

УДК 531.535

С.Е. Пилипосян

ИЗМЕРЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Приведено описание экспериментальной установки и методики измерения момента инерции неоднородного твердого тела относительно центральной оси заданного направления с точностью не ниже 0,5% и нахождения точки центра масс с точностью не ниже 1 мм.

Особое внимание уделено оценке погрешностей измерений, проведенных по методу регистрации периодов колебаний. В измерениях применяются обычный секундомер, линейка, угломер и несложная экспериментальная установка. Выявлены условия эксперимента, при которых погрешности минимальны. Приведены графики и таблицы физических величин, наиболее важных для достижения этой цели.

Ключевые слова: момент инерции, радиус инерции, главная ось, маятник сравнения, приведенная длина, функция Н.Е. Жуковского, метод параллельных осей, неоднородное твердое тело, жесткий двойной подвес.

Введение

Экспериментальное определение центральных моментов инерции, в частности главных моментов инерции, неоднородного твердого тела остаётся актуальной технической задачей [1, 2]. Для снижения центробежных сил инерции, разрушающих, например, опорные подшипники турбины, винта самолета или коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания, необходимо как можно точнее определить положение и направление главной оси, являющейся также центральной осью. Сложность геометрических форм и неоднородность таких механизмов затрудняют теоретический расчет моментов инерции. Сегодня успешно применяются различные методы, позволяющие измерить момент инерции и находить точку центра масс как для гигантских гидротурбин, самолетов, экранопланов, вагонов скоростных поездов, автомобилей, так и для миниатюрных элементов часового механизма.

Для каждого изделия применяется определенная методика и создается специальная установка, учитывающая его массу, размеры, форму и обеспечивающая минимальные погрешности в измерениях момента инерции. Каждая из существующих методик имеет свои преимущества и недостатки в определенном диапазоне значений параметров испытуемого тела и позволяет определить искомые величины с той или иной точностью.

Целью этой работы является измерение момента инерции неоднородного твердого тела относительно центральной оси выбранного направления с точностью не ниже 0,5% и нахождение точки центра масс с точностью не ниже 1 мм.

Метод измерения

Колебания математического маятника удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0$, которое в случае малых колебаний ($\varphi_{\max} \rightarrow 0$), когда $\sin\varphi \rightarrow \varphi$, принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0 \quad (1)$$

и имеет решение: $\varphi = \varphi_{\max} \cos(\omega_0 t + \alpha)$. Угловая частота ω_0 и связанный с ней период гармонических колебаний T_0 соответственно равны

$$\omega_0 = \sqrt{g/l} \quad \text{и} \quad T_0 = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{l/g} . \quad (2)$$

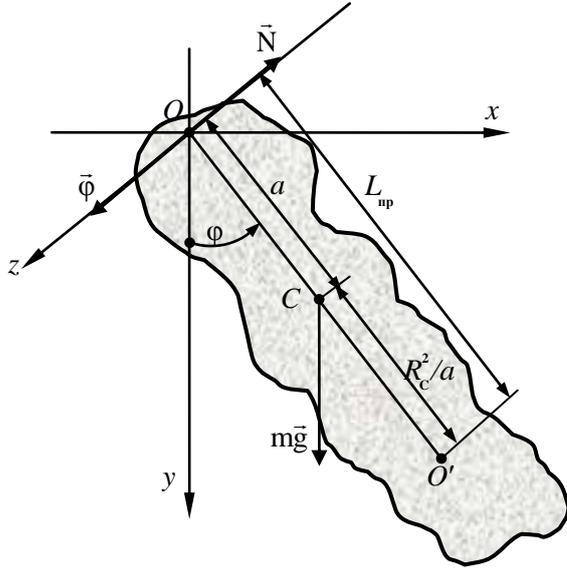


Рис. 1. Физический маятник

Колебания твёрдого тела зического маятника), также ются уравнением (1). В этом случае $\omega_0 = \sqrt{mga/J} = \sqrt{g/L_{np}}$, где J – момент инерции тела относительно заданной оси вращения, a – расстояние точки центра масс тела от точки его подвеса (от оси вращения); m – масса твёрдого тела, $L_{np} = J/(ma)$ – приведенная длина физического маятника (рис. 1). Согласно теореме Гюйгенса – Эйлера,

$$J = J_c + ma^2, \quad (3)$$

где J_c – момент инерции тела относительно центральной оси, параллельной к оси вращения.

Следовательно,

$$L_{np} = \frac{J}{ma} = a + \frac{J_c}{ma} > a \quad (4)$$

$$T = 2\pi\sqrt{L_{np}/g} = 2\pi\sqrt{(J_c + ma^2)/(mga)}, \quad L_{np} = (g/\pi^2)(T/2)^2. \quad (5)$$

$$J_c = ma(L_{np} - a) = ma[(g/\pi^2)(T/2)^2 - a] = ma(0,99456(T/2)^2 - a) = mR_c^2. \quad (6)$$

Величина R_c – радиус инерции тела для данной центральной оси.

Очевидно, что, измерив величины m, a, T или m, a, L_{np} , можно определить значение J_c после проведения одного единственного измерения.

Однако для неоднородного твёрдого тела или для однородного тела произвольной формы значение a неизвестно и для нахождения центрального момента инерции проведение только одного измерения недостаточно.

Если направление центральной оси твёрдого тела с массой m уже выбрано, то R_c является константой и величины a и T (a и L_{np}) не являются независимыми переменными. Они жестко связаны равенством (6): $J_c = mR_c^2 = \text{const}$.

Измеряя J относительно двух осей вращения, параллельных к выбранной центральной оси и находящихся с ней в одной плоскости, получим

$$\begin{cases} J_c = ma_1(gT_1^2/(4\pi^2) - a_1) \\ J_c = ma_2(gT_2^2/(4\pi^2) - a_2) \\ b = a_1 - a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_1(gT_1^2/(4\pi^2) - a_1)}{a_2(gT_2^2/(4\pi^2) - a_2)} = 1 \\ b = a_1 - a_2 \end{cases}, \quad (7)$$

где $\pi, g, T_1, T_2, b = a_1 - a_2$ – известные величины.

