УДК 513.015.2

В.М. Галкин, М.Е. Елисеев

КВАЗИГРУППЫ И КООРДИНАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

В статье предлагается введение координат на проективной плоскости с помощью квазигрупп. Дается определение полной системы ортогональных квазигрупп. Такая система позволяет строить проективную плоскость и эта связь обратима. Описывается координатизация двойственной плоскости и обсуждается принцип двойственности.

Ключевые слова: тернар, теорема Дезарга, полная система ортогональных квазигрупп, принцип двойственности.

Интерес к исследованию проективных плоскостей в свое время был вызван установлением Д. Гильбертом ([1]) того факта, что планиметрическая теорема Дезарга (о ней будет сказано далее) не может быть доказана построениями в плоскости, не использующей ее метрических свойств. Интригующим обстоятельством является справедливость теоремы Дезарга в эвклидовых (и аффинных) пространствах размерности большей двух, то есть недезарговыми могут быть только плоскости. Прогресса в изучении недезарговых плоскостей пришлось ждать около трех десятилетий – до 30-х годов XX века. Причиной сложившейся ситуации, как это теперь представляется, были два обстоятельства. Первое из них – это неэффективность использования синтетических методов. Альтернативой к синтетическим методам являются координатные. Но, как оказалось, для их введения понадобились объекты нетрадиционных типов. И действительно, в 1935 году Руфь Муфанг ввела класс неассоциативных объектов, называемых в настоящее время лупами Муфанг. Это позволило ей открыть класс недезарговых плоскостей – плоскостей Муфанг. В 30–60 гг. была достаточно хорошо разработана теория квазигрупп [6], частными случаями которых являются лупы Муфанг. Это позволило ввести удовлетворительный аналог системы координат на проективной плоскости. В традиционном изложении теории проективных плоскостей [3,4] исходным объектом служит так называемый тернар. С точки зрения авторов это довольно тяжеловесно определяемый объект. Кроме того, он почти (или совсем) не встречается нигде, кроме приложений к проективным плоскостям. По этой причине в этой статье предлагается использовать (вместо тернаров) для координатизации проективных плоскостей более простые и вместе с тем широко употребляемые объекты, а именно квазигруппы. В общности при этом ничего не теряется, но некоторые вопросы становятся более естественными, а другие – например, описание двойственной плоскости – допускают красивые решения.

Изложение материала в статье производится следующим образом. В разделах 1 и 2 приводятся необходимые определения и основные факты о проективных плоскостях и квазигруппах. Более полную относящуюся сюда информацию можно найти [3, 4]. В разделе 3 вводится основной объект – полная система ортогональных квазигрупп (ПСК) и показывается, что каждую проективную плоскость можно координатизировать с помощью ПСК. В разделе 4 описывается двойственная плоскость и обсуждается, так называемый принцип двойственности.

1. Проективные плоскости и теорема Дезарга

Проективная плоскость это множество элементов двух типов. Элементы одного из них называются точками, а другого – прямыми. Прямые и точки связываются отношением, которое в педантичных изложениях называется «инцидентностью». Этот термин далее будем заменять на более привычные – «принадлежать», «проходить через» и т. д. Следующие три аксиомы это все, что требуется для определения проективной плоскости.

P1. Через две точки проходит одна и только одна прямая.

P2. Две прямые пересекаются в единственной точке.

P3. Существует 4 точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

Первая аксиома не требует пояснений. Вторая означает, что в отличие от евклидовой плоскости в проективной не существует «параллельных» прямых. Наконец, третья аксиома обеспечивает существование достаточного количества точек и прямых на плоскости.

Простейший и наиболее важный пример проективной плоскости доставляет следующая конструкция. Берется аналог обычной плоскости, в котором точки задаются парой координат (x, y), принадлежащих заданному полю *F*. Прямые состоят из точек, координаты которых связаны линейными уравнениями. Эта, так называемая аффинная плоскость дополняется несобственной («бесконечно удаленной» прямой) L_∞.

