

УДК 532.59:629.12

С. А. Химич

МЕТОД НЕСТАЦИОНАРНОЙ АНАЛОГИИ В ЗАДАЧЕ О ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ НИЗКОЛЕТЯЩИМ КРЫЛОМ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Рассматривается задача о волнах на свободной поверхности тяжелой жидкости под низколетящим крылом, решение которой строится с использованием нестационарной аналогии. Получены простые формулы для вычисления волновой поверхности.

Ключевые слова: гравитационные волны, низколетящее крыло, воздушная подушка, квадрупольная теория крыла.

Проблема волнообразования на поверхности тяжелой жидкости под низколетящим крылом является весьма актуальной, так как возникающие при движении волны могут оказывать значительное влияние на подъемную силу крыла и другие его важные характеристики.

Один из подходов к решению данной проблемы состоит в том, что движение низколетящего крыла над поверхностью жидкости рассматривается как движение по поверхности жидкости компактной области повышенного давления. При этом информация о распределении давления под крылом берется из различных асимптотических теорий [1, 2]. Пространственные задачи о волнах на поверхности тяжелой жидкости под низколетящим крылом в рамках данного подхода рассматривались, например, в [3, 4]. Основные трудности, связанные с этим подходом, состоят в вычислении волновых интегралов с ядром Коши. Задача существенно упрощается, если использовать метод нестационарной аналогии. Термин «нестационарная аналогия» является в какой-то степени синонимом термина «метод плоских сечений». Данный метод состоит в том, что пространственная стационарная задача при определенных условиях заменяется набором плоских нестационарных задач.

Пусть тонкое прямоугольное крыло, имеющее хорду $2a$ и размах $2b$, движется вдоль оси x со скоростью v_0 (рис. 1). Жидкость - невязкая, несжимаемая с гравитационными объёмными силами, занимает область Ω - полупространство $z \leq 0$. В рамках нестационарной аналогии не учитываются пространственные производные по x в уравнениях гидродинамики. Следовательно, при таком подходе распределения скорости и давления в каждом сечении жидкости эволюционируют независимо друг от друга и отличаются лишь временем пролета крыла от одного сечения к другому (роль продольной координаты x в данном приближении играет величина $v_0 \cdot t$). Таким образом, в рамках нестационарной аналогии решается плоская нестационарная задача, в которой фигурируют координаты z, y из Ω и время t из R_1^+ .

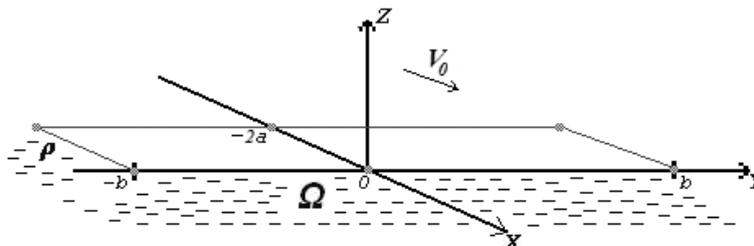


Рис. 1. Постановка задачи

Будем полагать, что движение жидкости потенциальное, то есть в любой точке вектор скорости жидкости может быть определен как градиент скалярной функции $\Phi(y, z, t)$:

$$\vec{V}(y, z, t) = \nabla\Phi(y, z, t) = \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{j}.$$

Уравнение неразрывности жидкости [5] приводит к двумерному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0, \quad \forall(y, z, t) \in \Omega \cup R_1^+. \quad (1)$$

Для того, чтобы получить задачу, описывающую конкретную форму движения жидкости, необходимо к уравнению Лапласа (1) добавить условия на границе области Ω (граничные условия) и условия в момент времени $t = 0$ (начальные условия).

