

УДК 537.86

Е.М. Громов, В.В. Тютин, В.П. Морозов

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОРОТКИХ ОДНОКОМПОНЕНТНЫХ ВЕКТОРНЫХ СОЛИТОНОВ В СРЕДАХ СО СМЕЩЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ (АДИАБАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)**

Государственный университет – Высшая школа экономики (Нижегородский филиал)

Рассмотрено взаимодействие однокомпонентных (взаимно ортогональных) векторных солитонов малой протяженности (длительностью в несколько длин волн) в анизотропных средах при учете смещения дисперсии. Рассмотрение проведено в рамках двух связанных нелинейных уравнений Шредингера третьего порядка, содержащих линейные члены третьего порядка (линейная дисперсия третьего порядка), и нелинейные члены третьего порядка, отвечающие как самовоздействию (самоукручению и самоиндуцированному рамановскому рассеянию), так и перекрестному нелинейному взаимодействию различных поляризаций (перекрестной нелинейной дисперсии и перекрестному индуцированному рамановскому рассеянию). Найдены режимы отражения и прохождения солитонов друг через друга, а также режим осцилляционного взаимодействия векторных солитонов (векторный бризер).

*Ключевые слова:* дисперсия, нелинейность, поляризация, короткий векторный солитон, взаимодействие, бризер.

**Введение**

Интерес к солитонам обусловлен возможностью их распространения на значительные расстояния с сохранением своей формы и переноса энергии и информации без значительных потерь. Солитонные решения возникают во многих нелинейных моделях различных областей физики при исследовании распространения интенсивных волновых полей в нелинейных диспергирующих средах: оптических импульсов в волоконных линиях связи, поверхностных волн на воде [1–3]. В оптике значительное внимание уделяется солитонам в линиях волоконной оптической связи [4]. Распространение оптических импульсов достаточно большой протяженности в одномодовых линиях хорошо описывается нелинейным уравнением Шредингера (NSE) [5–6], учитывающим линейную дисперсию второго порядка и кубичную нелинейность (self-phase modulation). Солитонное решение в этом уравнении возникает в результате баланса дисперсионного разбегания и нелинейного сжатия волнового пакета. В двухмодовых волноводах – это связанные нелинейные уравнения Шредингера (CNSE) [7–9], учитывающие взаимодействие мод через перекрестную фазовую модуляцию (cross-phase modulation), и связанные уравнения Гинзбурга–Ландау (CGL) [10–12], учитывающие также и линейную дисперсию третьего порядка (third-order linear dispersion) и потери в волноводе.

Уменьшение протяженности волновых импульсов, с одной стороны, и, с другой стороны, использование сред со смещенной дисперсией приводит к необходимости учета в модельных нелинейных уравнениях членов более высокого (третьего) порядка малости, соответствующих нелинейным эффектам укрупнения [13], и индуцированное рамановское рассеяние (stimulated Raman-scattering) [14]. Так, в одномодовых волноводах распространение коротких оптических импульсов может быть описано нелинейным уравнением Шредингера третьего порядка (TNSE) [15–21], содержащим как линейное слагаемое, отвечающее линейной дисперсии третьего порядка, так и нелинейные члены самодействия: самоукручение (self-stepping) и самоиндуцированное рамановское рассеяние (self-stimulated Raman-scattering). В этом уравнении солитонное решение возникает в результате баланса линейного абберационного искажения волнового импульса и нелинейных изменений, обусловленных нелинейной дисперсией и индуцированным рамановским рассеянием.

Стационарные волны в рамках НУШ-3 (TNSE) исследовались как численно [22, 23],

так и аналитически. В работах [22, 23] рассматривалось солитонное решение с пространственной модуляцией волнового числа в точке перегиба линейной дисперсионной характеристики (при отсутствии линейной дисперсии второго порядка, но при учете линейной дисперсии третьего порядка) и в пренебрежении членами нелинейной дисперсии третьего порядка.

Анализ НУШ-3 методом обратной задачи рассеяния с нахождением точных  $N$  - солитонных решений был проведен в трех случаях. При отсутствии линейной дисперсии второго порядка и квадратичной нелинейности и для действительного волнового поля НУШ-3 сводится к модифицированному уравнению Кортевега - де Вриза, решение которого было получено в [24–27]. Солитонные решения с немодулированным волновым числом найдены в следующих двух случаях: в НУШ-3 в точке нулевой линейной дисперсии второго порядка – в [28, 29]; в НУШ-3 при произвольных параметрах среды – в [19, 30].

При распространении коротких векторных оптических импульсов в двухмодовых волноводах возникает необходимость учета в каждом из нелинейных уравнений Шредингера третьего порядка для различных поляризации еще и перекрестных нелинейных членов третьего порядка малости, соответствующих перекрестному укрупнению (cross-stepping) и перекрестному индуцированному рамановскому рассеянию (cross-stimulated Raman-scattering) [31–33]. Так возникают два связанных нелинейных уравнения Шредингера третьего порядка (СТNSE), содержащих нелинейные члены третьего порядка малости, описывающие как самовоздействие (self-stepping и self-stimulated Raman-scattering), так и перекрестное взаимодействие различных поляризаций (cross-stepping и cross-stimulated Raman-scattering) [31].

