

УДК 517.9

Д.Е. Пелиновский^{1,2}, А.Р. Гиниятуллин², Ю.А. Панфилова²,
Е.Г. Шургалина², А.А. Родин²

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН В ЗЕРНИСТЫХ КРИСТАЛЛАХ

Департамент математики и статистики, Университет МакМастера, Гамильтон, Канада¹
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева²

Цель работы: исследовать динамику зернистых цепочек с сильно нелинейными потенциалами. Получить новую модификацию уравнения Кортевега – де Вриза, характеризующегося логарифмическими нелинейностями. Найти семейство его точных решений в виде Гауссовых уединенных волн и доказать их устойчивость.

Научный подход: исследование проведено как аналитически, так и численно.

Результат: из дискретного уравнения Ферми – Паста – Улама с сильно нелинейными потенциалами Герца получено уравнение Кортевега – де Вриза с логарифмической нелинейностью. Показано, что Гауссовы локализованные решения уравнения Кортевега-де Вриза дают аналитические аппроксимации сильно локализованных уединенных волн в зернистых цепочках. Ошибка аналитических аппроксимаций контролируется в пространствах с быстрым затуханием на бесконечности. Доказана спектральная устойчивость Гауссовых локализованных решений в рамках уравнения Кортевега – де Вриза. Показано также, что модели типа Буссинеска с компактными решениями, ранее выведенные формально в физической литературе, являются сильно неустойчивыми и плохо обусловленными по отношению к временной динамике, а их применение сильно ограничено в задачах, связанных с уединенными волнами в зернистых цепочках.

Новизна: результаты исследования могут иметь приложение для анализа отклика зернистой среды различной природы на локализованное воздействие.

Ключевые слова: логарифмическое уравнение Кортевега-де Вриза, уединенные волны Гауссовой формы, дискретное уравнение Ферми-Паста-Улама, спектральная устойчивость.

Введение

Задача анализа отклика нелинейной решетки на локализованное возмущение возникает во многих приложениях таких, как исследование волн напряжения в зернистой среде после воздействия [41, 43], возбуждения нелинейных колебаний в кристаллах под бомбардировкой атомами [10, 11], или отклик нелинейной линии передачи импульсного напряжения [3]. Некоторые важные динамические явления могут быть объяснены с помощью модели Ферми-Паста-Улама (ФПУ) [8, 19] состоящей из цепочки связанных частиц с потенциалом парного взаимодействия V . Динамические уравнения для пространственно однородной ФПУ-цепочки имеют вид

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = V'(x_{n+1} - x_n) - V'(x_n - x_{n-1}), \quad n \in \mathbf{Z}, \quad (1)$$

где $x_n(t) \in \mathbf{R}$ является смещением n -й частицы от равновесия. Систему (1) можно переписать в терминах относительных смещений $u_n = x_n - x_{n-1}$ и скоростей частиц $p_n = \dot{x}_n$ следующим образом:

$$\frac{du_n}{dt} = p_n - p_{n-1}, \quad \frac{dp_n}{dt} = V'(u_{n+1}) - V'(u_n), \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (2)$$

Динамическая эволюция локализованных решений (2) сильно зависит от свойств потенциала взаимодействия V . В самой общей форме потенциал взаимодействия удовлетворяет условиям:

$$V \in C^2(\mathbf{R}), \quad V'(x) = \kappa x + O(|x|^\alpha), \quad (3)$$

где $\alpha > 1$ и $\kappa \geq 0$.

В работе [36], дисперсионная устойчивость нулевого состояния равновесия доказана для $\kappa > 0$ и $\alpha > 4$, т.е. при достаточно слабой нелинейности вблизи начала координат. Конкретнее, амплитуда (т.е. норма супремума) решения ФПУ-решетки (2) стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$ для всех начальных условий достаточно малых в l^1 , где l^1 обозначает классическое банахово пространство бесконечно суммируемых последовательностей.

Напротив, во многих ситуациях нелинейные эффекты достаточно сильны, чтобы компенсировать дисперсию, что дает существование когерентных локализованных решений ФПУ-решетки (2) таких, как уединенные волны, распространяющиеся с постоянной скоростью, или периодические по времени бризеры (см. [44] и ссылки в ней). Первое доказательство существования уединенных волн в общем классе ФПУ-решеток было развито в [18], когда V имеет локальный минимум в начале координат и является сверхквадратичной на одной стороне. Кроме того, существование уединенных волн вблизи так называемого предела длинной волны было установлено в [14, 25] для гладкого (C^3) потенциала V . Точнее, для $\kappa > 0$ и $V'''(0) \neq 0$ (т.е. $\alpha = 2$ в (3)), существует семейство уединенных волн с малой амплитудой, параметризованной скоростью $c \geq c_s := \sqrt{\kappa}$, где c_s определяет «звуковую скорость» линейных волн. Эти решения принимают форму

$$u_n(t) = \kappa(4V'''(0))^{-1} \varepsilon^2 z(\varepsilon(n - ct)) + \text{члены более высокого порядка},$$

где $\varepsilon = \sqrt{24(c - c_s)/c_s}$ и $z(\eta) = \operatorname{sech}^2(\eta/2)$. В частности, эти уединенные волны затухают в пространстве экспоненциально и становятся широкими в пределе малой амплитуды. Такие волны описываются с помощью разложения:

$$u_n(t) = \kappa(4V'''(0))^{-1} \varepsilon^2 y(\xi, \tau) + \text{члены более высокого порядка}, \quad (4)$$

где $\xi := \varepsilon(n - c_s t)$, $\tau := \varepsilon^2 c_s t / 24$ и $y(\xi, \tau) := z(\xi - \tau)$ является уединенной волной уравнения Кортевега-де Вриза (КдВ):

$$\partial_\tau y + 3y \partial_\xi y + \partial_\xi^3 y = 0. \quad (5)$$

В более общем случае решения $y: \mathbf{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ уравнения КдВ (5) дают решения ФПУ-системы в форме (4), действительные на шкале времени $\mathcal{O}(\varepsilon^{-3})$ [6, 30, 48]. На самом деле, еще более общий случай, действительный для $\alpha \geq 2$ доказан в [48], что приводит к обобщенному уравнению КдВ, где квадратичный член заменяется y^α -нелинейностью. Кроме того, нелинейная устойчивость уединенных волн малой амплитуды была доказана в [15 – 17, 23, 37], а существование и устойчивость асимптотических N -солитонных решений в [21, 22, 38, 39]. Эти результаты позволяют описать распространение уединенных волн в однородных зернистых цепочках при предварительном сжатии [41].

Другой интересный случай соответствует сильно-нелинейным потенциалом взаимодействия, где $\kappa = 0$ (что соответствует исчезающей скорости звука, т.е. $c_s = 0$) и V имеет локальный минимум в начале координат. Классический пример дается потенциалом Герца:

$$V(x) = \frac{1}{1+\alpha} |x|^{1+\alpha} H(-x), \quad (6)$$

с $\alpha > 1$ и $H(x)$ – ступенчатой функцией Хевисайда. Этот потенциал описывает силу контакта между двумя первоначально касающимися упругими телами (при отсутствии предварительного сжатия) после небольшого смещения x [20]. Наиболее классический случай получается при $\alpha = 3/2$ и соответствует контакту между сферами или, в более общем случае, двумя гладкими несогласованными поверхностями. Недавно были рассмотрены зернистые материалы с участием нелинейностей разных порядков [32, 49, 51, 52]. В частности, экспериментальные исследования распространения уединенных волн были

проведены с цепочками полых сферических частиц различной ширины, ведущей к различным значениям α в диапазоне $1.2 \leq \alpha \leq 1.5$ [42].

