

УДК 534-143

Е.Ф.Орлов

ПОЛЕ МНОГОКРАТНЫХ ОТРАЖЕНИЙ В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Дается асимптотическое решение известного интегрального представления поля в двухслойной среде как суммы интегралов-полей многократных отражений сферической волны от границ слоя. Решение допускает при описании поля использование картины мнимых источников, число которых зависит от расстояния и определяется углом полного внутреннего отражения от дна.

Ключевые слова: акустическая модель океана, акустическое поле в двухслойной среде, метод мнимых источников.

Введение

Двухслойная среда – однородный жидкий слой на однородном жидком полупространстве с иными значениями плотности и скорости звука — является простейшей акустической моделью океана [1, 2]. Эта модель, тем не менее, отражает основные и существенные особенности распространения волн в подводной акустике и широко используется при математическом моделировании в этой области. Для описания акустического поля в двухслойной среде используется впервые полученное К. Пекерисом [2] решение в форме нормальных волн. Этот подход получил признание и широко используется как единственный при описании низкочастотного поля в мелкой воде. Заметим, что для идеального волновода с абсолютно отражающими границами, который является, по существу, частным случаем двухслойной среды, наряду с модовым представлением поля используется и эквивалентное ему представление поля суммой полей мнимых источников [1–4]. Заметим также, что некоторые имеющиеся экспериментальные данные по распространению звука в мелком море свидетельствуют о допустимости использования при их описании картины мнимых источников. Ввиду важности проблемы возникает необходимость рассмотрения вопроса о возможной применимости метода изображений (мнимых источников) или метода многократных отражений при описании низкочастотных полей в двухслойных средах.

В работе К. Пекериса [2] путем формального решения волнового уравнения с заданными условиями на границах получено точное интегральное представление поля гармонического источника в двухслойной среде и проанализированы два пути его решения. Первый путь дал результат — модовое представление поля. Вторым — дал представление поля в форме суммы интегралов, описывающих поля сферических волн, распространяющихся в слое при многократном отражении от границ.

В настоящей работе показана возможность решения интегралов, входящих в эту сумму, для случая дальнего поля; на этой основе дан метод описания поля в двухслойной среде как суммы многократных отражений от границ, допускающий использование картины мнимых источников.

Интегральное представление поля в форме многократных отражений

Интегральное представление поля в двухслойной среде известно [1, 2]. В работе К. Пекериса [2] оно получено формальным решением волнового уравнения для поля гармонического источника в следующем виде:

$$P(\omega, r, z) = 2 \int_0^{\infty} J_0(kr) \sin \frac{\gamma z_0}{\gamma} \left[\frac{\gamma \cos(H-z) + i b \gamma_1 \sin(H-z)}{\gamma \cos \gamma H + i b \gamma_1 \sin H} \right] k dk. \quad (1)$$

Здесь $(0, z_0)$, (r, z) – координаты точек источника и приемника; H – глубина слоя; $\kappa = \frac{\omega}{c} \sin \theta$, ω – круговая частота; $\omega/c = k$ – волновое число; θ – угол падения волны на границу раздела сред; ρ, ρ_1, c, c_1 — плотности и скорости звука в слое и в дне; $b = \rho/\rho_1$,

$$\gamma = \sqrt{(\omega/c)^2 - \kappa^2}, \quad (2)$$

$$\gamma_1 = \sqrt{(\omega/c_1)^2 - \kappa^2}. \quad (3)$$

Выражение (1) справедливо для области $z_0 < z < H$ и для области $0 < z < z_0$, но после замены z_0 на z . Интеграл (1) имеет решение в форме суммы нормальных волн.

Мы рассмотрим второй возможный путь решения, обозначенный К. Пекерисом как «лучевая теория» [2].

Использование выражения для коэффициента отражения от дна в виде

$$V = \frac{\gamma - b\gamma_1}{\gamma + b\gamma_1}, \quad (4)$$

которое получается из известного выражения

$$V = \frac{\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} \cos \theta - \sqrt{1 - \left(\frac{c_1}{c}\right)^2 \sin^2 \theta}}{\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} \cos \theta + \sqrt{1 - \left(\frac{c_1}{c}\right)^2 \sin^2 \theta}}, \quad (5)$$

