МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЕСТЕСТВЕННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ НАУКАХ

УДК 512.554.31

Н. Г. Чебочко

ДЕФОРМАЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ АЛГЕБР ЛИ ТИПА D_1 НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Описание глобальных деформаций алгебр Ли представляет интерес в связи с нерешенной задачей классификации простых алгебр Ли над полями малой характеристики.

В статье исследуются глобальные деформации классических алгебр Ли типа D_l над алгебраически замкнутым полем *K* характеристики 2. Доказана жесткость алгебр Ли типа $\bar{D}_l$ при нечетном $l > 3$ и построены некоторые глобальные деформации алгебр Ли типа D_l при четном $l > 4$.

Ключевые слова: модулярные алгебры Ли, когомологии, деформации.

Классическими алгебрами Ли над полем ненулевой характеристики p называют алгебры Ли, полученные редукцией по модулю p решетки Шевалле комплексной простой алгебры Ли и их факторалгебры по центру.

Пусть L - алгебра Ли над полем K, L_t - расширение поля скаляров $L \otimes K((t))$. Предположим, что билинейное отображение $f_t : L_t \times L_t \to L_t$ имеет вид

$$f_t(x, y) = [x, y] + tF_1(x, y) + t^2F_2(x, y) + \cdots, \tag{1}$$

где F_i - билинейные отображения над K.

Если отображение f_t удовлетворяет условию антисимметричности и условию Якоби, то алгебры Ли L_t с умножением f_t являются семейством глобальных деформаций алгебры Ли L, а F_1 называют интегрируемым. Условия, накладываемые на f_t, означают в частности, что отображение F_1 принадлежит пространству коциклов $Z^2(L, L)$. Причем когомологичные коциклы дают изоморфные алгебры Ли. Поэтому в качестве F_1 берут представителей когомологических классов и называют вторую группу когомологий с коэффициентами в присоединенном модуле $H^2(L, L)$ пространством локальных деформаций. Если алгебра Ли не имеет нетривиальных глобальных деформаций, то она называется жесткой.

Классические алгебры Ли над полями характеристики 2 и 3 имеют глобальные деформации. Г. Браун заметил, что над полем характеристики 3 корневую систему типа C_2 могут иметь неизоморфные алгебры Ли [1]. В 1970 г. А.И. Кострикин построил параметрические семейства неизоморфных простых алгебр Ли характеристики 3, которые являются глобальными деформациями алгебры Ли C_2 [6]. А.С. Джумадильдаев [2] доказал, что среди алгебр Ли серий A_n, B_n, C_n, D_n только алгебра Ли C_2 допускает нетривиальные деформации при $p=3$. А. И. Кострикин и М.И. Кузнецов в [7] полностью описали глобальные деформации алгебры Ли C_2. Предложенный ими подход к исследованию глобальных деформаций, основанный на изучении орбит действия группы автоморфизмов алгебры на пространстве ее когомологий, используется в данной статье.

А.Н. Рудаковым [9] установлено, что над полем характеристики $p>3$ все классические алгебры Ли являются жесткими. В работах [5] и [8] М.И. Кузнецовым и Н.Г. Чебочко предложена новая схема исследования жесткости и доказана жесткость классических алгебр Ли всех типов, кроме алгебры Ли типа C_2 при $p=3$, над полем характеристики $p>2$. При $p=2$ некоторые деформации алгебры Ли типа G_2 были построены китайским математиком Гуанжу Шень [4]. Пространства локальных деформаций классических алгебр Ли с однородной системой корней над полем характеристики 2 найдены в [10].

Пусть R - система корней типа D_l, $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{l-2},\alpha_{l-1},\alpha_l\}$ - система простых корней, здесь корни занумерованы так, что α_l связан в схеме Дынкина с α_{l-2}. Через $<\alpha,\beta>$ будем обозначать число Картана для корней α,β. Векторы базиса Шевалле в алгебре Ли будем обозначать $H_i = H_{\alpha_i}$ и E_α, $\alpha\in R$.

В [10] получено описание пространства локальных деформаций алгебр Ли типа D_l над полем характеристики 2.

Деформации алгебры Ли типа $\bar{D}_l$ при нечетном $l>3$

Пусть L - алгебра Ли типа $\bar{D}_l$ при нечетном $l>3$. Алгебра Ли типа D_l при нечетном $l>3$ имеет одномерный центр $H_l + H_{l-1}$, алгебра Ли типа $\bar{D}_l$ - ее факторалгебра по центру.