Распространение стационарных импульсов сжатия в ФПУ-решетке (1) с потенциалом (6) для $\alpha = 3/2$ было впервые проанализировано Нестеренко [40, 41]. Эти результаты опираются на формальный континуальный предел и позволяют получать приближенные решения уединенной волны. Континуальный предел был также рассмотрен в [4] для произвольных значений $\alpha > 1$, ведущих к различным приближениям уединенных волн. Существование точного решения для уединенной волны в ФПУ-решетке (1) с потенциалом (6) следует из общих результатов в [18], упоминавшихся ранее (см. также [27, 35, 50]). Ширина этих солитонов не зависит от их амплитуды в связи с однородной нелинейностью потенциала Герца. Кроме того, сильно нелинейный характер потенциала Герца индуцирует дважды экспоненциальное пространственное затухание уединенных волн [13].

Хотя приведенные ранее аналитические результаты дают полезную информацию о сильно локализованных одиночных волнах, они не являются полностью удовлетворительными по нескольким причинам. Прежде всего, наличие результата [18] не обеспечивает приближения одиночного профиля волны, а приближения, доступные в литературе [4, 41], полагаются на предположение длинных волн, что не оправдано (например, уединенные волны, рассмотренные в [41], локализованы на пяти частицах). Кроме того, динамические свойства уединенных волн в сильно нелинейных ФПУ-решетках еще не изучены. Действительно, нет доступных математических результатов в отношении их устойчивости или существования N -солитонного решения. Другой интересной задачей является описание возбуждения одной или нескольких уединенных волн из локализованного начального возмущения [20, 28]. Для $c_s \neq 0$ и длинных волн малой амплитуды, эта задача может быть частично проанализирована в рамках приближения КдВ с помощью метода обратной задачи рассеяния [1, 12], но такое упрощение в настоящее время недоступно для сильно нелинейной ФПУ-решетки. Эти вопросы важны для анализа воздействия распространения в зернистой среде [2, 20, 33, 34].

В данной работе мы обратимся к проблеме с новой точки зрения. Мы не будем прибегать к полно нелинейным версиям уравнения Буссинеска, рассмотренным в [4, 41], так как эти модели обычно не являются хорошо обусловленными. Вместо этого мы формально получим в пределе $\alpha \rightarrow 1^+$ логарифмическое уравнение КдВ (log-КдВ) в качестве модуляционного уравнения для длинных волн в полно нелинейной ФПУ-решетке. Это уравнение допускает решения уединенных волн Гауссовой формы, которые ранее были идентифицированы как решения стационарного логарифмического нелинейного уравнения Шрёдингера (log-NLS) в контексте нелинейной волновой механики [7]. В контексте нашей работы было также установлено, что Гауссовские решения аппроксимируют стационарные бризеры в маятнике Ньютона (т.е. система (1) и (6) с дополнительным собственным потенциалом) в пределе $\alpha \rightarrow 1^+$ [26].

Статья составлена следующим образом. Разд. 1 содержит формальный вывод уравнения Кортевег-де Вриза с логарифмической нелинейностью. Стационарные решения в виде Гауссовых уединенных волн получены в разд. 2. Эти решения сопоставляются с численными решениями для уединенных волн в зернистых цепочках, а также с аппроксимациями в виде компактных волн. Разд. 3 дает детали анализа для обоснования вывода Гауссовых уединенных волн в пространстве решений быстро убывающих на бесконечности. Спектральная устойчивость Гауссовых уединенных волн в рамках уравнения Кортевег-де Вриза доказана в разд. 4. Мы также показываем, что компактные волны не устойчивы в уравнении типа Буссинеска, временная динамика которого является плохо обусловленной. В заключение суммируются результаты, полученные в статье.

1. Формальный вывод уравнения log-КдВ

Рассмотрим ФПУ-решетку (1) с однородным потенциалом взаимодействия:

$$V(x) = \frac{1}{1+\alpha} |x|^{1+\alpha}, \quad (7)$$

где $\alpha > 1$ фиксированное. Очевидно, что все решения $u_n \leq 0$ ФПУ-решетки (1) с потенциалом (7) также являются решениями ФПУ-решетки (1) с потенциалом (6). Задача может быть переписана в терминах относительных смещений следующим образом:

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \Delta(u |u|^{\alpha-1})_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (8)$$

где обозначено $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ и $(\Delta u)_n = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}$ – дискретный оператор Лапласа.

Чтобы перейти к пределу $\alpha \rightarrow 1^+$ для длинных волн, удобнее переписать (8) в виде

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \Delta \right) u = \Delta f_\alpha(u), \quad (9)$$

где

$$f_\alpha(u) := u(|u|^{\alpha-1} - 1) = (\alpha - 1)u \ln |u| + O((\alpha - 1)^2). \quad (10)$$

Для $\alpha = 1$, $f_1(u) = 0$ и система (9) сводится к линейному дискретному волновому уравнению, где масштабирование (4) (с $c_s = 1$) дает линейризованное уравнение КдВ для огибающей функции u . Для анализа предела $\alpha \rightarrow 1^+$, мы предполагаем тот же тип масштабирования решения u в форме

$$u(t) = v(\xi, \tau) + O(\varepsilon), \quad \xi := 2\sqrt{3}\varepsilon(n-t), \quad \tau := \sqrt{3}\varepsilon^3 t, \quad (11)$$

где $v(\xi, \tau)$ даёт ведущий член в медленных переменных ξ и τ , $O(\varepsilon)$ является остаточным членом, а $\varepsilon > 0$ – малый параметр. В отличие от (4), амплитуду решения можно предположить величиной порядка единицы, в связи с масштабной инвариантностью ФПУ-решетки (1) с потенциалом (7) для $\alpha > 1$. Разлагая операторы в ряд Тейлора и используя правила дифференцирования сложной функции, мы получаем

$$\Delta = 12\varepsilon^2 \partial_\xi^2 (1 + \varepsilon^2 \partial_\xi^2 + O(\varepsilon^4)) \quad (12)$$

и

$$\frac{d^2}{dt^2} - \Delta = -12\varepsilon^4 \partial_\xi (\partial_\tau + \partial_\xi^3) + O(\varepsilon^6). \quad (13)$$

Для оценки правой части (9), воспользуемся разложением

$$f_\alpha(u) = f_\alpha(v + O(\varepsilon)) = (\alpha - 1)v \ln |v| + O((\alpha - 1)^2 + |\alpha - 1|\varepsilon |\ln \varepsilon|).$$

Полагая теперь $\varepsilon := \sqrt{\alpha - 1} > 0$ и используя (12), мы получаем

$$\Delta f_\alpha(u) = 12\varepsilon^4 \partial_\xi^2 (v \ln |v|) + O(\varepsilon^5 |\ln \varepsilon|). \quad (14)$$

При таком выборе ε , левая и правая части уравнения (9) имеют одинаковый порядок ε^4 в соответствии с разложениями (13) и (14). Подстановка этих разложений в (9) даёт

$$\varepsilon^4 \partial_\xi (\partial_\tau v + \partial_\xi^3 v + \partial_\xi (v \ln |v|)) + O(\varepsilon^5 |\ln \varepsilon|) = 0.$$

Тогда, пренебрегая членами более высокого порядка и интегрируя по ξ , получаем

$$\partial_\tau v + \partial_\xi^3 v + \partial_\xi (v \ln |v|) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

где постоянная интегрирования была выбрана нулевой, чтобы удовлетворить условию, когда $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} v(\xi, \tau) = 0$. Уравнение (15) следует называть логарифмическим уравнением КдВ (log-КдВ). Оно может быть переписано как

$$\partial_\tau v + \partial_\xi^3 v + \partial_\xi (W'(v)) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (16)$$

где потенциал W гласит

$$W(v) = \frac{v^2}{2} \left(\ln |v| - \frac{1}{2} \right).$$

Заметим, что если v является решением (15), то и $-v$ тоже решение. Кроме того, уравнение (15) допускает нестандартную симметрию Галилея с участием масштабирования амплитуды, т.е. каждое решение v порождает семейство решений с одним параметром

$$[\varphi(c) \cdot v](\xi, \tau) := e^c v(\xi - c\tau, \tau), \quad c \in \mathbf{R}. \quad (17)$$

В частности, все решения бегущих волн уравнения log-КдВ (15) могут быть выведены из стационарных решений.

