УДК 517.465

Н.С. Петрухин[1], Е.Н. Пелиновский[1,2]

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОДНОГО ПОТОКА В РАМКАХ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Высшая школа экономики[1],
Институт прикладной физики РАН [2]

Обсуждается роль аналитических решений в моделировании водного потока в каналах произвольного сечения. Получены аналитические решения, описывающие трансформацию стационарного потока в канале треугольного сечения с изменяющимися параметрами.

Ключевые слова: трансформация течения, критическая глубина, докритический режим, моделирование водяного потока.

Введение

Математические модели течений в реках основаны на известных гидродинамических моделях потоков однородной жидкости. Существующие модели учитывают разную степень детализации водного потока и гидрометеорологической информации. Модели первого уровня (одномерные или квазиодномерные) используют усредненные по поперечному сечению реки характеристики скорости течения.

Одномерные модели дают достаточно грубое описание процесса, однако легко реализуются в виде номограмм или программ для простейших компьютеров, поэтому они получили широкое распространение в оперативной практике гидрологических расчетов.

В настоящее время активно используются модели следующего уровня, основанные на двухмерных уравнениях мелкой воды, и их численное моделирование позволяет описать динамику загрязнений в реках и прогнозировать аварийные ситуации. Между тем, роль одномерных моделей не стоит недооценивать, поскольку они допускают простое аналитическое исследование, и получаемые здесь решения могут быть использованы как для тестирования численных моделей, так и для экспресс-оценки характерных параметров задачи. В данной статье обсуждается роль аналитических решений в задачах речной гидравлики.

Исходная модель

Искомые уравнения квазиодномерной модели водного потока могут быть получены усреднением (интегрированием) уравнений нелинейной теории мелкой воды по поперечному сечению, на чем мы останавливаться не будем, и приведем здесь основные уравнения без вывода:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial H}{\partial x} = g\frac{dh_0}{dx}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[A(x,t)u\right] = 0, \tag{2}$$

где $u(x,t)$ – средняя (усредненная по поперечному сечению) скорость водного потока; $A(x,t)$ – площадь поперечного сечения потока (реки); $H(x,t)$ – полная глубина бассейна на оси канала% $h_0(x)$ – ее невозмущенное значение; g – ускорение свободного падения; x – координата вдоль реки (причем предполагается ее русло прямым в первом приближении); t – время. Эта система незамкнута, и недостающее уравнение связи между A и H находится по заданной геометрии водного потока в вертикальной плоскости. Для этого необходимо знать профиль дна реки $z(y;x,t)$ в каждый момент времени и в каждом сечении вдоль реки, тогда

$$A(x,t) = \int z(y;x,t)dy\,. \qquad (3)$$

Приведем здесь несколько примеров поперечного сечения реки.

Русло прямоугольного сечения. Пусть канал постоянной глубины ограничен вертикальными стенками (рис. 1)

$$z(y) = -h_0 \qquad |y| < B/2\,. \qquad (4)$$

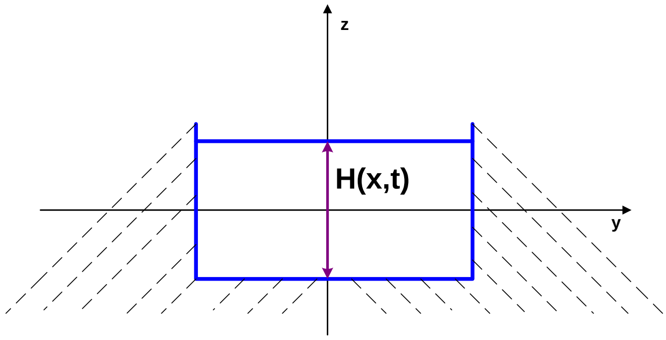

Рис. 1. Канал прямоугольного сечения

Тогда функция $A(x,t)$ вычисляется в явном виде

$$A(x,t) = H(x,t)B(x)\,, \qquad (5)$$

где B – ширина канала, и система уравнений (1)–(2) становится замкнутой. Две входящие в нее функции: ширина канала $B(x)$ и невозмущенная глубина $h_0(x)$ (точнее, в уравнения входит уклон русла реки dh_0/dx) – являются заданными и определяются конкретными (локальными) условиями. Канал прямоугольного сечения является наиболее простой аппроксимацией реального русла реки.

