

УДК 537.86

Е.М. Громов, В.В. Тютин

СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В РАСШИРЕННОМ НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА С УЧЕТОМ ИНДУЦИРОВАННОГО РАССЕЯНИЯ РАМАНА И НЕЛИНЕЙНОЙ ДИСПЕРСИИ

Государственный университет – Высшая школа экономики

В рамках расширенного нелинейного уравнения Шредингера, содержащего члены нелинейной дисперсии и индуцированного рассеяния Рамана, исследованы стационарные волны перепада с нелинейной фазовой модуляцией. Найдены два класса волн перепада: одни обусловлены балансом эффектов нелинейной дисперсии и индуцированного рассеяния и исчезают при пренебрежении нелинейной дисперсией, другие – балансом индуцированного рассеяния и линейной дисперсией второго порядка и сохраняются при пренебрежении нелинейной дисперсией. Показано, что волны перепада на подложке реализуются лишь в присутствии нелинейной дисперсии.

Ключевые слова: расширенное нелинейное уравнение Шредингера, индуцированное рассеяние Рамана, нелинейная дисперсия, стационарные волны перепада.

Введение

Интерес к высокочастотным стационарным волнам обусловлен возможностью их распространения на значительные расстояния с сохранением своей формы и переноса энергии и информации без значительных потерь. Высокочастотные стационарные волны имеют большое значение в различных областях физики при исследовании распространения интенсивных волновых полей в нелинейных диспергирующих средах: оптических импульсов в волоконных линиях связи [1–3], электромагнитных и ленгмюровских волн в плазме [4]. Распространение высокочастотных импульсов достаточно большой протяженности хорошо описывается нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) [5, 6], учитывающим линейную дисперсию второго порядка и кубичную нелинейность (self-phase modulation). Стационарные волны в рамках этого уравнения возникают в результате баланса дисперсионного разбегания и нелинейного сжатия волнового пакета.

Уменьшение протяженности высокочастотных волновых импульсов приводит к необходимости учета в НУШ членов более высокого (третьего) порядка малости, соответствующих нелинейным эффектам укрупнения (stepping) [7], индуцированного рассеяния Рамана (stimulated Raman-scattering) [8] и линейного эффекта абберационного искажения, отвечающего линейной дисперсии третьего порядка (third-order linear dispersion). Это расширенное НУШ. Так, в расширенном НУШ с учетом индуцированного рассеяния Рамана, но в пренебрежении нелинейной дисперсией и линейной дисперсией третьего порядка стационарные волны изучались в [9]. При пренебрежении в расширенном НУШ эффектом рассеяния Рамана, но с учетом нелинейной дисперсии и линейной дисперсии третьего порядка стационарные волны изучались в [10] при нелинейной фазовой модуляции, а в [11, 12] – при линейной фазовой модуляции. Найдены как локализованные, так и нелокализованные стационарные волны. В этом случае стационарные волны возникают в результате баланса нелинейной дисперсии и линейной дисперсии третьего порядка (абберации). В [13] рассматривались стационарные волны в рамках расширенного НУШ с учетом нелинейной дисперсии, но в пренебрежении индуцированным рассеянием и линейной дисперсией третьего порядка.

В данной работе анализируются стационарные волны в рамках расширенного НУШ, содержащего индуцированное рассеяние Рамана и нелинейную дисперсию, но в пренебрежении линейной дисперсией третьего порядка. Найдены условия существования стационарных волн перепада.

Стационарные волны в расширенном НУШ

Рассмотрим динамику огибающей $U(\xi, t)$ волнового поля $U(\xi, t)\exp(i\omega t - ik\xi)$ в рамках расширенного НУШ с учетом нелинейной дисперсии и индуцированного рассеяния

$$2i\frac{\partial U}{\partial t} + 2i\beta\frac{\partial(|U|^2 U)}{\partial \xi} - \mu U\frac{\partial(|U|^2)}{\partial \xi} + q\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha|U|^2 U = 0, \quad (1)$$

где $\xi = x - V_g^L \cdot t$, $V_g^L = \partial\omega/\partial k$ – линейная групповая скорость; $\omega = \omega(k, |U|^2)$ – нелинейное дисперсионное соотношение; $q = -\partial^2\omega/\partial k^2$ – коэффициент линейной дисперсии второго порядка; $\alpha = \partial\omega/\partial(|U|^2)$ – коэффициент кубичной нелинейности (self-phase modulation); β – коэффициент нелинейной дисперсии (stepping); μ – коэффициент индуцированного рассеяния Рама-на (stimulated Raman-scattering).