с учетом (2)–(4) можно представить (1) в виде ряда [2]:

$$\begin{aligned} P(\omega, r, z, z_0) = & \int_0^\infty J_0(\kappa r) \frac{i}{\gamma} \left\{ \exp(i\gamma(z - z_0)) - \exp(i\gamma(z + z_0)) \right\} + \\ & + V \left[\exp(i\gamma(z - z_0 + 2H - 2z)) - \exp(i\gamma(z + z_0 + 2H - 2z)) - \right. \\ & \left. - \exp(i\gamma(z - z_0 + 2H)) + \exp(i\gamma(z + z_0 + 2H)) \right] + V^2 [\dots] + \dots \} \kappa d\kappa. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение (6) является точным решением задачи. Первый член суммы (6) представляет собой прямую волну от источника к приемнику. Второй — волну, отраженную от поверхности и приходящую в приемник сверху. Четверка членов в квадратных скобках с множителем V — четверку волн, имеющих однократное отражение от дна. Первый из них — волну, ушедшую от источника вниз и пришедшую снизу, второй — волну, ушедшую вверх, отраженную от поверхности, дна и пришедшую снизу. Третий — волну, ушедшую вниз, отраженную от дна, поверхности и пришедшую сверху. Четвертый — волну, ушедшую вверх и имеющую на своем пути к приемнику одно отражение от дна и два отражения от поверхности и т.д.

На рис. 1 изображена схема пути распространения сферической волны при многократных отражениях от границ и схема замены его прямым путем от мнимого источника к приемнику. Введем номера мнимых источников j . Пусть $j > 0$ для мнимых источников, дающих волны, приходящие в приемник снизу, и $j < 0$ — сверху. Тогда очевидно, что $-\infty < j < \infty$ и

$$j = s_j + l_j, \quad (7)$$

где s_j – число отражений от поверхности; l_j – от дна на пути от мнимого источника номера j . Удобно считать, что для мнимых источников, лежащих на отрицательной полуоси z , s_j и

l_j – отрицательные величины. В связи с этим далее снабдим эти величины звездочками, которые не будут ставиться, если речь пойдет об абсолютных значениях l_j^* и s_j^* . Так что $|l_j^*| = l_j$, $|s_j^*| = s_j$. Если j – четное число, то:

$$l_j^* = s_j^* = j / 2. \tag{8}$$

Если j – нечетное число, то:

$$l_j^* = (j+1)/2, \quad s_j^* = (j-1)/2. \tag{9}$$

Координаты мнимых источников в принятых обозначениях будут:

$$z_j = 2Hl_j^* + (-1)^j z_0. \tag{10}$$

Длина пути по линии от мнимого источника номера j до приемника:

$$R_j = r / \sin \theta_j = \sqrt{r^2 + \Delta z_j^2}, \tag{11}$$

где $\Delta z_j = |z_j - z|$, θ_j – угол между осью z и линией, соединяющей источник номера j с приемником.

