УДК 513.015.2

М. Е. Елисеев[1], Е. М. Елисеев[2]

О НЕКОТОРЫХ КОЛЛИНЕАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева[1],
Арзамасский государственный педагогический институт им. А. П. Гайдара[2]

В данной работе описывается методика нахождения некоторых коллинеаций конечных проективных плоскостей. Определяется подгруппа группы коллинеаций для новой конечной проективной плоскости порядка 9 – J-плоскости.

Ключевые слова: конечная проективная плоскость, коллинеация, латинский квадрат.

1. Изотопные преобразования ЛК (квазигрупп)

Известно [1], что таблица Кэли квазигруппы является латинским квадратом (ЛК) в силу того, что уравнения $a \circ x = b$ и $x \circ a = b$ решаются однозначно. Латинские квадраты называются изотопными, если $a * b = \gamma(\alpha(a) \circ \beta(b))$, где преобразование α – перестановка строк, β – перестановка столбцов, γ – переобозначение элементов, $*$ и $\circ$ – операции в квазигруппах, соответствующих ЛК.

Каждому ЛК порядка n можно взаимно однозначно сопоставить упорядоченный набор из n подстановок, по следующему правилу:

1) находим все решения уравнений $x_i \circ y_i = a_k$;

2) элементу a_k сопоставляем подстановку $S_k = \begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots x_n \\ y_1, y_2, \ldots y_n \end{pmatrix}$, далее для краткости будет использоваться запись $y_i = S_k(x_i)$.

Понятно, что по набору подстановок $S_1, S_2, \ldots, S_n$ можно восстановить ЛК: если $y_i = S_k(x_i)$, то на месте (x_i, y_i) записывается a_k (в терминах квазигрупп это следующее соответствие: $x_i \circ y_i = a_k$). Далее будем говорить, что упорядоченный набор $S_1, S_2, \ldots, S_n$ порождает ЛК и будет называться диаграммой ЛК. Понятно, что разному порядку S_i отвечают ЛК, отличающиеся переобозначением элементов – γ.

Пример 1. Латинскому квадрату соответствует набор подстановок

$x_i \setminus y_j$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	4	1	2	5	3
3	5	3	1	2	4
4	3	5	4	1	2
5	2	4	5	3	1

$S_1 = (1)(2)(3)(4)(5)$, $S_2 = (12345)$, $S_3 = (13254)$, $S_4 = (14352)$, $S_5 = (153)(24)$.■

Приведем несколько простых, но важных для дальнейшего изложения утверждений.

Лемма 1. Умножению подстановок S_i, порождающих ЛК А, на подстановку α^{-1} слева соответствует перестановка строк ЛК α, на подстановку β справа – перестановка столбцов β.

Доказательство. Пусть подстановка β представлена в цикловом виде $\beta = (y_1 y_2 \ldots y_k)(y_{k+1} \ldots y_m)\ldots$. Тогда $x_1 \circ y_1 = a_i \mapsto x_1 \cdot y_2 = a_i$, $x_2 \circ y_2 = a_i \mapsto x_2 \cdot y_3 = a_i$, … $x_k \circ y_k = a_i \mapsto x_k \cdot y_1 = a_i$, то есть столбцы ЛК переставляются в порядке β. Для строк доказательство аналогично.■

Цикловым видом подстановки далее будем называть набор длин циклов ей соответствующих.

Лемма 2. Пусть подстановка S_i представлена в виде произведения циклов, тогда $\alpha S_i \alpha^{-1}$ имеет тот же цикловый вид, причем элементы из S_i переставляются в порядке α.

Доказательство этого простого утверждения можно найти, например, в [2].

2. Коллинеации проективной плоскости

Известно [3], что по полной системе попарно ортогональных латинских квадратов порядка *n* можно построить инцидентностную схему конечной проективной плоскости со стандартным выбором бесконечно удаленной прямой. Через каждую точку бесконечно удаленной прямой проходит пучок прямых, причем ЛК соответствуют (n – 1) из этих пучков.