Русло параболического канала. Пусть дно канала описывается степенной функцией (рис. 2)

$$z(y) = -h_0 + \alpha\,|y|^m\,, \qquad (6)$$

где α, m - произвольные положительные константы. В случае если $m = 1$, русло реки является треугольным, а при $m = 2$ канал имеет параболическое сечение. Если $m \to \infty$, то форма канала стремится к прямоугольной. Иногда для простоты мы будем называть каналы профиля (6) *параболическими*. Площадь поперечного сечения канала вычисляется в явном виде

$$A = \frac{2}{m\alpha^{1/m}} H^{1+1/m}\,. \qquad (7)$$

Если константы α и m не зависят от координаты x, то после подстановки (7) в (2) константа α исчезает из уравнений, и система уравнений становится замкнутой относительно скорости потока и полной глубины на оси канала. Естественно, что в качестве коэффициента сюда входит параметр m, характеризующий форму поперечного сечения русла. Такая геометрия использована при решении задач наката длинных волн на берег и изучения возможности появления аномально больших волн (так называемых «волн-убийц» на мелкой воде.

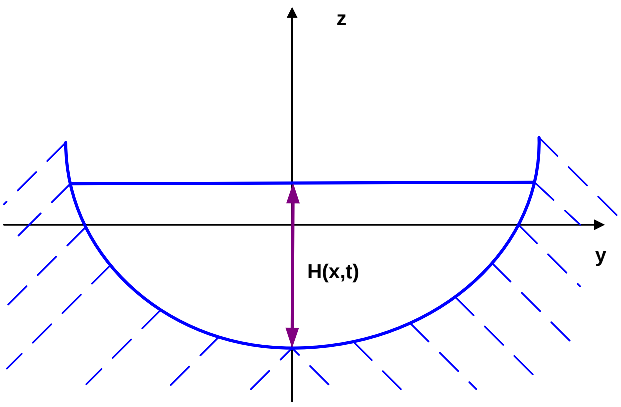

Рис. 2. Канал параболического сечения

Канал трапециидального сечения. Пусть форма канала описывается функцией (рис. 3)

$$z = \begin{cases} -h_0 & |y| < B/2 \\ -h_0 + \beta(|y| - B/2) & |y| > B/2 \end{cases} \tag{8}$$

где β - произвольная положительная константа. В этом случае площадь поперечного сечения вычисляется в явном виде

$$A(x,t) = B(x)H(x,t) + \frac{H^2(x,t)}{\beta(x)}. \tag{9}$$

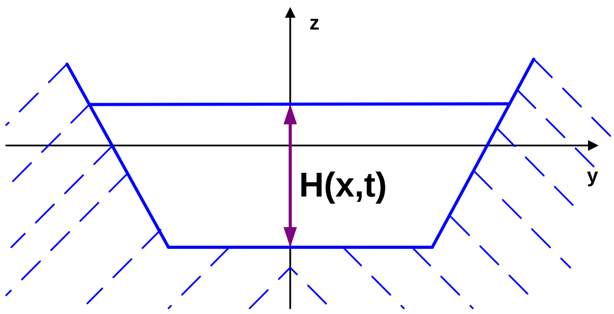

Рис. 3. Канал трапециидального сечения

Естественно, что площадь поперечного сечения может быть вычислена для канала произвольного сечения, по крайней мере, численно. В принципе, параметры речных руслов меняются также и со временем, а не только вдоль русла (известные процессы миграции рек, а также процессы эрозии берегов), однако характерные временные изменения миграции достаточно медленные, так что для описания гидравлических и волновых режимов можно пренебречь временной зависимостью.

Таким образом, в самом общем виде мы имеем функциональную связь

$$A(x,t) = A[H(x,t), x], \tag{10}$$

и система уравнений (1) – (2) становится замкнутой относительно скорости течения и полной глубины.