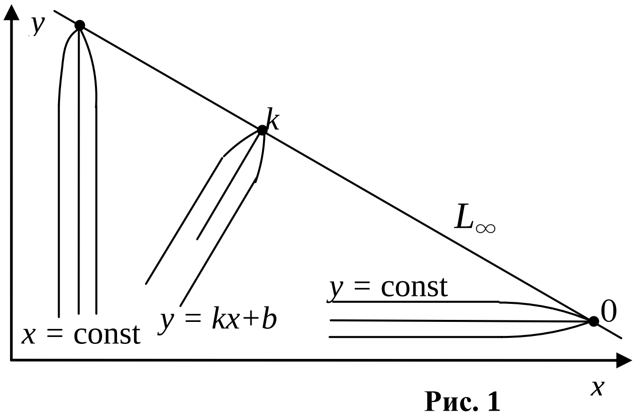

Рис. 1

Точками ее являются элементы из *F* и символ ∞. Прямая аффинной плоскости дополняется точкой из *L*: для прямых $x = \text{const}$ это ∞, а для прямых $y = kx + b$ это *k*. В приложениях, например, в алгебраической геометрии, используются однородные координаты. Точка проективной плоскости задается тройкой $x = (x_1, x_2, x_3)$ координат. Тройка $(0,0,0)$ исключается из рассмотрения и считается, что тройки $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ с $\lambda \neq 0$ определяют одну и ту же точку. Прямая $p = (p_1, p_2, p_3)$ также задается однородными координатами и состоит из точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0$. Неоднородные координаты связаны с однородными следующим образом: точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ с $x_3 \neq 0$ соответствует точка $(x_1 / x_3, x_2 / x_3)$ аффинной плоскости. При $x_3 = 0$ мы выходим на несобственную прямую и при $x_2 \neq 0$ получаем точку $k = x_1 / x_2$ на ней. Наконец, точке $(x_1,0,0)$ соответствует точка ∞ на L_∞.

В приведенной конструкции поле *F* можно заменить на произвольное тело, например, на тело кватернионов. Необходимо только соблюдать осторожность в вычислениях, связанную с некоммутативностью умножения. Так, если мы сохраняем уравнение прямой в виде $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0$, то координаты точек допускают множитель λ справа, а координаты прямой – слева.

В проективной плоскости может выполняться или нет утверждение, известное под названием теоремы Дезарга (см. рис. 2).

Если точки пересечения P, Q, R соответствующих сторон треугольников *ABC* и

$A_1B_1C_1$ лежат на прямой L, то прямые AA_1, BB_1, CC_1, соединяющие соответствующие вершины треугольников, пересекаются в одной точке S. Очевидным образом формулируется и обратная теорема, которая также может выполняться, а может и не выполняться в проективной плоскости

Фундаментальное значение теоремы Дезарга состоит в том, что она выполняется тогда и только тогда, когда проективная плоскость может быть построена приведенной выше конструкцией, исходя из произвольного тела *F*. Есть и геометрический критерий того, чтобы *F* было полем: в плоскости должна выполняться так называемая теорема Паппа.

