УДК 621

Г.В. Кондратьев

КОНКРЕТНАЯ ДВОЙСТВЕННОСТЬ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Все известные конкретные двойственности (Понтрягина, Стоуна, Гельфанда-Наймарка и другие) являются, так называемыми, естественными двойственностями первого порядка. В статье изучается структура конкретной двойственности, дается критерий ее существования для строгих бесконечномерных категорий, приводятся новые примеры.

Ключевые слова: конкретная двойственность, бесконечномерные категории.

Введение

В настоящее время усилия многих математиков направлены на создание терии *слабых* категорий высшего порядка [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Под слабыми понимаются категории со слабой ассоциативностью, которую очень нелегко выразить. Математики верят, что такая теория позволит объяснить многие эффекты от топологии до квантовой физики, вычислить гомотопические группы сфер, доказать некоторые гипотезы (например, гипотезу Гротендика, что категория топологических пространств, рассматриваемая со всеми гомотопиями, эквивалентна категории бесконечномерных группоидов). В отличие от слабых *строгие* категории просты с принципиальной точки зрения и уже давно заслуживают быть рабочим аппаратом в разных разделах математики. Например, 2-$\mathbf{CAT}$, 2-**Top**, 2-**Group**, 2-**LieGroup** являются строгими 2-категориями.

Не имея возможности изложить в статье основные факты теории (строгих) бесконечномерных категорий (представимость, лемма Йонеды, пределы-копределы, сопряженность), автор рекомендует для чтения [9, 10] или просто принять на веру, что бесконечномерные категории такие же по существу, как одномерные, с небольшими уточнениями.

Двойственность часто связывает противоположные разделы математики, такие как алгебра и геометрия. Будучи эквивалентностью первого порядка, она позволяет переносить внутренние понятия и инварианты из одной категории в другую. Будучи эквивалентностью высшего порядка, она также позволяет переносить внутренне сформулированные инварианты высшего порядка (такие как теории гомотопий, не зависящие от выбора специфических объектов, как сфера или симплекс, K-теория и другие) из одной категории в другую.

Категорный анализ конкретной двойственности первого порядка был дан Порстом и Толеном в [11]. Реальным примером конкретной двойственности высшего порядка, который приводится в статье, является 2-двойственность Гельфанда-Наймарка, справедливость которой была установлена автором в [9, 10].

$\{0,1,2,\dots\}$-клетки обозначаются в тексте латинскими буквами с соответствующими верхними индексами. Через ∞-$\mathbf{CAT}$, L, L', $\mathbf{B}$ обозначаются соответственно *строгая* бесконечномерная категория всех малых *строгих* бесконечномерных категорий, две произвольные бесконечномерные категории и фиксированная базовая категория. $f^m \circ_n g^m$ обозначает композицию m-клеток, $m \geq n$, таких что $d^n f^m = c^n g^m$, где d^n и c^n операции взятия начала и конца клетки, повторенные n раз. μ обозначает горизонтальную композицию (которая может соответствовать разным $\circ_n$ в зависимости от размерности клеток), e операцию взятия единичной клетки.

Конкретная двойственность

Двойственность – это просто эквивалентность категорий $L^{op} \sim L'$.

Определение 1. ***Конкретной двойственностью*** *над категорией* $\mathbb{B} \hookrightarrow \infty$ -

$\mathbf{CAT}$ *называется двойственность* $\begin{tikzcd} L^{op} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, phantom, "\approx"] & L' \arrow[l, bend left, "F"] \end{tikzcd}$*, такая, что существуют (инъективные) забывающие функторы* $U : L \to \mathbb{B}$, $V : L' \to \mathbb{B}$ *и объекты* $\tilde{A} \in L^0$, $\tilde{B} \in L'^0$, *для которых*

- $U(\tilde{A}) \sim V(\tilde{B})$,
- $V \circ_1 G \sim L(-, \tilde{A})$, $U \circ_1 F^{op} \sim L'(-, \tilde{B})$

$$\begin{tikzcd} L^{op} \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "L(-{,}\tilde{A})"'] & L' \arrow[d, "V"] \\ & \mathbb{B} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L'^{op} \arrow[r, "F^{op}"] \arrow[dr, "L'(-{,}\tilde{B})"'] & L \arrow[d, "U"] \\ & \mathbb{B} \end{tikzcd}$$

Представляющие объекты $\tilde{A} \in L^0$, $\tilde{B} \in L'^0$ называются **дуализирующими** объектами для данной конкретной двойственности [11]. Конкретная двойственная *сопряженность* определяется аналогично с той разницей, что функторы F и G необязательно эквивалентны.

Замечание. В определении 1 введен *слабый* вариант двойственности, где $X \sim Y$ означает, что существуют клетки $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, такие что $eX \sim g \circ_1 f$, $eY \sim f \circ_1 g$ (то есть существуют f, g и две подходяшие бесконечные последовательности клеток, принадлежащих $Hom(X, X)$ и $Hom(Y, Y)$).

Так же как в одномерном случае, двойственность получается из двойственной сопряженности ограничением на подкатегории, для объектов которых единица и коединица эквивалентны.

Утверждение 1 (представимые забывающие функторы $\Rightarrow$ конкретную двойственную сопряженность) *Пусть* (L, U), (L', V) *слабо двойственно сопряженные* ∞-*категории* $\begin{tikzcd} L^{op} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, phantom, "\top"] & L' \arrow[l, bend left, "F"] \end{tikzcd}$ *с представимыми забывающими функторами* $U \sim L(A_0, -) : L \to \mathbb{B}$, $V \sim L'(B_0, -) : L' \to \mathbb{B}$ *(где* $\mathbb{B} \hookrightarrow \infty$ *-* $\mathbf{CAT}$ *-- некоторая подкатегория). Тогда эта двойственность конкретна над* $\mathbb{B}$ *с дуализирующим объектом* $(\tilde{A}, \tilde{B})$, *где* $\tilde{A} := F(B_0)$, $\tilde{B} := G(A_0)$, *то есть*

- $U(\tilde{A}) \sim V(\tilde{B})$
- $V \circ_1 G \sim L(-, \tilde{A})$, $U \circ_1 F^{op} \sim L'(-, \tilde{B})$

$$\begin{tikzcd} L^{op} \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "L(-{,}\tilde{A})"'] & L' \arrow[d, "V"] \\ & \mathbb{B} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L'^{op} \arrow[r, "F^{op}"] \arrow[dr, "L'(-{,}\tilde{B})"'] & L \arrow[d, "U"] \\ & \mathbb{B} \end{tikzcd}$$

Доказательство:

- $U(\tilde{A}) = UF(B_0) \sim L(A_0, FB_0) \sim L'(B_0, GA_0) \sim VGA_0 = V\tilde{B}$
- $VG(-) \sim L'(B_0, G(-)) \sim L(-, FB_0) = L(-, \tilde{A})$

(аналогично $UF(-) \sim L'(-, \tilde{B})$) $\square$

Замечания

- Конкретная двойственная сопряженность задается двумя Hom-функ-торами, которые допускают подъем вдоль забывающих функторов (чтобы принять значения в нужной категории). Представляющие объекты этих функторов имеют эквивалентные (или изоморфные) несущие объекты в базовой категории $\mathbb{B}$.

