

УДК 681.3.513

Е.А. Никулин

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРОБОСКОПИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Тема: исследование эффектов, возникающих при вращении объектов с циклической периодичностью строения, в условиях импульсного освещения, кино-, телесъемки и компьютерной анимации.

Цель: Получение формулы и построение графиков зависимости кажущейся частоты вращения от влияющих на нее величин.

Метод решения: использование модульной функции $\text{mod}(f,m)$.

Оригинальность: математически объяснены широко известные оптические иллюзии, называемые стробоскопическим эффектом.

Выводы: в работе всесторонне изучены свойства стробоскопического эффекта, возникающего при дискретной визуализации движущихся объектов.

Ключевые слова: вращение, частота, кадр, стробоскопический эффект.

Всем знаком оптический обман зрения, возникающий при просмотре фильма с движущимся автомобилем, велосипедом, вертолетом или вентилятором, когда кажется, что спицы колеса или лопасти пропеллера неподвижны (рис. 1, а) либо вращаются не с истинными скоростями и направлениями. Причина такого эффекта, называемого стробоскопическим, – временная дискретность визуализации движения, выхватывающая из непрерывной реальности отдельные кадры. Если за межкадровый промежуток времени объект, имеющий периодичность строения в направлении движения (рис. 1, б), перемещается в визуально идентичное состояние, то возникает ощущение его неподвижности. При небольшом разбалансе частоты смены кадров со скоростью движения начинает казаться, что объект медленно перемещается в положительном либо отрицательном направлениях. Стробэффект может возникать не только в кинематографе и телевидении, где частота кадров равна 24 Гц, но и в компьютерной анимации с гораздо большей частотой обновления экрана. Опасные для жизни и здоровья последствия эффекта возникают при освещении производственных помещений люминесцентными лампами с частотой мерцания 100 Гц, где может создаться ложное ощущение неподвижности обрабатывающих инструментов или острых лопастей вентилятора (рис. 1, в).



а)



б)



в)

Рис. 1. Стробоскопический эффект

Возьмем в качестве объекта изучения колесо с N спицами, равномерно распределенны-

ми по кругу с угловым шагом $\sigma = 2\pi/N$ (рад) (рис. 2, а). Обозначим частоту вращения колеса как f_b (Гц), а частоту кадров, фиксирующих его положение, как f_k (Гц). Поставим задачу вычисления *кажущейся частоты вращения* (КЧВ) колеса F (Гц) и ее зависимости от f_b, f_k и N .

В зависимости от соотношения между числом спиц и частотами вращения и фиксации возможны следующие случаи:

- иллюзия неподвижности вращающегося колеса объясняется совпадением (с точностью до нумерации) положения спиц на следующем кадре с их положением на предыдущем. Очевидно, что это всегда случится при повороте колеса за один кадр ровно на один оборот, т. е. на частоте вращения $f_b = f_k$. Если же в конструкцию колеса заложена циклическая периодичность, то минимальная частота его вращения, при которой КЧВ $F = 0$, составляет

$$f_0 = \frac{f_k}{N}. \quad (1)$$

На этой частоте колесо за один кадр поворачивается на угол σ (рис. 2, б). Оно также будет казаться неподвижным на всех кратных частотах $f_b = kf_0$, где k — целое число;

- на частотах $f_b = f_0/2 + kf_0$ непрономерованные спицы станут видны повернутыми на угол $\sigma/2$, а частота F разным наблюдателям может восприниматься как $f_0/2$, так и $-f_0/2$;
- при вращении колеса с частотой $f_b \in (0, f_0/2) + kf_0$ кажущийся угол поворота $\varphi \in (0, \sigma/2)$ (рис. 2, в) создаст ощущение положительной частоты вращения $F \in (0, f_0/2)$;
- на частоте $f_b \in (f_0/2, f_0) + kf_0$ угол поворота $\varphi \in (-\sigma/2, 0)$ и КЧВ $F \in (-f_0/2, 0)$ покажутся отрицательными (рис. 2, г).

