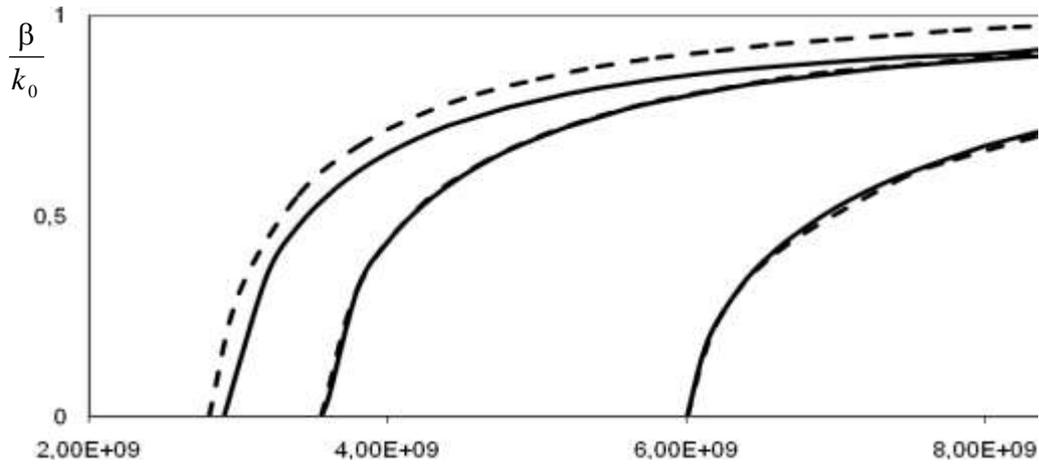


Рис. 4. Дисперсионные характеристики волн круглого волновода с аксиальной диэлектрической трубкой

На рис. 5 представлен вид функции диэлектрической проницаемости $\varepsilon(r, \varphi)$ при $G = 50$ и $S = 100$ для круглого волновода с двумя симметрично расположенными диэлектрическими вставками в виде частично заполненных секторов с параметрами: $a = 30$ мм, $b = 20$ мм, $c = 10$ мм, $\varphi_1 = \pi/6$, $\varphi_2 = \pi/3$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 2,2\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$.

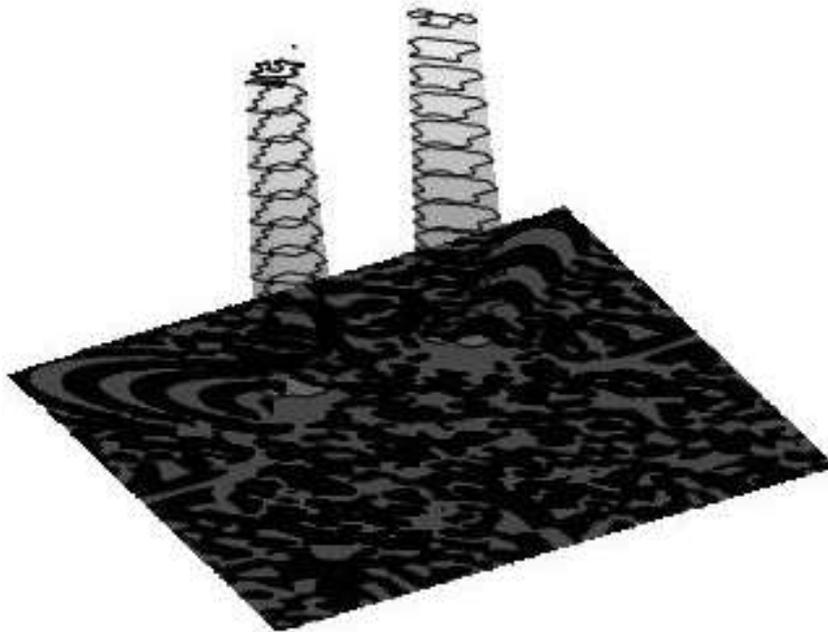


Рис. 5. Вид функции $\varepsilon(r, \varphi)$

На рис. 6 приведены дисперсионные характеристики первых трёх (по порядку следования критических частот) быстрых волн рассматриваемого волновода, а также картины распределения продольной составляющей плотности потока мощности в поперечном сечении структуры.

На картинах распределения продольной составляющей плотности потока мощности каждому значению функции соответствует свой оттенок серого цвета. Области, где имеет место максимум плотности потока мощности, переносимой в прямом направлении, то есть в положительном направлении оси Oz , изображаются белым цветом, области, в которых исследуемая функция принимает наименьшее значение – черным цветом. Рядом с каждой картиной распределения приведена цветовая шкала с указанием численных значений функции, нормированной на ее наибольшее значение, соответствующих черному и белому цветам.