Решив эту систему уравнений, для неизвестных a_1 и a_2 получим

$$\begin{cases} a_2 = \frac{b(4\pi^2 b - T_1^2 g)}{(T_1^2 - T_2^2)g - 8\pi^2 b} = \frac{b(T_1^2 g - 4\pi^2 b)}{(T_2^2 - T_1^2)g + 8\pi^2 b} \\ a_1 = a_2 + b = \frac{b(T_1^2 g - 4\pi^2 b)}{(T_2^2 - T_1^2)g + 8\pi^2 b} + b = \frac{b(T_2^2 g + 4\pi^2 b)}{(T_2^2 - T_1^2)g + 8\pi^2 b} \end{cases}. \quad (8)$$

Подставив известные значения m, T_1, a_1 или m, T_2, a_2 в (6), получим два значения для J_c , отличающихся в пределах допущенных погрешностей измерений величин b, T_1, T_2 . Если погрешности этих измерений равны нулю, то и $(J_c)_1 = (J_c)_2$. Такой метод определения момента инерции произвольного твердого тела был впервые предложен французским учёным Мари Риш де Прони в 1792 году.

Если значение массы тела фиксировано и направление центральной оси выбрано, то, согласно (6), величина J_c является функцией двух жестко связанных между собой (коррелированных) переменных a и T , которые измеряются с погрешностью Δa и ΔT в независимых измерениях. Следовательно, a и T являются случайными величинами с истинно средними значениями \bar{a} и \bar{T} , удовлетворяющими равенству (6), то есть

$$\bar{J}_c = m\bar{a} \left(g\bar{T}^2 / (4\pi^2) - \bar{a} \right) = mR_c^2 = \text{const.} \tag{9}$$

Предположим, что они подчиняются нормальному закону распределения случайных величин. Погрешность измерения J_c является погрешностью косвенных измерений случайной величины J_c , зависящей от коррелированных нормальных случайных величин a и T . В таких случаях возникает необходимость найти закон распределения случайной величины J_c из формулы (6) и ее среднеквадратичное отклонение σ_{J_c} , если среднеквадратичные отклонения коррелированных нормальных случайных величин a и T равны σ_a и σ_T соответственно. Мы будем считать, что J_c подчиняется закону нормального распределения.

Равенства (5) с учетом (6) можно записать в виде

$$T = 2\pi\sqrt{L_{np} / g} = 2\pi\sqrt{R_c (\lambda + \lambda^{-1}) / g}, \quad L_{np} = R_c (\lambda + \lambda^{-1}), \tag{10}$$

где безразмерный параметр $\lambda = a / R_c$ определен в области $0 \leq \lambda < \infty$.

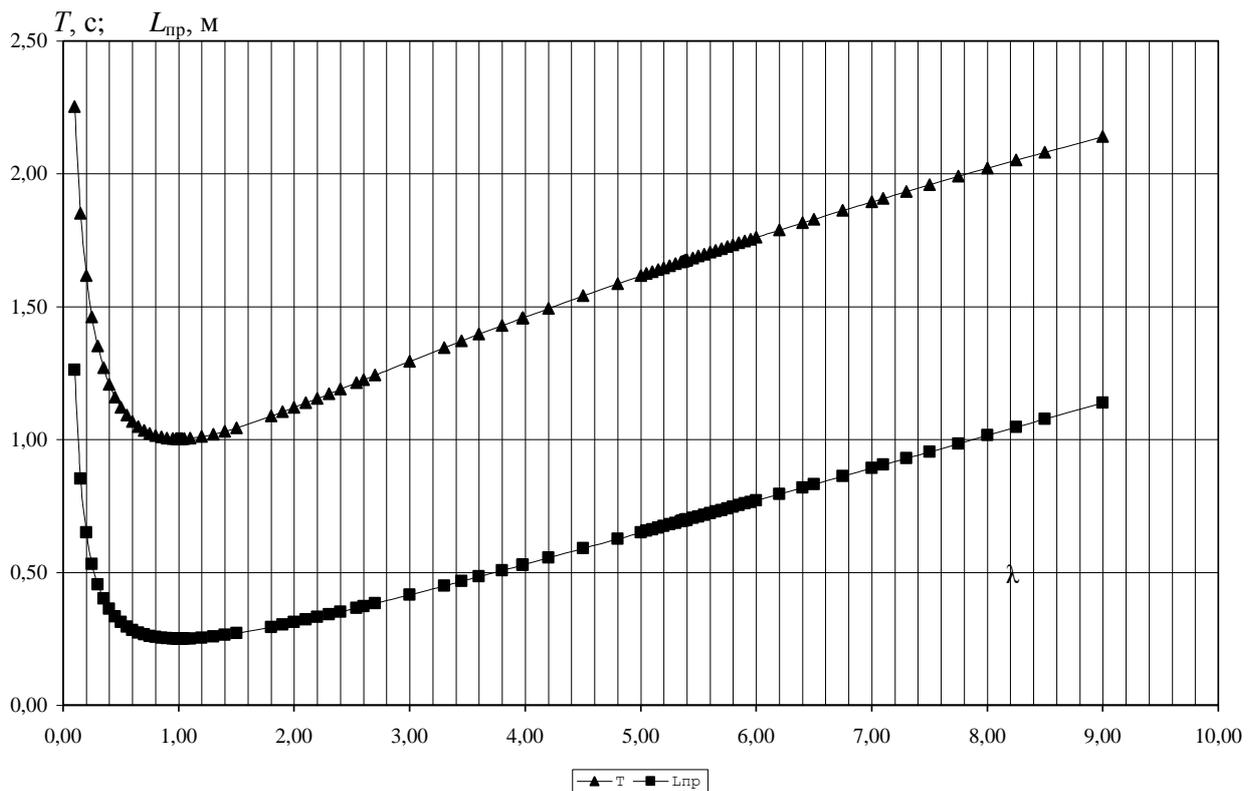


Рис. 2. Период колебаний и приведенная длина физического маятника

Период колебаний и приведенная длина физического маятника обладают минимумом, совпадающим с минимумом функции Н.Е. Жуковского [4]: $w=0,5(\lambda+1/\lambda)$; $w_{\min}=1,0$ при $\lambda=1,0$ (рис. 2). Следовательно, согласно (10),

