

УДК 537.86

Н.В. Асеева¹, Е.М. Громов¹, О.В. Подчищаева², В.В. Тютин¹**ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ В РАМКАХ РАСШИРЕННОГО
НЕОДНОРОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА
С УЧЕТОМ НЕЛОКАЛЬНОСТИ НЕЛИНЕЙНОСТИ**Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики¹,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского²

Показано, что уменьшение волнового числа пакетов, обусловленное пространственным индуцированным рассеянием Рамана, можно компенсировать возрастающими в пространстве линейной дисперсией второго порядка и кубичной нелинейностью, увеличивающими волновое число пакета. Аналитически найден новый класс солитонов, существование которых обусловлено равновесием индуцированного рассеяния и неоднородности среды. Аналитически найден режим динамического равновесия рассеяния и неоднородности среды, при котором параметры солитона меняются во времени периодически. Аналитические результаты подтверждены численным счетом.

Ключевые слова: расширенное нелинейное уравнение Шредингера, солитон, пространственное вынужденное рассеяние Рамана, неоднородность, линейная дисперсия второго порядка, кубичная нелинейность, аналитическое исследование, численный эксперимент

Введение

Интерес к солитонам, как локализованным, стационарным и устойчивым волновым пакетам, обусловлен их возможностью сохранять без изменений свою форму в течение длительного времени. Солитонные решения возникают в нелинейных моделях различных областей физики, например, при исследовании оптических импульсов в волоконно-оптических линиях связи, электромагнитных и ленгмюровских волн в плазме, поверхностных волн на глубокой воде [1–4].

Динамика высокочастотных (ВЧ) волновых пакетов довольно большой протяженности хорошо описывается классическим нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) [5, 6]. Солитонное решение в рамках этого уравнения возникает в результате равновесия линейной дисперсии второго порядка и кубичной нелинейности.

Динамика ВЧ волновых пакетов малой протяженности описывается в рамках нелинейного уравнения Шредингера третьего порядка (НУШ-3) [7–13], учитывающего члены третьего порядка малости: нелинейную дисперсию (самоукручение) [14], вынужденное рассеяние Рамана [15, 16] и дисперсию третьего порядка. В рамках НУШ-3 без вынужденного рассеяния Рамана солитонное решение возникает в результате равновесия линейной дисперсии третьего порядка и нелинейной дисперсии [17–24]. В [25, 26] были найдены стационарные нелокализованные волны перепада в рамках НУШ-3 без учета линейной дисперсии третьего порядка. Это решение существует в результате равновесия нелинейной дисперсии и вынужденного рассеяния Рамана.

Вынужденное рамановское рассеяние приводит к сдвигу спектра частот солитона в область низких частот [15, 16], что ведет к его разрушению. В работе [27] была рассмотрена компенсация рамановского рассеяния линейным излучением волнового поля малой интенсивности из области ядра солитона. Компенсация рамановского рассеяния в неоднородных средах рассматривалась в следующих случаях: для сред с периодической линейной дисперсией второго порядка [28, 29], для сред со сдвинутой точкой нулевой дисперсии [30] и для волоконных передающих линий связи с убывающей дисперсией [31].

Вынужденное рамановское рассеяние в пространственном представлении (пространственное вынужденное рассеяние Рамана) приводит к сдвигу спектра волнового числа соли-

тона в область малых значений. В то время неоднородность среды также приводит к изменению волнового числа волнового пакета. В частности, в приближении геометрической оптики величина изменения волнового числа в плавно неоднородной среде описывается хорошо известным уравнением $\dot{k} = -\partial\omega/\partial\xi$, где $\omega = \omega(k, \xi, |U|^2)$ - дисперсионное соотношение. При неоднородности линейной дисперсии второго порядка $q(\xi) = -\partial^2\omega/\partial k^2$ скорость изменения волнового числа пропорциональна градиенту дисперсии $\dot{k} = (\partial q/\partial\xi)(k - k_0)^2/2$ и при положительном градиенте дисперсии $\partial q/\partial\xi > 0$ волновое число возрастает. Равновесие между вынужденным пространственным рассеянием Рамана и возрастающей дисперсии второго порядка приводит к стабилизации спектра волнового числа солитона [32]. При неоднородности кубичной нелинейности среды $\alpha(\xi) = -\partial\omega/\partial|U|^2$ скорость изменения волнового числа пропорциональна градиенту нелинейности $\dot{k} = (\partial\alpha/\partial\xi)|U|^2$ и при положительном градиенте нелинейности $\partial\alpha/\partial\xi > 0$ волновое число солитона возрастает. Равновесие между эффектами вынужденного пространственного рассеяния Рамана и возрастающей кубичной нелинейностью также приводит к стабилизации спектра волнового числа солитона.

В данной работе рассмотрена динамика солитона в средах с пространственным вынужденным рассеянием Рамана и неоднородностями как линейной дисперсии второго порядка, так и кубичной нелинейности. Аналитически найдено солитонное решение. Этот солитон существует в результате равновесия вынужденного пространственного рассеяния Рамана и возрастающих дисперсии второго порядка и нелинейности. Найден режим динамического равновесия между вынужденным рамановским рассеянием и неоднородностями среды, при котором существует солитон с периодически изменяющимися во времени параметрами.

Основное уравнение и интегралы

Рассмотрим динамику высокочастотного волнового поля $U(\xi, t)\exp(i\omega t - ik\xi)$ в рамках расширенного НУШ при учете пространственного вынужденного рассеяния Рамана и с неоднородностями как линейной дисперсии второго порядка, так и нелинейности:

$$2i\frac{\partial U}{\partial t} + q(\xi)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha(\xi)U|U|^2 + \mu U\frac{\partial(|U|^2)}{\partial \xi} = 0, \quad (1)$$

где μ - параметр вынужденного рассеяния.

Уравнение (1) при нулевых условиях на бесконечности $U|_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$ имеет следующие интегралы:

– скорость изменения энергии волнового поля:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial q}{\partial \xi} K |U|^2 d\xi, \quad (2)$$

– скорость изменения импульса волнового поля:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} K |U|^2 d\xi = -\frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial |U|^2}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial q}{\partial \xi} \left| \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|^2 d\xi + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} |U|^4 d\xi, \quad (3)$$

– скорость изменения квадрата модуля градиента волнового поля:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|^2 d\xi = -\mu \int_{-\infty}^{+\infty} K \left(\frac{\partial |U|^2}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} K |U|^4 d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha K \frac{\partial |U|^4}{\partial \xi} d\xi, \quad (4)$$

– скорость изменения квадрата градиента интенсивности волнового поля:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial |U|^2}{\partial \xi} \right)^2 d\xi = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} q \frac{\partial^2 |U|^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial (K|U|^2)}{\partial \xi} d\xi, \quad (5)$$

– скорость изменения квадрата интенсивности волнового поля:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |U|^4 d\xi = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} q |U|^2 \frac{\partial (K|U|^2)}{\partial \xi} d\xi, \quad (6)$$

– скорость изменения первого момента интенсивности волнового поля:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \xi |U|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} q K |U|^2 d\xi, \quad (7)$$

где $U = |U| \exp(i\varphi)$ - огибающая волнового поля; $K = \partial \varphi / \partial \xi$ - добавочное локальное волновое число пакета.

