

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЕСТЕСТВЕННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ НАУКАХ

УДК 53.072

В.М. Галкин, Л.Н. Ерофеева, И.Н. Толкачев

ЛОГИСТИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ: НЕКОТОРЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева

Исследуется с точки зрения R/S анализа логистического отображения $x_{n+1} = a(x_n - x_n^2)$ в интервале хаотичности $3,5699... < a < 1 + \sqrt{8}$. Экспериментально подсчитывается показатель Херста. Приводятся графики и таблицы, иллюстрирующие поведение последовательности $\{x_n\}$. Обнаружено странное поведение ее при $a = 3,74$, не похожее на стохастичность.

Ключевые слова: временной ряд, хаос, показатель Херста, бифуркация, окна периодичности.

Под логистическим отображением далее понимается разностное уравнение

$$x_{n+1} = a(x_n - x_n^2). \quad (1)$$

Если номер n в x_n трактовать как временную переменную, то уравнение может служить в механике примером динамической системы, в биологии описывает модель Ферхюльста роста численности популяции. Наконец, в экономике это пример временного ряда. Временные же ряды появляются при прогнозировании течения финансовых потоков, котировок акций на бирже и т. п.

Особый интерес представляет случай $a \in [0, 4]$, $x_1 \in [0, 1]$, в котором значения x_n при $n > 1$ не покидают интервал $[0, 1]$. Внимание исследователей привлекает поразительные свойства поведения последовательности $\{x_n / n \geq 1\}$ при указанных ограничениях. Отметим некоторые из них, в основном найденные Фейгенбаумом [1, 2].

1. В интервале $[0, 4]$ изменения параметра a выделяются непересекающиеся подинтервалы – так называемые «окна периодичности». Их можно перенумеровать нечетными числами. В m -окне динамические траектории асимптотически периодичны с периодами $m2^k$ ($k \geq 1$). В окне периодичности содержатся точки бифуркации такие, что при переходе через них период предельной траектории удваивается. Для 2 – окна в [1] приводятся следующие значения точек бифуркации

$$a/4 = 0,75; 0,86237...; 0,88602...; 0,8924728...; \quad (2)$$

Конец 2 – окна соответствует значению $a = 3,56994567...$. При $a < 1$ $\lim x_n = 0$, а при $1 < a < 3$ для почти всех траекторий $\lim x_n = 1 - \frac{1}{a}$.

В литературе авторы на методах вычислений точек бифуркаций обычно не останавливаются. Но, так или иначе, все алгоритмы должны использовать следующую идею: для тра-

ектории периода k имеет место система алгебраических уравнений

$$x_2 = a(x_1 - x_1^2), \quad x_3 = a(x_2 - x_2^2), \dots, \quad x_k = a(x_{k-1} - x_{k-1}^2), \quad x_1 = a(x_k - x_k^2) \quad (3)$$

и точка бифуркации есть нижняя грань значений a , при которых система (4) не имеет решений с меньшим периодом, т.е. среди x_1, x_2, \dots, x_k нет одинаковых.

В [5] система (4) изучалась при некоторых k . В частности, найдено, что траектории периода 2 появляются при $3 < a < 1 + \sqrt{6}$, 4 – траектории – при $1 + \sqrt{6} < a < 3,544090359\dots = \sqrt{1+4t}$, где t – корень уравнения 6-й степени

$$4096t^6 - 12288t^5 + 12032t^4 - 12032t^3 + 8432t^2 + 4913 = 0.$$

Начало 3 – окна есть $a = 1 + \sqrt{8}$ и ближайшая точка бифуркации, ведущая к удвоению периода, есть $a = 3,841499013\dots$ – корень уравнения

$$a^6 - 6a^5 + 4a^4 + 24a^3 - 14a^3 - 14a^2 - 36a - 81 = 0.$$

2. Длины интервалов между соседними точками бифуркаций асимптотически образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{f}$, где $f = 4,6669201609\dots$ – так называемая постоянная Фейгенбаума. Практическую ценность этого утверждения можно проиллюстрировать на примере 2-окна периодичности: его длина приблизительно равна $(a_2 - a_1)(1 + q + q^2 + \dots) = \frac{a_2 - a_1}{1 - q} \cong 0,1209$, где $a_1 = 1 + \sqrt{6}$ – начало 2 – окна, $a_2 = 3,544090\dots$ – ближайшая к a_1 точка бифуркации. Для конца 2 – окна получаем $a_1 + 0,1209 \approx 3,57$

3. В интервалах между окнами периодичности траектории демонстрируют хаотичность своего поведения. Именно это обстоятельство больше всего поражает в столь простой модели, как логистическая. Хаотичность проявляется в том, что траектории сильно зависят от выбора начального значения x_1 . Траектории, соответствующие «близким» начальным значениям, в дальнейшем становятся весьма отличающимися друг от друга. Приводимые в книгах рисунки (например, в [1]), на наш взгляд, не очень наглядно иллюстрируют хаотичность. На прилагаемых далее графиках свойство хаотичности проявляется более явно.