Уравнение (15) попадает в класс обобщенных уравнений КдВ. Системы этого класса обладают тремя (формально) сохраняющимися величинами, а именно массой

$$M(v) = \int_{\mathbf{R}} v d\xi, \quad (18)$$

импульсом

$$P(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} v^2 d\xi \quad (19)$$

и энергией

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} (\partial_\xi v)^2 d\xi - \int_{\mathbf{R}} W(v) d\xi. \quad (20)$$

2. Стационарные решения

Будем искать решение уравнения log-КдВ (15), зависящее только от ξ . В этом случае получаем стационарное уравнение

$$\frac{d^3 v}{d\xi^3} + \frac{d}{d\xi} W'(v) = 0. \quad (21)$$

Интегрируя один раз в предположении $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} v(\xi) = 0$, получаем

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + W'(v) = 0, \quad (22)$$

что эквивалентно

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + v \ln |v| = 0. \quad (23)$$

Это уравнение можно рассматривать как (одномерное) стационарное уравнение log-NLS [7].

Потенциал W в (22) имеет двухямную структуру с седлом при $v = 0$ (см. рис. 1), следовательно, существует пара (симметричных) гомоклинических орбит и большое разнообразие периодических орбит. Гомоклинические решения приобретают явный вид

$$v(\xi) = \pm \sqrt{e} e^{-\frac{\xi^2}{4}}. \quad (24)$$

Заметим, что эти (Гауссовы) гомоклинические решения затухают сверхэкспоненциально, но не затухают дважды экспоненциально в отличие от гомоклинических решений дифференциального уравнения с запаздыванием

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \Delta(w|w|^{\alpha-1}), \quad z \in \mathbf{R}. \quad (25)$$

Это уравнение следует из ФПУ-решетки (8) для бегущих волновых решений

$$u_n(t) = w(z = n - t).$$

Дважды экспоненциальное затухание гомоклинических решений в дифференциальном уравнении с запаздыванием (25) было установлено в работах [13, 50].

Еще одно интересное наблюдение – связь между Гауссовыми решениями (24) и

компактными уединенными волнами в усеченном варианте уравнения (25), проинтегрированном дважды:

$$w = w|w|^{\alpha-1} + \frac{1}{12} \frac{d^2}{dz^2} w|w|^{\alpha-1}, \quad z \in \mathbf{R}. \tag{26}$$

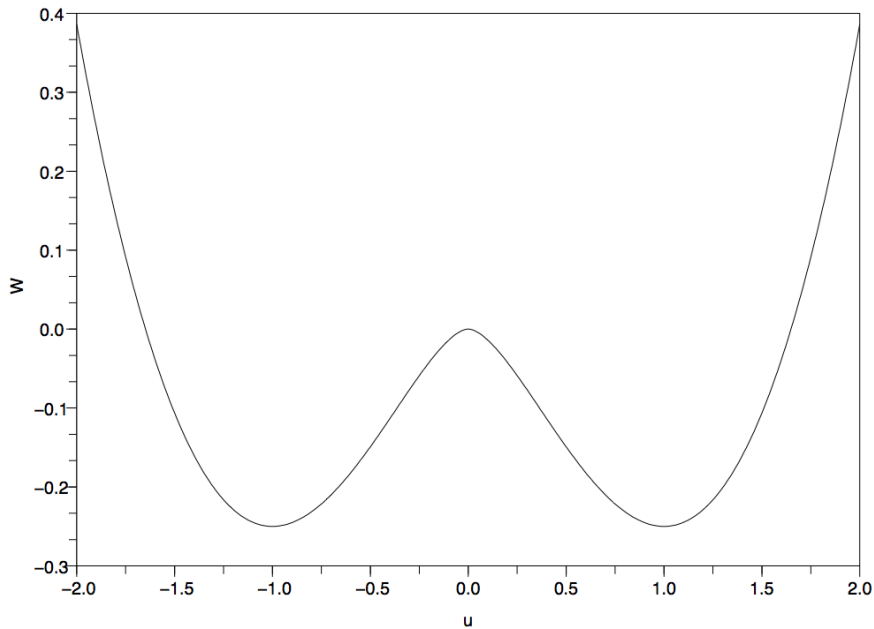


Рис. 1. График двухямного логарифмического потенциала W

Данное уравнение имеет уединённое решение, найденное в [4]:

$$w(z) = \begin{cases} a \cos^c(bz), & |z| \leq \frac{\pi}{2b}, \\ 0, & |z| \geq \frac{\pi}{2b}, \end{cases} \tag{27}$$

где

$$a = \left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad b = \frac{\sqrt{3}(\alpha-1)}{\alpha}, \quad c = \frac{2}{\alpha-1}.$$

Отметим, что компактный носитель $[-\pi/2b, \pi/2b]$ расширяется на всю линию при $\alpha \rightarrow 1^+$. Положим $\varepsilon := \sqrt{\alpha-1}$, $\xi := 2\sqrt{3}\varepsilon z$, и применим разложения

$$a = \left(\frac{2+\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon^2)}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = e^{-\frac{1}{\varepsilon^2} \log\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon^2)}\right)} = \sqrt{e} \left(1 + O(\varepsilon^2)\right)$$

и

$$\cos^c(bz) = e^{\frac{2}{\varepsilon^2} \log \cos\left(\frac{\varepsilon \xi}{2(1+\varepsilon^2)}\right)} = e^{\frac{2}{\varepsilon^2} \log\left(1 - \frac{\varepsilon^2 \xi^2}{8(1+\varepsilon^2)^2} + O(\varepsilon^4 \xi^4)\right)} = e^{-\frac{\xi^2}{4}} \left(1 + O(\varepsilon^2 \xi^4)\right).$$

Для любого фиксированного $\xi \in \mathbf{R}$, компактная уединенная волна (27) сходится к Гауссовой уединенной волне (24) при $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Обоснование вывода компактных уединенных волн (27) практически невозможно, поскольку трудно оправдать обрезание дифференциального уравнения с запаздыванием (26). В то же время, мы покажем, что

Гауссова уединенная волна (24) возникает в строгой редукции решений дифференциального уравнения с запаздыванием (25) при $\alpha \rightarrow 1^+$.