В данной работе рассмотрена динамика однокомпонентных нелинейных волновых полей малой протяженности (протяженностью в несколько длин волн). Рассмотрение будет проведено в рамках третьего приближения теории дисперсии нелинейных волн в анизотропных средах при учете смещения дисперсии, т.е. при отсутствии линейной дисперсии второго порядка. Показано, что в рамках этого приближения возникает взаимодействие нелинейных волновых полей различной поляризации. В качестве примера рассмотрено взаимодействие коротких однокомпонентных векторных солитонов. Найдены режимы отражения и прохождения коротких векторных солитонов друг через друга, а также режим осцилляторного взаимодействия коротких взаимно ортогональных солитонов, при котором происходит периодический обмен энергией между солитонами различной поляризации (векторный бризер).

### Короткие однокомпонентные векторные солитоны

Распространение векторного волнового поля  $\vec{E} = \vec{e}_1 U(\xi, t) \exp(i\omega t - ik_u \xi) + \vec{e}_2 W(\xi, t) \exp(i\omega t - ik_w \xi)$  малой протяженностью (в несколько длин волн  $k_{u,w} L_{u,w} \gtrsim 1$ ) и малой длительности (в несколько периодов  $\omega T_{u,w} \gtrsim 1$ ), в слабо анизотропных нелинейных диспергирующих средах достаточно хорошо описываются третьим (абберрационным) приближением теории дисперсии нелинейных волн, в котором учитываются члены третьего порядка малости: это линейные члены  $\varepsilon^3 \sim \partial^3 U / \partial \xi^3, \partial^3 W / \partial \xi^3$ , соответствующие линейной дисперсии третьего порядка (third-order linear dispersion), и нелинейные члены, соответствующие эффектам самоукрупнения (self-stepping)  $\varepsilon^3 \sim \partial(|U|^2 U) / \partial \xi, \partial(|W|^2 W) / \partial \xi$ , самоиндуцированного рамановского рассеяния (self-stimulated Raman-scattering)  $\varepsilon^3 \sim W \partial(|W|^2) / \partial \xi, U \partial(|U|^2) / \partial \xi$ , перекрестного укрупнения (cross-stepping)  $\varepsilon^3 \sim \partial(|W|^2 U) / \partial \xi, (|U|^2 W)'_{\xi}, \partial(W^2 U^*) / \partial \xi, (U^2 W^*)'_{\xi}$  и перекрестного индуцированного рамановского рассеяния (cross-stimulated Raman-scattering)  $\varepsilon^3 \sim W (|U|^2)'_{\xi}, U \partial(|W|^2) / \partial \xi, U^* \partial(W^2) / \partial \xi, W^* \partial(U^2) / \partial \xi$ . В этом приближении базовыми уравнениями дина-

мики медленных огибающих  $U$  и  $W$  различных поляризационных компонент при условии малого отличия их волновых чисел  $|k_u - k_w| \ll k_{u,w}$  является система двух связанных нелинейных уравнений Шредингера третьего порядка:

$$2i \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \beta \frac{\partial (|U|^2 U + \sigma |W|^2 U)}{\partial \xi} + \frac{\beta \sigma}{2} \frac{\partial (W^2 U^*)}{\partial \xi} + \mu U \frac{\partial (|U|^2 + \sigma |W|^2)}{\partial \xi} + \frac{\mu \sigma}{2} U^* \frac{\partial (W^2)}{\partial \xi} \right] + 2\alpha (|U|^2 + \sigma |W|^2) U + \alpha \sigma W^2 U^* + i\gamma \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0, \quad (1)$$

$$2i \left[ \frac{\partial W}{\partial t} + \beta \frac{\partial (|W|^2 W + \sigma |U|^2 W)}{\partial \xi} + \frac{\beta \sigma}{2} \frac{\partial (U^2 W^*)}{\partial \xi} + \mu W \frac{\partial (|W|^2 + \sigma |U|^2)}{\partial \xi} + \frac{\mu \sigma}{2} W^* \frac{\partial (U^2)}{\partial \xi} \right] + 2\alpha (|W|^2 + \sigma |U|^2) W + \alpha \sigma U^2 W^* + i\gamma \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} = 0, \quad (2)$$

где  $\xi = x - V_g^L \cdot t$ ,  $V_g^L = \partial \omega / \partial k$  – линейная групповая скорость;  $\omega = \omega(k, |U|^2, |W|^2)$  – нелинейное дисперсионное соотношение;  $\alpha = \partial \omega / \partial (|U|^2) = \partial \omega / \partial (|W|^2)$  – коэффициент кубичной нелинейности (self-phase modulation);  $\sigma$  – коэффициент перекрестной фазовой модуляции (cross-phase modulation) (так, для «керровской» нелинейности  $\sigma = 2/3$ ),  $\gamma = -\partial^3 \omega / (3 \partial k^3)$  – коэффициент линейной дисперсии третьего порядка (third-order linear dispersion);  $\beta$  – коэффициент самоукручения (self-stepping) или нелинейной дисперсии;  $\mu$  – коэффициент самоиндуцированного рамановского рассеяния (self-stimulated Raman-scattering);  $U^*$ ,  $W^*$  – величины, комплексно сопряженные  $U$ ,  $W$  соответственно.