$$T(R_c, \lambda) = 2\pi\sqrt{(2R_c w)/g} = 2\pi\sqrt{L_{\text{пр}}/g}, \quad L_{\text{пр}} = 2R_c w$$

$$T_{\min} = 2\pi\sqrt{2R_c/g}, \quad (L_{\text{пр}})_{\min} = 2R_c. \quad (11)$$

То есть при $R_c \cong 0,125$ м: $T_0(R_c, \lambda) = \sqrt{\pi^2/g}\sqrt{w}$ с и $L_{\text{пр}} = 0,25w$ м.

Измерения J_c можно провести также, синхронизируя качания математического маятника с колебаниями физического маятника и оценив приведенную длину физического маятника из формулы (6) для двух расстояний a_1 и a_2 .

Напомним, что когда направление центральной оси фиксировано, то значение J_c фиксировано и не зависит от значения a . При $\lambda=1,0$ функции $T(\lambda)$ и $L_{\text{пр}}(\lambda)$ обладают минимумом, и небольшие изменения λ (или a) не влияют на значения $T(\lambda)$ и $L_{\text{пр}}(\lambda)$, а значит, и на значения J_c .

Следовательно, погрешности измерения $\delta(J_c)_T$ и $\delta(J_c)_{L_{\text{пр}}}$ в этой особой точке не зависят от погрешности Δa измерения расстояния a от оси вращения.

Определим отношение относительных погрешностей измерения центрального момента инерции J_c при $\lambda=1,0$, обусловленных прямым измерением периода колебаний и косвенным измерением приведенной длины физического маятника. Ввиду того, что измерения величин T , $L_{\text{пр}}$, b проводятся независимо и с небольшими погрешностями ΔT , $\Delta L_{\text{пр}}$, Δb соответственно, согласно формуле (6) (см. [3, с. 17]), получим

$$\delta(J_c)_T = \frac{\Delta(J_c)_T}{J_c} = \frac{1}{J_c} \frac{\partial J_c}{\partial T} \Delta T = \frac{1}{J_c} ma \frac{g}{4\pi^2} 2T\Delta T,$$

$$\delta(J_c)_{L_{\text{пр}}} = \frac{\Delta(J_c)_{L_{\text{пр}}}}{J_c} = \frac{1}{J_c} \frac{\partial J_c}{\partial L_{\text{пр}}} \Delta L_{\text{пр}} = \frac{1}{J_c} ma \Delta L_{\text{пр}},$$

$$\frac{\delta(J_c)_T}{\delta(J_c)_{L_{\text{пр}}}} = \frac{g}{\pi^2} \frac{T\Delta T}{2\Delta L_{\text{пр}}} = 0,99456 \frac{T\Delta T}{2\Delta L_{\text{пр}}} \cong \frac{T}{2} \left(\frac{\Delta T}{\Delta L_{\text{пр}}} \right). \quad (12)$$

Согласно (12), если $\Delta T=1$ мс и $\Delta L_{\text{пр}}=1$ мм, то для тел с радиусом инерции $R_c \leq 12,5$ см, когда $T_{\min} \leq 1$ с, метод измерения периода малых колебаний позволяет определить центральный момент инерции, как минимум, в два раза точнее. Тем более, что в таких экспериментах улучшение точности измерения расстояния проблематично, а улучшение точности измерения времени одного колебания более реалистично. Метод измерения периодов малых колебаний при указанных погрешностях $\Delta T=1$ мс и $\Delta L_{\text{пр}}=1$ мм обладает преимуществом, если радиус инерции испытуемого тела $R_c < 50$ см.

Утверждение о том, что с помощью маятника сравнения момент инерции твердого тела можно измерить точнее, чем прямым измерением периода колебаний, является принципиально ошибочным. Оно равносильно утверждению, что длину стола можно измерить точнее не прямым сравнением его длины с длиной эталонного метра, а измерив сначала длину стола с помощью некоторой гибкой нити и только потом измерив длину соответствующего отрезка нити с помощью эталонного метра. При сравнении преимуществ этих двух методов в [3] приведен некорректный вывод (см. [3, с. 17, рис. 3]). Если в XVII- XVIII веках примене-

ние метода маятника сравнения было оправдано, то со второй половины XX века стало возможным измерение интервалов времени с точностью $\Delta t = 10^{-6} \div 10^{-12}$ с и этот метод устарел.

Экспериментальная установка

Для фиксации ориентации тела относительно оси вращения в этой работе используется жёсткий двойной подвес (рис. 3). На эксперименте точка центра масс C испытываемого тела оказывается на некотором расстоянии d от выбранного направления AA_1 . Поэтому закрепляем тело в точках пересечения заданного направления AA_1 с поверхностью тела с помощью винтов, имеющих конусные наконечники, далее чуть-чуть расслабляем крепёжный винт A_1 , вследствие чего тело свободно вращается в гравитационном поле притяжения земли вокруг оси AA_1 . Таким образом, точка C всегда оказывается внизу от прямой AA_1 на расстоянии d от неё в вертикальной плоскости AA_1BB_1 .

