

УДК 531.395

А.Ю. Панов, Д.А. Смирнов

АНАЛИЗ ИНЕРЦИОННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА РОТОРЫ СИЛОВЫХ ГИРОСКОПОВ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Проведено исследование инерционного воздействия на роторы силовых гироскопов, с учетом сложного характера его движения. Получены выражения для определения главного вектора и главного момента нормальных сил инерции в относительном движении, а также главного вектора и главного момента сил инерции Кориолиса. Представлена эпюра распределения сил инерции Кориолиса. Определено соотношение между нормальными силами инерции в относительном движении и силами инерции Кориолиса.

Ключевые слова: динамика силовых гироскопов, гироскопический момент, силы инерции Кориолиса.

Гироскопический эффект является одним из проявлений инерционных свойств материальных тел. Силовые гироскопы – это гироскопы с двумя степенями свободы, генерирующие гироскопические моменты сил, если их ось вращения принуждают к изменению направления в пространстве [4]. Гироскопические моменты могут достигать значительных величин, поэтому силовые гироскопы позволяют обеспечить управление подвижными объектами, а также их стабилизацию в пространстве [3]. Например, силовые гироскопы используются как стабилизаторы космических летательных аппаратов (КЛА) [5] и как устройства управления курсом судов [1, 4-7, 9, 10].

Применение силовых гироскопов для управления подвижными объектами требует внедрения современных методов их расчета на прочность [8], которые позволяют определять как форму и размеры роторов гироскопического устройства, так и безопасные режимы их эксплуатации.

Ротор гироскопического средства управления участвует в сложном движении. В соответствии с динамической теоремой Кориолиса [2] на ротор действуют силы инерции относительного и переносного движения, а также силы инерции Кориолиса [4]. Характер и интенсивность распределения этих сил определяют величину напряжений в роторе гироскопического средства управления. В связи с этим определение инерционного воздействия на роторы силовых гироскопов является актуальной задачей.

Рассмотрим движение ротора силового гироскопа (рис. 1). По отношению к системе отсчета, связанной с подвижным объектом $S_{хуз}$, поворот рамы гироскопа относительно оси прецессии S_y с угловой скоростью $\dot{\psi}$ (рис. 1) является переносным движением, вращение ротора относительно оси собственного вращения S_{z1} с угловой скоростью $\dot{\phi}$ – относительным движением. Используем принятые в теоретической механике обозначения: $\omega_e = \dot{\psi}$ – угловая скорость переносного движения (угловая скорость прецессии), $\omega_r = \dot{\phi}$ – угловая скорость относительного движения (угловая скорость собственного вращения) [2].

Проведем оценку сил инерции в относительном движении, действующих на ротор постоянного сечения. Выделим элемент ротора массой dm , образованный двумя кольцевыми сечениями радиусов r и $r + dr$ и двумя меридиональными сечениями с углом $d\phi$ (рис. 2). Как правило, роторы силовых гироскопов работают в установившемся режиме, то есть угловая скорость собственного вращения постоянна $\omega_r = \text{const}$. Поэтому на элемент маховика массой dm действуют только нормальная сила инерции, определяемая по формуле

$$dF_H^n = a_n dm, \quad (1)$$

где dm – масса элемента ротора; a_n – нормальное ускорение элемента.

