

УДК 537.86

Е.М. Громов, О.М. Солычева, В.В. Тютин

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЕКТОРНЫХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ
МАЛОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ В ПЛАВНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ**

Государственный университет – Высшая школа экономики, Нижегородский филиал

В рамках третьего приближения теории дисперсии нелинейных волн получено замкнутое уравнение движения центра «масс» векторного волнового пакета в анизотропных средах с произвольным профилем неоднородности. В зависимости от начальных условий показана возможность как локализации траекторий движения коротких пакетов, так и инфинитного движения пакетов. Область локализации коротких пакетов отличается от области локализации протяженных пакетов при тех же начальных условиях и может как превышать, так и уменьшаться по сравнению с областью локализации протяженных волновых пакетов и определяется параметром линейной дисперсии третьего порядка.

Ключевые слова: дисперсия, нелинейность, неоднородность, поляризация, короткий векторный волновой пакет, траектория движения.

Введение

Интерес к динамике коротких нелинейных векторных волновых пакетов в неоднородных средах обусловлен многочисленными приложениями в различных областях физики. Так, в гидродинамике распространение коротких (порядка нескольких длин волн) цугов интенсивных поверхностных волн исследуется, в частности, с проблемой волн «убийц» и волн цунами [1–3]. В нелинейной оптике распространение коротких оптических импульсов в волоконно-оптических линиях связи исследуется, в частности, с проблемой увеличения информационной емкости линий связи [4].

Распространение оптических импульсов достаточно большой протяженности в одномодовых неоднородных линиях хорошо описывается нелинейным уравнением Шредингера (NSE) с неоднородным потенциалом [5–6], учитывающим линейную дисперсию второго порядка, кубичную нелинейность (self-phase modulation) и неоднородный потенциал. В этом случае при произвольном профиле потенциала найдены траектории движения центра «масс» протяженного пакета, а при линейном профиле неоднородности найдено точное «солитонное» решение (солитон Чена) [7]. В двухмодовых волноводах это неоднородные связанные нелинейные уравнения Шредингера (CNSE) [8–10], учитывающие взаимодействие мод через перекрестную фазовую модуляцию (cross-phase modulation) и неоднородный потенциал и связанные уравнения Гинзбурга–Ландау (CGL) [11–13], учитывающие также и линейную дисперсию третьего порядка (third-order linear dispersion) и потери в волноводе.

Уменьшение протяженности волновых импульсов приводит к необходимости учета в модельных нелинейных уравнениях членов более высокого (третьего) порядка малости, соответствующих нелинейным эффектам укрупнения (stepping) [14] и индуцированное рамановское рассеяние (stimulated Raman-scattering) [15]. Так, в одномодовых неоднородных волноводах распространение коротких оптических импульсов может быть описано нелинейным уравнением Шредингера третьего порядка (TNSE) с неоднородным потенциалом [16–22], содержащим как линейное слагаемое, отвечающее линейной дисперсии третьего порядка (third-order linear dispersion), так и нелинейные члены самовоздействия: самоукрупнения (self-stepping) и самоиндуцированное рамановское рассеяние (self-stimulated Raman-scattering). В этом случае при произвольном профиле неоднородного потенциала найдены траектории движения центра «масс» короткого волнового пакета, а при линейном профиле неоднородности найдено точное решение в виде короткого скалярного солитона, обобщающее солитон

Чена [7]. В работе [23] при выполнении условий Хироты получено замкнутое (не требующее знания формы волнового пакета в каждый момент времени) уравнение, описывающее траектории движения пакета в слабо неоднородной среде. Там же была показана возможность «выхода» волнового пакета из «ямы», или, наоборот, – ограниченного движения пакета на вершине «холма», что отличает поведение коротких волновых пакетов от поведения упругих частиц. Отличие траекторий коротких волновых пакетов от траекторий частиц относится к эффектам нелинейной дисперсии.

При распространении коротких векторных оптических импульсов в двухмодовых неоднородных волноводах возникает необходимость учета в каждом из нелинейных уравнений Шредингера третьего порядка для различных поляризаций еще и перекрестных нелинейных членов третьего порядка малости, соответствующих перекрестному укручению (cross-stepping) и перекрестному индуцированному рамановскому рассеянию (cross-stimulated Raman-scattering) [24–26]. Так возникают два связанных нелинейных уравнения Шредингера третьего порядка (CTNSE) с неоднородным потенциалом, содержащих нелинейные члены третьего порядка малости, описывающие как само воздействие (self-stepping и self-stimulated Raman-scattering), так и перекрестное взаимодействие различных поляризаций (cross-stepping и cross-stimulated Raman-scattering) [24].