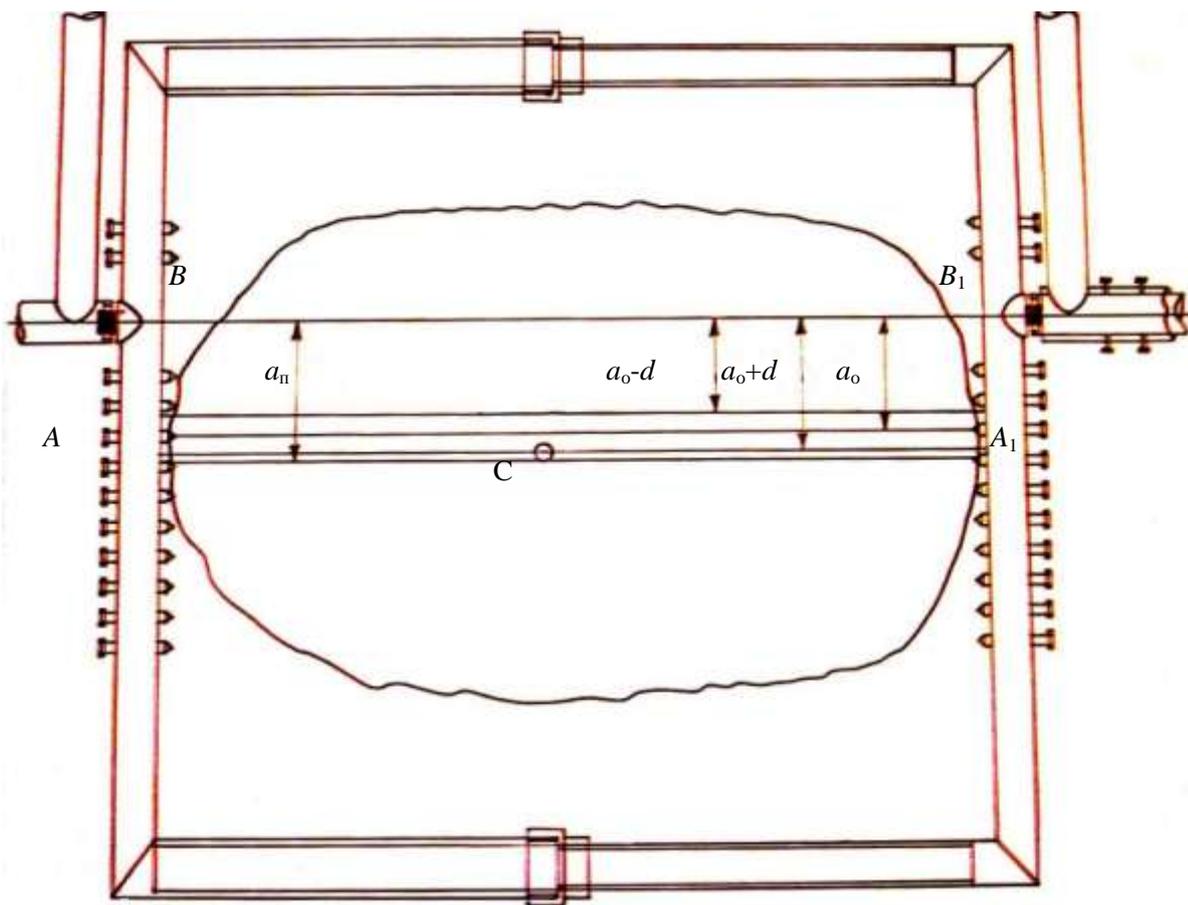


Рис. 3. Схематический вид жёсткого подвеса с опытным образцом

С помощью двух пар дополнительных крепёжных винтов, имеющих конусные заострения и симметрично расположенных по отношению к точкам A и A_1 , фиксируем это положение (положение 1) образца. Регистрируем расстояние a_0 оси AA_1 от оси вращения BB_1 . Далее выводим из равновесия систем U (образец + жёсткий подвес) на определенный угол $\varphi_{\max 1} \approx 20^\circ$ и измеряем суммарное время $N \gg 1$ колебаний, регистрируя амплитудное значение угла отклонения $\varphi_{\max N}$ после N колебаний. Находим период её колебаний T_1 . Поворачивая образец на угол 180° вокруг оси AA_1 , закрепляем его в новом положении (положение 2) и аналогичным образом измеряем период колебаний T_2 .

Далее образец поворачиваем на угол 90° вокруг оси AA_1 по часовой стрелке или против часовой стрелки, закрепляем его в этом положении (положение 3) и снова измеряем период колебаний T_3 физического маятника. Поскольку на эксперименте обычно хорошо выполняется неравенство $d \ll a_0$, то в положении 3 обычно хорошо выполняется равенство $a_3 \approx a_0$. Поэтому результаты измерения в этом положении могут служить приближенной оценкой для величины J_c .

Во всех трёх положениях стараемся измерять совокупное время как можно большего числа N колебаний при соблюдении условия, что угол $\varphi_{\max N}$ поддается наблюдению невооруженным глазом. В каждом положении измерение повторяем три раза и определяем среднее значение периода $\langle T_i \rangle$.

Периоды T_1 и T_2 соответствуют расстояниям $a_1 = a_0 + d$, $a_2 = a_0 - d$ от выбранной центральной оси тела до оси вращения BB_1 . В данном случае известна сумма расстояний параллельных осей от выбранной центральной оси твердого тела $a_1 + a_2 = 2a_0$ и необходимо найти $d = (a_1 - a_2) / 2$.