1. Граничные условия на свободной поверхности жидкости:

а) кинематическое условие получается из факта невозможности ухода частицы жидкости со свободной поверхности жидкости. Если уравнение свободной поверхности определить как $z = \eta(y, t)$, то это условие примет вид

$$\frac{\partial\Phi(y, 0, t)}{\partial z} - \frac{\partial\eta(y, t)}{\partial t} = 0, \quad z = 0;$$

б) динамическое условие выражает факт заданности на свободной поверхности давления, определяемого как функция $P(y, t)$. В соответствии с интегралом Лагранжа-Коши уравнений Эйлера получим

$$\frac{\partial\Phi(y, 0, t)}{\partial t} + g\eta(y, t) = -\frac{1}{\rho}P(y, t), \quad (2)$$

где g - ускорение свободного падения; ρ - плотность жидкости.

2. Условия на бесконечности: при $|y| \rightarrow \infty$ или $z \rightarrow -\infty$

$$|\nabla\Phi| \rightarrow 0.$$

3. Начальное условие. Выберем безударный вариант начала движения жидкости.

Данное условие задает тот факт, что в момент времени $t = 0$ свободная поверхность жидкости не возмущена и движения жидкости нет:

$$\Phi(y, 0, 0) = 0; \quad \frac{\partial\Phi(y, 0, 0)}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, мы имеем начально – краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t}, \quad z = 0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} + g \cdot \eta = -\frac{P(y, t)}{\rho}, \quad z = 0, \end{cases} \quad (3)$$

Решим эту задачу, используя преобразование Фурье по координате y . Система (3) переписывается следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial z^2} - k^2\tilde{\Phi} = 0, \\ \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial z} = \frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial t}, \quad z = 0, \\ \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial t} + g\tilde{\eta} = -\tilde{P}(k, t), \quad z = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где k - переменная Фурье.

Решение первого уравнения системы (4) имеет вид $\tilde{\Phi} = A(k, t) \cdot e^{|k|z}$. Подставим полученное значение $\tilde{\Phi}$ в два оставшихся уравнения системы (4)

$$\begin{cases} |k| \cdot A(k, t) = \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t}, \\ \frac{\partial A}{\partial t} + g\tilde{\eta} = -\tilde{P}(k, t), \end{cases} \quad (5)$$

Учитывая начальные условия $\eta(0, k) = 0$ и $A(0, k) = 0$, из первого уравнения (5) находим

$A = \frac{1}{|k|} \cdot \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t}$, а из второго уравнения системы (5) получим

$$\frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial t^2} + g|k|\tilde{\eta} = -|k|\tilde{P}(k, t).$$

Используя метод вариации произвольных постоянных, находим отсюда $\tilde{\eta}(k, t)$, а, следовательно, и $A(k, t)$:

$$A(k, t) = -\int_0^t \tilde{P}(k, \tau) \cos(\sqrt{g|k|}(t - \tau)) d\tau.$$

Тогда Фурье образ функции потенциала скорости будет

$$\tilde{\Phi} = -e^{|k|y} \int_0^t \tilde{P}(k, \tau) \cos(\sqrt{g|k|}(t - \tau)) d\tau.$$

Переходя от Фурье образов к оригиналам, получаем выражение для потенциала скорости

$$\Phi(y, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{|k|z - ik y} \int_0^t \tilde{P}(k, \tau) \cos(\sqrt{g|k|}(t - \tau)) d\tau dk. \quad (6)$$

Рассмотрим два простых случая зависимости давления (в данном случае Фурье образа функции давления) от времени $\tilde{P}(k, t)$:

1) Пусть над поверхностью жидкости движется компактная область повышенного постоянного давления $P_0 = \frac{D}{4ba}$, где D - нагрузка на крыло. Такая форма движения характерна для аппаратов, использующих статическую воздушную подушку или экранопланов с развитыми шайбами на концах крыла. Тогда, если обозначить T – время, за которое крыло пройдет путь, равный хорде $2a$, то функцию давления можно задать формулой

$$P(y, t) = \begin{cases} P_0; & \text{если } -b \leq y \leq b; \quad 0 \leq t \leq T, \\ 0; & \text{если } |y| > b; \quad t > T. \end{cases}$$

Поэтому:

- если $t \leq T$, то

$$\tilde{P}(k, t) = \frac{P_0}{\rho} \int_{-b}^b e^{iky} dy = \frac{P_0}{\rho} \int_{-b}^b (\cos ky + i \sin ky) dy = \frac{2P_0}{\rho} \int_0^b \cos ky dy = \frac{2P_0}{\rho} \cdot \frac{\sin kb}{k};$$

- если $t > T$, то

$$\tilde{P}(k, t) = 0.$$

С учетом этого получим:

- если $t \leq T$, то

$$\Phi(y, z, t) = -\frac{P_0}{\pi \rho} \int_{-\infty}^{\infty} e^{|k|z - ik y} \frac{\sin kb}{k} \int_0^t \cos(\sqrt{g|k|}(t - \tau)) d\tau dk;$$

- если $t > T$, то

$$\Phi(y, z, t) = -\frac{P_0}{\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} e^{k|z-iky} \frac{\sin kb}{k} \int_0^T \cos(\sqrt{g|k|}(t-\tau)) d\tau dk.$$

Введем безразмерные переменные. Пусть $y = \bar{y} \cdot 2a$, $z = \bar{z} \cdot 2a$, $t = \bar{t} \frac{2a}{v_0}$, $\Phi = \bar{\Phi} \cdot 2av_0$,

$\bar{k} = k2a$, $\lambda = \frac{b}{a}$, где λ - относительный размах крыла. Удобно также ввести гравитационный

критерий подобия $\omega = \frac{2ga}{v_0^2} = \frac{1}{Fr^2}$, где Fr - число Фруда. Введём, кроме этого, число Фруда

по нагрузке $F_D = \frac{v_0}{\sqrt{g^3 D / \gamma}}$, где γ - удельный вес жидкости. С учетом введенных величин

потенциал скорости равен (черточки над безразмерными величинами далее опущены)

$$\Phi(y, z, t) = \begin{cases} \frac{-P_0}{\pi \cdot \rho \cdot v_0^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{k|z-iky}}{k} \cdot \sin\left(\frac{k\lambda}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sin(\sqrt{\omega \cdot |k|} \cdot t)}{\sqrt{\omega \cdot |k|}}\right) dk, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{-P_0}{\pi \cdot \rho \cdot v_0^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{k|z-iky}}{k} \cdot \sin\left(\frac{k\lambda}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sin(\sqrt{\omega \cdot |k|} \cdot t) - \sin(\sqrt{\omega \cdot |k|} \cdot (t-1))}{\sqrt{\omega \cdot |k|}}\right) dk, & t > 1. \end{cases}$$

Теперь определим уравнение свободной поверхности жидкости. Динамическое условие (2) можно переписать следующим образом:

$$g\eta(y, t) = -\frac{\partial\Phi(y, 0, t)}{\partial t} - \frac{P(y, t)}{\rho},$$

тогда, введя безразмерную высоту волны $\bar{\eta} = \frac{\eta}{2a}$, взяв производную по t от найденного по-

тенциала скорости и перейдя к безразмерным величинам, по указанным формулам получим уравнение свободной поверхности жидкости под низколетящим крылом

$$\bar{\eta}(y, t) = -\frac{1}{\omega} \begin{cases} \frac{-2P_0}{\pi \cdot \rho \cdot v_0^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos ky}{k} \cdot \sin\left(\frac{k\lambda}{2}\right) \cdot \cos(\sqrt{\omega \cdot k} \cdot t) dk + \frac{P(y, t)}{\rho \cdot v_0^2}, & \text{если } 0 \leq t \leq 1; \\ \frac{-2P_0}{\pi \cdot \rho \cdot v_0^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos ky}{k} \cdot \sin\left(\frac{k\lambda}{2}\right) \cdot (\cos(\sqrt{\omega \cdot k} \cdot t) - \\ - \cos(\sqrt{\omega \cdot k} \cdot (t-1))) dk + \frac{P(y, t)}{\rho \cdot v_0^2}, & \text{если } t > 1; \end{cases}, \quad (7)$$

