УДК 512.542+512.544

Я.Н. Нужин

ПОРОЖДАЮЩИЕ МУЛЬТИПЛЕТЫ ИНВОЛЮЦИЙ

Сибирский федеральный университет

Приводится краткий обзор результатов о порождающих множествах инволюций с определенными свойствами конечных простых групп и линейных групп над кольцом целых чисел *Z*. С использованием неравенства Скотта находится минимальное число порождающих инволюций $i(G)$ группы *G*, произведение которых равно единице, в случаях, когда *G* совпадает с одной из следующих групп $PSL_3(2^n)$, $PSU_3(2^{2n})$, $SL_6(Z)$.

Ключевые слова: конечная простая группа, линейная группа, кольцо целых чисел, порождающие тройки инволюций.

Порождающие мультиплеты простых групп

В силу известного результата У. Фейта и Дж. Томпсона любая конечная группа нечетного порядка разрешима. Поэтому конечная простая неабелева группа содержит инволюции и порождается любым классом сопряженных инволюций. С другой стороны, минимальное число порождающих инволюций конечной простой неабелевой группы не меньше тройки. В 1978 г. А. Вагнер [1] заметил, что для группы $PSU_3(9)$ минимальное число порождающих инволюций равно 4. Впоследствии оказалось, что она является единственной конечной простой неабелевой группой, не порождаемой тремя инволюциями, см. работы Г. Миллера [2], Ф. Дала Вольта [3], Г. Малле, Дж. Саксла, Т. Вейгеля [4] и автора [5]. В [4] также была сформулирована задача.

А. *Для каждой конечной простой неабелевой группы G найти минимум числа сопряженных порождающих инволюций $i_c(G)$ таких, что их произведение равно 1.*

Задача А и следующая записаны автором статьи в "Коуровской тетради" [6, вопрос 14.69].

Б. *Для каждой конечной простой неабелевой группы G найти минимум числа порождающих инволюций $i(G)$ таких, что их произведение равно 1.*

Очевидно, $i(G) \le i_c(G)$ и, если группа порождается тремя (сопряженными) инволюциями, то $i(G) \le 6$ (соответственно $i_c(G) \le 6$). С другой стороны, из простоты группы G легко следует, что $i(G) \ge 5$. Таким образом, для любой конечной простой неабелевой группы G

$$5 \le i(G) \le 6, \text{ при } G \ne PSU_3(9).$$

Для группы $G = PSU_3(9)$, в которой один класс сопряженных инволюций, В.В. Латышев с использованием пакета GAP установил равенства $i_c(G) = i(G) = 7$ и даже указал явно в матричном виде такие семерки порождающих инволюций.

Задачи А и Б тесно связаны со следующим, уже решенным, вопросом В.Д. Мазурова [6, вопрос 7.30].

В. *Какие конечные простые группы порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны?*

Действительно, если группа G порождается тремя (сопряженными) инволюциями α, β, γ, такими, что $\alpha\beta = \beta\alpha$, то в качестве пятерки порождающих инволюций, произведение которых равно 1, можно взять $\alpha\beta, \gamma, \gamma, \beta, \alpha$ и тогда $i(G) = 5$ (соответственно $i_c(G) = 5$).

Согласно классификационной теореме конечные простые группы исчерпываются следующими группами: циклические группы простого порядка, знакопеременные группы, группы лиева типа над конечными полями, 26 спорадических групп.

Для знакопеременных групп и групп лиева типа над конечными полями ответ на вопрос В дал автор данной статьи [5], [7–10]. Спорадические группы рассматривались рядом авторов различными методами, особых успехов здесь достиг А.В. Тимофеенко, его программы и компьютеры большой мощности позволили явно указать порождающие тройки инволюций, две из которых коммутируют, для 24 спорадических групп в их подстановочном представлении. В.Д. Мазуров [11] единообразно методами теории характеров получил ответ на вопрос В для всех спорадических групп.