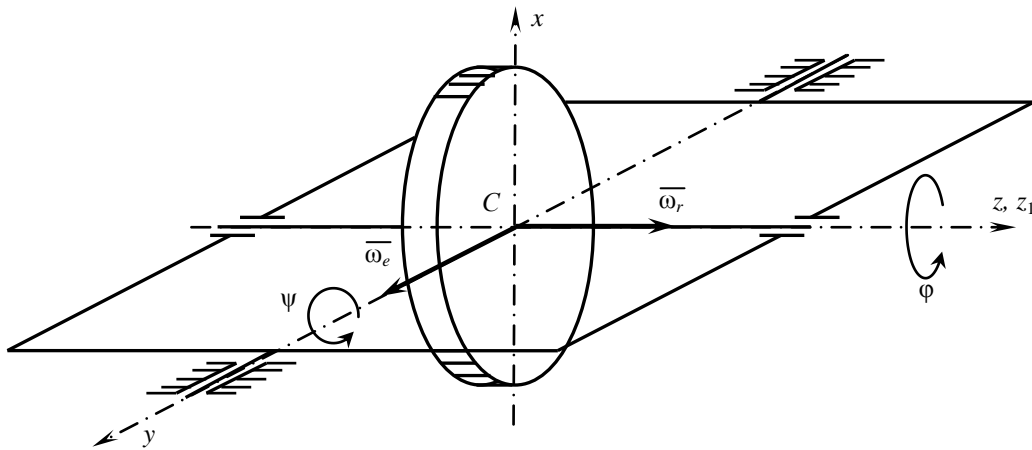


Рис. 1. Принципиальная схема силового гироскопа

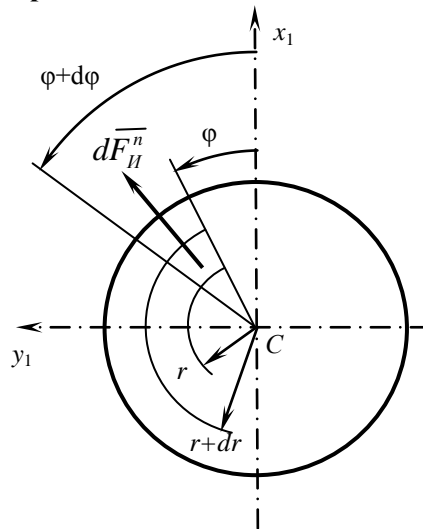


Рис. 2. Схема к определению нормальных сил инерции относительного движения

Массу dm определим по формуле

$$dm = \rho dV, \tag{2}$$

где dV - объем элемента ротора массой dm ; ρ - плотность материала ротора.

Определим объем dV по формуле

$$dV = hrd\varphi dr = hrdrd\varphi, \tag{3}$$

где h - толщина диска; r - радиус окружности, на которой распложен центр масс элемента; dr - высота элемента; $d\varphi$ - угол между меридиональными плоскостями, образовавшими элемент.

Нормальное ускорение элемента определяется формулой

$$a_n = \omega_r^2 r. \tag{4}$$

Подставляя выражения (2)–(4) в формулу (1) получим

$$dF_{II}^n = \rho h r d r d \varphi \omega_r^2 r. \tag{5}$$

Запишем выражения для проекции dF_{II}^n на оси координат Cx_1 и Cy_1 :

$$dF_{IIx_1}^n = dF_{II}^n \cos \varphi = \rho h r d r d \varphi \omega_r^2 r \cos \varphi = \rho h \omega_r^2 r^2 \cos \varphi d r d \varphi,$$

$$dF_{IIy_1}^n = dF_{II}^n \sin \varphi = \rho h r d r d \varphi \omega_r^2 r \sin \varphi = \rho h \omega_r^2 r^2 \sin \varphi d r d \varphi.$$

Дважды интегрируя по dr и $d\varphi$, получим выражения для проекций главного вектора нормальных сил инерции, действующих на элемент ротора, ограниченного радиусами r и r_0 , и плоскостями, проведенными под углами φ_0 и φ к оси Cx_1 :

$$F_{Ix_1}^n = \int_{r_0}^r \int_{\varphi_0}^{\varphi} dF_{Ix_1}^n = \int_{r_0}^r \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho h \omega_r^2 r^2 \cos \varphi dr d\varphi = \rho h \omega_r^2 \frac{r^3 - r_0^3}{3} (\sin \varphi - \sin \varphi_0), \quad (6)$$

$$F_{Iy_1}^n = \int_{r_0}^r \int_{\varphi_0}^{\varphi} dF_{Iy_1}^n = \int_{r_0}^r \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho h \omega_r^2 r^2 \sin \varphi dr d\varphi = \rho h \omega_r^2 \frac{r^3 - r_0^3}{3} (\cos \varphi - \cos \varphi_0). \quad (7)$$