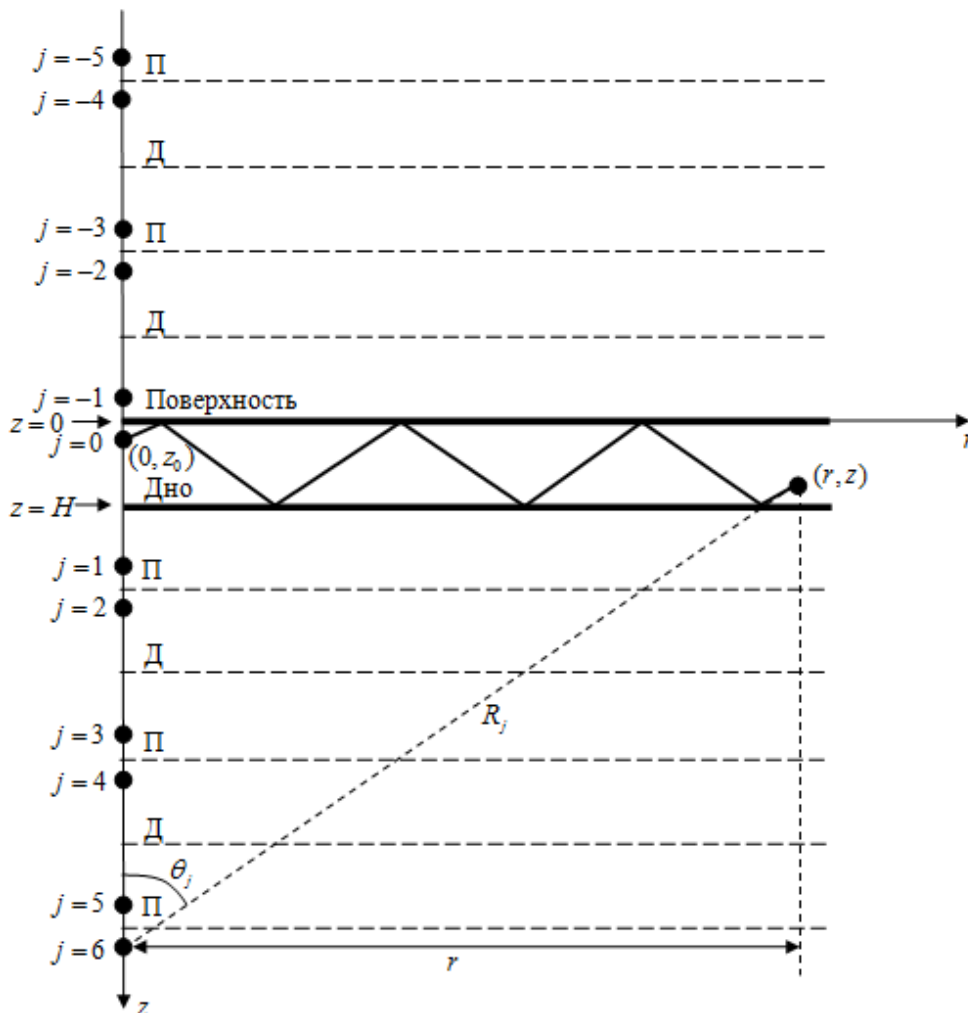


Рис. 1. Картина мнимых источников в слое, глубиной H :

$(0, z_0)$, (r, z) – координаты источника и приемника; $(0, z_j)$ – координаты мнимых источников, $-\infty < j < \infty$; значки Д и П означают изображения плоского дна и поверхности слоя. Пунктир – путь волны от мнимого источника к приемнику, $R_j = r / \sin \theta_j$

В принятых обозначениях комплексную амплитуду поля (6) можно записать так:

$$P(\omega, r) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} P_j(\omega, r),$$

где

$$P_j(\omega, r) = \int_0^{\infty} (-1)^{s_j} V_j^{l_j} J_0(\kappa r) \exp(i\gamma\Delta z_j) \frac{i\kappa}{\gamma} d\kappa. \quad (12)$$

Поле в дальней зоне

Преобразуем интеграл (12), [3] используя соотношения:

$$J_0(\kappa r) = \frac{1}{2} [H_0^{(1)}(\kappa r) + H_0^{(2)}(\kappa r)];$$

$$H_0^{(2)}\left(\kappa r \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right) = -H_0^{(1)}(\kappa r),$$

где $H_0^{(1)}$ и $H_0^{(2)}$ — функции Ханкеля первого и второго рода. Получим [3]:

$$P_j(\omega, r) = \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^{s_j} V_j^{l_j} H_0^{(1)}(\kappa r) \exp(i\gamma\Delta z_j) \frac{i\kappa}{2\gamma} d\kappa. \quad (13)$$

Далее нас будет интересовать поле на больших удалениях от источника. Воспользуемся асимптотой $H_0^{(1)}(\kappa r)$ при $\kappa r \gg 1$:

$$H_0^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa r}} \exp\left(i\kappa r - i\frac{\pi}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{8i\kappa r} + \dots\right). \quad (14)$$

Сохраним первый член в разложении (14) и получим:

$$P_j(\omega, r) = \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^{s_j} V_j^{l_j} \frac{\sqrt{\kappa} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi r \gamma}} \exp(iw_j(\kappa)) d\kappa. \quad (15)$$

Здесь

$$w_j(\kappa) = \kappa r + \gamma\Delta z_j = R_j(\kappa \sin \theta_j + \gamma \cos \theta_j). \quad (16)$$

Мы пришли к интегралу вида [1, 3]:

$$P_j(\omega, r) = \int_{-\infty}^{\infty} F_j(\kappa, r) \exp(iw_j(\kappa, \omega, r)) d\kappa, \quad (17)$$

где

$$F_j(\omega, r) = (-1)^{s_j} V_j^{l_j} \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{2\pi r \gamma}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right). \quad (18)$$

Интеграл (16) вычисляется методом стационарной фазы [1, 5, 6].