где $P(y, \bar{t}) = \begin{cases} P_0, & 0 \leq t \leq 1, |y| \leq \frac{\lambda}{2}, \\ 0, & t > 1, |y| > \frac{\lambda}{2}. \end{cases}$

По формуле (7) были проведены расчеты волнообразования на поверхности тяжелой жидкости при движении по ней прямоугольной компактной области повышенного давления с параметрами $P_0 = 350$, $\lambda = 4$, $Fr = 1$, $F_D = 1,388$ и $P_0 = 350$, $\lambda = 4$, $Fr = 3$, $F_D = 4,163$. Результаты расчетов представлены на рис. 2, рис. 3 соответственно.

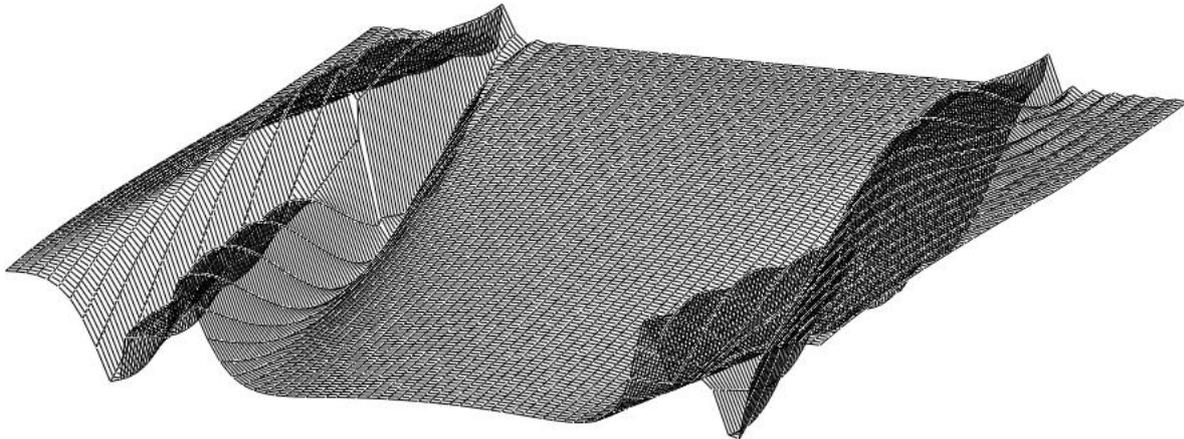


Рис. 2. Форма свободной поверхности жидкости при движении по ней компактной области повышенного давления с параметрами $P_0 = 350$, $\lambda = 4$, $Fr = 1$, $F_D = 1,388$