В этой статье логистическое отображение (1) рассматривается как временной ряд и исследуется с точки зрения так называемого R/S – анализа [4]. В R/S отправной точкой является

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, \quad (4)$$

разумеется, не обязательно хаотический. Из его отрезка x_1, x_2, \dots, x_n строится конечная последовательность

$$y_1, y_2, \dots, y_n. \quad (5)$$

В ней $y_i = x_1 + x_2 + \dots + x_i - i\bar{x}$, $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$. Далее в (5) выделяются $M = \max_i y_i$ и $m = \min_i y_i$. Разность $M - m$ обозначается через R . Полагая

$S^2 = \frac{1}{n} \left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \right]$ составляем частное R/S . Собственно, R/S – анализ занимается изучением зависимости R/S от n [4].

Величину R/S ввел в 1951 году Херст, обрабатывая данные по разливам Нила за ряд лет. По-видимому, руководствуясь формулами из теории броуновского движения, Херст предположил, что при больших n имеет место следующая асимптотика

$$R/S \sim \text{const } n^h. \quad (6)$$

Показатель h принято называть показателем Херста. Из определения следует, что этот показатель принимает значение из интервала $[0,1]$.

В своей практике экономисты не критически используют для прогнозирования следующие утверждения относительно показателя h . Если члены временного ряда независимые случайные величины (т.е. фактически мы имеем дело с множеством реализаций некоторого случайного процесса), то $h = \frac{1}{2}$. Обратно, если при обработке экспериментальных данных получается

$h \approx \frac{1}{2}$, то считается, что члены временного ряда независимы. При $h > \frac{1}{2}$ прогнозируется тенденция к возрастанию членов временного ряда, когда таковая выявлена при наблюдении его отрезка.

При $h < \frac{1}{2}$ прогнозируется противоположная тенденция. Теоретическое изучение показателя Херста крайне затрудняется экзотическим выбором R/S в качестве статистики, резко отличающейся от классических полиномиальных (математическое ожидание, дисперсия и т.п.).

Эвристические соображения, на которых мы здесь не останавливаемся, приводят к

предположению, что асимптотики R/S и $D(y) = \frac{1}{2} \left[(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + \frac{\left(y_n - \frac{1}{n} \right)^2}{n} \right]$, ес-

ли они существуют и имеют вид (8), должны иметь один и тот же показатель h . Здесь $\bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + \dots + y_n)$. Если предположение верно, то показатель Херста должен быть равен нулю, если у временного ряда существует предел $\lim x_n$ или он асимптотически периодичен. Для логистического отображения это означает, что численные эксперименты следует проводить для интервалов хаотичности. В этой работе исследовался первый интервал хаотичности $3,5699 < a < 1 + \sqrt{8}$. Ниже приводятся иллюстрированные и графики и таблицы. Буквой b обозначен x_1 – начальный член логистического отображения.

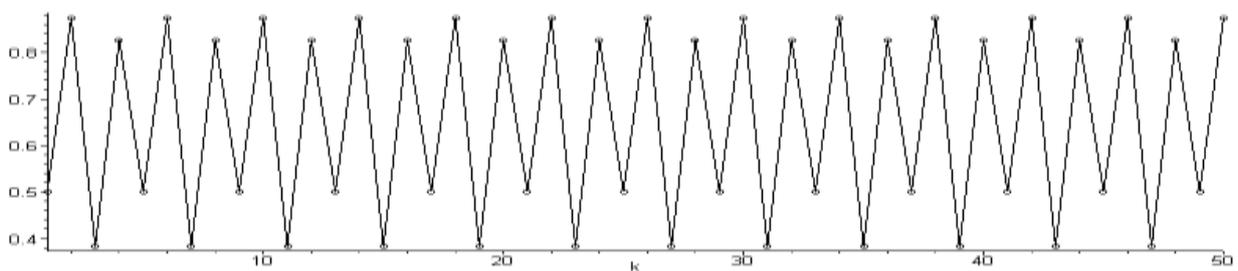


Рис. 1. ($a=3.5; n=50; b=0.5$)