Отметим полную аналогию между уравнениями одномерной гидравлики и газовой динамики, если ввести обозначения

$$\rho = A, \qquad p = g\int A(H)dH\,. \tag{11}$$

В частности, для канала прямоугольного сечения (5) мы получаем связь $p \sim \rho^2$, известную для адиабатического газа с показателем адиабаты γ, равным 2. Эта аналогия уже была известна ранее. Для каналов параболического сечения аналогично получаем

$$\gamma = \frac{2m+1}{m+1}\,. \tag{12}$$

Такая газодинамическая аналогия для речных потоков оказывается полезной для переноса многих «волновых» результатов из газовой динамики на гидравлику и наоборот.

Стационарные потоки

Для демонстрации основных эффектов в гидравлике рассмотрим только один пример стационарных речных потоков. В этом случае уравнения (1)–(2) интегрируются:

$$Au = \mathrm{const}\,, \tag{13}$$

$$H - h_0 + \frac{u^2}{2g} = \mathrm{const}\,. \tag{14}$$

Переменность характеристик водного потока вдоль реки может быть связана только с переменностью русла реки: либо уклоном русла реки, либо изменением поперечного сечения реки. Уклоны русла реки достаточно малы (порядка 10^{-4}), и для простоты расчетов этим эффектом в данном случае можно пренебречь. Пусть канал имеет треугольный профиль (6) с $m = 1$, наклон стенок которого меняется с расстоянием, так что $\alpha = \alpha(x)$. В результате получаем систему алгебраических уравнений

$$H^2(x)u(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha_0} H_0^2 u_0\,, \tag{15}$$

$$H(x) + \frac{u(x)^2}{2g} = H_0 + \frac{u_0^2}{2g}\,, \tag{16}$$

где индекс 0 соответствует значениям потока в фиксированной точке $x = 0$. Следует отнормировать все функции на их значения в этой точке, тогда

$$H^2(x)u(x) = \alpha(x)\,, \tag{17}$$

$$H(x) + \mathrm{Fr}\,u^2(x) = 1 + \mathrm{Fr}\,, \tag{18}$$

где число Фруда есть

$$\mathrm{Fr} = \frac{u_0^2}{2gH_0}\,. \tag{19}$$

Удобно исключить скорость течения и придти к одному уравнению для глубины потока

$$H + \mathrm{Fr}\frac{\alpha^2}{H^4} = 1 + \mathrm{Fr}\,. \tag{20}$$

Водный режим зависит от одного параметра – числа Фруда. Результаты расчета для малого значения (Fr = 0.01) представлены на рис. 4 для глубины потока, рис. 5 – для скорости потока и на рис. 6 – для локального числа Фруда. Если коэффициент α уменьшается (канал расширяется), то глубина потока незначительно возрастает (кривая на рис. 4 слева от $\alpha = 1$), скорость потока падает значительно (кривая на рис. 5 слева от $\alpha = 1$). В результате локальное число Фруда также уменьшается (кривая на рис. 6 слева от $\alpha = 1$).

Таким образом, перестройка медленного, «до критического» потока происходит адиабатически и монотонно. Иная ситуация реализуется при сужении канала ($\alpha > 1$). В этом случае локальное число Фруда возрастает докритического значения 0,25 (кривая на рис. 6), при этом глубина потока падает (рис. 4), а скорость растет (кривая на рис. 5). Переход через критическое значение при дальнейшем сужении канала меняет характер процесса и решение алгебраического уравнения (20) отсутствует. Здесь необходимо учитывать возможность образования неустановившихся гидравлических прыжков. Такие процессы хорошо изучены для каналов прямоугольного сечения, однако для каналов произвольного сечения нам не удалось найти в литературе соответствующих решений.

Параметры течения при переходе через критическое значение числа Фруда могут быть найдены аналитически из (20), исследуя функцию $\alpha(H)$ на экстремум.