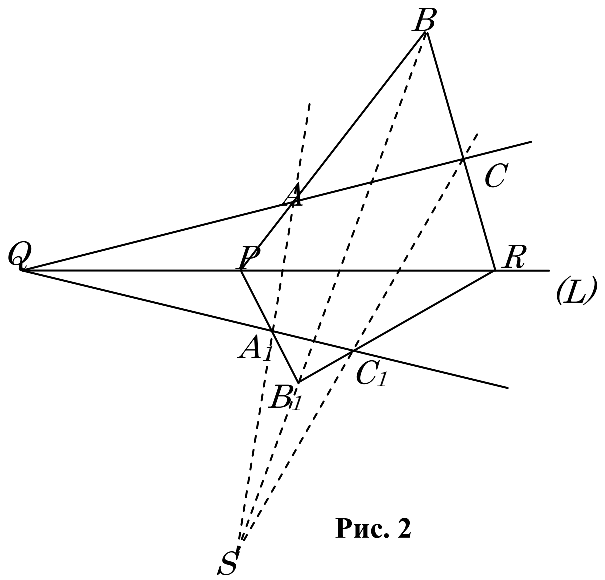

Рис. 2

Истинной причиной сравнительно простой структуры дезарговых плоскостей (то есть плоскостей, в которых выполняется теорема Дезарга) является наличие достаточно большого количества коллинеаций (автоморфизмов) в таких плоскостях. По определению коллинеация – это биекция плоскости в себя, переводящая прямые в прямые и сохраняющая отношение инцидентности. Так линейные невырожденные преобразования однородных координат точек дезарговой плоскости приводят к коллинеациям. Более точно, в случае поля F, коллинеации отождествляются с элементами факторгруппы $SL_3(F)$ по ее центру, состоящему из скалярных матриц. Здесь мы встречаемся с известной в математике ситуацией: чем более «симметричен» объект, тем проще он устроен. В недезарговых плоскостях коллинеаций значительно меньше, чем и объясняется трудность построения соответствующих примеров.

2. Латинские квадраты и квазигруппы

Квазигруппа – это множество, в котором можно «умножать» и «делить». Более точно, множество $G(\cdot)$ с бинарной операцией $(\cdot)$ называется квазигруппой, если уравнения $ax = b$ и $xa = b$ однозначно разрешимы. Часто квазигруппы снабжаются дополнительной структурой, требующей выполнения в квазигруппе тех или иных тождеств. Наиболее известное из них – тождество ассоциативности $(xy)z = x(yz)$ (здесь $xy \equiv xy$), превращающей квазигруппу в группу. Укажем еще некоторые употребительные тождества:

1) $(xy)(zt) = (xz)(yt)$ (медиальность);
2) $x(y(xz)) = ((xy)x)z$ и равносильное ему $((zx)y)x = z(x(yz))$ (тождества Муфанг);
3) $(x(yx))z = x(y(xz))$ и $z((xy)x) = ((zx)y)x$ (левое и правое тождества Бола);
4) $x(yz) = (xy)(xz)$ и $(xy)z = (xz)(yz)$ (левая и правая дистрибутивности).

Как известно, в группе существует элемент ***e*** такой, что $ex = xe$. Квазигруппа с таким свойством называется лупой. Если квазигруппа конечна, то внутренность ее таблицы Кэли есть латинский квадрат. На рис. 3 изображена таблица Кэли абелевой группы Z_3 и соответствующий латинский квадрат.

По определению в каждой строке (столбце) латинского квадрата элементы различны. Из каждого латинского квадрата можно получить конечную квазигруппу, добавив к нему строку и столбец с обозначениями элементов. По этой причине далее латинские квадраты специально не рассматриваются.

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

0	1	2
1	2	0
2	0	1

Рис. 3

Такие алгебраические понятия как гомоморфизм, изоморфизм, автоморфизм очевидным образом переносятся и на квазигруппы. Однако в теории квазигрупп они занимают подчиненное положение, а на первый план выдвигается понятие изотопии. Две квазигруппы $G(\bullet)$ и $G(*)$ изотопны, если $x * y = C^{-1}(Ax \bullet By)$, где A, B, C - подстановки множества G. При совпадении $(*)$ и $(\bullet)$ говорят, что квазигруппы автотопны.

3. Полные системы ортогональных квазигрупп и координатизация проективных плоскостей

Пусть G-множество с выделенным элементом e, на котором определены квазигруппы $G(\underset{k}{\cdot})$, перенумерованные элементами $k \in G \setminus (e)$. Система таких квазигрупп называется полной ортогональной системой, если выполнены условия:

А1. (ортогональность). Система уравнений $x \underset{k}{\cdot} y = a, x \underset{m}{\cdot} y = b$ однозначно разрешима;

А2. (полнота). Для $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ найдется единственное значение k такое, что $x_1 \underset{k}{\cdot} y_1 = x_2 \underset{k}{\cdot} y_2$.