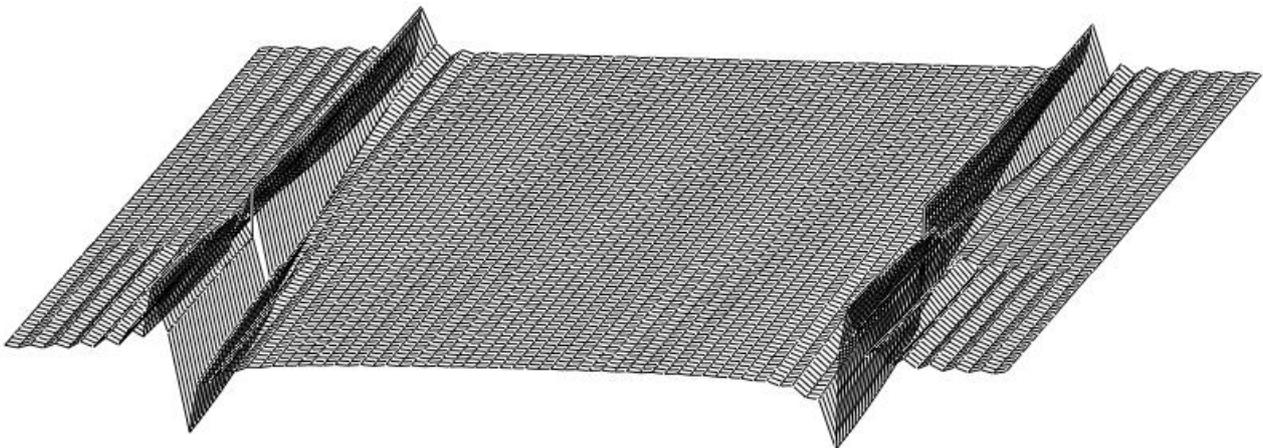


Рис. 3. Форма свободной поверхности жидкости при движении по ней компактной области повышенного давления с параметрами $P_0 = 350$, $\lambda = 4$, $Fr = 3$, $F_D = 4,163$

2) Возьмём в качестве первого приближения форму распределения давления под низколетящим крылом, движущимся над твёрдой поверхностью, близкую к треугольной. К такой форме приводят первые приближения квадрупольной теории крыла [1] и метода сращиваемых асимптотических разложений [2]. Пусть давление под низколетящим крылом имеет треугольную форму эпюры. Тогда, если обозначить T – время, за которое крыло пройдет путь, равный хорде $2a$, то функцию давления можно задать формулой

$$P(y,t) = \begin{cases} 2P_0\varphi(t); & \text{если } -b \leq y \leq b; 0 \leq t \leq T, \\ 0; & \text{если } |y| > b; t > T. \end{cases}$$

При этом P_0 определяется, как и в (7), а функция $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = 1 - \frac{t}{T}, \tag{8}$$

где $T = \frac{2a}{v_0}$.

Поэтому:

- если $t \leq T$, то

$$\tilde{P}(k,t) = \frac{2P_0 \cdot \varphi(t)}{\rho} \cdot \int_{-b}^b e^{iky} dy = \frac{2P_0 \varphi(t)}{\rho} \cdot \int_{-b}^b (\cos ky + i \sin ky) dy = \frac{4P_0 \cdot \varphi(t)}{\rho} \cdot \int_0^b \cos ky dy = \frac{4P_0 \cdot \varphi(t)}{\rho} \cdot \frac{\sin kb}{k}$$

- если $t > T$, то

$$\tilde{P}(k,t) = 0.$$

С учетом (8) подставим $\tilde{P}(k,t)$ в (6). В результате получим:

- если $t \leq T$, то

$$\Phi(y,z,t) = -\frac{2P_0}{\pi\rho} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{|k|z-iky} \cdot \frac{\sin kb}{k} \cdot \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \cdot \cos(\sqrt{g|k|} \cdot (t-\tau)) d\tau dk;$$

- если $t > T$, то

$$\Phi(y,z,t) = -\frac{2P_0}{\pi\rho} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{|k|z-iky} \cdot \frac{\sin kb}{k} \cdot \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \cdot \cos(\sqrt{g|k|} \cdot (t-\tau)) d\tau dk.$$

Введем безразмерные величины так, как это было сделано выше. С учетом введенных величин потенциал скорости равен (черточки над безразмерными величинами далее опущены)

$$\Phi(y,z,t) = \begin{cases} \frac{-2P_0}{\pi \cdot \rho \cdot v_0^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{|k|z-iky}}{k} \cdot \sin\left(\frac{k\lambda}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sin(\sqrt{\omega \cdot |k|} \cdot t)}{\sqrt{\omega \cdot |k|}} - \frac{1 - \cos(\sqrt{\omega \cdot |k|} \cdot t)}{(\sqrt{\omega \cdot |k|})^2}\right) dk, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{-2P_0}{\pi \cdot \rho \cdot v_0^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{|k|z-iky}}{k} \cdot \sin\left(\frac{k\lambda}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sin(\sqrt{\omega \cdot |k|} \cdot t)}{\sqrt{\omega \cdot |k|}} - \frac{\cos(\sqrt{\omega \cdot |k|} \cdot (t-1))}{(\sqrt{\omega \cdot |k|})^2} + \frac{\cos(\sqrt{\omega \cdot |k|} \cdot t)}{(\sqrt{\omega \cdot |k|})^2}\right) dk, & t > 1. \end{cases}$$