- Для обычных одномерных категорий $\mathbb{B} = \mathbf{Set} \hookrightarrow \infty$ - $\mathbf{CAT}$ (∞-1-подкатегория). Для размерности n, как правило, $\mathbb{B} = n$- $\mathbf{Cat} \hookrightarrow \infty$ - $\mathbf{CAT}$ (∞ - n-подкатегория малых $(n-1)$-категорий).

Определение 2. Для Hom-множества $L(A, \tilde{A})$ и элемента $(x : A_0 \to A) \in L^0(A_0, A)$ **функтор взятия значения** в точке x есть $ev_{A,x} := L(x, \tilde{A}) : L(A, \tilde{A}) \to L(A_0, \tilde{A})$ ($ev_{A,x} \in \mathbb{B}^1 \hookrightarrow \infty$ - $\mathbf{CAT}^1$).
Аналогично, $(n-1)$**-модификация взятия значения** ev_{A,x^n}, $n = 1, 2, \dots$, для $x^n \in L^n(A_0, A)$ есть $L(x^n, \tilde{A}) \in \mathbb{B}^n(L(A, \tilde{A}), L(A_0, \tilde{A}))$.

Определение 3.

- Для забывающего функтора $V : L' \to \mathbb{B}$ клетка $f^n : V(Y) \to V(Y') \in \mathbb{B}^n(V(Y), V(Y'))$ называется L'**-клеткой**, если $\exists\, \Phi^n : Y \to Y' \in L'^n(Y, Y')$, такая что $V(\Phi^n) = f^n$.
- Поднятие Hom-функтора $V \circ G \sim L(-, \tilde{A})$ называется **начальным** [12], если $\forall A \in L^0\ \forall Y \in L'^0\ \forall f^n : V(Y) \to L(A, \tilde{A}) \in \mathbb{B}^n(V(Y), L(A, \tilde{A}))$ f^n является L'-клеткой если и только если $\forall (x^n : A_0 \to A) \in L^n(A_0, A)$ $ev_{A,x^n} \circ_{n+1} f^n : V(Y) \to L(A_0, \tilde{A}) \in \mathbb{B}^n(V(Y), L(A_0, \tilde{A}))$ является L'-клеткой.
- Если поднятия обоих Hom-функторов $V \circ G \sim L(-, \tilde{A})$, $U \circ F \sim L'(-, \tilde{B})$ -- начальные, тогда конкретная двойственная сопряженность $L^{op} \underset{F}{\overset{G}{\rightleftarrows}} L'$ ($\top$), если она существует, называется **естественной** [11].

Даже если $U\tilde{A} \sim V\tilde{B}$ и $\forall A \in L^0, B \in L'^0$ $\mathbb{B}$-объекты $L(A, \tilde{A})$, $L'(B, \tilde{B})$ поднимаются в L', L, Hom-функторы $L(-, \tilde{A})$, $L'(-, \tilde{B})$ необязательно имеют поднятие (для этого поднятия функций $A \mapsto L(A, \tilde{A})$, $B \mapsto L'(B, \tilde{B})$ должны быть продолжаемы функториально над всеми клетками). Мы вводим следующую концепцию.

Определение 4. ***Условие начального поднятия для конусов взятия значений*** $\{ev_{A,x^n} \in \mathbb{B}^n(L(A, \tilde{A}), L(A_0, \tilde{A}))\}^{n \in \mathbb{N}}_{x^n \in L^n(A_0, A)}$,
$\{ev_{B,y^n} \in \mathbb{B}^n(L'(B, \tilde{B}), L'(B_0, \tilde{B}))\}^{n \in \mathbb{N}}_{y^n \in L'^n(B_0, B)}$
состоит из следующих требований

- Hom-категории вида $L(A, \tilde{A})$, $L'(B, \tilde{B}) \in Ob(\mathbb{B})$ поднимаются соответственно в L', L,
- Конусы взятия значений
$\{ev_{A,x^n} \in \mathbb{B}^n(L(A, \tilde{A}), L(A_0, \tilde{A}))\}^{n \in \mathbb{N}}_{x^n \in L^n(A_0, A)}$,
$\{ev_{B,y^n} \in \mathbb{B}^n(L'(B, \tilde{B}), L'(B_0, \tilde{B}))\}^{n \in \mathbb{N}}_{y^n \in L'^n(B_0, B)}$
поднимаются соответсвенно в
$\{ev_{A,x^n} \in L'^n(G(A), \tilde{B})\}^{n \in \mathbb{N}}_{x^n \in L^n(A_0, A)}$,
$\{ev_{B,y^n} \in L^n(F(B), \tilde{A})\}^{n \in \mathbb{N}}_{y^n \in L'^n(B_0, B)}$ в L', L,

- $\forall f^n \in \mathbb{B}^n(VX, L(A,\tilde{A}))$ f^n есть L'-клетка если только $\forall x^n \in L^n(A_0, A)$ $\mu(ev_{A,x^n}, f^n) \in \mathbb{B}^n(VX, L(A_0,\tilde{A}))$ есть L'-клетка (симметрично $\forall g^n \in \mathbb{B}^n(UY, L'(B,\tilde{B}))$ g^n есть L-клетка если только $\forall y^n \in L'^n(B_0, B)$ $\mu(ev_{B,y^n}, g^n) \in \mathbb{B}^n(UY, L'(B_0,\tilde{B}))$ есть L-клетка).

Следующая теорема показывает, что при выполнении условия начального поднятия для конусов взятия значений существует начальное поднятие Hom-функторов. Эта теорема, сформулированная для категорий первого порядка Порстом и Толеном [11], является критерием существования строгой конкретной естественно й двойственной сопряженности. В доказательстве поднятые отображения взятия значений обозначаются $ev_{A.x}$ (или как-нибудь похоже), а базовые отображения в $\mathbb{B}$ с 'модулем' $|ev_{A,x}|$.