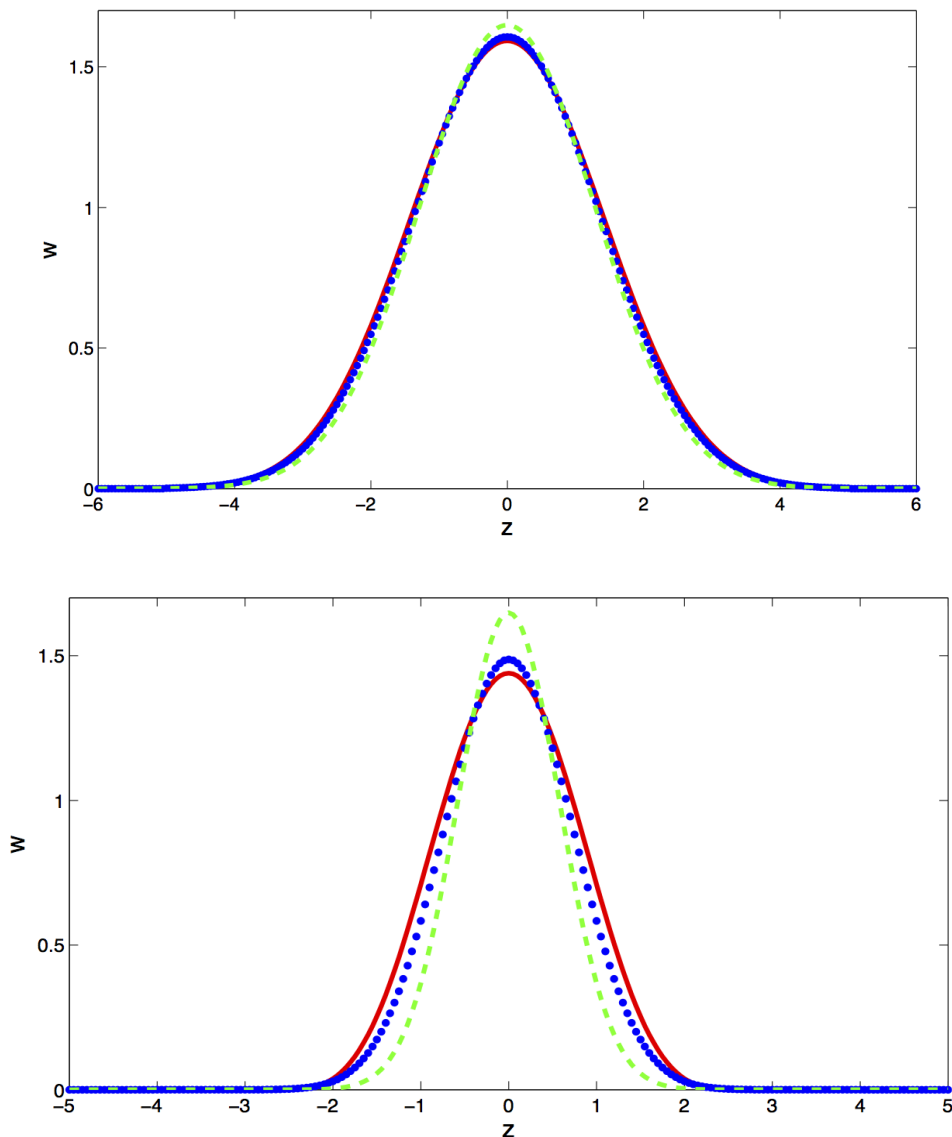


Рис. 2. Волновые решения (пунктирная линия) дифференциального уравнения с запаздыванием (25) в сравнении с компактными уединенными волнами (сплошная линия), задающимися уравнением (27), и Гауссовыми уединенными волнами (штриховая линия), задающимися уравнением (24), для $\alpha = 1.1$ (сверху) и $\alpha = 1.5$ (снизу)

На рис. 2 представлены уединенные волновые решения дифференциального уравнения с запаздыванием (25) в сравнении с точными решениями (27) и (24) для компактных и Гауссовых уединенных волн. Численные аппроксимации решений уединенных волн были получены с использованием итерационного алгоритма, основанного на перенормировке нормы L^1 [4].

Максимальное расстояние между уединенными волновыми решениями дифференциального уравнения с запаздыванием (25) и двух аппроксимаций компактных уединенных волн (27) и Гауссовой уединенной волны (24) как функции от α представлено на рис. 3. Гауссовы уединенные волны обеспечивают худшую аппроксимацию по сравнению с компактными уединенными волнами, но ошибки обеих аппроксимаций стремятся к нулю при $\alpha \rightarrow 1^+$.

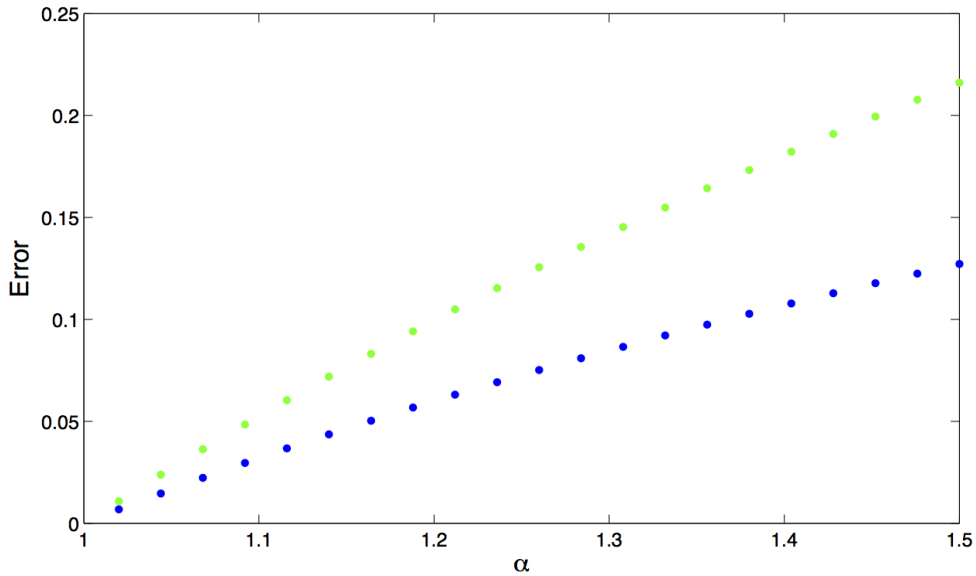


Рис. 3. Максимальное расстояние между уединенными волновыми решениями дифференциального уравнения с запаздыванием (25) и компактными уединенными волнами (темные точки) или Гауссовыми уединенными волнами (светлые точки) в зависимости от параметра α

3. Обоснование вывода Гауссовых уединенных волн

Рассмотрим уединенные волновые решения дифференциального уравнения с запаздыванием (25), существование которых было установлено для любого $\alpha > 1$ в работах [18, 27, 35, 50]. Докажем, что семейство уединенных волн сходится к Гауссовой уединенной волне (24), когда $\alpha \rightarrow 1^+$. Благодаря трансформации $w \rightarrow -w$, достаточно работать только с положительными уединенными волнами.

Запишем дифференциальное уравнение с запаздыванием (25) для положительного w в эквивалентной форме Фурье:

$$\hat{w}(k) = \frac{4}{k^2} \sin^2\left(\frac{k}{2}\right) \widehat{\wedge} w^{1+\varepsilon^2}(k), \quad k \in \mathbf{R}, \tag{28}$$

где $\alpha = 1 + \varepsilon^2$ и крышка обозначает преобразование Фурье $\hat{w}(k) = \int_{\mathbf{R}} w(z) e^{ikz} dz$.

Разобьем бесконечную линию по k на два интервала $I := [-\varepsilon^p, \varepsilon^p]$ и $\mathbf{R} \setminus I$, где положительная константа p будет определена позже. Метод разложения решений в пространстве Фурье недавно был использован в [9, 24, 46, 47] для обоснования асимптотических представлений стационарных состояний в периодических потенциалах. Следовательно, мы разложим

$$\hat{w}(k) = \hat{V}(k) \chi_I(k) + \hat{W}(k) \chi_{\mathbf{R} \setminus I}(k), \tag{29}$$

где χ_S является характеристической функцией множества $S \subset \mathbf{R}$. Аналогично, мы пишем $w = V + W$ по переменной z .