Аналитические результаты

При анализе динамики волнового пакета, предположим, что масштабы пространственных неоднородностей и дисперсии второго порядка, и нелинейности среды, и волнового числа K , много больше характерного масштаба огибающей волнового пакета $L_{q,\alpha,K} \gg L_{|U|}$. Тогда приближенное пространственное изменение волнового числа в

окрестности «центра масс» солитона $\bar{\xi} = N^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \xi |U|^2 d\xi$ ($N = \int_{-\infty}^{\infty} |U|^2 d\xi$) можно описать линейной функцией $K(\xi, t) = K(\bar{\xi}) + (\partial K / \partial \xi)_{\bar{\xi}} (\xi - \bar{\xi})$. Тогда из мнимой части уравнения (1) при условии $(\partial |U| / \partial \xi)_{\bar{\xi}} = 0$ можно получить градиент волнового числа:

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \xi} \right)_{\bar{\xi}} = - \left(\frac{2}{q|U|} \frac{\partial |U|}{\partial t} \right)_{\bar{\xi}}. \quad (8)$$

Пространственное изменение волнового числа вызвано изменением во времени амплитуды волнового пакета. Для солитонно - подобных пакетов $N(t) \sim |U(\bar{\xi})| \sqrt{q(\bar{\xi}) / \alpha(\bar{\xi})}$ при учете (2) и (7) мы получаем закон распределения волнового числа:

$$K(\xi, t) = K(\bar{\xi}) \left(1 - \left(\frac{q'(\bar{\xi})}{q(\bar{\xi})} + \frac{\alpha'(\bar{\xi})}{\alpha(\bar{\xi})} \right) (\xi - \bar{\xi}) \right), \quad (9)$$

где $q'(\bar{\xi}) = (\partial q / \partial \xi)_{\bar{\xi}}$ и $\alpha'(\bar{\xi}) = (\partial \alpha / \partial \xi)_{\bar{\xi}}$ - градиенты дисперсии второго порядка и кубичной нелинейности в точке «центра масс» пакета. При учете (9) система (2)–(7) принимает вид:

$$2n \frac{dk}{dt} = -\mu \frac{I_0}{N_0} i + q'(\bar{\xi}) z + \alpha'(\bar{\xi}) \frac{M_0}{N_0} m - 2q'(\bar{\xi}) n k^2, \quad (10)$$

$$\frac{dz}{dt} = \left(2\alpha'(\bar{\xi}) \frac{M_0}{N_0} m + q'(\bar{\xi}) \frac{\alpha(\bar{\xi})}{q(\bar{\xi})} \frac{M_0}{N_0} m - \mu \frac{I_0}{N_0} i \right) k, \quad (11)$$

$$\frac{di}{dt} = \left(2q'(\bar{\xi}) + 3\alpha'(\bar{\xi}) \frac{q(\bar{\xi})}{\alpha(\bar{\xi})} \right) k i, \quad (12)$$

$$\frac{dm}{dt} = \left(2q'(\bar{\xi}) + \alpha'(\bar{\xi}) \frac{q(\bar{\xi})}{\alpha(\bar{\xi})} \right) k m, \quad (13)$$

$$\frac{dn}{dt} = q'(\bar{\xi})kn, \tag{14}$$

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = q(\bar{\xi})k, \tag{15}$$

где $k = K(\bar{\xi})$ - волновое число в «центре масс» волнового пакета; $n = N / N_0$, $i = I / I_0$,

$$z = Z / N_0, \quad m = M / M_0; \quad Z = \int_{-\infty}^{\infty} |\partial U / \partial \xi|^2 d\xi, \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} (\partial |U|^2 / \partial \xi)^2 d\xi, \quad M = \int_{-\infty}^{\infty} |U|^4 d\xi$$

- текущие интегральные характеристики волнового пакета; N_0, M_0, I_0, Z_0 - исходные интегральные характеристики волнового пакета. Система уравнений (10)–(15) имеет состояние равновесия

$$k = 0, \quad \mu I_0 = q'(\bar{\xi}_0)Z_0 + \alpha'(\bar{\xi}_0)M_0. \tag{16}$$

При выполнении (16) интегралы и волновое число волнового пакета во времени не меняются, что соответствует равновесию вынужденного пространственного рамановского рассеяния и неоднородностей среды. Для дальнейшего анализа системы (10) – (15) рассмотрим среды с линейными профилями неоднородности как дисперсии второго порядка, так и кубичной нелинейности: $q'(\bar{\xi}) = q' = \text{const}$, $\alpha'(\bar{\xi}) = \alpha' = \text{const}$. При $q' \neq 0$ система (10) – (15) после замены $\tau = tq'$ сводится к виду

$$2n \frac{dk}{d\tau} = -pi + z + \sigma m - 2nk^2, \tag{17}$$

$$\frac{dz}{d\tau} = (m\delta + 2m\sigma - pi)k, \tag{18}$$

$$\frac{di}{d\tau} = \left(2 + 3\frac{\sigma}{\delta}\right)ki, \tag{19}$$

$$\frac{dm}{d\tau} = \left(2 + \frac{\sigma}{\delta}\right)km, \tag{20}$$

$$\frac{d\delta}{d\tau} = (\sigma - \delta)k, \tag{21}$$

$$\frac{dn}{d\tau} = nk, \tag{22}$$

где $p = \mu I_0 / (q'N_0)$, $\sigma = \alpha' M_0 / (q'N_0)$, $\delta(\bar{\xi}) = \alpha(\bar{\xi})M_0 / (q(\bar{\xi})N_0)$. Уравнения (18)–(21) при учете (22) имеют интегралы:

$$z = -\frac{p}{5}a^3(n^5 - 1) - \frac{3}{4}pa^2b(n^4 - 1) + (a^2\delta_0 - pab^2)(n^3 - 1) + \left(2ab\delta_0 - \frac{p}{2}b^3\right)(n^2 - 1) + \delta_0b^2(n - 1) + z_0,$$

$$\delta = \delta_0\left(a + \frac{b}{n}\right), \quad m = n^2(an + b), \quad i = n^2(an + b)^3, \tag{23}$$