Конструкция подвеса позволяет изменять значение величины a_0 дискретно с шагом, равным 15 мм. Равенство $AB = A_1B_1$ выполняется с точностью 0,5 мм. Силы трения в точках B и B_1 незначительны (качание на цилиндрических шипах со смазкой). Согласно уравнению (5), для периодов колебаний получим

$$T_1 = 2\pi \sqrt{(J_c + ma_1^2) / (mga_1)} = 2\pi \sqrt{J_1 / (mga_1)},$$

$$J_1 = mga_1 T_1^2 / (4\pi^2) = (mg(a_0 + d) T_1^2) / (4\pi^2) = J_c + ma_1^2 = J_c + m(a_0 + d)^2,$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{(J_c + ma_2^2) / (mga_2)} = 2\pi \sqrt{J_2 / (mga_2)},$$

$$J_2 = mga_2 T_2^2 / (4\pi^2) = (mg(a_0 - d) T_2^2) / (4\pi^2) = J_c + ma_2^2 = J_c + m(a_0 - d)^2,$$

где учтено, что $a_1 = a_0 + d > a_2 = a_0 - d$. Неизвестными являются величины d , J_c , а величины a_0 , T_1 , T_2 измеряются на эксперименте. Следовательно,

$$J_1 - J_2 = mg(a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2) / (4\pi^2) = m(a_1^2 - a_2^2) = m[(a_0 + d)^2 - (a_0 - d)^2] = 4ma_0 d.$$

$$a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2 = (a_0 + d) T_1^2 - (a_0 - d) T_2^2 = a_0(T_1^2 - T_2^2) + d(T_1^2 + T_2^2) = 16\pi^2 a_0 d / g.$$

$$d = \frac{a_0(T_1^2 - T_2^2)}{16a_0\pi^2 / g - (T_1^2 + T_2^2)} = \frac{a_0(T_2^2 - T_1^2)}{(T_1^2 + T_2^2) - 16a_0\pi^2 / g}. \quad (13)$$

В зависимости от конкретных значений величин R_c , a_0 , d во время измерений возможны три варианта: 1) $\lambda_2 < \lambda_1 < 1$; 2) $\lambda_2 < 1 < \lambda_1$; 3) $1 < \lambda_2 < \lambda_1$.

С учетом (13) и того, что $a_1 > a_2 = a_1 - 2d$, получим

Если $0 < d < a_0 < a_0 + d < R_c \Rightarrow \lambda_2 < \lambda_1 < 1$, то

$$T_2 > T_1 > T_{\min} \Rightarrow T_2^2 - T_1^2 < (T_1^2 + T_2^2) - 16a_0\pi^2 / g. \quad (14)$$

Следовательно, критерием первого варианта будет

$$a_0 < 0,125 \cdot 0,99456 \cdot T_1^2 = 0,12432 \cdot T_1^2 \text{ м.}$$

Если же $R_c < a_0 - d < a_0 + d \Rightarrow 1 < \lambda_2 < \lambda_1$, то

$$T_{\min} < T_2 < T_1 \Rightarrow 16a_0\pi^2 / g - (T_1^2 + T_2^2) > 0.$$

Следовательно, критерием третьего варианта будет

$$a_0 > 0,12432(T_1^2 + T_2^2) / 2 \text{ м.}$$

Наконец, если $a_0 - d < R_c < a_0 + d \Rightarrow \lambda_2 < 1 < \lambda_1$,

$$\text{то } 0,12432(T_1^2 + T_2^2) / 2 \text{ м} < a_0 < 0,12432 \cdot T_1^2 \text{ м.} \quad (15)$$

Это двойное неравенство является критерием второго варианта.

Вычисление значения d по формуле (13) позволяет определить положение центральной оси, параллельной к заданному направлению AA_1 . Далее определяется момент инерции относительно найденной центральной оси при $\lambda \approx 1,0$ (второй вариант). Аналогично находится центральная ось в перпендикулярном к AA_1 направлении. Таким же путём определяется направление третьей центральной оси инерции, перпендикулярной к первым двум, и положение точки центра масс. Использованный метод и конструкция подвеса позволяют также определить центробежные моменты инерции испытуемого неоднородного тела для найденной тройки центральных ортогональных осей.

Центр масс жесткого подвеса с массой $m_{\text{п}}$ находится на расстоянии $a_{\text{п}} = R_{\text{сн}}$ от оси вращения BB_1 , где $R_{\text{сн}}$ - радиус инерции подвеса относительно его центральной оси, параллельной к BB_1 . Предусмотрена регулировка горизонтального размера рамки подвеса, позволяющая почти удвоить его минимальную ширину. Перемещения двух половинок рамы подвеса и крепёжных винтов происходят строго параллельно к оси вращения BB_1 и не изменяют момента инерции подвеса $J_{\text{п}}$ по отношению к оси вращения. Это позволяет использовать данный подвес с неизменными характеристиками для испытуемых тел с массой и размерами в некотором интервале значений.

Масса двойного подвеса считается известным с точностью $\sim 0,1\%$, а расстояние его центра масс от оси вращения с точностью $\sim 0,5$ мм (определяется методом взвешивания). В случае $a_{\text{п}} = R_{\text{сн}}$, момент инерции подвеса $J_{\text{п}}$ можно измерить с точностью $\sim 0,4\%$.

Установка снабжена:

- угломером с центром на оси вращения для измерения (рис. 4) угла отклонения маятника и определения углов между различными осями вращения;
- отвесом для юстировки угломера по направлению вектора ускорения \vec{g} ;
- квазиматематическим маятником для определения $L_{\text{ип}}$.

Если подсчет числа колебаний производится невооруженным глазом, то минимальное значение периода колебаний для надежности должно быть $T_{\text{мин}} \geq 0,4$ с. Следовательно, $0,4 \text{ с} \leq T_{\text{мин}} \leq 2 \text{ с}$ и соответственно, согласно формуле (11), получим

$$19,9 \text{ мм} \leq R_c = 0,5 \left(L_{\text{ип}} \right)_{\text{мин}} = 0,1243 \frac{\text{М}}{\text{с}^2} \cdot T_{\text{мин}}^2 \leq 497,3 \text{ мм.}$$

Таким образом, при указанных погрешностях метод измерений периода колебаний обладает явным преимуществом по сравнению с другими методами, когда минимальный период колебаний испытуемого тела $T_{\text{мин}} \leq 2$ с.