Система уравнений (1)–(2) имеет двухкомпонентное (включающее обе ненулевые компоненты  $U$  и  $W$ ) солитонное решение:

$$\begin{cases} U(\xi, t) = \frac{A_1}{\cosh(A_1 \varepsilon (\xi - V_1 t))} \exp(i \Omega_1 t + i K \xi), \\ W = 0 \end{cases} \quad (3)$$

и

$$\begin{cases} W(\xi, t) = \frac{A_2}{\cosh(A_2 \varepsilon (\xi - V_2 t))} \exp(i \Omega_2 t + i K \xi), \\ U = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где  $A_{1,2}$  – амплитуды солитонов;  $\theta = 2\mu - \beta$ ,  $\varepsilon = \sqrt{\theta / 3\gamma}$ ,  $K = 3\alpha\gamma / 6(\beta - \mu)\gamma$  – добавочное волновое число;  $\Omega_{1,2} = 2K\gamma(K^2 / 2 - \theta A_{1,2}^2 / 6)$  – добавочные частоты векторных солитонов различной поляризации;  $V_{1,2} = \theta A_{1,2}^2 / 6 - 3\gamma K^2 / 2$  – скорости движения солитонов различной поляризации.

Такие солитонные решения по отдельности являются точными решениями несвязанного (скалярного) нелинейного уравнения Шредингера третьего порядка [19–20]. Как было показано в [21], такие короткие однокомпонентные (или скалярные) солитоны являются устойчивыми при условии  $\gamma(2\mu - \beta) > 0$ . Устойчивость этого солитонного решения исследована в [21] аналитически в адиабатическом приближении и численном эксперименте. В численном эксперименте при малом возмущении точного решения получено, что в зависимости от параметров среды различные компоненты возмущенного солитона могут осциллировать друг относительно друга или одна из векторных компонент может усиливаться при угасании другой компоненты. Остается нерешенным важный вопрос о точном описании соотношений па-

раметров среды и параметров солитонных компонент различной поляризации, соответствующих различным типам поведения компонент. Также важен вопрос о поведении отдельных векторных компонент, сильно разнесенных в пространстве. В дальнейшем исследовании подразумевается выполнение условий устойчивости однокомпонентных солитонов.

### Сохранение энергии системы коротких ортогональных векторных волновых пакетов

Определим закон изменения энергии ортогональных волновых полей малой протяженности в системе (1)–(2). Для этого умножим (1) на величину  $U^*$ , комплексно сопряженную к  $U$ , и сложим полученное уравнение с комплексно ему сопряженным. Интегрируя полученное уравнение по  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  при нулевых условиях на бесконечности  $(U, W)|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$ , получим скорость изменения энергии поляризационной компоненты  $U$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 d\xi = -\sigma(2\mu - 3\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 \frac{\partial |W|^2}{\partial \xi} d\xi - \frac{\sigma}{4}(2\mu - 3\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ (U^*)^2 \frac{\partial (W^2)}{\partial \xi} + U^2 \frac{\partial (W^*)^2}{\partial \xi} \right] d\xi. \quad (5)$$

В частном случае при одинаковой пространственной фазовой модуляции различных поляризаций  $U = |U| \exp(i\Omega_u(t) + i\varphi(\xi))$ ,  $W = |W| \exp(i\Omega_w(t) + i\varphi(\xi))$  соотношение (5) принимает более простую форму:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 d\xi = -\frac{3}{2} \sigma(2\mu - 3\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 \frac{\partial |W|^2}{\partial \xi} d\xi.$$

Аналогично из уравнения (2) получим скорость изменения энергии для поляризационной компоненты  $W$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |W|^2 d\xi = -\sigma(2\mu - 3\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} |W|^2 \frac{\partial |U|^2}{\partial \xi} d\xi - \frac{\sigma}{4}(2\mu - \beta) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ (W^*)^2 \frac{\partial (U^2)}{\partial \xi} + W^2 \frac{\partial (U^*)^2}{\partial \xi} \right] d\xi. \quad (6)$$

Из (5)–(6) следует, что распространение короткого волнового поля одной поляризации в присутствии волнового поля другой поляризации сопровождается энергообменом между различными поляризационными компонентами. Складывая соотношения (5) и (6), получим закон сохранения энергии векторного волнового пакета:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (|U|^2 + |W|^2) d\xi = 0. \quad (7)$$

В дальнейшем взаимодействие коротких векторных волновых полей рассмотрим на примере взаимодействия коротких однокомпонентных векторных солитонов.