В данной работе будет рассмотрена динамика коротких векторных волновых пакетов в плавно неоднородных анизотропных средах. Рассмотрение будет проведено в рамках третьего приближения теории дисперсии нелинейных волн. Будет получено замкнутое уравнение движения центра «масс» векторного волнового пакета при произвольном профиле неоднородности. В зависимости от начальных условий показана возможность как локализации траекторий движения коротких пакетов волн на параболическом профиле, так и инфинитного движения пакетов. Область локализации коротких пакетов отличается от области локализации протяженных пакетов при тех же начальных условиях и может как превышать, так и уменьшаться по сравнению с областью локализации протяженных волновых пакетов и определяется параметром линейной дисперсии третьего порядка.

Постановка задачи

Распространение векторного волнового поля $\vec{E} = \vec{e}_1 U(\xi, t) \exp(i\omega t - ik_u \xi) + \vec{e}_2 W(\xi, t) \exp(i\omega t - ik_w \xi)$ малой протяженностью (в несколько длин волн $k_{u,w} L_{u,w} \gtrsim 1$) и малой длительности (в несколько периодов $\omega T_{u,w} \gtrsim 1$), в слабо анизотропных нелинейных диспергирующих средах с неоднородным потенциалом $\Phi(x)$ достаточно хорошо описывается третьим (абберационным) приближением теории дисперсии нелинейных волн, в котором учитываются члены третьего порядка малости: это линейные члены $\varepsilon^3 \sim \partial^3 U / \partial \xi^3, \partial^3 W / \partial \xi^3$, соответствующие линейной дисперсии третьего порядка (third-order linear dispersion), и нелинейные члены, соответствующие эффектам самоукручения (self-stepping) $\varepsilon^3 \sim \partial(|U|^2 U) / \partial \xi, \partial(|W|^2 W) / \partial \xi$, самоиндуцированного рамановского рассеяния (self-stimulated Raman-scattering) $\varepsilon^3 \sim W \partial(|W|^2) / \partial \xi, U \partial(|U|^2) / \partial \xi$, перекрестного укручения (cross-stepping) $\varepsilon^3 \sim \partial(|W|^2 U) / \partial \xi, (|U|^2 W)'_{\xi}, \partial(W^2 U^*) / \partial \xi, (U^2 W^*)'_{\xi}$ и перекрестного индуцированного рамановского рассеяния (cross-stimulated Raman-scattering) $\varepsilon^3 \sim W (|U|^2)'_{\xi}, U \partial(|W|^2) / \partial \xi, U^* \partial(W^2) / \partial \xi, W^* \partial(U^2) / \partial \xi$. В этом приближении базовыми уравнениями динамики медленных огибающих U и W различных поляризационных компонент при условии малого отличия их волновых чисел $|k_u - k_w| \ll k_{u,w}$ является система двух связанных нелинейных уравнений Шредингера третьего порядка:

$$2i \left[\frac{\partial U}{\partial t} + V_g^L \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial (|U|^2 U + \sigma |W|^2 U)}{\partial x} + \frac{\beta \sigma}{2} \frac{\partial (W^2 U^*)}{\partial x} + \mu U \frac{\partial (|U|^2 + \sigma |W|^2)}{\partial x} + \frac{\mu \sigma}{2} U^* \frac{\partial (W^2)}{\partial x} \right] + \quad (1)$$

$$+ q \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\alpha (|U|^2 + \sigma |W|^2) U + \alpha \sigma W^2 U^* + i\gamma \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + U \cdot \Phi(x) = 0,$$

$$2i \left[\frac{\partial W}{\partial t} + V_g^L \frac{\partial W}{\partial x} + \beta \frac{\partial (|W|^2 W + \sigma |U|^2 W)}{\partial x} + \frac{\beta \sigma}{2} \frac{\partial (U^2 W^*)}{\partial x} + \mu W \frac{\partial (|W|^2 + \sigma |U|^2)}{\partial x} + \frac{\mu \sigma}{2} W^* \frac{\partial (U^2)}{\partial x} \right] + \quad (2)$$

$$+ q \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2\alpha (|W|^2 + \sigma |U|^2) W + \alpha \sigma U^2 W^* + i\gamma \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + W \cdot \Phi(x) = 0,$$