Для диска постоянной толщины без отверстия ($r_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$) получим

$$F_{Ix_1}^n = \rho h \omega_r^2 \frac{r^3}{3} \sin \varphi, \quad (8)$$

$$F_{Iy_1}^n = \rho h \omega_r^2 \frac{r^3}{3} (\cos \varphi - 1). \quad (9)$$

Модуль главного вектора нормальных сил инерции определяется по формуле

$$F_{In}^n = \sqrt{(F_{Ix_1}^n)^2 + (F_{Iy_1}^n)^2} = \rho h \omega_r^2 \frac{r^3}{3} \sqrt{2(1 - \cos \varphi)}. \quad (10)$$

Так как инерционная нагрузка в относительном движении симметрична по отношению к осям гироскопа, главный момент нормальных сил инерции равен нулю.

Для определения инерционной нагрузки на ступенчатый диск переменной толщины (рис. 3), его условно можно разбить на N дисков постоянной толщины, определить по формулам (8), (9) и (10) инерционную нагрузку для каждой ступени, а затем найти сумму по формулам:

$$F_{Ix_1}^n = \frac{1}{3} \rho \omega_r^2 (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \sum_{i=0}^N h_{i+1} (r_{i+1}^3 - r_i^3), \quad (11)$$

$$F_{Iy_1}^n = \frac{1}{3} \rho \omega_r^2 (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \sum_{i=0}^N h_{i+1} (r_{i+1}^3 - r_i^3). \quad (12)$$

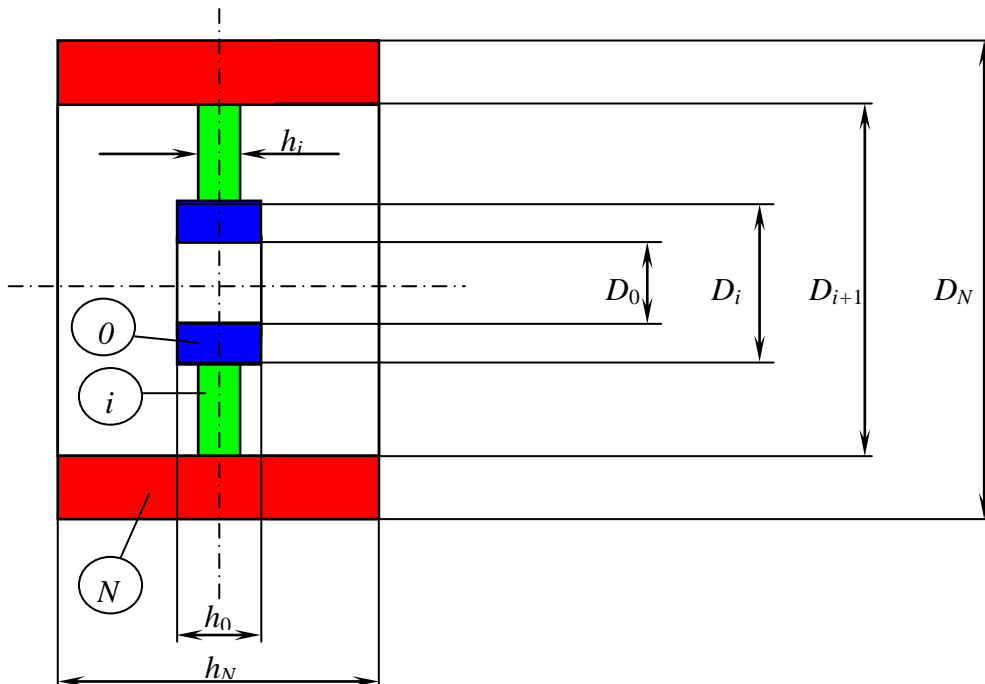


Рис. 3. Схема ступенчатого диска

Проведем оценку сил инерции Кориолиса. На каждый элемент массой dm (рис. 4) действует сила инерции Кориолиса, определяемая по формуле

$$dF_{II}^{cor} = a_{cor} dm, \tag{12}$$

где a_{cor} – ускорение Кориолиса.