Утверждение 2. *Если две строгие* ∞*-категории* $L.\ L'$ *конкретные над* $\mathbb{B} \hookrightarrow \infty$ - $\mathbf{CAT}$ *с представимыми (строго инъективными) забывающими функторами* $U = L(A_0, -),\ V = L'(B_0, -)$ *имеют объекты* $\tilde{A} \in L^0,\ \tilde{B} \in L'^0$*, такие что*

- $U\tilde{A} \sim V\tilde{B}$,
- Hom-функторы $L(-,\tilde{A}) : L^{op} \to \mathbb{B},\ L'(-,\tilde{B}) : L'^{op} \to \mathbb{B}$ удовлетворяют **условию начального поднятия для конусов взятия значений**

тогда существует естественная ***строгая*** *конкретная двойственная сопряженность*

$$\begin{tikzcd} L^{op} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, phantom, "\top"] & L' \arrow[l, bend left, "F"] \end{tikzcd} \qquad L(A, FB) \xrightarrow[\text{nat. iso}]{\simeq} L'(B, GA)$$

$$\begin{tikzcd} L^{op} \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "L(-,\tilde{A})"'] & L' \arrow[d, "V"] \\ & \mathbb{B} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L'^{op} \arrow[r, "F^{op}"] \arrow[dr, "L'(-,\tilde{B})"'] & L \arrow[d, "U"] \\ & \mathbb{B} \end{tikzcd}$$

с дуализирующим объектом $(\tilde{A}, \tilde{B})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

- $L(A,\tilde{A}),\ L'(B,\tilde{B})$ поднимаются в L', L по условию.
- Пусть $f^n \in L^n(A, A')$, тогда $L(f^n, \tilde{A}) : L(A',\tilde{A}) \to L(A,\tilde{A})$ есть L'-клетка так как
$$ev_{A,a^n} \circ_{n+1} L(f^n,\tilde{A}) := L(a^n,\tilde{A}) \circ_{n+1} L(f^n,\tilde{A}) = L(f^n \circ_{n+1} a^n, \tilde{A}) =: ev_{A', f^n \circ_{n+1} a^n},$$
которая поднимаема $\forall a^n \in L^n(A_0, \tilde{A})$. Следовательно, $L(f^n,\tilde{A})$ есть L'-клетка, и аналогично, $L'(g^n,\tilde{B})$ есть L-клетка, то есть существуют отображения $\begin{tikzcd} L^{op} \arrow[r, bend left, "G"] & L' \arrow[l, bend left, "F"] \end{tikzcd}$, которые очевидно функториальны.
Почему они задают сопряженность?
- (единица и коединица) 1-стрелка (единица) $\eta_B : B \to GFB$ задается как $|\eta_B| =: V\eta_B : |B| \to |GFB| : b \mapsto [ev_{B,b} : FB \to \tilde{A}]$, $b \in |B| = L'(B_0, B)$, $|GFB| = L(FB, \tilde{A})$, $|ev_{B,b}| : |FB| \to |\tilde{A}|$,
$|FB| = L'(B,\tilde{B})$, $|\tilde{A}| = L(A_0,\tilde{A}) \sim L'(B_0,\tilde{B})$. Почему $|\eta_B|$ могут быть подняты в L'? Возьмем композицию с отображениями взятия значе-

ний $|ev_{FB,c}| \circ_1 |\eta_B|(b) = |ev_{FB,c}|(ev_{B,b}) = |ev_{B,b}|(c) = |c|(b)$, где $c \in |FB|^0 = L'^0(B, \tilde{B}) = L^0(A_0, FB)$, $b \in |B|^n$. Поэтому, $|ev_{FB,c}| \circ_1 |\eta_B| = |c|$ есть L'-клетка. Следовательно, $|\eta_B|$ есть L'-клетка. Коединица дана симметрично $\varepsilon_A \to FGA$, $|\varepsilon_A| : |A| \to |FGA| : a \mapsto [ev_{A,a} : GA \to \tilde{B}]$, $|A| = L(A_0, A)$, $|FGA| = L'(GA, \tilde{B})$, $|ev_{A,a}| : |GA| \to |\tilde{B}|$, $|GA| = L(A, \tilde{A})$, $|\tilde{B}| = L'(B_0, \tilde{B}) \sim L(A_0, \tilde{A})$. По той же причине $|\varepsilon_A|$ есть L-клетка.

- (треугольные тождества) $G\varepsilon_A \circ_1 \eta_{GA} = 1_{GA}$, $F\eta_B \circ_1 \varepsilon_{FB} = 1_{FB}$. Достаточно доказать их для базовых несущих отображений. Поскольку забывающие функторы инъективны, они будут следовать

  $|G\varepsilon_A| \circ_1 |\eta_{GA}| \stackrel{?}{=} |1_{GA}|$,

где $|\eta_{GA}| : |GA| \to |GFGA|$, $|GA| = L(A, \tilde{A})$, $|GFGA| = L(FGA, \tilde{A})$, $\varepsilon_A : A \to FGA$, $|G\varepsilon_A| : |GFGA| \to |GA|$.

Возьмем $(f^n : A \to \tilde{A}) \in |GA| = L^n(A, \tilde{A})$, $a^m \in |A| = L^m(A_0, A)$. Два случая возможны:

$$\begin{cases} (a)\ (f^n, n > 0)\ \&\ (a^0){:}\, ||G\varepsilon_A| \circ_1 |\eta_{GA}|(f^n)|(a^0) = |L(\varepsilon_A, \tilde{A})(ev_{GA,f^n})|(a^0) \\ (b)\ (f^0)\ \&\ (a^n, n \geq 0){:}\, ||G\varepsilon_A| \circ_1 |\eta_{GA}|(f^0)|(a^n) = |L(\varepsilon_A, \tilde{A})(ev_{GA,f^0})|(a^n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a) = |ev_{GA,f^n} \circ_{n+1} e^n\varepsilon_A|(a^0) = |ev_{GA,f^n}| \circ_{n+1} e^n|\varepsilon_A|(a^0) = |ev_{GA,f^n}|(ev_{A,e^n a^0}) \\ (b) = |ev_{GA,f^0} \circ_1 \varepsilon_A|(a^n) = |ev_{GA,f^0}| \circ_1 |\varepsilon_A|(a^n) = |ev_{GA,f^0}|(ev_{A,a^n}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a) = |ev_{A,e^n a^0}|(f^n) = |f^n|(a^0) =: \mu^L_{A_0,A,\tilde{A}}(f^n, e^n a^0) = ||1_{GA}|(f^n)|(a^0) \\ (b) = |ev_{A,a^n}|(f^0) = |f^0|(a^n) =: \mu^L_{A_0,A,\tilde{A}}(e^n f^0, a^n) = ||1_{GA}|(f^0)|(a^n) \end{cases}$$

  Второе треугольное тождество выполняется аналогично.

