

УДК 531.395

Д.А. Смирнов

АНАЛИЗ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КУЛИСНОГО МЕХАНИЗМА

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Получены аналитические выражения для определения кинематических характеристик кулисного механизма. В качестве параметров в этих выражениях используются длины звеньев, а также координаты кинематических пар механизма. Представлены зависимости углов поворота кривошипа и кулисы от времени, а также их угловых скоростей и угловых ускорений. Определены выражения для скорости и ускорения кулисного камня, их проекций на оси координат. Приведены результаты решения для частной задачи и представлены графики зависимостей кинематических характеристик от времени.

Ключевые слова: кулисный механизм, кинематический анализ механизмов, кинематические зависимости.

В современных машинах применяется большое количество механизмов, которые могут быть приведены к кинематической схеме кулисного механизма [2, 4, 6]. В частности, к ним можно отнести механизмы с гидро- или пневмоцилиндрами, широко применяемые в грузоподъемных и других машинах. Кинематический анализ механизмов является первым этапом и необходимой предпосылкой расчета динамики машин [6].

В теории механизмов и машин используется несколько методов кинематического анализа. Наибольшее распространение получили метод векторных контуров, разработанный В.А. Зиновьевым [3], метод преобразования координат, развитый в работах Г.Ф. Морошкина [5], а также графические методы кинематического анализа плоских механизмов [2, 4, 6]. Графические методы в настоящее время имеют вспомогательное значение как средство для определения начальных положений звеньев или для контроля правильности вычислений [4]. Развитие аналитических методов кинематического анализа – актуальная задача в связи с совершенствованием современных средств автоматизированного анализа.

Целью данного исследования является определение закона движения точки A в координатной форме, зависимостей ее скорости и ускорения от времени, а также зависимостей углов поворота, угловых скоростей и угловых ускорений звеньев для кулисного механизма, кинематическая схема которого представлена на рис. 1.

В большинстве механизмов с гидро- и пневмоцилиндрами движение осуществляется за счет изменения расстояния S между точками A и O_2 . Поэтому задача сводится к определению углов поворота кривошипа φ_1 и кулисы φ_2 как функции расстояния S .

Обозначим x_1, y_1 и x_2, y_2 координаты кинематических пар O_1 и O_2 соответственно, а l_1 длину кривошипа OA . Выражая координаты точки A , получим

$$x_A = x_1 + l_1 \cos \varphi_1 = x_2 + S \cos \varphi_2, \quad (1)$$

$$y_A = y_1 + l_1 \sin \varphi_1 = y_2 + S \sin \varphi_2. \quad (2)$$

Преобразуем эти уравнения:

$$\cos \varphi_2 = a_1 + b_1 \cos \varphi_1, \quad (3)$$

$$\sin \varphi_2 = a_2 + b_1 \sin \varphi_1, \quad (4)$$

где

$$a_1 = \frac{x_1 - x_2}{S}, \quad a_2 = \frac{y_1 - y_2}{S}, \quad b_1 = \frac{l_1}{S}. \quad (5)$$

Возведем в квадрат, правые и левые части уравнений (3) и (4), и, сложив их, получим уравнение относительно угла φ_1

$$a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_1 = c_1, \quad (6)$$

где

$$c_1 = \frac{1 - a_1^2 - a_2^2 - b_1^2}{2b_1}. \quad (7)$$

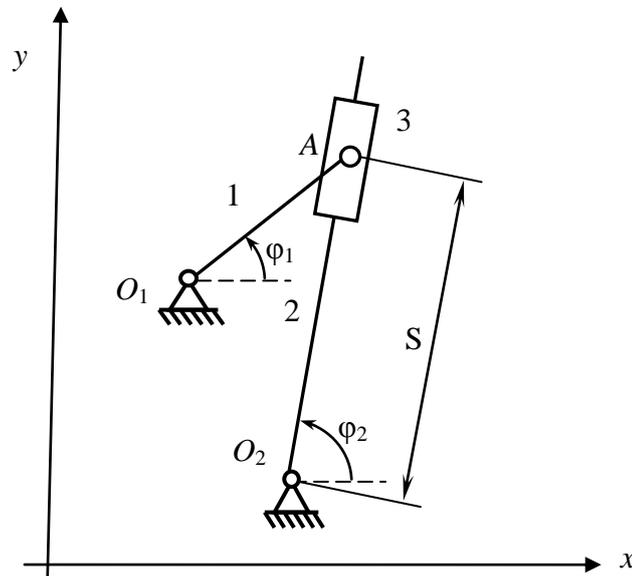


Рис. 1. Кинематическая схема механизма:
1 – кривошип; 2 – кулиса; 3 – кулисный камень