где $V_g^L = \partial\omega/\partial k$ – линейная групповая скорость; $\omega = \omega(k, |U|^2, |W|^2)$ – нелинейное дисперсионное соотношение; $q = -\partial^2\omega/\partial k^2$ – коэффициент линейной дисперсии второго порядка; $\alpha = \partial\omega/\partial(|U|^2) = \partial\omega/\partial(|W|^2)$ – коэффициент кубичной нелинейности (self-phase modulation); σ – коэффициент перекрестной фазовой модуляции (cross-phase modulation) (так, для «керровской» нелинейности $\sigma = 2/3$); $\gamma = -\partial^3\omega/(3\partial k^3)$ – коэффициент линейной дисперсии третьего порядка (third-order linear dispersion); β – коэффициент самоукручения (self-stepping) или нелинейной дисперсии; μ – коэффициент самоиндуцированного рамановского рассеяния (self-stimulated Raman-scattering); U^* и W^* – величины, комплексно-сопряженные U и W соответственно.

Сохранение энергии короткого векторного волнового пакета в неоднородных средах

Определим закон изменения энергии ортогональных волновых полей малой протяженности в системе (1)–(2). Для этого умножим (1) на величину U^* , комплексно-сопряженную к U , и сложим полученное уравнение с комплексно ему сопряжённым. Интегрируя полученное уравнение по x от $-\infty$ до $+\infty$ при нулевых условиях на бесконечности $(U, W)|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$, получим скорость изменения энергии поляризационной компоненты U :

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 dx = -\sigma(2\mu - 3\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 \frac{\partial |W|^2}{\partial x} dx - \frac{\sigma}{4} (2\mu - 3\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(U^*)^2 \frac{\partial (W^2)}{\partial x} + U^2 \frac{\partial (W^*)^2}{\partial x} \right] dx. \quad (3)$$

В частном случае при одной пространственной фазовой модуляции различных поляризаций $U = |U| \exp(i\Omega_u(t) + i\phi(x))$, $W = |W| \exp(i\Omega_w(t) + i\phi(x))$ соотношение (3) принимает более простую форму

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 dx = -\frac{3}{2} \sigma(2\mu - 3\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 \frac{\partial |W|^2}{\partial x} dx.$$

Аналогично из уравнения (2) получим скорость изменения энергии для поляризационной компоненты W :

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |W|^2 dx = -\sigma(2\mu - 3\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} |W|^2 \frac{\partial |U|^2}{\partial x} dx - \frac{\sigma}{4} (2\mu - 3\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(W^*)^2 \frac{\partial (U^2)}{\partial x} + W^2 \frac{\partial (U^*)^2}{\partial x} \right] dx. \quad (4)$$

Из (3)–(4) следует, что распространение короткого волнового поля одной поляризации в присутствии волнового поля другой поляризации сопровождается энергообменом между различными поляризационными компонентами. Складывая соотношения (3) и (4), получим закон сохранения энергии векторного волнового пакета:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (|U|^2 + |W|^2) dx = 0. \quad (5)$$

Траектории движения коротких векторных пакетов в неоднородных средах

В дальнейшем будем интересоваться усредненной характеристикой волнового пакета в виде центра «масс» пакета

$$\bar{x} = \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(|U|^2 + |W|^2) dx,$$

где $N_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (|U|^2 + |W|^2) dx$ – энергия векторного пакета. Найдем скорость движения центра «масс» векторного пакета $V(t) = d\bar{x}/dt$. Умножим (1) на xU^* , вычитая из полученного уравнения комплексно ему сопряженное, и проинтегрируем полученное уравнение по x от $-\infty$ до $+\infty$ при нулевых условиях на бесконечности $(U, W)|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$. Аналогично умножим (2) на xW^* , вычитая из полученного уравнения комплексно ему сопряженное, и проинтегрируем полученное уравнение по x от $-\infty$ до $+\infty$ при нулевых условиях на бесконечности $(U, W)|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$. Складывая полученные таким образом соотношения, будем иметь для скорости движения центра «масс» векторного пакета:

$$\begin{aligned} V(t) = V_g + \frac{q}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x} |U|^2 + \frac{\partial \varphi_w}{\partial x} |W|^2 \right) dx + \frac{(3\beta + 2\mu)}{2N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} (|U|^4 + |W|^4) dx + \\ + \frac{\sigma(3\beta + 2\mu)}{4N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(4|U|^2|W|^2 + (WU^*)^2 + (W^*U)^2 \right) dx - \frac{3\gamma}{2N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial W}{\partial x} \right|^2 \right) dx, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\varphi_{u,w}$ – фаза огибающих U и W соответственно: $U = |U|e^{i\varphi_u}$, $W = |W|e^{i\varphi_w}$.

Найдем ускорение короткого векторного пакета. Дифференцируя (6) по времени с учетом скорости изменения плотности импульса векторного волнового пакета

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x} |U|^2 + \frac{\partial \varphi_w}{\partial x} |W|^2 \right) = \frac{\alpha}{4} \frac{\partial (|U|^4 + |W|^4)}{\partial x} + \frac{\alpha\sigma}{2} \frac{\partial (|U|^2|W|^2)}{\partial x} - \\ - q \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial W}{\partial x} \right|^2 \right) - \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x} |U|^4 + \frac{\partial \varphi_w}{\partial x} |W|^4 \right) - \\ - 2(\mu + \beta) \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x} \frac{\partial |U|^4}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_w}{\partial x} \frac{\partial |W|^4}{\partial x} \right) - \frac{\beta\sigma}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_w}{\partial x} \right) \left(4|U|^2|W|^2 + (UW^*)^2 + (U^*W)^2 \right) \right) - \\ - (\mu + \beta)\sigma \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_w}{\partial x} \right) \frac{\partial (4|U|^2|W|^2 + (UW^*)^2 + (U^*W)^2)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dx} (|U|^2 + |W|^2), \end{aligned} \quad (7)$$

получим для величины ускорения центра «масс» пакета

$$\begin{aligned} a(t) = \frac{dV}{dt} = \frac{3\alpha\gamma - q\beta}{2N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial x^2} |U|^4 + \frac{\partial^2 \varphi_w}{\partial x^2} |W|^4 \right) dx + \\ + \frac{\sigma(3\alpha\gamma - q\beta)}{8N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_w}{\partial x^2} \right) \left(4|U|^2|W|^2 + (UW^*)^2 + (U^*W)^2 \right) dx - \\ - \frac{q}{2N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi}{dx} (|U|^2 + |W|^2) dx - \frac{3\gamma}{2N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi}{dx} \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial x} |U|^2 + \frac{\partial \varphi_w}{\partial x} |W|^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Полагая в дальнейшем параметры исходной системы (1)–(2) связанными соотношением $3\alpha\gamma - q\beta = 0$, уравнение (8) примет вид

$$a(t) = -\frac{q}{2N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi}{dx} (|U|^2 + |W|^2) dx - \frac{3\gamma}{2N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi}{dx} \left(\frac{\partial\varphi_u}{\partial x} |U|^2 + \frac{\partial\varphi_w}{\partial x} |W|^2 \right) dx. \quad (9)$$

Будем рассматривать плавно неоднородные среды, масштаб неоднородности которых L_Φ много больше масштабов неоднородности огибающих векторного волнового пакета $L_{u,w}$: $L_\Phi \gg L_{u,w}$. В этом случае из (9) получим для ускорения векторного пакета

$$a(t) = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)_{x=\bar{x}} \left(q + \frac{3\gamma}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial\varphi_u}{\partial x} |U|^2 + \frac{\partial\varphi_w}{\partial x} |W|^2 \right) dx \right). \quad (10)$$

Разделив (10) на $(d\Phi/dx)_{\bar{x}}$ и дифференцируя полученное соотношение по времени, будем иметь:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a(t)}{(d\Phi/dx)_{\bar{x}}} \right) = -\frac{3\gamma}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\varphi_u}{\partial x} |U|^2 + \frac{\partial\varphi_w}{\partial x} |W|^2 \right) dx. \quad (11)$$

