

УДК 629.12 – 531.3

М.И. Фейгин

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК ДИАГРАММЫ  
УПРАВЛЯЕМОСТИ СУДНА ПРИ ВЕТРЕ**

Волжская государственная академия водного транспорта

Исследуется устойчивость движения судна прямым курсом на наиболее важном участке диаграммы управляемости. Получены уравнения для расчета случаев частичной и полной потери управляемости судном при ветре.

*Ключевые слова:* движение судна, ветровое воздействие, изменение управляемости.

Диаграмма управляемости судна при ветре определена как зависимость угла курса установившихся движений судна в прямолинейном направлении от угла перекладки руля при определенной скорости истинного ветра  $V_i$ . Были исследованы зарождение диаграммы и устойчивость установившихся движений судна на различных ее участках при слабом ветре [1].

Суждение об устойчивости или неустойчивости особых точек различных участков диаграммы можно сделать из общих качественных соображений теории бифуркаций, если не существуют другие стационарные решения. Для устойчивых в безветрии судов такой подход оказывается применим. Если при изменении параметра  $V_i$  происходит слияние двух точек с последующим их исчезновением, то они в общем случае должны соответствовать устойчивому и неустойчивому решениям.

Для неустойчивого в безветрии судна ситуация существенно сложнее. Это связано с сосуществованием наряду с особыми точками также и замкнутых траекторий – установившихся режимов циркуляций, а также предельных циклов ветровых автоколебаний. Поэтому в некоторых интервалах угла перекладки руля все особые точки могут оказаться неустойчивыми. В процессе эволюции диаграммы при усилении ветра происходит рождение новых критических точек диаграммы, соответствующих кратным особым точкам или бифуркациям.

Полученная теоретически качественная картина взаимных переходов установившихся режимов движения полностью совпадает с результатами компьютерного моделирования.

В данной работе исследуется устойчивость движения судна прямым курсом на наиболее важном участке диаграммы управляемости. Он включает режим, при котором оказываются равными по величине аэродинамические моменты, действующие на носовую и кормовую надводные части корпуса. Установлено, что существенная роль в выполнении условий устойчивости принадлежит функции  $F(V_i, \psi)$ , которая зависит только от скорости ветра и угла курса, соответствующих исследуемому решению. Она является универсальной по отношению ко всему классу рассматриваемых судов.

Исследованы случаи, когда при усилении ветра неустойчивое движение судна прямым курсом становится устойчивым, и при этом стационарное решение не является кратным. Следовательно, бифуркация не связана со слиянием пары особых точек – устойчивой и неустойчивой. Рассмотренный случай соответствует бифуркации Андронова – Хопфа, при которой неустойчивая точка типа фокус сливается с устойчивым циклом автоколебаний, порождая особую точку типа устойчивый фокус. Существование автоколебаний объясняет известную в практике судовождения повышенную рыскливость судна при ветре.

Выполнен расчет критических точек диаграммы. С усилением ветра четыре из шести точек перемещаются таким образом, что соответствующий угол перекладки руля может пре-

высить предельно возможный. Это является причиной потери управляемости судна при ветре. Получены уравнения для расчета указанных случаев.

### Математическая модель

Принимаемая к рассмотрению динамическая модель судна описывается системой дифференциальных уравнений в безразмерной форме в следующем виде [2-4]

$$\dot{\omega} = a\omega + b\beta + s_1U + M(\psi, \gamma), \quad (1)$$

$$\dot{\beta} = c\omega + d\beta + h\beta|\beta| + s_2U + P(\psi, \gamma),$$

$$\dot{\psi} = \omega,$$

$$\dot{x} = \cos(\psi - \beta), \quad (2)$$

$$\dot{y} = \sin(\psi - \beta).$$

Здесь  $\psi$  - угол курса,  $\omega$  - угловая скорость,  $\beta$  - угол дрейфа между линейной скоростью центра тяжести и продольной осью симметрии судна,  $U$  - параметр управления, равный углу отклонения пера руля. Система координат центра тяжести судна  $x, y$  введена таким образом, чтобы ось абсцисс совпадала с направлением истинного ветра  $V_i$  ( $V_{iy} = 0, V_i = V_{ix} > 0$ ). Координаты  $x, y$  в начальный момент будем полагать совпадающими с началом отсчета.