Учет массы и момента инерции жесткого подвеса

Формула (13) для d получена без учета массы и момента инерции жесткого подвеса. Обозначим массу подвеса через $m_{\text{п}}$, а массу тела через $m_{\text{т}}$. Расстояние $a_{\text{п}}$, точки центра масс подвеса от оси вращения BB_1 определяется с точностью ($\sim 0,5$ мм). Обозначим суммарную массу системы $m_{\text{с}} = m_{\text{п}} + m_{\text{т}}$. На эксперименте обычно выполняется неравенство $d < 0,1a_0$.

Расстояния точки центра масс системы от оси вращения BB_1 для перечисленных ранее трёх положений (положение 1, положение 2, положение 3) определяются соотношениями

$$a_{\text{с1}} = \left(a_{\text{п}} m_{\text{п}} + (a_0 + d) m_{\text{т}} \right) / m_{\text{с}}, \quad (16)$$

$$a_{s2} = (a_n m_n + (a_0 - d) m_t) / m_s, \quad (17)$$

$$a_{s3} = (a_n m_n + a_0 m_t) / m_s, \quad (18)$$

где должно выполняться условие $d < a_0 + a_n m_n / m_t$, чтобы при поворачивании тела вокруг оси AA_1 на 180° , точка центра масс системы не оказалась на противоположной стороне оси вращения (рис. 3). В правой части этих равенств неизвестной величиной является только d .

Определение a_{s3} требует некоторого уточнения. Если выбрать такую прямоугольную правовинтовую систему координат XYZ , чтобы направление OX совпало с направлением оси вращения BB_1 (слева направо), плоскость XOZ совпала с плоскостью BB_1A_1A и при этом ось OZ направить вертикально вниз по вектору \vec{g} , то ось OY будет направлена перпендикулярно к плоскости чертежа в сторону читателя (рис. 3). В такой ситуации величины a_{s1} , a_{s2} , a_{s3} представляют собой z -координату центра масс – системы в соответствующих положениях. Координата x – центра масс системы остаётся постоянной во всех трёх положениях и практически не влияет на величину периода T колебаний системы. В состоянии устойчивого равновесия y -координата центра масс системы – во всех трёх положениях равняется нулю. Однако, при переходе в положение 3 вращением тела на угол 90° вокруг оси AA_1 y -координата точки центра масс тела – изменяется с нуля до значения d . Поэтому после равновесия с подвесом его величина станет равной $d \cdot m_t / m_s$, если z -координата центра масс подвеса равна $a_n \cong a_0$.

При этом y -координата центра масс подвеса – будет отрицательной величиной $-d \cdot m_t / m_s$. Поэтому z -координата центра масс тела – в состоянии устойчивого равновесия системы в положении 3 будет не a_0 , а незначительно больше:

$$a_{01} = \sqrt{a_0^2 + (d \cdot m_t / m_s)^2}. \quad (19)$$

Координата z – центра масс подвеса – будет не a_n , а незначительно меньше:

$$a_{n1} = \sqrt{a_n^2 - (d \cdot m_t / m_s)^2}. \quad (20)$$

В результате значение a_{s3} практически не изменится, поскольку на эксперименте хорошо выполняется условие $(d a_n m_n) / (a_0^2 m_t) \ll 1$.

Следовательно, измеряя период гармонических колебаний T_n пустого жёсткого подвеса и зная величины m_n (взвешиванием) и a_n (методом взвешивания), можно из равенств (5) и (6) определить значения момента инерции J_n и центрального момента инерции $(J_n)_c$ жёсткого подвеса.

Установив исследуемое тело в положение 1, находим период колебаний

$$T_{01} = 2\pi \sqrt{J_{s1} / (m_s a_{s1} g)}. \quad (21)$$

Проверяем выполнение неравенства $a_0 < 0,125 \cdot 0,99456 \cdot T_1^2 = 0,12432 \cdot T_1^2$ м, являющегося критерием варианта 1: $\lambda_2 < \lambda_1 < 1$. Если неравенство не выполняется, то уменьшаем a_0 на один или несколько шагов, снова измеряем T_{01} и добиваемся выполнения указанного неравенства. Определяем

$$J_{s1} = T_{01}^2 m_s a_{s1} g / (4\pi^2), \text{ поскольку } J_{s1} = J_{t1} + J_n, \text{ то } J_{t1} = J_{s1} - J_n. \quad (22)$$

Установив исследуемое тело в положение 2, находим период колебаний

$$T_{02} = 2\pi \sqrt{J_{s2} / (m_s a_{s2} g)}. \quad (23)$$

Следовательно,

$$J_{s2} = T_{02}^2 m_s a_{s2} g / (4\pi^2), \text{ поскольку } J_{s2} = J_{t2} + J_n, \text{ то } J_{t2} = J_{s2} - J_n. \quad (24)$$

Находим значение разности

$$\begin{aligned} J_{S1} - J_{S2} &= J_{T1} + J_{\Pi} - J_{T2} - J_{\Pi} = J_{T1} - J_{T2} = \\ &= m_T (a_0 + d)^2 + (J_{Tc}) - m_T (a_0 - d)^2 - (J_{Tc}) = 4m_T a_0 d. \end{aligned} \quad (25)$$

С другой стороны, из выражений (22) и (24) следует, что

$$\begin{aligned} J_{S1} - J_{S2} &= \frac{m_S g (T_{01}^2 a_{S1} - T_{02}^2 a_{S2})}{4\pi^2} = \frac{g \{ T_{01}^2 [a_{\Pi} m_{\Pi} + (a_0 + d) m_T] - T_{02}^2 [a_{\Pi} m_{\Pi} + (a_0 - d) m_T] \}}{4\pi^2} = \\ &= \frac{g [a_{\Pi} m_{\Pi} (T_{01}^2 - T_{02}^2) + m_T a_0 (T_{01}^2 - T_{02}^2) + d m_T (T_{01}^2 + T_{02}^2)]}{4\pi^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Приравняв правые части (25) и (26), для d получаем равенство

$$d = \frac{(T_{01}^2 - T_{02}^2)(a_0 + a_{\Pi} m_{\Pi} / m_T)}{16a_0 (\pi^2 / g) - (T_{01}^2 + T_{02}^2)} = (T_{01} - T_{02}) \frac{(T_{01} + T_{02})(a_0 + a_{\Pi} m_{\Pi} / m_T)}{16a_0 (\pi^2 / g) - (T_{01}^2 + T_{02}^2)} = \frac{(T_{01} - T_{02})}{k}. \quad (27)$$