В (1) перейдем в систему, движущуюся со скоростью V : $\eta = \xi - V \cdot t, t' = t$. Решение вновь полученного уравнения ищем в виде стационарной волны:

$$U(\eta, t) = A(\eta)\exp(i\Omega t + i\varphi(\eta)).$$

Для $A(\eta)$ и $\varphi(\eta)$ получим систему уравнений

$$q\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}A + 2q\frac{d\varphi}{d\eta}\frac{dA}{d\eta} + 2(3\beta A^2 - V)\frac{dA}{d\eta} = 0, \quad (2)$$

$$q\frac{d^2A}{d\eta^2} + \left(\alpha - 2\beta\frac{d\varphi}{d\eta}\right)A^3 - 2\mu A^2\frac{dA}{d\eta} + \left(2V\frac{d\varphi}{d\eta} - q\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 - 2\Omega\right)A = 0. \quad (3)$$

Интегрируя (2), получим

$$\left(q\frac{d\varphi}{d\eta} - V + \frac{3}{2}\beta A^2\right)A^2 = C_\infty, \quad (4)$$

где C_∞ – постоянная интегрирования, определяемая параметрами стационарной волны при $\eta \rightarrow -\infty$. В дальнейшем будем рассматривать стационарные волны при $C_\infty = 0$. Это либо стационарные волны при нулевой амплитуде на $-\infty$: $A(\eta \rightarrow -\infty) \rightarrow 0$, либо волны с ненулевой амплитудой на $-\infty$, но удовлетворяющие условию $q\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_{\eta=-\infty} = V - \frac{3}{2}\beta A^2(\eta = -\infty)$.

В этом случае из (4) получим для пространственного изменения фазы волны

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{1}{q}\left(V - \frac{3}{2}\beta A^2\right). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3), получим

$$q^2\frac{d^2A}{d\eta^2} - 2\mu q A^2\frac{dA}{d\eta} + (V^2 - 2q\Omega)A + (q\alpha - 2V\beta)A^3 + \frac{3}{4}\beta^2 A^5 = 0. \quad (6)$$

Проанализируем уравнение (7) при различных знаках соотношений $V^2 - 2q\Omega$ и $q\alpha - 2V\beta$.

1. При $V^2 - 2q\Omega > 0$ и $q\alpha - 2V\beta < 0$, произведя в (6) замену координаты $\rho = \eta\frac{\sqrt{V^2 - 2q\Omega}}{q}$ и амплитуды волнового поля $A = B \cdot \sqrt{\frac{V^2 - 2q\Omega}{2V\beta - q\alpha}}$, имеем

$$\frac{d^2B}{d\rho^2} - pB^2\frac{dB}{d\rho} + B - B^3 + rB^5 = 0, \quad (7)$$

где $p = 2\mu \frac{\sqrt{V^2 - 2q\Omega}}{2V\beta - q\alpha} > 0$, $r = \frac{3}{4}\beta^2 \frac{V^2 - 2q\Omega}{(2V\beta - q\alpha)^2} > 0$. Параметр $p \sim \mu$ в (7) характеризует индуцированное рассеяние, а $r \sim \beta^2$ – нелинейную дисперсию. Уравнение (7) имеет пять состояний равновесия $B = 0$, $\pm B_- = \pm \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 4r}}{2r}}$ и $\pm B_+ = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 4r}}{2r}}$. Последние четыре существуют при $r \leq 1/4$ и удовлетворяют неравенствам $1 \leq B_-^2 \leq 2 \leq B_+^2$.

Линеаризованное в окрестности $B = 0$ уравнение (7) сводится к уравнению осциллятора $\frac{d^2 B}{d\rho^2} + B = 0$, которое описывает состояние типа «центр». Однако, в силу неконсервативности уравнения (7), необходимо проанализировать его решение при малом, но конечном значении B (метод Ван-дер Поля [14]). Для этого, представляя решение (7) в виде $B = R(\rho)e^{i\rho} + R^*(\rho)e^{-i\rho}$, где R – радиус осцилляций, а R^* – комплексно сопряженная R величина, и проводя усреднение полученного уравнения по периоду осцилляций, получим $\frac{d|R|}{d\rho} = p|R|^2$. При $p > 0$ радиус осцилляций растет, что соответствует неустойчивому фокусу.

Состояния равновесия $\pm B_-$ уравнения (7) – седла. Тип состояний равновесия $\pm B_+$ определяется соотношением параметра индуцированного рассеяния p и величины $B_+^2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4r}}{2r}$, зависящей от параметра нелинейной дисперсии r .

Так, при достаточно слабом эффекте индуцированного рассеяния по сравнению с эффектом нелинейной дисперсии $p^2 \leq \frac{16r\sqrt{1 - 4r}}{1 + \sqrt{1 - 4r}}$ состояния равновесия $\pm B_+$ – неустойчивые фокусы. Фазовая плоскость уравнения (7) для этого случая приведена на рис. 1. Стационарным волнам конечной амплитуды на рис. 1 отвечают траектории 1 – 4, связывающие состояния равновесия. В этом случае реализуются лишь стационарные волны перепада с затухающими осцилляциями. Траектории 1 и 2 отвечают стационарным волнам без подложки, а траектории 3 и 4 – волнам на подложках величины $\pm B_-$.

