

УДК 621.3.013.62

С.С. Зельманов

ОБОБЩЕННЫЙ РЕЗОНАНС В ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Волго-Вятский филиал МТУСИ

Приводится оценка ограниченности классической теории резонанса в линейных стационарных динамических системах. Показана невозможность использования традиционного подхода к системам с произвольным числом степеней свободы и конструктивными потерями. Предлагается более широкий спектральный критерий частотного резонанса. Вводится понятие и определение резонанса формы сигнала как обобщенного определения резонанса для класса линейных стационарных динамических систем.

Ключевые слова: резонанс, спектральный критерий, экстремум огибающей, модуль спектра, резонанс формы.

Понятие резонанса в физике и радиотехнике является одним из фундаментальных понятий теории колебаний. Однако рассматриваемое в теории колебаний понятие резонанса применительно к линейным стационарным системам относится только к одиночному резонатору с пренебрежимо малыми потерями энергии. И, конечно же, считалось, что возникновение колебаний и резонансных явлений в системе может быть связано только с ее реактивными параметрами, но не с потерями в ней. Это обстоятельство в определенной степени повлияло на формирование определения резонанса, предложенного академиками Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси [1], [2]:

"Резонанс – резкое возрастание амплитуд установившихся вынужденных колебаний, наступающее при приближении частоты p гармоничного внешнего воздействия к частоте ω одного из нормальных колебаний, свойственных данной колебательной системе".

"Нормальные колебания – гармонические собственные колебания, которые могли бы существовать в линейных колебательных системах, если бы в них не происходило рассеяние энергии".

Это определение исчерпывающе объясняло условие резонанса в одиночном резонаторе, но не распространялось на системы с произвольным числом степеней свободы и потерями, пренебречь которыми не представляется возможным.

При таком подходе в теории резонанса образовался некоторый пробел. Этот пробел означает отсутствие теории резонанса в динамических линейных стационарных системах с входом, обладающих существенными потерями и произвольным числом степеней свободы. К таким системам классическая теория резонанса принципиально неприменима.

В теоретической радиотехнике по прошествии нескольких десятилетий XX века и в XXI веке теория резонанса, объединяющая существующие линейные динамические стационарные системы с произвольным числом степеней свободы, так и не появилась. При этом RC-системы, связанные LCR системы различного вида, гребенчатые фильтры, различные виды систем с распределенными параметрами и другие резонансные системы широко использовались и продолжают использоваться в радиотехнической практике. Необходимость в общей теории резонанса была и подтверждалась известными учеными, например такими, как академик А.А.Харкевич, который в работе [3] утверждал, что **«ощущается потребность в таком развитии теории, которая позволила бы в общем виде рассматривать системы со многим степенями свободы. Именно каждой степени свободы может соответствовать один резонанс (на частоте, в общем случае не совпадающей с резонансной частотой данного контура, взятого отдельно)»**.

Предпринятая попытка расширения классической теории резонанса применительно к линейным стационарным системам с существенными потерями и произвольным числом степеней свободы позволила установить следующее [4]:

1. Одиночный резонатор, на базе которого была построена классическая теория резонанса в линейных стационарных системах, не только не является типичным представителем этого класса систем, но, скорее, является исключением из этого класса. Это следует из того факта, что свободный процесс в нем совпадает с собственным процессом, а резонансная частота тока в нем $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ от величины потерь не зависит, что типичным не является. В

общем случае для линейных стационарных систем, в которых на величину потерь энергии не накладывается каких-либо ограничений, справедливо однородное уравнение вида

$$\frac{d^n i_{\text{св}}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} i_{\text{св}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{di_{\text{св}}}{dt} + a_n i_{\text{св}} = 0, \quad (1)$$

где $i_{\text{св}}$ – свободный процесс тока в системе, как реакция системы на входной δ – импульс.