В приближении $a_{\Pi} m_{\Pi} \ll a_0 m_T$ и с учетом того, что $\pi^2 / g \cong 1$, получим

$$d = \frac{(T_{01}^2 - T_{02}^2) a_0}{16a_0 - (T_{01}^2 + T_{02}^2)} = (T_{01} - T_{02}) \frac{(T_{01} + T_{02}) a_0}{16a_0 - (T_{01}^2 + T_{02}^2)} = \frac{(T_{01} - T_{02})}{k} = \frac{(T_{01} - T_{02})}{2(dT / da_T)},$$

где k - является чувствительностью данного метода и представляется в виде

$$k = \frac{16a_0 - (T_{01}^2 + T_{02}^2)}{(T_{01} + T_{02}) a_0} = \frac{(T_{01} - T_{02})}{d} = 2 \frac{(T_{01} - T_{02})}{\Delta a_T} = 2 \frac{\Delta T}{\Delta a_T} \cong 2 \frac{dT}{da_T}. \quad (28)$$

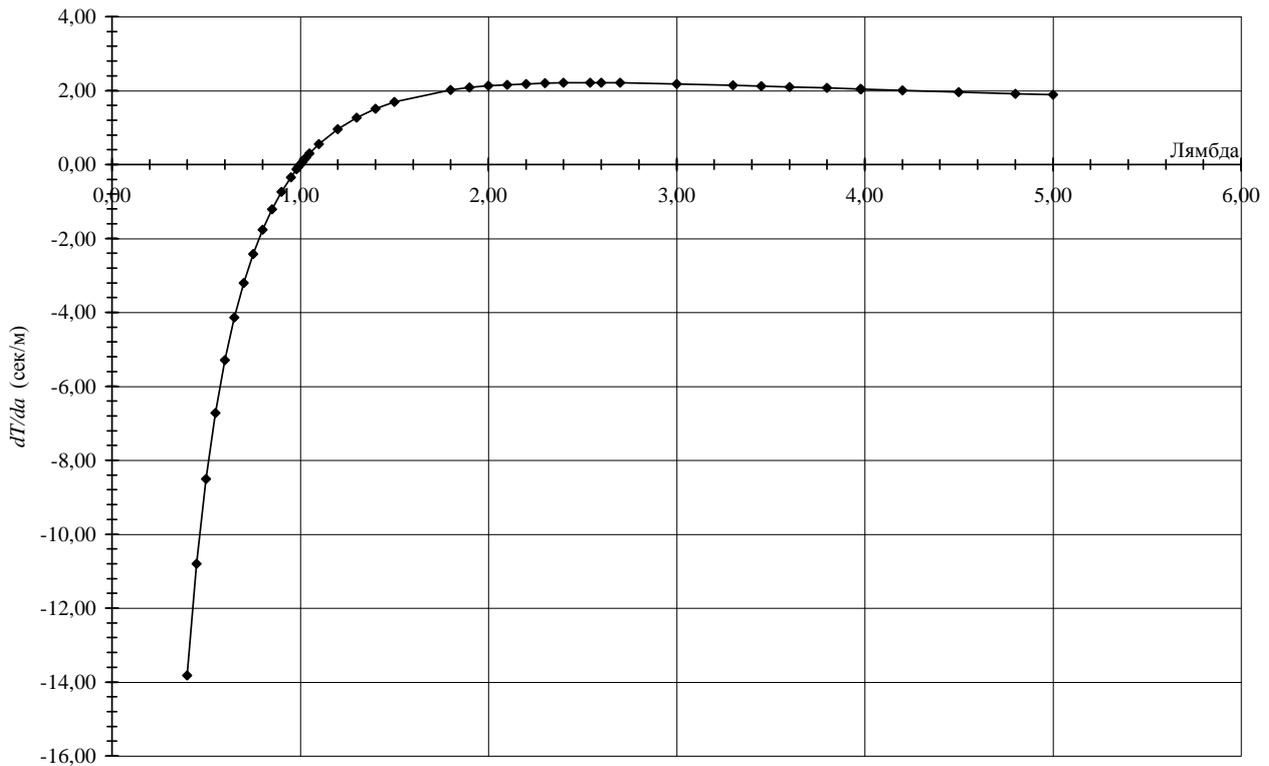


Рис. 4. Зависимость величины dT / da от безразмерного параметра λ

Здесь $\Delta a_T = 2d$ есть изменение расстояния центра масс испытуемого тела от оси вращения. Чем больше значение k для подающейся измерению разности периодов $T_{01} - T_{02}$, тем

точнее можно определить d , то есть положение искомой центральной оси, и тем выше будет чувствительность метода. Желательно, чтобы точность определения d была не ниже точности измерения a_0 .

Таким образом, необходимо исследовать функцию $k \cong 2(dT / da_r)$ (рис. 4).

Чтобы обеспечить хорошую точность определения момента инерции $(J_r)_c$, измерения необходимо провести в условиях, когда значение периода колебаний близко к своему минимальному значению $T_{01} \cong T_{\min}$, $T_{02} \cong T_{\min}$, то есть когда $\lambda_2 < 1 < \lambda_1$ (вариант 2).