Нам понадобится следующее описание $\bar{D}_l$ в характеристике 2. Согласно [3], группа автоморфизмов алгебры Ли L типа $\bar{D}_l$ изоморфна группе Шевалле типа B_l. Пусть V - векторное пространство над K размерности $2l$ с симплектической формой $(\ ,\ )$. Группа автоморфизмов алгебры Ли L содержит группу $G=Sp(2l)$ - симплектическую группу, ассоциированную с формой $(\ ,\ )$. Выберем симплектический базис $\{e_1,\ \ldots,\ e_l,\ e_{-l},\ \ldots,\ e_{-1}\}$ в V, состоящий из собственных векторов относительно действия максимального тора T группы G. Пусть e_i имеет вес ε_i, e_{-i} имеет вес $-\varepsilon_i$, $i=1,\ldots,l$. Факторалгебра внешней алгебры $\wedge^2 V$ по идеалу $I=<e_1e_{-1}+\cdots+e_le_{-l}>$ изоморфна алгебре Ли L (это верно только при нечетном l).

Основной комплекс когомологий раскладывается в прямую сумму весовых подкомплексов относительно естественного действия максимального тора группы Шевалле $G(L)$. Соответствующие группы когомологий являются весовыми подпространствами в группе когомологий основного комплекса. Весовые подпространства коцепей, коциклов, кограниц и когомологий будем обозначать $C^n_\mu(L,L)$, $Z^n_\mu(L,L)$, $B^n_\mu(L,L)$, $H^n_\mu(L,L)$ соответственно.

В [10] показано, что $H^2_0(L,L)=0$, $H^2(L,L)$ является прямой суммой ненулевых пространств $H^2_\mu(L,L)$, где μ имеет вид $\gamma+\delta$, для $\gamma,\delta\in R$, таких что $<\gamma,\delta>=0$. Любой вес μ сопряжен относительно группы Вейля с $\alpha_l+\alpha_{l-1}$. Всего таких весов $2l$: $\{\pm(\alpha_l-\alpha_{l-1}), \pm(\alpha_l+\alpha_{l-1}), \pm(\alpha_l+\alpha_{l-1}+2\alpha_{l-2}),\ \ldots,\ \pm(\alpha_l+\alpha_{l-1}+2\alpha_{l-2}+\cdots+2\alpha_1)\}$ и

$\dim H^2(L,L)=2l$. Также в [10] получено естественное описание второй группы когомологий $H^2(L,L)$ как модуля над группой $Sp(2l)\subset Aut(L)$. А именно, доказано, что для алгебры Ли типа $\bar{D}_l$ ($l>3$ нечетное) $H^2(L,L)$ как модуль над $Sp(2l)$ изоморфен V с точностью до морфизма Фробениуса, где V - стандартное представление $Sp(2l)$. Опишем подробно данную реализацию $H^2(L,L)$.

Построим гомоморфизм модуля V в модуль $H^2(L,L)$.

Определим сначала $\Phi : V\to C^2(L,L)$. Пусть $v\in V$, $w_1w_2,\ w_3w_4\in\wedge^2V/I\cong L$. Положим $\Phi(v)=\varphi$, где

$$\begin{aligned}\varphi(w_1w_2,w_3w_4)&=(v,w_1)(v,w_3)w_2w_4+(v,w_2)(v,w_3)w_1w_4+\\&+(v,w_1)(v,w_4)w_2w_3+(v,w_2)(v,w_4)w_1w_3+(v,w_1)(w_3,w_4)vw_2+\\&+(v,w_2)(w_3,w_4)vw_1+(v,w_3)(w_1,w_2)vw_4+(v,w_4)(w_1,w_2)vw_3.\end{aligned}\tag{2}$$

С помощью скобки Пуассона $\{v_1v_2,v\}=(v_1,v)v_2+(v_2,v)v_1$, $\Phi(v)$ можно записать компактнее:

$$\Phi(v)(w_1w_2,w_3w_4)=\{w_1w_2,v\}\{w_3w_4,v\}+v\{v,(w_3,w_4)w_1w_2+(w_1,w_2)w_3w_4\}.\tag{3}$$

Отображение φ корректно определено на элементах $\wedge^2V$, линейно и кососимметрично, т.е. является элементом $C^2(L,L)$. Также Φ перестановочно с действием $Sp(2l)$:

$$\Phi(gv)(w_1w_2,w_3w_4)=g(\Phi(v)(g^{-1}w_1g^{-1}w_2,g^{-1}w_3g^{-1}w_4))\tag{4}$$

для любого $g\in Sp(2l)$.