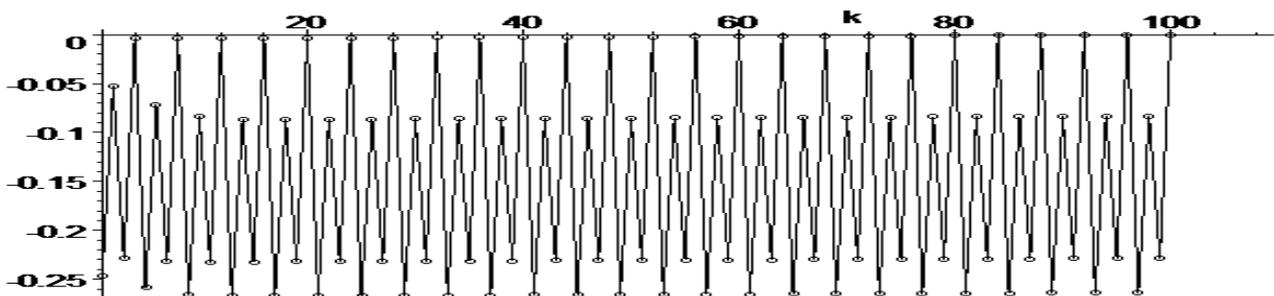


Рис. 2. ($a=3.5; n=100; b=0.4$)

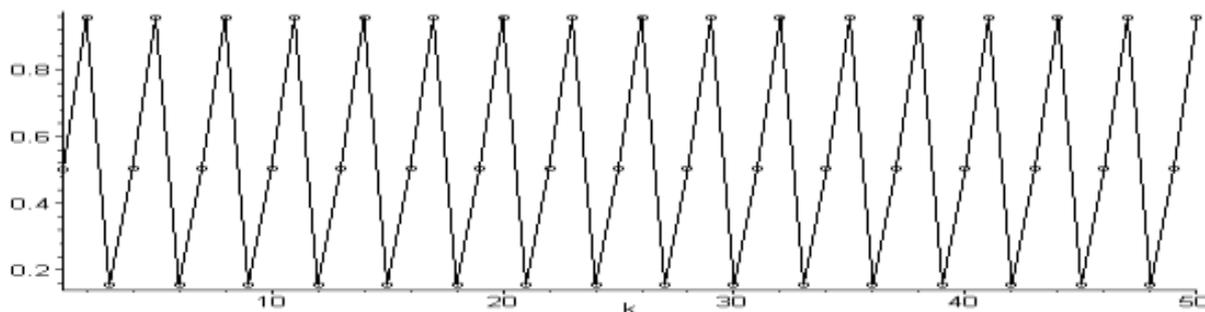
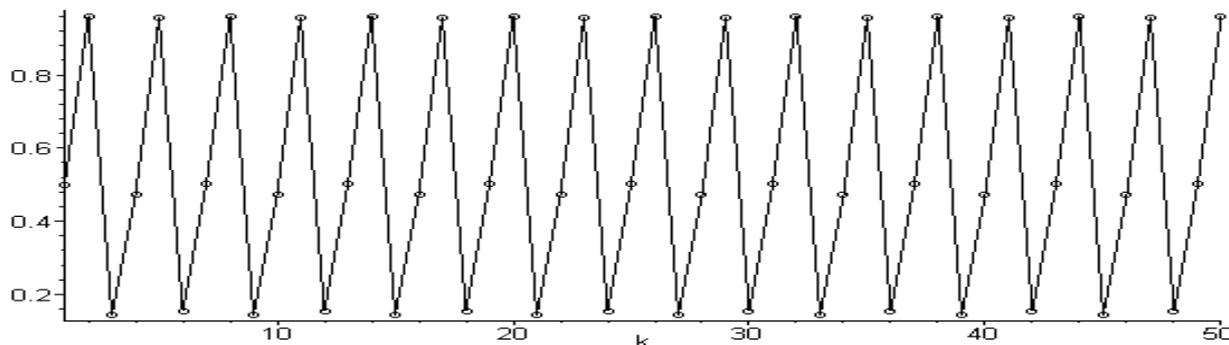
Рис. 3. ($a=3.83$; $n=50$; $b=0.5$)Рис. 4. ($a=3.845$; $n=50$; $b=0.5$)

Рис. 1–4 изображают типичные примеры графического изображения последовательности x_1, x_2, \dots, x_n для значений a из окон периодичности. Рис. 1 и рис. 2 иллюстрируют 4 -ю периодичность, рис. 3 и рис. 4 соответственно 3 - и 6 - периодичность.