где $\delta_0 = \alpha_0 M_0 / (q_0 N_0)$, $z_0 = Z_0 / N_0$, $q_0 = q(0)$, $\alpha_0 = \alpha(0)$, $a = \sigma / \delta_0$, $b = 1 - a$. При учете (23) система шести уравнений (17)–(22) сводится к системе двух уравнений:

$$2n\left(\frac{dk}{d\tau} + k^2\right) = -pn^2(an + b)^3 + a\delta_0n^2(an + b) - \frac{p}{5}a^3(n^5 - 1) - \frac{3}{4}pa^2b(n^4 - 1) +$$

$$+ (a^2\delta_0 - pab^2)(n^3 - 1) + \left(2ab\delta_0 - \frac{p}{2}b^3\right)(n^2 - 1) + \delta_0b^2(n - 1) + z_0, \tag{24}$$

$$\frac{dn}{d\tau} = kn. \quad (25)$$

При $k = 0$ состояние равновесия системы (24) – (25) достигается при условии

$$p(n^2 - 1)(an + b)^3 + p(an + b)^3 = a\delta_0(n^2 - 1)(an + b) + a\delta_0(an + b) - \frac{p}{5}a^3(n^5 - 1) - \frac{3}{4}pa^2b(n^4 - 1) + (a^2\delta_0 - pab^2)(n^3 - 1) + \left(2ab\delta_0 - \frac{p}{2}b^3\right)(n^2 - 1) + \delta_0b^2(n - 1) + z_0. \quad (26)$$

Условие (26) имеет решение $n = 1$ при $p = p_* = z_0 + a\delta_0$. В этом случае интегралы и волновое число волнового пакета во времени не меняются. Линеаризация системы в области состояния равновесия ($k = 0, n = 1$) приводит к уравнению

$$2d^2k/d\tau^2 + k((a+1)(3z_0 - \delta_0) + 2a^2\delta_0) = 0,$$

которое при условии $\delta_0/3 < z_0 < 3\delta_0$ описывает состояние равновесия типа центр при любом значении a . При условии $\delta_0 - z_0 = p_c(3a^2b/4 + a^3/5 + ab^2 + b^3/2)$ система (24) – (25) имеет два состояния равновесия ($k = \pm|1 - a|\sqrt{\delta_0/2}, n = 0$). Первый интеграл системы (24) – (25) имеет вид:

$$k^2n^2 + \frac{p}{5}a^3(n^6 - 1) + \frac{3}{4}pa^2b(n^5 - 1) + \left(pab^2 - \frac{a^2}{2}\delta_0\right)(n^4 - 1) + \left(\frac{p}{2}b^3 - ab\delta_0\right)(n^3 - 1) + \left(\delta_0 - \frac{3}{4}pa^2b - \frac{p}{5}a^3 - pab^2 - \frac{p}{2}b^3 - z_0\right)(n - 1) - \frac{\delta_0}{2}b^2(n^2 - 1) = k_0^2. \quad (27)$$

Уравнение (27) описывает траектории, проходящие через точку $(k_0, n = 1)$.

Траектории солитонов

Более подробно рассмотрим траектории (27) для начального волнового пакета с нулевым волновым числом $k_0 = 0$ и огибающей классического солитона:

$$U(\xi, t = 0) = \frac{A_0}{\cosh(\xi A_0 \sqrt{\alpha_0/q_0})}. \quad (28)$$

В этом случае $2z_0 = \delta_0 = 2\alpha_0 A_0^2/(3q_0)$, $p = 8\mu\alpha_0 A_0^4/(15q'q_0)$, $\sigma = \alpha' A_0^2/(3q')$, $p_* = z_0(1 + 2a)$, а уравнение (27) преобразуется к виду:

$$k^2 = z_0(b + an)^2 - pn\left(\frac{1}{5}a^3n^3 + \frac{3}{4}ba^2n^2 + b^2an + \frac{1}{2}b^3\right) + \frac{w}{n}, \quad (29)$$

где $w = p(a^3/5 + 3a^2b/4 + b^2a + b^3/2) - z_0$. Уравнение (29) описывает траектории, проходящие через точку ($k = 0, n = 1$). При $n \rightarrow 0$ волновое число ограничено при условии $w \leq 0$. В частности, при условии $w = 0$, соответствующем $p_c(a^3/5 + 3a^2b/4 + b^2a + b^3/2) - z_0 = 0$, уравнение (29) описывает сепаратрисы, идущие от начальной точки в состояние равновесия ($k = -|1 - a|\sqrt{z_0}, n = 0$). При $n \gg 1$, траектории (29) ограничены при условии $pa > 0$. На рис. 1 показано разделение плоскости параметров $(a, p/z_0)$ на области, соответствующие ограниченному и неограниченному траекториям солитона. Величина a_1 получена как решение уравнения $a^3/5 + 3a^2b/4 + b^2a + b^3/2 = 0$.

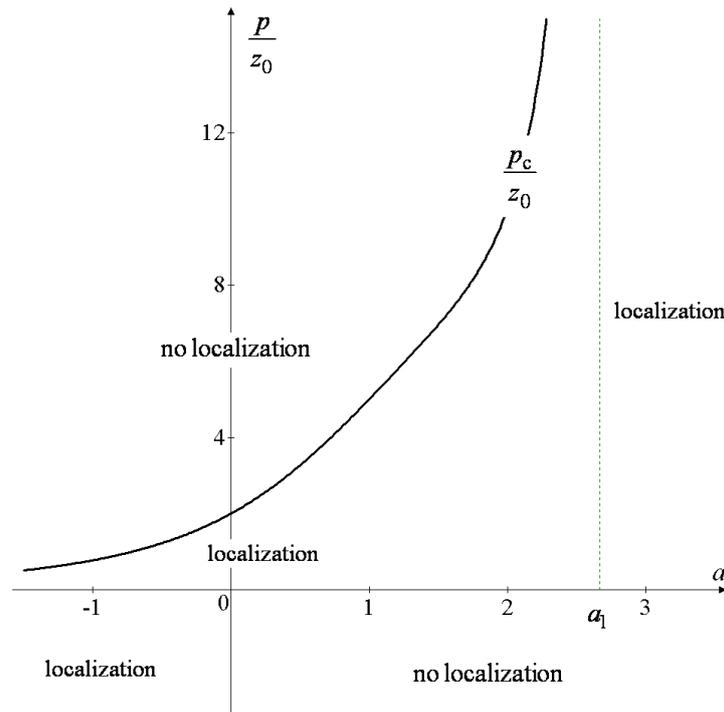


Рис. 1. Разделение плоскости параметров $(a, p/z_0)$ на области, соответствующие локализованным и нелокализованным траекториям солитона

На рис. 2 приведены траектории солитона (29) на плоскости (k, n) при различных значениях a и p . При $a = 1$ (соответствует пропорциональному изменению дисперсии второго порядка и нелинейности среды) уравнение (29) преобразуется к виду $5nk^2 + pn^5 - 5z_0n^3 + (5z_0 - p) = 0$. Траектории солитона в этом случае локализованы при выполнении условия $0 < p \leq 5z_0$ (рис. 2, d). Это соответствует динамическому равновесию вынужденного рамановского рассеяния и пропорционально увеличивающимся дисперсии второго порядка и нелинейности среды. При $p > 5z_0$ вынужденное рамановское рассеяние доминирует, и волновое число солитона уменьшается; при $p < 0$ доминируют пропорционально увеличивающиеся дисперсия второго порядка и нелинейность среды, а волновое число солитона возрастает.