Уравнение (6) решается с помощью введения вспомогательного аргумента [1]. Разделим левую и правую часть уравнения на $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ и введем в рассмотрение угол β таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\sin \beta = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.$$

При этом угол β может быть выражен по одной из двух формул:

$$\beta = \arcsin \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad \beta = \arccos \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}. \quad (8)$$

Уравнение (6) принимает вид $\sin(\varphi_1 + \beta) = \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$.

Выражая φ_1 и учитывая (8), получим

$$\varphi_1 = -\arcsin \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} + (-1)^k \arcsin \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Принимая $k = 0$, получим выражение для φ_1

$$\varphi_1 = -\arcsin \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} + \arcsin \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.$$

Подставляя в полученное выражение зависимости (5) и (7), окончательно для φ_1 получим

$$\varphi_1 = -\arcsin \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} + \arcsin \frac{S^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - l_1^2}{2l_1 \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}. \quad (9)$$

Это выражение представляет зависимость угла поворота кривошипа φ_1 в виде функции расстояния S и координат кинематических пар O_1 и O_2 .

Для определения угловой скорости кривошипа ω_1 и углового ускорения ε_1 необходи-

мо задать зависимости $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$, $S = S(t)$, подставить их в выражение (9) и продифференцировать по времени:

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad \varepsilon_1 = \frac{d^2\varphi_1}{dt^2}.$$

Рассмотрим решение этой задачи в частном случае, когда кинематические пары O_1 и O_2 неподвижны. Тогда расстояние между кинематическими парами определится выражением

$$O_1O_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \text{const}. \quad (10)$$

Подставляя эту зависимость в соотношение (9), получим

$$\varphi_1 = -\arcsin \frac{x_1 - x_2}{O_1O_2} + \arcsin \frac{S^2 - (O_1O_2^2 + l_1^2)}{2l_1O_1O_2}. \quad (11)$$

Определим выражения для угловой скорости ω_1 и углового ускорения ε_1 кривошипа в рассматриваемом частном случае

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{2S}{\sqrt{4l_1^2O_1O_2^2 - (S^2 - (O_1O_2^2 + l_1^2))^2}} \frac{dS}{dt},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = A_1 \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 + B_1 \frac{d^2S}{dt^2},$$

где A_1 и B_1 определяются выражениями

$$A_1 = \frac{2 \left[\sqrt{4l_1^2O_1O_2^2 - (S^2 - (O_1O_2^2 + l_1^2))^2} + \frac{4S^2(S^2 - (O_1O_2^2 + l_1^2))}{\sqrt{4l_1^2O_1O_2^2 - (S^2 - (O_1O_2^2 + l_1^2))^2}} \right]}{4l_1^2O_1O_2^2 - (S^2 - (O_1O_2^2 + l_1^2))^2}, \quad (12)$$

$$B_1 = \frac{2S}{\sqrt{4l_1^2O_1O_2^2 - (S^2 - (O_1O_2^2 + l_1^2))^2}}. \quad (13)$$

Закон движения точки A в координатной форме имеет следующий вид:

$$x_A = l_1 \cos \varphi_1 = l_1 \cos \left(-\arcsin \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} + \arcsin \frac{S^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - l_1^2}{2l_1 \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \right), \quad (14)$$

$$y_A = l_1 \sin \varphi_1 = l_1 \sin \left(-\arcsin \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} + \arcsin \frac{S^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - l_1^2}{2l_1 \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \right). \quad (15)$$

Для частного случая, когда кинематические пары O_1 и O_2 неподвижны, уравнения (14) и (15) принимают вид

$$x_A = l_1 \cos \varphi_1 = l_1 \cos \left(-\arcsin \frac{x_1 - x_2}{O_1O_2} + \arcsin \frac{S^2 - (O_1O_2^2 + l_1^2)}{2l_1O_1O_2} \right),$$

$$y_A = l_1 \sin \varphi_1 = l_1 \sin \left(-\arcsin \frac{x_1 - x_2}{O_1O_2} + \arcsin \frac{S^2 - (O_1O_2^2 + l_1^2)}{2l_1O_1O_2} \right).$$