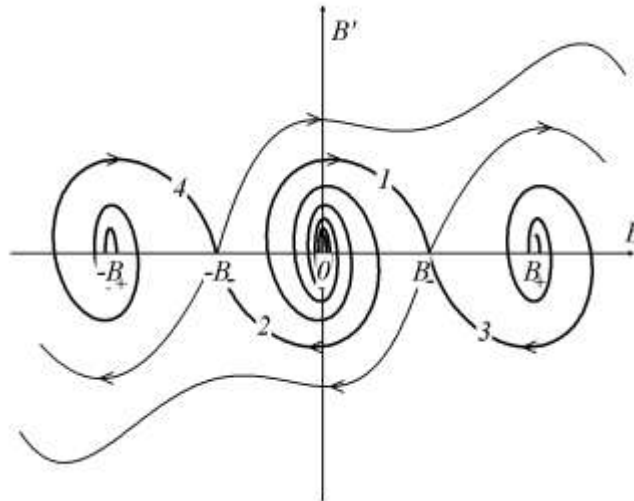


Рис. 1. Фазовая плоскость уравнения (7) при достаточно слабом эффекте индуцированного рассеяния:
 стационарным волнам конечной амплитуды отвечают траектории 1 - 4, связывающие состояния равновесия

При достаточно сильном эффекте индуцированного рассеяния по сравнению с эффектом нелинейной дисперсии $p^2 > \frac{16r\sqrt{1-4r}}{1+\sqrt{1-4r}}$, состояния равновесия $\pm B_+$ – неустойчивые узлы. Фазовая плоскость уравнения (7) для этого случая приведена на рис. 2. Стационарным волнам конечной амплитуды на рис. 2 отвечают траектории, связывающие состояния равновесия. При этом реализуются стационарные волны перепада как с затухающими осцилляциями в окрестности нулевой амплитуды (траектории 1 и 2), так и волны перепада без осцилляций (kink-waves) (траектории 3 и 4), но на подложках $\pm B_-$. Величина перепада интенсивности волнового поля в стационарной волне на подложках (траектории 3 и 4) без осцилляций определяется соотношением $\Delta(B^2) = B_+^2 - B_-^2 = \frac{\sqrt{1-4r}}{r}$, содержащим параметр нелинейной дисперсии r . Из данного соотношения следует, что величина перепада уменьшается с увеличением r . Необходимо отметить, что при стремлении к нулю параметра нелинейной дисперсии $r \rightarrow 0$ из состояний равновесия $\pm B_-$ и $\pm B_+$ остаются только $\pm B_-$, для которых $B_-^2 \rightarrow 1$. Состояния $\pm B_+$ уходят на бесконечность.

Таким образом, при $r=0$ стационарные волны на подложке (траектории 3 и 4) исчезают, и реализуются лишь волны перепада с затухающими осцилляциями в окрестности нулевого значения поля (траектории 1 и 2). Отсюда следует, что стационарные волны на подложке (траектории 3 и 4) реализуются при балансе эффектов нелинейной дисперсии и индуцированного рассеяния, в то время как стационарные волны без подложки (траектории 1 и 2) сохраняются при исчезновении нелинейной дисперсии и обусловлены балансом эффектов индуцированного рассеяния и линейной дисперсии второго порядка (нелинейная дисперсия лишь меняет параметры стационарной волны).

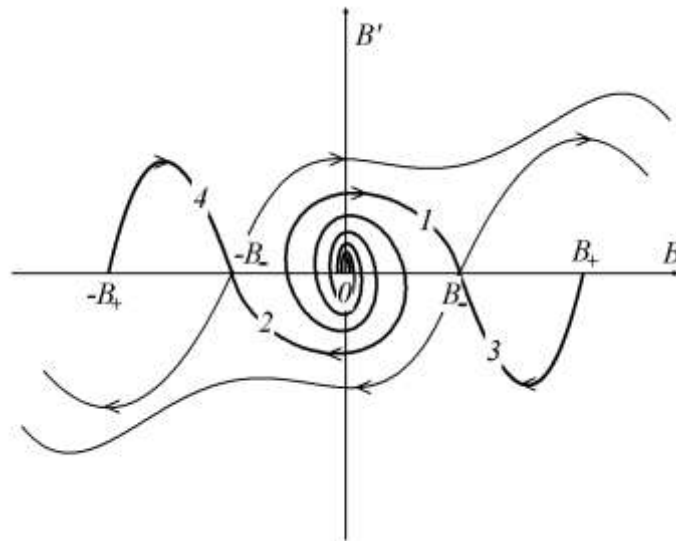


Рис. 2. Фазовая плоскость уравнения (7) при достаточно сильном эффекте индуцированного рассеяния:
стационарным волнам конечной амплитуды отвечают траектории 1 - 4, связывающие состояния равновесия