Далее, действуя таким же образом, как и в первом случае, получим уравнение свободной поверхности жидкости под низколетящим крылом

$$\bar{\eta}(y,t) = -\frac{1}{\omega} \begin{cases} \frac{-4P_0}{\pi \cdot \rho \cdot v_0^2} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\cos ky}{k} \cdot \sin\left(\frac{k\lambda}{2}\right) \cdot \left(\cos(\sqrt{\omega \cdot k} \cdot t) - \frac{\sin(\sqrt{\omega \cdot k} \cdot t)}{\sqrt{\omega \cdot k}}\right) dk + \\ + \frac{P(y,t)}{\rho \cdot v_0^2}, \text{ если } 0 \leq t \leq 1; \\ \frac{-4P_0}{\pi \cdot \rho \cdot v_0^2} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\cos ky}{k} \cdot \sin\left(\frac{k\lambda}{2}\right) \cdot (\cos(\sqrt{\omega \cdot k} \cdot t) + \\ + \frac{\sin(\sqrt{\omega \cdot k} \cdot (t-1)) - \sin(\sqrt{\omega \cdot k} \cdot t)}{\sqrt{\omega \cdot k}}) dk + \frac{P(y,t)}{\rho \cdot v_0^2}, \text{ если } t > 1; \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{где } P(y,t) = \begin{cases} 2P_0(1-t), & 0 \leq t \leq 1, |y| \leq \frac{\lambda}{2}, \\ 0, & t > 1, |y| > \frac{\lambda}{2}. \end{cases}$$

По формуле (9) были проведены расчеты волнообразования на поверхности тяжелой жидкости при движении по ней крыла с параметрами $P_0 = 350$, $\lambda = 4$, $Fr = 1$, $F_D = 1,388$ и $P_0 = 350$, $\lambda = 4$, $Fr = 3$, $F_D = 4,163$. Результаты расчетов представлены на рис. 4, рис. 5 соответственно.

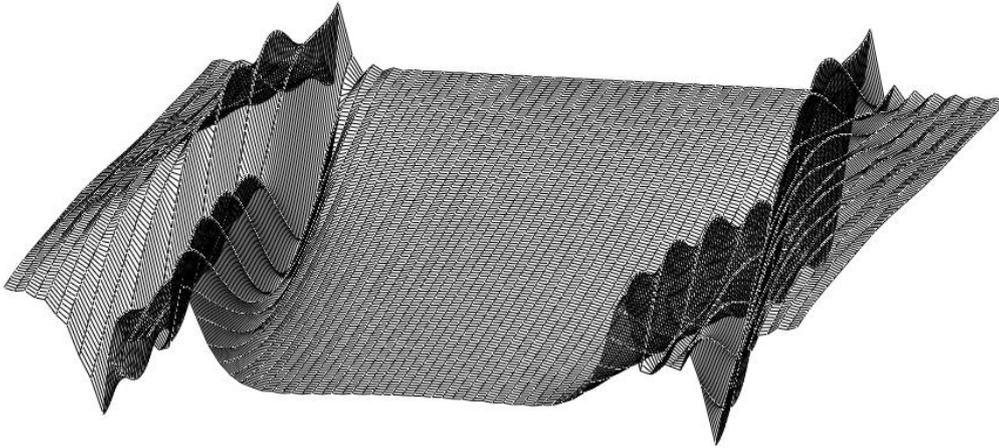


Рис. 4. Форма свободной поверхности жидкости при движении по ней низколетящего крыла с параметрами $P_0 = 350$, $\lambda = 4$, $Fr = 1$, $F_D = 1,388$