Применяя преобразование Фурье к положительному Гауссову решению (24), переписанному по переменной z с $\xi = 2\sqrt{3}\varepsilon z$, получаем

$$v(z) = \sqrt{e} e^{-3\varepsilon^2 z^2} \Rightarrow \hat{v}(k) = \sqrt{\frac{\pi e}{3\varepsilon^2}} e^{-\frac{k^2}{12\varepsilon^2}}. \tag{30}$$

Это вычисление подсказывает нам искать решения интегрального уравнения (28) в пространстве непрерывных четных функций с Гауссовым затуханием по z и k :

$$X := \left\{ w \in C_{\text{even}}^0(\mathbf{R}) : |w(z)| \leq \alpha e^{-\gamma \varepsilon^2 z^2}, \quad \widehat{w^{1+\varepsilon^2}}(k) \leq \beta \varepsilon^{-1} e^{-\delta \varepsilon^{-2} k^2} \right\}, \quad (31)$$

где α, β, γ и δ положительные константы, не зависящие от ε .

Из интегрального уравнения (28) на $\mathbf{R}I$ в функциональном пространстве (31) получаем оценку

$$|\widehat{W}(k)| \leq \frac{4\beta}{k^2 \varepsilon} e^{-\delta \varepsilon^{-2} k^2}, \quad |k| \geq \varepsilon^p,$$

которая экспоненциально мала при $\varepsilon \rightarrow 0$, если $p < 1$. Поскольку

$$W(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|k| \geq \varepsilon^p} W(k) e^{-ikz} dk \Rightarrow |W(z)| \leq \frac{4\beta}{\pi \varepsilon^{1+p}} e^{-\delta \varepsilon^{2p-2}},$$

то максимум W экспоненциально мал по ε . Кроме того, хвосты w затухают быстро [13], поэтому W удовлетворяет условию $|W(z)| \leq \alpha e^{-\gamma \varepsilon^2 z^2}$ для некоторых $\alpha, \gamma > 0$. По теореме о неявной функции для любого V в разложении (29) из функционального пространства (31), существует единственное W из решения интегрального уравнения (28) по $\mathbf{R}I$ таким, что $V + W$ по-прежнему принадлежит функциональному пространству (31).

Теперь мы можем перейти к решению интегрального уравнения (28) на I . Раскладывая правую часть в ряд Тейлора по k и ε , получаем

$$\begin{aligned} \widehat{V}(k) = & \left(1 - \frac{k^2}{12} + O(\varepsilon^{4p}) \right) \left(\widehat{V}(k) + \varepsilon^2 (V + W) \log(V + W)(k) + \right. \\ & \left. + O(\varepsilon^4 (V + W) \log^2(V + W)(k)) \right), \quad |k| \leq \varepsilon^p. \end{aligned} \quad (32)$$

Поскольку W экспоненциально мала по ε , равенство (32) может быть переписано в виде

$$0 = -\frac{k^2}{12} \widehat{V}(k) + \varepsilon^2 V \log(V)(k) + O(\varepsilon^{4p} \widehat{V}(k) + \varepsilon^4 V \log^2(V)(k)), \quad |k| \leq \varepsilon^p. \quad (33)$$

Усеченная версия (33) для первых двух слагаемых имеет вид

$$0 = -\frac{k^2}{12} \widehat{V}(k) + \varepsilon^2 V \log(V)(k), \quad |k| \leq \varepsilon^p \quad (34)$$

и ему удовлетворяет Гауссово решение (30). Мы воспользуемся теоремой о неявной функции для продолжения решений. Линеаризуя уравнение (34) на решении (30) мы получим

$$\begin{aligned} [G(\widehat{v})v](k) & := \left(\varepsilon^2 - \frac{k^2}{12} \right) \widehat{v}(k) + \varepsilon^2 \log(v)v(k) = \\ & = \left(\frac{3\varepsilon^2}{2} - \frac{k^2}{12} \right) \widehat{v}(k) + 3\varepsilon^2 \frac{d^2 \widehat{v}}{dk^2}. \end{aligned}$$

Оператор $G(v)$ в форме Фурье определен для $k \in I$ с учетом граничных условий Дирихле на границе I . Обозначим расширение $G(v)$ для всех $k \in \mathbf{R}$ с помощью $L(v)$. По переменной z , $L(v)$ эквивалентно оператору Шрёдингера с гармоническим потенциалом

$$L(v) := \frac{1}{12} \partial_z^2 + \frac{3\varepsilon^2}{2} - 3\varepsilon^2 z^2. \quad (35)$$

Этот оператор имеет чисто дискретный спектр простых собственных значений, расположенных на одинаковом расстоянии при $\varepsilon^2(1 - n)$, где $n \in \mathbf{N}_0$. Нулевое собственное значение соответствует симметрии по отношению к сдвигу и оно отсутствует в пространстве

четных функций. В результате, оператор $L(v)$ имеет ограниченную резольвенту в пространстве четных функций с размером $O(\varepsilon^{-2})$.

Так как $G(v)$ получено из $L(v)$ путем обрезания в пространстве Фурье на I и собственные функции оператора $L(v)$ экспоненциально малы по ε в $\mathbf{R} \setminus I$, если $p < 1$, то собственные значения $G(v)$ не находятся точно в $\varepsilon^2(1 - n)$, но экспоненциально близки к этим значениям. Следовательно, оператор $G(v)$ также имеет ограниченную резольвенту в пространстве четных функций с размером $O(\varepsilon^{-2})$. Решая (33) с применением теоремы о неявной функции в функциональном пространстве (31), получаем единственное решение V для всех малых $\varepsilon > 0$, где поправка к решению (30) удовлетворяет оценке

$$\sup_{z \in \mathbf{R}} |v(z)| \leq C\varepsilon^{4p-2},$$

для некоторой положительной константы C , не зависящей от ε . Остаточный член является малым по ε , если $p > 1/2$. Таким образом, у нас есть непустой интервал значений p в $(1/2, 1)$, для которого работает анализ. Следовательно, уединенное волновое решение дифференциального уравнения с запаздыванием (25) сходится к Гауссовой уединенной волне (24), когда $\alpha \rightarrow 1^+$.

4. Спектральная устойчивость уединенных волн Гаусса

Уравнение log-КдВ (16) может быть записано в Гамильтоновой форме:

$$\partial_\tau v = \partial_\xi E'(v), \quad (36)$$

связанной с энергией (20). Гауссова уединенная волна (24) является стационарной точкой энергией $E(v)$ в том смысле, что $E'(v) = 0$, в то время как семейство бегущих уединенных Гауссовых волн, полученных с помощью трансформации (17), является стационарной точкой функционала $E(v) + cP(v)$. Вторая вариация $E(v)$ на уединенной Гауссовой волне (24) задается оператором Шрёдингера с гармоническим потенциалом:

$$L := E''(v) = -\partial_\xi^2 - 1 - \log |v| = -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{3}{2} + \frac{\xi^2}{4}, \quad (37)$$

с областью определения $D(L) = H^2(\mathbf{R}) \cap L_2^2(\mathbf{R})$ плотной в $L^2(\mathbf{R})$.

Спектральная устойчивость Гауссовой уединенной волны определяется расположением собственных значений из несамосопряженной задачи о собственных значениях

$$\partial_\xi Lw = \lambda w, \quad (38)$$

где (λ, w) является парой собственного значения и собственного вектора, возникающей в возмущении $w(\xi)e^{\lambda\tau}$ уединенной волны $v(\xi)$.

Спектр L чисто дискретный и состоит из простых собственных значений при целых $n - 1$, где $n \in \mathbf{N}_0$ (множество натуральных чисел и ноль). В частности, L имеет одно отрицательное собственное значение и простое нулевой собственное значение, в то время, как остальная часть спектра ограничена от нуля положительными числами. Собственный вектор для $\text{Ker}(L)$ есть $f_0 = \partial_\xi v$ и он принадлежит $D(L) \cap D(\partial_\xi L \partial_\xi) \cap H^1(\mathbf{R})$.