При $a = 0$ (изменяется только дисперсия второго порядка) уравнение (29) сводится к виду $pn^2 + 2n(k^2 - z_0) - (p - 2z_0) = 0$. В этом случае траектории солитона локализованы при выполнении условия $0 < p \leq 2z_0$ (рис. 2, b).

При $q' = 0$ (изменяется только нелинейность среды) система уравнений (10) – (15) преобразуется к системе:

$$2 \frac{dk}{dt} = -\mu \frac{I_0}{N_0} m^3 + \alpha' \frac{M_0}{N_0} m, \tag{30}$$

$$\frac{dm}{dt} = \alpha' \frac{q}{\alpha_0} k. \tag{31}$$

Первый интеграл системы (30)–(31):

$$4k^2 = 4k_0^2 - r(m^4 - 1) + 2\delta_0(m^2 - 1), \tag{32}$$

где $r = \mu I_0 \alpha_0 / (\alpha' N_0 q_0)$.

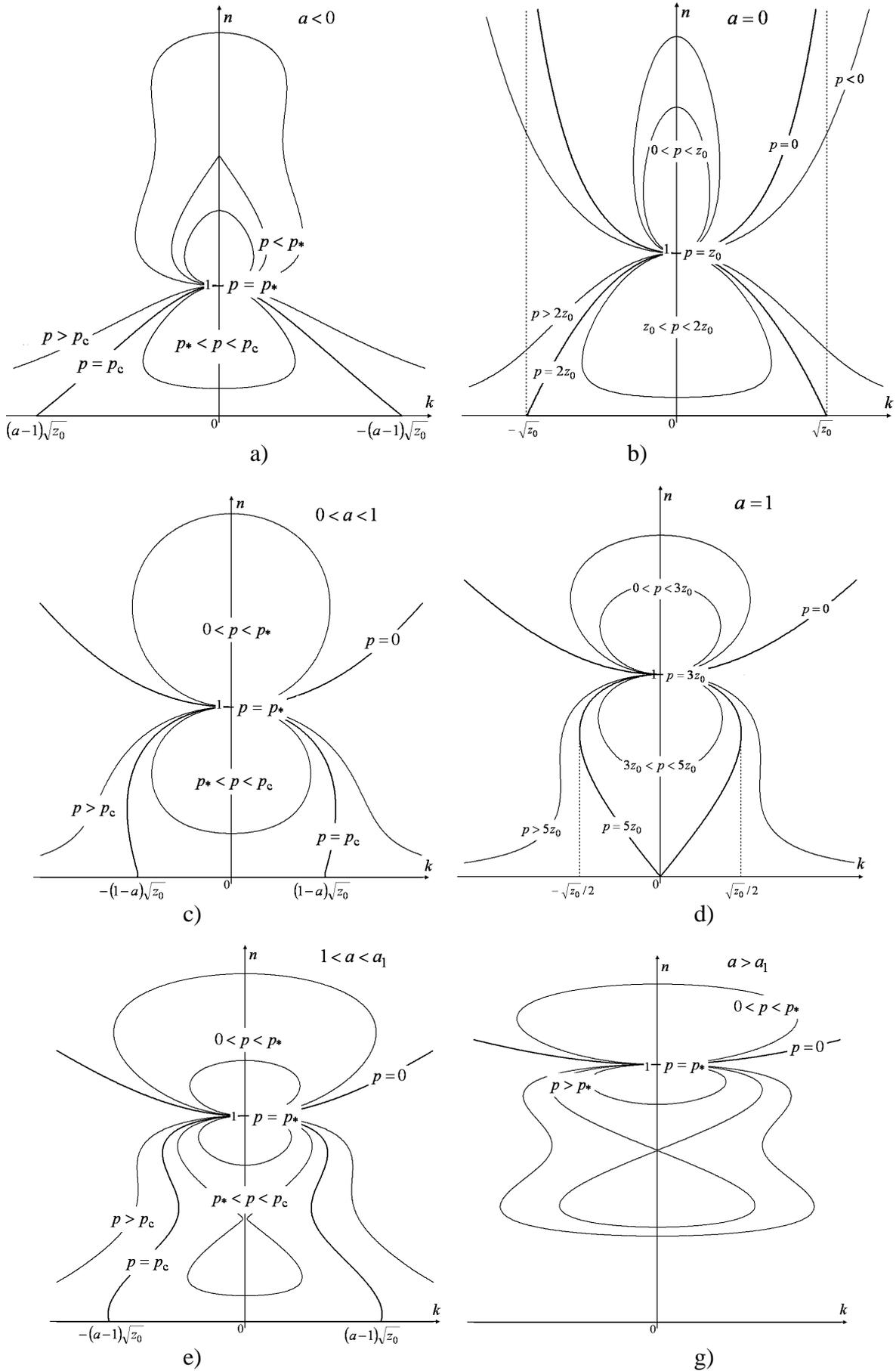


Рис. 2. Траектории солитона (29) при начальных условиях $k_0 = 0$, $n_0 = 1$ и при различных a и p

На рис. 3 показаны траектории, описываемые (32), для начальных условий $k_0 = 0$, $m_0 = 1$ и при различных значениях r .

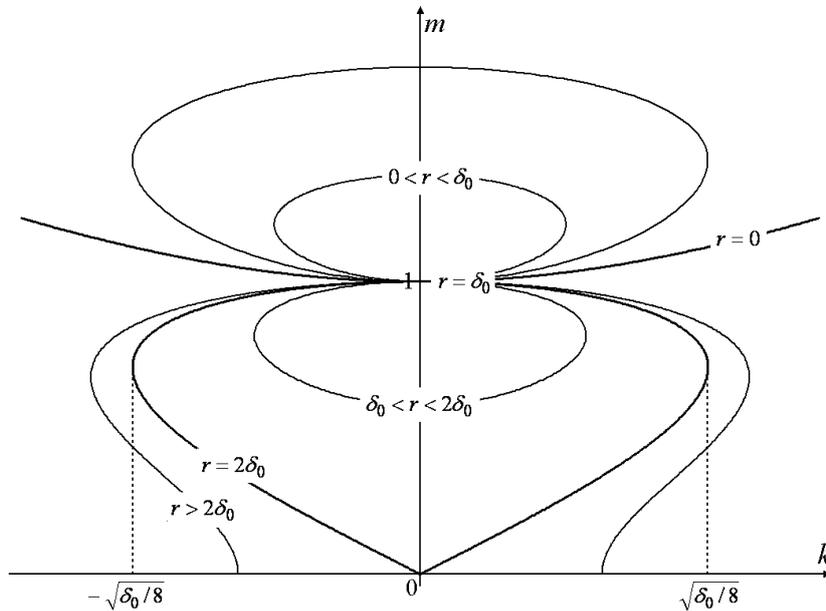


Рис. 3 Траектории (32) при условиях $k(0) = 0$, $m(0) = 1$ и при различных r

При $r = \delta_0$ траектория совпадает с исходной точкой $k = 0, m = 1$. Это соответствует равновесию пространственного вынужденного рамановского рассеяния и возрастающей нелинейности среды. В этом случае интегралы и волновое число волнового пакета постоянны во времени. При $0 < r \leq 2\delta_0$ траектории ограничены. Это соответствует динамическому равновесию пространственного вынужденного рамановского рассеяния и возрастающей нелинейности среды. При $r \leq 0$ возрастающая нелинейность среды доминирует, и волновое число увеличивается. При $r > 2\delta_0$ доминирует пространственное вынужденное рамановское рассеяние, и волновое число уменьшается, а солитон достигает состояния разрушения, чему соответствует достигнутая величина $m = \alpha / \alpha_0 = 0$.