- (естественность η_B, ε_A) Опять достаточно доказать естественность для проекций отображений в $\mathbb{TB}$

$$\begin{array}{ccc} |B| & \xrightarrow{|\eta_B|} & |GFB| \\ {\scriptstyle |f|}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle |GFf| = L(Ff, \tilde{A})} \\ |B'| & \xrightarrow[|\eta_{B'}|]{} & |GFB'| \end{array}$$

  Возможные случаи:
$$\begin{cases} (a)(b^n \in |B|^n, n \geq 0)\ \&\ (f^0 \in L'^0(B, B')) \\ (b)(b^0 \in |B|^0)\ \&\ (f^n \in L'^n(B, B')) \end{cases}$$

$$(a) \quad \begin{array}{ccc} |B| & \xrightarrow{|\eta_B|} & |GFB| \\ {\scriptstyle |f^0|}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle |GFf^0| = L(Ff^0, \tilde{A})} \\ |B'| & \xrightarrow[|\eta_{B'}|]{} & |GFB'| \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} b^n & \longmapsto & ev_{B,b^n} \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ & & ev_{B,b^n} \circ_{n+1} e^n(Ff^0) \\ & & \Vert = \\ \Big\downarrow & & \Downarrow \\ |f^0|(b^n) & \longmapsto & ev_{B',|f^0|(b^n)} \end{array}$$

$$(b)\quad \begin{tikzcd} {|B|} \arrow[r, "e^n|\eta_B|"] \arrow[d, "|f^n|"'] & {|GFB|} \arrow[d, "|GFf^n|=L(Ff^n{,}\tilde{A})"] \\ {|B'|} \arrow[r, "e^n|\eta_{B'}|"'] & {|GFB'|} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} b^0 \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & ev_{B,e^n b^0} \arrow[d, mapsto] \\ & ev_{B,e^n b^0} \circ_{n+1} (Ff^n) \arrow[d, Rightarrow, "="] \\ {|f^n|(b^0)} \arrow[r, mapsto] & ev_{B',|f^n|(b^0)} \end{tikzcd}$$

(напомним, $|f^n|(b^0) \equiv \mu(f^n, e^n b^0)$, $|f^0|(b^n) \equiv \mu(e^n f^0, b^n)$)

Почему $\begin{cases} (a) & ev_{B,b^n} \circ_{n+1} e^n(Ff^0) = ev_{B',|f^0|(b^n)} \\ (b) & ev_{B,e^n b^0} \circ_{n+1} (Ff^n) = ev_{B',|f^n|(b^0)} \end{cases}$?

Берем проекции отображений:

$$\begin{cases} (a)\ |ev_{B,b^n}| \circ_{n+1} e^n |Ff^0|(h^n) = |ev_{B,b^n}|(h^n \circ_{n+1} e^n f^0) = \\ (b)\ |ev_{B,e^n b^0}| \circ_{n+1} |Ff^n|(h^0) = |ev_{B,e^n b^0}|(e^n h^0 \circ_{n+1} f^n) = \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a) = |h^n \circ_{n+1} e^n f^0|(b^n) = |h^n| \circ_{n+1} |e^n f^0|(b^n) = |ev_{B',|f^0|(b^n)}|(h^n) \\ (b) = |e^n h^0 \circ_{n+1} f^n|(e^n b^0) = e^n|h^0| \circ_{n+1} |f^n|(e^n b^0) = |ev_{B',|f^n|(b^0)}|(h^0) \end{cases},$$

где $h^n \in L'^n(B', \tilde{B}), h^0 \in L'^0(B', \tilde{B})$

(типы клеток следующие: $Ff : FB' \to FB$,

$ev_{B,b} : FB \to A$ (L-клет-ка), $ev_{B',|f|(b)} : FB' \to A$ (L-клетка),

$|ev_{B,b}| : L'(B, \tilde{B}) \to |\tilde{B}| = L'(B_0, \tilde{B})$,

$|ev_{B',|f|(b)}| : L'(B', \tilde{B}) \to |\tilde{B}| = L'(B_0, \tilde{B})$,

$|Ff| : L'(B', \tilde{B}) \to L'(B, \tilde{B})$, $|Ff| = L'(f, \tilde{B})$). Следовательно,

η_B - естественна. Аналогично, ε_A - естественна.

- (функторные изоморфизмы $L(A, FB) \underset{\theta^*_{A.B}}{\overset{\theta_{A,B}}{\rightleftarrows}} L'(B, GA)$)

Определим $\begin{cases} \theta_{A,B}(f^n) := G(f^n) \circ_{n+1} e^n(\eta_B), & f^n \in L^n(A, FB) \\ \theta^*_{A.B}(g^n) := F(g^n) \circ_{n+1} e^n(\varepsilon_A), & g^n \in L'^n(B, GA) \end{cases}$

Пусть $g^n \in L'^n(B, GA)$,

тогда $\theta_{A,B}(\theta^*_{A.B}(g^n)) := G(Fg^n \circ_{n+1} e^n(\varepsilon_A)) \circ_{n+1} e^n(\eta_B) =$

$= e^n(G\varepsilon_A) \circ_{n+1} GFg^n \circ_{n+1} e^n(\eta_B) = e^n(G\varepsilon_A) \circ_{n+1} e^n(\eta_{GA}) \circ_{n+1} g^n =$

$= e^n(1_{GA}) \circ_{n+1} g^n = e^{n+1}(GA) \circ_{n+1} g^n = g^n$. Аналогично, $\theta^*_{A.B}(\theta_{A,B}(f^n)) = f^n,\ f^n \in L^n(A, FB)$. $\theta_{A,B},\ \theta^*_{A.B}$ очевидно функторы и, следовательно, функторные изоморфизмы.