Рабочим примером является система, построенная на поле F, в которой $x \underset{k}{\cdot} y = y - kx (k \neq 0)$. Кстати можно проверить, что эти квазигруппы медиальны.

Теорема. Каждой полной системе ортогональных квазигрупп соответствует некоторая проективная плоскость. Обратно, каждой проективной плоскости соответствует некоторая полная система.

Доказательство. Мы повторим конструкцию, изложенную в разделе 1. Точками аффинной плоскости объявляются пары (x, y) элементов из G. Прямые на ней разделены на три типа: $L_a = \{(a, y)\}$, $L_{e,b} = \{(x, b)\}$ и $L_{k,b} = \{(x, y) \mid x \underset{k}{\cdot} y\}$ для $k \neq e$. Остается пополнить аффинную плоскость несобственной прямой L_∞. Ее точками служат символ ∞ и элементы G. Прямые из пучков типов $L_a, L_{e,b}$ и $L_{k,b}$ имеют с L_∞, соответственно, общие точки ∞, e, k. Проверка аксиом Р1 и Р2 проективной плоскости представляет сложность лишь в случаях пересечения прямых $L_{k,b}$ и $L_{l,c}$ и проведения прямой через точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ для $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Единственность точки пересечения указанных прямых есть следствие ортогональности, а единственность прямой $L_{k,b}$, проходящей через указанную пару точек, следует из аксиомы полноты. При этом $b = x_1 y_1 = x_2 y_2$. Что же касается аксиомы Р3, то стоит заметить, что число квазигрупп в системе более одной, $|G| \geq 2$ и существуют по крайней мере две прямые. Число точек на каждой не менее трех и выбор четырех нужных точек возможен.

Теперь отправимся от заданной проективной плоскости P и выберем одну из прямых плоскости в качестве несобственной L_∞. На ней выделим две точки, обозначив их через ∞ и e. Множество G определяется как множество точек $L_\infty \setminus (\infty)$ и тем самым осуществлена координатизация на L_∞. Для координатизации точек «аффинной» плоскости $P \setminus L_\infty$ выберем еще одну прямую L (рис. 4, *а*).