Напомним, что преобразование проективной плоскости, сохраняющее отношение принадлежности точки прямой, называется коллинеацией. Рассмотрим коллинеации проективной плоскости, сохраняющие бесконечно удаленную прямую и пару точек на ней, причем берутся точки, пучки прямых, проходящие через которые, не соответствуют латинским квадратам. Коллинеации этого вида индуцируются преобразованиями $a * b = \gamma(\alpha(a) \circ \alpha^{-1}(b))$, описанными выше. По лемме 2 такие преобразования сохраняют цикловые виды подстановок из диаграммы ЛК.

Последнее влечет несколько простых утверждений, позволяющих находить коллинеации указанного вида:

1) пучки прямых, соответствующие ЛК, могут переходить друг в друга при коллинеации, если подстановки одного ЛК имеют те же цикловые виды, что и у другого;

2) если один из пучков имеет набор цикловых видов подстановок, отличающийся от остальных, то он инвариантен относительно коллинеаций указанного типа;

3) прямые внутри пучка могут меняться местами (при сохранении пучка), если они имеют одинаковые цикловые виды.

Эти соображения позволяют легко определить указанную подгруппу в группе коллинеаций для плоскостей небольших порядков. Для больших порядков нетрудно использовать компютерные программы.

3. Подгруппа группы коллинеаций J-плоскости

Теория, изложенная в п. 2, была использована при определении подгруппы группы коллинеаций J-плоскости. Последняя описана в [4], полная система ЛК, ей соответствующая, приведена в табл. 1. Для справок приводится также полная система ЛК для плоскости Хьюза (табл. 2)

Нетрудно заметить (см. таблица 3), что второй ЛК имеет отличный от остальных набор цикловых видов подстановок, поэтому он переходит в себя под действием коллинеаций. Кроме того, три подстновки из девяти имеют цикловый вид $(\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)$, поэтому соответствующие прямые либо переходят в себя, либо друг в друга, остальные шесть прямых этого пучка также переставляются.

Непосредственная проверка показывает, что так действуют только 6 подстановок, образующие группу Σ_3 со следующими представителями: *z*1=(2)(4)(6)(08)(15)(37), *z*2=(2)(4)(6)(17)(03)(58), *z*3=(2)(4)(6)(35)(78)(01).

Информация об этой подгруппе используется при нахождении третьей подплоскости J-плоскости и при доказательстве теоремы отличия этой плоскости от остальных известных четырех плоскостей порядка 9.

Таблица 1

Латинские квадраты J-плоскости

012345678	048731256	071856432	064572183
120453786	172684503	147560328	185306247
201534867	237146085	258407613	246085731
345678012	306257148	380742561	327814650
453786120	460825317	426371805	408163572
534867201	581073624	562138740	573421068
678012345	623508471	614283057	632750814
786120453	715462830	703615284	751248306
867201534	854310762	835024176	810637425
025187364	057623841	036418527	083264715
104728635	138275460	163047852	156832074
213870546	270368154	284651370	265713408
352061487	361480275	318526704	374105826
431602758	482517036	475230681	417058263
540216873	516704382	507382416	528640137
687435102	605841723	650174238	641327580
768354021	724036518	742803165	730581642
876543210	843152607	821765043	802476351

Таблица 2

Латинские квадраты плоскости Хьюза

012345678	012345678	012345678	012345678
201534867	120453786	678012345	867201534
120453786	201534867	345678012	453786120
678012345	345678012	120867534	534120867
867201534	453786120	786534201	120678453
786120453	534867201	453201867	678534012
345678012	678012345	201786453	786453201
534867201	786120453	867453120	345012786
453786120	867201534	534120786	201867345
012345678	012345678	012345678	012345678
786120453	345678012	534867201	453786120
534867201	678012345	786120453	867201534
867534120	201786453	453201786	786453201
345012867	534120786	678453012	201867345
120786345	867453120	201678534	345012786
453201786	120867534	867534120	534120867
201678534	453201867	120786345	678534012
678453012	786534201	345012867	120678453