- (естественность $\theta_{A,B},\ \theta^*_{A,B}$) Докажем, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} A & B & L(A, FB) \arrow[r, "e^n\theta_{A,B}"] \arrow[d, "L(x^n{,}Fy^n)"'] & L'(B, GA) \arrow[d, "L'(y^n{,}Gx^n)"] \\ A' \arrow[u, "x^n"] & B' \arrow[u, "y^n"] & L(A', FB') \arrow[r, "e^n\theta_{A',B'}"] & L'(B', GA') \end{tikzcd}$$

коммутативна.

$$L'(y^n, Gx^n) \circ_{n+1} e^n\theta_{A,B} \stackrel{?}{=} e^n\theta_{A',B'} \circ_{n+1} L(x^n, Fy^n)$$

Два случая: $\begin{cases} (a)\ (f^0 \in L(A,FB))\ \&\ (x^n, y^n, n>0) \\ (b)\ (f^n \in L(A,FB), n \geq 0)\ \&\ (x^0, y^0) \end{cases}$

$$\begin{tikzcd}
f^0 \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & e^nG(f^0) \circ_{n+1} e^n(\eta_B) \arrow[d] \\
& Gx^n \circ_{n+1} (e^nG(f^0) \circ_{n+1} e^n(\eta_B)) \circ_{n+1} y^n \arrow[d, Rightarrow, "="', "?"] \arrow[dd, Rightarrow, bend left=60, "= (\eta_B \text{ нат.})"] \\
Fy^n \circ_{n+1} e^n f^0 \circ_{n+1} x^n \arrow[r, mapsto] & G(Fy^n \circ_{n+1} e^n f^0 \circ_{n+1} x^n) \circ_{n+1} e^n(\eta_{B'}) \arrow[d, Rightarrow, "="'] \\
& Gx^n \circ_{n+1} e^nGf^0 \circ_{n+1} GFy^n \circ_{n+1} e^n(\eta_{B'})
\end{tikzcd}$$

(a)

$$\begin{tikzcd}
f^n \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & G(f^n) \circ_{n+1} e^n(\eta_B) \arrow[d] \\
& e^nGx^0 \circ_{n+1} (G(f^n) \circ_{n+1} e^n(\eta_B)) \circ_{n+1} e^ny^0 \arrow[d, Rightarrow, "="', "?"] \arrow[dd, Rightarrow, bend left=60, "= (\eta_B \text{ нат.})"] \\
e^nFy^0 \circ_{n+1} f^n \circ_{n+1} e^nx^0 \arrow[r, mapsto] & G(e^nFy^0 \circ_{n+1} f^n \circ_{n+1} e^nx^0) \circ_{n+1} e^n(\eta_{B'}) \arrow[d, Rightarrow, "="'] \\
& e^nGx^0 \circ_{n+1} Gf^n \circ_{n+1} e^nGFy^0 \circ_{n+1} e^n(\eta_{B'})
\end{tikzcd}$$

(b)

Следовательно, L и L'-конкретно двойственно сопряженные категории. Это соответствие естественное (по построению) и строгое ($\theta_{A,B}$ и $\theta^*_{A,B}$- изоморфизмы). □

Следствие. Конкретная естественная двойственность есть **строгая** сопряженность. □

Примеры конкретной двойственности

Двойственность обычно определяет рабочее пространство для разных алгебро-геометрических теорий. Существует много разных двойственностей, которые зачастую не выделяются явно. Классические двойсвенности обсуждаются, например, в работах [11, 12, 13, 14].

Хорошо известные двойственности

Все двойственности, приведенные далее, первого порядка, естественные [11] и получены путем ограничения подходящих двойственных сопряженностей.

- $\mathbf{Vec}_k$ двойственно сопряжена самой себе $\begin{tikzcd} \mathbf{Vec}_k^{op} \arrow[r, shift left, "\mathbf{Vec}_k(-{,}k)"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Vec}_k \arrow[l, shift left, "\mathbf{Vec}_k(-{,}k)"] \end{tikzcd}$, где $\mathbf{Vec}_k$ категория векторных пространств над полем k. Двойственность получается ограничением на конечномерные пространства.
- $\mathbf{Set}^{op} \sim$ **Complete Atomic Boolean Algebras** (категория множеств двойственно эквивалентна категории полных атомарных булевых алгебр).
- $\mathbf{Bool}^{op} \sim$**Boolean Spaces** (двойственность Стоуна), где $\mathbf{Bool}$ категория булевых колец (каждый элемент -- идемпотент). Она получается из двойственной сопряженно-

сти
$$\begin{tikzcd} \mathbf{CRing} \arrow[r, bend left, "\mathbf{CRing}(-{,}\mathbf{2})"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Top} \arrow[l, bend left, "\mathbf{Top}(-{,}\mathbf{2})"] \end{tikzcd}$$
, где $\mathbf{2}$-двухэлементное кольцо и дискретное топологическое пространство. $\mathbf{CRing}(A,\mathbf{2}) \hookrightarrow \mathbf{2}^A$ (подпространство в топологии Тихонова).

- $Hom(-,\mathbb{R}/\mathbb{Z}) : \mathbf{CompAb}^{op} \sim \mathbf{Ab}$ (двойственность Понтрягина), где $\mathbf{CompAb}$, $\mathbf{Ab}$ -- категории компактных абелевых групп и абелевых групп соответственно.
- $Hom(-,\mathbb{C})$:**C*Alg** $^{op} \sim \mathbf{CHTop}$ (двойственность Гельфанда-Наймарка), где **C*Alg**, $\mathbf{CHTop}$ категории коммутативных $\mathbb{C}^*$-алгебр и компактных хаусдорфовых пространств. $\mathbf{C^*Alg}(A,\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{C}^A$ (подпространство в топологии Тихонова).

Новые примеры

Как только механизм получения новых двойственностей известен, можно пытаться получить новые примеры. Однако, если часто двойственную сопряженность получить легко, то ассоциированная двойственность может оказаться пустой. В следующих примерах двойственность получена в результате разных процессов. Для двойственности Гельфанда-Наймарка это расширение на новое гомотопическое измерение, для двойственности Виноградова ограничение на подходящие подкатегории, для двойственности Понрягина-Лукаша, наоборот, расширение на большие одномерные категории, для дифференциальных уравнений это только двойственная сопряженность, требующая дополнительного исследования.