В зависимости от вида корней характеристического уравнения существуют различные решения этого уравнения и соответствующие им виды свободных процессов. Этим свободным процессам будут соответствовать различные виды линейных стационарных систем. Остановимся на некоторых линейных системах, которым соответствуют свободные процессы, представляющие сумму собственных процессов

$$i_{\text{св}}(t) = \sum_{k=1}^m (C'_k \sin \omega_k t + C''_k \cos \omega_k t); \quad (2)$$

$$i_{\text{св}}(t) = \sum_{k=1}^m (C'_k e^{-\alpha_k t} \sin \omega_k t + C''_k e^{-\alpha_k t} \cos \omega_k t); \quad (3)$$

$$i_{\text{св}}(t) = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t} + \dots + C_n e^{-\alpha_n t}. \quad (4)$$

Классическая теория резонанса адресована к виду систем (2), так как она предполагает наличие резонанса на частотах нормальных колебаний, т.е. при отсутствии потерь в системе. Что касается приведенных свободных процессов вида (3) и (4), то совершенно очевидно, что они относятся к системам с потерями, пренебречь которыми не представляется возможным. К системам (4) классическая теория резонанса абсолютно неприменима так как в случае пренебрежения потерями они перестают существовать.

Итак, свободный процесс в любой линейной стационарной системе является суммой n собственных процессов. Для подавляющего большинства систем этого класса $n > 1$. Эта особенность не учтена в классическом определении резонанса.

2. Учет наличия нескольких собственных процессов в свободном процессе резонансной системы при наличии потерь приводит к рассмотрению результатов их взаимодействия в системе при резонансе. Ведь в системах с потерями спектры собственных процессов перекрываются, что совершенно несвойственно спектрам нормальных колебаний. Результатом суперпозиционного взаимодействия собственных процессов является свободное колебание, экстремум огибающей модуля спектра которого соответствует резонансной частоте системы. Однако ни о каком совпадении этой резонансной частоты с частотой нормальных колебаний системы речь идти не может. Это различные частоты.

При действии на входе системы гармонического колебания выходное колебание зависит от входного колебания и свободного колебания особым образом. Это напряжение можно определить с помощью интеграла Дюамеля:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{t_0}^t u_{\text{ВХ}}(\xi) h(t - \xi) d\xi, \quad (5)$$

где $h(t - \xi)$ – реакция системы на δ -импульс, представляющая собой свободное колебание, то есть сумму затухающих апериодических и колебательных собственных процессов. При $t \geq \xi$ эта реакция имеет вид

$$h(t - \xi) = \sum_{k=1}^n \left\{ a_k e^{-\alpha_k(t-\xi)} + b_k e^{-\beta_k(t-\xi)} \cos[\omega_k(t - \xi) + \varphi_k] \right\}, \quad (6)$$

а при $t < \xi$ $h(t - \xi) = 0$. В этом выражении α_k , β_k и ω_k – положительные величины, а a_k , b_k и φ_k – вещественные постоянные числа. Иначе говоря, функция (6) изображает свободное колебание, возникающее на выходе системы в результате подачи на ее вход δ -импульса в момент ξ .

Из выражения (5) следует, что выходное колебание представляет собой результат взаимодействия входного гармонического напряжения и свободного колебания системы.

Выходное колебание появляется только в том случае, когда существуют одновременно входное и свободное колебания. Амплитуда выходного колебания имеет тем большую величину, чем меньше свободное колебание отличается от входного по форме.

Точнее говоря, чем больше величина спектральной плотности свободного колебания на частоте входного колебания, тем больше амплитуда установившегося выходного колебания. Поэтому, если на частоте входного гармонического напряжения спектральная плотность свободного колебания имеет максимум, то на этой же частоте имеет максимум и амплитуда выходного гармонического напряжения. Поэтому имеется полное основание считать, что выходное колебание появляется в результате взаимодействия входного и свободного колебаний.

Таким образом, можно заключить, что каждый из резонансов в системе возникает в результате взаимодействия вынуждающей силы с суммой всех собственных процессов системы, а не в результате взаимодействия только с отдельными собственными процессами, как это следует из традиционного подхода. Это связано с тем, что спектр «нормального» колебания не может перекрываться со спектрами других «нормальных» колебаний.