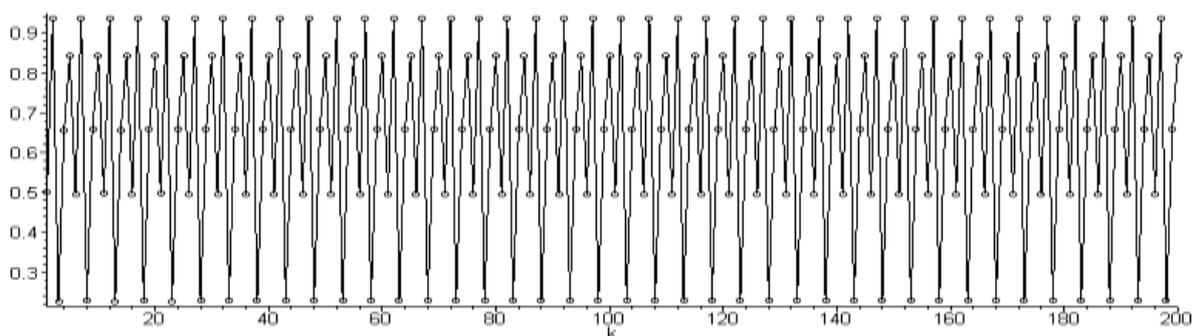
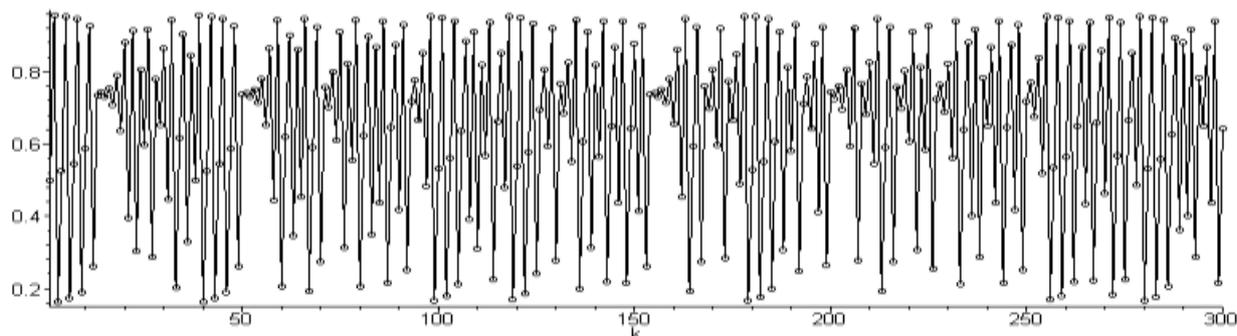
Рис. 5. ($a=3.74$; $n=200$; $b=0.5$)Рис. 6. ($a=3.82$; $n=300$; $b=0.5$)

Рис. 6 демонстрирует хаотичность поведения последовательности x_1, x_2, \dots, x_n . Рис. 5 оказался для авторов совершенно неожиданным. Поскольку здесь $a = 3,74$ входит в интервал хаотичности, то следовало ожидать, что соответствующий график должен иметь то же характер, что и на рис. 6. Однако он скорее относится по типу к графикам рис. 1–4.

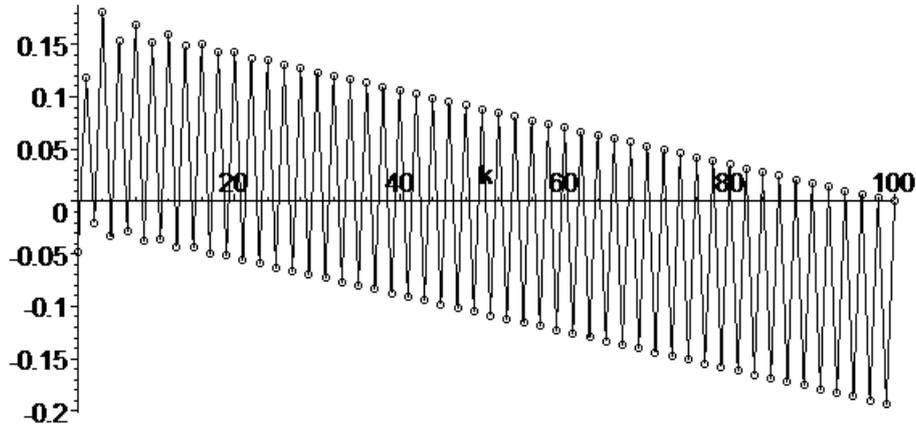


Рис. 7. ($a=3.4; n=100; b=0.6$)