- (2-двойственность Гельфанда-Наймарка)

  Утверждение 3. *Существует 2-расширение двойственности Гельфанда-Наймарка с 2-клетками, гомотопическими классами гомотопий.*
- Эта двойственность конкретна с дуализирующим объектом $\mathbb{C}$ над $\mathbf{2\text{-}Cat}$ (2-категорией малых категорий, функторов и натуральных трансформаций), то есть существуют инъективные забывающие функторы $U : \mathbf{C^*Alg} \to \mathbf{2\text{-}Cat}$ и $V : \mathbf{CHTop} \to \mathbf{2\text{-}Cat}$ такие что
$$\begin{tikzcd} \mathbf{C^*Alg}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\mathbf{C^*Alg}(-{,}\mathbb{C})"'] & \mathbf{CHTop} \arrow[d, "V"] \\ & \mathbf{2\text{-}Cat} \end{tikzcd}$$
и
$$\begin{tikzcd} \mathbf{CHTop}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "G^{op}"] \arrow[dr, "\mathbf{CHTop}(-{,}\mathbb{C})"'] & \mathbf{C^*Alg} \arrow[d, "U"] \\ & \mathbf{2\text{-}Cat} \end{tikzcd}$$
где U и V -- композиции функторов включения и взятия фундаментального группоида ($U : \mathbf{C^*Alg} \hookrightarrow \mathbf{2\text{-}Top} \overset{\mathbf{2\text{-}Top}(1,-)}{\longrightarrow} \mathbf{2\text{-}Cat}$ и $V : \mathbf{CHTop} \hookrightarrow \mathbf{2\text{-}Top} \overset{\mathbf{2\text{-}Top}(1,-)}{\longrightarrow} \mathbf{2\text{-}Cat}$).
- Эта двойственность естественна, то есть поднятия Hom-функторов $\mathbf{C^*Alg}(-,\mathbb{C})$, $\mathbf{CHTop}(-,\mathbb{C})$ вдоль V и U являются начальными. □

  Доказательство может быть найдено в [9, 10].
- (двойственность Виноградова)

  Пусть K, A, $A\text{-}\mathbf{Mod} \hookrightarrow A\text{-}\mathbf{Diff} \hookrightarrow K\text{-}\mathbf{Mod}$ обозначают соответсвенно коммутативное кольцо, K-алгебру, и вложение категории A-модулей в категорию дифференциальных операторов и затем в категорию K-модулей (все вложения тождественны на объектах).

  $A\text{-}\mathbf{Diff}$ обогащается в тензорной категории $(K\text{-}\mathbf{Mod},\otimes_K)$, а также обогащается двумя различными способами в $(A\text{-}\mathbf{Mod},\otimes_K)$, за исключением того что композиция не является A-линейной. Модульное умножение для первого обогащения $A\text{-}\mathbf{Diff}$ в $(A\text{-}\mathbf{Mod},\otimes_K)$ задается $A \times A\text{-}\mathbf{Diff}(P,Q) \to A\text{-}$

$\mathbf{Diff}(P,Q):(a,\Delta)\mapsto l_a\circ\Delta$, для второго $A\times A\text{-}\mathbf{Diff}(P,Q)\to A\text{-}\mathbf{Diff}(P,Q):(a,\Delta)\mapsto\Delta\circ l_a$. Обозначим $A\text{-}\mathbf{Diff}$ с левым модульным умножением $l_a\circ -$ в Hom-множествах тем же именем $A\text{-}\mathbf{Diff}$, а с правым умножением $-\circ l_a$ 'с плюсом' $A\text{-}\mathbf{Diff}^+$.

Следующее предложение суммирует основные факты формальной теории линейных дифференциальных операторов А.М. Виноградова [15].

Утверждение 4

- Для всех $P,Q\in Ob(A\text{-}\mathbf{Mod})$ $A\text{-}\mathbf{Diff}(P,Q)=\bigcup_{s=0}^{\infty}\mathbf{Diff}_s(P,Q)$, $A\text{-}\mathbf{Diff}^+(P,Q)=\bigcup_{s=0}^{\infty}\mathbf{Diff}_s^+(P,Q)$ являются A-модулями, фильтрован-ными подмодулями дифференциальных операторов порядка $\leq s,\ s=0,1,\ldots$.
- Для любого $P\in Ob(A\text{-}\mathbf{Mod})$ $A\text{-}\mathbf{Diff}(P,P)$ является ассоциатив-ной K-алгеброй.
- $\mathbf{Diff}_s(P,-),\ \mathbf{Diff}_s^+(-,P):A\text{-}\mathbf{Mod}\to A\text{-}\mathbf{Mod}$ являются A-линейными функторами.
- Для каждого $P\in Ob(A\text{-}\mathbf{Mod})$ функтор $\mathbf{Diff}_s^+(-,P)$ представим объектом $\mathbf{Diff}_s^+(P):=\mathbf{Diff}_s^+(A,P)$, т.е. $\forall Q\in Ob(A\text{-}\mathbf{Mod})$ $A\text{-}\mathbf{Mod}(Q,\mathbf{Diff}_s^+(P))\xrightarrow{\sim}\mathbf{Diff}_s^+(Q,P)$.
- Для каждого $P\in Ob(A\text{-}\mathbf{Mod})$ функтор $\mathbf{Diff}_s(P,-)$ представим объектом $\mathbf{Jet}^s(P):=A\otimes_K P$ mod μ^{s+1}, где μ^{s+1} есть подмодуль $A\otimes_K P$, порожденный элементами $\delta^{a_0}\circ\cdots\circ\delta^{a_{s+1}}(a\otimes p)$ [$\delta^b(a\otimes p):=ab\otimes p-a\otimes bp$], т.е. $A\text{-}\mathbf{Mod}(\mathbf{Jet}^s(P),Q)\xrightarrow{\sim}\mathbf{Diff}_s(P,Q)$ для $Q\in Ob(A\text{-}\mathbf{Mod})$.
- Включение $A\text{-}\mathbf{Mod}\hookrightarrow A\text{-}\mathbf{Diff}^+$ есть (обогащенный) левый сопряженный с коединицей $ev:\mathbf{Diff}^+(P)\to P:\Delta\mapsto\Delta(1)$, т.е. $\forall\Delta\in\mathbf{Diff}^+(Q,P)\ \exists! f_\Delta\in A\text{-}\mathbf{Mod}(Q,\mathbf{Diff}^+(P))$ такой что

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Diff}^+(P) \arrow[r, "ev"] & P \\
Q \arrow[u, dashed, "f_\Delta"] \arrow[ur, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}$$

  и это соответствие A-линейно, $f_\Delta:q\mapsto(a\mapsto\Delta(aq))$.
- Включение $A\text{-}\mathbf{Mod}\hookrightarrow A\text{-}\mathbf{Diff}$ есть (обогащенный) правый сопряженный с единицей $j^\infty:P\to\mathbf{Jet}^\infty(P):p\mapsto 1\otimes p$ mod μ^∞ [$\mu^\infty:=\bigcap_{s=0}^{\infty}\mu^s$], т.е. $\forall\Delta\in\mathbf{Diff}(P,Q)\ \exists! f^\Delta\in A\text{-}\mathbf{Mod}(\mathbf{Jet}^\infty(P),Q)$ такой что

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "j^\infty"] \arrow[dr, "\Delta"'] & \mathbf{Jet}^\infty(P) \arrow[d, dashed, "f^\Delta"] \\
& Q
\end{tikzcd}$$

и это соответствие A-линейно, $f^{\Delta} : (a \otimes p) \bmod \mu^{\infty} \mapsto a\Delta(p)$.