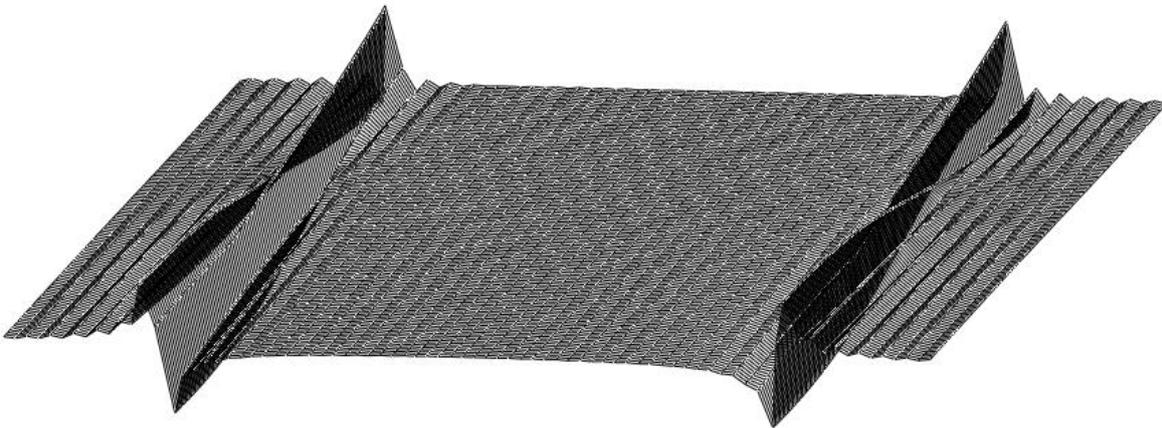


Рис. 5. Форма свободной поверхности жидкости при движении по ней низколетящего крыла с параметрами $P_0 = 350$, $\lambda = 4$, $Fr = 3$, $F_D = 4,163$

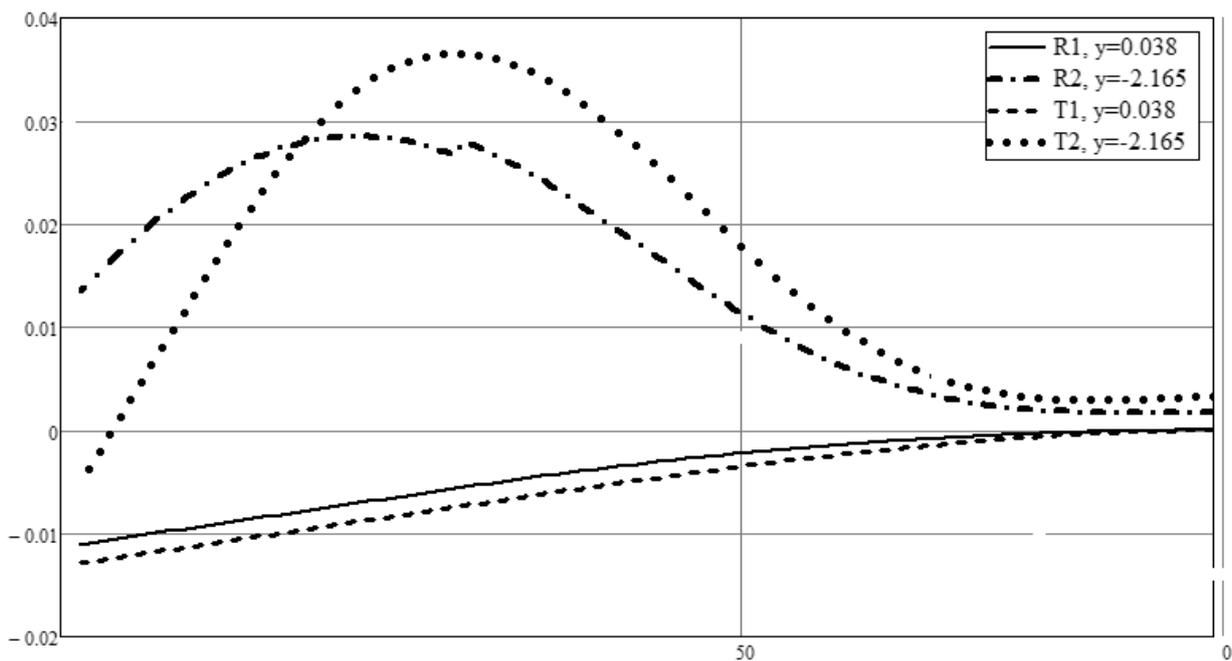


Рис. 6. Сравнение форм свободной поверхности жидкости в диаметральной плоскости ($R1$, $T1$) и под кромками ($R2$, $T2$) крыла с параметрами $P_0 = 350$, $\lambda = 4$, $Fr = 1$, $F_D = 1,388$ для двух типов распределения давления