Солитонное решение

Рассмотрим решение уравнения (1) в виде стационарной волны $U(\xi, t) = \psi(\xi) \exp(i\Omega t)$ при линейных профилях дисперсии второго порядка $q(\xi) = q_0 + q' \cdot \xi$ и нелинейности среды $\alpha(\xi) = \alpha_0 + \alpha' \cdot \xi$:

$$-2\Omega\psi + (q_0 + q' \cdot \xi) \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + 2(\alpha_0 + \alpha' \cdot \xi)\psi^3 + \mu\psi \frac{d(\psi^2)}{d\xi} = 0. \tag{33}$$

Примем, что пространственный масштаб неоднородностей как дисперсии второго порядка, так и нелинейности среды много больше характерного масштаба огибающей волнового пакета $L_{q,\alpha} \gg L_\psi$. Принимая во внимание $\epsilon \sim \xi q' \sim \xi \alpha' \sim L_\psi / L_{\alpha,q} \sim \mu \ll \alpha_0, q_0$, решение (33) будем искать в виде $\psi = \psi_0 + \psi_1$, где $\psi_1 \sim \epsilon \psi_0 \ll \psi_0$ - малая величина. Удерживая члены порядка ϵ , получаем:

$$q_0 \frac{d^2\psi_0}{d\xi^2} + 2\alpha_0\psi_0^3 - 2\Omega\psi_0 = 0, \tag{34}$$

$$q_0 \frac{d^2 \psi_1}{d\xi^2} + (6\alpha_0 \psi_0^2 - 2\Omega) \psi_1 = -2\alpha' \psi_0^3 \xi - q' \frac{d^2 \psi_0}{d\xi^2} \xi - \frac{2}{3} \mu \frac{d(\psi_0^3)}{d\xi}. \quad (35)$$

Уравнение (34) имеет решение в виде классического солитона $\psi_0 = A_0 / \cosh(\xi/\Delta)$, где $\Delta = \sqrt{q_0/\alpha_0}/A_0$, $\Omega = \alpha_0 A_0^2/2$. Принимая во внимание решения (34) и используя подстановки $\eta = \xi/\Delta$ и $\Psi = \psi_1 q_0 / (A_0 q'_\eta)$, уравнение (35) принимает вид:

$$\frac{d^2 \Psi}{d\eta^2} + \left(\frac{6}{\cosh^2 \eta} - 1 \right) \Psi = -2(a-1) \frac{\eta}{\cosh^3 \eta} - \frac{\eta}{\cosh \eta} + \frac{5}{4} \frac{\mu}{\mu_*} (1+2a) \frac{\sinh \eta}{\cosh^4 \eta}, \quad (36)$$

где $\mu_* = 5(1+2a)q'_\eta \sqrt{\alpha_0/q_0} / (8A_0)$ - равновесное значение параметра пространственного вынужденного рассеяния Рамана. При условии $\Psi(0) = 0$ уравнение (36) имеет точное решение:

$$\Psi(\eta) = \frac{1}{4 \cosh \eta} \left(4\Psi'(0)\eta + \eta^2 \tanh \eta - 2a(\eta - \tanh \eta) + (1+2a) \frac{\mu}{\mu_*} \tanh \eta \ln(\cosh \eta) + \right) + \frac{(1+2a)}{12} \left(\frac{\mu}{\mu_*} - 1 \right) \tanh^2 \eta \sinh \eta. \quad (37)$$

При $\mu = \mu_*$ решение (37) на бесконечности стремится к нулю $\Psi(\eta \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$. Это солитонное решение существует в результате равновесия пространственного вынужденного рассеяния Рамана и неоднородных как дисперсии второго порядка, так и нелинейности среды. На рис. 4 показаны распределения огибающей волнового пакета $\Psi(\eta)$ при $a = 1$, $\mu = \mu_*$ различных начальных значениях $\Psi'(0)$.

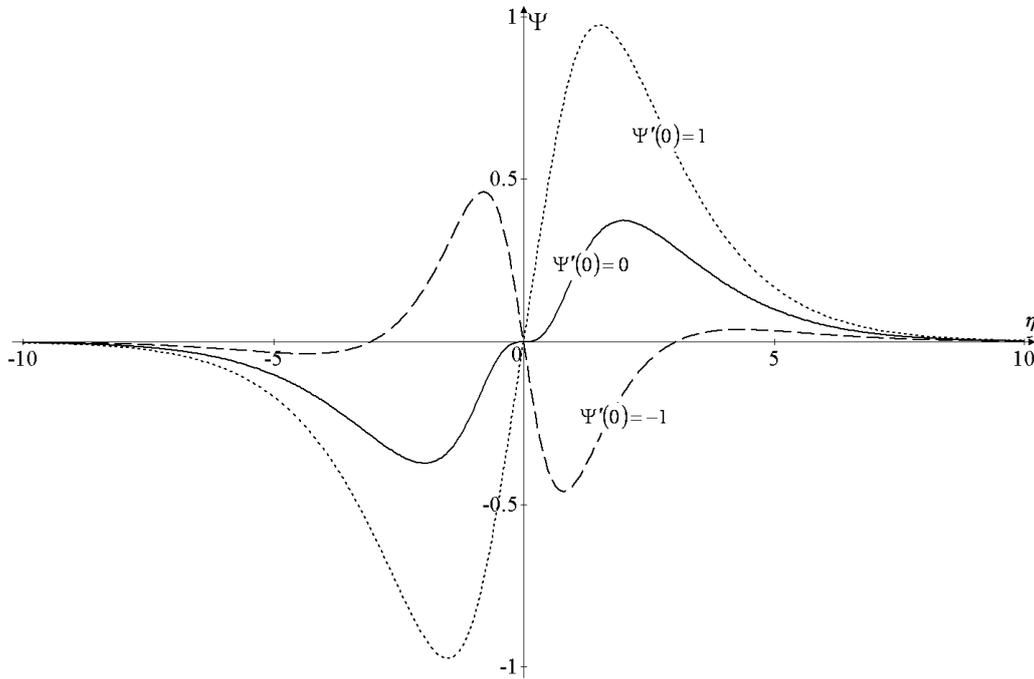


Рис. 4. Распределения $\Psi(\eta)$ при $a = 1$, $\mu = \mu_*$ различных $\Psi'(0)$

При $\mu \neq \mu_*$ решение (37) неограниченно возрастает на бесконечности $|\Psi(\eta \rightarrow \pm\infty)| \rightarrow \infty$. На рис. 5 показаны распределения $\Psi(\eta)$ при $a = 1$, начальных значениях $\Psi(0) = \Psi'(0) = 0$ и при различных μ .