Отметим, что случай 1, приводящий к фазовым портретам с пятью состояниями равновесия (рис. 1, 2), реализуется при одновременном выполнении соотношений $q\alpha - 2V\beta < 0$ и $V^2 - 2q\Omega > 0$, справедливых, в частности, для сред с достаточно малым положительным

значением линейной дисперсии второго порядка q , либо при $q < 0$. Стационарные волн конечной амплитуды в этом случае существуют при достаточно малом значении параметра нелинейной дисперсии в таких средах $r \leq 1/4$. Соотношение параметров индуцированного рассеяния p и нелинейной дисперсии r влияет на структуру волн перепада. Так, в средах с достаточно малой величиной индуцированного рассеяния p сильная нелинейная дисперсия приводит к осцилляциям в волнах перепада (рис. 1), а в средах с доминированием индуцированного рассеяния над нелинейной дисперсией в стационарных волнах на подложке осцилляции подавляются (траектории 3, 4 на рис. 2).

2. При $V^2 - 2q\Omega > 0$ и $q\alpha - 2V\beta > 0$, произведя в (6) замену координаты $\rho = \eta \frac{\sqrt{V^2 - 2q\Omega}}{q}$ и амплитуды волнового поля $A = B \cdot \sqrt{\frac{V^2 - 2q\Omega}{q\alpha - 2V\beta}}$, имеем

$$\frac{d^2 B}{d\rho^2} - pB^2 \frac{dB}{d\rho} + B + B^3 + rB^5 = 0, \quad (8)$$

где $p = 2\mu \frac{\sqrt{V^2 - 2q\Omega}}{q\alpha - 2V\beta} > 0$, $r = \frac{3}{4}\beta^2 \frac{V^2 - 2q\Omega}{(q\alpha - 2V\beta)^2} > 0$. Уравнение (8) имеет единственное состояние равновесия $B = 0$. Линеаризация (8) в окрестности $B = 0$ приводит к уравнению $\frac{d^2 B}{d\rho^2} + B = 0$, которое описывает состояние равновесия типа «центр». Однако, как и в пре-

дыдущем случае, детальный анализ траекторий при малых, но конечных значениях B указывает на существование неустойчивого фокуса (метод Ван-дер Поля [14]). Стационарные волны конечной амплитуды в этом случае отсутствуют.

3. При $V^2 - 2q\Omega < 0$ и $q\alpha - 2V\beta < 0$, произведя в (6) замену координаты $\rho = \eta \frac{\sqrt{2q\Omega - V^2}}{q}$ и амплитуды волнового поля $A = B \cdot \sqrt{\frac{2q\Omega - V^2}{2V\beta - q\alpha}}$, получим уравнение

$$\frac{d^2 B}{d\rho^2} - pB^2 \frac{dB}{d\rho} - B - B^3 + rB^5 = 0, \quad (9)$$

где $p = 2\mu \frac{\sqrt{2q\Omega - V^2}}{2V\beta - q\alpha} > 0$, $r = \frac{3}{4}\beta^2 \frac{2q\Omega - V^2}{(q\alpha - 2V\beta)^2} > 0$. Уравнение (9) имеет три состояния

равновесия $B = 0$ и $\pm B_0 = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4r}}{2r}}$.

Состояние равновесия $B = 0$ - седло. Тип состояний равновесия $\pm B_0$ определяется соотношением параметра индуцированного рассеяния p и величины $B_0^2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4r}}{2r}$, зависящей от параметра нелинейной дисперсии r .

Так, при достаточно слабом эффекте индуцированного рассеяния по сравнению с эф-

фектом нелинейной дисперсии $p^2 < \frac{16r\sqrt{1 + 4r}}{1 + \sqrt{1 + 4r}}$ состояния равновесия $\pm B_0$ - неустойчи-

вые узлы. Фазовая плоскость уравнения (9) для этого случая приведена на рис. 3. В этом случае существуют конечные по амплитуде стационарные волны перепада (kink-waves) без под-

ложки, которым отвечают траектории 1, 2, связывающие состояния равновесия. Величина перепада интенсивности в стационарной волне в этом случае определяется значением

$$B_0^2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4r}}{2r} \text{ и уменьшается с ростом параметра нелинейной дисперсии } r.$$