Если первая производная от $w_j(\kappa)$ по κ обращается в некоторой точке $\kappa = \kappa_0$ в ноль, то разложение $w_j(\kappa)$ в степенной ряд в окрестности этой точки дает:

$$w_j(\kappa) = w_j(\kappa_0) + w''(\kappa_0) \frac{(\kappa - \kappa_0)^2}{2} + \frac{w'''(\kappa_0)(\kappa - \kappa_0)^3}{6}. \quad (19)$$

Если остаточный член разложения мал, то, ограничиваясь первыми двумя членами, будем иметь:

$$P_j = \int_{-\infty}^{\infty} F_j(\kappa) \exp(iw_j(\kappa_0)) \exp\left(iw''(\kappa_0) \frac{(\kappa - \kappa_0)^2}{2}\right) d\kappa. \quad (20)$$

В нашем случае из (16) с учетом (2), (4), (11) получаем:

$$\kappa_0 = k \sin \theta_j, \quad w_j(\kappa_0) = kR_j, \quad (21)$$

$$w''(\kappa_0) = -\frac{R_j}{k \cos^2 \theta_j}. \quad (22)$$

Эффективный интервал интегрирования в (20) определяется из известного условия [5, 7]:

$$\frac{(\kappa - \kappa_0)^2 w''(\kappa_0)}{2} = \pi. \quad (23)$$

Вклад в величину интеграла при интегрировании по κ вне интервала

$$\Delta\kappa = (\kappa - \kappa_0) = \sqrt{\frac{2\pi}{w''(\kappa_0)}} \quad (24)$$

пренебрежимо мал. Это ключевой момент в работе, открывающий возможность представления поля в двухслойной среде в виде суммы полей мнимых источников. Тогда, если функция $F_j(\kappa)$ на интервале $\Delta\kappa$ может быть представлена ее значением вблизи точки $\kappa = \kappa_0$, т. е. когда:

$$F'_j(\kappa_0)\Delta\kappa \ll F_j(\kappa_0), \quad (25)$$

интеграл (20) дает:

$$P_j = F_j(\kappa_0) \exp(ik_0 R_j) \exp\left(\mp i \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{2\pi k}{\pm R_j}} \cos^2 \theta_j. \quad (26)$$

С учетом (18) получаем:

$$P_j = \frac{(-1)^{s_j} V_j^{l_j}}{R_j} \exp(ikR_j). \quad (27)$$

Мы получили, что поле в дальней зоне при $\kappa r \gg 1$ при выполнении условий (24), (25) можно представить в виде

$$P(\omega, r) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_j(r, z) \exp(i\omega\tau_j), \quad (28)$$

где

$$A_j(r, z, z_0) = \frac{(-1)^{s_j} V_j^{l_j} \sin \theta_j}{r}, \quad \tau_j = \frac{r}{c \sin \theta_j}. \quad (29)$$

Оценим выполнимость основных условий применимости формулы (28) для случая распространения волн в двухслойной среде. В этом случае коэффициент отражения от дна, определяющий зависимость $F_j(\kappa)$, дается выражением (5).

Основное требование, которое должно быть выполнено, — это малость изменения функции $F_j(\kappa)$ на интервале $\Delta\kappa$ (23). Оценим величину этого интервала. Имея ввиду (21), (22), напомним:

$$\Delta\kappa = \kappa - \kappa_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{\pm w''(\kappa_0)}} = \sqrt{\frac{2\pi k}{R_j}} \cos \theta_j,$$

$$\Delta\kappa = k \sqrt{\frac{2\pi k}{k^2 R_j}} \cos \theta_j = k \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \cos \theta_j.$$

Эффективный интервал углов $\Delta\theta = \Delta\theta_{\text{ef}}$ при интегрировании по переменной $\kappa = k \sin \theta$ составляет:

$$\sin \theta_{\text{ef}} - \sin \theta_j = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \sin \theta_j \cos \theta_j, \quad (30)$$

где λ — длина волны источника.

Если учесть, что нас интересует поле на дистанции $r \sim (10^3 - 10^4)\lambda$ и более, то интервал интегрирования будет на порядок, на два менее диапазона значений κ .