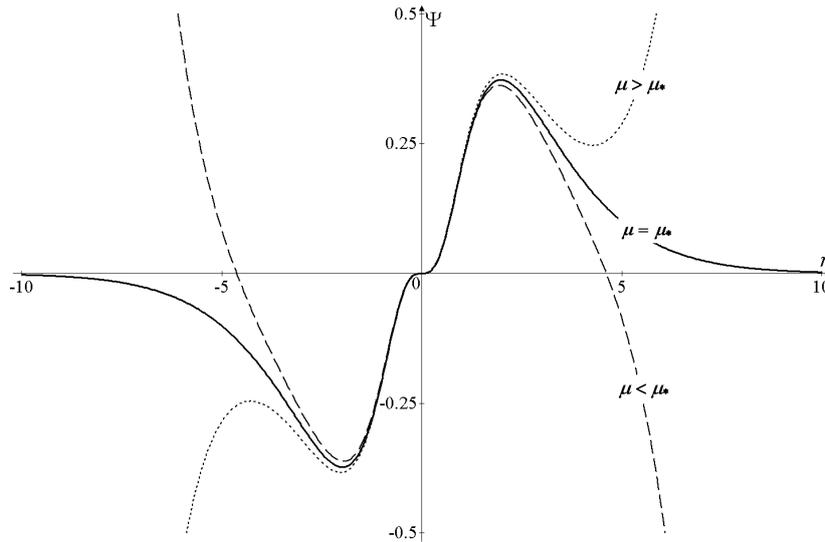


Рис. 5. Распределения $\Psi(\eta)$ при $a = 1$, $\Psi(0) = \Psi'(0) = 0$ и различных μ

Результаты численного эксперимента

Рассмотрим численно начальную задачу динамики волнового пакета $U(\xi, t = 0) = 1/\cosh \xi$ в рамках уравнения (1) при $\alpha(\xi) = 1 + \xi/L_\alpha$, $q(\xi) = 1 + \xi/L_q$ с различными μ , L_q , L_α . Равновесие между пространственным вынужденным рассеянием Рамана и неоднородностями среды достигается при $\mu_* = 5(L_q^{-1} + 2L_\alpha^{-1})/8$.

При $L_q = L_\alpha = 20$ мы имеем $\mu_* = 3/32$. В численном эксперименте импульс при $\mu = 3/32$ на больших временах $t > 10$ стремится к стационарному ограниченному распределению (непрерывная кривая на рис. 6) с нулевым волновым числом. Это распределение совпадает с аналитическим солитонным решением системы (34) – (35) при $\alpha_0 = q_0 = A_0 = 1$, $L_q = L_\alpha = 20$ и $\mu = \mu_*$:

$$|U| = \frac{1}{\cosh \xi} \left(1 + \frac{1}{80} \left(3 \tanh \xi \ln(\cosh \xi) + 2(\tanh \xi - \xi) + \xi^2 \tanh \xi \right) \right).$$

Для сравнения на рис. 6 показан профиль классического солитонного решения $|U| = 1/\cosh \xi$ (пунктирная кривая).

Изменение параметра μ приводит к изменению параметров солитона (волнового числа, амплитуды). На рис. 7 показаны численные (непрерывные кривые) и аналитические (пунктирные кривые) результаты исследования динамики волнового числа k в точке расположения максимума модуля огибающей волнового пакета $|U| = \max$ в виде функции времени t при $L_{\alpha,q} = 20$ и при различных μ . При $\mu < 5/32$ имеет место динамическое равновесие пространственного вынужденного рамановского рассеяния и возрастающих дисперсии второго порядка и нелинейности среды. В этом режиме аналитические и численные результаты находятся в хорошем соответствии. При $\mu = 5/32$ имеет место сепаратрисный режим: волновое число на больших временах стремится к нулю. При $\mu > 5/32$ волновое число неограниченно убывает (результат доминирования вынужденного рассеяния). Такое поведение соответствует полученным ранее аналитическим результатам (рис. 2, d).

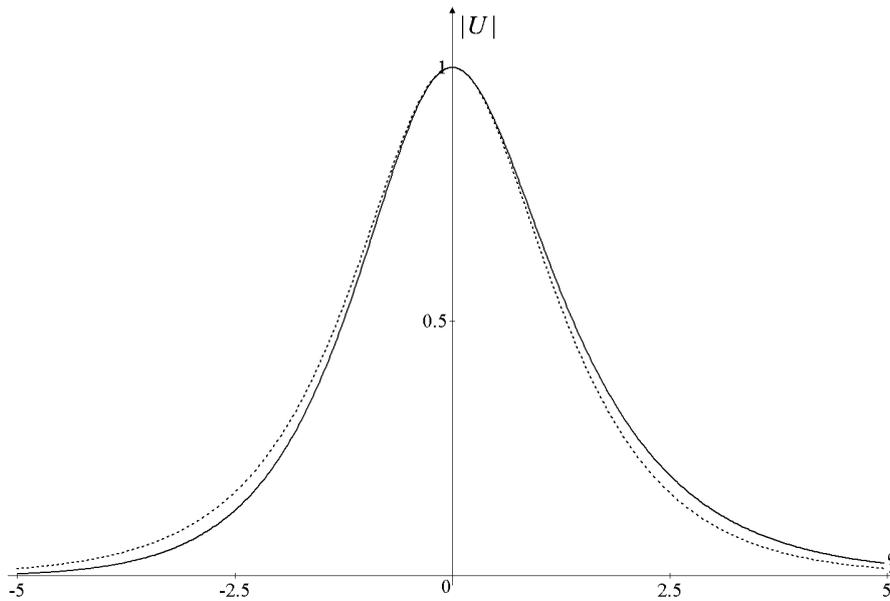


Рис. 6. Распределение модуля огибающей солитона $|U|$ по ξ в момент времени $10 < t \leq 200$ при $\mu = 1/32$, $L_{\alpha,q} = 20$. Непрерывная кривая - численный результат, пунктирная кривая – классический солитон