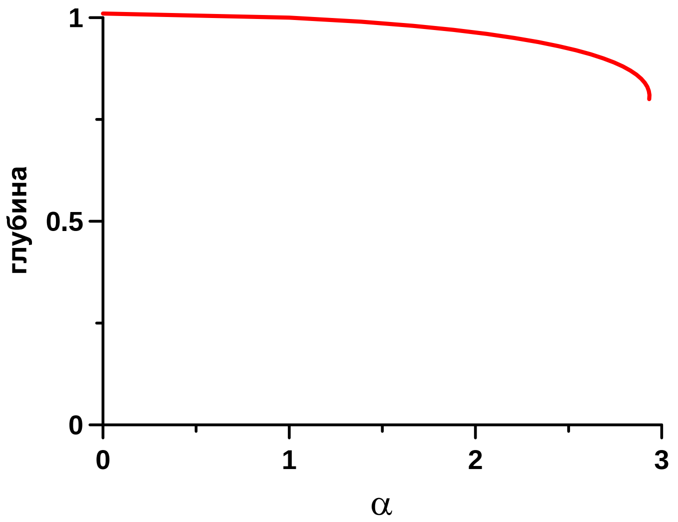

Рис. 4. Изменение глубины потока в треугольном канале при Fr = 0.01

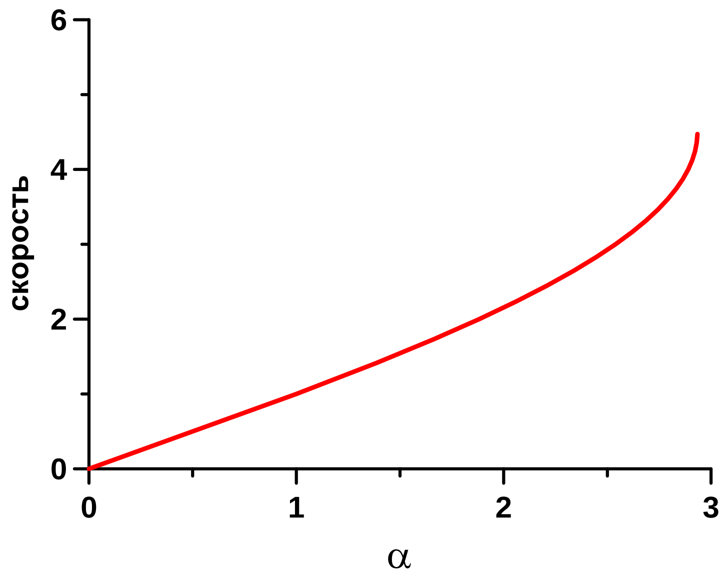

Рис. 5. Изменение скорости потока в треугольном канале при Fr = 0.01

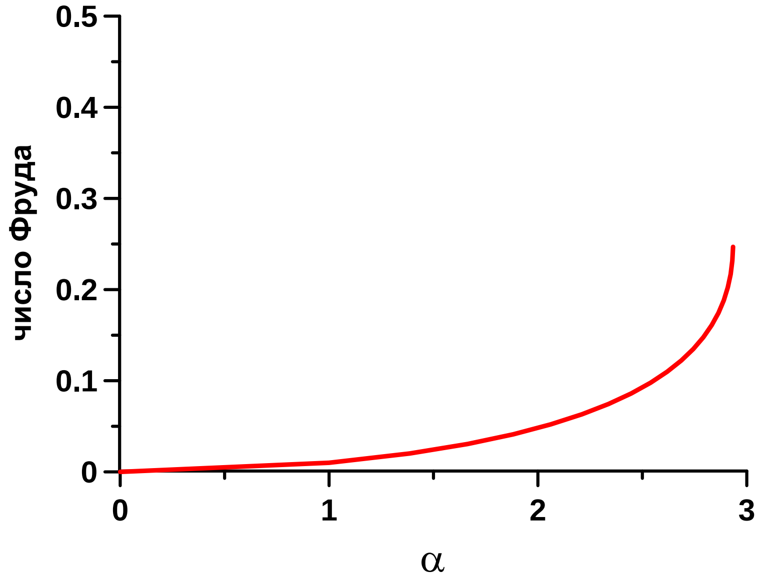

Рис. 6. Изменение локального числа Фруда в треугольном канале при Fr = 0.01

$$\alpha_* = \frac{16(1+\mathrm{Fr})^{5/2}}{25\sqrt{5\mathrm{Fr}}}, \tag{21}$$

$$H_* = \frac{4}{5}(1+\mathrm{Fr}), \tag{22}$$

$$u_* = \sqrt{\frac{1+\mathrm{Fr}}{5\mathrm{Fr}}}. \tag{23}$$

Глубина потока и его скорость в критической точке в зависимости от начального значения числа Фруда представлены на рис. 7 и рис. 8. При малых значениях числа Фруда глубина потока уменьшается на одну треть, по сравнению с начальным значением, а скорость потока неограниченно возрастает. При приближении к критическому значению начального числа Фруда (Fr = 0.25) изменения глубины потока и его скорости становятся слабыми.