Скорость точки A , а также ее проекции на оси координат определяются следующими выражениями:

$$V_A = \omega_1 l_1 = \frac{2Sl_1}{\sqrt{4l_1^2O_1O_2^2 - (S^2 - (O_1O_2^2 + l_1^2))^2}} \frac{dS}{dt},$$

$$V_{Ax} = -V_A \sin \varphi_1 = \frac{2Sl_1 \sin \varphi_1}{\sqrt{4l_1^2O_1O_2^2 - (S^2 - (O_1O_2^2 + l_1^2))^2}} \frac{dS}{dt},$$

$$V_{Ay} = V_A \cos \varphi_1 = \frac{2Sl_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{4l_1^2 O_1 O_2^2 - (S^2 - (O_1 O_2^2 + l_1^2))^2}} \frac{dS}{dt},$$

где φ_1 определяется по формуле (11)

Ускорение точки A , а также его проекции на оси координат определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \vec{a}_A &= \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau, & a_A &= \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2}, \\ a_{Ax} &= a_{Ax}^n + a_{Ax}^\tau, & a_{Ay} &= a_{Ay}^n + a_{Ay}^\tau. \end{aligned}$$

где a_A^n , a_A^τ , a_{Ax}^n , a_{Ax}^τ , a_{Ay}^n , a_{Ay}^τ – нормальное и касательное ускорение точки A , а также их проекции на оси координат, которые определяются выражениями:

$$\begin{aligned} a_A^n &= \omega_1^2 l_1 = \frac{4S^2 l_1}{4l_1^2 O_1 O_2^2 - (S^2 - (O_1 O_2^2 + l_1^2))^2} \left(\frac{dS}{dt} \right)^2, \\ a_{Ax}^n &= -a_A^n \cos \varphi_1 = -\frac{4S^2 l_1 \cos \varphi_1}{4l_1^2 O_1 O_2^2 - (S^2 - (O_1 O_2^2 + l_1^2))^2} \left(\frac{dS}{dt} \right)^2, \\ a_{Ay}^n &= -a_A^n \sin \varphi_1 = -\frac{4S^2 l_1 \sin \varphi_1}{4l_1^2 O_1 O_2^2 - (S^2 - (O_1 O_2^2 + l_1^2))^2} \left(\frac{dS}{dt} \right)^2, \\ a_A^\tau &= \varepsilon_1 l_1 = \left(A_1 \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 + B_1 \frac{d^2 S}{dt^2} \right) l_1, \\ a_{Ax}^\tau &= -a_A^\tau \sin \varphi_1 = -\left(A_1 \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 + B_1 \frac{d^2 S}{dt^2} \right) l_1 \sin \varphi_1, \\ a_{Ay}^\tau &= a_A^\tau \cos \varphi_1 = \left(A_1 \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 + B_1 \frac{d^2 S}{dt^2} \right) l_1 \cos \varphi_1, \end{aligned}$$

где A_1 и B_1 определяются по (12) и (13).

Определим зависимость угла поворота кулисы φ_2 в виде функции расстояния S . Из уравнений (1) и (2) получим

$$\cos \varphi_1 = a_3 + b_2 \cos \varphi_2, \tag{16}$$

$$\sin \varphi_1 = a_4 + b_2 \sin \varphi_2, \tag{17}$$

где

$$a_3 = \frac{x_2 - x_1}{l_1}, \quad a_4 = \frac{y_1 - y_2}{l_1}, \quad b_2 = \frac{S}{l_1}. \tag{18}$$

Исключая угол φ_1 из системы уравнений (16) и (17), получим

$$a_3 \cos \varphi_2 + a_4 \sin \varphi_2 = c_2, \tag{19}$$

где

$$c_2 = \frac{1 - a_3^2 - a_4^2 - b_2^2}{2b_2}. \tag{20}$$

Решая уравнение (19) аналогично решению уравнения (6), получим

$$\varphi_2 = \arcsin \frac{a_3}{\sqrt{a_3^2 + a_4^2}} - \arcsin \frac{c_2}{\sqrt{a_3^2 + a_4^2}}.$$

Подставляя в это выражение зависимости (18) и (20), получим

$$\varphi_2 = \arcsin \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} - \arcsin \frac{l_1^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - S^2}{2S\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}.$$

Это выражение представляет зависимость угла поворота кулисы φ_2 в виде функции расстояния S и координат кинематических пар O_1 и O_2 .