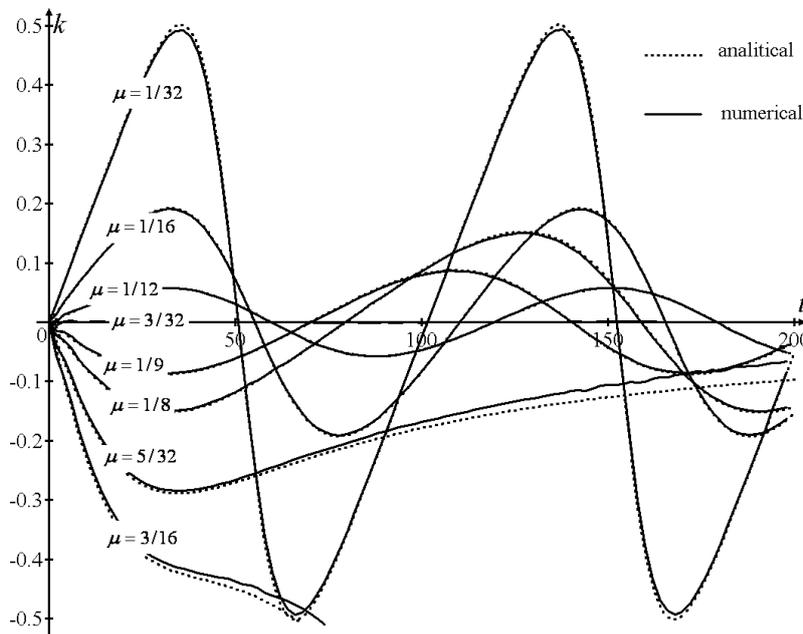


Рис. 7. Численные (непрерывные кривые) и аналитические (пунктирные кривые) результаты описания волнового числа k в центре волнового пакета в зависимости от t при $L_{\alpha,q} = 20$ и различных значениях

При любых прочих соотношениях градиентов линейной дисперсии второго порядка и нелинейности среды, численные и аналитические результаты в режиме динамического равновесия вынужденного рассеяния и неоднородностей среды так же хорошо согласуются. Так, на рис. 8 показаны численные (непрерывные кривые) и аналитические (пунктирные кривые) результаты исследования динамики локального волнового числа k как функция времени t в

центре волнового пакета $|U| = \max$ при $L_\alpha = 40$ и $L_q = 20$ (рис. 8, а), при $L_\alpha = 20$ и $L_q = \infty$ (рис.8, б), для различных значений μ .

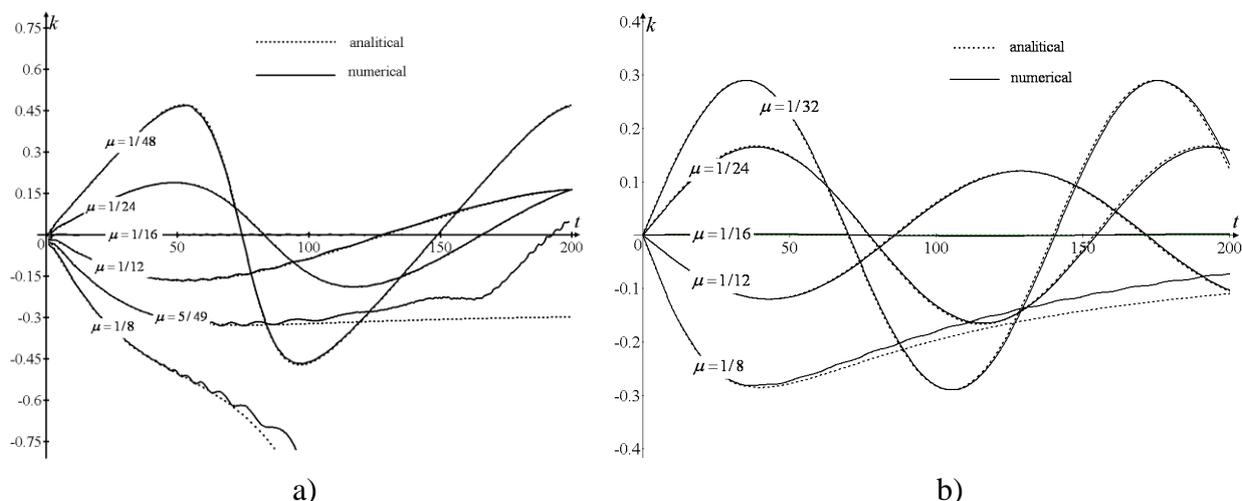


Рис. 8. Численная (непрерывные кривые) и аналитическая (пунктирные кривые) динамика волнового числа k в центре волнового пакета в зависимости от времени t при $L_\alpha = 40$ и $L_q = 20$ (а), при $L_\alpha = 20$ и $L_q = \infty$ (б) для различных μ

Заключение

В данной работе рассмотрена динамика солитона огибающей в рамках расширенного нелинейного уравнения Шредингера, учитывающего вынужденное пространственное рассеяние Рамана, неоднородности как линейной дисперсии второго порядка, так и нелинейности среды. Проведено сравнение аналитических результатов с результатами численного эксперимента. Показана возможность компенсации сдвига вниз по спектру собственного волнового числа солитона (эффект вынужденного рассеяния) смещением волнового числа солитона вверх по спектру (эффект возрастающих дисперсии второго порядка и нелинейности среды). Аналитически в явном виде найдено стационарное солитонное решение расширенного нелинейного уравнения Шредингера. Этот солитон существует как результат равновесия вынужденного рассеяния, с одной стороны, и неоднородностей дисперсии и нелинейности среды, с другой стороны. Найден режим динамического равновесия вынужденного рассеяния и неоднородностей среды, при котором параметры солитона периодически изменяются во времени. Аналитические и численные результаты для этого режима хорошо согласуются.

В данной работе динамика солитонов рассматривалась в пренебрежении линейной групповой скоростью, нелинейной дисперсией и линейной дисперсией третьего порядка. Компенсация эффектов вынужденного рассеяния и неоднородностей среды с учетом этих членов в расширенном нелинейном уравнении Шредингера будет рассмотрена в следующих работах.

В данной научной работе использованы результаты, полученные в ходе выполнения проекта № 11-01-0066, реализованного в рамках Программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2012-2013 гг.

Библиографический список

1. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optic / G.P. Agrawal. – San Diego: Academic Press, 2001.
2. **Yang, Y.** Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis / Y. Yang. – New York: Springer, 2001.