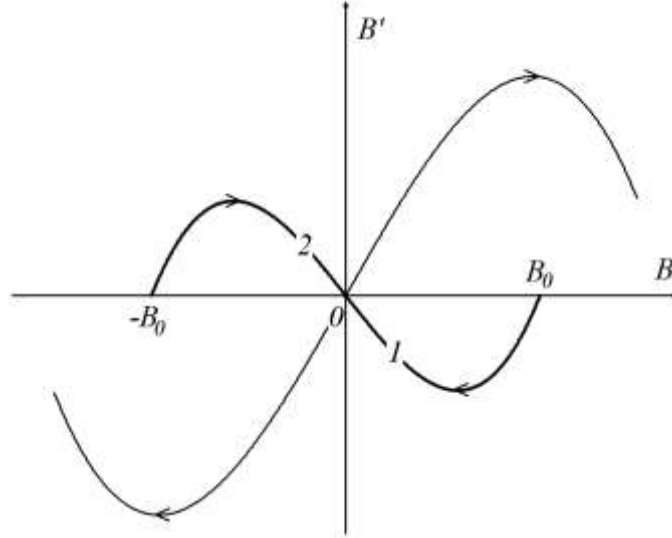


Рис. 3. Фазовая плоскость уравнения (9) при достаточно слабом эффекте индуцированного рассеяния:
стационарным волнам конечной амплитуды отвечают траектории 1 и 2, связывающие состояния равновесия

Уравнение (9) в частном случае допускает решение в явном виде для волн перепада, отвечающих траекториям 1 и 2 на рис. 3. Для этого в (9) сделаем замену $t = \tan(\delta\rho)$:

$$\delta^2(1-t^2)^2 \frac{d^2B}{dt^2} - 2\delta^2 t(1-t^2) \frac{dB}{dt} - p(1-t^2)B^2 \frac{dB}{dt} - B - B^3 + rB^5 = 0. \quad (10)$$

Представляя решение (10) в виде $B = B_* \sqrt{1+t}$ и требуя выполнения полученного соотношения при всех значениях t , из условия обращения в нуль коэффициентов при различных степенях t получим систему уравнений

$$rB_*^4 + \frac{p\delta}{2} B_*^2 + \frac{3}{4} \delta^2 = 0, \quad (11)$$

$$rB_*^4 - \frac{B_*^2}{2} - \frac{\delta^2}{4} = 0, \quad (12)$$

$$rB_*^4 - \left(1 + \frac{p\delta}{2}\right) B_*^2 - \left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right) = 0. \quad (13)$$

Система уравнений (11) – (13) при $r > 0$ и $p > 0$ совместна при $\delta = -1$, $B_*^2 = 2/(p-1)$, $r = (p-1)(p+3)/16$, в которых $p > 1$. Протяженность области перепада по исходной переменной η в полученном решении составляет $\Delta \sim \frac{\sqrt{2q\Omega - V^2}}{q}$, которая уменьшается с ростом

линейной дисперсии q .

При достаточно сильном эффекте индуцированного рассеяния по сравнению с эффек-

том нелинейной дисперсии: при $p^2 > \frac{16r\sqrt{1+4r}}{1+\sqrt{1+4r}}$ состояния равновесия $\pm B_0$ являются неустойчивыми фокусами.

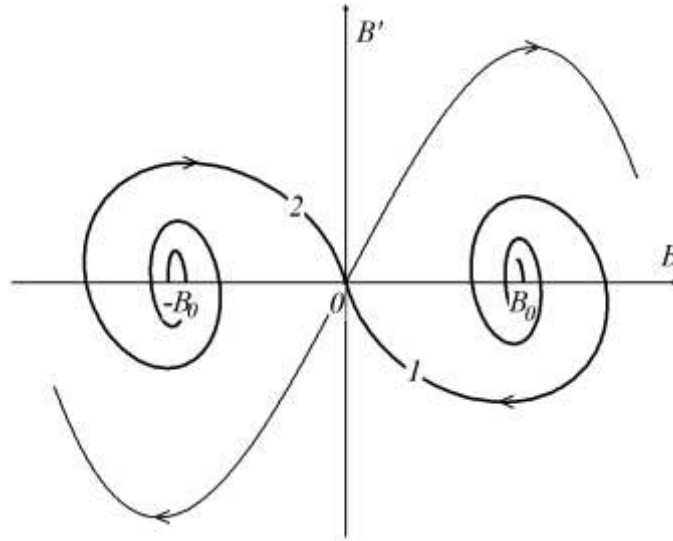


Рис. 4. Фазовая плоскость уравнения (9) при достаточно сильном эффекте индуцированного рассеяния:
 стационарным волнам конечной амплитуды отвечают траектории 1 и 2, связывающие состояния равновесия

Фазовая плоскость уравнения (9) для этого случая приведена на рис. 4. Стационарным волнам конечной амплитуды отвечают траектории 1 и 2, связывающие неустойчивые фокусы с седлом.

