

УДК 539.3, 621.74

Г. М. Севастьянов, В. И. Одинокоев, И. Г. Сапченко

## ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ КЕРАМИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОВОЙ ФОРМЫ В ЛИТЬЕ ПО ВЫПЛАВЛЯЕМЫМ МОДЕЛЯМ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН

Приводится оригинальный алгоритм решения задачи распространения теплоты в керамической форме при заливке и затвердевании расплава стали и расчёта фронта кристаллизации. Алгоритм предназначен для использования в программных продуктах научно-исследовательской и прикладной направленности для литейного производства.

*Ключевые слова:* литейное производство, керамические оболочковые формы, уравнение межфазового перехода, уравнение теплопроводности, численные методы.

**Введение.** Рассмотрим процесс заливки стали температуры  $\theta_M^0$  в керамическую оболочковую форму, разогретую до температуры  $\theta_F^0$ . Ограничимся рассмотрением стандартного стояка формы, представляющего собой осесимметричное тело, состоящее из сферической и цилиндрической частей. Геометрические параметры стояка:  $R$  – радиус сферической части,  $S$  – высота цилиндрической части,  $H$  – толщина формы. Ввиду осевой симметрии и однородности материала формы и заливаемого металла будем рассматривать сегмент стояка с произвольным углом развертки  $\omega$ . Зададим систему криволинейных координат и разобьём рассматриваемую область ортогональными плоскостями, как показано на рис. 1. Число элементов разбиения по координате  $\alpha_1$ : в форме –  $N_F^I$ , в металле –  $N_M^I$ ; по координате  $\alpha_2$ : в сферической части стояка –  $N_\phi^{II}$ , в цилиндрической части стояка –  $N_H^{II}$ . Таким образом, общее число элементов равно  $(N_F^I + N_M^I)(N_\phi^{II} + N_H^{II})$ .

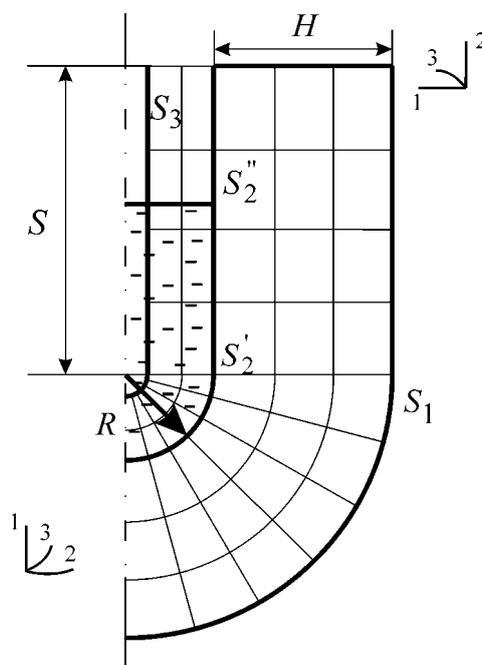


Рис. 1. Область расчёта с обозначением поверхностей, разбитая на ортогональные элементы

**Формализация процесса.** Моделируемый процесс распространения теплоты состоит из двух этапов: этап заливки расплава, на котором непрерывно меняется граница раздела металл – форма и этап последующего застывания металла в форме.

Время заполнения формы рассчитаем при постоянной скорости поступления расплава:

$$\tau_1 = \tau_\phi + \tau_H,$$

где  $\tau_\phi$  – время заполнения сферической части;  $\tau_H$  – время заполнения цилиндрической части;

$$\tau_\phi = \frac{2\pi R^3}{3\nu}, \quad \tau_H = \frac{\pi R^2 H}{\nu},$$

$\nu$  – скорость поступления расплава.

Общее время, в течение которого будем рассматривать процесс, складывается из  $\tau_1$  и времени  $\tau_2$  – продолжительности второго этапа.