Конечная простая группа G порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, тогда и только тогда, когда она отлична от следующих групп:

1) знакопеременные группы:

$$A_6, A_7, A_8;$$

2) группы лиева типа над полем характеристики 2:

$$PSL_3(q),\ PSU_3(q),\ PSL_4(q),\ PSU_4(q);$$

3) группы лиева типа над полем нечетной характеристики:

$$PSL_3(q),\ PSU_3(q),\ PSL_2(7),\ PSL_2(9),\ PSp_4(3);$$

4) спорадические группы:

$$M_{11},\ M_{22},\ M_{23},\ McL.$$

Для нахождения числа $i(G)$ остается исследовать исключительные группы из указанного выше списка. Первый результат в данном направлении получила в 1999 г. Т.В. Дубинкина [12], установив равенства

$$i(PSL_3(2^n)) = i(PSU_3(2^{2n})) = 6.$$

Заметим, что группы $PSL_3(2^n)$ и $PSU_3(2^{2n})$ имеют по одному классу сопряженных инволюций, поэтому для них $i = i_c$.

В 2001 г. для исключительных знакопеременных и спорадических групп число $i(G)$ было найдено А.В. Тимофеенко [13] и В.А. Шмидтом [14] с использованием пакета GAP. Оказалось, что $i(A_6) = 5$ и $i(G) = 6$, если G является одной из групп

$$A_7,\ A_8,\ M_{11},\ M_{22},\ M_{23},\ McL.$$

В диссертации Дж.М. Уорда 2009 года [15] (см. также [6, примечания к вопросу 14.69]) число $i_c(G)$ найдено для знакопеременных, спорадических групп и для групп $PSL_n(q)$, при нечетном q, а для $n \geq 4$ при дополнительном ограничении $q \neq 9$, кроме того, для $n = 6$ еще и при $q \not\equiv 3\ (mod 4)$. Сформулируем его результаты.

Число i_c равно 6 для групп M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, McL, для остальных спорадических групп оно равно 5.

Число i_c равно 6 для групп A_7, A_8, A_{12}, для остальных знакопеременных групп A_n при $n \geq 5$ оно равно 5.

Заметим, что по сравнению с числом i среди знакопеременных и спорадических групп количество групп, для которых число i_c равно 6, увеличилось на два; это группы A_{12} и M_{12}.

Число i_c равно 5 для групп $PSL_n(q)$ при $n \geq 4$, $n \neq 6$ и нечетном $q \neq 9$.

Если q нечетно, то $i_c(PSL_3(q)) = 5$ при $n \equiv 1 \pmod 3$ и $i_c(PSL_3(q)) = 6$ при $n \equiv 0$ или $2 \pmod 3$.

В группах $PSL_2(q)$ один класс сопряженных инволюций, поэтому для них $i = i_c = 5$ при $q \neq 7,9$, а если $q = 7,9$, то $i = i_c = 6$ в силу изоморфизмов $PSL_2(7) \cong PSL_3(2)$, $PSL_2(9) \cong A_6$ и указанных выше результатов.

Таким образом, задача А еще далека от полного решения, а задачу Б осталось рассмотреть только для групп

$$PSL_4(2^m),\ PSU_4(2^{2m}),\ PSU_3(p^{2m}),\ \ p > 2$$

(с учетом изоморфизма $PSp_4(3) \cong PSU_4(4)$).

Порождающие мультиплеты линейных групп над Z

Здесь рассматриваются аналоги вопросов Б и В для групп SL_n, PSL_n, GL_n, PGL_n над кольцом целых чисел Z.

Группу G будем называть $(2,2,2)$-*порожденной* ($(2\times 2,2)$-*порожденной*), если она порождается тремя инволюциями (соответственно тремя инволюциями, две из которых перестановочны).

В 1890 г. Р. Фрике и Ф. Клейн [16] установили, что группа $PSL_2(Z)$ является свободным произведением групп порядка 2 и 3. Группа $SL_2(Z)$ имеет единственную инволюцию $diag(-1,-1)$. Поэтому группы $SL_2(Z)$ и $PSL_2(Z)$ не порождаются никаким множеством инволюций. М. Тамбурини и П. Цука [17] показали, что группа $SL_n(Z)$ при $n \geq 14$ является $(2\times 2,2)$-порожденной. Автор [18] доказал, что группа $PSL_n(Z)$ тогда и только тогда $(2\times 2,2)$-порождена, когда $n \geq 5$. В [19] методом работы [18] установлен аналогичный результат и для группы $GL_n(Z)$. Порождающие множества инволюций линейных групп размерности 2 и 3, 4 рассматривались соответственно в [20] и [21].

Суммируя приведенные выше результаты и учитывая, что в [18] порождающие инволюции группы $PSL_n(Z)$ при $n \neq 2(2r+1)$ выбирались из $SL_n(Z)$, получаем следующее утверждение.