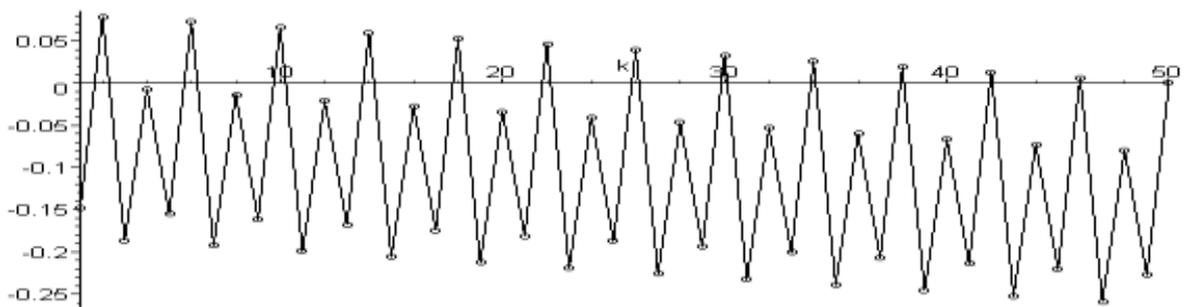


Рис. 8. ($a=3.5; n=50; b=0.5$)

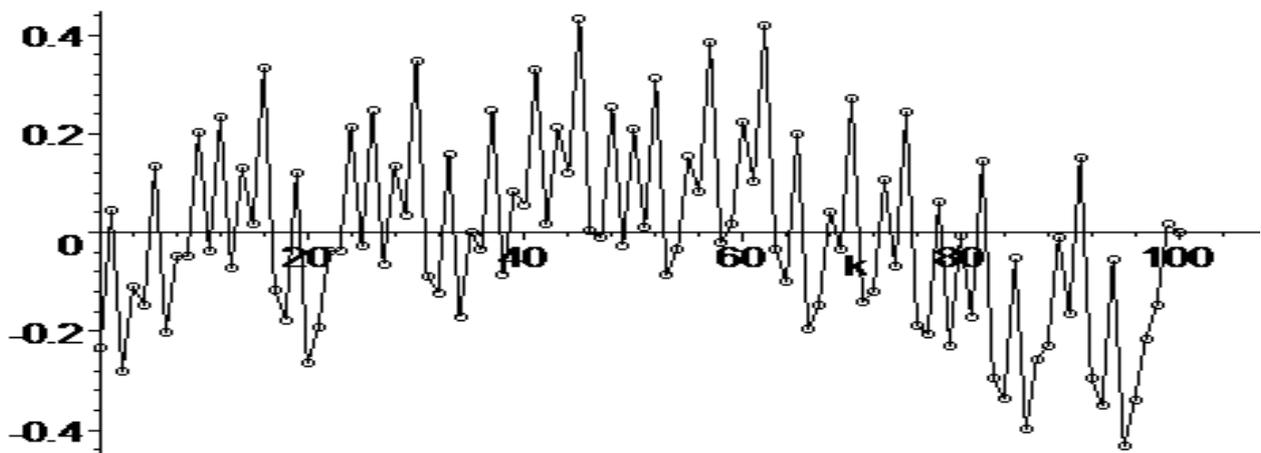


Рис. 9. ($a=3.8; n=100; b=0.4$)

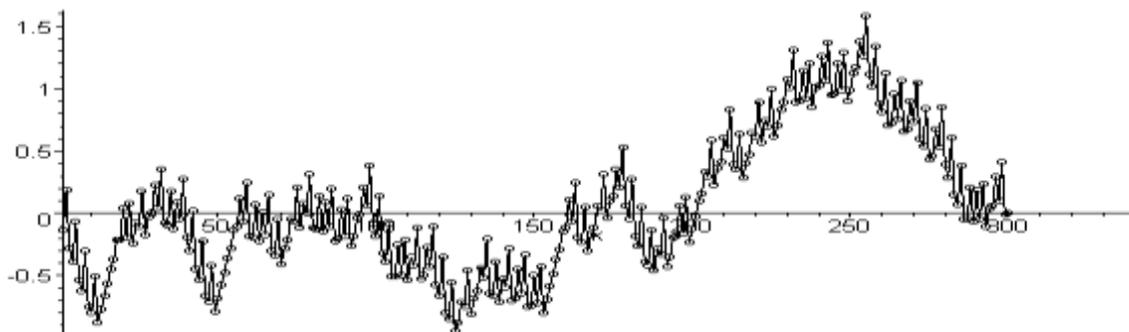


Рис. 10. ($a=3.82$; $n=300$; $b=0.5$)

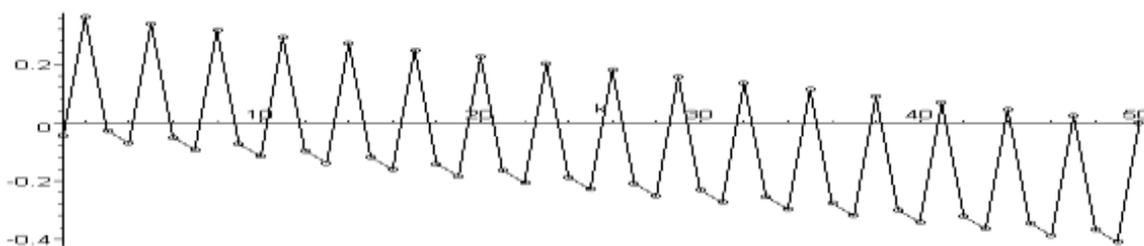


Рис. 11. ($a=3.83$; $n=50$; $b=0.5$)