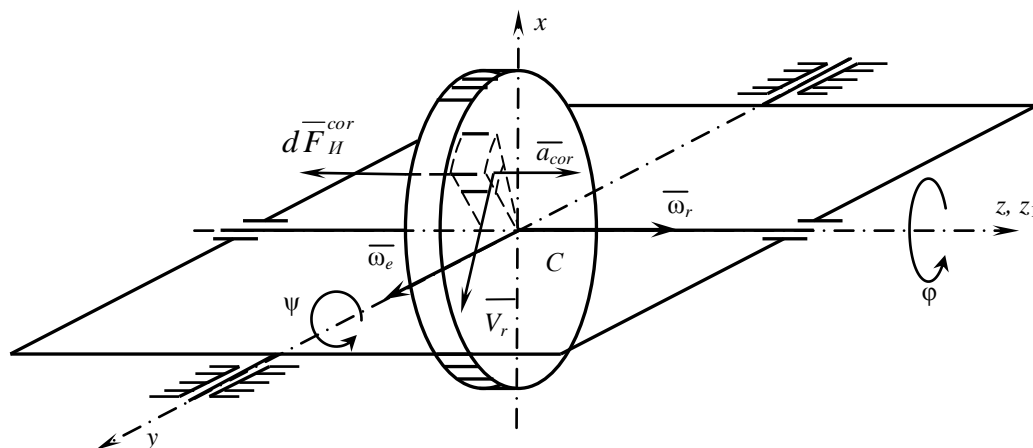


Рис. 4. Схема к определению сил инерции Кориолиса

Ускорение Кориолиса определяется по формуле

$$a_{cor} = 2\omega_e V_r \sin \alpha, \tag{13}$$

где V_r - относительная скорость; α - угол между вектором переносной угловой скорости $\bar{\omega}_e$ и вектором относительной скорости \bar{V}_r .

Относительная скорость определяется по формуле

$$V_r = \omega_r r. \tag{14}$$

Из геометрических соображений (рис. 4) имеем

$$\alpha = \varphi. \tag{15}$$

Учитывая выражения для dm (2) и dV (3) и подставляя (14), (15) в (13), получим

$$dF_{II}^{cor} = 2\rho h \omega_e \omega_r r^2 \sin \varphi dr d\varphi, \tag{16}$$

На рис. 5 представлен качественный вид распределения сил инерции Кориолиса в роторе силового гироскопа.

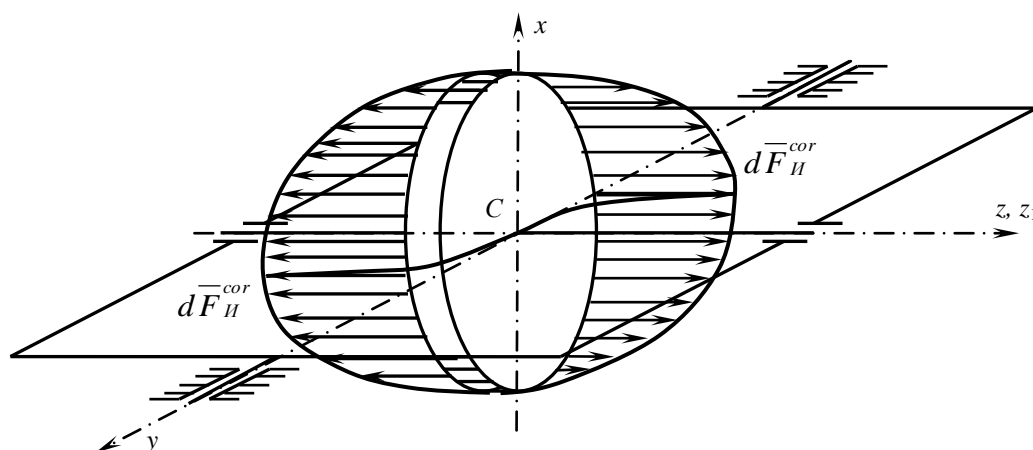


Рис. 5. Распределение сил инерции Кориолиса, действующих на ротор силового гироскопа

На рис. 6, а представлена эпюра распределения сил инерции Кориолиса по поперечному сечению ротора, выполненного в виде диска постоянной толщины без отверстия, вдоль оси Sy_1 ($\varphi = 0$).