- Подкатегория $A\text{-}\mathbf{Mod}$ рефлективна и корефлективна в $A\text{-}\mathbf{Diff}$ (обогащенной в $K\text{-}\mathbf{Mod}$). □

Для $s \in \mathbb{N}$ введем две полные подкатегории категории $A\text{-}\mathbf{Mod}$: $A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}\mathbf{Diff}_s$, состоящую из всех A-модулей вида $\mathbf{Diff}_s(P, A),\ P \in Ob(A\text{-}\mathbf{Mod})$, и $A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}\mathbf{Jet}^s$, состоящую из всех A-модулей вида $\mathbf{Jet}^s(P),\ P \in Ob(A\text{-}\mathbf{Mod})$.

Утверждение 5 (двойственность Виноградова) *Для коммутативной алгебры A существует конкретная естественная двойственная сопряженность* $A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}\mathbf{Diff}_s^{op} \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} A\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}\mathbf{Jet}^s$, *полученная пу-тем ограничения из*

$$\begin{tikzcd} A\text{-}\mathbf{Mod}^{op} \arrow[r, bend left, "A\text{-}\mathbf{Mod}(-{,}A)"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & A\text{-}\mathbf{Mod} \arrow[l, bend left, "A\text{-}\mathbf{Mod}(-{,}A)"] \end{tikzcd}.$$

A является ее дуализирующим объектом. □

Замечания

- Утверждение 5 устанавливает формальный аналог известной *двойственности* между дифференциальными операторами и струями на некотором фиксированном многообразии X. Геометрические модули сечений векторных расслоений над X соответсвуют модулям P над $C^{\infty}(X)$ со свойством $\bigcap_{x \in X} \mu_x P = 0$, где μ_x -- максимальный идеал в точке $x \in X$. Функторы $\mathbf{Jet}^s(-)$ и $\mathbf{Diff}_s(-, A)$ сохраняют свойство модуля быть геометрическим [15].
- Эта двойственность является альтернативным алгебраическим способом введения расслоения струй в геометрии (вместо классического способа Гротендика и Эресмана как классов эквивалентности отображений, касающихся порядка s в точке). Когда $A = C^{\infty}(X)$ и P геометрический модуль, реализуемый как векторное расслоение $V(P)$ над X, тогда $\mathbf{Jet}^s(P)$ реализуется как $\mathbf{Jet}^s(V(P))$ над X в классическом смысле [15].
- (двойственность Понтрягина-Лукаша)

Следующая теорема устанавливает расширение двойственности Понрягина на абелевы *локально прекомпактные* группы, что было доказано Г. Лукашем [16]. Расширение

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \arrow[d, "id"] \\ {} \end{tikzcd}$$

естественное с тем же самым дуализирующим объектом $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, точнее, с $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Напомним, что топологическая группа *прекомпактна*, если для всякой окрестности единицы существует *конечное* множество элементов, такое что вся группа содержится в произведении этих множеств. И группа *локально прекомпактна*, если указанное свойство выполняется только в некоторой окрестности единицы.

Утверждение 6 (Понтрягин-Лукаш). *Имеются следующие естественные двойственности*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Ab}^{op} \arrow[r, bend left, "\sim"] \arrow[d, hook] & \mathbf{CompAb} \arrow[l, bend left, "\sim"] \arrow[d, hook] \\
\mathbf{locCompAb}^{op} \arrow[r, bend left, "\sim"] \arrow[d, hook] & \mathbf{locCompAb} \arrow[l, bend left, "\sim"] \arrow[d, hook] \\
\mathbf{locPreCompAb}^{op} \arrow[r, bend left, "\sim"] & \mathbf{locCompAb}^{\Rightarrow} \arrow[l, bend left, "\sim"]
\end{tikzcd}$$

где $\mathbf{locCompAb}^{\Rightarrow}$ *есть категория плотных вложений локально компактных абелевых групп в компактные абелевы группы (с коммутативными квадратами в* $\mathbf{locCompAb}$ *как стрелками).* □

Замечание. Главная идея этого расширения в том, что каждая локально прекомпактная группа G может быть представлена как плотный инъективный $\mathbf{locCompAb}$-морфизм $G_d \to compl(G)$, где G_d есть та же самая группа с дискретной топологией, а $compl(G)$ -- ее пополнение по отношению к двусторонней равномерной структуре на G. После этого обычная двойственность Понтрягина используется [16].

- (двойственность для дифференциальных уравнений)

Утверждение 7. *Пусть **UAlg** обозначает категорию универсальных алгебр с представимым забывающим функтором. Тогда каждая топологическая алгебра* $\mathcal{A}$ *является дуализирующим объектом и определяет некоторую естественную двойственную сопряженность между **UAlg** и **Top**.* □

Доказательство см. в [9, 10].

Следствие. Возьмем **UAlg** $= k$- Λ - $\mathbf{Alg}$, категорию внешних дифференциальных алгебр над полем k ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), объекты которой, подразумевается, представляют обобщенные дифференциальные уравнения. Возьмем $\mathcal{A} = \Lambda(C^{\infty}(\mathbb{R}^n))$ или $\Lambda(C^{\omega}(\mathbb{C}^n))$ (которые играют роль пространства параметров) с jet^{∞}-топологией (или более сильной, согласованной с операциями). Тогда существует естественная двойственная сопряженность $k\text{-}\Lambda\text{-}\mathbf{Alg}^{op} \underset{\perp}{\rightleftarrows} \mathbf{Top}$ (между дифференциальными уравнениями и их пространствами решений). □

Замечания

- В качестве категории, представляющей гладкие дифференциальные уравнения, можно брать сразу полную рефлективную подкатегорию гладко-полных внешних дифференциальных алгебр (у которых коэффициенты замкнуты относительно гладких операций).
- Если рассматривать категорию k- Λ - $\mathbf{Alg}$, у которой забывающий функтор представим, то будем иметь много лишних точек, не имеющих геометрического смысла (только однородные градуированные отображения степени 0 в $\mathcal{A}$ имеют смысл, представляя интегральные многообразия размерности не больше n). В этом случае представление внешней дифференциальной алгебры будет через пространство большее, чем пространство решений. Если оставить в k- Λ - $\mathbf{Alg}$ только градуированные морфизмы степени 0, тогда забывающий функтор не представим, но дуализирующий объект $\mathcal{A}$ и сопряженность, определенная им, все еще имеют смысл.