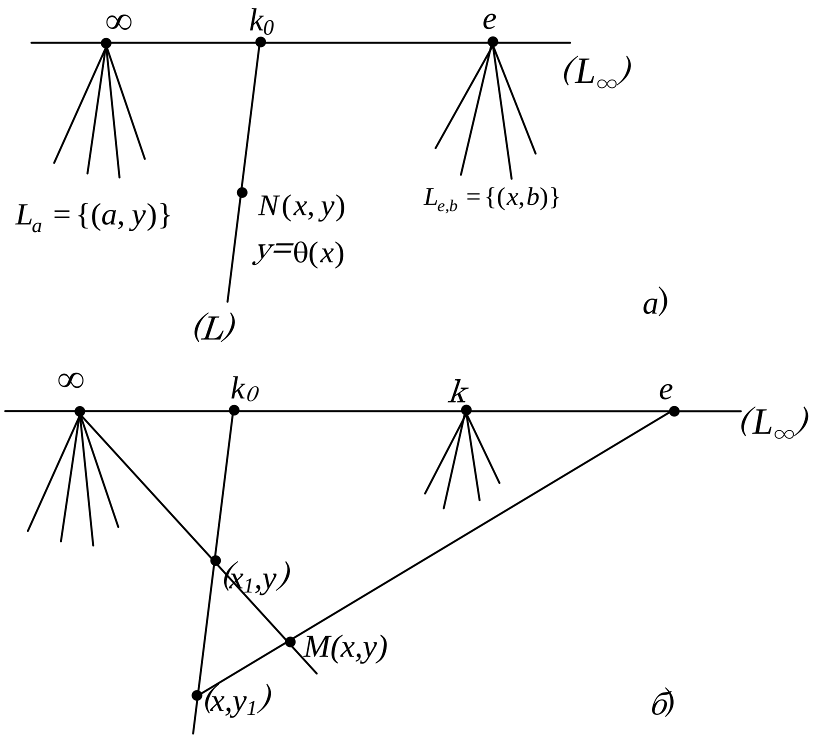

Рис. 4

Как известно, множества точек на различных прямых проективной плоскости равномощны. То же верно и для пучков прямых, проходящих через различные точки. Поэтому, первые координаты точек на $L \setminus \{k_0\}$ можно взять из G. Координату y в $N(x, y)$ полагаем равной $y = \theta(x)$, где θ - любая биекция G в себя. Прямые пучков, проходящих через ∞ и e (за вычетом L_∞) нумеруются элементами из G. Это индексы a в L_a и b в $L_{e,b}$. Координаты точек на них понятны из рисунка.

На рис. 4, *б* видно как определяются координаты точки M, не лежащей на L. Наконец, при фиксированной нумерации прямых, проходящих через точку $k \neq \infty, e$, полагаем $x \underset{k}{\bullet} y = b$ для точек прямой $L_{k,b}$, где b - «номер» прямой в пучке.

Остается проверить, что таким образом получается полная система ортогональных квазигрупп. Прежде всего, задание одной из координат точки M, лежащей на прямой $L_{k,b}$ вполне определяет точку M и, значит, другую координату. Следовательно операция $\underset{k}{\cdot}$ квазигрупповая. Далее, прямые $L_{l,a}$ и $L_{k,b}$ пересекаются в единственной точке, что влечет выполнение аксиомы А1. Наконец, для точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ с $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, прямая, их соединяющая, не совпадает ни с прямой L_a, ни с прямой $L_{e,b}$. Поэтому, она пересекает L_∞ в единственной точке $k \neq e, \infty$ и $x_1 \underset{k}{} y_1 = x_2 \underset{k}{} y_2$, то есть верна и аксиома А2.

Надо отметить, что в построении системы квазигрупп имеется большой произвол. Это выбор L_∞, L, биекции $\theta: G \to G$, а также произвол в нумерации прямых пучков. Это приводит ко многим системам квазигрупп, связанных с данной плоскостью. Ясно, что различные системы связаны между собой, но как - остается открытым вопросом. Мы рассмотрим частный случай такой связи в следующем разделе.

В заключение этого раздела сделаем несколько замечаний об аксиоматике полных систем ортогональных квазигрупп и конечных проективных плоскостей.

Теорема. Пусть $\{G(\circ), k \in G \setminus e\}$ - множество квазигрупп из полной системы ортогональных квазигрупп. Тогда не существует квазигруппы $G(*)$, ортогональной к квазигруппе из указанного множества.

Доказательство. Предположим противное и пусть $G(*)$ - контрпример. Возьмем две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответствующей плоскости такие, что $x_1 * y_1 = x_2 * y_2 (= a)$. Для этого достаточно задаться a и $x_1 \neq x_2$, после чего y_1 и y_2 однозначно определены. Через эти точки проведем прямую $L_{k,b}$. Тогда $x_1 \underset{k}{\circ} y_1 = x_2 \underset{k}{\circ} y_2 (= b)$ и $x_1 * y_1 = x_2 * y_2 (= b)$ показывает, что система $x \underset{k}{\circ} y = b, x * y = a$ имеет два решения. Противоречит с предположением об ортогональности.

Доказанная теорема оправдывает термин «полнота» использованный в аксиоме $A2$.

В случае конечной плоскости порядка q число точек на прямой равно $q+1$ и $|G| = q$. Система квазигрупп, соответствующая плоскости, насчитывает q-1 ортогональных квазигрупп. Доказанная теорема приводит к известному результату о латинских квадратах.

Следствие. Система ортогональных латинских квадратов порядка q содержит не более q-1 квадратов.

Последнее утверждение позволяет в конечном случае дать иное определение полной системы ортогональных квазигрупп (или латинских квадратов). Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Система ортогональных квазигрупп полна тогда и только тогда, если она содержит q-1 квазигрупп.