### Взаимодействие коротких однокомпонентных векторных солитонов

Рассмотрим начальную задачу взаимодействия двух коротких векторных солитонов различной поляризации. Пусть в момент времени  $t = 0$  в анизотропной среде существуют два взаимно ортогональных векторных солитона различной поляризации и различной амплитуды с расстоянием  $\xi_0$  между их центрами:

$$\begin{aligned} U(\xi, t = 0) &= \frac{A_1(0)}{\cosh(A_1(0)\epsilon(\xi - \xi_0))} \exp(iK\xi), \\ W(\xi, t = 0) &= \frac{A_2(0)}{\cosh(A_2(0)\epsilon\xi)} \exp(iK\xi). \end{aligned} \quad (8)$$

Полагая, что изменение параметров солитонов происходит достаточно медленно, решение при  $t > 0$  будем искать в адиабатическом приближении:

$$U(\xi, t) = \frac{A_1(t)}{\cosh \left[ A_1(t) \varepsilon \left( \xi - \xi_0 - \int_0^t V_1(\tilde{t}) d\tilde{t} \right) \right]} \exp \left\{ i \int_0^t \Omega_1(\tilde{t}) d\tilde{t} + iK\xi \right\},$$

$$W(\xi, t) = \frac{A_2(t)}{\cosh \left[ A_2(t) \varepsilon \left( \xi - \int_0^t V_2(\tilde{t}) d\tilde{t} \right) \right]} \exp \left\{ i \int_0^t \Omega_2(\tilde{t}) d\tilde{t} + iK\xi \right\},$$
(9)

где  $V_{1,2}(t) = \theta A_{1,2}^2(t) / 6 - 3\gamma K^2 / 2$  – скорости движения солитонов в момент времени  $t$ ;  $\Omega_{1,2}(t) = 2K\gamma(K^2 / 2 - \theta A_{1,2}^2(t) / 6)$  – мгновенные частоты смещений солитонов в момент времени  $t$ . Расстояние между центрами солитонов изменяется по закону

$$\Delta\xi = \xi_0 + \int_0^t (V_1(\tilde{t}) - V_2(\tilde{t})) d\tilde{t} = \xi_0 + \frac{\theta C_0}{6} \int_0^t \Delta A(\tilde{t}) d\tilde{t},$$
(10)

где  $\Delta A = A_1 - A_2$  – различие амплитуд солитонов. Подставляя (10) в закон сохранения энергии системы солитонов (7), для амплитуд солитонов получим

$$A_1(t) + A_2(t) = A_1(0) + A_2(0) = C_0.$$
(11)

Далее, дифференцируя соотношение (10) по времени, а также подставляя (10) в (5), получим систему уравнений для траекторий движения солитонов

$$\frac{d\Delta A}{dt} = \frac{3\sigma\alpha(2\mu - \beta)(C_0^2 - (\Delta A)^2)}{16 \cosh^2((C_0 + \Delta A)\varepsilon\Delta\xi/2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tanh \eta d(\tanh \eta)}{\cosh^2(\delta\eta)[1 - \tanh(\delta\eta) \cdot \tanh((C_0 + \Delta A)\varepsilon\Delta\xi/2)]^2},$$
(12)

$$\frac{d\Delta\xi}{dt} = \frac{\theta C_0}{6} \Delta A,$$
(13)

где  $\delta = A_1 / A_2 = (C_0 + \Delta A) / (C_0 - \Delta A)$  – отношение амплитуд солитонов.

В дальнейшем рассмотрим взаимодействие коротких однокомпонентных векторных солитонов при малом различии их амплитуд  $|\Delta A| \ll C_0$ . В этом случае, принимая в правой части (12)  $\delta = 1$  и обозначая  $\Delta y = C_0 \varepsilon \Delta\xi / 2$ , получим систему уравнений для траекторий движения солитонов:

$$\frac{d\Delta y}{dt} = \rho_1 \Delta A,$$
(14)

$$\frac{d\Delta A}{dt} = \rho_2 I(\Delta y),$$
(15)

где  $\rho_1 = \varepsilon C_0^2 \theta / 12$ ,  $\rho_2 = \sigma\alpha(2\mu - 3\beta) C_0^4 \theta / 16$ ,

$$I(\Delta y) = \frac{1}{\cosh^2(\Delta y)} \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - \tau^2) \tau d\tau}{[1 - \tau \cdot \tanh(\Delta y)]^2} = \frac{2(3\Delta y - 3 \tanh(\Delta y) - \Delta y \cdot \tanh^2(\Delta y))}{\tanh^4(\Delta y)}.$$

В результате линеаризации в окрестности состояния равновесия ( $\Delta A = 0, \Delta y = 0$ ), т.е. при малых значениях  $\Delta y$ , система уравнений (14)–(15) примет вид

$$\frac{d\Delta y}{dt} = \rho_1 \Delta A,$$
(16)

$$\frac{d\Delta A}{dt} = \frac{8}{15} \rho_2 \Delta y.$$
(17)

Тип и устойчивость состояния равновесия определяются знаком величины  $\rho_1 \rho_2$ . Так, при  $\rho_1 \rho_2 > 0$  состояние равновесия является неустойчивым (типа «седло»), при  $\rho_1 \rho_2 < 0$  –

устойчивым (типа «центр»), что соответствует колебаниям взаимно ортогональных солитонов друг относительно друга с периодом  $\sqrt{-8\rho_1\rho_2/15}$ .