Воздействие ветра характеризуют  $V$  и  $\gamma$  - скорость и угол ветра относительно судна. Заметим, что строго попутному ветру соответствует  $\psi = 0, 2\pi$ , а встречному  $\psi = \pi$ .

Аэродинамические момент и поперечная сила, создаваемые ветром, соответственно равны

$$M(\psi, \gamma) = g_1 V^2 \sin \gamma (1 - \cos \gamma (1 + n \sin^2 \gamma)), \quad (3)$$

$$P(\psi, \gamma) = g_2 V^2 \sin \gamma$$

$$n = \frac{1}{\cos \gamma_0 (1 + \cos \gamma_0)}$$

$$V^2 = V_i^2 - 2V_i \cos(\psi - \beta) + 1, \quad (4)$$

$$V_i \sin(\psi + \gamma) - \sin(\beta + \gamma) = 0$$

Соотношения (4) определяют характеристики ветра  $V, \gamma$  относительно судна от  $V_i, \psi, \beta$ .

Аэродинамический момент равен нулю в трех случаях: при строго попутном ( $\gamma = \pm\pi$ ), строго встречном ( $\gamma = 0$ ) ветре, а также при значении относительного угла  $\gamma = \gamma_0$ , при котором оказываются равными по величине моменты, действующие на носовую и кормовую надводные части корпуса [3].

### Исследование устойчивости стационарных режимов в окрестности нулевого значения аэродинамического момента

Перейдем к исследованию устойчивости в окрестности стационарного режима движения, при котором  $\gamma = \gamma_0$ . Введем малую переменную  $\varepsilon$  с заменой  $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon$  и будем полагать  $|\varepsilon| \ll 1, |\beta| \ll 1$ . Тогда уравнения (3), (4) приводятся к виду

$$M = -\varepsilon g_1 V^2 \sin^2 \gamma_0 \frac{2 \cos^2 \gamma_0 - 1 - \cos \gamma_0}{\cos \gamma_0 (1 + \cos \gamma_0)}, \quad (5)$$

$$P = g_2 V^2 (\varepsilon \cos \gamma_0 + \sin \gamma_0), \quad (6)$$

$$V^2 = V_i^2 - 2V_i \cos \psi + 1,$$

$$V_i (\sin(\psi + \gamma_0) + \varepsilon \cos(\psi + \gamma_0)) - \sin \gamma_0 - \varepsilon \cos \gamma_0 = 0.$$

Из (6) определяем значение  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{V_i \sin(\psi + \gamma_0) - \sin \gamma_0}{\cos \gamma_0 - V_i \cos(\psi + \gamma_0)} \quad (7)$$

Значение  $\gamma_0$  зависит от степени загрузки судна. Вместе с тем, на основе приводимых в литературе характеристик шести типов судов можно принять среднее значение  $\gamma_0 = \pm \pi/3$  [3]. Характеристическое уравнение для исследования устойчивости решения системы (1), (2) в окрестности  $\gamma_0$  имеет вид:

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0. \quad (8)$$

Коэффициенты уравнения равны

$$a_1 = -(a + d), \quad (9)$$

$$a_2 = ad - bc - M'_\psi = q - M'_\psi,$$

$$a_3 = -bP'_\psi + dM'_\psi.$$

Условия устойчивости Гурвица записываются в виде

$$\Delta_1 = a_1 = -a - d > 0, \quad (10)$$

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 = -(a + d)q + bP'_\psi + aM'_\psi > 0,$$

$$\Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0.$$

Для  $\gamma_0 = \pi/3$

$$P'_\psi = g_2 (\sqrt{3} V_i \sin \psi - F(V_i, \psi)), \quad (11)$$

$$M'_\psi = -2g_1 F(V_i, \psi),$$

$$\varepsilon'_\psi = -\frac{4V_i (V_i - \cos \psi)}{(1 - V_i (\cos \psi - \sqrt{3} \sin \psi))^2},$$

$$F(V_i, \psi) = \frac{2V_i (V_i^2 - 2V_i \cos \psi + 1)(V_i - \cos \psi)}{(1 - V_i (\cos \psi - \sqrt{3} \sin \psi))^2}. \quad (12)$$