Используя скобку Пуассона в $\wedge^2V$:

$$[v_1v_2,v_3v_4]=\{v_1v_2,v_3v_4\}=(v_1,v_3)v_2v_4+(v_1,v_4)v_2v_3+(v_2,v_3)v_1v_4+(v_2,v_4)v_1v_3,\tag{5}$$

вычисление $d\varphi$ на произвольных элементах w_1w_2, w_3w_4, w_5w_6 показывает, что $\varphi\in Z^2(L,L)$.

Отображение Φ индуцирует отображение V в группу когомологий $H^2(L,L)$, которое мы также будем обозначать Φ. Таким образом, $\Phi(e_{\pm1})$, $\ldots$, $\Phi(e_{\pm l})$ определяют $2l$ нетривиальных коциклов различных весов. Так как $\Phi(kv)=k^2\Phi(v)$ для любого скаляра $k\in K$, то действие симплектической группы на $H^2(L,L)$ отличается от действия на V морфизмом Фробениуса.

Необходимым условием продолжаемости произвольного коцикла ψ до глобальной деформации является тривиальность коцикла $\psi\cup\psi$ из $Z^3(L,L)$, где

$$\psi\cup\psi(x,y,z)=\psi(\psi(x,y),z)+\psi(\psi(y,z),x)+\psi(\psi(z,x),y)\tag{6}$$

для любых x,y,z из L.

В алгебре Ли типа $\bar{D}_l$ ($l>3$ нечетное) нетрудно найти такой коцикл ψ, что $\psi\cup\psi\neq0$ и $\psi\cup\psi$ имеет вес μ, для которого $C^2_\mu(L,L)=0$. Покажем это.

Так как $l>3$ нечетное, то в базисе $\{e_1,\ \ldots,\ e_l,\ e_{-l},\ \ldots,\ e_{-1}\}$ есть векторы e_4,e_5,e_{-5},e_{-4}. Рассмотрим коцикл $\psi=\Phi(e_4)$. Имеем

$$\begin{aligned}&\psi\cup\psi(e_{-4}e_{-5},e_{-4}e_5,e_3e_{-4})=\psi(\psi(e_{-4}e_{-5},e_{-4}e_5),e_3e_{-4})+\psi(\psi(e_{-4}e_5,e_3e_{-4}),e_{-4}e_{-5})+\\&+\psi(\psi(e_3e_{-4},e_{-4}e_{-5}),e_{-4}e_5)=\psi(\psi(e_{-4}e_{-5},e_{-4}e_5),e_3e_{-4})=\psi(e_5e_{-5},e_3e_{-4})=e_3e_4.\end{aligned}\tag{7}$$

Видим, что $\psi \cup \psi$ ненулевой коцикл из $Z^3_{4\varepsilon_4}(L,L)$. Так как пространство $C^2_{4\varepsilon_4}(L,L)$ нулевое, то $B^3_{4\varepsilon_4}(L,L)=0$. Следовательно, $\psi \cup \psi$ не является кограницей. Таким образом, ψ неинтегрируемый коцикл.

Группа G действует транзитивно на V, поэтому никакой коцикл из $H^2(L,L)$ не продолжается до глобальной деформации и алгебры Ли типа $\bar{D}_l$ ($l>3$ нечетное) являются жесткими.

Деформации алгебры Ли типа D_l при четном $l>4$

Пусть L – алгебра Ли типа D_l при четном $l>4$. Алгебра Ли L имеет двумерный центр: $< H_l + H_{l-1}, H_{l-1} + H_{l-3} + \dots + H_3 + H_1 >$. Пространство $H^2(L,L)$ в этом случае также является прямой суммой ненулевых пространств $H^2_\mu(L,L)$, где μ имеет вид $\gamma+\delta$ для $\gamma,\delta \in R$, таких что $<\gamma,\delta>=0$. Любой такой вес сопряжен относительно группы Вейля с $\alpha_l + \alpha_{l-1}$. Всего таких весов $2l$: $\{\pm(\alpha_l - \alpha_{l-1}), \pm(\alpha_l + \alpha_{l-1}), \pm(\alpha_l + \alpha_{l-1} + 2\alpha_{l-2}), \dots, \pm(\alpha_l + \alpha_{l-1} + 2\alpha_{l-2} + \dots + 2\alpha_1)\}$. Соответствующие весовые пространства когомологий одномерны и $\dim H^2(L,L)=2l$.

Будем использовать изоморфизм $C^n(L,L) \cong \underbrace{L^* \wedge \ldots \wedge L^*}_{n} \otimes L$.