Проанализируем систему (14)–(15) при произвольных значениях  $\Delta y$ . Для этого поделим (15) на (14), разделим переменные в полученном уравнении и проинтегрируем его:

$$(\Delta A)^2 + 4 \frac{\rho_2}{\rho_1} \Phi(\Delta y) = (\Delta A_0)^2 + 4 \frac{\rho_2}{\rho_1} \Phi(\Delta y_0) = \text{const}, \quad (18)$$

где  $\Delta A_0 = \Delta A(\Delta y_0)$  – начальное различие амплитуд солитонов,  $\Delta y_0 = (\Delta y)_{t=0}$  – начальное расстояние между центрами солитонов,  $\Phi(\Delta y) = \frac{\Delta y - \tanh(\Delta y)}{\cosh^2(\Delta y) \cdot \tanh^3(\Delta y)}$  – эффективный потенциал взаимодействия векторных солитонов.

Проанализируем траектории движения (18) при  $\rho_1\rho_2 > 0$  и  $\rho_1\rho_2 < 0$ , отвечающих соответственно неустойчивому и устойчивому состояниям равновесия системы (16)–(17).

1. При  $\rho_1\rho_2 > 0$  примем, что в начальный момент времени  $t=0$  короткие векторные солитоны находятся на значительном расстоянии друг от друга, много большем их протяженностей  $|\Delta y_0| \gg 1$ , и имеют различные начальные амплитуды  $(\Delta A_0)^2 = (\Delta A)_{|\Delta y| \rightarrow \infty}^2 \neq 0$ . Тогда с учетом  $\lim_{|\Delta y| \rightarrow \infty} \Phi(\Delta y) = 0$  получим из (18) для траекторий движения

$$(\Delta A)^2 + 4 \frac{\rho_2}{\rho_1} \Phi(\Delta y) = (\Delta A)_{|\Delta y| \rightarrow \infty}^2. \quad (19)$$

На рис. 1 приведены графики решений (19) (траектории), отвечающие различным значениям  $(\Delta A_0)^2 = (\Delta A)_{|\Delta y| \rightarrow \infty}^2$ .

При достаточно большом различии начальных амплитуд солитонов  $(\Delta A_0)^2 > (\Delta A_c)^2 = 8\rho_2/(3\rho_1)$  солитоны, находящиеся в начальный момент времени на значительном расстоянии друг от друга, в результате взаимодействия проходят друг мимо друга (траектории 1, рис. 1) и амплитуды каждого из солитонов до и после взаимодействия остаются равны прежним значениям.

При различии начальных амплитуд солитонов, соответствующем критическому значению  $(\Delta A_0)^2 = (\Delta A_c)^2$ , солитоны, находящиеся в начальный момент времени на значительном расстоянии друг от друга, в результате взаимодействия асимптотически приближаются друг к другу и в момент совпадения их центров их амплитуды также совпадают (траектории 2, рис. 1). Уравнение для траекторий 2 (рис. 1) найдем из условия их прохождения через начало координат  $(\Delta A)_{\Delta y=0} = 0$ . С учетом  $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Phi(\Delta y) = 2/3$  получим из (19) для траекторий 2 (рис. 1)

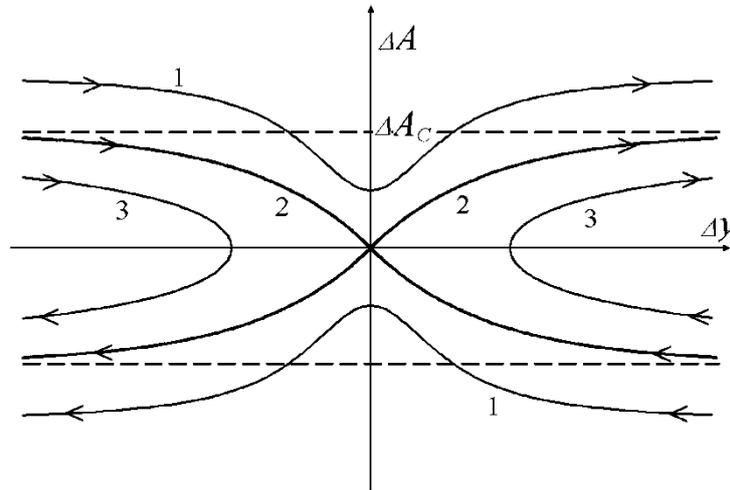
$$(\Delta A)^2 = 4 \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \frac{2}{3} - \Phi(\Delta y) \right). \quad (20)$$