Как видно из выражений (9)-(12), существенная роль в выполнении условий устойчивости принадлежит функции  $F(V_i, \psi)$ . Она зависит только от скорости ветра и угла курса, соответствующих исследуемому решению, и является универсальной по отношению ко всему классу рассматриваемых судов.

“Ветровые” слагаемые в  $\Delta_2$

$$bP'_\psi + aM'_\psi = \sqrt{3} b g_2 V_i \sin \psi - (2a g_1 + b g_2) F. \quad (13)$$

Коэффициент  $a_3$

$$a_3 = dM'_\psi - bP'_\psi = -\sqrt{3}bg_2V_i \sin \psi - (2ag_1 - bg_2)F. \quad (14)$$

Для рассматриваемого класса водоизмещающих судов коэффициенты  $b > 0$ ,  $a < 0$ ,  $d < 0$ ,  $g_2 \ll g_1$ . Следовательно, достаточные условия устойчивости принимают вид

$$\Delta_2 \approx -(a+d)q - 2ag_1F > 0, \quad (15)$$

$$\Delta_3 \approx -2ag_1F\Delta_2 > 0. \quad (16)$$

Для устойчивых в безветрии судов, у которых  $q > 0$ , условия (13), (14) выполняются на интервалах значений угла курса  $\psi$ , если функция  $F(V_i, \psi) > 0$  в интересующих нас случаях  $V_i > 1$ .

Для неустойчивых в безветрии судов значение  $q < 0$ . Выполнение  $\Delta_2 > 0$  внутри указанных интервалов связано с характером зависимости  $F$  от  $V_i$  для базового решения, соответствующего  $\varepsilon = 0$ .

Соотношение между  $V_i$  и  $\psi$  для рассматриваемого решения при  $\gamma_0 = \pi/3$  получим из (7), полагая  $\varepsilon = 0$

$$V_i^* = \sqrt{3}/(\sqrt{3} \cos \psi + \sin \psi). \quad (17)$$

Условие  $V_i > 1$  выполняется в интервале значений угла курса рассматриваемых решений

$$\pi/3 < \psi < 2\pi/3. \quad (18)$$

При этом, как следует из уравнений (1), значение  $U = -bP/(s_2b - s_1d) < 0$ .

Для аналогичного решения для  $\gamma_0 = -\pi/3$  уравнения (12), (15)-(16) имеют вид

$$F(V_i, \psi) = \frac{2V_i(V_i^2 - 2V_i \cos \psi + 1)(V_i - \cos \psi)}{(1 - V_i(\cos \psi + \sqrt{3} \sin \psi))^2}, \quad (19)$$

$$V_i^* = \sqrt{3}/(\sqrt{3} \cos \psi - \sin \psi), \quad (20)$$

$$4\pi/3 < \psi < 5\pi/3. \quad (21)$$

Соответствующий угол перекладки руля  $U = bP/(s_2b - s_1d) > 0$ .