Примем ряд предположений:

- в процессе заливки не происходит фазовый переход расплава; это предположение в реальных условиях выполнено практически в точности из-за незначительности времени заполнения формы и процессов перемешивания металла под напором струи; по тем же причинам принимается, что температура расплава остаётся неизменной до начала второго этапа процесса;

- в течение некоторого времени после окончания заливки в жидком металле сохраняется область, температура которой равна начальной температуре заливаемого металла; граничная поверхность этой области на рис. 1 обозначена  $S_3$ ; фактически, представленное предположение адекватно, если поверхность  $S_3$  задана на достаточном удалении от внутренней поверхности формы;

- температура внешней грани формы во время заливки постоянна, а в дальнейшем изменяется по заданному закону  $\theta|_{S_1} = \theta(\tau)$ , где  $\tau$  – время с начала процесса;

- считаются заданными температурные зависимости теплофизических величин для стали и керамики формы: теплопроводность  $\lambda_M(\theta)$  и  $\lambda_F(\theta)$ , теплоёмкость  $C_M(\theta)$  и  $C_F(\theta)$ , плотность  $\rho_M(\theta)$  и  $\rho_F(\theta)$ .

Зададим разбиение времени процесса по шагам:  $m_\phi^I$  – число шагов при заполнении сферической части стояка;  $m_H^I$  – число шагов при заполнении цилиндрической части стояка,  $m^{II}$  – число шагов на втором этапе процесса (этап затвердевания полностью залитого металла).

Тогда начальные условия на первом шаге процесса включают в себя поле температур в элементах формы и расплава  $\theta_{i,j}$ , где  $i, j$  – индексы, определяющие положение элемента по сетке;  $i$  – номер столбца (нумерация от оси симметрии);  $j$  – номер элемента в столбце (нумерация от внешней грани формы):

$$\theta_{i,j} = \begin{cases} \theta_M^0, & \text{при } N_F^I < j \leq N_F^I + N_M^I \\ \theta_F^0, & \text{при } j \leq N_F^I \end{cases}.$$

На последующих шагах начальными условиями по температуре являются рассчитанные на предыдущем шаге поля температур.

Граничные условия на этапе 1  $\theta|_{S_2'} = \theta_M^0$ ,  $\theta|_{S_2''} = \theta_F^0$ ,  $\theta|_{S_1} = \theta_F^0$ , или в матричной форме:

$$\theta_{i, N_F^I + 1} = \begin{cases} \theta_M^0, & \text{при } i \leq n(\tau) \\ \theta_F^0, & \text{при } i > n(\tau) \end{cases}, \quad (1)$$

$$\theta_{i,1} = \theta_F^0, \quad i = \overline{1, (N_\phi^{II} + N_H^{II})}. \quad (2)$$

Здесь  $n(\tau)$  – число дуг на внутренней поверхности формы, составляющих  $S_2'$ , иными словами, это номер последнего элемента «залитого» металлом. Оно определяется следую-

щим образом. Возьмём произвольное  $\tau < \tau_\phi$ . Объём расплава, поступивший в форму за это время, равен  $\tau v$ . Этот расплав занимает в стояке элемент объёма высотой  $h$ , равный  $\pi \int_0^h \sqrt{R^2 - (R-x)^2} dx$  (рис. 2), тогда  $\tau v = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h)$ .

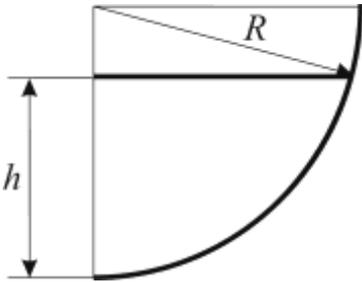


Рис. 2. Элемент объёма в сферической части формы

Это кубическое уравнение решается после соответствующих преобразований относительно  $h$  по формулам Кардано или же методом половинного деления на полуинтервале  $h \in [0, R]$ , где оно имеет один действительный корень. Далее, учитывая  $\cos \varphi = 1 - \frac{h}{R}$ , выразим

$$n(\tau) = \text{round} \left( \frac{2N_\phi^{\text{II}} \cdot \arccos \left( 1 - \frac{h(\tau)}{R} \right)}{\pi} \right), \quad \text{при } \tau < \tau_\phi, \quad \text{где}$$

$\text{round}(x)$  – округленное к ближайшему целому значение  $x$ .

При произвольном  $\tau_\phi \leq \tau \leq \tau_\phi + \tau_H$   $n(\tau) = N_\phi^{\text{II}} + \text{round} \left( \frac{v(\tau - \tau_\phi) N_H^{\text{II}}}{\pi R^2 H} \right)$ .