При достаточно малом различии начальных амплитуд солитонов: при  $(\Delta A_0)^2 < (\Delta A_c)^2$  – солитоны, находящиеся в начальный момент времени на значительном расстоянии друг от друга, в результате взаимодействия отталкиваются друг от друга (траектории 3, рис. 1). Наименьшее расстояние  $\Delta y_{\min}$  между центрами солитонов в этом случае определяется из условия равенства амплитуд солитонов в точке наибольшего сближения солитонов, т.е. при наименьшем расстоянии  $(\Delta A)_{\Delta y_{\min}} = 0$ , и в этом случае из (19) имеем

$$(\Delta A_0)^2 = 4 \frac{\rho_2}{\rho_1} \Phi(\Delta y_{\min}). \quad (21)$$

В частности, при достаточно малом различии начальных амплитуд солитонов, отвечающих соотношению  $|\Delta A_0| \ll |\Delta A_c|$  соотношение (21) выполняется при условии малого перекрытия солитонов  $|\Delta y_{\min}| \gg 1$ , и в этом случае из (21) с учетом  $\Phi(\Delta y_{\min}) \approx 4|\Delta y_{\min}| \cdot \exp(-2|\Delta y_{\min}|)$  получим уравнение, описывающее наименьшее расстояние между солитонами:

$$(\Delta A_0)^2 = 16 \frac{\rho_2}{\rho_1} |\Delta y_{\min}| \cdot \exp(-2|\Delta y_{\min}|). \tag{22}$$



**Рис. 1. Траектории движения центра «масс» однокомпонентных солитонов при  $\rho_1 \rho_2 > 0$ :**

1 – прохождение солитонов друг через друга; 2 – сепаратрисы, соответствующие критическому различию начальных амплитуд солитонов; 3 – отталкивание солитонов друг от друга

2. При  $\rho_1 \rho_2 < 0$  примем, что в начальный момент времени  $t = 0$  короткие векторные солитоны находятся в одной точке  $\Delta y_0 = 0$  и имеют различные амплитуды  $(\Delta A_0)^2 = (\Delta A)_{\Delta y=0}^2 \neq 0$ . В этом случае с учетом  $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Phi(\Delta y) = 2/3$  получим из (19) для траекторий движения солитонов:

$$(\Delta A)^2 + 4 \frac{\rho_2}{\rho_1} \Phi(\Delta y) = (\Delta A)_{\Delta y=0}^2, \tag{23}$$

в котором  $\rho_2 / \rho_1 < 0$ . На рис. 2. приведены траектории (23) при различных значениях  $(\Delta A_0)^2 = (\Delta A)_{\Delta y=0}^2$ .

При достаточно большом различии начальных амплитуд солитонов: при  $(\Delta A_0)^2 > (\Delta A_c)^2 = -8\rho_2 / (3\rho_1)$  – солитоны разбегаются, и на больших расстояниях друг от друга амплитуды солитонов стремятся к различным значениям (траектории 1, на рис. 2). При этом выполняется.  $(\Delta A)^2 = (\Delta A_0)^2 - (\Delta A_c)^2$ .

При различии начальных амплитуд солитонов, соответствующем критическому значению  $(\Delta A_0)^2 = (\Delta A_c)^2$ , солитоны разбегаются, и на больших расстояниях друг от друга амплитуды солитонов стремятся к равным между собой значениям (траектории 2, рис. 2). Траектории 2 опишем из (23) при условии их асимптотического приближения к оси  $\Delta y$  при

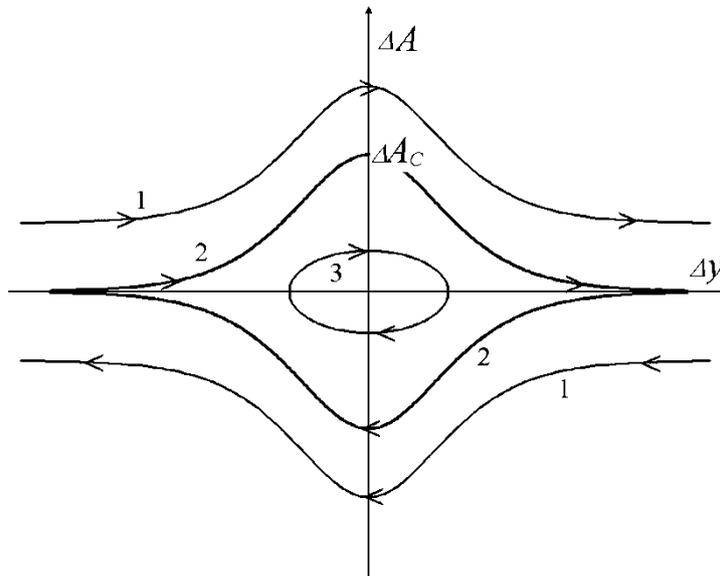
$|\Delta y| \rightarrow \infty: \Delta A_{|\Delta y| \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ . С учетом  $\lim_{|\Delta y| \rightarrow \infty} \Phi(\Delta y) = 0$  получим из (23) уравнение для траекторий 2 (рис. 2)