В системе связанных контуров выражение свободного процесса имеет вид

$$i_{св}(t) = -\frac{1}{L} e^{-\alpha t} \sin \Omega t \sin \omega_{св} t = \frac{1}{L} e^{-\alpha t} \left[\cos(\omega_{св} + \Omega)t - \cos(\omega_{св} - \Omega)t \right], \quad (7)$$

где $\Omega = k\omega_{св}/2$; k – коэффициент связи; $\omega_{св} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$.

Из выражения (1.50) следует:

а) свободный процесс с частотой $\omega_{св}$ в системе равен сумме собственных процессов с частотами $\omega_{св1} = (\omega_{св} + \Omega)$ и $\omega_{св2} = (\omega_{св} - \Omega)$;

б) резонансные частоты связи не равны резонансным частотам $\omega_p = \omega_0$ каждого из контуров, т. е. частотам их нормальных колебаний.

Так мы приходим к спектральной теории резонанса, с позиций которой легко объяснить условие резонанса в любой линейной стационарной системе с потерями и произвольным числом степеней свободы. Спектральная теория резонанса опирается на спектральный критерий резонанса, который утверждает, **что наличие экстремумов огибающей модуля спектра свободного процесса системы означает возможность существования в ней резонансов на частотах, соответствующих этим экстремумам** [4].

С этих позиций уже представляется возможным теоретически объяснить явление резонанса в системах с экспоненциальными собственными процессами, сумма которых, т.е. свободный процесс представляет собой затухающее гармоническое колебание. Для этого необходимо показать, что в линейной стационарной системе, свободный процесс которой есть сумма произвольного числа собственных экспоненциальных процессов, возможен

резонанс на частотах, соответствующих экстремумам огибающей модуля спектра свободного процесса.

Рассмотрим общий случай, когда свободный процесс есть сумма произвольного числа собственных экспоненциальных процессов вида

$$u_{св} = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t} + \dots + C_n e^{-\alpha_n t}. \quad (8)$$

Тогда частотный спектр свободного колебания (8) системы может быть определен как сумма спектров вида

$$S(j\omega) = \sum_{k=1}^n S_k(j\omega) = \sum_{k=1}^n C_k \frac{1}{\alpha_k + j\omega}. \quad (9)$$

Поскольку выражение (9) является спектром свободного колебания (8), представляющего собой сумму экспонент, то необходимо сформулировать условия, при которых в данной системе возможен резонанс. Эта задача сводится к доказательству возможности существования величин α_k и C_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$), при которых решение (8) будет с заданной степенью точности представлять собой заранее заданную непрерывную функцию $u_{св}(t)$ с максимумом частотного спектра на заданной частоте ω_p . Покажем вначале, что решение поставленной задачи возможно для случая $\alpha_k = k\alpha$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$). Это допущение является приемлемым, так как α_k – это корни характеристического уравнения, которое соответствует уравнению системы (1). Эти корни связаны с коэффициентами уравнения a_1, a_2, \dots, a_n формулой Виета, в соответствии с которой для класса систем с кратными корнями характеристического уравнения справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} a_1 &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = -\alpha(1 + 2 + \dots + n); \quad \alpha = -\frac{a_1}{1 + 2 + \dots + n}; \\ a_2 &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n; \\ a_3 &= -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n; \\ a_{n-1} &= (-1)^{n-1}[(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}) + (\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-2}\alpha_n) + \dots + \alpha_2\alpha_3\alpha_n]; \\ a_n &= (-1)^n(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n) = (-1)^n \alpha^n n!; \\ \frac{a_n}{a_1} &= \frac{(-1)^n \alpha^n n!}{(-1)\alpha 0,5n(n+1)} = \frac{(-1)^{n-1} \alpha^{n-1} n!}{0,5n(n+1)}; \\ \alpha^{n-1} &= \frac{a_n}{a_1} \frac{0,5n(n+1)}{(-1)^{n-1} n!} = \frac{a_n}{a_1} \frac{(n+1)}{2(n-1)!(-1)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Из формулы Виета вытекает конструктивный ответ на вопрос о принадлежности любого полинома степени n к рассматриваемому классу полиномов, у которых $\alpha_k = k\alpha$. Действительно, чтобы произвести полином, принадлежащий к рассматриваемому классу, в соответствии с формулой Виета необходимо, чтобы отношение a_n/a_1 имело вид:

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{\alpha^n}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} = A \alpha^{n-1} (-1)^{n-1},$$

где $A = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = \frac{n!}{0,5n(1+n)} = \frac{2(n-1)!}{n+1}$

Тогда для величины α получим

$$\alpha = -\left(n\sqrt[n]{a_n/a_1 A}\right). \quad (10)$$

Это означает, что представление решения (8) в виде суммы экспонент с кратными показателями возможно лишь при величине α , зависящей от коэффициентов уравнения (1). Тогда свободное колебание системы может быть представлено в виде:

$$u_{\text{св}}(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{-\alpha_k t} = \sum_{k=1}^n C_k (e^{-\alpha t})^k. \quad (11)$$

Введем обозначение $e^{-\alpha t} = x$, откуда $t = -\frac{1}{\alpha} \ln x$. Очевидно, что если $0 \leq t < \infty$, то

$1 \geq x > 0$. С учетом этого выражение (11) примет вид

$$u_{\text{св}}\left(-\frac{1}{\alpha} \ln x\right) = \sum_{k=1}^n C_k x^k. \quad (12)$$

Обозначим $u_{\text{св}}\left(-\frac{1}{\alpha} \ln x\right) = f(x)$. Тогда поставленная задача может быть сформулирована так: существуют ли величины $C_k (k = 1, 2, 3, \dots, n)$, при которых степенной полином с заданной степенью точности аппроксимирует заданную непрерывную функцию $f(x)$ в интервале $1 \geq x > 0$?

В соответствии с теоремой Вейерштрасса при достаточно большом n существуют такие коэффициенты C_k , при которых выполняется неравенство $\left|f(x) - \sum_{k=1}^n C_k x^k\right| \leq \varepsilon$, $0 < x \leq 1$, где ε – сколь угодно малая положительная величина.

Теорема верна для любой непрерывной функции $f(x)$, а значит, и для свободного колебания $u_{\text{св}}(t)$, которое может иметь частотный спектр с экстремумом типа "максимум" на частоте ω_p , причем количество таких частот может быть произвольным.

Отсюда следует, что в линейной системе, в которой все собственные процессы – аperiodические (экспоненциальные), возможен сколь угодно резко выраженный резонанс на заранее заданной частоте. С учетом спектрального критерия можно сформулировать более общее определение резонанса для линейных стационарных динамических систем, на величину потерь в которых и количество степеней свободы не накладывается никаких ограничений:

Резонанс – это явление возрастания амплитуды установившихся вынужденных колебаний в линейной стационарной системе до величины относительного максимума при приближении частоты гармонического внешнего воздействия к значению, соответствующему любому экстремуму огибающей модуля спектра свободного колебания этой системы.

3. Для частотного резонанса характерна особенность экстремального реагирования системы на внешнее воздействие и способность выделения резонирующего сигнала из совокупности других, не обладающих этим свойством.

Однако существуют сигналы, более сложные, нежели гармонический сигнал, и системы, которые экстремально на них реагируют. Система связанных колебательных контуров экстремально реагирует на АМ-сигнал, т.е. на колебание со сложным спектром. Экстремальное реагирование системы на сложный сигнал может носить различный характер, не обязательно связанный с появлением данного сигнала на выходе системы. Система, реагируя на сигнал, на который она «настроена», может иным способом информировать получателя о том, что на ее входе находится именно этот сигнал, тем самым «выделяя» его из совокупности других сигналов.