Необходимо отметить, что при исчезновении в уравнении (9) параметра нелинейной дисперсии $r \rightarrow 0$ состояния равновесия $\pm B_0$ уходят на бесконечность, что приводит к исчезновению стационарных волн конечной амплитуды при $r = 0$. Отсюда следует, что существование стационарных волн конечной амплитуды (траектории 1 и 2, рис. 3, 4) в этом случае обусловлено балансом эффектов нелинейной дисперсии и индуцированного рассеяния.

4. При $V^2 - 2q\Omega < 0$ и $q\alpha - 2V\beta > 0$, произведя в (6) замену координаты $\rho = \eta \frac{\sqrt{2q\Omega - V^2}}{q}$ и амплитуды волнового поля $A = B \cdot \sqrt{\frac{2q\Omega - V^2}{2V\beta - q\alpha}}$, получим уравнение

$$\frac{d^2 B}{d\rho^2} - pB^2 \frac{dB}{d\rho} - B + B^3 + rB^5 = 0, \tag{14}$$

в котором $p = 2\mu \frac{\sqrt{2q\Omega - V^2}}{q\alpha - 2V\beta} > 0$, $r = \frac{3}{4}\beta^2 \frac{2q\Omega - V^2}{(q\alpha - 2V\beta)^2} > 0$. Уравнение (14) имеет три со-

стояния $B = 0$ и $\pm B_1 = \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1+4r}}{2r}}$.

Состояние равновесия $B = 0$ - седло. Тип состояний равновесия $\pm B_1$ определяется

соотношением параметра индуцированного рассеяния p и величины $B_1^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4r}}{2r}$, зависящей от параметра нелинейной дисперсии r .

Так, при достаточно слабом эффекте индуцированного рассеяния по сравнению с эффектом нелинейной дисперсии $p^2 < 16r \frac{\sqrt{1 + 4r}}{\sqrt{1 + 4r} - 1}$ состояния равновесия $\pm B_1$ – неустойчивые фокусы. Фазовая плоскость уравнения (14) для этого случая приведена на рис. 5. В этом случае существуют стационарные волны перепада с затухающими осцилляциями (траектории 1, 2 на рис. 5).

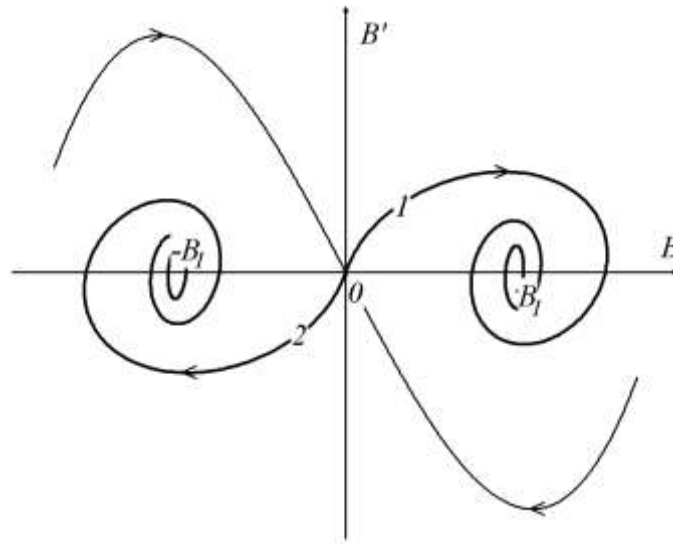


Рис. 5. Фазовая плоскость уравнения (14) при достаточно слабом эффекте индуцированного рассеяния:
стационарным волнам конечной амплитуды отвечают траектории 1, 2, связывающие состояния равновесия

Необходимо отметить, что в этом случае при пренебрежении в (14) эффектом индуцированного рассеяния ($p = 0$) уравнение (14) принимает вид $\frac{d^2 B}{d\rho^2} - B + B^3 + rB^5 = 0$, которое имеет солитонное решение [13]:

$$B(\rho) = \frac{\pm 2}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{16}{3}r \cdot \cosh(2\rho)}}}.$$

При достаточно сильном эффекте индуцированного рассеяния по сравнению с эффектом нелинейной дисперсии $p^2 > 16r \frac{\sqrt{1 + 4r}}{\sqrt{1 + 4r} - 1}$ состояния равновесия $\pm B_1$ являются неустойчивыми узлами. Фазовая плоскость уравнения (14) для этого случая приведена на рис. 6. В этом случае существуют конечные по амплитуде стационарные волны перепада без осцилляций (траектории 1, 2 на рис. 6). Величина перепада интенсивности в этих волнах определяется значением $B_1^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4r}}{2r} \leq 1$, зависящим от параметра нелинейной дисперсии r .