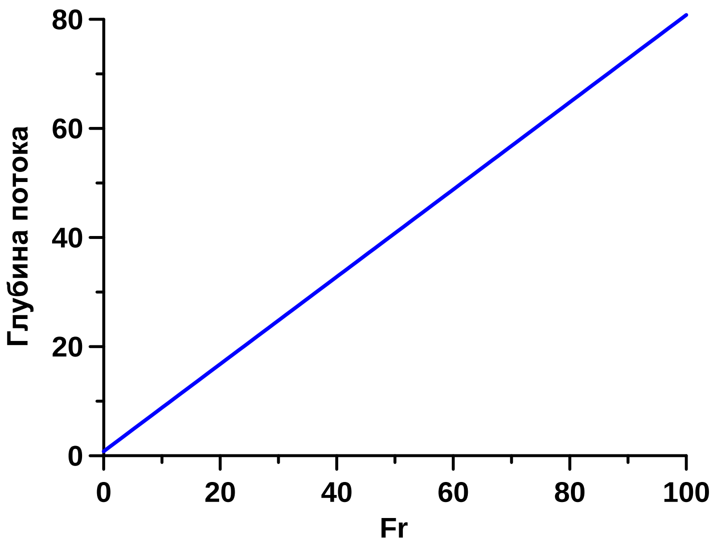

Рис. 7. Глубина потока в критической точке

Если начальный поток сверхкритический (Fr = 100), то характер изменений меняется на противоположный, по сравнению с докритическим режимом. Так, уменьшение наклона стенок канала (уширение канала) приводит к еще более сверхкритичности потока (число Фруда возрастает, рис. 11), при этом глубина потока уменьшается (рис. 9), а скорость потока возрастает, но незначительно (рис. 10). Сужение канала приводит к уменьшению числа Фруда (рис. 11), глубина потока увеличивается (рис. 9), скорость потока несколько уменьшается (рис. 10). И здесь переход через критическое значение числа Фруда (0.25) невозможен в рамках установившегося течения. В критической точке глубина потока может быть значительна при больших значениях числа Фруда (рис. 7), а его скорость стремится к $(1/5)^{1/2}$.