Граничные условия на этапе 2  $\theta|_{S_3} = \theta_M^0$ ,  $\theta|_{S_1} = \theta(\tau)$  или

$$\theta_{i, (N_F^{\text{I}} + N_M^{\text{I}})} = \theta_M^0, \quad \theta_{i, 1} = \theta(\tau), \quad i = \overline{1, (N_\phi^{\text{II}} + N_H^{\text{II}})} \quad (3)$$

**Алгоритм расчёта температурных полей.** Согласно методу, описанному в [1, 2], предпримем следующую последовательность шагов.

1. Производится подсчёт дуг ортогональных элементов:

- массив дуг  $S2_{i,j}$ , отложенных по координате  $\alpha_1$ ,  $i = \overline{1, (N_\phi^{\text{II}} + N_H^{\text{II}} + 1)}$ ,  $j = \overline{1, (N_F^{\text{I}} + N_M^{\text{I}} + 1)}$ ,

$$S2_{i,j} = \begin{cases} \frac{H}{N_F^{\text{I}}}, & \text{если } j \leq N_F^{\text{I}} \\ \frac{d}{N_M^{\text{I}}}, & \text{если } j > N_F^{\text{I}} \end{cases},$$

где  $d$  – расстояние между поверхностями  $S_3$  и  $S_2$ ;

- массив дуг  $S1_{i,j}$ , отложенных по координате  $\alpha_2$ ,  $i = \overline{1, (N_\phi^{\text{II}} + N_H^{\text{II}})}$ ,  $j = \overline{1, (N_F^{\text{I}} + N_M^{\text{I}} + 1)}$ ,

$$S1_{i,j} = \begin{cases} (R + H - K1) \frac{\pi}{2N_\phi^{\text{II}}}, & \text{если } i \leq N_\phi^{\text{II}} \\ \frac{S}{N_H^{\text{II}}}, & \text{если } i > N_\phi^{\text{II}} \end{cases},$$

где  $K1 = \begin{cases} 0, & \text{если } j = 1 \\ \sum_{k=1}^{j-1} S2_{i,k}, & \text{если } j \neq 1 \end{cases};$

- массив дуг  $S3_{i,j}$ , отложенных по координате  $\alpha_3$ ,  $i = \overline{1, (N_\phi^{\text{II}} + N_H^{\text{II}} + 1)}$ ,  $j = \overline{1, (N_F^{\text{I}} + N_M^{\text{I}} + 1)}$ ,

$$S3_{i,j} = (R + H - K1) \sin \left( \frac{\pi}{2N_{\phi}^{\text{II}}} K2 \right) \cos \omega,$$

где  $K1 = \begin{cases} 0, & \text{если } j = 1 \\ \sum_{k=1}^{j-1} S2_{i,k}, & \text{если } j \neq 1 \end{cases}$ ,  $K2 = \begin{cases} i-1, & \text{если } i \leq N_{\phi}^{\text{II}} + 1 \\ N_{\phi}^{\text{II}}, & \text{если } i > N_{\phi}^{\text{II}} + 1 \end{cases}$ .

2. Задаётся начальное поле температур (на первом шаге используются начальные условия задачи, на последующих – значения, рассчитанные на предыдущем шаге)  $\theta_{i,j}$ ,  $i = \overline{1, (N_{\phi}^{\text{II}} + N_H^{\text{II}})}$ ,  $j = \overline{1, (N_F^{\text{I}} + 1)}$ . Согласно граничным условиям (1)-(2) задаются элементы массива  $\theta_{i,j}$ ,  $i = \overline{1, (N_{\phi}^{\text{II}} + N_H^{\text{II}})}$ ,  $j = \overline{1, (N_F^{\text{I}} + 1)}$  (внешняя поверхность формы и поверхность соприкосновения металла с формой).

3. В соответствии со сформированным полем температур  $\theta_{i,j}^0$  для каждого элемента области задаются массивы теплопроводности  $\lambda_{i,j}$ , теплоёмкости  $C_{i,j}$  и удельного веса  $\gamma_{i,j}$ .