Основные предположения спектральной теории устойчивости выполняются для эволюционного уравнения типа КдВ (см. недавние работы [31, 45] и более ранние ссылки в них). Поэтому мы применяем основные результаты [31, 45] с некоторыми модификациями.

Спектр $\partial_\xi L$ чисто дискретный. Если существуют собственные значения с $\text{Re}(\lambda) > 0$, тогда уединенная волна является спектрально неустойчивой. Если все собственные значения расположены на мнимой оси, то уединенная волна называется спектрально устойчивой. В силу симметрии спектральной задачи (38), если $w(\xi)$ есть собственный вектор для собственного значения λ , то $w(-\xi)$ есть собственный вектор для собственного значения $-\lambda$. Эта Гамильтонова симметрия предполагается в [45].

Согласно основной теореме в [31, 45], уединенная волна спектрально устойчива если $n(L) = n_0$, где $n(L) = 1$ число отрицательных собственных значений L и $n_0 = 1$, если

$$\langle L^{-1} \partial_{\xi}^{-1} f_0, \partial_{\xi}^{-1} f_0 \rangle = \langle L^{-1} v, v \rangle < 0. \quad (39)$$

Для проверки предположения (39), заметим, что если $v_c := e^c v$ есть бегущее волновое решение, удовлетворяющее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 v_c}{d\xi^2} + v_c \ln |v_c| = c v_c, \quad (40)$$

тогда $L \partial_c v_c = -v_c$. В результате получаем

$$\langle L^{-1} v, v \rangle = -\langle \partial_c v_c, v_c \rangle |_{c=1} = -\partial_c P(v_c) |_{c=1} = -\|v\|^2 < 0.$$

Здесь был использован импульс $P(v_c) = e^{2c} P(v)$, определенный в (19).

Таким образом, предположения основных результатов из [31, 45] проверены, и Гауссова уединенная волна (24) является спектрально устойчивой. Нам хотелось бы сравнить результат спектральной устойчивости для уравнения log-КдВ (16) с прогнозами формальной физической теории из [4] на компактных уединенных волнах.

Из рис. 2 и рис. 3 следует, что дифференциальное уравнение с запаздыванием (25) для любого $\alpha > 1$ хорошо аппроксимируется компактными уединенными волнами дифференциального уравнения (26). Зависящая от времени версия того же уравнения для положительных решений задается с помощью нелинейного уравнения Буссинеска

$$u_t = (u^\alpha)_{xx} + \frac{1}{12} (u^\alpha)_{xxx} \quad (41)$$

Линеаризуя на компактной уединенной волне w в системе отсчета перемещающейся с единичной скоростью, мы подставляем $u(x, t) = w(x - t) + U(x - t)e^{\lambda t}$, где λ спектральный параметр, а U член возмущения, и приходим к задаче спектральной устойчивости:

$$(\lambda - \partial_z)^2 U = \left(\partial_z^2 + \frac{1}{12} \partial_z^4 \right) (VU), \quad (42)$$

где $z = x - t$ и $V(z) := \alpha w^{\alpha-1}(z)$. Заметим, что $V(z) \sim \cos^2(bz)$, следовательно, V и V' обращаются в нуль в конечных точках $z = \pm \pi/2b$ компактного носителя w .

Рассмотрим спектральную задачу в функциональном пространстве

$$X = \{U \in H^2(\mathbf{R}), VU \in H^4(\mathbf{R})\},$$

что позволяет обрезать пространственную область на компактном интервале $\left[-\frac{\pi}{2b}, \frac{\pi}{2b}\right]$, где

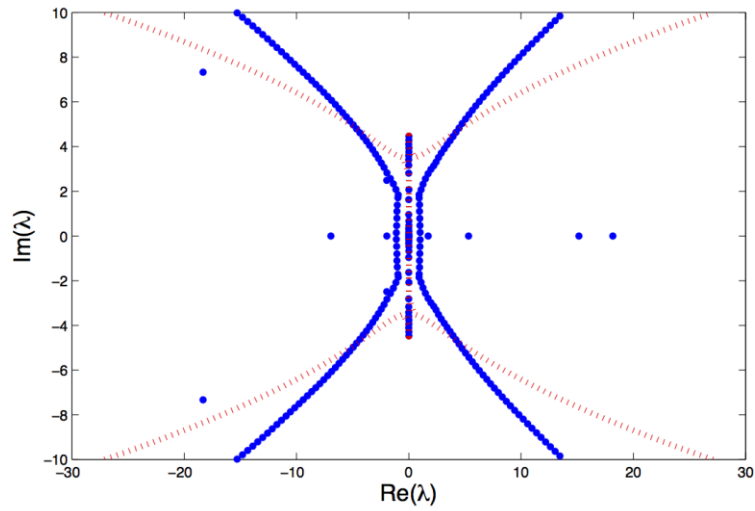
b определено в (27), с учетом граничных условий

$$U\left(\pm \frac{\pi}{2b}\right) = 0, \quad U'\left(\pm \frac{\pi}{2b}\right) = 0. \quad (43)$$

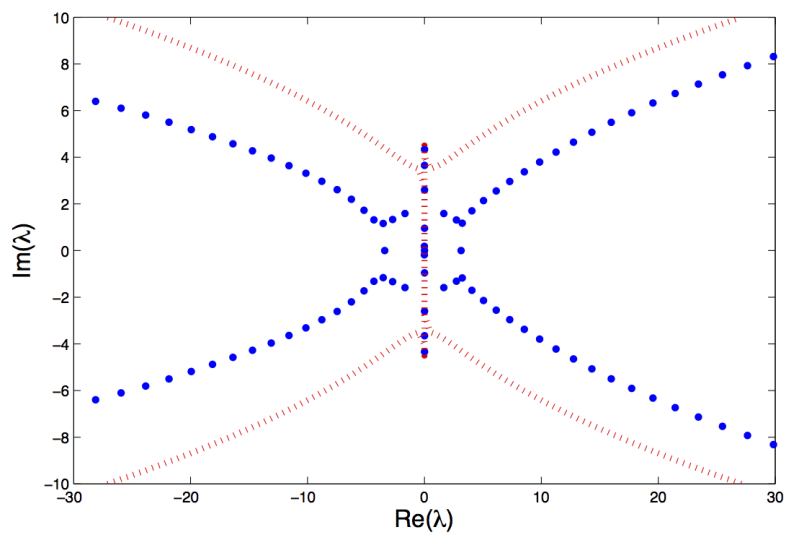
Задача спектральной устойчивости (42) может быть решена точно для $\alpha = 1$, когда $V(z) = 1$ для всех $z \in \mathbf{R}$, поскольку компактный интервал расширяется на всю действительную ось при $\alpha \rightarrow 1$ (когда $b \rightarrow 0$). В этом случае спектр чисто непрерывный и его расположение вдоль двух непрерывных кривых может быть найдено с использованием преобразования Фурье:

$$\lambda = \lambda_{\pm}(k) := ik \pm k\sqrt{k^2/12 - 1}, \quad k \in \mathbf{R}. \quad (44)$$