С учетом соотношения (7) для скорости изменения плотности импульса соотношение (11) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{a(t)}{(d\Phi/dx)_{\bar{x}(t)}} \right) = & -\frac{3\gamma}{4} \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)_{\bar{x}(t)} - \frac{3\gamma(\mu + \beta)}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2\varphi_u}{\partial x^2} |U|^4 + \frac{\partial^2\varphi_w}{\partial x^2} |W|^4 \right) dx - \\ & - \frac{3\gamma(\mu + \beta)\sigma}{2N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2\varphi_u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_w}{\partial x^2} \right) \left(4|U|^2|W|^2 + (UW^*)^2 + (U^*W)^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (12)$$

При $\mu + \beta = 0$ из (12) получим уравнение для траекторий движения коротких векторных волновых пакетов в плавно неоднородной среде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a(t)}{(d\Phi/dx)_{\bar{x}}} \right) = -\frac{3\gamma}{4} \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)_{\bar{x}}. \quad (13)$$

С учетом (10) для величины начального ускорения пакетов $a_0 = \left(\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} \right)_{t=0} = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)_{\bar{x}_0} (q + 3\gamma p_0)$

первый интеграл уравнения (13) имеет вид

$$\left(\frac{1}{(d\Phi/dx)_{\bar{x}}} \frac{dV}{dt} \right)^2 + \frac{3\gamma V}{2} = \frac{1}{4} (q + 3\gamma p_0)^2 + \frac{3\gamma V_0}{2} = C_0, \quad (14)$$

где $\bar{x}_0 = (\bar{x})_{t=0}$ – начальная координата пакета,

$$\begin{aligned} V_0 = \left(\frac{d\bar{x}}{dt} \right)_{t=0} = & V_g + qp_0 + \frac{\beta}{2N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} (|U|^4 + |W|^4)_{t=0} dx + \\ & + \frac{\beta\sigma}{4N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(4|U|^2|W|^2 + (WU^*)^2 + (W^*U)^2 \right)_{t=0} dx - \frac{3\gamma}{2N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial W}{\partial x} \right|^2 \right)_{t=0} dx, \end{aligned}$$

начальная скорость пакета; $p_0 = \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial\varphi_u}{\partial x} |U|^2 + \frac{\partial\varphi_w}{\partial x} |W|^2 \right)_{t=0} dx$ – начальный импульс векторного волнового пакета. В частности, при начальной фазе огибающей пакета, равной $\varphi_{u,w} = k_0 x$, получим для начального импульса очевидное соотношение $p_0 = k_0$.

Из (14) следует, что скорость пакета может принимать значения $\gamma V \leq 2C_0/3$.

Интегрируя (14), получим для траекторий коротких волновых пакетов

$$\frac{1}{3}\left(C_0 - \frac{3}{2}\gamma V\right)^{3/2} - C_0\left(C_0 - \frac{3}{2}\gamma V\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3\gamma}{2}\right)^2 \cdot \Phi(\bar{x}) = C. \quad (15)$$

1. При $C_0 > 0$, отвечающем условию $(q + 3\gamma p_0)^2 + 6\gamma V_0 > 0$, траектории движения из (15) описываются уравнением

$$\frac{1}{3}(1-v)^{3/2} - (1-v)^{1/2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{C_0}}{V_*^2} \cdot \Phi(\bar{x}) = \frac{1}{3}(1-v_0)^{3/2} - (1-v_0)^{1/2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{C_0}}{V_*^2} \cdot \Phi(\bar{x}_0), \quad (16)$$

где $v = V(\bar{x})/V_* \leq 1$, $v_0 = V_0/V_*$ и $V_* = 2C_0/3\gamma$.

На рис. 1 приведена фазовая плоскость уравнения (16) при $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{C_0}}{V_*^2} \cdot \Phi(x) = x^2$, $\bar{x}_0 = 0$ и различных начальных значениях v_0 .