Из рассмотрения развертки ротора в виде диска постоянной толщины без отверстия в диапазоне изменения φ от 0 до 2π , получим эпюру распределения сил инерции Кориолиса (рис. 6, б).

Дважды интегрируя по dr и $d\varphi$, получим величину главного вектора сил инерции Кориолиса, действующих на элемент ротора, ограниченного радиусами r и r_0 , и плоскостями, проведенными под углами φ_0 и φ к оси Sy_1 :

$$F_H^{cor} = \int_{r_0}^r \int_{\varphi_0}^{\varphi} dF_H^{cor} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \int_{r_0}^r 2\rho h \omega_r \omega_e r^2 \sin \varphi dr d\varphi = 2\rho h \omega_e \omega_r \frac{r^3 - r_0^3}{3} (\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

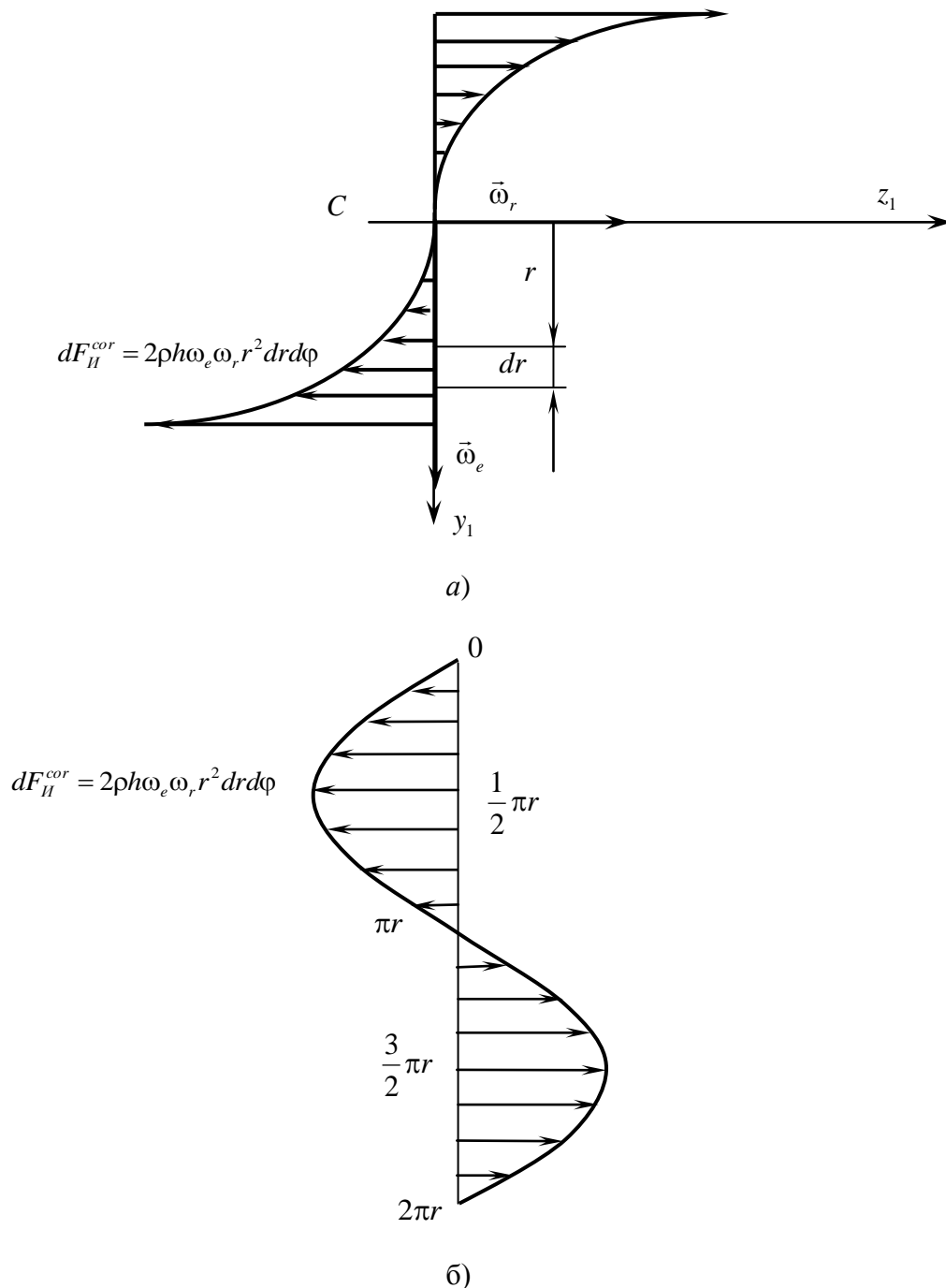


Рис. 6. Эпюры распределения сил инерции Кориолиса
а – эпюра по поперечному сечению ротора; б – развертка

Определим главный момент сил инерции Кориолиса относительно оси Cx . Момент силы инерции Кориолиса (рис. 4), действующий на массу dm относительно оси Cx , определяется формулой

$$dM_H^{cor} = dF_H^{cor} y = dF_H^{cor} r \sin \varphi, \quad (17)$$

Подставляя dF_H^{cor} , по формуле (16) получим

$$dM_H^{cor} = 2\rho h \omega_e \omega_r r^3 \sin^2 \varphi dr d\varphi.$$

Дважды интегрируя по dr и $d\varphi$, получим формулу для определения главного момента сил инерции Кориолиса, действующих на элемент ротора, ограниченного радиусами r и r_0 , и плоскостями, проведенными под углами φ_0 и φ к оси Cy_1 :