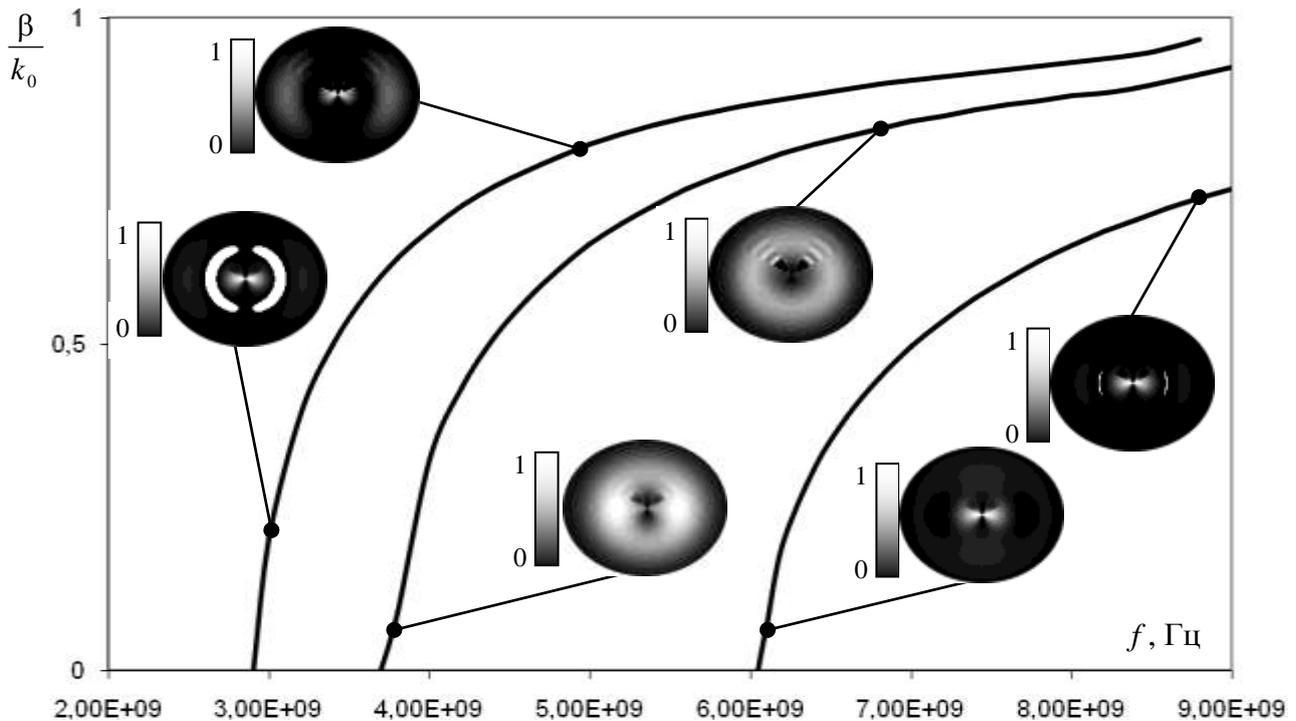


Рис. 6. Дисперсионные характеристики быстрых волн круглого волновода с двумя секториальными диэлектрическими вставками

Как видно из рис. 6, дисперсионные характеристики волн исследуемой структуры качественно похожи на дисперсионные характеристики волн круглого волновода с аксиальной диэлектрической трубкой (рис. 4). Так как рассматриваемые волны являются быстрыми, то их фазовая скорость больше скорости света в вакууме, и переносимая ими мощность распределена за пределами диэлектрических вставок (рис. 6). При этом наблюдается диэлектрический эффект: с ростом частоты переносимая всеми тремя волнами мощность начинает концентрироваться вблизи диэлектрических стержней – областей с большим значением диэлектрической проницаемости.

Библиографический список

1. Математические методы прикладной электродинамики: монография / под ред. С.Б. Раевского. – М.: Радиотехника, 2007. – 88 с.
2. **Неганов, В.А.** Электродинамика и распространение радиоволн / В.А. Неганов, О.В. Осипов, С.Б. Раевский, Г.П. Яровой. – М.: Радиотехника, 2007. – 744 с.

Дата поступления
в редакцию 30.03.2010

A.A. Denisenko, A.V. Nazarov, E.A. Popov

FAST MODES PROPAGATING IN A CIRCULAR WAVEGUIDE WITH TWO SECTORIAL DIELECTRIC INSERTS

A circular waveguide with two symmetrically allocated dielectric inserts in the form of partially filled sectors is considered. The edge problem based on modified Galerkin method is posed, the procedure of the dispersion equation composing is described. The dispersion and energy characteristics of the several fast modes propagating in the structure are presented.

Key words: fast wave, Galerkin method, Maxwell equations, dispersion characteristic, Fourier series.