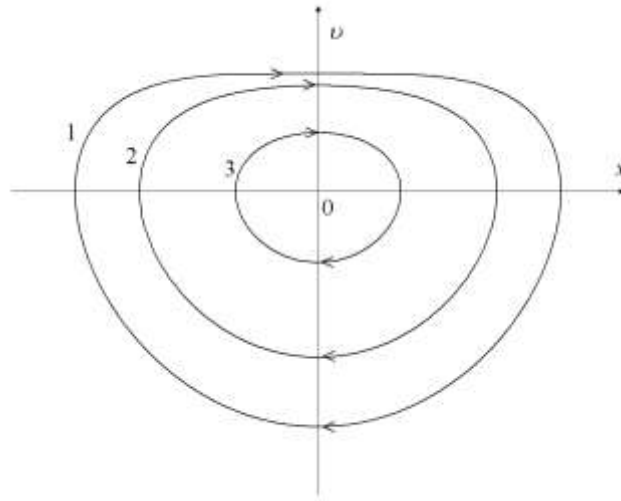


Рис. 1. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям $v_0(1) > v_0(2) > v_0(3)$

При достаточно малых значениях скорости движения пакетов, отвечающих условию $|v| \ll 1$, траектории движения пакетов из (16) с учетом разложений

$$\sqrt{1-v} \approx 1 - \frac{1}{2}v - \frac{1}{8}v^2 - \frac{1}{16}v^3 \quad \text{и} \quad (1-v)^{3/2} \approx 1 - \frac{3}{2}v + \frac{3}{8}v^2 + \frac{1}{16}v^3$$

удовлетворяют соотношению

$$v^2\left(1 + \frac{1}{2}v\right) + 2\frac{\sqrt{C_0}}{V_*^2} \cdot \Phi(\bar{x}) = v_0^2\left(1 + \frac{1}{2}v_0\right) + 2\frac{\sqrt{C_0}}{V_*^2} \cdot \Phi(\bar{x}_0). \quad (17)$$

Данное соотношение описывает траектории 1 на рис. 1 в окрестности начала координат. В частности, при достаточно малых значениях γ , удовлетворяющих соотношениям $\gamma p \ll q$ и $\gamma V_0 \ll q$, из (17), удерживая члены порядка γ , получим

$$V^2(\bar{x})\left(1 + \frac{3\gamma V(\bar{x})}{q^2}\right) + q\left(1 + \frac{3\gamma}{q}\left(p_0 - \frac{V_0}{q}\right)\right)\Phi(\bar{x}) = \text{const}. \quad (18)$$

Точки поворота пакетов $V(\bar{x}_c) = 0$ при малых значениях γ из (18) определяются уравнением $q(\Phi(\bar{x}_c) - \Phi(\bar{x}_0)) = V_0^2(1 - 3\gamma p_0/q)$. Так, при $3\gamma p_0/q > 0$ область локализации коротких волновых пакетов сужается по сравнению с областью локализации протяженных пакетов, для которых $\gamma = 0$ при тех же начальных скоростях движения пакетов, а при $3\gamma p_0/q < 0$ – расширяется.

2. При $C_0 = 0$, отвечающем условию $(q + 3\gamma p_0)^2 = -6\gamma V_0$, траектории движения из (15) описываются уравнением

$$v^{3/2} + \Phi(\bar{x}) = v_0^{3/2} + \Phi(\bar{x}_0), \quad (19)$$

в котором $v = -\frac{2}{3} \frac{V}{\gamma^{1/3}}$, $v_0 = -\frac{2}{3} \frac{V_0}{\gamma^{1/3}}$ и $\gamma V \leq 0$.

На рис. 2 приведена фазовая плоскость уравнения (19) при $\Phi(x) = x^2$, $\bar{x}_0 = 0$ и различных начальных значениях v_0 .

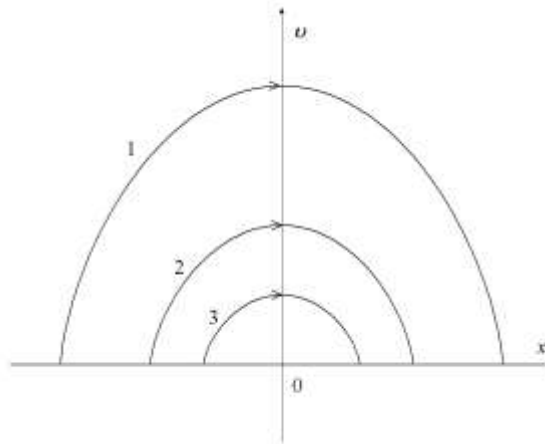


Рис. 2. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям $v_0(1) > v_0(2) > v_0(3)$