Для определения угловой скорости кулисы ω_2 и углового ускорения ε_2 необходимо задать зависимости $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$, $S = S(t)$, подставить их в выражение (10) и продифференцировать по времени:

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}, \quad \varepsilon_2 = \frac{d^2\varphi_2}{dt^2}.$$

Рассмотрим решение этой задачи в частном случае, когда кинематические пары O_1 и O_2 неподвижны. Тогда расстояние между кинематическими парами определится выражением (11). Подставляя эту зависимость в соотношение (10), получим

$$\varphi_2 = \arcsin \frac{x_2 - x_1}{O_1O_2} - \arcsin \frac{l_1^2 - O_1O_2^2 - S^2}{2SO_1O_2}.$$

Определим выражения для угловой скорости ω_2 и углового ускорения ε_2 кулисы в рассматриваемом частном случае:

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{l_1^2 - O_1O_2^2 + S^2}{S\sqrt{4S^2O_1O_2^2 - (C - S^2)^2}} \frac{dS}{dt},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = A_2 \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 + B_2 \frac{d^2S}{dt^2},$$

где A_2 , B_2 и C определяются выражениями:

$$A_2 = \frac{2\sqrt{4S^4O_1O_2^2 - S^2(C - S^2)^2} + (C + S^2) \frac{16S^2O_1O_2^2 - 2(C - S^2) - 4S^2(C - S^2)}{\sqrt{4S^4O_1O_2^2 - S^2(C - S^2)^2}}}{4S^3O_1O_2^2 - S(C - S^2)^2},$$

$$B_2 = \frac{l_1^2 - O_1O_2^2 + S^2}{S\sqrt{4S^2O_1O_2^2 - (C - S^2)^2}},$$

$$C = l_1^2 - O_1O_2^2.$$

На рис. 2 – рис. 4 представлены зависимости кинематических характеристик звеньев механизма от времени. Задача решена при следующих исходных данных:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = 5 \text{ м}, \quad y_2 = -2 \text{ м}.$$

При этом закон относительного движения кулисного камня принят равномерным:

$$S = S_0 + Vt,$$

где $S_0 = 3,73$ м – расстояние между точками A и O_2 в начальный момент времени; $V = 1$ м/с – скорость скольжения кулисного камня по отношению к кулисе (относительная скорость).

Полученные зависимости позволяют определять кинематические характеристики звеньев механизма (углы поворота, угловые скорости и угловые ускорения) в произвольный момент времени, а также определять скорости и ускорения точек звеньев механизма. При этом должны быть известны длина кривошипа, координаты кинематических пар O_1 и O_2 , а также задан закон относительного движения кулисного камня S .