Обозначим конкретные подкатегории $\mathbf{Top}$, двойственные категориям k-$\mathbf{Alg}$ (коммутативные алгебры над k) и k- Λ - $\mathbf{Alg}$ (внешние дифференциальные алгебры над k с градуированными степени 0 морфизмами), через $\mathtt{alg\text{-}Sol}$ и $\mathtt{diff\text{-}Sol}$ соответственно, т.е. $k\text{-}\mathbf{Alg}^{op} \sim \mathtt{alg\text{-}Sol}$,

$k\text{-}\Lambda\text{-}\mathbf{Alg}^{op} \sim \mathtt{diff\text{-}Sol}$. В частности, $\mathtt{alg\text{-}Sol}$ содержит все алгебраи-ческие и гладкие k-многообразия ($k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), $\mathtt{diff\text{-}Sol}$ содержит все пространства вида $\mathtt{alg\text{-}Sol}(k^n, X)$ (с представляющим объектом $\mathcal{A} = \Lambda(C^\infty(k^n))$).

Приблизительная структура diff- $\mathbf{Sol}$:

- Ob (**diff-** $\mathbf{Sol}$) это пары $(X, \coprod_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i)$, где $X := k\text{-}\Lambda\text{-}\mathbf{Alg}(D, k) = k\text{-}\mathbf{Alg}(D, k) \in Ob$ (**alg-** $\mathbf{Sol}$), $\mathcal{F}_i \subset$ **alg-** $\mathbf{Sol}(k^i, X)$, $1 < i < n$ [$\mathcal{F}_i$ не являются произвольными подпространствами **alg-** $\mathbf{Sol}(k^i, X)$].
- Ar (**diff-** $\mathbf{Sol}$) это пары $(f, \coprod_{i=1}^{n} \textbf{alg-}\mathbf{Sol}(k^i, f)) : (X, \coprod_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i) \to (X', \coprod_{i=1}^{n} \mathcal{F}'_i)$, где $f : X \to X' \in Ar$ (**alg-** $\mathbf{Sol}$), **alg-** $\mathbf{Sol}(k^i, f) : \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}'_i$, $1 \le i \le n$.

Утверждение 8. *Имеются следующие сопряженности*

- $k\text{-}\mathbf{Alg} \underset{p_0}{\overset{\Lambda_k}{\rightleftarrows}} k\text{-}\Lambda\text{-}\mathbf{Alg}$ ($\perp$), где Λ_k есть функтор взятия свободной внешней дифференциальной алгебры, p_0 проекция на подалгебру элементов степени 0,
- $\mathtt{alg\text{-}Sol} \underset{b}{\overset{\hom(k^n,-)}{\rightleftarrows}} \mathtt{diff\text{-}Sol}$ ($\top$), где b есть функтор взятия базового пространства, такие что

$$\begin{tikzcd}
k\text{-}\Lambda\text{-}\mathbf{Alg}^{op} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\sim"] \arrow[d, bend right, "p_0^{op}"'] \arrow[d, phantom, "\vdash"] & \mathtt{diff\text{-}Sol} \arrow[l, bend left, "F'"] \arrow[d, bend left, "b"] \arrow[d, phantom, "\vdash"] \\
k\text{-}\mathbf{Alg}^{op} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, phantom, "\sim"] \arrow[u, bend right, "\Lambda_k^{op}"'] & \mathtt{alg\text{-}Sol} \arrow[l, bend left] \arrow[u, bend right, "\hom(k^n,-)"']
\end{tikzcd} \qquad \square$$

Доказательство и дополнительные детали содержатся в [9, 10].

Существует больше заслуживающих внимания двойственностей, например, между группами преобразований и коммутативными алгебрами, или группами Ли-пребразований и дифференциально-алгебраическими тройками в духе А.М. Васильева [17]. Эти примеры могут быть найдены в [9, 10].

Библиографический список

1. **Leinster, T.** Higher operads, higher categories, Cambridge University Press, 2003.
2. **Baez and J. Dolan, J.** Higher-dimensional algebra and topological quantum field theory, Jour. Math. Phys. 36, 6073-6105, 1995.
3. **Baez, J.** An introduction to n-categories, 7th Conference on Category Theory and Computer Science, eds. E. Moggi and G. Rosolini, Springer Lecture Notes in Computer Science vol. 1290, Springer, Berlin, 1997.
4. **Lurie, J.** Higher topos theory, arXiv:math.CT/0608040, 2006.

5. **Makkai, M.** The multitopic ω-category of all multitopic ω-categories, McGill U, 1999.
6. **Joyal, A.** The theory of quasi-categories, I, II, UQAM, 2007.
7. **Cheng, E., Lauda, A.** Higher-dimensional categories: an illustrated guide book, U of Cambridge, 2004.
8. **Simpson, C.T.** Homotopy Theory of Higher Categories, Cambridge University Press, 2010.
9. **Kondratiev, G.V.** Strict infinity categories. Concrete duality, arXiv:math.CT/0608436, 2006.
10. **Kondratiev, G.V.** Concrete duality for strict infinity categories, arXiv:0807.4256v1 [math.CT], 2008 (a revised paper).
11. **Porst, H.-E., Tholen, W.** Concrete dualities, в книге Category Theory at Work (eds. H. Herrlich. H.-E. Porst), Heldermann Verlag, Berlin, 1991, pp. 111-136.
12. **Adamek, J., Herrlich, H.G., Strecker, E.** Abstract and concrete categories. The joy of cats, John Wiley, 1990.
13. **Bell, J.L.** Toposes and Local Set Theories: An Introduction, Clarendon Press, Oxford, 1988.
14. **Johnstone, P.T.** Stone spaces, Cambridge University Press, 1982.
15. **Виноградов, А.М.** Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений / А.М. Виноградов, И.С. Красильщик, В.В. Лычагин. – М., 1986.
16. **Lukacs, G.** Duality theory of locally precompact groups, Category Theory Octoberfest, Ottawa University, 2006.
17. **Васильев, А.М.** Теория дифференциально-геометрических структур / А.М. Васильев. – М.: МГУ, 1987.

Дата поступления
в редакцию 03.05.2011

G.V. Kondratiev

CONCRETE DUALITY OF HIGHER ORDER

All the known specific duality (Pontryagin, Stone, Gelfand-Naimark and others) are called natural duality-mi first order. In this article we study the structure of a specific duality, give a criterion of its existence for strict dimensional categories and new examples.

Key words: specific duality, infinite-dimensional category.