$$(\Delta A)^2 = -4 \frac{\rho_2}{\rho_1} \Phi(\Delta y). \quad (24)$$

При достаточно малом различии начальных амплитуд солитонов: при  $(\Delta A_0)^2 < (\Delta A_c)^2$  – расстояние между солитонами и их амплитуды меняются во времени периодическим образом (траектории 3, рис. 2). Этот режим взаимодействия коротких векторных солитонов можно определить как векторный бризер. В частности, при достаточно малом, по сравнению с их протяженностями, разбегании солитонов  $|\Delta y| \ll 1$  и с учетом  $\Phi(\Delta y) \approx 2/3 - 4(\Delta y)^2/15$  получим из (24) для траекторий 3 (рис. 2)

$$(\Delta A)^2 - \frac{16}{15} \frac{\rho_2}{\rho_1} (\Delta y)^2 = (\Delta A_0)^2, \quad (25)$$

что соответствует проведенному анализу линеаризованной около состояния равновесия системы (16)–(17).



**Рис. 2. Траектории движения центра «масс» однокомпонентных солитонов при  $\rho_1 \rho_2 < 0$ :**

1 – прохождение солитонов друг через друга; 2 – сепаратрисы, соответствующие критическому различию начальных амплитуд солитонов; 3 – осцилляторное движение солитонов друг относительно друга (векторный бризер)

Случай  $\rho_1 \rho_2 = 0$  возможен (при условии существования однокомпонентных солитонов) только при  $2\mu - 3\beta = 0$ , что приводит к сохранению энергий каждой из взаимно ортогональных компонент  $U$  и  $W$  по отдельности вследствие выражений (5) и (6). В этом случае отсутствует передача энергии от одной компоненты к другой, т.е. отсутствует взаимодействие компонент и однокомпонентные (взаимно ортогональные) солитоны распространяются, не реагируя друг на друга.

### Выводы

В данной работе проанализировано движение пары однокомпонентных векторных солитонов малой протяженности в анизотропных средах со смещенной дисперсией. Найден закон сохранения суммарной энергии таких солитонов. Исследование взаимодействия соли-

тонов проведено в адиабатическом приближении при достаточно малом различии амплитуд солитонов  $|\Delta A| \ll A_{1,2}$ , но при произвольном расстоянии между солитонами. В явном виде найдены траектории движения солитонов и соответствующие им изменения амплитуд солитонов. В зависимости от величин параметров среды и начальных амплитуд солитонов возможно как прохождение солитонов друг через друга, так и отталкивание солитонов, а также периодическое движение солитонов относительно общего центра – векторное бризерное состояние. Определены соотношения между параметрами среды и параметрами солитонов, соответствующие разным типам взаимодействия солитонов.

Работа проведена при поддержке РФФИ (проект № 11 – 02 – 01307).