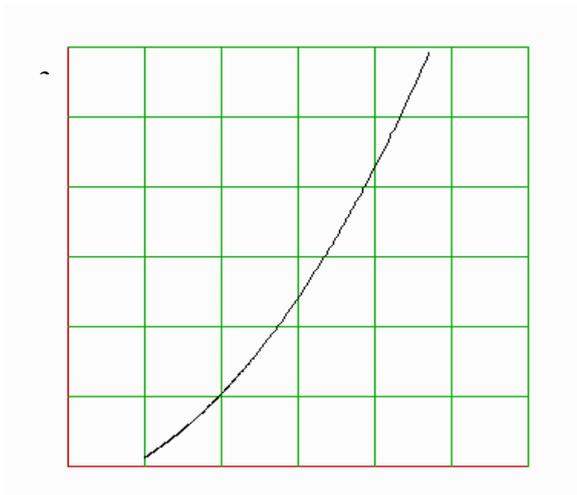


Рис. 1

Из уравнений (12), (15) и (17), (18) получим зависимость функции  $F$  только от параметра  $V_i$ . Обозначим ее  $F_1(V_i)$ . Значения функции  $F_1(V_i^*)$ , играющей основную роль в выполнении условий устойчивости, оказываются совпадающими на интервалах (16) и (19). Указанная функция представлена на рис. 1 Она неограниченно возрастает по мере приближения  $\psi$  к соответствующему концу интервалов существования рассматриваемых решений:  $\psi \rightarrow 2\pi/3$  в интервале (16) и  $\psi \rightarrow 4\pi/3$  в интервале (19).

Полученные результаты на основании условий устойчивости (13)-(14) позволяют сделать следующие выводы. У неустойчивых в безветрии судов движение прямым курсом становится устойчивым при усилении ветра до некоторого значения  $V_i^*$ .

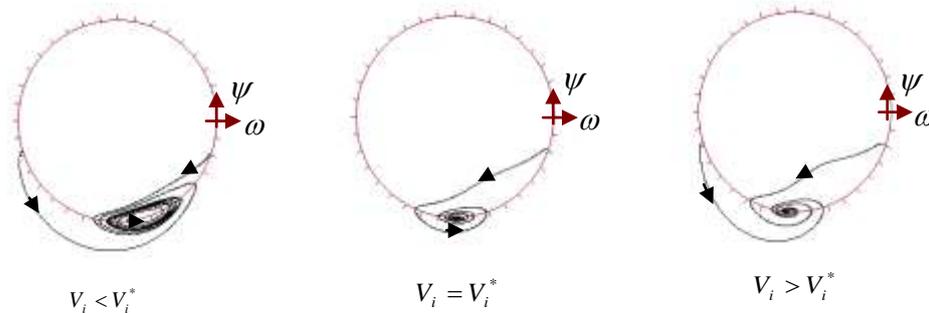


Рис. 2

Так как при этом соответствующее стационарное решение не является кратным, бифуркация не связана со слиянием и исчезновением пары особых точек – устойчивой и неустойчивой. Рассматриваемый случай соответствует бифуркации Андронова – Хопфа, при которой неустойчивая точка типа фокус сливается с устойчивым циклом автоколебаний, порождая особую точку типа устойчивый фокус. Компьютерное моделирование подтверждает этот вывод. На рис.2 представлены соответствующие фазовые портреты для случаев  $V_i < V_i^*$ ,  $V_i = V_i^*$  и  $V_i > V_i^*$  для неустойчивого судна с динамическими коэффициентами, приведенными в [2], [4].

Другим следствием является подтверждение качественного предположения, что на участках устойчивых решений диаграммы управляемости наклон  $\psi_U' > 0$ . Отметим также, что на характеристике аэродинамического момента  $M(\gamma)$  в окрестности  $\gamma_0$  производная  $M_\gamma' = 4g_1 V^2 > 0$ . Последнее вытекает из уравнения (5).

### Расчет критических точек диаграммы управляемости судном при ветре

Понятие критического значения угла перекаладки руля было введено без учета ветра и соответствовало бифуркационной ситуации слияния с исчезновением двух особых точек или установившихся режимов движения – устойчивой и неустойчивой циркуляции [2]. Бифуркация происходит при определенном характере взаимодействия на корпус и рулевое устройство гидродинамических сил и моментов. При ветре существенное значение приобретает аэродинамическое воздействие. Роль порождаемого ветром «рулевого органа» принадлежит носовой и кормовой частям корпуса судна, а углом отклонения «ветрового руля» является разность  $\gamma - \gamma_0$ .