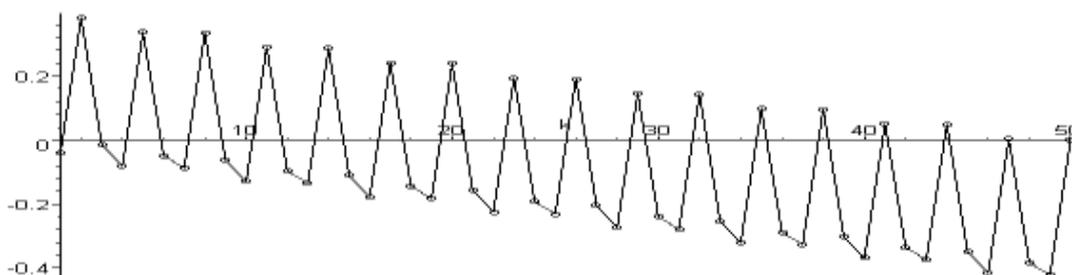


Рис. 12. ($a=3.845$; $n=50$; $b=0.5$)

Рис. 7–12 изображают последовательность y_1, y_2, \dots, y_n для различных $a, n, b = x_1$.

На них также хорошо видна разница между стохастическими траекториями и траекториями из окон периодичности.

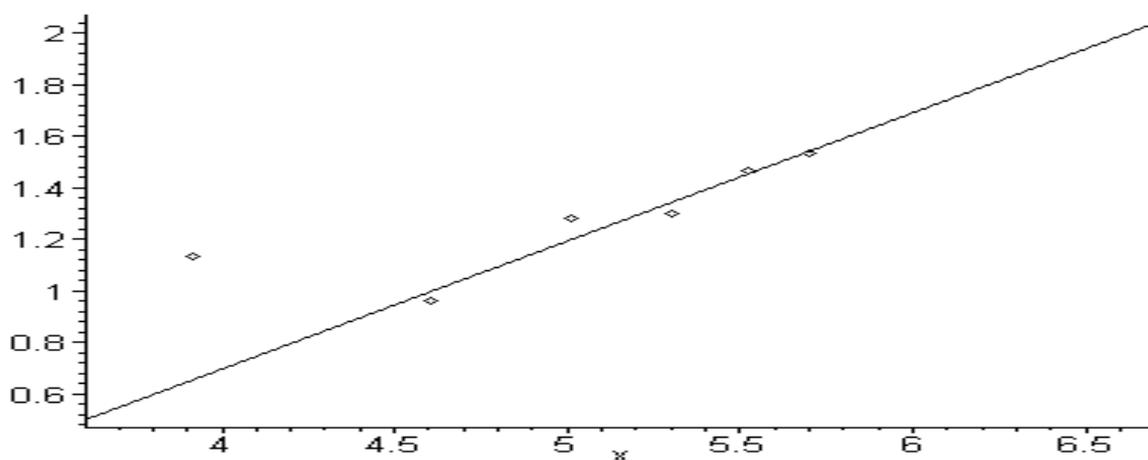


Рис. 13. ($b=0.4$; $a=3.66$)