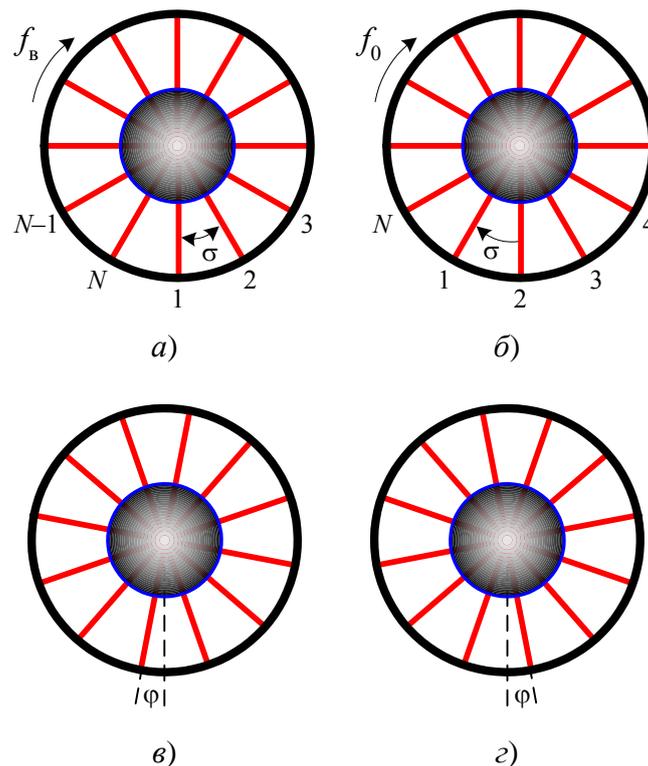
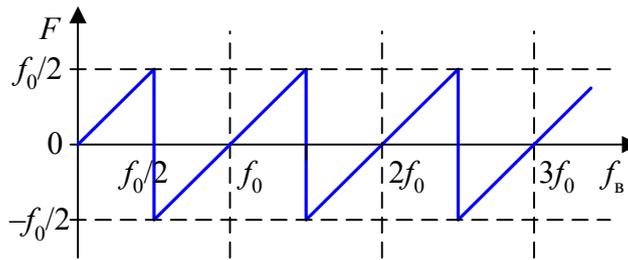


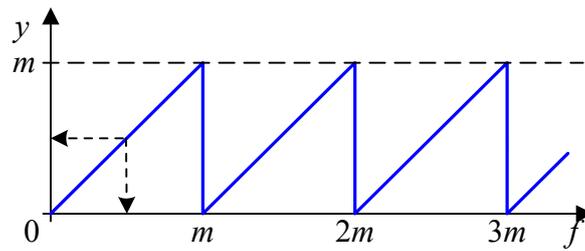
Рис. 2. Состояния вращающегося колеса

Таким образом, зависимость кажущейся частоты вращения F от истинной частоты f_b и определенной в (1) частоты покоя f_0 описывается графиком на рис. 3, а. Ее аналитическое выражение с периодом повторения f_0 может быть получено двумя сдвигами модульной функции $y(f, m) = \text{mod}(f, m)$, возвращающей остаток от деления f на m согласно графику на рис. 3, б, влево и вниз на $m/2$, где $m = f_0$:

$$F(f_B, f_K, N) = \text{mod}\left(f_B + \frac{f_K}{2N}, \frac{f_K}{N}\right) - \frac{f_K}{2N}. \quad (2)$$



а)



б)

Рис. 3. Кажущаяся частота и модульная функция

Рассмотрим для примера съемку колеса, имеющего $N = 12$ спиц (рис. 2), со скоростью $f_K = 24$ кадра в секунду. Пусть частота его вращения задана по (1) равной $f_B = 2$ Гц, тогда за полсекунды, т. е. за $f_K/2 = 12$ кадров, совершится полный оборот, а за один кадр колесо повернется на один угловой шаг $\sigma = 2\pi/N$ и возникает ощущение его неподвижности. При меньшей частоте вращения, например, $f_B = 1.5$ Гц колесо за кадр повернется вперед на угол 0.75σ , а покажется, что оно повернулось назад на -0.25σ , т. е. $F = -0.25f_B = -0.5$ (Гц). Такой же КЧВ получается и по (2): $F = \text{mod}(1.5 + 1, 2) - 1 = -0.5$ (Гц).

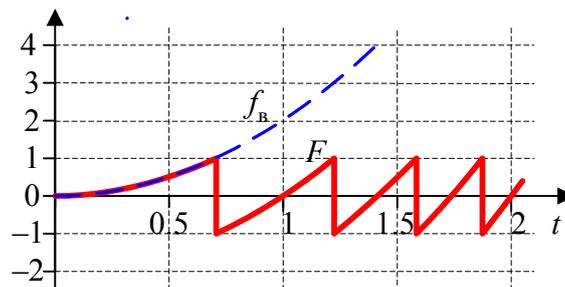
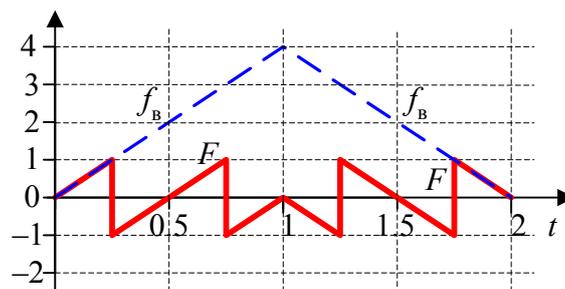


Рис. 4. Кажущаяся частота неравномерного вращения

Если скорость вращения не постоянна во времени, то будет казаться, что колесо, то разгоняясь, то тормозя, крутится то в одну, то в другую сторону, а иногда вообще останавливается. Это демонстрируют графики $F(t)$ на рис. 4, построенные по (2) при линейном и равноускоренном изменениях частоты вращения колеса $f_b(t)$. При каждом достижении частотой $f_b(t)$ значений kf_0 кажется, что колесо остановилось, а при пересечении ею уровней $f_0/2 + kf_0$ кажущееся направление вращения скачком изменяется на противоположное.