По аналогии с  $U_{kr}$  естественно предположить существование критических углов  $\gamma_i^{kr}$  для конкретного типа судна. Математическое моделирование динамики судна при ветре полностью подтвердило такую гипотезу. Исследовались два типа судов, устойчивое и неус-

тойчивое, у которых отличие состоит лишь в одном из динамических коэффициентов (примеры Р.Я. Першица [2]). Из шести критических значений  $\pm \gamma_1^{kr}$ ,  $\pm \gamma_2^{kr}$ ,  $\pm \gamma_3^{kr}$  две пары практически совпадают. И это естественно, так как отличие в поведении судов в безветрии существенно при  $|U| < U_{kr}$  и менее значительно при  $|U| > U_{kr}$ .

Для приближенного аналитического определения критических углов  $\gamma_i^{kr}$  обратимся к аэродинамическим характеристикам надводных частей различных судов [3]. В приводимых характеристиках моментов для шести типов судов видно, что экстремумы имеют место при  $\gamma_1 \approx 45^\circ$  и  $\gamma_2 \approx 120^\circ$ . Следовательно, даже у устойчивых в безветрии судов при  $\gamma$ , соответствующим экстремумам  $M(\gamma)$ , исследуемые режимы движения прямым курсом должны быть неустойчивыми. В окрестности указанных значений  $\gamma > \gamma_1$  и  $\gamma < \gamma_2$  следует ожидать слияния с последующим исчезновением устойчивой и неустойчивой особых точек, что соответствует критическим углам перекаладки руля.

Так как в точках экстремумов  $M'_\gamma = 0$ , а на основной части рассматриваемого участка характеристик  $M'_\gamma \approx 3.4$ , будем полагать, что потеря устойчивости происходит при  $M'_\gamma \approx 1.7$ . Этот наклон имеет место при  $\gamma_1^{kr} \approx \pm 1.9$  и  $\gamma_2^{kr} \approx \pm 0.82$ . Отыскание установившихся решений исходной системы трансцендентных уравнений существенно упрощается, если предполагать известными углы  $\gamma$ .

Обозначим момент и поперечную силу

$$\begin{aligned} M(\psi, \gamma_i^{kr}) &= g_1 V^2 \sin \gamma_i^{kr} (1 - \cos \gamma_i^{kr} (1 + n \sin^2 \gamma_i^{kr})) = V^2 Q_1, \\ P(\psi, \gamma_i^{kr}) &= g_2 V^2 \sin \gamma_i^{kr} = V^2 Q_2. \end{aligned} \quad (20)$$

Пренебрегая  $h\beta|\beta|$ , получим уравнения

$$\begin{aligned} b\beta + s_1 U + V^2 Q_1 &= 0, \\ d\beta + s_2 U + V^2 Q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

$$V^2 = V_i^2 - 2V_i \cos(\psi - \beta) + 1, \quad (22)$$

$$V_i \sin(\psi + \gamma_i^{kr}) - \sin(\beta + \gamma_i^{kr}) = 0.$$

Из четырех уравнений (21)–(22) необходимо найти  $\beta, \psi, U, V^2$ , если задавать значение скорости истинного ветра  $V_i$ . Существенное упрощение состоит в том, что в уравнения (21)  $U$  и  $V^2$  входят линейно. Поэтому они легко находятся

$$U = \frac{\beta(dQ_1 - bQ_2)}{s_1Q_2 - s_2Q_1}, \quad (23)$$

$$V^2 = \frac{\beta(s_2b - s_1d)}{s_1Q_2 - s_2Q_1}. \quad (24)$$

После подстановки (24) в (22) получаем два уравнения для нахождения  $\beta_i^{kr}$  и  $\psi_i^{kr}$ , а, следовательно, и  $U_i^{kr}$  из уравнения (23) в соответствующих особых точках. Результаты рас-

чета зависимостей  $U_i^{kr}(V_i)$  и  $\psi_i^{kr}(V_i)$  у неустойчивого судна для  $\gamma_1^{kr} \approx -1.9$  приведены на рис. 3, а для  $\gamma_2^{kr} \approx -0.82$  - на рис. 4.