Доказательство носит комбинаторный характер. Мы начинаем с построения плоскости, объявив прямыми множества точек $L_a, L_{k,b}$ и L_∞, как это проделывалось при координатизации проективной плоскости. Ортогональность обеспечивает одноточечность пересечения пары прямых. На каждой прямой содержится $q+1$точек, а всего точек $q^2 + q + 1$: из них q^2 точек вида (x, y) и $q+1$ точек на L_∞. Через точку (x_1, y_1) проходит прямая L_x и q прямых вида $L_{k,b}$. Следовательно, в объединении этих прямых содержится $q(q+1)+1$ точек. Но столько точек имеется всего. Поэтому существует прямая, проходящая, помимо (x_1, y_1), и через отличную от (x_1, y_1) точку (x_2, y_2). Она единственна и аксиома полноты выполнена.

4. Автотопии, коллинеации и координатизация двойственной плоскости

Как уже отмечалось, различные полные системы ортогональных квазигрупп могут определять одну и ту же плоскость. Здесь мы рассмотрим связь между двумя системами $\{G(\underset{k}{*})\}$ и $\{G(\underset{k}{\ })\}$, координатизирующими одну и ту же плоскость при дополнительном ограничении. Именно, пусть прямая L_∞ координатизируется однотипно с помощью обеих систем и точки $\propto$ и e выбраны для систем одни и те же. Связь между квазигрупповыми операциями оказывается достаточно простой и описывается следующим образом.

Теорема. Квазигрупповые операции обеих систем связаны соотношением $x \underset{k}{*} y = C^{-1}\left(Ax \underset{k}{\bullet} By \right)$, где A, B, C-биекции G в себя, причем A и B не зависят от k.

Доказательство. Индекс k в обеих частях равенства один и тот же, так как он соответствует точке $k \in L_\infty$. Точки вне L_∞ имеют координаты (x, y) по отношению к операции $\bullet$ и (x', y')- для *. Поскольку точки на прямой, проходящей через ∞ имеют одну и ту же первую координату, то x' зависит только от x: $x' = Ax$ при некоторой биекции A. точно также, рассматривая прямые, проходящие через $e \in L_\infty$, заключаем, что $y' = By$ при биекции B. Теперь мы можем заключить, что точка (x, y) с $x \bullet y = b$, лежащие на $L_{k,b}$ переходят в точку $(x', y') = (Ax, By)^k$ и $Ax * By = b'$ и $b' = C^{-1}(b)$ с биекцией $C = C(k)$.

Обращая рассуждения, легко показать, что системы квазигрупп связанные соотношением из теоремы определяют одну и ту же плоскость или, точнее, изоморфные плоскости.

Отметим два частных случая. Пусть A и B – тождественные биекции, Выбирая C так, чтобы $e \bullet y = C(y)$, получим $e \underset{k}{*} y = y$. Систему квазигрупп с таким свойством будем называть нормализованной.

В другом случае пусть * и $\bullet$ совпадают, т.е. мы имеем автотопию $x \underset{k}{\bullet} y = C^{-1}(Ax \underset{k}{\bullet} By)$. Легко проверить, что отображение $(x, y) \to (x', y') = (Ax, By)$, оставляющее точки L_∞ на месте, есть коллинеация. Коллинеации такого типа образуют группу. Для дезарговой плоскости такие коллинеации имеют простой геометрический смысл. Это параллельные переносы $(x, y) \to (x + a, y + b)$ на $P \setminus L_\infty$.

Плоскость P' называется двойственной по отношению к плоскости P, если можно установить соответствие, при котором точки P переходят в прямые P', а прямые из P - в точки P'. Более точно, P' двойственна к P, если существует пара $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ биекций $\alpha_1 : P_p \to P_{l'}$, $\alpha_2 : P_l \to P_{p'}$, сохраняющих отношение инцидентности, то есть если точка p лежит на прямой l в F, то точка $\alpha_2(l)$ лежит на прямой $\alpha_1(p)$ в P'. Через P_p и P_l обозначены множества точек и прямых в P и аналогичные обозначения использованы для P'

Пара биекций $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ называется корреляцией. Отношение двойственности симметрично, так как пара $\alpha' = (\alpha_2, \alpha_1)$ устанавливает двойственность P по отношению к P'.