Исследуем зависимость (2) от двух других параметров, приняв фиксированные параметры $f_b = 2$ (Гц), $f_k = 24$ (Гц) и $N = 12$:

- с ростом частоты кадров f_k КЧВ ведет себя согласно графику на рис. 5,а. Скачкообразные изменения направления кажущегося вращения происходят на частотах f_k , удовлетворяющих условию

$$\text{mod}\left(f_b + \frac{f_k}{2N}, \frac{f_k}{N}\right) = 0 \Rightarrow f_b + \frac{f_k}{2N} = k \frac{f_k}{N} \Rightarrow f_k = \frac{2f_b N}{2k-1} \quad \forall k=1,2,3,\dots \quad (3)$$

Существует такая частота съемки, выше которой КЧВ совпадает с истинной частотой f_b . Она получается из (3) при $k = 1$: $f_1 = 2f_b N = 48$ (Гц). На других частотах $f_2 = f_1/3, f_3 = f_1/5, \dots$ происходит инверсия направления кажущегося вращения. На частотах съемки $f_k = f_b N / k = 24/k$ (Гц) при $k = 1, 2, 3, \dots$ возникает иллюзия неподвижного колеса. В пределе $f_k \rightarrow 0$ кадры следуют все реже и реже, из-за чего возникает ощущение, что вращение колеса останавливается;

- с ростом числа N КЧВ ведет себя согласно графику на рис. 5,б. Скачкообразные изменения направления кажущегося вращения происходят при N , удовлетворяющих условию

$$\text{mod}\left(f_b + \frac{f_k}{2N}, \frac{f_k}{N}\right) = 0 \Rightarrow f_b + \frac{f_k}{2N} = k \frac{f_k}{N} \Rightarrow N_k = \frac{(2k-1)f_k}{2f_b} \quad \forall k=1,2,3,\dots \quad (4)$$

Существует такое число N_1 , до которого кажущаяся F и истинная f_b частоты вращения колеса совпадают. Оно получается из (4) при $k = 1$: $N_1 = f_k / 2f_b = 6$. При других значениях $N_2 = 3N_1, N_3 = 5N_1, \dots$ происходит инверсия направления кажущегося вращения. У колес с числом спиц $N = kN_1 = 12k$ при $k = 1, 2, 3, \dots$ возникает иллюзия неподвижности. В пределе $N \rightarrow \infty$ спицы сливаются в сплошной круг, вращение которого неощутимо.

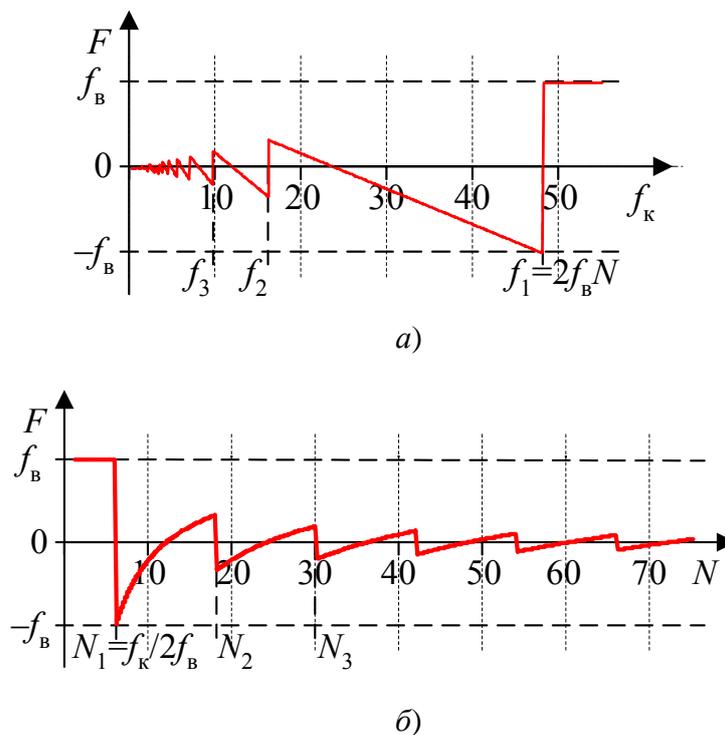


Рис. 5. Зависимости КЧВ от частоты кадров и числа спиц

Дата поступления
в редакцию 15.07.2013

E.A. Nikulin

STROBOSCOPE EFFECT SURVEY

Nyzhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

Subject: Surveying effects caused by revolution of objects with cyclic recurrence in an impulse illumination environment like filming or computer animation.

Purpose: Formalize and plot a dependence of imaginary rotation frequency against influencing factors.

Methodology: Utilization of a modulus function $\text{mod}(f,m)$.

Originality/value: Mathematical description of a widely known optical illusion, called a stroboscope effect, is obtained.

Findings: Deep investigation of stroboscope effect properties, caused by discrete visualization of moving objects, is accomplished.

Key words: rotation, frequency, frame, stroboscope effect.