4. Для внутренних элементов области производится расчёт коэффициентов  $t11_{i,j}$ ,  $t12_{i,j}$ ,  $t22_{i,j}$ ,  $t21_{i,j}$   $i = \overline{2, (N_{\phi}^{\text{II}} + N_H^{\text{II}} - 1)}$ ,  $j = \overline{2, N_F^{\text{I}}}$  по формулам:

$$t11_{i,j} = \frac{(\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j-1})S1_{i,j} \cdot (S3_{i,j} + S3_{i+1,j})\Delta\Delta_k}{C_{i,j}\gamma_{i,j}V_{i,j}(S2_{i,j} + S2_{i+1,j} + S2_{i,j-1} + S2_{i+1,j-1})}, \tag{4.1}$$

$$t12_{i,j} = \frac{(\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j+1})S1_{i,j+1}(S3_{i,j+1} + S3_{i+1,j+1}) \cdot \Delta\tau_k}{C_{i,j}\gamma_{i,j}V_{i,j}(S2_{i,j} + S2_{i+1,j} + S2_{i,j+1} + S2_{i+1,j+1})}, \tag{4.2}$$

$$t22_{i,j} = \frac{(\lambda_{i,j} + \lambda_{i+1,j})S2_{i+1,j}(S3_{i+1,j} + S3_{i+1,j+1})\Delta\Delta_k}{C_{i,j}\gamma_{i,j}V_{i,j}(S1_{i,j} + S1_{i,j+1} + S1_{i+1,j} + S1_{i+1,j+1})}, \tag{4.3}$$

$$t21_{i,j} = \frac{(\lambda_{i,j} + \lambda_{i-1,j})S2_{i,j}(S3_{i,j} + S3_{i,j+1})\Delta\Delta_k}{C_{i,j}\gamma_{i,j}V_{i,j}(S1_{i,j} + S1_{i,j+1} + S1_{i-1,j} + S1_{i-1,j+1})}, \tag{4.4}$$

где  $\Delta\tau_k$  – величина  $k$ -го шага по времени;  $V_{i,j}$  – объём элемента  $(i, j)$ , вычисленный приближённо по формуле  $V_{i,j} = (S1_{i,j} + S1_{i,j+1})(S2_{i,j} + S2_{i+1,j})(S3_{i,j} + S3_{i,j+1} + S3_{i+1,j} + S3_{i+1,j+1})/16$ .

Отметим, что согласно формулам (4.1)–(4.4) указанные коэффициенты не зависят от угла развёртки  $\omega$  сегмента формы. Это подтверждает возможность произвольного его выбора.

По формуле

$$\theta_{i,j}^{\text{iter}} = \frac{\theta_{i,j}^0 + \theta_{i,j-1}^{\text{iter}-1}t11_{i,j} + \theta_{i,j+1}^{\text{iter}-1}t12_{i,j} + \theta_{i+1,j}^{\text{iter}-1} \cdot t22_{i,j} + \theta_{i-1,j}^{\text{iter}-1}t21_{i,j}}{1 + t11_{i,j} + t12_{i,j} + t22_{i,j} + t21_{i,j}},$$

где  $\theta_{i,j}^0$  – элементы сформированного в пункте 3 поля температур;  $\text{iter}$  – номер итерации, представляющей собой итеративную процедуру, рассчитываются значения температуры во внутренних элементах области.

5. Для элементов первого столбца элементов от оси симметрии ( $i = 1, j = \overline{2, N_F^{\text{I}}}$ ) коэффициент  $t21_{i,j} = 0$ , коэффициенты  $t12_{i,j}$  и  $t22_{i,j}$  рассчитываются по формулам (4.2) и (4.3), а коэффициент  $t11_{i,j}$ , исходя из соображений симметрии, по формуле

$$t11_{i,j} = \frac{2\lambda_{i,j}S1_{i,j}(S3_{i,j} + S3_{i+1,j})\Delta\Delta_k}{C_{i,j}\gamma_{i,j}V_{i,j}(S2_{i,j} + S2_{i+1,j} + S2_{i,j-1} + S2_{i+1,j-1})}.$$

Итеративная процедура для этих ячеек имеет вид

$$\theta_{i,j}^{iter} = \frac{\theta_{i,j}^0 + \theta_{i,j-1}^{iter-1} t1_{1,i,j} + \theta_{i,j+1}^{iter-1} t1_{2,i,j} + \theta_{i+1,j}^{iter-1} t2_{2,i,j}}{1 + t1_{1,i,j} + t1_{2,i,j} + t2_{2,i,j}}.$$

6. Температура в элементах последнего столбца ( $i = \overline{N_{\phi}^{\text{II}} + N_H^{\text{II}}}$ ,  $j = \overline{2, N_F^{\text{I}}}$ ) рассчитывается, исходя из сглаживающего условия  $\theta_{i,j}^{iter} = \frac{\theta_{i,j}^0 + \theta_{i-1,j}^{iter}}{2}$ .