Рассмотрим поведение функции $F(\kappa)$ для двухслойной среды во всем диапазоне изменения κ : $0 \leq \kappa \leq k$, т.е. в диапазоне углов: $\pi/2 > \theta_j \geq 0$. Поведение $F(\kappa)$ определяется угловой зависимостью коэффициента отражения от дна $V(\kappa)$, (4), (5). Эта зависимость представляет собой своего рода z -функцию ([1], с. 12). При $0 \leq \kappa \leq k_1$ модуль коэффициента отражения меньше единицы ($|V| < 1$). Здесь $\kappa_1 = k \sin \theta_1$, где θ_1 – граничный угол полного внутреннего отражения, равный $\theta_1 = \arcsin n$, где $n = c/c_1$, т.е. $\kappa_1 = kn = \omega/c_1$. При $k_1 < \kappa < k$ $|V| = 1$ и фаза есть монотонная функция, имеющая свои значения $\varphi(\kappa = k_1) = 0$ и $\varphi(\kappa = k) = \pi$, т.е.:

$$V = \exp(i\varphi), \quad \varphi = -2 \operatorname{arctg} \frac{b\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\cos \theta}. \quad (31)$$

Область распространяющихся в слое волн, не имеющих потерь при отражениях, ограничена интервалом $k_1 \leq \kappa \leq k$. На границах этой области при $k_1 \pm \Delta\kappa$ и $k \pm \Delta\kappa$ модуль коэффициента отражения терпит резкие изменения и отраженное поле при этих значениях нельзя представить в форме (27) [1, 3]. Вкладом результата интегрирования в (15) по этим областям с углами вблизи особых точек (31) можно пренебречь. Следовательно, в сумме (28) необходимо учесть только те члены, для которых:

$$k_1 + \Delta\kappa < \kappa_j < k - \Delta\kappa. \quad (32)$$

В сумме (28) остается $2(N - M)$ членов, где N определяется условием $\theta_N > \theta_1 + \Delta\theta$, а M определяется из условия $\theta_M < \pi/2 - \Delta\theta$.

Для двухслойной среды формула (28) будет иметь вид:

$$P(\omega, r, z, z_0) = \sum_{j=-N}^{+N} A_j(r, z, z_0) \exp(i\omega\tau_j(r, z, z_0)). \quad (33)$$

Здесь диапазон номеров мнимых источников определяется из условий $\theta_N \geq \arcsin(c/c_1) - \Delta\theta_{\text{ef}}$; $\theta_M < \pi/2 - \Delta\theta_{\text{ef}}$, где эффективный интервал углов $\Delta\theta_{\text{ef}}$ зависит от отношения λ/r (30);

$$A_j(r, z, z_0) = \frac{(-1)^{s_j} \exp(i\varphi_j l_j)}{r} \sin \theta_j; \quad (34)$$

$$\tau_j = \frac{R_j}{c} = \frac{r}{c \sin \theta_j} = \frac{\sqrt{r^2 + \Delta z_j^2}}{c}; \quad (35)$$

фаза φ_j отраженной от дна волны дается выражением (31) с заменой θ на θ_j .

Заключение

Представление поля в двухслойной среде в форме многократных отражений (33) эквивалентно модовому представлению. Оно расширяет возможности моделирования и интерпретации экспериментальных результатов, в частности, по исследованию явлений интерференции широкополосного звука в среде, частотно-фазовой и пространственно-временной структур поля импульсных сигналов.

Библиографический список

1. **Бреховских Л.М.** Волны в слоистых средах / Л.М. Бреховских. – М.: Наука, 1973. – 344 с.
2. **Пекерис К.** Теория распространения звука взрыва в мелкой воде // Распространение звука в океане: сб. ст.: [пер. с англ. под ред. Л.М. Бреховских]. – М.: Издательство иностранной литературы, 1951. С. 48–156.

3. **Бреховских, Л.М.** Теоретические основы акустики океана / Л.М. Бреховских, Ю.П. Лысанов. – М.: Наука, 2007. – 370 с.
4. **Толстой, И.** Акустика океана / И. Толстой, К.С. Клей. – М.: Мир, 1969. – 304 с.
5. **Зверев, В.А.** Радиооптика (преобразования сигналов в радио и оптике) / В.А. Зверев.– М.: Советское радио, 1975. – 304 с.
6. **Вакман, Д.Е.** Асимптотические методы в линейной радиотехнике / Д.Е. Вакман. – М.: Советское радио, 1962. – 248 с.
7. **Янке, Е.** Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 342 с.

*Дата поступления
в редакцию 24.001.2013*

E.F. Orlov

THE FIELD OF THE FREQUENTATIVE REFLECTIONS IN TWO-LAYER AMBIENCE

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

The asymptotic decision of the known integral presentation of the field is Given in two-layer ambience as amounts integral-flap of the frequentative reflections of the spherical wave from borders layer. The Decision allows at description of the field use the picture of the rumpled sources, which number depends on distances and is defined углом of the full internal reflection from bottom.

Key words: acoustic model of the ocean, acoustic field in two-layer ambience, method of the rumpled sources.