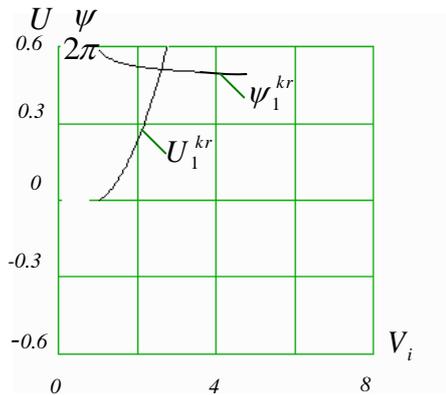


Рис. 3

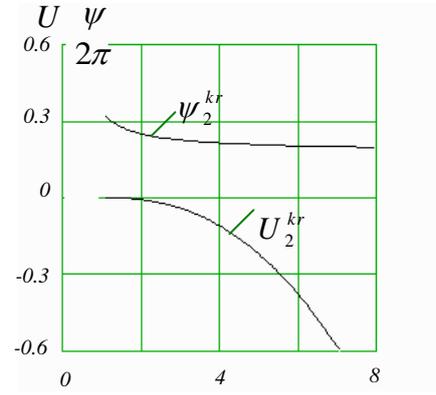


Рис. 4

Для критической точки  $\pm \gamma_3^{kr}$  качественный подход затруднителен, так как при незначительности этого угла уже нельзя отдавать предпочтение воздействию аэродинамического момента над аэродинамической силой. Однако значение  $\pm \gamma_3^{kr}$  можно получить аналитически в предположении  $|\gamma_3^{kr}| < 0.3$ ,  $|\psi_3^{kr} - \pi| < 0.3$ ,  $|\beta| \ll 1$ . Из уравнений (4) имеем

$$V^2 \approx V_i^2 - 2V_i \cos \psi + 1 \approx (V_i - 1)^2, \quad d(V^2)/d\psi = 2V_i \sin \psi \approx 2V_i \psi, \quad (25)$$

$$V_i \sin(\psi + \gamma) - \sin \gamma \approx V_i \psi + (V_i - 1)\gamma = 0, \quad d\gamma/d\psi \approx V_i/(1 - V_i). \quad (26)$$

Для исследования устойчивости особой точки можно воспользоваться уравнениями (8), (9) и критериями устойчивости Гурвица (10). Коэффициент  $a_3 = -bP'_\psi + dM'_\psi$  зависит от ветрового воздействия. Нарушение устойчивости происходит при  $a_3 = 0$ . Это условие и позволяет определить искомое  $\pm \gamma_3^{kr}$ . Дифференцируя функции аэродинамического момента и поперечной силы (3), получаем

$$\begin{aligned} M'_\psi &\approx g_1 \gamma^2 (V_i - 1)(2\gamma^2 + 3nV_i) \approx 3g_1 \gamma^2 nV_i (V_i - 1), \\ P'_\psi &\approx g_2 (V_i - 1)(2\gamma^2 - V_i) \approx -g_2 V_i (V_i - 1). \end{aligned} \quad (27)$$

Следовательно, искомое критическое значение

$$\gamma_3^{kr} = \pm \sqrt{\frac{-bg_2}{3dng_1}}. \quad (28)$$

Результаты расчета  $U_3^{kr}$  и  $\psi_3^{kr}$  по уравнениям (22)-(24) для устойчивого судна ( $d = -1.287, \gamma_3^{kr} = -0.18$ ) приведены на рис. 5, а для неустойчивого судна ( $d = -0.476, \gamma_3^{kr} = -0.29$ ) - на рис. 6.