Пункты 4-6 повторяются до сходимости по температуре, то есть до тех пор, пока не выполнится условие  $\max\{|\theta_{i,j}^{iter} - \theta_{i,j}^{iter-1}|\} \leq \varepsilon$ ,  $i = \overline{1, (N_{\phi}^{\text{II}} + N_H^{\text{II}})}$ ,  $j = \overline{1, (N_F^{\text{I}} + 1)}$ , где  $\varepsilon$  – требуемая точность. Сходимость процедуры доказана в [2].

Описанная процедура повторяется ( $m_{\phi}^{\text{I}} + m_H^{\text{I}}$ ) раз, что имитирует заполнение формы целиком. На этом завершается первый этап расчёта. Отметим, что п. 1 выполняется только один раз в начале процедуры, поскольку считается, что термические деформации формы, в силу хрупкости керамики, остаются малы в рассматриваемом процессе и не вносят сильных искажений в сетку (по крайней мере, если не произошло нарушения целостности формы).

На втором этапе процесса начинается процесс кристаллизации металла в форме. Расчёт температурных полей на этом этапе также происходит по описанной процедуре 1-6, за единственным отличием: область расчёта увеличивается за счёт элементов в жидком и закристаллизовавшемся металле, соответственно все массивы в пп. 2 и 3 ( $\theta_{i,j}$ ,  $\lambda_{i,j}$ ,  $C_{i,j}$ ,  $\gamma_{i,j}$ ) имеют размерность  $i = \overline{1, (N_{\phi}^{\text{II}} + N_H^{\text{II}})}$ ,  $j = \overline{1, (N_F^{\text{I}} + N_M^{\text{I}})}$ . Соответствующим образом изменяются и границы массивов в пп. 4-6. Начальным полем температур в п. 2 на втором этапе служит поле

$$\theta_{i,j} = \begin{cases} \theta_{i,j}^{m_{\phi}^{\text{I}} + m_H^{\text{I}}}, & \text{при } j \leq N_F^{\text{I}} + 1, \\ \theta_M^0, & \text{при } j > N_F^{\text{I}} + 1 \end{cases},$$

где  $i = \overline{1, (N_{\phi}^{\text{II}} + N_H^{\text{II}})}$ ,  $j = \overline{1, (N_F^{\text{I}} + N_M^{\text{I}})}$ .

В п. 2 используются граничные условия (3). Число шагов на втором этапе процесса равно  $m^{\text{II}}$ . Для каждого шага по времени после расчёта поля температур выполняется расчёт фронта кристаллизации.

**Алгоритм расчёта фронта кристаллизации.** Расчёт фронта кристаллизации проведём следующим образом [3]. Рассмотрим уравнение межфазового перехода

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial n} \lambda_1 - \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \lambda_2 = \frac{\partial \Delta}{\partial \tau} L \rho, \quad (5)$$

где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  – температура в твердой и жидкой фазах соответственно;  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности в соответствующих фазах;  $\Delta$  – толщина корочки;  $L$  – скрытая теплота плавления;  $\rho$  – плотность металла;  $n$  – нормаль к границе раздела двух фаз, направление нормали совпадает с направлением координатной оси 1.

Решение этого уравнения получается при некоторых упрощающих предположениях.

Во-первых, примем градиент температуры в жидкой фазе равным нулю, то есть

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial n} = 0. \quad (6)$$

Во-вторых, примем, что температура в твердой фазе изменяется линейно, то есть

$$\theta_1 = \theta_1^1 + (\theta_1^2 - \theta_1^1) \frac{x}{\Delta}, \quad (7)$$

где  $\theta_1^1$  – температура на границе образовавшейся на временном шаге  $\Delta\tau$  корочки и твердого металла (или формы на первом временном шаге кристаллизации);  $\theta_1^2$  – температура на границе образовавшейся на временном шаге  $\Delta\tau$  корочки и жидкого металла;  $x$  – координата по толщине корочки. Тогда, учитывая (6) и (7), уравнение межфазового перехода запишется в виде

$$\lambda_1 \frac{\theta_1^2 - \theta_1^1}{\Delta} = L \cdot \rho \cdot \frac{d\Delta}{d\tau}. \quad (8)$$