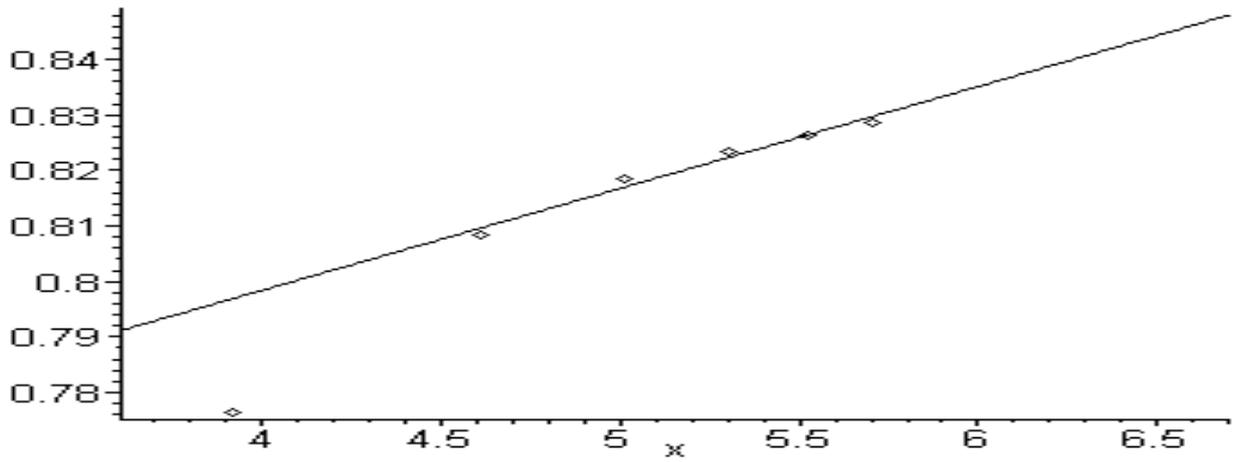


Рис. 14. ($b=0.4$; $a=3.74$)

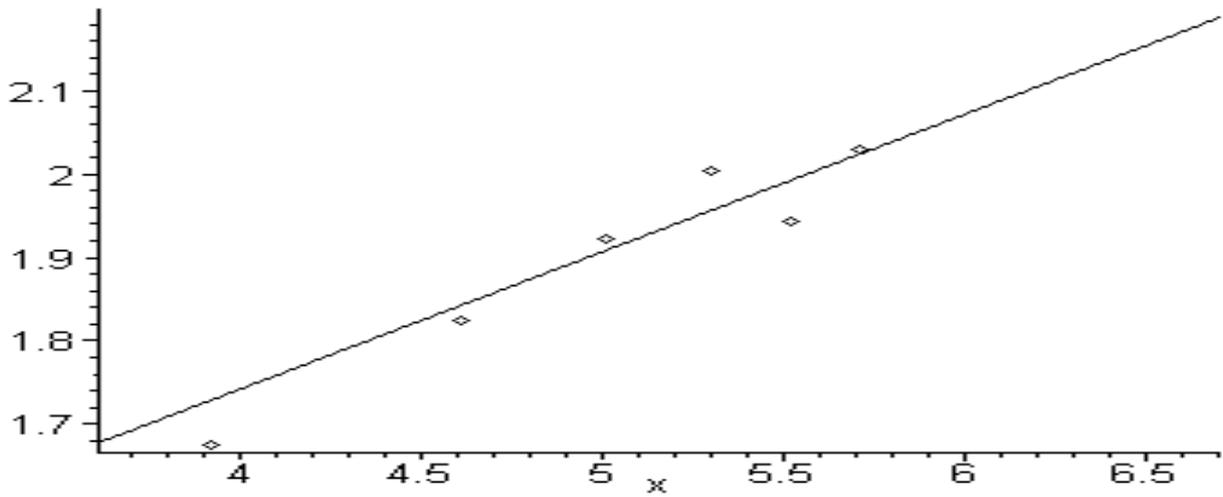


Рис. 15. ($b=0.4$; $a=3.78$)

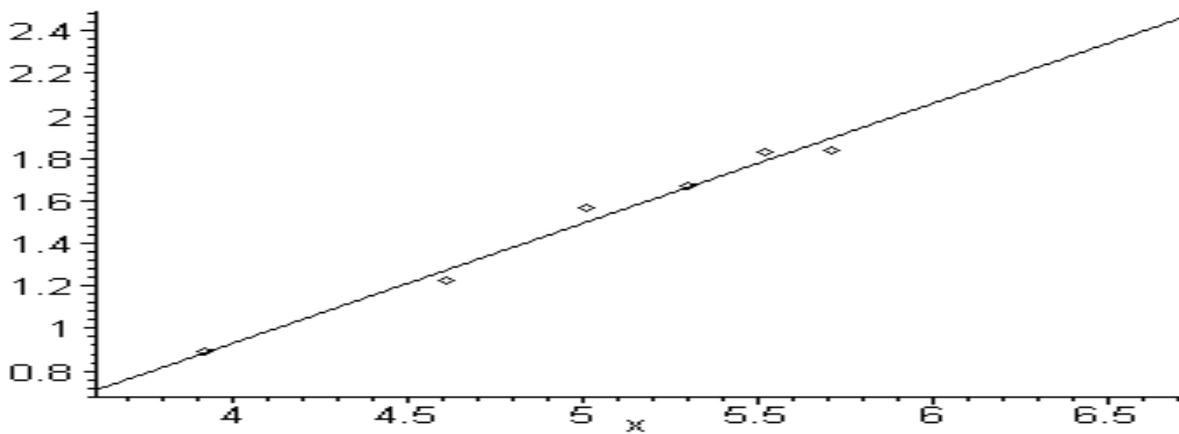
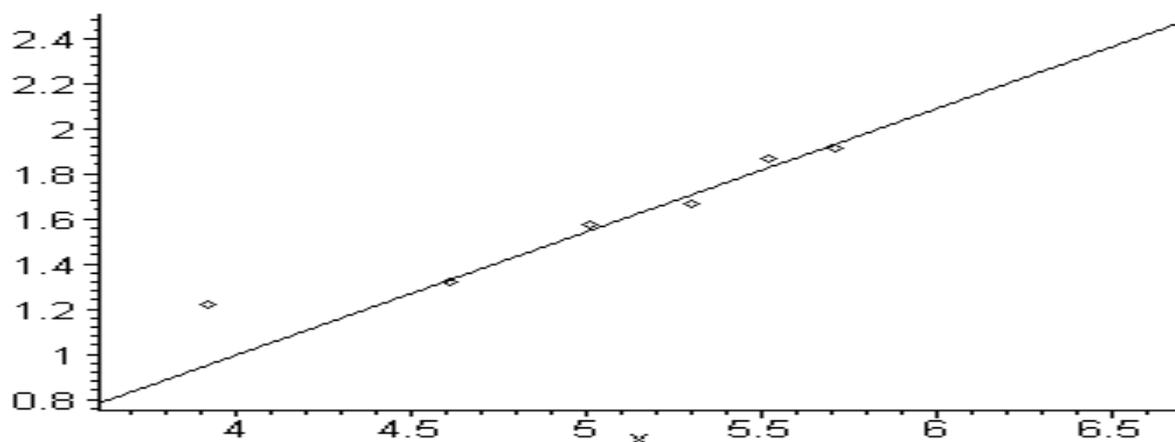


