РАДИОТЕХНИКА, СИСТЕМЫ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ, АНТЕННЫ И УСТРОЙСТВА СВЧ

УДК 537.874.6

М.Б. Гойхман, Ы. Ким, Н.Ф. Ковалев, А.В. Палицин

К СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ПЛАВНО НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПОЛЫХ ВОЛНОВОДОВ

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород

Основные уравнения метода поперечных сечений для акустических волноводов выводятся на основе квадратичного соотношения типа леммы Лоренца без привлечения операции почленного дифференцирования бесконечных разложений по собственным функциям.

Ключевые слова: нерегулярные акустические волноводы, дифракция плоской волны, граничное интегральное уравнение, волноводы сравнения.

В основе многих приближенных методов решения задач о рассеянии волн в многомодовых волноводах с распределенными неоднородностями лежит метод поперечных сечений, простой и наиболее употребительный вариант которого изложен в работах [1, 2]. По существу, это строгая в математическом отношении версия физически наглядного метода связанных волн. Суть метода заключается в следующем. Неоднородному волноводу в каждом его сечении сопоставляется вспомогательный регулярный волновод сравнения (ВС) с теми же сечением и распределением параметров заполняющей среды. Искомое поле представляется в виде суперпозиции полей собственных (парциальных) волн соответствующих ВС. Коэффициенты этого разложения определяются из решения бесконечной системы взаимно связанных линейных уравнений. При таком выборе ряды, представляющие поля, быстро сходятся, с чем и связаны основные преимущества подобных расчетных схем.

В книге [1] для вывода коэффициентов связи используются два последовательных предельных перехода, чтобы избежать операций почленных дифференцирований бесконечных рядов. Это обстоятельство делает несколько неопределенной область применимости метода и затрудняет его дальнейшее усовершенствование.

В данной работе рассмотрен строгий вывод системы дифференциальных уравнений первого порядка и коэффициентов их взаимной связи без привлечения операций почленного дифференцирования. Рассматривается скалярный вариант теории с зависимостью полей от времени в виде $e^{i\omega t}$. В исходных уравнениях

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\vec{U} &= -i\frac{\omega}{\rho c^2}P, \\ \mathrm{grad}\,P &= -i\omega\rho\vec{U} \end{aligned} \qquad (1)$$

$\vec{U}$ и P - колебательная скорость и давление; ρ - плотность среды; c - скорость распространения плоских волн в ней. Считается, что

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(x,y,z), \\ c &= c(x,y,z) \end{aligned} \qquad (2)$$

и на боковой границе волновода (S) выполнено одно из граничных условий

$$P\big|_S = 0, \tag{3}$$

$$U_N\big|_S = 0, \tag{4}$$

где N - направление внешней нормали. Условие (3) соответствует мягкой стенке, а условие (4) - жесткой стенке. В качестве координат в исследуемом волноводе приняты $\vec{r}_\perp$ и z, а в ВС их будем обозначать $\vec{r}_\perp$ и ς (рис. 1). Причем под ВС понимаются среды, в которых ρ и c не зависят от z и ограничивающие их контура стенок замкнуты. Предполагается, что для ВС известен полный набор распространяющихся и закритических волн:

$$\vec{U}^m = \vec{V}^m(\vec{r}_\perp, z)e^{-ih_m\varsigma}, \tag{5}$$

$$P^m = p^m(\vec{r}_\perp, z)e^{-ih_m\varsigma}. \tag{6}$$

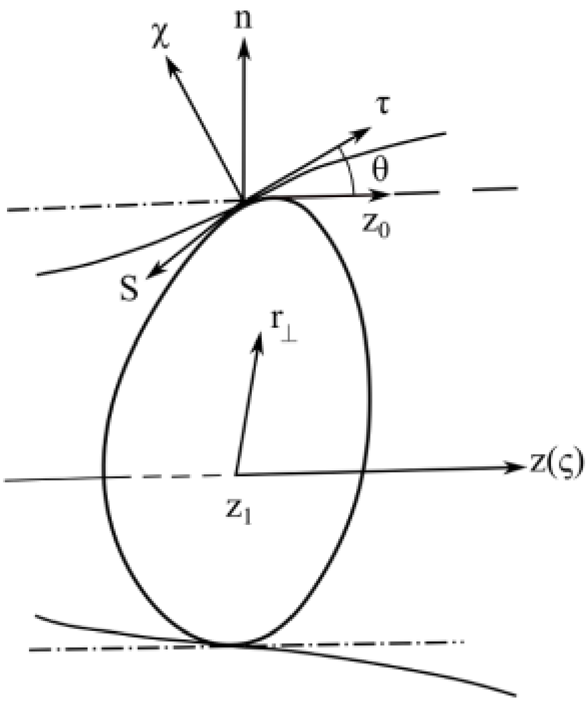

Рис. 1

Здесь индекс m принимает значения от $-\infty$ до ∞, кроме $m = 0$, причем положительным индексам соответствуют волны с положительными h_m, которые распространяются в $\vec{z}_0$ направлении, а отрицательным индексам $m < 0$ соответствуют встречные волны, бегущие в $-\vec{z}_0$ направлении. Предполагается также, что выполняются условия четности:

$$\begin{aligned} h_{-m} &= -h_m, \\ p^{-m} &= -p^m, \\ \vec{V}_\perp^{-m} &= -\vec{V}_\perp^m, \\ V_z^{-m} &= V_z^m. \end{aligned} \tag{7}$$