В этом случае частота не будет варибельным параметром резонанса; им может быть амплитуда, фаза или какой-нибудь другой параметр. Такой подход свидетельствует о том, что возможно дальнейшее обобщение понятия резонанса в линейных стационарных динамических системах.

Напряжение на выходе линейной системы возникает в результате взаимодействия вынуждающей силы (входного сигнала) со свободным процессом системы, т.е. с ее импульсной характеристикой, и может быть представлено интегралом Дюамеля (5).

Известно также, что свойством экстремального реагирования на входной сигнал обладает такая линейная система как согласованный фильтр, выражение импульсной характеристики которого имеет вид

$$h_{\delta}(t) = a_1 u_1 [T_0 - (t - \xi)] = a_1 u_1 [\xi - (t - T_0)]. \quad (13)$$

Это означает, что импульсная характеристика согласованного фильтра имеет вид согласованного с ней сигнала, представленного в зеркальном отображении.

Импульсная характеристика фильтра воспроизводит значения входного сигнала $u_1(t)$ в обратной последовательности, начиная с момента $t = T_0$ и заканчивая моментом $t = 0$. Поэтому в интервале времени $0 \leq t \leq T_0$ на выходе системы будет иметь место переходный режим. Этот режим характеризуется возрастанием выходного напряжения до максимальной величины к моменту времени $t = T_0$. Так формируется максимальный отклик на «свой» входной сигнал. Это означает, что согласованный фильтр, **максимально, т.е. резонансно реагирует** только на определенный сигнал, с которым этот фильтр согласован. В этом смысле согласованный **фильтр можно считать резонансной системой**. Рассмотрение этой особенности согласованного фильтра приводит к следующим вопросам:

1. С каким видом экстремального реагирования мы имеем дело в данном случае?
2. Каков параметр настройки согласованного фильтра, связанный с эффектом его экстремального реагирования?

При гармоническом частотном резонансе таким параметром служит частота гармонического воздействия, на которую настраивается резонансная система путем изменения её параметров.

Аналогично в случае согласованного фильтра условие резонанса выполняется для того сигнала, на который «настроен» или с которым согласован фильтр.

Очевидно, что в случае согласованного фильтра **параметром настройки будет являться форма сигнала**, с которым согласован фильтр. **Объектом настройки** в фильтре является **форма его импульсной характеристики**, на которую «настраивается в резонанс» согласованный фильтр в соответствии с условием (13).

В случае вариации формы входного сигнала относительно формы импульсной характеристики или формы импульсной характеристики относительно зеркального отображения формы входного сигнала будет иметь место режим расстройки по форме, приводящий к уменьшению пикового значения выходного сигнала по отношению к его экстремальному значению.

Следовательно, характеристика экстремальности согласованного фильтра должна иметь вид функционала $F[h_{\delta}(t), u_1(t, k)]$, зависящего от импульсной характеристики фильтра, т.е. от его свободного процесса, и формы входного сигнала, обладающего некоторым параметром формы k .

Зависимость степени реагирования фильтра от формы входного сигнала может быть определена как избирательность согласованного фильтра по форме сигнала.

В частности, для гармонического воздействия параметр формы k является частотой и определяется номером k гармоники $\sin k\omega t$. **Гармоники с разными номерами отличаются по частоте и соответственно по форме**. Изменение формы гармонического сигнала происходит за счет изменения его частоты.

Каков же должен быть критерий экстремальности согласованного фильтра или критерий резонанса в нем?

Какой вид должна иметь математическая операция, позволяющая оценить степень отличия формы входного сигнала от формы свободного процесса или импульсной характеристики фильтра и обеспечить максимальное значение выходного сигнала при их соответствии друг другу?

В качестве такого критерия может быть использовано максимальное значение функционала F , при резонансном значении вариационного параметра k_p [14]:

$$F_{\max}[h_{\delta}(t), u_1(t, k_p)] = \max_0^{T_0} \int_0^{T_0} u_1(t, k_p) h_{\delta}(T_0 - t) dt \quad (14)$$

где T_0 – длительность входного сигнала $u_1(t, k_p)$; k_p – резонансный вариационный параметр формы сигнала.