Таблица 3

Подстановки соответствующие латинским квадратам J-плоскости

012345678=(0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)	057623841=(0)(15368)(274)	064572183=(0)(16)(247835)
120453786=(012)(345)(678)	138275460=(01328)(476)(5)	185306247=(01874)(256)(3)
201534867=(021)(354)(687)	270368154=(02)(175846)(3)	246085731=(02673)(148)(5)
345678012=(036)(147)(258)	361480275=(03485)(162)(7)	327814650=(038)(12754)(6)
453786120=(048)(156)(237)	482517036=(04186)(2)(357)	408163572=(046531)(28)(7)
534867201=(057)(138)(246)	516704382=(054)(1)(26378)	573421068=(05176)(234)(8)
678012345=(063)(174)(285)	605841723=(067251)(38)(4)	632750814=(06845)(137)(2)
786120453=(075)(183)(264)	724036518=(071243)(56)(8)	751248306=(07)(158632)(4)
867201534=(084)(165)(273)	843152607=(087)(14523)(6)	810637425=(08572)(1)(364)

025187364=(0)(125763)(48) 104728635=(01)(24)(37)(58)(6) 213870546=(023865)(1)(47) 352061487=(03)(15)(2)(46)(78) 431602758=(04)(136752)(8) 540216873=(056832)(14)(7) 687435102=(061827)(34)(5) 768354021=(072816)(3)(45) 876543210=(08)(17)(26)(35)(4)	071856432=(0)(17382)(456) 147560328=(014635)(27)(8) 258407613=(02834)(157)(6) 380742561=(037652)(18)(4) 426371805=(047)(12685)(3) 562138740=(058)(16743)(2) 614283057=(06)(1)(248753) 703615284=(07841)(236)(5) 835024176=(08613)(254)(7)	083264715=(0)(185467)(23) 156832074=(01526)(384)(7) 265713408=(02537)(164)(8) 374105826=(031724)(5)(68) 417058263=(04583)(1)(276) 528640137=(05)(128736)(4) 641327580=(06578)(142)(3) 730581642=(07482)(135)(6) 802476351=(081)(2)(34756)
048731256=(0)(14375)(286) 172684503=(017)(2)(36548) 237146085=(027856)(13)(4) 306257148=(03261)(457)(8) 460825317=(042)(16387)(5) 581073624=(053)(18472)(6) 623508471=(064)(12358)(7) 715462830=(073468)(1)(25) 854310762=(082415)(3)(67)	036418527=(0)(134)(26587) 163047852=(016823)(4)(57) 284651370=(024518)(36)(7) 318526704=(03567)(1)(284) 475230681=(04325)(178)(6) 507382416=(05271)(3)(486) 650174238=(062)(15473)(8) 742803165=(07614)(2)(385) 821765043=(083746)(12)(5)	

Библиографический список

1. **Белоусов, В.Д.** Латинские квадраты, квазигруппы и их приложения / В.Д. Белоусов, Г.Б. Белявская. – Кишинев: Штиинца, 1989. – 250 с.
2. **Супруненко, Д.А.** Группы подстановок / Д. А. Супруненко. – Мн.: Наука и техника, 1996. – 366 с.
3. **Елисеев, Е. М.** Проективная геометрия: учеб. пособие / Е. М. Елисеев. – Арзамас: АГПИ, 2003. – 255 с.
4. **Елисеев, М. Е.** Новая проективная плоскость порядка 9 // Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании '2010: сб. науч. тр. материалов междунар. научно-практич. конф. Т. 8. Физика и математика. – Одесса: Черноморье, 2010. С. 42–45.

Дата поступления
в редакцию 25.01.2011

M.E. Eliseev, E.M. Eliseev

ON THE SOME COLLINIATIONS OF THE FINITE PROJECTIVE PLANES

In this paper method of some colliniations finding for the finite projective plane is described. The subgroup of the group colliniations for new finite projective plane of the order 9 (J-plane) is represented.

Key words: finite projective plane, colliniation, latin square.