Так, при достаточно малом значении параметра нелинейной дисперсии $r \ll 1$ перепад интенсивности равен 1, а наименьшее значение параметра индуцированного рассеяния для реализации стационарных волн перепада составит $p_c = 2\sqrt{2}$. Отсюда следует, что при пренебрежении в (14) нелинейной дисперсией стационарные волны (траектории 1 и 2) не исчезают и обусловлены балансом эффектов индуцированного рассеяния и линейной дисперсии второго порядка. С ростом r величина перепада интенсивности уменьшается и при $r \gg 1$ определяется соотношением $B_1^2 \approx 1/\sqrt{r}$. Величина параметра индуцированного рассеяния для реализации волн перепада в этом случае должен удовлетворять соотношению $p > 4\sqrt{r}$.

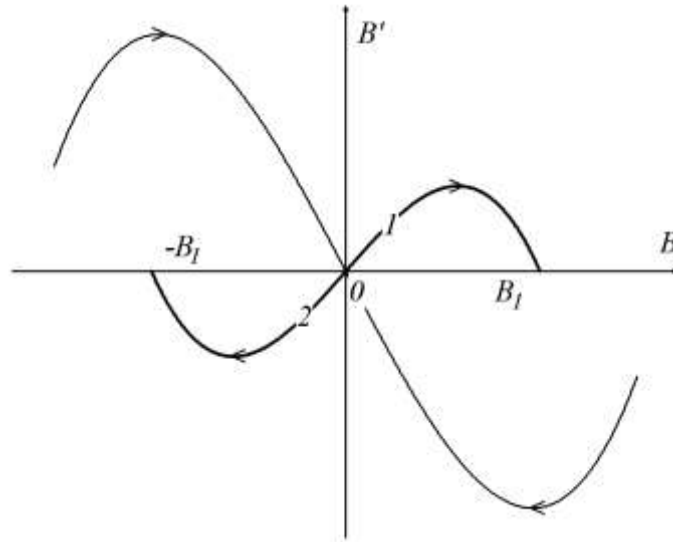


Рис. 6. Фазовая плоскость уравнения (14) при достаточно сильном эффекте индуцированного рассеяния:
стационарным волнам конечной амплитуды отвечают траектории 1, 2, связывающие состояния равновесия

В частном случае уравнение (14) допускает решение в явном виде для волн перепада, отвечающих траекториям 1 и 2 на рис. 6. Для этого в (14) сделаем замену $t = \tan(\delta\rho)$:

$$\delta^2(1-t^2)^2 \frac{d^2B}{dt^2} - 2\delta^2 t(1-t^2) \frac{dB}{dt} - p(1-t^2)B^2 \frac{dB}{dt} - B + B^3 + rB^5 = 0. \quad (15)$$

Представляя решение (15) в виде $B = B_* \sqrt{1+t}$ и требуя выполнения полученного соотношения при всех значениях t , из условия обращения в нуль коэффициентов при различных степенях t получим систему уравнений

$$rB_*^4 + \frac{p\delta}{2} B_*^2 + \frac{3}{4} \delta^2 = 0, \quad (16)$$

$$rB_*^4 + \frac{B_*^2}{2} - \frac{\delta^2}{4} = 0, \quad (17)$$

$$rB_*^4 + \left(1 - \frac{p\delta}{2}\right) B_*^2 - \left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right) = 0. \quad (18)$$

При $r > 0$ и $p > 0$ система уравнений (16)–(18) совместна при $\delta = -1$, $B_*^2 = 2/(1+p)$, $r = (1+p)(p-3)/16$, в которых $p \geq 3$.

Отметим, что проанализированные в п. 4 стационарные волны реализуются при одновременном выполнении соотношений $q\alpha - 2V\beta > 0$ и $V^2 - 2q\Omega < 0$, справедливых, в частности, для сред с достаточно большой положительной величиной линейной дисперсии второго порядка.

Выводы

В данной работе в рамках расширенного нелинейного уравнения Шредингера, содержащего члены нелинейной дисперсии и индуцированного рассеяния Рамана, исследованы стационарные волны с нелинейной фазовой модуляцией, пропорциональной интенсивности волнового поля. Найдены два класса стационарных волн: существование одних – балансом эффектов нелинейной дисперсии и индуцированного рассеяния, и эти волны исчезают при пренебрежении нелинейной дисперсией; существование других обусловлено балансом индуцированного рассеяния и линейной дисперсии второго порядка и эти волны не исчезают при пренебрежении нелинейной дисперсией. Показано, что для волн перепада, обусловленных балансом эффектов нелинейной дисперсии и индуцированного рассеяния, величина перепада интенсивности волнового поля определяется параметром нелинейной дисперсии r и уменьшается с его увеличением. Соотношение параметров нелинейной дисперсии r и индуцированного рассеяния p меняет лишь структуру стационарных волн перепада.