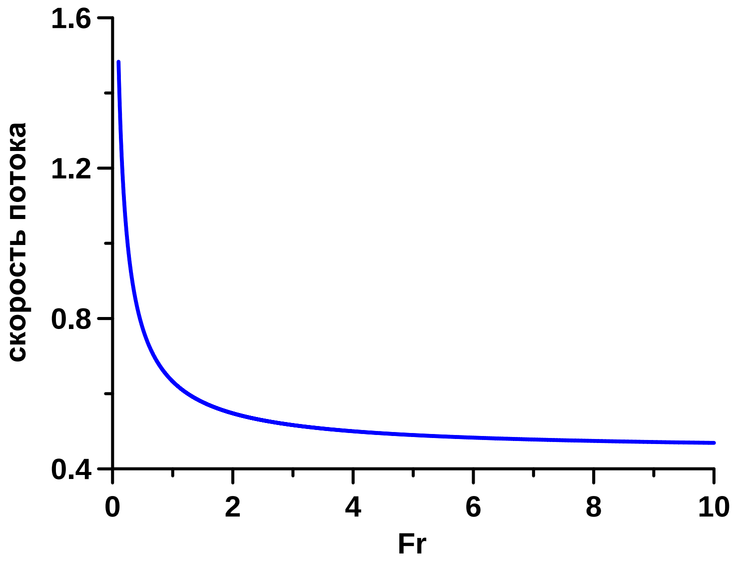

Рис. 8. Скорость потока в критической точке

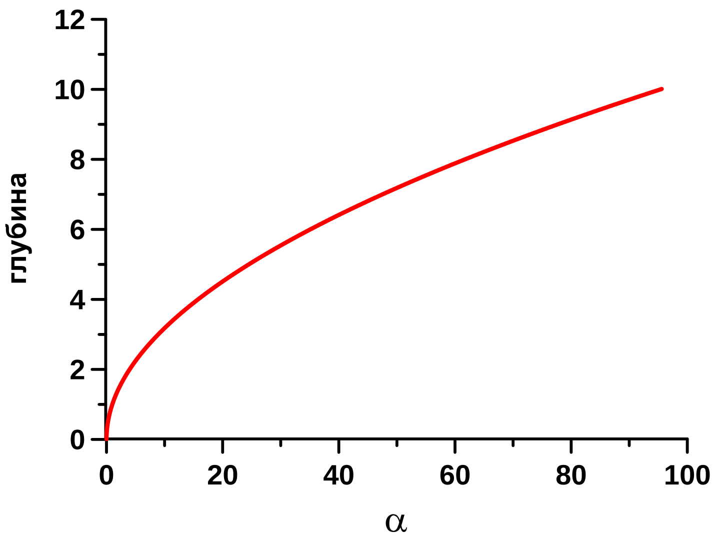

Рис. 9. Изменение глубины потока в треугольном канале при Fr = 100

Приведенный пример стационарного течения в треугольном канале переменного сечения демонстрирует важность анализа критического режима в течении воды, в окрестности ее неустановившиеся процессы с образованием гидравлических прыжков будут играть определяющую роль.

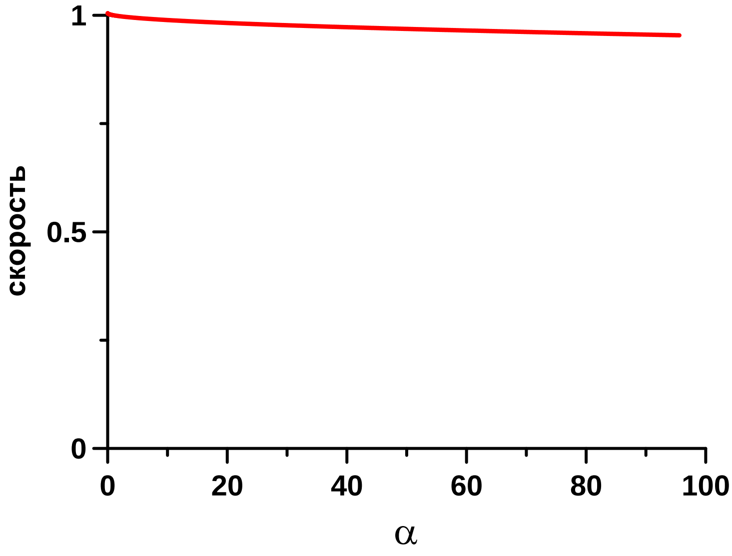

Рис. 10. Изменение скорости потока в треугольном канале при Fr = 100

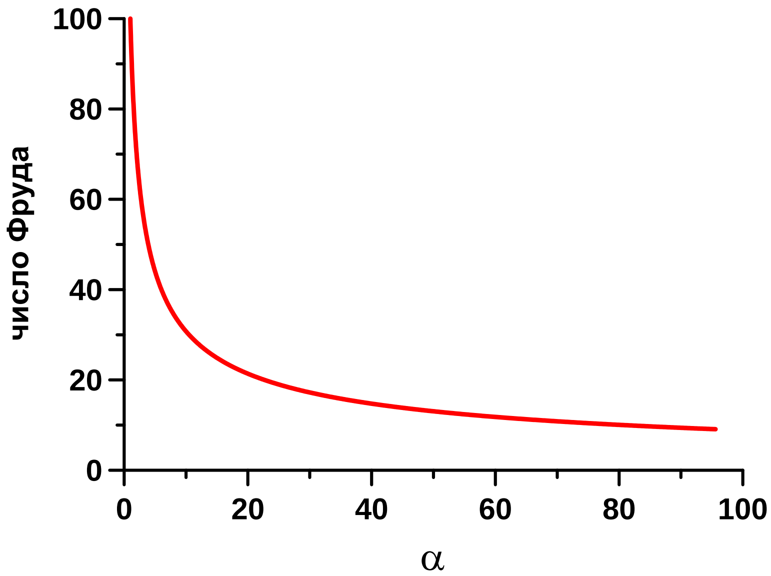

Рис. 11. Изменение локального числа Фруда в треугольном канале при Fr = 100

В качестве другого примера рассмотрим трансформацию течения в треугольном канале постоянного сечения, ось которого наклонена к горизонту. В этом случае система уравнений (13)–(14), нормированная на значения переменных в какой то фиксированной точке есть

$$\Delta h(x) = H(x) + \frac{\mathrm{Fr}}{H^4(x)} - 1 - \mathrm{Fr}, \qquad u(x) = \frac{1}{H^2(x)}, \tag{24}$$