Для групп SL_n, PSL_n, GL_n, PGL_n над кольцом целых чисел ответы на вопросы об их $(2,2,2)$ и $(2\times 2,2)$-порождаемости, а также на вопрос о минимальном числе порождающих инволюций, произведение которых равно 1, известен, исключая лишь группы SL_6 и SL_{10}. Результаты собраны в табл. 1.

Таблица 1

G	$(2,2,2)$	$(2\times 2,2)$	$i(G)$
SL_2	−	−	−
PSL_2	−	−	−
GL_2	+	−	6
PGL_2	+	+	5
$SL_n,\ PSL_n,\ GL_n,\ PGL_n,\ n=3,4$	+	−	6
$SL_n,\ n\geq 5,\ n\neq 6,10$	+	+	5
$SL_6,\ SL_{10}$	?	?	?
$PSL_n,\ GL_n,\ PGL_n,\ n\geq 5$	+	+	5

В следующем параграфе доказывается, что $i(SL_6(Z))\geq 6$ и, следовательно, группа $SL_6(Z)$ не является $(2\times 2,2)$-порожденной .

Аналоги вопросов Б и В представляют интерес для всех групп Шевалле над над кольцом целых чисел. В частности, в "Коуровской тетради" автором записан следующий вопрос.

Какие присоединенные группы Шевалле (нормального типа) над кольцом целых чисел Z порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны? ([6, вопрос 15.67])

Неравенство Скотта и его применение

Пусть неприводимая подгруппа G общей линейной группы $GL_n(K)$ над полем K порождается элементами $g_1,...,g_k$ с условием $g_1...g_k=1$. Через $d(g_i)$ обозначим размерность подпространства неподвижных элементов $V_n(g_i)=\{v\in V_n \mid g_i v=v\}$, где V_n — линейное пространство размерности n над полем K. В силу результата Л.Л. Скотта [22, теорема 1] выполняется неравенство

$$d(g_1)+...+d(g_k)\leq (k-2)n. \qquad (1)$$

Следующий результат получен в [12], здесь приводится короткое его доказательство с применением неравенства (1).

Теорема 1. $i(PSL_3(2^n))=i(PSU_3(2^{2n}))=6$.

Доказательство. Группы $SL_3(2^n)$ и $GL_3(2^n)$ имеют по одному классу сопряженных инволюций с представителем

$$g=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

Очевидно, $d(g)=2$. Отсюда любая неприводимая подгруппа из $GL_3(2^n)$ не может порождаться пятью инволюциями, произведение которых равно единице, в силу неравенства (1). Центр группы $GL_3(2^n)$ нечетен, поэтому для групп $PSL_3(2^n)$, $PSU_3(2^{2n})$ число $i(G)$ равно пяти тогда и только тогда, когда оно равно пяти для некоторых их (неприводимых) прообразов в $GL_3(2^n)$. Остается заметить, что для конечной простой группы G, отличной от $PSU_3(9)$, справедливы неравенства $5\leq i(G)\leq 6$. Теорема доказана.

Теорема 2. $i(SL_6(Z)) \geq 6$.

Доказательство. Любая инволюция из $SL_6(Z)$ сопряжена в группе $GL_6(C)$ (над полем комплексных чисел) с одной из следующих трех инволюций:

$$a = diag(-1,-1,1,1,1,1),$$

$$b = diag(-1,-1,-1,-1,1,1),$$

$$c = diag(-1,-1,-1,-1,-1,-1).$$

Ясно, что если элементы $g_1,...,g_k$ из $GL_6(C)$ порождают неприводимую подгруппу, то элементы $\pm g_1,...,\pm g_k$ также будут порождать неприводимую подгруппу. Очевидно, $d(a)=4$, $d(b)=2$, $d(c)=0$, $d(bc)=4$. Поэтому $d(g_1)+...+d(g_5)\geq 20$, если $g_1,...,g_5$ являются инволюциями из $SL_6(C)$ и их произведение равно единице. Если подгруппа, порожденная элементами $g_1,...,g_5$ неприводима, то правая часть неравенства (1) равна 18. Таким образом, $i(SL_6(Z))\geq 6$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие. Группа $SL_6(Z)$ не порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №09-01-00717.