3. При $C_0 < 0$, отвечающем условию $6\gamma V_0 + (q + 3\gamma p_0)^2 < 0$, траектории движения пакетов из (15) описываются уравнением

$$\frac{1}{3}(v-1)^{3/2} + (v-1)^{1/2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-C_0}}{V_*^2} \cdot \Phi(\bar{x}) = \frac{1}{3}(v_0-1)^{3/2} + (v_0-1)^{1/2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-C_0}}{V_*^2} \cdot \Phi(\bar{x}_0), \quad (20)$$

в котором $v = V(\bar{x})/V_* \geq 1$. Скорость движения пакетов из (20) в ноль не обращается, что приводит к инфинитному (нелокализованному) характеру движения пакетов, а при достижении скорости пакета критического значения $V_* = 2C_0/3\gamma$ ускорение пакета обращается в ноль и пакет движется с постоянной скоростью $V = V_*$. На рис. 3 приведена фазовая плоскость

уравнения (20) при $\frac{1}{2} \frac{\sqrt{-C_0}}{V_*^2} \cdot \Phi(x) = x^2$, $\bar{x}_0 = 0$ и различных начальных значениях v_0 .

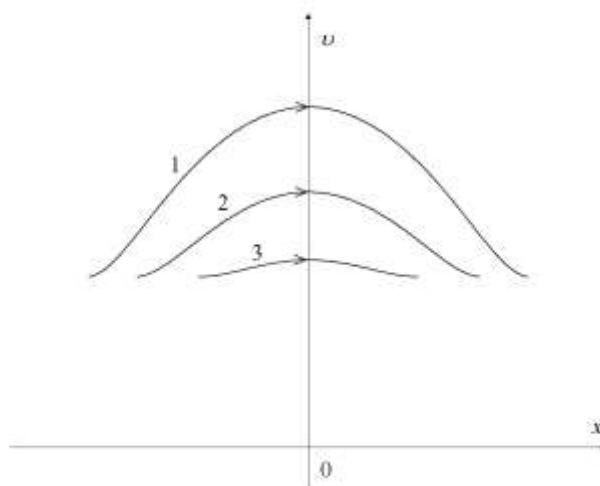


Рис. 3. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям $v_0(1) > v_0(2) > v_0(3)$

Вывод

В данной работе проанализировано движение векторных волновых пакетов малой протяженности в анизотропных средах с неоднородностью произвольного профиля. Получено замкнутое уравнение, описывающее траектории движения центра «масс» волновых пакетов. В зависимости от параметров неоднородной среды и начальных условий, возможны как локализованные движения волновых пакетов, так и нелокализованные. Размеры области локализации движения коротких волновых пакетов могут быть как больше, так и меньше соответствующих размеров области локализации движения протяженных волновых пакетов. Это различие относится к эффектам линейной дисперсии третьего порядка.

Работа проведена при поддержке РФФИ (проект № 11 – 02 – 01307)