Предложение. Для заданной плоскости P существует с точностью до изоморфизма двойственная к ней плоскость P'.

Существование устанавливается следующим образом: точками в P' объявляются прямые из P, а прямыми – точки из P. Инцидентность в P' наследуется из таковой в P. Далее, если P' и P'' - плоскости, двойственные к P соответствующие корреляциям α и β, то, как нетрудно видеть $\alpha\beta^{\ 1} = (\alpha_1\beta_2^{\ 1}, \alpha_2\beta_1^{\ 1})$ есть коллинеация из P'' в P', то есть P' и P'' изоморфны.

Пусть P построена по полной системе ортогональных квазигрупп $\{G(\underset{k}{\circ}), k \in G \setminus e\}$. Предполагаем, что квазигрупповые операции нормализованы, то есть $e \underset{k}{\circ} y = y$. Новую систему квазигрупп вводим равенствами

$$x \underset{k}{*} y = b \Leftrightarrow k \underset{x}{\circ} b = y \text{ для } x \neq e, k \neq l \text{ и } e \underset{k}{*} y = y \text{ для } k \neq e.$$

Предложение. Система $\{G(\underset{k}{*}), k \in G \setminus e\}$ есть полная система ортогональных квазигрупп.

Доказательство. Прежде всего надо проверить, что введенные операции квазигрупповые, то есть уравнения $a \underset{k}{*} x = b$ и $x \underset{k}{*} a = b$ однозначно разрешимы относительно

x. Для первого уравнения $x = a$ при $a = e$ и $k \underset{a}{\circ} b$ при $a \neq e$. Для второго уравнения и $a \neq b$ x отличен от e и, значит, $k \underset{x}{*} b = a$ по аксиоме полноты x однозначно определяется. Если же $a = b$, то $x = e$. Остается проверить выполнение аксиом ортогональности и полноты.

Если в системе $\begin{matrix} x \underset{k}{*} y = a \\ x \underset{l}{*} y = b \end{matrix}$ значение x отлично от e, то есть она переписывается так $\begin{matrix} k \underset{x}{\circ} a = y \\ e \underset{x}{\circ} b = y \end{matrix}$.

В частности, тогда $a \neq b$. Аксиома полноты для системы $\{G(\underset{k}{\circ})\}$ влечет единственность x и $y = k \underset{x}{\circ} a$. Если $a = b$, то обязательно $x = e$ и $y = a = b$ и вновь решение единственно. Поэтому ортогональность для $\{G(\underset{k}{*})\}$ имеет место.

Пусть теперь $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ и $x_1 \underset{k}{*} y_1 = x_2 \underset{k}{*} y_2 (= b)$. Если $x_1, x_2 \neq e$, то последнее соотношение эквивалентно равенству $k \underset{x_1}{\circ} b = y_1$, $k \underset{x_2}{\circ} b = y_1$. Ортогональность в системе $\{G(\underset{k}{\circ})\}$ влечет единственность k, то есть в $\{G(\underset{k}{*})\}$ выполняется и полнота.

Пусть теперь P и P' - плоскости, построенные на системах квазигрупп $\{G(\underset{k}{\circ})\}$ и $\{G(\underset{k}{*})\}$ как это описано выше. Тогда справедливо следующее утверждение.

Предложение. Плоскости P и P' двойственны друг другу.

Доказательство. Введем обозначения для точек и прямых плоскостей.

P: точки - $(\infty), (k), (x, y)$ прямые $L_\infty, L_a, L_{k,b}$;

P': точки - $[\infty], [k], [x, y]$ прямые $\Im_\infty, \Im_a, \Im_{k,b}$.