где Δh – есть перепад в глубинах оси канала, по сравнению с невозмущенным горизонтальным уровнем (в океанологии за него принимают нулевой уровень моря, а в гидравлике рек России – уровень так называемой Балтийской системы). И здесь при любых начальных значениях числа Фруда зависимость глубины воды H от глубины канала h оказывается немонотонной (рис. 11), что соответствует существованию двух режимов: докритического (левая ветка на рисунке) и сверхкритического (правая ветка на рисунке), не связанных между собой. Критическое значение числа Фруда равно по-прежнему Fr_{cr} = 0.25, и параметры потока в критической точке есть

$$H_{cr} = \sqrt[5]{4\mathrm{Fr}}, \qquad u_{cr} = \frac{1}{H_{cr}^2}, \qquad \Delta h_{cr} = H_{cr} + \frac{\mathrm{Fr}}{H_{cr}^4} - 1 - \mathrm{Fr}. \tag{25}$$

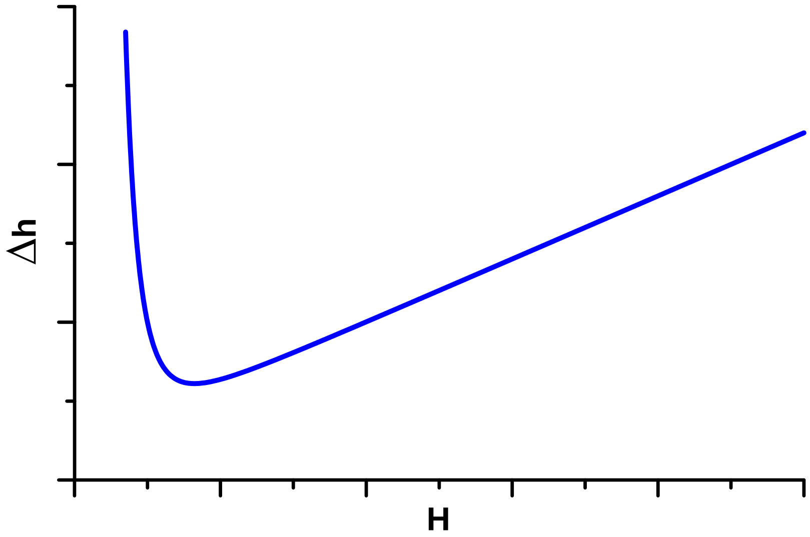

Рис. 12. Связь глубины воды с глубиной наклонного канала треугольного сечения

Связь критической глубины воды в треугольном канале с начальным значением числа Фруда потока представлена на рис. 12. В случае больших значений числа Фруда критическая глубина слабо зависит от него, и в сверхкритическом потоке глубина воды, как и скорость потока, меняются медленно (рис. 13).

Аналогичные расчеты могут быть проделаны и для каналов другой формы (трапециидальной и параболической), во всех случаях очевидно существование критического режима по числу Фруда.

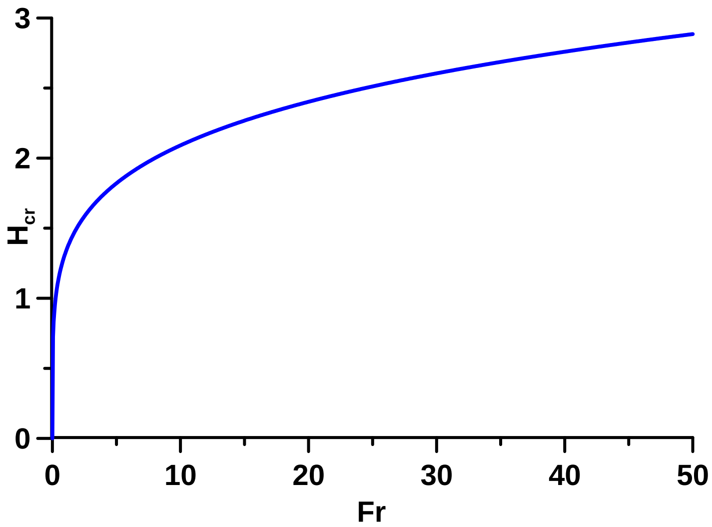

Рис. 13. Критическая глубина воды в наклонном канале треугольного сечения при достижении критического значения числа Фруда