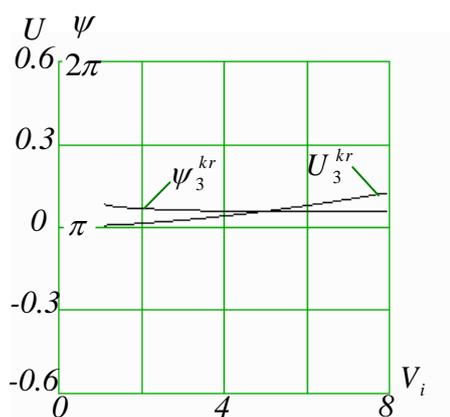


Рис. 5

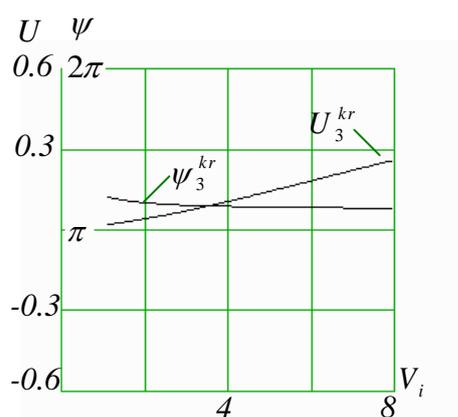


Рис. 6

Выполненные расчеты критических точек хорошо совпадают с результатами компьютерного моделирования исходной динамической модели.

Уравнения (22)-(24) позволяют выполнить расчет показателей частичной и полной потери управляемости  $\beta^0, V^0, V_i^0, \psi^0$ , если полагать  $|U| = U_{\max}$ . Соответствующие критические точки для устойчивого в безветрии судна выделены на рис.7 ( $V_i = 2.58$ ) и рис. 8 ( $V_i = 5.6$ ). Полной потерей управляемости будем называть ситуацию, когда при перекладке руля в максимально возможном диапазоне  $-U_{\max} \leq U \leq U_{\max}$  курс судна изменяется незначительно. На соответствующих участках диаграммы, приведенной на рис. 8, это 10 – 15 градусов.

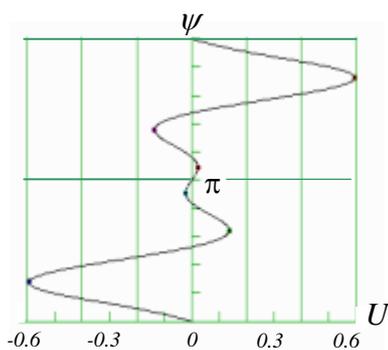


Рис. 7

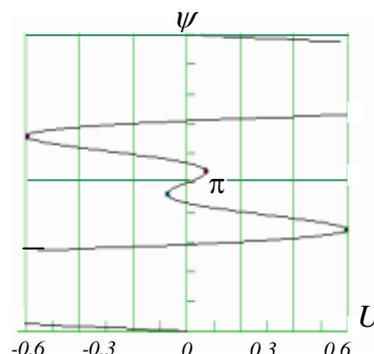


Рис. 8

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 04-01-00815.

#### Библиографический список

1. **Фейгин, М.И.** Зарождение и эволюция диаграммы управляемости судна при ветре // Вестник. Межвузовская серия: Моделирование и оптимизация сложных систем. Новые информационные технологии и развитие образования / ВГАВТ. Н. Новгород. 2005. Вып. 14. С. 9-17.
2. **Войткунский, Я.И.** Справочник по теории корабля / Я.И. Войткунский, Р.Я. Першиц, И.А. Титов. – Л.: Судостроение, 1973. – 512 с.
3. **Гофман, А.Д.** Теория и расчет поворотливости судов внутреннего плавания / А.Д. Гофман. – Л.: Судостроение, 1971. – 256 с.

4. **Фейгин, М.И.** Бифуркационный подход к исследованию управляемости судна при ветровом воздействии // Вестн. Нижегород. ун-та. Мат. моделирование и оптимальное управление / ННГУ. Н. Новгород. 1998. Вып. 2(19). С. 41–49.

*Дата поступления  
в редакцию 13.07.2010*

**M.I. Feigin**

**INVESTIGATION OF STABILITY OF SHIP CONTROLLABILITY DIAGRAM  
AND ITS BIFURCATION POINTS UPON THE WIND**

By the analysis of the ship controllability diagram, the crucial conditions of ship strait course motion upon strengthening wind are investigated. The relations for bifurcation values of the parameters, which conform to partial as well as full loss of controllability, are obtained.

*Key words:* ship motion, wind influence, controllability changing.