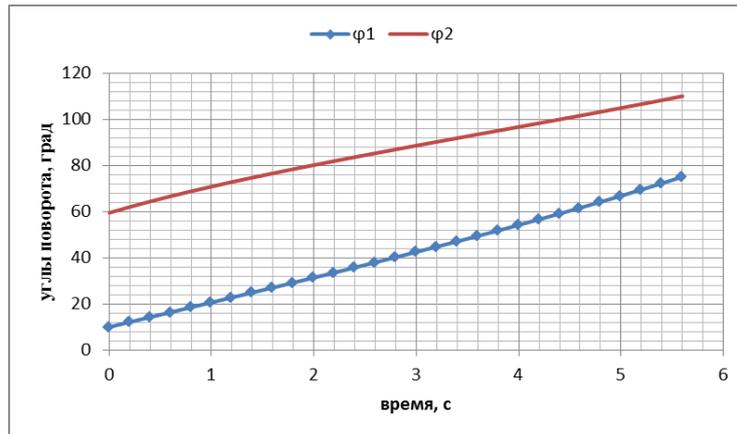


Рис. 2. Зависимости углов поворота от времени

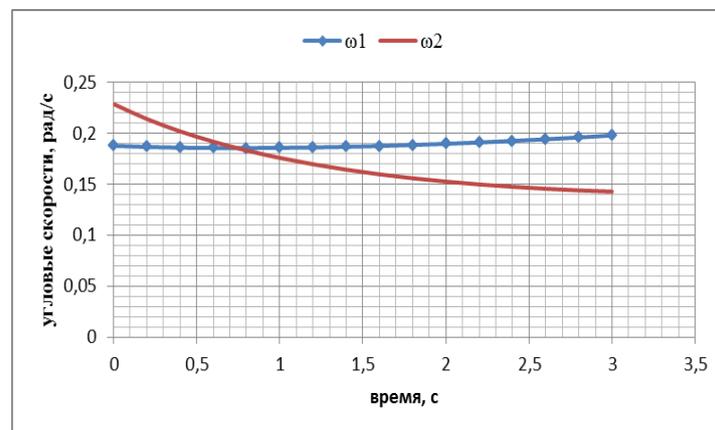


Рис. 3. Зависимости угловых скоростей от времени

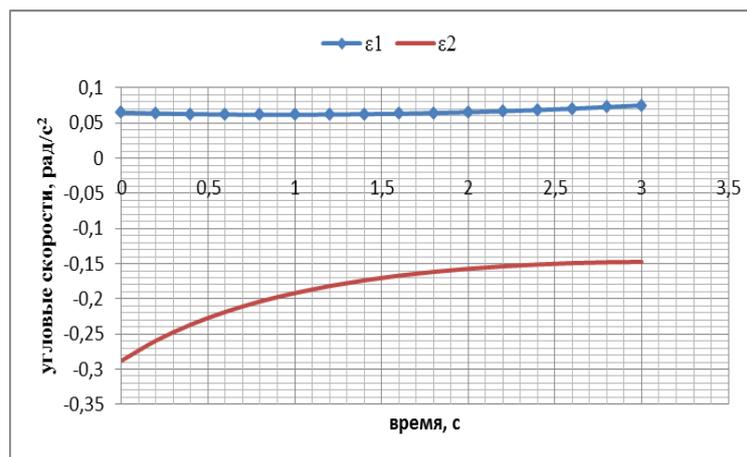


Рис. 4. Зависимости угловых ускорений от времени

Библиографический список

1. Тригонометрические уравнения: учеб. пособие / А.И. Азаров [и др.]. – Мн.: ООО «Тривиум», 1994. – 160 с.
2. Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 640 с.
3. Зиновьев, В.А. Теория механизмов и машин / В.А. Зиновьев – М.: Машгиз., 1959. – 144 с.

4. Левитская, О.Н. Курс теории механизмов и машин: учеб. пособие для мех. спец. вузов / О.Н. Левитская, Н.И. Левитский – М.: Высш. шк., 1985. – 279 с.
5. Морошкин, Г.Ф. Уравнения динамики простых систем с интегрируемыми связями / Г.Ф. Морошкин – М.: Наука, 1981. – 116 с.
6. Теория механизмов и машин. Курсовое проектирование: учеб. пособие / Г.А. Тимофеев [и др.]. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 169 с.

*Дата поступления
в редакцию 09.12.2013*

D.A. Smirnov

ANALYSIS OF THE KINEMATIC CHARACTERISTICS OF ROCKER MECHANISM

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

Purpose: Conclusion analytical dependencies for the kinematic characteristics of rocker mechanism.

Design/methodology/approach: For the determination of the time dependences for the rotation angle, angular velocity and angular acceleration links rocker mechanism, used methods of theoretical mechanics and mathematical analysis.

Findings: Defined time dependence of the rotation angle, angular velocity and angular accelerations and velocities and accelerations of the kinematic pairs rocker mechanism. Conducted the decision of the specific problem and presents the graphs of functional time dependences of the kinematic characteristics of the links in the mechanism.

Originality/value: The results may be used for creation of automated methods for kinematic analysis rocker mechanisms. The obtained dependences can find the rotation angle, angular velocity, angular acceleration and velocity and acceleration of kinematic pairs mechanism at a time. The obtained dependencies for the kinematic characteristics of the mechanism may also be used for forces analysis of the mechanism.

Key words: the rocker mechanism, the kinematic analysis of mechanisms, the dependence of the kinematic.