$$M_H^{cor} = \int_{r_0}^r \int_{\varphi_0}^{\varphi} dM_H^{cor} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \int_{r_0}^r 2\rho h \omega_r \omega_e r^3 \sin^2 \varphi dr d\varphi, \quad (18)$$

Интегрируя, получим

$$M_H^{cor} = \rho h \omega_r \omega_e \frac{r^4 - r_0^4}{4} \left(\varphi - \varphi_0 - \frac{1}{2} (\sin(2\varphi) - \sin(2\varphi_0)) \right). \quad (19)$$

Для однородного диска без отверстия радиуса R ($r = R$, $r_0 = 0$, $\varphi = 2\pi$, $\varphi_0 = 0$) получим

$$M_H^{cor} = \frac{1}{2} \rho h \omega_r \omega_e \pi R^4. \quad (20)$$

Формула (20) может служить для определения главного момента сил инерции Кориолиса.

Учитывая что $S = \pi R^2$ – площадь боковой поверхности ротора силового гироскопа, $V = hS = h\pi R^2$ – объем ротора силового гироскопа, $M = \rho V = \rho h\pi R^2$ – масса ротора силового гироскопа; $I_{z_1} = 1/2 MR^2 = 1/2 \rho h\pi R^4$ – момент инерции ротора силового гироскопа относительно оси собственного вращения Cz_1 , получим

$$M_H^{cor} = I_{z_1} \omega_r \omega_e.$$

Произведение $I_{z_1} \omega_r$ представляет собой кинетический момент ротора относительно оси собственного вращения Cz_1 :

$$K_{z_1} = I_{z_1} \omega_r.$$

Таким образом, окончательно получим

$$M_H^{cor} = \omega_e K_{z_1} = U,$$

где U – скорость вершины вектора кинетического момента K_{z_1} .