Зависимости $\vec{V}^m$ и p^m от z, а так же $h_m = h_m(z)$ связаны с изменением параметров ВС при переходе от сечения к сечению. Волны сравнения в каждом сечении взаимно ортогональны

$$\int_{S_\perp} \left(p^m\vec{V}^{-\nu} - p^{-\nu}\vec{V}^m\right)\vec{z}_0 dS = N_m\delta_{m\nu} \tag{8}$$

и их комплексные амплитуды удовлетворяют уравнениям:

$$div_{\perp}\vec{V}_{\perp}^{m} - ih_m V_z^m = -i\frac{\omega}{\rho c^2}p^m$$
$$grad_{\perp}p^m - i\vec{z}_0 h_m p^m = -i\omega\rho\vec{V}_m \tag{9}$$

в каждом из сечений.

Для дальнейшего систему (9) нужно преобразовать путем добавления и вычитания слагаемых

$$\frac{\partial V_z^m}{\partial z},\ \vec{z}_0\frac{\partial p^m}{\partial z}$$

в левых частях соответствующих уравнений (9)

$$\mathrm{div}\vec{V}^m - \frac{\partial V_z^m}{\partial z} - ih_m V_z^m = -i\frac{\omega}{\rho c^2}p^m,$$
$$\mathrm{grad}\ p^m - \vec{z}_0\left(\frac{\partial p^m}{\partial z} + ih_m p^m\right) = -i\omega\rho\vec{V}^m. \tag{10}$$

Перемножая последовательно уравнения (1) на p^{-m} и $\vec{V}^{-m}$ и уравнений (10) на P и $\vec{U}$, нетрудно получить квадратичное соотношение типа «леммы Лоренца»

$$\mathrm{div}\left(p^m\vec{U} - P\vec{V}^m\right) = U_z\left(ih_m p^m + \frac{\partial p^m}{\partial z}\right) - P\left(ih_m V_z^m + \frac{\partial V_z^m}{\partial z}\right), \tag{11}$$

которое непосредственно можно использовать для исследования некоторых простых волноводных систем. В частности, (11) удобно применять в расчетах рассеяния волн на малых волноводных ступеньках.

Ограничиваясь рассмотрением нерегулярных волноводов с постоянной связностью и с гладкими боковыми стенками, т.е. без ребер и изломов, в выражении, полученном интегрированием соотношения (11), по тонкому поперечному слою Δz можно перейти к пределу $\Delta z \to 0$. В результате получается удобное интегральное соотношение

$$\frac{d}{dz}\int\limits_{S_\perp}\left(p^m\vec{U} - P\vec{V}^m\right)\vec{z}_0 dS + ih_m\int\limits_{S_\perp}\left(V_z^m P - U_z p^m\right)dS =$$
$$= \oint\limits_{L} V\left(p^m\vec{U} - P\vec{V}^m\right)\vec{N}dl + \int\limits_{S_\perp}\left(U_z\frac{\partial p^m}{\partial z} - P\frac{\partial V_z^m}{\partial z}\right)dS. \tag{12}$$

Поверхностные интегралы здесь берутся по всему поперечному сечению, а линейный - по ограничивающему его замкнутому контуру. Значение этого контурного интеграла зависит от типа граничного условия (3), (4). Так, если рассматривается волновод с мягкими стенками (3) и в ВС так же мягкие стенки, то контурный интеграл обращается в нуль. Если же выполняются условия (4), то контурный интеграл из (12) будет равен

$$-\oint\limits_{L} VP\vec{V}^m\vec{N}dl. \tag{13}$$

В полученное интегральное соотношение (12) входят только продольные составляющие полной колебательной скорости, поэтому достаточно предположить справедливость неполных разложений:

$$U_z = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu V_z^\nu, \tag{14}$$

$$P = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu p^\nu, \tag{15}$$

что с учетом условий ортогональности приводит к искомой системе дифференциальных уравнений первого порядка соответствующих системе связанных волн

$$\frac{d}{dz}A_m N_m + ih_m A_m N_m = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu \int_{S_\perp}\left(V_z^\nu \frac{\partial p^{-m}}{\partial z} - p^\nu \frac{\partial V_z^{-m}}{\partial z}\right)dS \tag{16}$$