Библиографический список

1. **Wagner, A.** The minimal number involutions generating some threedimensional groups / A. Wagner // Boll. Un. Mat. Ital. 1978. Vol. A 15, .5. P. 431–439.
2. **Miller, G.** On the groups generated by two operators /G. Miller // Bull. Amer. Math. Soc. 1901. Vol. 7. P. 424–426.
3. **Dala Volta, F.** Grouppi sporadici generati da tre in involuzion / F. Dala Volta // RILS A 119. 1985. P. 65–87.
4. **Malle, G.** Generation of classical groups / G. Malle, J. Saxl, T. Weigel // Geom. Dedicata. 1994. Vol. 22, .2. P. 675–685.
5. **Nuzhin, Ya.N.** Generating elements of simple groups and their applications / Ja.N. Nuzhin // Proceedings of III International Conference on algebra of memory M.I.Kargapolov (23-28 August, 1993) – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1996. P. 101–120.
6. Коуровская тетрадь (Нерешенные вопросы теории групп). – 17-е изд., дополненое. – Новосибирск: ИМ СО РАН, 2010.
7. **Нужин, Я.Н.** Порождающие тройки инволюций групп Шевалле над конечным полем характеристики 2 // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, 2. С. 192–206.
8. **Нужин, Я.Н.** Порождающие тройки инволюций знакопеременных групп // Математические заметки. 1990. Т. 51, 4. С. 91–95.
9. **Нужин, Я.Н.** Порождающие элементы групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики. I // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, 1. С. 77–96.
10. **Нужин, Я.Н.** Порождающие элементы групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики. II // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, 4. С. 422–440.
11. **Мазуров, В.Д.** О порождении спорадических простых групп тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, 1. С. 193–198.
12. **Дубинкина (Моисеенкова), Т.В.** Об одном свойстве групп $PSL_3(2^n)$, $PSU_3(2^{2n})$ // Вестник Красноярского гос. техн. ун-та. – Красноярск: КГТУ, 1999. Вып. 16. С. 19–34.

13. **Тимофеенко, А.В.** О строго вещественных элементах конечных групп // Фунд. и прикл. матем. 2005. Т. 11, 2. С. 209–218.
14. **Шмидт, В.А.** О порождающих множествах инволюций знакопеременных и спорадических групп // Материалы XXXIV науч. студ. конф.: сб. ст. – Красноярск: КГУ, 2001. С. 139–144. (J.Ward, PhD Thesis, QMW, 2009)
15. **Ward, J.M.** Generation of simple groups by conjugate involutions / J.M. Ward. PhD Thesis. – Queen Mary college, University of London, 2009.
16. **Fricke, R.** Vorlesungen uber die Theore der Elliptischen Modul Funktionen / R. Fricke, F. Klein. – B. 1,2. – Leipzig: Teubner, 1890, 1892.
17. **Tamburini, M.C.** Generation of Certain Matrix Groups by Three Involutions, Two of Which Commute / M.C. Tamburini, P. Zucca // J. of Algebra. 1997. Vol. 195, 2. P. 650–661.
18. **Нужин, Я.Н.** О порождаемости группы $PSL_n(Z)$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны //Владикавказский матем. журнал. 2008. Т. 10. Вып. 1. С. 68–74.
19. **Ахмедова, Ш.А.** Порождающие мультиплеты группы $GL_n(Z)$ / Ш.А. Ахмедова, Я.Н. Нужин // Алгебра, логика и приложения: труды межд. алгебраической конф. – Красноярск. 20010. С. 70.
20. **Нужин, Я.Н.** Порождающие тройки инволюций размерности 2 над кольцом целых чисел /Я.Н. Нужин, И.А. Тимофеенко // Владикавказский матем. журнал. 2009. Т. 11. Вып. 4. С. 59–62.
21. **Моисеенкова, Т.В.** Порождающие мультиплеты инволюций групп $SL_n(Z)$ и $PSL_n(Z)$ // Труды института математики и механики УрО РАН. Т. 16. №3. 2010. С. 195–198.
22. **Scott, L.L.** Matricies and cohomology // Ann. of Math. V. 5. 1977. С. 195–198.

Дата поступления
в редакцию 20.10.2011

Ya.N. Nuzhin

GENERATING MULTIPLES INVOLUTIONS

We give a brief overview of the results about generating sets of involutions with certain properties of finite simple groups and linear groups over the ring of integers Z. Using the Scott inequality it is found the minimal number of involutions $i(G)$ of a group *G*, whose product is equal to unit, when *G* coincides with one of the groups $PSL_3(2^n)$, $PSU_3(2^{2n})$, $SL_6(Z)$.

Key words: Finite simple group, linear group, ring of integers, generating triples of involutions.