3. **Kivshar, Y.S.** Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals / Y.S. Kivshar, G.P. Agrawal. – San Diego: Academic, 2003.
4. **Dickey, L.A.** Soliton Equation and Hamiltonian Systems / L.A. Dickey. – New York: World Scientific, 2005.
5. **Zakharov, V.E.** Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media / V.E. Zakharov, A.B. Shabat // Sov. Phys. 1972. JETP. 34. P. 62–69.
6. **Hasegawa, A.** Transmission of Stationary Nonlinear Optical Physics in Dispersive Dielectric Fibers I: Anomalous Dispersion / A. Hasegawa, F. Tappert // Appl. Phys. 1973. Lett. 23. P. 142–144.
7. **Kodama, Y. J.** Optical solitons in a monomode fiber // Stat. 1985. Phys. 39. P. 597–614.
8. **Kodama, Y.** Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide / Y. Kodama, A. Hasegawa // IEEE J. Quantum Electron 23. 1987. P. 510–524.
9. **Zaspel, C.E.** Optical Solitary Wave and Shock Solutions of the Higher Order Nonlinear Schrodinger Equation // Phys. Rev. 1999. Lett. 82. P. 723–726.
10. **Hong, B.** New Jacobi functions solitons for the higher-order nonlinear Schrodinger equation / B. Hong, D. Lu // Inter. Journal of Nonlinear. 2009. Science 7. P. 360–367.
11. **Nagaraja, Kumar C.** New phase modulated solutions for a higher-order nonlinear Schrödinger equation / C. Nagaraja Kumar, P. Durganandini // Pramana - J. Phys. 53. 1999. P. 271–277.
12. **Kuznetsov, E.A.** Bifurcations of solitons and their stability / E.A. Kuznetsov, F. Dias // Physics Reports 507. 2011. P. 43–105.
13. **Karpman, V.I.** The extended third-order nonlinear Schrodinger equation and Galilean transformation // The European Physical Journal B 39. 2004. P. 341–350.
14. **Oliviera, J.R.** Analytical Solution for the Modified Nonlinear Schrodinger Equation Describing Optical Shock Formation / J.R. Oliveira, M.A. Moura // Phys. Rev. E 57. 1998. P. 4751–4755.
15. **Mitschke, F.M.** Discovery of the soliton self-frequency shift / F.M. Mitschke, L.F. Mollenauer // Opt. Lett. 11. 1986. P. 659–661.
16. **Gordon, J.P.** Theory of the Soliton Self-frequency Shift // Opt. Lett. 11. 1986. P. 662–664.
17. **Gromov, E.M.** Nonlinear Dynamics of Short Wave Trains in Dispersive Media / E.M. Gromov, V.I. Talanov // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 110 (1996) 137; Sov. Phys. 1996. JETP. 83. P. 73–79.
18. **Gromov, E.M.** Short envelope-solitons (combined nonlinear equation) / E.M. Gromov, V.I. Talanov // Radiophysics and Quantum Electronics, 39.1996. P. 735–756.
19. **Gromov, E.M.** Short Optical Solitons in Fibers/ E.M. Gromov, V.I. Talanov // Chaos. 10. 2000. P. 551–558.
20. **Obregon M.A., Stepanyants Yu.A.** Oblique magneto-acoustic solitons in a rotating plasma M.A.Obregon, Yu.A. Stepanyants // Physics Letters A 249.1998. P. 315–323.
21. **Scalora, M.** Generalized nonlinear Schrödinger equation for dispersive susceptibility and permeability: application to negative index materials / M Scalora [et al.] // Phys. Rev. 2005. Lett. 95 013902.
22. **Wen, S.C.** Modulation instability in nonlinear negative-index material / S.C. Wen [et al.] // Phys. Rev. 2006. E 73. 036617.
23. **Marklund, M.** Ultrashort solitons and kinetic effects in nonlinear metamaterials / M. Marklund, P.K. Shukla, L. Stenflo // Phys. Rev. 2006. E 73 037601.
24. **Tsitsas, N.L.** Higher-order effects and ultrashort solitons in left-handed metamaterials / N.L. Tsitsas [et al.] // Phys. Rev. 2009. E 79 037601.
25. **Kivshar, Y.S.** Dark-soliton Dynamics and shock waves induced by the stimulated Raman effect in optical fibers // Phys. Rev. A 42 .1990. P. 1757–1761.
26. **Kivshar, Y.S.** Raman-induced optical shocks in nonlinear fibers / Y.S. Kivshar, B.A. Malomed // Optics. 1993. Letters 18. P. 485–487.
27. **Biancalama F., Skrybin D.V., Yulin A.V.** Theory of the soliton self-frequency shift compensation by the resonant radiation in photonic crystal fibers / F. Biancalama, D.V. Skrybin, A.V. Yulin // Phys. Rev. 2004. E 70 011615.
28. **Essiambre, R.-J.** Timing jitter of ultra short solitons in high-speed communication systems. I. General formulation and application to dispersion-decreasing fibers / R.-J. Essiambre, G.P. Agrawal // Journal of the Optical Society of America. 1997. B 14. P. 314–322.
29. **Essiambre, R.-J.** Timing jitter of ultra short solitons in high-speed communication systems. II. Control of jitter by periodic optical phase conjugation / R.-J. Essiambre, G.P. Agrawal // Journal of the Optical Society of America. 1997. B 14. P. 323–330.

30. **Andrianov, A.** DDF-based all-fiber optical source of femtosecond pulses smoothly tuned in the telecommunication Range / A. Andrianov, S. Muraviev, A. Kim, A. Sysoliatin // *Laser Physics* 17. 2007. P. 1296–1302.
31. **Chernikov, S.** Soliton pulse compression in dispersion-decreasing fiber / S. Chernikov, E. Dianov, D. Richardson, D. Payne // *Optics. 1993. Letters* 18. P. 476–478.
32. **Aseeva, N.V.** Soliton self-wave number down shift compensation by the increasing second-order dispersion / N.V. Aseeva, E.M. Gromov, V.V. Tyutin // *Models, Algorithms, and Technologies for Network Analysis* / Ed. by B. Goldengorin, V. Kalyagin, P. Pardalos. Springer Berlin Heidelberg, 2013. Vol. 32 of Springer Series in Mathematics & Statistics. P. 1–10.

*Дата поступления
в редакцию* 22.01.2013

N.V. Aseeva¹, E.M. Gromov², O.V. Podchishaeva², V.V. Tyutin¹

**SOLITON DYNAMICS IN THE FRAME OF EXTENDED INHOMOGENEOUS
NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION WITH TAKING INTO ACCOUNT
NONLOCAL NONLINEARITY**

National Investigate University Higher School of Economics¹,
Nizhny Novgorod state university n.a. N.I. Lobachevsky²

Purpose: Dynamics of solitons in the frame of the extended nonlinear Schrödinger equation taking into account stimulated Raman scattering in space presentation (space stimulated Raman scattering), smoothly inhomogeneous both second-order dispersion and self-phase modulation is considered.

Approach: Soliton's dynamic investigated as analytically as numerically.

Findings: It is shown that wave number down shift (by space stimulated Raman scattering) is compensated with up shift (by increasing second-order dispersion or self-phase modulation). Analytical soliton solutions as a result of equilibrium of space stimulated Raman scattering and increasing both second-order dispersion and self-phase modulation is found. Regime of the dynamical equilibrium of space stimulated Raman scattering and inhomogeneous media with periodical variation of soliton's parameters is found. Analytical and numerical results for this regime are in a good agreement.

Originality: The obtained results is original and can be important for optical fibers application.

Key words: Extended Nonlinear Schrödinger Equation, Soliton, Nonlocal Nonlinearity, Space Stimulated Raman-Scattering, Inhomogeneous, Second-Order Linear Dispersion, Self-Phase Modulation, Analytical Investigation, Numerical Simulation.