или

$$\frac{dA_m}{dz} + ih_m A_m = -\delta_{\nu m}\frac{1}{N_m}\frac{dN_m}{dz} + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} S_{\nu m} A_\nu \tag{17}$$

$$m \in (-\infty, \infty). \tag{18}$$

В (16) и (17) опущен контурный интеграл, поскольку ради простоты боковые стенки предполагались идеально мягкими. Величины

$$S_{\nu m} = \frac{1}{N_m}\int_{S_\perp}\left(V_z^\nu \frac{\partial p_z^{-m}}{\partial z} - p^\nu \frac{\partial V_z^{-m}}{\partial z}\right)dS \tag{19}$$

называются локальными коэффициентами связи, они являются дифференциальными характеристиками нерегулярного участка волновода. Коэффициенты связи могут быть преобразованы к форме, содержащей производные по z только от параметров волновода. Для этого достаточно продифференцировать условие ортогональности (8). На этом же пути выводятся соотношения взаимности и более простые выражения для постоянных распространения h_m:

$$h_m S_{mj} = -h_j S_{jm};\ (m \neq j),$$

$$S_{mm} = -\frac{1}{2h_m}\frac{\partial h_m}{\partial z}.$$

Для постановки и решения задач рассеяния волноводных волн на неоднородностях нужны граничные или концевые условия, которые можно установить следующим образом. Пусть нерегулярный участок волновода непрерывным образом сочленен с входным и выходным регулярными полубесконечными волноводами. Эти концевые волноводы являются первым и последним ВС. Если предположить, что со стороны левого волновода на нерегулярный участок падает одна из распространяющихся волн с номером $m > 0$, то тогда в силу непрерывности полей можно записать

$$P_m(0) = P_{m0},\ \ P_{\substack{\nu>0\\ \nu\neq m}}(0) = 0,$$

$$P_{\nu<0}(d) = 0,$$

где $z = 0$ и $z = d$ - границы нерегулярного участка.

Возможна постановка и других концевых условий, соответствующих другим задачам, в частности, при одновременном падении нескольких волн как слева, так и справа.

При выводе системы дифференциальных уравнений (17), (19) типа уравнений связанных волн нигде не использовались операции почленного дифференцирования рядов, с чем связана возможность построения быстро сходящихся итерационных решений, причем даже в случае, когда граничные условия в исследуемом волноводе и ВС не совпадают. Очевидно, что система (17), (19) удобна и для решения задач синтеза или восстановления профиля нерегулярного волновода по заданным характеристикам рассеянных волн. Примененный здесь метод может быть также использован при построении расчетных схем для волноводов с анизотропной заполняющей средой, многосвязных волноведущих систем, гребенчатых волноводов или замедляющих систем и фильтров. Предложенная схема, очевидно, может быть использована и в квазиоптике. Но главное ее достоинство – это возможность применения во многих приближенных расчетах и построении наглядных (качественных) картин процессов рассеяния. Схема во многом универсальна и может применяться не только к волноводным системам.

При выводе искомых уравнений (17), (19) операции почленного дифференцирования нигде не использовались. С этим обстоятельством связана возможность построения быстро сходящихся итерационных решений, причем даже в случае, когда граничные условия в исследуемом волноводе и ВС не совпадают.

Это обстоятельство существенно расширяет область применимости описанной схемы. В частности, возможно учесть потери колебательной энергии в стенках волноводов, используя заведомо полную систему функций ВС с идеальными стенками.

Библиографический список

1. **Каценеленбаум, Б.З.** Теория нерегулярных волноводов с медленно изменяющимися параметрами / Б.З. Каценеленбаум. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 216 с.
2. **Шевченко, В.В.** Неоднородные акустические волноводы // Акуст. журнал. 1961. № 7.

Дата поступления
в редакцию 15.07.2013

M.B. Goykhman, E. Kim, N.F. Kovalev, A.V. Palitsin

ABOUT SCALAR THEORY OF SMOOTHLY IRREGULAR HOLLOW WAVEGUIDES

Institute of Applied Physics Russian Academy of Science, Nizhny Novgorod

The subject of the article is the correct derivation of the system of equations for coupled waves in irregular acoustic waveguides. The resulting system of equations has a clear physical interpretation, that allows to use qualitative considerations and analogy from the usual theory of linear waves.

The article is based on the generalized quadratic relation of the type of Lorentz's lemma for the fields of investigated waveguide and for the fields of eigen waves of so-called comparison waveguides (CW). Proposed way of solution permits to use non-uniformly convergent series of the waves of CW, that is, series to which the operation of term by term differentiation is not applicable. This allows to build rapidly converging iterative procedure that is well suited for numerical calculations and also for useful variants of perturbation methods, in particular, for popular Born approximation.

Key words: irregular acoustic waveguides, plane waveguide, plane wave diffraction, boundary integral equation, so-called comparison waveguides.