Выводы

Рассмотренные аналитические примеры позволяют качественно выполнить анализ возможных гидрологических режимов в водных потоках, в частности, в малых реках. Что же касается равнинных больших рек, типа рек Ока и Волга, то скорость течения в них мала (около 50 см/с), а глубина велика (несколько метров), так что числа Фруда достаточно малы, и для них всегда реализуется докритический режим. Ширина реки велика (сотни метров), так что одномерное приближение здесь не работает. Для таких рек двумерные эффекты, приводящие к неоднородности течения поперек реки, являются принципиальными и требуют разработки более точных моделей. Некоторые из них уже применялись к анализу гидрологических процессов в реках Ока и Волга в пределах Нижегородской области.

Работа выполнена при финансовой поддержке регионального гранта РФФИ № 11-05-97006.

Библиографический список

1. **Иванов, А.В.** Математическое моделирование в задачах прогнозирования аварийных ситуаций на Оке в пределах Нижегородской обл. / А.В. Иванов [и др.] // Водные ресурсы, 2000. Т. 27. №3. С. 305–312.
2. **Красильщиков, А.А.** Моделирование аварийных ситуаций и распространения загрязнений на р. Оке / А.А. Красильщиков [и др.] // Известия Аадемии инженерных наук РФ. Прикладная математика и информатика; НГТУ. – Нижний Новгород, 2000. С. 42–49.
3. **Козырев, О.Р.** Контроль и прогнозирование загрязняющих веществ в реках / О.Р. Козырев [и др.] // Экологическое управление природными ресурсами. – Нижний Новгород, 2002. С. 211–223.
4. **Усовершенствованные методические рекомендации** по оперативному прогнозированию распространения зон опасного аварийного загрязнения в водотоках и водоемах, а также уровней содержания в воде основных загрязняющих веществ. – С.- Петербург, Гидрометеоиздат. 1992. – 94 с.
5. **Вольцингер, Н.Е..** Длинноволновая динамика прибрежной зоны / Н.Е. Вольцингер, К.А. Клеванный, Е.Н. Пелиновский. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1989. – 272 с.
6. **Пелиновский, Е.Н.** Гидродинамика волн цунами / Е.Н. Пелиновский. – Нижний Новгород: Институт прикладной физики РАН. 1996.
7. **Вольцингер, Н.Е.** Расчет гидрологического режима Невской губы / Н.Е. Вольцингер [и др.] // Метеорология и гидрология, 1990. № 1. С. 70–77.
8. **Didenkulova, I.** Nonlinear wave evolution and runup in an inclined channel of a parabolic cross-section / I. Didenkulova, E. Pelinovsky // Phys Fluids 2011. Vol. 23. Issue 8, 086602 (а).
9. **Didenkulova, I.** Runup of tsunami waves in U – shaped bays / I. Didenkulova, E. Pelinovsky // PAGEOPH, 2011. Vol. 168. No. 6-7, 1239-1249 (б).
10. **Didenkulova, I.** Rogue waves in nonlinear hyperbolic systems (shallow-water framework) / I. Didenkulova, E. Pelinovsky // Nonlinearity, 2011. Vol. 24. Pp. 1–18.
11. **Стокер, Дж.** Волны на воде / Дж. Стокер. – М.: ИЛ, 1959.

Дата поступления
в редакцию25.10.2011

N. Petrukhin, E. Pelinovsky

WATER FLOW MODELING IN THE FRAMEWORK OF 1D SHALLOW-WATER EQUATIONS

The role of analytic solutions in the modeling of the water flow in channels of arbitrary cross-section is discussed. New analytical solutions described the transformation of the steady flow in the triangle channel with variable parameters are obtained.

Key words: transformation of the flow, critical depth, subcritical regime, the simulation of water flow.