Сгруппируем и проинтегрируем:

$$\int \frac{\theta_1^2 - \theta_1^1}{L \cdot \rho} \lambda_1 d\tau = \int \Delta d\Delta, \quad (9)$$

откуда зависимость для определения прироста по толщине закристаллизовавшейся корочки на временном шаге  $\Delta\tau$  будет

$$\Delta = \sqrt{\frac{2(\Delta\theta_1)\lambda_1}{\rho L} \Delta\tau},$$

где  $\Delta\theta_1$  – перепад температур в твердой фазе вблизи фронта кристаллизации.

Тогда используем следующую итерационную процедуру для расчёта фронта кристаллизации металла на  $k$ -м шаге второго этапа:

1) для каждого номера столбца элементов  $i$  определим такой номер элемента в столбце  $j_k^0$ , что  $\theta_{i,j_k^0} \leq \theta_k$ ,  $\theta_{i,j_k^0+1} > \theta_k$ , где  $\theta_k$  – температура кристаллизации металла;

2) итеративно ( $iter$  – номер итерации) рассчитывается прирост толщины корочки на  $k$ -м временном шаге по формуле

$$\Delta_k^{iter} = \sqrt{\frac{2 \cdot (\theta_{i,j_k^{iter-1}} - \theta_{i,j_{(k-1)}}) \cdot \lambda(\theta_k)}{\rho(\theta_k)L}} \Delta\tau_k, \text{ где } j_{(k-1)} \text{ – наибольший номер элемента в твёрдой}$$

фазе  $i$ -го столбца на  $(k-1)$ -м временном шаге,  $j_0 = N_F^I$ ;

3) рассчитывается величина

$$j_k^{iter} = \text{round}\left(\frac{\Delta_k^{iter}}{d} N_M^I\right),$$

где  $d$  – расстояние между поверхностями  $S_3$  и  $S_2$ .

Пункты 2-3 повторяются до тех пор, пока не выполнится равенство  $j_k^{iter} = j_k^{iter-1}$ , тогда  $j_k = j_k^{iter}$ . Таким образом, найдено уточнённое значение величины прироста корочки затвердевшего металла для  $i$ -го столбца элементов на  $k$ -м временном шаге.

После этого уточняются температуры в  $i$ -м столбце с учётом фазового перехода:  $\theta_{i,j} = \theta_k$  при  $j = \overline{j_k}, j_k^0$ . Описанную процедуру необходимо провести для каждого столбца элементов области. Алгоритм отражает картину протекания процесса кристаллизации металла и позволяет определить границу раздела фаз в данный момент времени.

Совокупность описанных алгоритмов была реализована в среде Compaq Visual FORTRAN 6.0 и используется для численного моделирования напряженно-деформированного состояния керамических оболочковых форм.

#### Библиографический список

1. Математическое моделирование сложных технологических процессов / В.И. Одинокоев [и др]. – М.: Наука, 2008. – 176 с.

2. **Одиноков, В. И.** Численное исследование процесса деформации материалов бескоординатным методом / В.И. Одиноков. – Владивосток: Дальнаука, 1995. – 168 с.
3. **Севастьянов, Г. М.** Моделирование процесса заливки металла в керамическую осесимметричную оболочковую форму / Г. М. Севастьянов, В. И. Одиноков, И. Г. Сапченко // Прикладные задачи механики деформируемого твёрдого тела и прогрессивные технологии в машиностроении: сб. ст. – Комсомольск-на-Амуре: ИМиМ ДВО РАН, 2009. Вып. 3. Ч. 2. С. 18–38.

*Дата поступления  
в редакцию 06.04.2010*

**G. M. Sevastyanov, V. I. Odinokov, I. G. Sapchenko**

**THE SOLUTION ALGORITHM FOR HEAT CONDUCTION EQUATION  
FOR CERAMIC SHELL MOLD IN INVESTMENT CASTING**

Original solution algorithm for heat conduction problem in ceramic mould during a process of pouring and solidification of a steel melt and crystallization front computation are given. Algorithm is assigned for use in research and applied software products for foundry engineering.

*Key words:* foundry engineering, ceramic shell moulds, interphase conversion equation, heat conduction equation, numerical methods.