Корреляция P в P' устанавливается следующим образом. Точки P - $(\infty), (k), (x, y)$ переходят в прямые $\Im_\infty, \Im_a, \Im_{k,b}$, а прямые $L_\infty, L_a, L_{k,b}$ - в точки $[\infty], [k], [x, y]$. Проверка того, что отношение инцидентности при этом наследуется наименее тривиально лишь в случаях $(x, y) \to \Im_{x,y}$ и $L_{k,b} \to [k, b]$. Оба они разбираются однотипно и мы ограничимся первым из них. Точка (x, y) лежит на прямых $L_x, L_{e,y}$ и $L_{k,b}$ ($x \underset{k}{\circ} y = b, k \neq l$). В P' образами этих прямых служат точки $[x], [e, y], [k, b]$, которые должны лежать на прямой $\Im_{x,y}$. Это действительно так ввиду связи между операциями $\circ$ и $*$ и требования $e \underset{x}{\circ} y = y$ при $x \neq e$.

В заключение обсудим некоторые утверждения, касающиеся, так называемого, принципа двойственности . Симметрия аксиоматики проективной плоскости относительно замены точка $\leftrightarrow$ прямая позволяет каждому утверждению *A* формулируемому в терминах точек и прямых, сопоставить «двойственное» утверждение *A'*. Последнее получается из *A*, указанной выше заменой.

Следующее замечание очевидно: если *A* выполняется в плоскости *P*, то A' выполняется в двойственной к *P* плоскости *P'*.

В ряде книг ([4], [5]) утверждается, что выполняется «принцип двойственности»: если в *P* верно утверждение *A*, то верно в *P* и двойственное утверждение *A'*.

Нетрудно видеть, что принцип двойственности, выполняется, если *P'* изоморфна *P*. Однако этого нельзя утверждать в противном случае. Изоморфизм *P*≅*P'* имеет место для классической плоскости над полем F описанной в п.1. В самом деле, нужный изоморфизм устанавливается соответствием $P = (P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow x = (x_1, x_2, x_3)$. Далее F можно заменить на тело кватернионов Q. Изоморфизм P с P' получается использованием $p \to \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, где $u \to \bar{u}$ есть инволютивный антиавтоморфизм сопряжения в Q. Для него $\overline{uv} = \bar{u}\,\bar{v}$. Авторам неизвестно, существует ли такой антиавтоморфизм в произвольном теле и имеется ли изоморфизм P с P' в этом случае. Контрпримеры к принципу двойственности доставляют, так называемые, плоскости Холла ([2], [3]). Так имеются две действенные друг к другу плоскости Холла порядка 9. группа коллениаций одной из них действует на точках с орбитами длин 10 и 81, а на прямых – с длинами 1 и 90.

Таким образом, действие группы коллениаций на точках и прямых ассиметрично и принцип двойственности не имеет места.

Библиографический список

1. **Гильберт, Д.** Основания геометрии / Д. Гильберт. – Петроград, 1923.
2. **Hughes, D.** Piper F. Projective planes. Springer Verlag, 1973.
3. **Холл, М.** Теория групп / М. Холл. – М.: Изд. ин. лит., 1962.
4. **Четверухин, Н.Ф.** Высшая геометрия / Н.Ф. Четверухин. – М., 1939.
5. **Глаголев, Н.А.** Проективная геометрия / Н.А. Глаголев. – М.: Высшая школа, 1967
6. **Белоусов, В.Д.** Основы теории квазигрупп и луп / В.Д. Белоусов. – М.: Наука, 1967.

Дата поступления
в редакцию 16.04.2013

V.M. Galkin, M.E. Elyseev

THE QUASIGROUPS AND THE COORDINATIZATION OF THE PROJECTIVE PLANES

In this paper a new approach to the projective planes is suggested. This approach use the concept of the complete system of the orthogonal quasigroups. The coordinatization of the dual plane is described. So called «duality principe» is discussed.

Key words: ternar, Dezargues theorem,complete system of the orthogonal quasigroups, duality principe.