Библиографический список

1. **Yang, Y.** Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis / Y. Yang. Springer, New York, 2001.
2. **Dickey, L.A.** Soliton Equation and Hamiltonian Systems / L.A. Dickey. World Scientific, New York, 2005.
3. **Kivshar, Y.S.** Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals / Y.S. Kivshar, G.P. Agrawal // Academic, San Diego, 2003.
4. **Agrawal, G.P.** Fiber Optic Communication Systems // Wiley, New York, 2002.
5. **Zakharov, V.E.** Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media / V.E. Zakharov, A.B. Shabat // Sov. Phys. JETP. 1972. V. 34. P.62 -69.
6. **Hasegawa, A.** Transmission of Stationary Nonlinear Optical Physics in Dispersive Dielectric Fibers I: Anomalous Dispersion / A. Hasegawa, F. Tappert // Appl. Phys. Lett. 1973. V. 23. N. 3. P. 142 – 144.
7. **Chen, H.H.** Nonlinear wave and soliton propagation in media with arbitrary inhomogeneities / H.H. Chen, C.S. Liu // Phys. Fluids. 1978. V.21. N. 3. P. 377–380.
8. **Manakov, S.V.** On the theory of two-dimensional stationary self focussing of electromagnetic waves // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1973. V. 65. P. 505-516; Sov. Phys. JETP. 1974. V.38. P. 248-253.
9. **Fordy, A.P.** Nonlinear Schrodinger equations and simple Lie algebras / A.P. Fordy, P.P. Kulish // Commun. Math. Phys. 1983. V. 89. P. 427–443.
10. **Menyuk, C.R.** Nonlinear pulse-propagation in birefringent optical fibers // Optics Letters. 1987. V.12. P.614; J. Opt. Soc. Am. B. 1988. V. 5. P. 392.
11. **Cundiff, S.T.** Observation of Polarization-Locked Vector Solitons in an Optical Fiber / S.T. Cundiff [et al.] // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. 3988; Akhmediev [et al.] // Opt. Lett. 1998. V. 23. P. 852.
12. **Tang, D.Y.** Observation of high-order polarization-locked vector solitons in a fiber laser / D.Y. Tang [et al.] // Phys. Rev. Lett. 2008. V.101. 153904.
13. **Christodoulides, D.N.** Vector solitons in birefringent nonlinear dispersive media / D. N. Christodoulides, R. I. Joseph // Opt. Lett. 1988. V.13. N.1. P. 53–55.
14. **Oliviera, J.R.** Analytical Solution for the Modified Nonlinear Schrodinger Equation Describing Optical Shock Formation / J.R. Oliveira, M.A. Moura // Phys. Rev. E. 1998, V.57. P. 4751–4755.
15. **Gordon, J.P.** Theory of the soliton self-frequency shift // Opt. Lett. 1986. V. 11. P. 662–664.
16. **Kodama, Y.** Optical solitons in a monomode fiber // J. Stat. Phys. 1985. V. 39. P. 597–614.
17. **Zaspel, C.E.** Optical Solitary Wave and Shock Solutions of the Higher Order Nonlinear Schrodinger Equation // Phys. Rev. Lett. 1999. V.82. N.4. P.723–726.
18. **Hong, B.** New Jacobi functions solitons for the higher-order nonlinear Schrodinger equation / B. Hong, D. Lu // Inter. Journal of Nonlinear Science. 2009. V. 7. N. 3. P. 360– 67.
19. **Karpman, V.I.** The extended third-order nonlinear Schrodinger equation and Galilean transformation // The European Physical Journal B. 2004. V. 39. P. 341–350.
20. **Gromov, E.M.** Nonlinear dynamics of short wave trains in dispersive media / E.M. Gromov, V.I. Talanov // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 110 (1996) 137; JETP. 83 (1996) 73–79.
21. **Gromov, E.M.** Short optical solitons in fibers / E.M. Gromov, V.I. Talanov // Chaos. 2000. V.10. N.3. P. 551–558.

22. **Gromov, E.M.** Dynamics of wave packets in the frame of third-order nonlinear Schrödinger equation / E.M. Gromov, L.V. Piskunova, V.V. Tyutin // Physics Letters A. 1999. V. 256. P. 153–158.
23. **Gromov, E.M.** Short intense wave packets in smoothly inhomogeneous media / E.M. Gromov, V.V. Tyutin, D.E. Vorontzov // Phys. Letters A. 1999. V.257. P.182–188.
24. **Kim, J.** A coupled higher-order nonlinear Schrodiger equation including higher-order bright and dark soltons // ETRI Journal. 2001. V.23. N.1. P. 9–15.
25. **Lu, F.** Vector soliton fission / F. Lu, W.H. Lin, W.H. Knox, G.P. Agrawal // Phys. Rev. Lett. 2004. V.93. N.18. 183901. P. 75–90.
26. **Gromov, E.M.** Short vector soliton / E.M. Gromov, V.V. Tyutin, D.E. Vorontzov // Physics Letters A. 2001. V. 287. issue 3-4. P. 233–239.

*Дата поступления
в редакцию 08.02.2011*

E.M. Gromov, O.M. Solycheva, V.V. Tyutin

SHORT VECTOR WAVE PACKETS MOTION IN SMOOTHLY INHOMOGENEOUS MEDIA

In the frame of the third – order nonlinear wave dispersion theory the equation of motion of a vector wave packets mass center taken in to account arbitrary inhomogeneity profile is obtained. As short vector wave packets localized motion as infinite motion is shown. Short vector wave packets localizations area can be as bigger as smaller in comparison with long vector wave packets localizations area. The effect depend from third – order linear dispersion parameter.

Key words: dispersion, nonlinearity, inhomogeneity, polarization, short vector wave - packets, motion trajectory.