На рис. 6 показано сравнение форм свободной поверхности жидкости в точках $y = 0,038$ и $y = -2,165$ низколетящего крыла с параметрами $P_0 = 350$, $\lambda = 4$, $Fr = 1$, $F_D = 1,388$ для двух типов распределения давления под крылом - равномерного (кривые R_1 и R_2) и треугольного (кривые T_1 и T_2).

В рассмотренной модели волнообразования под низколетящим крылом отсутствует видимая связь с параметрами геометрии объекта – относительным отстоянием от экрана и углом атаки крыла, так как нагрузка на крыло фиксирована. В этом случае основным критерием волнообразования становится число Фруда по нагрузке (по «водоизмещению»). Явная зависимость волнообразования (и связанные с ним параметры «мореходности») от геометрии объекта могут быть получены в итерационном процессе корректировки местных отстояний с учётом волнообразования в задаче квадрупольной теории крыла [1], [4]. Также из-за того, что распределения скорости и давления в каждом сечении жидкости эволюционируют независимо друг от друга, то не учитывается взаимодействие сечений жидкости между собой и перетекание жидкости по продольной координате.

В рамках нестационарной аналогии удалось получить простые быстроработающие формулы расчета волновой поверхности под крылом конечного размаха, которые могут быть использованы в итерационном процессе расчёта элементов гидроаэродинамики объектов, использующих статическую или динамическую воздушную подушку.

Библиографический список

1. **Панченков А. Н.** Квадрупольная теория крыла вблизи твердой границы / А. Н. Панченков // Асимптотические методы в динамике систем. – Новосибирск: Наука, 1980. С. 5–116.
2. **Рождественский, К. В.** Метод сращиваемых асимптотических разложений в гидродинамике крыла / К. В. Рождественский. – Л.: Судостроение, 1979. – 208 с.
3. **Орлов, Ю. Ф.** Потенциал ускорений в гидродинамике корабельных волн / Ю. Ф. Орлов. – Новосибирск: Наука, 1979. – 214 с.
4. **Орлов Ю. Ф.** Алгоритмы расчета формы свободной поверхности тяжелой жидкости под низколетящим крылом / Ю.Ф. Орлов // Асимптотические методы в механике. – Новосибирск: Наука, 1983.
5. **Ландау, Л. Д.** Теоретическая физика: учеб. пособие: В 10 т. Гидродинамика. – 3-е изд., перераб. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1986. Т. VI. – 736 с.

Дата поступления
в редакцию 04.06.2013

S. A. Khimich

THE METHOD OF NON-STATIONARY ANALOGY IN THE PROBLEM OF THE WAVES ON THE SURFACE OF A HEAVY LIQUID UNDER LOW-FLYING WING

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

Purpose: The goal of this study is to simplify three-dimensional problem of the motion of compact domain of increased pressure on the surface of a heavy liquid using the method of non-stationary analogy.

Approach: The main idea is to replace three-dimensional stationary problem of the motion of compact domain of increased pressure on the surface of a heavy liquid by the set of two-dimensional non-stationary problems. Further, the set of two-dimensional non-stationary problems is solved using Fourier method.

Findings: Simple formulas for wave surface calculation were obtained. The calculations of wave surface were performed using these formulas for two cases of pressure distribution: the uniform distribution and the triangular distribution.

Originality: The obtained results are original. It may be useful in the development of hovercrafts.

Key words: gravity waves, low-flying wing, air cushion, the quadrupole theory of wing.