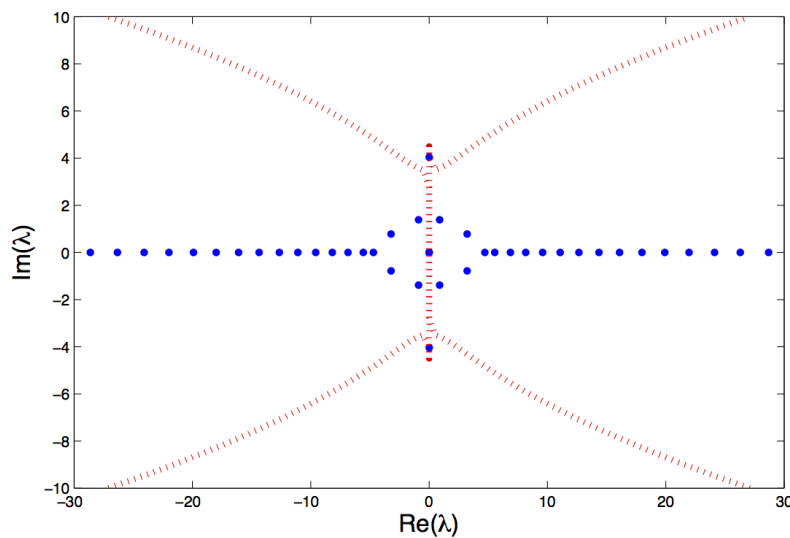
Для $\alpha > 1$, задача спектральной устойчивости (42) с граничными условиями (43) имеет чисто дискретный спектр, который может быть аппроксимирован стандартным методом центральных конечных разностей. Собственные значения задачи спектральной устойчивости (42) показаны на рис. 4 точками. Пунктирная кривая показывает непрерывный спектр (44) для $\alpha = 1$.



a)



b)



v)

Рис. 4. Собственные значения задачи спектральной устойчивости (42) и (43):
 $a - \alpha = 1.05$; $b - \alpha = 1.2$; $v - \alpha = 1.5$

При α увеличивающейся от $\alpha = 1$, собственные значения отходят от непрерывного спектра (44). Собственные значения приближаются к действительной оси далеко от начала координат. Непрерывный спектр (44) и изолированные собственные значения на рис. 4 иллюстрируют плохую обусловленность нелинейного уравнения Буссинеска (41), которая была доказана для частного случая нелинейного вырожденного уравнения в [5]. Подчеркнем, что приближение уединенных волн с уравнением \log -КдВ (16) свободно от этого недостатка модели и предсказывает спектральную устойчивость Гауссовых уединенных волн (24).

Заключение

В данной работе получена новая модификация уравнения Кортевега-де Вриза, при описании динамики зернистых цепочек с сильно нелинейными потенциалами. Уравнение Кортевега-де Вриза характеризуется логарифмическими нелинейностями и имеет семейство точных решений в виде Гауссовых уединенных волн. Доказано, что Гауссовы уединенные волны являются устойчивыми во временной динамике уравнения Кортевега-де Вриза. Также доказано, что Гауссовы уединенные волны хорошо аппроксимируют уединенные волны в зернистых цепочках. Ошибка аппроксимации может быть оценена в пространствах с быстрым затуханием на бесконечности.

Представленные результаты поисковой научно-исследовательской работы получены в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009 – 2013 годы» (соглашение № 14.В37.21.0868).

Библиографический список

1. **Ablowitz M.J.** Nonlinear Dispersive Waves: Asymptotic Analysis and Solitons, Cambridge Texts in Applied Mathematics / M.J. Ablowitz. – Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
2. **Acary, V.** Concurrent multiple impacts modelling: Case study of a 3-ball chain / V. Acary, B. Brogliato // Proc. of the MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, 2003 (K.J. Bathe, Ed.), Elsevier Science, P. 1836–841.
3. **Afshari, E.** Nonlinear transmission lines for pulse shaping in silicon / E. Afshari, A. Hajimiri // IEEE Journal of Solid-State Circuits. 2005. V. 40. P. 744–752.
4. **Ahnert, K.** Compactons and chaos in strongly nonlinear lattices / K. Ahnert, A. Pikovsky // Phys. Rev. E. 2009. V. 79. P. 026209.
5. **Ambrose, D.M.** Ill-posedness of degenerate dispersive equations / D.M. Ambrose, G. Simpson, J.D. Wright, D.G. Yang // Nonlinearity. 2012. V. 25. P. 2655–2680.
6. **Bambusi, D.** On metastability in FPU / D. Bambusi, A. Ponno // Comm. Math. Phys. 2006. V. 264. P. 539–561.
7. **Bialynicki-Birula, I.** Nonlinear Wave Mechanics / I. Bialynicki-Birula, J. Mycielski // Annals of Physics. 1976. V. 100. P. 62–93.
8. **Campbell, D.K.** The Fermi-Pasta-Ulam problem : the first 50 years / D.K. Campbell [et al.] // Chaos. 2005. V. 15.
9. **Dohnal, D.** Coupled-mode equations and gap solitons for the 2D Gross-Pitaevskii equation with a non-separable periodic potential / D. Dohnal, H. Uecker // Physica D. 2009. V. 238. P. 860–879.
10. **Dou, Q.** Breathers and kinks in a simulated breather experiment / Q. Dou, J. Cuevas, J.C. Eilbeck, F.M. Russell // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2011. Ser. S4. P. 1107 – 1118.
11. **Dubovsky, O.A.** Emission of supersonic soliton wave beams - generators of restructuring of nanocrystals under atom bombardment, and the self-organization of a dynamic superlattice of complexes of soliton atomic vibrations / O.A. Dubovsky, A.V. Orlov // Phys. of solid state. 2010. V. 52. P. 899–903.
12. **Eckhaus, W.** The Inverse Scattering Transformation and Solitons: An Introduction, Math. Studies 50 / W. Eckhaus, A. Van Harten. – Amsterdam: North-Holland, 1984.
13. **English, J.M.** On the solitary wave pulse in a chain of beads / J.M. English, R.L. Pego // Proc. Amer. Math. Soc. 2005. V. 133. No. 6. P. 1763 – 1768.
14. **Friesecke, G.** Solitary waves on FPU lattices : I. Qualitative properties, renormalization and continuum limit / G. Friesecke, R.L. Pego // Nonlinearity. 1999. V. 12. P. 1601 – 1627.