Критерием экстремальности (резонанса формы) в согласованном фильтре является относительный максимум (экстремум) максимальной величины свертки входного сигнала и его зеркального отображения, т.е. свободного процесса фильтра. Термин «резонанс» традиционно имеет отношение к частоте, как параметру настройки. Поскольку в нашем случае в этой роли выступает форма сигнала, то это, возможно, дает нам право определить явление экстремальности в согласованном фильтре как **резонанс формы сигнала**.

Явление, при котором наблюдается этот относительный максимум (экстремум) величины свертки, мы можем определить как резонанс формы входного сигнала.

Резонансная характеристика по варьируемому параметру формы может быть представлена функционалом (15).

$$F_1[h_{\delta}(t), u_1(t, k)] = \max_0^{2T_0} \int_0^{2T_0} u_1(t, k) h_{\delta}(T_0 - t) dt \quad (15)$$

Каждый отсчет функционала (15) представляет собой пиковое значение взаимнокорреляционной функции входного сигнала $u_1(t, k)$ длительностью T_0 и импульсной характеристики (свободного процесса) согласованного фильтра $h_{\delta}(t)$. При заданной форме импульсной характеристики согласованного фильтра $h_{\delta}(t)$ каждому значению функционала (15) соответствует своя реализация входного сигнала $u_1(t, k)$ определенной формы при данном значении параметра формы k .

Резонансное значение вариационного параметра k_p определяется из условия

$$F_{\max}[h_{\delta}(t), u_1(t, k_p)] = \max \left[\max_0^{T_0} \int_0^{T_0} u_1(t, k_p) h_{\delta}(T_0 - t) dt \right]. \quad (16)$$

Таким образом, мы приходим к обобщению понятия резонанса в виде резонанса формы сигнала в линейной стационарной динамической системе:

Резонанс формы сигнала в линейной динамической системе – это явление возрастания до экстремального значения максимальной величины свертки входного сигнала с импульсной характеристикой системы при приближении формы входного сигнала в процессе вариации этой формы к виду, соответствующему форме импульсной характеристики системы, являющейся зеркальным отображением формы входного сигнала.

Понятие резонанса формы, вероятно, может быть использовано при теоретических обобщениях, касающихся формирования информационных сигналов в системах связи. При этом не исключается, что модуляцию, манипуляцию и кодирование сигналов можно рассматривать как разнообразное по характеру, целенаправленное изменение формы сигнала.

Библиографический список

1. **Мандельштам, Л.И.** Лекции по теории колебаний / Л.И. Мандельштам. – М.: 1972.
2. **Папалекси, Н.Д.** Эволюция понятия резонанса / Н.Д. Папалекси // Успехи физических наук. 1947. Т. 31. Вып. 4.
3. **Харкевич, А.А.** Основы радиотехники. – М.: ГИЛ по вопросам связи и радио, 1963. – 559 с.
4. **Зельманов, С.С.** Развитие теории резонанса в линейных стационарных и управляемых системах. Детектирование обобщенных АМ и ЧМ-колебаний / С.С. Зельманов; Московский технический университет связи и информатики (Волго-Вятский филиал МТУСИ). – М., 2007. – 200 с.

*Дата поступления
в редакцию 12.07.2001*

S.S. Zelmanov

THE SUMMARIZED RESONANCE IN THE LINER STATIONARY DYNAMIC SYSTEM

The subject of this article is the appreciation of the classical theory of the resonance in the liner stationary dynamic systems. It is shown that it is impossible to use the traditional approach to systems with any number of the freedom degree and constructive losses. It is suggested a wider spectral criteria of the frequency resonance and it is introduced the concept and the definition of the resonance of the signal from as a summarized definition of the resonance for the class of liner stationary dynamic system

Key words: spectral criteria, extremum rounding module of the spectra, resonance of the form.