Рис. 16. ($b=0.4$; $a=3.8$)

Рис. 17. ($b=0.4$; $a=3.82$)

Уравнение линейной регрессии, получаемое при построении графиков из рис. 13–17 имеет вид $\ln\left(\frac{R}{S}\right) = h(a)\ln n + c$, в котором $h(a)$ и есть приближенное значение показателя Херста в предположении его существования.

Табл. 1, 2, 3 приводят эти значения. Здесь опять следует обратить внимание на случай $a = 3,74$, в котором $h(a) \neq 0$.

Таблица 1

Зависимость $h=h(a)$ ($b=0,4$)												
a	3,6	3,62	3,64	3,66	3,68	3,7	3,72	3,74	3,76	3,78	3,8	3,82
h	0,254	0,335	0,212	0,497	0,193	0,352	0,277	0,018	0,274	0,165	0,564	0,546

Таблица 2

Зависимость $h=h(a)$ ($b=0,5$)												
a	3,6	3,62	3,64	3,66	3,68	3,7	3,72	3,74	3,76	3,78	3,8	3,82
h	-0,232	0,323	0,327	0,257	0,614	0,128	0,521	0,162E-08	0,494	0,648	0,641	0,463

Таблица 3

Зависимость $h=h(a)$ ($b=0,6$)												
a	3,6	3,62	3,64	3,66	3,68	3,7	3,72	3,74	3,76	3,78	3,8	3,82
h	-0,393	0,027	0,121	0,327	0,154	0,293	0,271	-4,894E-04	0,258	0,211	0,461	0,395

Библиографический список

1. Берже, П. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности / П. Берже, И. Помо, К. Видаль. – М.: Изд. «Мир», 1991.
2. Лихтенберг, А. Регулярная и стохастическая динамика / А. Лихтенберг, М. Либерман. «Меркурий Пресс». 2000.
3. Мун, Ф. Хаотические колебания / Ф. Мун. – М. Изд.: «Мир», 1990.

4. Петерс, Э. Фрактальный анализ финансовых рынков / Э. Петерс. – М.: Интернет – Трейдинг», 2004.
5. Галкин, В.М. Хаос и две задачи Рамануджана. Прогрессивные технологии в машино- и приборостроении / В.М. Галкин [и др.]. – Н. Новгород - Арзамас, 2010.

*Дата поступления
в редакцию 20.10.2011*

V.M. Galkin, L.N. Erofeeva, I.N. Tolkachev

LOGISTIC MAPPING: SOME EXPERIMENTAL DATA

Logistic mapping $x_{n+1} = a(x_n - x_n^2)$ is investigating from the R/S – analysis viewpoint for $3,5699 < a < 1 + \sqrt{8}$. The Hurst's exponent is calculated experimentally. The graphics and the tables that are illustrating the behaviour of the sequence $\{x_n\}$ are given. Strange behaviour of the $\{x_n\}$ for $a = 3,74$ is discovered.

Key words: time series, Chaos, Hurst exponent, bifurcation, periodicity box.