Условие, $a=R_c$, обеспечивающее наибольшую точность измерения J_c , то есть $\Delta J_c / J_c \cong 0,4\%$, осуществляется при $dL_{\text{ип}} / da = 0 \Rightarrow dT / da = k / 2 = 0$ или, что то же самое, при $dL_{\text{ип}} / d\lambda = 0 \Rightarrow dT / d\lambda = R_c \cdot dT / da = R_c (da / dT) = 0$ (рис. 4).

Это означает, что при точном выполнении условия $a=R_c$ период колебаний, обладая минимумом, не меняется с изменением a , то есть $da / dT = \infty$. В этой точке небольшие изменения a не вызывают ощутимые изменения периода колебаний T , то есть чувствительность метода равняется нулю: $k=0$.

Следовательно, требуется некоторый компромисс между точностями определения J_c и d , если они измеряются лишь при одном значении a_0 .

Если предположить, что масса и период колебаний физического маятника определяются абсолютно точно, то погрешность измерения момента инерции будет зависеть только от погрешности измерения расстояния a . На рис. 5 приведены кривая производной da / dT и график функции $\Delta J_c / J_c$ для момента инерции твердого тела без учета погрешностей измерения массы и периода колебаний, а также без учета корреляции между величинами a и T .

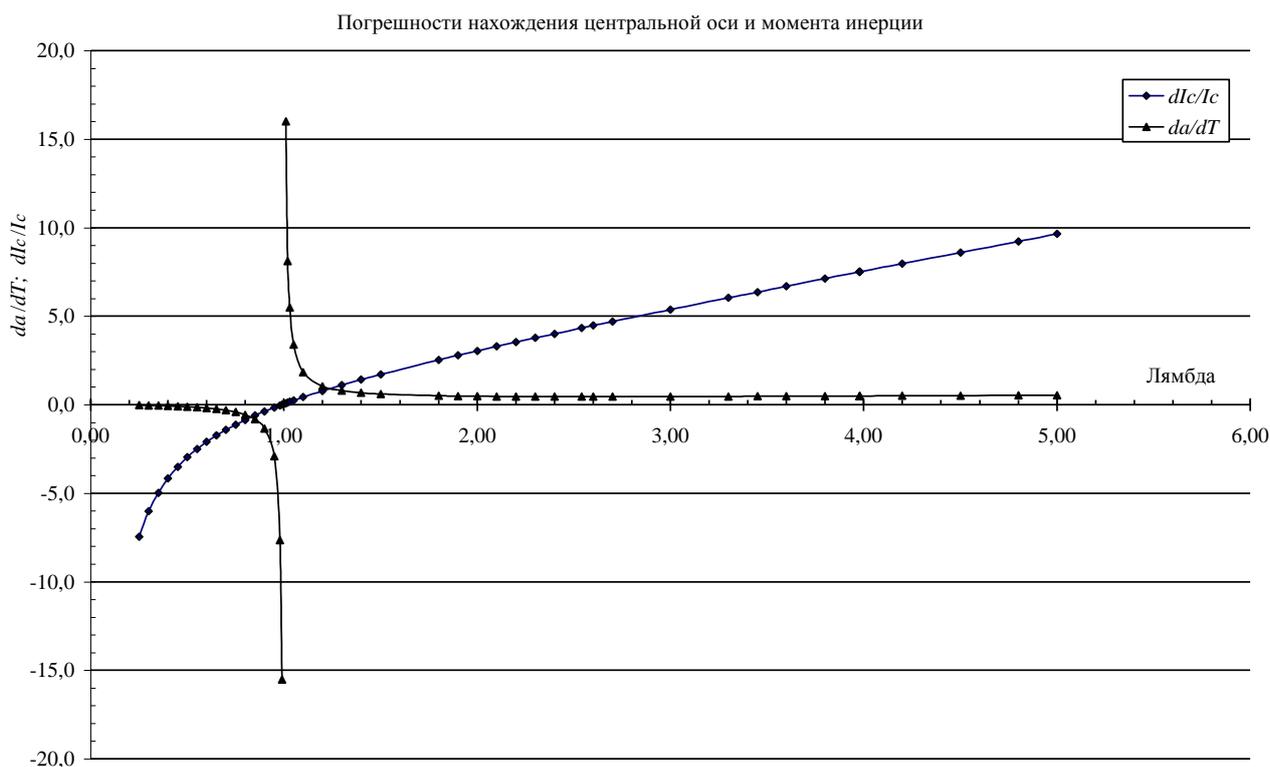


Рис. 5. Зависимость величин da / dT и dI_c / I_c от безразмерного параметра λ

Библиографический список

1. **Стороженко, В.А.** Синхронизация вращения в задаче определения главной центральной оси инерции неоднородного твёрдого тела. Проблемы механики / В.А. Стороженко. – М.: Физматлит, 2003.
2. **Стороженко, В.А.** Определение направлений главных осей инерции в теле произвольной формы/ Киев: Ин-т матем. АН УССР: 86.32, 1986. - 40 с.
3. **Гернет, М.М.** Определение моментов инерции / М.М. Гернет, В.Ф. Ратобылский. – М.: Машиностроение, 1969. - 315 с.
4. **Лаврентьев, М.А.** Методы теории функции комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

*Дата поступления
в редакцию 02.04.2010*

S.E. Piliposian

MEASUREMENT OF RANDOM SOLID BODY MOMENT OF INERTIA

The article contains a description of experimental facility and measurement procedure for heterogeneous solid body moment of inertia relating to central axis of assigned direction with at least 0.5% accuracy and determination of mass center point with at least 1 mm accuracy.

Special attention is given to estimation of measurement errors performed using the method of recording of vibration periods. The measurements are performed with the use of an ordinary time-interval recorder, a ruler, an angle gage, and a simple experimental facility. Experiment conditions that provide minimum error are defined. The article contains diagrams and tables of physical quantities, which are the most important for the achievement of this goal.

Key words: moment of inertia, radius of inertia, main axis, equivalent simple pendulum, equivalent length, Joukowski function, method of parallel axes, heterogeneous solid body, rigid double suspension.