Момент сил инерции Кориолиса оказывает вращательное воздействие на раму гироскопа. Его называют гироскопическим моментом [4] и обозначают

$$M^{ГП} = M_H^{cor} = U.$$

Проведем сравнительную оценку интенсивности нормальных сил инерции относительного вращения dF_H^n и сил инерции Кориолиса dF_H^{cor} . Учитывая выражения (5) и (16), получим

$$\frac{dF_H^n}{dF_H^{cor}} = \frac{\rho h \omega_r^2 r^2 dr d\varphi}{2\rho h \omega_e \omega_r r^2 \sin \varphi dr d\varphi} = \frac{\omega_r}{2\omega_e \sin \varphi}. \quad (21)$$

При установившемся режиме работы силовых гироскопов угловая скорость собственного вращения ω_r значительно превышает угловую скорость прецессии ω_e . Следовательно, нормальные силы инерции в относительном движении являются определяющими, и в расчетах напряженно-деформированного состояния ротора влиянием сил инерции Кориолиса можно пренебречь.

Библиографический список

1. **Ишлинский, А.Ю.** Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация / А.Ю. Ишлинский – М.: Изд-во АН СССР, 1976. – 680 с.
2. **Лойцянский, Л.Г.** Курс теоретической механики / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. – М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1955. Т. 2.
3. **Павлов, В.А.** Гироскопический эффект, его проявления и использование / В.А. Павлов. – Л.: Судостроение, 1985. – 176 с.
4. **Панов, Ю.Л.** Относительное движение в механике. Инженерные задачи / Ю.Л. Панов, А.Ю. Панов; НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – Нижний Новгород, 2008. – 144 с.
5. А.с. № 1244018, СССР, МКИ В63Н 25/00. Способ управления курсом судна / А.Ю. Панов, Ю.Л. Панов / Заявл. 03.01.83, опубл. 15.07.86. Бюлл. № 26, 1986.
6. А.с. № 1449458, СССР, МКИ В63 25/00. Способ управления гироскопами курсом судна / А.Ю. Панов, Ю.Л. Панов // Заявл. 10.06.87., опубл. 07.01.89. Бюлл. № 1, 1989.
7. **Панов, А.Ю.** Гироскопическое устройство управления курсом судна / А.Ю. Панов, Ю.Л. Панов, Е.И. Шапкин // Проблемы создания новой техники для освоения шельфа: тез. докл. VI научно-технич. конф. – Горький: ГГУ, 1989. С. 114–115.
8. **Смирнов, Д.А.** Исследование напряженно-деформированного состояния роторов гироскопического устройства управления судном в автоматизированной системе конечно-элементного анализа. // Информационные технологии в учебном процессе: материалы всерос. научно-методич. конф. / НГТУ. – Н. Новгород, 2008. С. 171–175.
9. **Tadoo, S.** Гироскопическое рулевое устройство № 47-29918, заявка № 53-432, Япония, МКИ В63Н 25/00, НКИ 84 F3 от 25.03. 1972.
10. Pat. UK, IC В63Н 25/08, В7V, 1357896. Decl. 03.07.1970, publ. 26.06.1971 / Lithgow, W.L. Improvements in or relating to a ships steering.

*Дата поступления
в редакцию 04.12.2013*

A. Yu. Panov, D.A. Smirnov

**ANALYSES OF THE INERTIAL EFFECTS
ON THE ROTORS OF POWER GYROSCOPES**

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

Purpose: Study of the influence of the inertia forces on the dynamics of complex motion of rotors of power gyroscopes.

Design/methodology/approach: Expressions and formulas for the inertial forces in a figurative and relative motion, and Coriolis forces of inertia is determined by the methods of theoretical mechanics and mathematical modeling.

Findings: Defined expressions for the principal vector and principal moment of inertia forces in relative motion, as well as the principal vector and principal moment of inertia forces of the Coriolis. Presents plot of the distribution of the Coriolis forces of inertia. The relation between the forces of inertia in relative motion and Coriolis forces of inertia.

Research limitations/implications: The conclusion is that the normal forces of inertia in relative motion, are crucial for the analysis of stress-strain state of the rotor. The influence of Coriolis forces of inertia in such calculations can be neglected.

Originality/value: The results may be used for analysis of stress-strain state of rotors of power gyroscopes.

Key words: Dynamics of power gyroscopes, gyroscopic moment, Coriolis forces of inertia.