15. **Friesecke, G.** Solitary waves on FPU lattices : II. Linear implies nonlinear stability / G. Friesecke, R.L. Pego // *Nonlinearity*. 2002. V. 15. P. 1343–1359.
16. **Friesecke, G.** Solitary waves on FPU lattices : III. Howland-type Floquet theory / G. Friesecke, R.L. Pego // *Nonlinearity*. 2004. V. 17. P. 207–227.
17. **Friesecke, G.** Solitary waves on FPU lattices : IV. Proof of stability at low energy / G. Friesecke, R.L. Pego // *Nonlinearity*. 2004. V. 17. P. 229–251.
18. **Friesecke, G.** Existence theorem for solitary waves on lattices / G. Friesecke, J.A. Wattis // *Commun. Math. Phys.* 1994. V. 161. P. 391–418.
19. **Gallavotti, G.** The Fermi-Pasta-Ulam Problem. A Status Report // *Lecture Notes in Physics*. 2008. V. 728.
20. **Hinch, E.J.** The fragmentation of a line of ball by an impact / E.J. Hinch, S. Saint-Jean // *Proc. R. Soc. London. Ser. A*. 1999. V. 455. P. 3201–3220.
21. **Hoffman, A.** Counter-propagating two-soliton solutions in the Fermi-Pasta-Ulam lattice / A. Hoffman, C.E. Wayne // *Nonlinearity*. 2008. V. 21. P. 2911–2947.
22. **Hoffman, A.** Asymptotic two-soliton solutions in the Fermi-Pasta-Ulam model / A. Hoffman, C.E. Wayne // *J. Dyn. Diff. Equat.* 2009. V. 21. P. 343–351.
23. **Hoffman, A.** A simple proof of the stability of solitary waves in the Fermi-Pasta-Ulam model near the KdV limit / A. Hoffman, C.E. Wayne // *Fields Institute Communications*. 2013. V. 64. P. 185–192.
24. **Ilan, B.** Band-edge solitons, nonlinear Schrödinger (Gross-Pitaevskii) equations and effective media / B. Ilan, M. Weinstein // *Multiscale Model. Simul.* 2010. V. 8. P. 1055–1101.
25. **Iooss, G.** Travelling waves in the Fermi-Pasta-Ulam lattice // *Nonlinearity*. 2000. V. 13. P. 849–66.
26. **James G., Starosvetsky Y.** Breather solutions of the discrete p -Schrödinger equation, to appear in *Springer Series on Wave Phenomena* / G. James, Y. Starosvetsky.
27. **Ji, J.-Y.** Existence criterion of solitary waves in a chain of grains / J.-Y. Ji, J. Hong // *Phys. Lett. A*. 1999. V. 260. P. 60 – 61.
28. **Job, S.** Solitary wave trains in granular chains: Experiments, theory and simulations / S. Job, F. Melo, A. Sokolow, S. Sen // *Granular Matter*. 2007. V. 10. P. 13–20.
29. **Johnson, K.L.** Contact mechanics / K.L. Johnson. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
30. **Kalyakin, L.A.** Long wave asymptotics. Integrable equations as asymptotic limits of non-linear systems // *Russian Math. Surveys*. 1989. V. 44. P. 3–42.
31. **Kapitula, T.** A Hamiltonian – Krein (instability) index theory for KdV-like eigenvalue problems / T. Kapitula, A. Stefanov // *arXiv: 1210.6005*. 2012.
32. **Khatri, D.** Highly nonlinear solitary waves in chains of cylindrical particles / D. Khatri, D. Ngo, C. Daraio // *Granular Matter*. 2012. V. 14. P. 63–69.
33. **Liu, C.** Frictionless multiple impacts in multibody systems. I. Theoretical framework / C. Liu, Z. Zhao, B. Brogliato // *Proc. R. Soc. A-Math. Phys. Eng. Sci.* 2008. V. 464. P. 3193–3211.
34. **Liu, C.** Frictionless multiple impacts in multibody systems. II. Numerical algorithm and simulation results / C. Liu, Z. Zhao, B. Brogliato // *Proc. R. Soc. A-Math. Phys. Eng. Sci.* 2009. V. 465. P. 1–23.
35. **MacKay, R.S.** Solitary waves in a chain of beads under Hertz contact // *Phys. Lett. A*. 1999. V. 251. P. 191–192.
36. **Mielke, A.** Dispersive stability of infinite-dimensional Hamiltonian systems on lattices / A. Mielke, C. Patz // *Applicable Analysis*. 2010. V. 89. P. 1493–1512.
37. **Mizumachi, T.** Asymptotic stability of lattice solitons in the energy space // *Commun. Math. Phys.* 2009. V. 288. P. 125–144.
38. **Mizumachi, T.** N -Soliton States of the Fermi-Pasta-Ulam Lattices // *SIAM Journal of Mathematical Analysis*. 2011. V. 43. P. 2170–2210.
39. **Mizumachi, T.** Asymptotic Stability of N -Solitary Waves of the FPU Lattices // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2013. V. 207. P. 393–457.
40. **Nesterenko, V.F.** Propagation of nonlinear compression pulses in granular media // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 1983. V. 24. P. 733–743.
41. **Nesterenko, V.F.** Dynamics of heterogeneous materials / V.F. Nesterenko. – Berlin: Springer Verlag, 2001.
42. **Ngo, D.** Highly nonlinear solitary waves in chains of hollow spherical particles / D. Ngo, S. Griffiths, D. Khatri, C. Daraio // *Granular Matter*. 2013. DOI 10.1007/s10035-012-0377-5.

43. **Nguyen, N.-S.** Shock dynamics in granular chains: numerical simulations and comparison with experimental tests / N.-S. Nguyen, B. Brogliato // *Granular Matter*. 2012. V. 14. P. 341–362.
44. **Pankov, A.** Travelling waves and periodic oscillations in Fermi-Pasta-Ulam lattices / A. Pankov. – London: Imperial College Press, 2005.
45. **Pelinovsky, D.E.** Spectral stability of nonlinear waves in KdV-type evolution equations // Proceedings of the workshop “Spectral analysis, stability, and bifurcation in modern nonlinear physical systems” (January, 2013).
46. **Pelinovsky, D.** Justification of the coupled-mode approximation for a nonlinear elliptic problem with a periodic potential / D. Pelinovsky, G. Schneider // *Appl. Anal.* 2007. V. 86. P. 1017–1036.
47. **Pelinovsky, D.** Justification of the lattice equation for a nonlinear elliptic problem with a periodic potential / D. Pelinovsky, G. Schneider, R. MacKay // *Comm. Math. Phys.* 2008. V. 284. P. 803–831.
48. **Schneider, G.** Counter-propagating waves on fluid surfaces and the continuum limit of the Fermi-Pasta-Ulam model / G. Schneider, C.E. Wayne // In B. Fiedler, K. Gröger and J. Sprekels, editors, *International Conference on Differential Equations Appl.* 1998. V. 5(1). P. 69–82.
49. **Sekimoto, K.** Newton's cradle versus nonbinary collisions // *Phys. Rev. Lett.* 2010. V. 104. P. 124302.
50. **Stefanov, A.** On the existence of solitary traveling waves for generalized Hertzian chains / A. Stefanov, P.G. Kevrekidis // *J. Nonlinear Sci.* 2012. V. 22. P. 327–349.
51. **Sun, D.** Nonlinear repulsive force between two solids with axial symmetry / D. Sun, C. Daraio, S. Sen // *Phys. Rev. E.* 2011. V. 83. P. 066605.
52. **Sun, D.** Nonlinear grain-grain forces and the width of the solitary wave in granular chains : a numerical study / D. Sun, S. Sen // *Granular Matter*. 2013. V. 15. P. 157–161.

*Дата поступления
в редакцию 20.08.2013*

**D.E. Pelinovsky^{1,2}, A.R. Giniyatullin², Yu.A. Panfilova²,
E.G. Shurgalina², A.A. Rodin²**

ANALYTICAL APPROXIMATIONS OF SOLITARY WAVES IN GRANULAR CRYSTALS

Department of Mathematics and Statistics, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada¹,
Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev²

Purpose: To study dynamics of granular chains with strongly nonlinear potentials. To obtain a new modification of a Korteweg – de Vries equation, characterized by logarithmic nonlinearities. To find a family of its exact solutions in a form of Gaussian solitary waves and to prove their stability.

Scientific approach.: The study uses analytical and numerical methods.

Results: The Korteweg – de Vries equation with logarithmic nonlinearity is derived from the discrete Fermi – Pasta – Ulam equation with strongly nonlinear Hertz potentials. It is shown that Gaussian localized solutions of the Korteweg – de Vries equation give analytical approximations for strongly localized solitary waves in granular trains. The accuracy of analytical approximations is verified in spaces with fast decay at infinity. Spectral stability of Gaussian localized solutions in the framework of Korteweg – de Vries equation is proven. Boussinesq-type models with compact solutions, earlier formally derived in physical literature, are shown to be strongly unstable and ill-conditioned from the point of view of temporal dynamics, and their application is very limited in the problems concerning with solitary waves in granular trains.

Applications: The results can be applied to analysis of a response of a granular medium of different nature on a localized external forcing.

Key words: log-Korteweg-de Vries equation, solitary waves of the Gaussian shape, discrete Fermi-Pasta-Ulam equation, spectral stability.