Детально исследованы стационарные волны перепада в средах с большими и малыми значениями параметра линейной дисперсии второго порядка q .

Так, в средах с достаточно большой положительной величиной линейной дисперсией второго порядка q , удовлетворяющей соотношениям $q > 2V\beta/\alpha$ и $q > V^2/2\Omega$, стационарные волны перепада существуют при любых значениях параметра нелинейной дисперсии r : при достаточно слабом эффекте индуцированного рассеяния по сравнению с эффектом нелинейной дисперсии существуют стационарные волны перепада с затухающими осцилляциями, а при доминировании эффекта индуцированного рассеяния осцилляции подавляются.

В средах с достаточно малой положительной величиной линейной дисперсии второго порядка q , удовлетворяющей соотношениям $q < 2V\beta/\alpha$ и $q < V^2/2\Omega$, стационарные волны конечной амплитуды существуют при достаточно малом значении параметра нелинейной дисперсии $r \leq 1/4$. В таких средах при доминировании эффекта нелинейной дисперсии на эффектом индуцированного рассеяния существуют стационарные волны перепада без осцилляций, а при доминировании эффекта индуцированного рассеяния – с затухающими осцилляциями.

Библиографический список

1. **Yang, Y.** Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis / Y. Yang. Springer. New York. 2001.
2. **Dickey, L.A.** Soliton Equation and Hamiltonian Systems / L.A. Dickey. World Scientific. New York. 2005.
3. **Kivshar, Y.S.** Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals / Y.S. Kivshar, G.P. Agrawal. Academic. San Diego. 2003.
4. **Захаров, В.Е.** Коллапс ленгмюровских волн // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. № 5. С. 1745–1759.
5. **Zakharov, V.E.** Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media / V.E. Zakharov, A.B. Shabat // Sov. Phys. JETP. 1972. V. 34. P. 62–69.
6. **Hasegawa, A.** Transmission of Stationary Nonlinear Optical Physics in Dispersive Dielectric Fibers I: Anomalous Dispersion / A. Hasegawa, F. Tappert // Appl. Phys. Lett. 1973. V. 23. N. 3. P. 142–144.
7. **Oliviera, J.R.** Analytical Solution for the Modified Nonlinear Schrodinger Equation Describing Optical Shock Formation / J.R. Oliviera, M.A. Moura // Phys. Rev. E. 1998, V. 57. P. 4751–4755.
8. **Gordon, J.P.** Theory of the Soliton Self-frequency Shift // Opt. Lett. 1986. V. 11. P. 662–664.

9. **Kivshar, Y.S.**, Dark-soliton Dynamics and Shock Waves Induced by the Stimulated Raman Effect in Optical Fibers // *Phys. Rev. A*. 1990. V. 42. N. 3. P. 1757–1761.
10. **Gromov, E.M.** Stationary Waves in a Third–Order Nonlinear Schrödinger Equation / E.M. Gromov, V.V. Tyutin // *Wave Motion*. 1998. V. 28. N. 1. P. 13–24.
11. **Gromov, E.M.** Nonlinear Dynamics of Short Wave Trains in Dispersive Media / E.M. Gromov, V.I. Talanov // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 1996. V. 110. P. 137–141.; *JETP*. 1996. V. 83. P. 73–79.
12. **Gromov, E.M.** Short Optical Solitons in Fibers / E.M. Gromov, V.I. Talanov // *Chaos*. 2000. V. 10. N. 3. P. 551–558.
13. **Громов, Е.М.** Короткие солитоны огибающей (комбинированное нелинейное уравнение) / Е.М. Громов, В.И. Таланов // *Изв. Вузов. Радиофизика*. 1996. Т. 39. N. 6. С. 735–755.
14. **Рабинович, М.И.** Введение в теорию колебаний и волн / М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков. – М.: Наука, 1984.

*Дата поступления
в редакцию* 29.04.2011

E.M. Gromov, V.V. Tyutin

**STATIONARY WAVES IN THE EXTENDED NONLINEAR SCHRÖDINGER
EQUATION WITH STIMULATED RAMAN–SCATTERING
AND NONLINEAR DISPERSION**

The stationary waves with nonlinear phase modulation in the frame of the extended nonlinear Schrodinger equation with taking into account both the nonlinear dispersion and stimulated Raman–scattering terms are considered. Two classes of a kink–waves are found: one class exists as the result of balance of the stimulated Raman–scattering and nonlinear dispersion, other class – as the result of balance of the stimulated Raman–scattering and second–order linear dispersion. It is shown that kink–waves with pedestal exist only in presence of the nonlinear dispersion.

Key words: extended nonlinear Schrodinger equation, stimulated Raman–scattering, nonlinear dispersion, nonlinear stationary waves, kinks