Так как все веса сопряжены, то достаточно описать пространство $H^2_{\alpha_l+\alpha_{l-1}}(L,L)$.

Коцикл

$$\psi = \sum_{\gamma+\delta=\alpha_l+\alpha_{l-1}} E^*_{-\gamma} \wedge E^*_{-\delta} \otimes z, \tag{8}$$

где $z = H_{l-1} + H_{l-3} + \dots + H_3 + H_1$ порождает пространство $H^2_{\alpha_l+\alpha_{l-1}}(L,L)$.

Рассмотрим условие (6) для данного коцикла ψ:

$$\psi \cup \psi(x,y,z)=0 \tag{9}$$

для любых x,y,z из L.

Следовательно, коцикл ψ является интегрируемым. А именно, отображение

$$f_t(x,y)=[x,y]+t\psi(x,y) \tag{10}$$

будет давать глобальную деформацию алгебры Ли L.

Так как для любого коцикла $\psi \in H^2(L,L)$ значение $\psi(x,y)$ содержится в центре алгебры Ли L для всех x,y из L и ψ принимает ненулевое значение только на нецентральных элементах алгебры, то условие (10) выполняется для всех элементов из $H^2(L,L)$. Таким образом, любой коцикл из $H^2(L,L)$ для алгебры Ли типа D_l при четном $l>4$ является продолжаемым.

Выводы

Основные результаты работы сформулируем в следующей теореме

Теорема.
Пусть L - алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 2.

(1) Если L имеет тип $\bar{D}_l$ при нечетном $l > 3$, то L – жесткая алгебра Ли.

(2) Если L имеет тип D_l при четном $l > 4$, то любой коцикл из $H^2(L, L)$ является интегрируемым.

Автор выражает благодарность М.И. Кузнецову за внимание к работе и полезные замечания.

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России”, шифр проекта НК-13П-13, контракт №П945".

Библиографический список

1. **Brown, G.** Lie algebras of characteristic three with non degenerate Killing form / G. Brown // Trans. Amer. Math. Soc.1969. V. 137. P. 259–268.
2. **Джумадильдаев, А.С.** К деформациям классических простых алгебр Ли / А.С. Джумадильдаев //УМН. 1976. Т. 31. N.3 (189). С. 211–212.
3. **Frohardt, D.E.** Automorphisms of modular Lie algebras / D.E Frohardt, R.L. Griess (Jr.) // Nova J. Alg. Geom. 1992. V. 1. P. 339-345.
4. **Shen Guangyu.** Variations of the classical Lie algebra G_2 in low characteristics / Guangyu Shen // Nova J. Alg. Geom. 1993. V.2. № 3. P.217-243.
5. **Кириллов, С.А.** О деформациях алгебры Ли типа G_2 характеристики три / С.А. Кириллов, М.И. Кузнецов, Н.Г. Чебочко // Изв. вузов. Сер. Математика. 2000. №3(454). С. 33–38.
6. **Кострикин, А.И.** Параметрическое семейство простых алгебр Ли / А.И. Кострикин // Изв. АН СССР. Сер. математика. 1970. Т. 34. С. 744–756.
7. **Кострикин, А.И.** О деформациях классических алгебр Ли характеристики три / А.И. Кострикин, М.И. Кузнецов // Докл. РАН. 1995. Т. 343. N.3. С. 299–301.
8. **Кузнецов, М.И.** Деформации классических алгебр Ли / М.И. Кузнецов, Н.Г. Чебочко // Математический сборник. 2000. Т.191. N8. С. 69–88.
9. **Рудаков, А.Н.** Деформации простых алгебр Ли / А.Н. Рудаков// Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1971. Т. 35. С. 1113–1119.
10. **Чебочко, Н.Г.** Деформации классических алгебр Ли с однородной системой корней в характеристике 2. I / Н.Г. Чебочко // Математический сборник. 2005. Т. 196. N9. С.125–156.

Дата поступления
в редакцию 25.01.2011

N.G. Chebochko

THE DEFORMATIONS OF CLASSICAL LIE ALGEBRAS OF TYPE D_l OVER THE FIELD OF CHARACTERISTIC 2

Description of global deformations of Lie algebras is very important since it is related to unsolved problem of classification of simple Lie algebras over the field of small characteristic.

In this article we study global deformations of classical Lie algebras of type D_l over the algebraically closed field *K* of characteristic 2. It is proved that classical Lie algebras of type D_l are rigid for odd $l > 3$. Also some global deformations of Lie algebras of type D_l for even $l > 4$ are constructed.

Key words: modular Lie algebras, cohomology, deformations.