### Библиографический список

1. **Yang, Y.** Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis / Y. Yang. – New York: Springer, 2001.
2. **Dickey, L.A.** Soliton Equation and Hamiltonian Systems / L.A. Dickey. – New York: World Scientific, 2005.
3. **Kivshar, Y.S.** Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals / Y.S. Kivshar, G.P. Agraval. – San Diego: Academic, 2003.
4. **Agraval, G.P.** Fiber Optic Communication Systems / G.P. Agraval. – New York: Wiley, 2002.
5. **Zakharov, V.E.** Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media / V.E. Zakharov, A.B. Shabat // Sov. Phys. JETP. 1972. V. 34. P.62 -69.
6. **Hasegawa, A.** Transmission of Stationary Nonlinear Optical Physics in Dispersive Dielectric Fibers I: Anomalous Dispersion / A. Hasegawa, F. Tappert // Appl. Phys. Lett. 1973. V. 23. N. 3. P. 142–144.
7. **Manakov, S.V.** On the theory of two-dimensional stationary self focussing of electromagnetic waves // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1973. V. 65. P. 505-516; Sov. Phys. JETP. 1974. V.38. P. 248-253.
8. **Fordy, A.P.** Nonlinear Schrodnger equations and simple Lie algebras / A.P. Fordy, P.P. Kulish // Commun. Math. Phys. 1983. V. 89. P. 427–443.
9. **Menyuk, C.R.** Nonlinear pulse-propagation in birefringent optical fibers // Optics Letters. 1987. V.12. P.614; J. Opt. Soc. Am. B. 1988. V. 5. P. 392.
10. **Cundiff, S.T.** Observation of Polarization-Locked Vector Solitons in an Optical Fiber / S.T. Cundiff [at al.] // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. 3988; Akhmediev [at al.] // Opt. Lett. 1998. V. 23. P. 852.
11. **Tang, D.Y.** Observation of high-order polarization-locked vector solitons in a fiber laser / D.Y. Tang, H. Zhang, L.M. Zhao, X.Wu // Phys. Rev. Lett. 2008. V.101. 153904.
12. **Christodoulides, D. N.** Vector solitons in birefringent nonlinear dispersive media / D. N. Christodoulides, R. I. Joseph // Opt. Lett. 1988. V.13. N. 1. P. 53–55.
13. **Oliviera, J.R.** Analytical Solution for the Modified Nonlinear Schrodinger Equation Describing Optical Shock Formation / J.R. Oliviera, M.A. Moura // Phys. Rev. E. 1998, V. 57. P. 4751–4755.
14. **Gordon J.P.,** Theory of the soliton self-frequency shift // Opt. Lett. 1986. V. 11. P. 662–664.
15. **Kodama Y.,** Optical solitons in a monomode fiber // J. Stat. Phys. 1985. V. 39. P. 597– 14.
16. **Zaspel C.E.,** Optical Solitary Wave and Shock Solutions of the Higher Order Nonlinear Schrodinger Equation. //Phys. Rev. Lett. 1999. V.82. N.4. P.723 – 726.
17. **Hong, B.** New Jacobi functions solitons for the higher-order nonlinear Schrodiger equation / B. Hong, D. Lu // Inter. Journal of Nonlinear Science. 2009. V. 7. N. 3. P. 360–367.
18. **Karpman, V.I.** The extended third-order nonlinear Schrodinger equation and Galilean transformation // The European Physical Journal B. 2004.V.39. P. 341–350.
19. **Gromov, E.M.** Nonlinear dynamics of short wave trains in dispersive media / E.M. Gromov, V.I. Talanov // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1996. V.110. P.137.; JETP. 1996. V.83. P. 73–79.
20. **Gromov, E.M.** Short optical solitons in fibers / E.M. Gromov, V.I. Talanov // Chaos. 2000. V.10. N. 3. P. 551–558.
21. **Gromov, E.M.** Dynamics of wave packets in the frame of third-order nonlinear Schrödinger equation / E.M. Gromov, L.V. Piskunova, V.V. Tyutin // Physics Letters A. 1999. V. 256. P. 153–158.
22. **Wal, P.K.A.** Soliton at the zerogroup-dispersion wavelength of a single-model fiber / P.K.A. Wal, C.R. Menyuk, H.H. Chen, Y.C. Lee // Opt. Lett. 1987. V. 12. P. 628.

23. **Мезенцев, В.К.** Новый класс солитонов в волоконных световодах вблизи точки нулевой дисперсии / В.К. Мезенцев, С.К. Турицын // Квантовая Электроника. 1991. Т. 18. N.5. С. 610–612.
24. **Wadati, M.** The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation // Phys. Soc. Jap. 1972. V.32. P. 1681.
25. **Hirota, R.** Exact solution of the sine-Gordon equation for multiple collisions of solitons // J. Math. Phys. 1972. V.33. P.805.
26. **Hirota, R.** Exact solutions of the modified Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons // J.Phys.Soc.Jap. 1972. V. 33. P. 1456.
27. **Miura, R.M.** Korteweg–de Vries equations and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation // J.Math.Phys. 1969. V.9. P.1202–1204.
28. **Frantzeskakis, D.J.** Nonlinear dynamics of femtosecond optical solitary wave propagation at the zero dispersion point / D.J. Frantzeskakis, K. Hizanidis, G.S. Tombas, I. Belia // IEEE J. Quantum Electron. 1995. V. 31. P. 183.
29. **Frantzeskakis, D.J.** Ultrashort solitary-wave propagation in dielectric media with resonance dominated chromatic dispersion / D.J. Frantzeskakis, K. Hizanidis, C. Polymills // J. Opt. Soc. Am. B. 1995. V.12. N.4. P.628.
30. **Громов, Е.М.** Короткие солитоны огибающей (комбинированное нелинейное уравнение) / Е.М. Громов, В.И. Таланов // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39. N. 6. С. 735.
31. **Kim J.,** A coupled higher-order nonlinear Schrodinger equation including higher-order bright and dark solitons // ETRI Journal. 2001. V.23. N.1. P. 9–15.
32. **Lu, F.** Vector soliton fission / F. Lu [et al.] // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. N.18. 183901.
33. **Gromov, E.M.** Short vector soliton / E.M. Gromov, V.V. Tyutin, D.E. Vorontsov // Physics Letters A. 2001. V. 287. issue 3-4. P. 233–239.

*Дата поступления  
в редакцию 12.10.10*

**E.M. Gromov, V.V. Tyutin, V.P. Morozov**

### **SHORT SINGLE-COMPONENT VECTOR SOLITONS INTERACTION IN DISPERSION-SHIFTED MEDIA (ADIABATIC APPROXIMATION)**

The interaction of short single-component vector solitons in the frame of the coupled third-order nonlinear Schrodinger equations taking into account third-order linear dispersion, self-stepping, self-stimulated Raman-scattering, cross-stepping and cross-stimulated Raman-scattering terms is considered. Conditions of reflection and propagation of the solitons through each other and also the condition of oscillator interaction (vector breather) are obtained.

*Keywords:* dispersion, nonlinearity, polarization, short vector soliton, interaction, breather.